LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞLARI ÜZERİNE

Yalçın GİRGİN

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

ZONGULDAK
Haziran 2015

KABUL:

Yalçın GİRGİN tarafından hazırlanan "LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞLARI ÜZERİNE" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir. 22/06/2015

Başkan: Yrd. Doç. Dr. Melih GÖCEN
Bülent Ecevit Üniversitesi ....

Üye : Doç. Dr. Yüksel SOYKAN
Bülent Ecevit Üniversitesi ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ömer KİŞİ
Bartın Üniversitesi ....

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. ..../..../2015

Prof. Dr. Kemal BÜYÜKGÜZEL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Yalçın GİRGİN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞLARI ÜZERİNE

Yalçın GİRGİN

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Melih GÖCEN
Haziran 2015, 65 Sayfa

Bu tezde, lineer olmayan bazı ikinci dereceden rasyonel fark denklemlerinin çözümlerinin asimptotik davranışları ve trichotomy karakteri incelenmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tez boyunca gerekli olan bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, $x_{n+1} = \frac{\gamma x_{n-1}}{A+x_n}$ ve $x_{n+1} = \frac{\alpha+\gamma x_{n-1}}{A+x_n}$ fark denklemlerinin asimptotik davranışları incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, $x_{n+1} = \frac{\alpha x_n+\beta x_{n-1}}{A+x_n}$ tekrarlı dizisinin çözümlerinin periyodikliği, kararlılığı ve sınırlılığı gösterilmiştir.

ÖZET (devam ediyor)

Dördüncü bölümde, $x_{n+1} = \frac{\alpha+\beta x_n+\gamma x_{n-1}}{A+x_n}$ ikinci dereceden rasyonel fark denkleminin çözümlerinin periyodikliği, yakınsaklık davranışı, kararlılığı ve sınırlılığı incelenmiştir. Ayrıca, $x_{n+1} = \frac{\alpha+\beta x_n+\gamma x_{n-1}}{A+x_n}$ fark denkleminin çözümlerinin trichotomy karakterini sağlayan durumlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fark denklemleri, sınırlılık, denge noktası, kararlılık, lokal asimptotik kararlılık, global asimptotik kararlılık.

Bilim Kodu: 403.03.01

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON THE BEHAVIOUR OF THE SOLUTIONS OF NONLINEAR DIFFERENCE EQUATIONS

Yalçın GİRGİN

Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Asst. Prof. Melih GÖCEN

June 2015, 65 Pages

In this thesis, we investigate the asymptotic behaviours and thricotomy character of solutions of some nonlinear second order rational difference equations.

This thesis consists of four chapters.

In Chapter 1, we give some basic definitions and theorems needed through out this thesis.

In Chapter 2, we investigate the asymptotic behaviour of the difference equations $x_{n+1} = \frac{\gamma x_{n-1}}{A+x_n}$ and $x_{n+1} = \frac{\alpha+\gamma x_{n-1}}{A+x_n}$.

In Chapter 3, we show the periodicity, stability and boundedness of solutions of the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha x_n+\beta x_{n-1}}{A+x_n}$.

ABSTRACT (continued)

In Chapter 4, we investigate the periodicity, convergence behaviour, stability and the boundedness of the second order rational difference equation $x_{n+1} = \frac{\alpha+\beta x_n+\gamma x_{n-1}}{A+x_n}$. Furthermore we give the conditions of providing the trichotomy character of the solutions of the difference equation $x_{n+1} = \frac{\alpha+\beta x_n+\gamma x_{n-1}}{A+x_n}$.

Key Words: Difference equations, boundedness, equilibrium point, stability, local asymptotic stability, global asymptotic stability.

Science Code: 403.03.01

TEŞEKKÜR

Tezin hazırlanmasında ve yazılması sırasındaki tüm çalışmalarımı özenle takip eden, çalışmam için motivasyonumu arttıran ve desteğini esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Melih Göcen'e (BEÜ), tez konusunun seçiminden itibaren değerli zamanını bana ayıran Doç. Dr. Yüksel Soykan'a (BEÜ) öncelikli teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, yardım ve desteklerini sunan arkadaşlarım Gülzade Karacı, İnci Okumuş, Miraç Güneysu, Özge Bayrak, Çağatay Uysal ve Furkan Karaman'a özel teşekkürlerimi iletirim.

Bunun yanı sıra bana maddi ve manevi destek olan başta babam Muzaffer Girgin olmakla birlikte aileme de sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, hayatımdaki sevdiğim ve değer verdiğim insan olan Betül Kaymak'a bana olan manevi desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Beni dünyaya getiren, büyüten ve karşılıksız sevgi veren en yüce makamdaki sevgili annem Selma Girgin anısına...

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

BÖLÜM 1

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tez boyunca gerekli olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Bu kısımda Camouzis and Ladas (2008), Kulenovic and Ladas (2002), Amleh et al. (2008), Gibbons et al. (2002) kaynaklarından yararlanılmıştır.

1.1 KARARLILIK TANIMLARI

I reel sayıların bir aralığı ve $f : I^{k+1} \to I$ sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $(k+1)$ inci mertebeden bir fark denklemi

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k}), \qquad n = 0, 1, ... \tag{1.1}$$

formunda bir denklemdir.
(1.1) denkleminin bir çözümü her $n \geq -k$ için (1.1) denklemini sağlayan bir $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisidir.

Lemma 1.1.1 *x_{-k}, $x_{-k+1}, ...,$ $x_0 \in I$ başlangıç koşullarının her kümesi için, (1.1) fark denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.*

Yukarıdaki lemmanın bir özel durumu olarak, $x_0, x_{-1} \in I$ başlangıç koşullarının her kümesi için,

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \qquad n = 0, 1, ... \tag{1.2}$$

ikinci dereceden fark denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne sahiptir ve $x_0, x_{-1}, x_{-2} \in I$ başlangıç koşullarının her kümesi için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}), \qquad n = 0, 1, ... \tag{1.3}$$

üçüncü dereceden fark denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 1.1.2 *(1.1) denkleminin bir çözümü yani her $n \geq -k$ için sabit olan (1.1) denkleminin bir çözümüne (1.1) denkleminin bir denge çözümü denir. Her $n \geq -k$ için*

$$x_n = \overline{x}$$

ise (1.1) denkleminin bir denge çözümüdür, o zaman $\overline{x}$ bir denge noktası olarak adlandırılır.

Ayrıca $\overline{x}$ noktasına f fonksiyonunun bir sabit noktası denir.
Dolayısıyla $\overline{x} \in I$ noktası

$$\overline{x} = f(\overline{x}, \overline{x}, ..., \overline{x})$$

ise (1.1) denkleminin bir denge noktası olarak adlandırılır yani $n \geq -k$ için

$$x_n = \overline{x}$$

(1.1) denkleminin bir çözümüdür..

Tanım 1.1.3 (Kararlılık) *$\overline{x}$, (1.1) denkleminin bir denge noktası olsun.*
(a) Her $\varepsilon > 0$ için $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$, (1.1) denkleminin bir çözümü olacak şekilde

$$|x_{-k} - \overline{x}| + |x_{1-k} - \overline{x}| + ... + |x_0 - \overline{x}| < \delta$$

olduğunda her $n \geq -k$ için

$$|x_n - \overline{x}| < \varepsilon$$

ifadesini sağlayan bir $\delta > 0$ varsa, (1.1) denkleminin bir $\overline{x}$ denge noktasına lokal kararlıdır denir.
(b) $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$, (1.1) denkleminin bir çözümü olacak şekilde

$$|x_{-k} - \overline{x}| + |x_{-k+1} - \overline{x}| + ... + |x_0 - \overline{x}| < \gamma$$

olduğunda

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$$

ifadesini sağlayan $\gamma > 0$ varsa, (1.1) denkleminin bir $\overline{x}$ denge noktasına lokal asimptotik kararlıdır denir.

(c) (1.1) denkleminin her $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ *çözümü için*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$$

oluyorsa (1.1) denkleminin bir $\overline{x}$ *denge noktasına global çekicidir denir.*
(d) (1.1) denkleminin bir $\overline{x}$ *denge noktasına, lokal kararlı ve bir global çekici ise global asimptotik kararlıdır denir.*
(e) (1.1) denkleminin bir $\overline{x}$ *denge noktasına, eğer lokal kararlı değil ise kararsızdır denir.*

1.2 LİNEERLEŞTİRİLMİŞ KARARLILIK ANALİZİ

f fonksiyonunun, $\overline{x}$ denge noktasının bazı açık komşuluklarında sürekli türevlenebilir olduğunu varsayalım. $i = 0, 1, ..., k$ için

$$q_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\overline{x}, \overline{x}, ..., \overline{x})$$

$f(u_0, u_1, ..., u_k)$ fonksiyonunun u_i 'ye göre (1.1) denkleminin $\overline{x}$ denge noktasında hesaplanan kısmi türevini göstersin.

Tanım 1.2.1

$$y_{n+1} = q_0 y_n + q_1 y_{n-1} + ... + q_k y_{n-k}, \;\; n = 0, 1, ... \tag{1.4}$$

denklemi, (1.1) denkleminin $\overline{x}$ *denge noktasındaki lineerleştirilmiş denklemi olarak adlandırılır ve*

$$\lambda^{k+1} - q_0\lambda^k - ... - q_{k-1}\lambda - q_k = 0 \tag{1.5}$$

denklemine, (1.4) denkleminin $\overline{x}$ *noktasındaki karakteristik denklemi denir.*
O halde

$$y_{n+1} = q_0 y_n + q_1 y_{n-1}, \quad n = 0, 1, ... \tag{1.6}$$

denklemi, $\overline{x}$ *denge noktasında (1.2) denklemi ile ilişkili olan lineerleştirilmiş denklemdir ve*

$$\lambda^2 - q_0\lambda - q_1 = 0$$

denklemi, (1.6) denkleminin $\overline{x}$ *noktasındaki karakteristik denklemidir.*

Ayrıca,

$$y_{n+1} = q_0 y_n + q_1 y_{n-1} + q_2 y_{n-2}, \quad n = 0, 1, ... \tag{1.7}$$

denklemi $\overline{x}$ *denge noktasında (1.3) denklemiyle ilgili olan lineerleştirilmiş denklemdir ve*

$$\lambda^3 - q_0\lambda^2 - q_1\lambda - q_2 = 0$$

denklemi, (1.7) denkleminin $\overline{x}$ *noktasındaki karakteristik denklemidir.*

Lineerleştirilmiş Kararlılık Teoremi olarak bilinen aşağıdaki sonuç, (1.1) denkleminin $\overline{x}$ denge noktasındaki lokal kararlılık karakterini belirlemede çok kullanışlıdır.

Teorem 1.2.2 (Lineerleştirilmiş Kararlılık Teoremi) *f fonksiyonunun,* $\overline{x}$ *denge noktasının bazı açık komşuluklarında tanımlı olan sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olduğunu varsayalım. O halde aşağıdaki ifadeler doğrudur:*
(a) (1.5) denkleminin tüm kökleri mutlak değerce birden küçük olduğunda (1.1) denkleminin $\overline{x}$ *denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.*
(b) (1.5) denkleminin en az bir kökü mutlak değerce birden büyük ise o halde (1.1) denkleminin $\overline{x}$ *denge noktası kararsızdır.*

Eğer (1.5) denkleminin mutlak değerce bire eşit hiçbir kökü yoksa (1.1) denkleminin $\overline{x}$ denge noktası *hiperbolik* olarak adlandırılır. Eğer (1.5) denkleminin mutlak değerce bire eşit bir kökü varsa, o halde $\overline{x}$ denge noktası *hiperbolik olmayan* olarak adlandırılır.
(1.5) denkleminin tüm kökleri mutlak değerce birden büyükse, (1.1) denkleminin bir $\overline{x}$ denge noktasına *püskürtücüdür* denir.
Teorem 1.2.2 'nin bir özel durumu olarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 1.2.3 *(a) (1.6) 'nın*

$$\lambda^2 - q_0\lambda - q_1 = 0$$

karakteristik denkleminin (ikinci derece denklem) her bir kökü $|\lambda| < 1$ *açık birim diskinin içinde kalıyorsa, o zaman (1.2) denkleminin* $\overline{x}$ *denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.*
(b) (1.7) 'nin

$$\lambda^3 - q_0\lambda^2 - q_1\lambda - q_2 = 0$$

karakteristik denkleminin (üçüncü derece denklem) tüm kökleri $|\lambda| < 1$ *açık birim diskinin içinde kalıyorsa, o halde (1.3) denkleminin* $\overline{x}$ *denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.*

Aşağıdaki iki teorem sırasıyla iki ya da üçüncü dereceden gerçel polinomun mutlak değeri birden küçük olan tüm kökleri için gerek ve yeter koşulunu ifade eder.

Teorem 1.2.4 *Varsayalım ki* a_1 *ve* a_0 *reel sayılar olsun. O halde*

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

denkleminin tüm köklerinin birim diskin içinde kalması için gerek ve yeter koşul

$$|a_1| < 1 + a_0 < 2$$

dir.

Teorem 1.2.5 *Varsayalım ki* a_2, a_1 *ve* a_0 *reel sayılar olsun. O halde*

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

denkleminin tüm köklerinin birim diskin içinde kalması için gerek ve yeter koşul

$$|a_2 + a_0| < 1 + a_1, \quad |a_2 - 3a_0| < 3 - a_1 \quad \textit{ve} \quad a_0^2 + a_1 - a_0a_2 < 1$$

dir.

Teorem 1.2.6 (Clark Teoremi) *Varsayalım ki*

$$|q_0| + |q_1| + ... + |q_k| < 1$$

olacak şekilde $q_0, q_1, ..., q_k$ *reel sayılar olsun. O halde (1.5) denkleminin tüm kökleri birim diskin içinde kalır.*

(1.2) denkleminin $\overline{x}$ denge noktasında hesaplanan $f(u,v)$ 'nin kısmi türevlerini

$$s = \frac{\partial f}{\partial u}(\overline{x}, \overline{x}) \quad \text{ve} \quad t = \frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}, \overline{x})$$

şeklinde gösterelim.

$$y_{n+1} = sy_n + ty_{n-1}, \quad n = 0, 1, ... \tag{1.8}$$

denklemine $\overline{x}$ denge noktasında (1.2) denklemine bağlı lineerleştirilmiş denklem denir.

Teorem 1.2.7

(a)

$$\lambda^2 - s\lambda - t = 0 \tag{1.9}$$

ikinci dereceden denkleminin her iki kökü de $|\lambda| < 1$ açık diskinin içinde kalıyorsa, o halde (1.2) denkleminin $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(b) (1.9) denkleminin mutlak değerce birden büyük en az bir kökü varsa, o halde (1.2) denkleminin $\overline{x}$ denge noktası kararsızdır.

(c) (1.9) denkleminin her iki kökünün $|\lambda| < 1$ açık diskinin içinde kalması için gerek ve yeter koşul,

$$|s| < 1 - t < 2 \tag{1.10}$$

olmasıdır. Bu durumda lokal asimptotik kararlı $\overline{x}$ denge noktası aynı zamanda bir emicidir.

(d) (1.9) denkleminin mutlak değerce birden büyük en az bir kökü olması için gerek ve yeter koşul

$$|t| > 1 \quad \text{ve} \quad |s| < |1 - t|$$

olmasıdır. Bu durumda $\overline{x}$ denge noktası bir püskürtücüdür.

(e) (1.9) denkleminin bir kökünün mutlak değerce birden büyük, diğer kökünün de mutlak değerce birden küçük olması için gerek ve yeter koşul

$$s^2 + 4t > 0 \quad \text{ve} \quad |s| > |1 - t|$$

olmasıdır. Bu durumda kararsız $\overline{x}$ denge noktası bir eyer noktasıdır.

Düzlemde Kararlı Manifold Teorem olarak adlandırılan aşağıdaki teorem, $\overline{x}$ 'nın eyer noktası dengesi olduğunun önemini açıklar.

Teorem 1.2.8 (Düzlemde Kararlı Manifold Teorem) $T : [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ *bir difeomorfizma olsun, yani, T terside sürekli türevlenebilir olan bir sürekli türevlenebilir homeomorfizmadır.*

T 'nin sabit eyer noktası $p \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ olduğunu varsayalım. Yani, $T(p) = p$ ve Jakobiyen $J_T(p)$, $|s| < 1$ olacak şekilde bir s ve $|u| > 1$ olacak şekilde bir u özdeğerine sahiptir.

s ye karşılık gelen bir özvektör v_s ve u ya karşılık gelen bir özvektör de v_u olsun.
S, p 'nin kararlı bir manifoldu olsun, yani, S

$$q, T(q), T^2(q), ...$$

ileri iterasyonu p 'ye yakınsayan q başlangıç noktalarının bir kümesidir.
U, p 'nin kararsız bir manifoldu olsun, yani U, T 'nin tersi altında

$$q, T(q), T^2(q), ...$$

geri iterasyonu p 'ye yakınsayan q başlangıç noktalarının bir kümesidir. O halde S ve U, her biri p 'yi içeren bir boyutlu manifoldlardır (eğrilerdir). Ayrıca v_s ve v_u vektörleri p noktasında sırasıyla S ve U ya teğettir.

Teorem 1.2.9 $[a, b]$ *reel sayıların bir aralığı ve*

$$f : [a, b] \times [a, b] \to [a, b]$$

aşağıdaki özellikleri sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun:

(a) $f(x, y)$ fonksiyonu her bir değişkenine göre azalmayandır.
(b) $f(x, x) = x$
denklemi bir tek pozitif çözüme sahiptir.
O zaman (1.2) denklemi bir tek $\overline{x} \in [a, b]$ denge noktasına sahiptir ve (1.2) denkleminin her pozitif çözümü $\overline{x}$ denge noktasına yakınsar.

Teorem 1.2.10

$$f_0, f_1 \in C\left[[0, \infty) \times [0, \infty), [0, 1)\right]$$

olmak üzere negatif olmayan başlangıç koşullu

$$x_{n+1} = f_0\left(x_n, x_{n-1}\right) x_n + f_1\left(x_n, x_{n-1}\right) x_{n-1}, \quad n = 0, 1, ... \tag{1.11}$$

fark denklemini gözönüne alalım.
Varsayalım ki aşağıdaki hipotezler sağlansın:
(i) f_0 ve f_1 fonksiyonları her bir değişkenlerine göre artmayandır.
(ii) Her $x \geq 0$ için $f_0(x, x) > 0$ dır.
(iii) Her $x, y \in (0, \infty)$ için $f_0(x, y) + f_1(x, y) < 1$ dir.
O halde (1.11) denkleminin sıfır denge noktası global asimptotik kararlıdır.

Teorem 1.2.11 $[a, b]$ *reel sayıların bir aralığı olsun ve varsayalım ki*

$$f : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow [a, b]$$

aşağıdaki özellikleri sağlayan bir sürekli fonksiyon olsun:

(a) $f(x, y)$, $y \in [a, b]$ *'nin her biri için* $x \in [a, b]$ *içinde azalmayandır ve* $f(x, y)$ $x \in [a, b]$ *'nin her biri için* $y \in [a, b]$ *içinde artmayandır.*

(b) Eğer $(m, M) \in [a, b] \times [a, b]$

$$f(m, M) = m \quad \text{ve} \quad f(M, m) = M,$$

sisteminin bir çözümü ise o halde $m = M$ *dir.*

O halde (1.2) denklemi $\overline{x} \in [a, b]$ *şeklinde tek denge noktasına sahiptir ve (1.2) denkleminin her çözümü* $\overline{x}$ *dengesine yakınsar.*

Teorem 1.2.12 $[a, b]$ *reel sayıların bir aralığı olsun ve varsayalım ki*

$$f : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow [a, b]$$

aşağıdaki özellikleri sağlayan bir sürekli fonksiyon olsun:

(a) $f(x, y)$, $y \in [a, b]$ *'nin her biri için* $x \in [a, b]$ *içinde artmayan ve* $f(x, y)$ $x \in [a, b]$ *'nin her biri için* $y \in [a, b]$ *içinde azalmayandır.*

(b) (1.2) fark denklemi $[a, b]$ *aralığında asal iki periyotlu çözüme sahip değildir.*

O halde (1.2) denklemi $\overline{x} \in [a, b]$ *şeklinde tek denge noktasına sahiptir ve (1.2) denkleminin her çözümü* $\overline{x}$ *dengesine yakınsar.*

Teorem 1.2.13 $[a, b]$ *reel sayıların bir aralığı olsun ve varsayalım ki*

$$f : [a, b] \times [a, b] \to [a, b]$$

sürekli fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlasın.

(a) $f(x, y)$ *fonksiyonu her bir* $y \in [a, b]$ *için* $x \in [a, b]$ *'de artmayan ve* $f(x, y)$ *fonksiyonu her bir* $x \in [a, b]$ *için* $y \in [a, b]$ *'de azalmayandır.*

(b) (1.2) fark denklemi $[a, b]$ *aralığında hiçbir asıl iki periyotlu çözüme sahip değildir.*

O halde (1.2) denklemi $\overline{x} \in [a, b]$ *tek denge noktasına sahiptir ve (1.2) denkleminin her çözümü* $\overline{x}$ *'e yakınsar.*

Bir sonraki teoremimizde her bir değişkenine göre monoton olan $f(z_1, z_2)$ fonksiyonu ile ilgili aşağıdaki notasyonları kullanacağız.

Her biri çift sayılar olan (m, M) ve her bir $i \in \{1, 2\}$ için

$$M_i(m, M) = \begin{cases} M, & f\ ,\ z_i \text{ 'de artan ise} \\ m, & f\ ,\ z_i \text{ 'de azalan ise} \end{cases}$$

ve

$$m_i(m, M) = M_i(M, m)$$

tanımlarız.

Teorem 1.2.14 *Varsayalım ki* $f \in C\left([0,\infty)^2, [0,\infty)\right)$ *ve* $f(z_1, z_2)$*, ya* z_1 *ve* z_2 *'de kesin artan ya da* z_1 *and* z_2 *'de kesin azalan, veya* z_1 *'de kesin artan ve and* z_2 *'de kesin azalan olsun. Ayrıca, varsayalım ki her*

$$m \in (0, \infty) \text{ ve } M > m$$

için ya

$$[f(M_1(m, M), M_2(m, M)) - M][f(m_1(m, M), m_2(m, M)) - m] > 0$$

dır ya da

$$f(M_1(m, M), M_2(m, M)) = M \text{ ve } f(m_1(m, M), m_2(m, M)) = m$$

dir. O halde alttan ve üstten pozitif sabitle sınırlı olan (1.2) denkleminin her çözümü sonlu bir limite yakınsar.

Tanım 1.2.15 $\overline{x}$*, (1.2) denkleminin denge noktası olsun.* $l \geq -1$ *ve* $m \leq \infty$ *olmak üzere,* $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ *dizisinin her elemanı* $\overline{x}$ *denge noktasından büyük ya da eşit,*

$$l = -1 \text{ ya da } l > -1 \text{ için } x_{l-1} < \overline{x}$$

ve

$$m = \infty \text{ ya da } m < \infty \text{ için } x_{m+1} < \overline{x}$$

oluyorsa, $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ *dizisine* $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ *çözümünün bir pozitif yarı deviri denir. Benzer şekilde,* $l \geq -1$ *ve* $m \leq \infty$ *olmak üzere,* $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ *dizisinin her elemanı* $\overline{x}$ *denge noktasından küçük,*

$$l = -1 \text{ ya da } l > -1 \text{ için } x_{l-1} \geq \overline{x}$$

dır ve

$m = \infty$ *ya da* $m < \infty$ *için* $x_{m+1} \geq \overline{x}$

oluyorsa, $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ *dizisine* $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ *çözümünün bir negatif yarı deviri denir.*

Teorem 1.2.16 $f \in C\left[(0,\infty) \times (0,\infty), (0,\infty)\right]$ *fonksiyonunun,* y *sabit iken* x*'e göre azalan ve* x *sabit iken* y*'ye göre artan olduğunu varsayalım. Ayrıca* $\overline{x}$ *dengesi (1.2) denkleminin bir pozitif denge noktası olsun. O halde ilk yarı devir hariç (1.2) denkleminin her çözümü uzunluğu bir olan yarı devirlere sahiptir.*

Tanım 1.2.17 (Salınımlılık)

(a) Bir $\{x_n\}$ *dizisine, eğer* x_n *terimleri ya eninde sonunda pozitif ya da eninde sonunda negatif ise sıfır denge noktası civarında salınımlıdır ya da basitce salınımlıdır denir. Aksi taktirde dizi salınımlı değildir denir. Bir* $\{x_n\}$ *dizisine, eğer her* $n_0 \geq 0$ *için* $x_{n_1}x_{n_2} < 0$ *olacak şekilde* $n_1, n_2 \geq 0$ *varsa kesin salınımlıdır denir.*

(b) Bir $\{x_n\}$ *dizisine, eğer* $x_n - \overline{x}$ *dizisi salınımlı ise* $\overline{x}$ *denge noktası civarında salınımlıdır denir. Bir* $\{x_n\}$ *dizisine, eğer* $x_n - \overline{x}$ *dizisi kesin salınımlı ise* $\overline{x}$ *denge noktası civarında kesin salınımlıdır denir.*

BÖLÜM 2

BAZI İKİNCİ DERECEDEN RASYONEL FARK DENKLEM ÖRNEKLERİ

2.1 $x_{n+1} = \frac{\gamma x_{n-1}}{A+x_n}$ FARK DENKLEMİ

Bu kısımda Kulenovic and Ladas (2002) kaynağından yararlanılmıştır.

$$x_{n+1} = \frac{\gamma x_{n-1}}{A + x_n}, \ n = 0, 1, ... \tag{2.1}$$

denklemi

$$x_n = \gamma y_n$$

değişken değişimi ile

$$p = \frac{A}{\gamma} \in (0, \infty)$$

olacak şekilde

$$y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{p + y_n}, \ n = 0, 1, ... \tag{2.2}$$

fark denklemine indirgenir. (2.2) denklemi Gibbons et al. 'da (2000) araştırılmıştır.
(2.2) denklemine göre

$$\frac{\partial f}{\partial y_n} = \frac{-y_{n-1}}{(p + y_n)^2} = \frac{-(p + y_n)y_{n+1}}{(p + y_n)^2}$$

$$\frac{\partial f(\overline{y}, \overline{y})}{\partial y_n} = \frac{-(p + \overline{y})\overline{y}}{(p + \overline{y})^2} = \frac{-\overline{y}}{p + \overline{y}} = s$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} = \frac{(p + y_n)}{(p + y_n)^2} = \frac{1}{(p + y_n)}$$

$$\frac{\partial f(\overline{y}, \overline{y})}{\partial y_{n-1}} = \frac{1}{p + \overline{y}} = t$$

olduğundan (2.2) denkleminin $\overline{y}$ noktasındaki lineerleştirilmiş denklemi

$$z_{n+1} + \frac{\overline{y}}{p+\overline{y}} z_n - \frac{1}{p+\overline{y}} z_{n-1} = 0, \quad n = 0, 1, ...$$

dır.

Aşağıdaki yerel sonuç lineerleştirilmiş kararlılık teoreminin bir basit uygulamasıdır.

Lemma 2.1.1 *(a)*

$$p > 1$$

olduğunu farzedelim. O halde sıfır, (2.2) denkleminin tek denge noktasıdır ve lokal asimptotik kararlıdır.

(b)

$$p < 1$$

olduğunu varsayalım. O halde $\overline{y} = 0$ *ve* $\overline{y} = 1-p$ *(2.2) denkleminin tek denge noktalarıdır ve her ikisi de kararsızdır. Gerçekten, sıfır noktası püskürtücüdür ve* $\overline{y} = 1-p$*, eyer denge noktasıdır.*

İspat. (a) (2.2) denkleminin denge noktaları

$$\overline{y} = \frac{\overline{y}}{p+y}$$

denkleminin çözümleridir. O halde $p > 1$ olduğunda

$$(\overline{y})^2 + (p-1)\,\overline{y} = 0$$

denkleminin negatif kökü olamayacağından, tek denge noktası sıfırdır.

$p > 1$ olduğunda sıfır denge noktasını ele alırsak, lokal asimptotik kararlı olması için

$$|s| < 1 - t < 2$$

şartının sağlanması gerekir. Yani

$$\left|\frac{-\overline{y}}{p+\overline{y}}\right| < 1 - \frac{1}{p+\overline{y}} < 2$$

olmalıdır. O halde bu şartın sağlandığını iki durumda inceleyelim.

Durum 1. $\overline{y}=0$ alındığında

$$\frac{1}{p}>0$$

olduğu görülür, buradan

$$1-\frac{1}{p}<2$$

elde edilir.

Durum 2.

$$\left|\frac{-\overline{y}}{p+\overline{y}}\right|<1-\frac{1}{p+\overline{y}}$$

olduğunu göstermek için

$$\begin{aligned}\frac{1}{p+\overline{y}}-1 &< \frac{-\overline{y}}{p+\overline{y}}<1-\frac{1}{p+\overline{y}}\\ 1-p-\overline{y} &< -\overline{y}<p+\overline{y}-1\end{aligned}$$

$$1-p<0<p+2\overline{y}-1 \tag{2.3}$$

ifadesinin sağlanması gerekir. $\overline{y}=0$ alındığında ve ayrıca $p>1$ olduğundan (2.3) ifadesi sağlanır. O halde (2.2) denkleminin $\overline{y}=0$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(b) $p<1$ olduğunda

$$(\overline{y})^2+(p-1)\,\overline{y}=0$$

denklemi $\overline{y}=0$ ve $\overline{y}=1-p$ olacak şekilde köklere sahiptir.

$p<1$ olduğunda $\overline{y}=0$ denge noktasını incelersek

$$|t|=\left|\frac{1}{p+\overline{y}}\right|=\left|\frac{1}{p}\right|>1$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$|1-t|=\left|1-\frac{1}{p}\right|=\left|\frac{p-1}{p}\right|$$

ve

$$|s|=\left|\frac{-\overline{y}}{p+\overline{y}}\right|=0$$

olduğundan $p<1$ olmak üzere $|1-t|>|s|$ olduğunu buluruz. O halde (2.2) denkleminin $\overline{y}=0$ denge noktası püskürtücüdür.

$p < 1$ olduğunda $\overline{y} = 1 - p$ denge noktasını incelersek

$$\begin{aligned} s^2 + 4t &= \left(\frac{-\overline{y}}{p+\overline{y}}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{p+\overline{y}}\right) \\ &= (p-1)^2 + 4 > 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$|1-t| = \left|1 - \frac{1}{p+\overline{y}}\right| = 0$$

ve

$$\begin{aligned} |s| &= \left|\frac{-\overline{y}}{p+\overline{y}}\right| \\ &= |p-1| \end{aligned}$$

olduğundan $p < 1$ olmak üzere $|1-t| < |s|$ olduğunu buluruz. O halde (2.2) denkleminin $\overline{y} = 1 - p$ denge noktası eyer noktasıdır.

(2.2) denkleminin çözümlerinin salınımlılık karakteri Teorem (1.2.16) 'in sonucudur. Yani, muhtemelen ilk yarı devir hariç, (2.2) denkleminin her çözümü uzunluğu bir olan yarı devirlere sahiptir.

$n \geq 0$ için

$$y_{n+1} < \frac{1}{p} y_{n-1}$$

eşitsizliği (2.2) denkleminden direkt elde edilir ve bundan dolayı

$$p > 1$$

olduğunda (2.2) denkleminin sıfır dengesi global asimptotik kararlıdır. Diğer bir taraftan

$$p = 1$$

olduğunda $n \geq 0$ için

$$y_{n+1} < y_{n-1}$$

dir ve buradan (2.2) denkleminin her pozitif çözümü bir

$$..., \phi, \psi, \phi, \psi, ... \, .$$

2 periyotlu çözüme yakınsar. Ayrıca

$$\phi = \psi = 0$$

olacak şekilde çözümlerinin bulunması açık bir problem iken

$$\phi\psi = 0$$

olduğunu görürüz.
Sonuç olarak

$$p < 1$$

olduğunda Kararlı Manifold Teoreminden, $1-p$ pozitif denge noktası monoton yakınsayacak şekilde, salınımlı olmayan çözümlerinin olduğu görülebilir.

$$y_{n+1} - y_{n-1} = \frac{(1-p) - y_n}{p + y_n} y_{n-1}, \quad n = 0, 1, ...$$

özdeşliğinden, her salınımlı çözümün çift ve tek terimli alt dizilerinden biri ∞ 'a diğeri 0 'a monoton yakınsayacak şekilde olduğu elde edilir.

2.2 $x_{n+1} = \frac{\alpha + \gamma x_{n-1}}{A + x_n}$ FARK DENKLEMİ

Bu kısımda Kulenovic and Ladas (2002) kaynağından yararlanılmıştır.

$$x_n = Ay_n$$

değişken değişimi yapıldığında

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \gamma x_{n-1}}{A + x_n}, \ n = 0, 1, ... \tag{2.4}$$

denklemi

$$p = \frac{\alpha}{A^2} \quad \text{ve} \quad q = \frac{\gamma}{A}$$

olacak şekilde

$$y_{n+1} = \frac{p + qy_{n-1}}{1 + y_n}, \ n = 0, 1, ... \tag{2.5}$$

fark denklemine indirgenir. (2.5) denklemi Gibbons et al. 'da (2000) araştırılmıştır.

$$\overline{y} = \frac{p + q\overline{y}}{1 + \overline{y}}$$

$$\overline{y} + \overline{y}^2 = p + q\overline{y}$$

$$\overline{y}^2 + (1-q)\,\overline{y} - p = 0$$

bulunur. O halde (2.5) denkleminin tek denge noktası

$$\overline{y} = \frac{q-1+\sqrt{(q-1)^2+4p}}{2}$$

dir.

(2.5) denklemine göre

$$\frac{\partial f}{\partial y_n} = \frac{-\left(p+qy_{n-1}\right)}{\left(1+y_n\right)^2} = \frac{-(1+y_n)y_{n+1}}{\left(1+y_n\right)^2}$$

$$\frac{\partial f\left(\overline{y},\overline{y}\right)}{\partial y_n} = \frac{-\left(1+\overline{y}\right)\overline{y}}{\left(1+\overline{y}\right)^2} = \frac{-\overline{y}}{1+\overline{y}} = s$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} = \frac{q\left(1+y_n\right)}{\left(1+y_n\right)^2} = \frac{q}{\left(1+y_n\right)}$$

$$\frac{\partial f\left(\overline{y},\overline{y}\right)}{\partial y_{n-1}} = \frac{q}{1+\overline{y}} = t$$

olduğundan (2.5) denkleminin $\overline{y}$ noktasındaki lineerleştirilmiş denklemi

$$z_{n+1} + \frac{\overline{y}}{1+\overline{y}} z_n - \frac{q}{1+\overline{y}} z_{n-1} = 0, \quad n = 0, 1, ...$$

dır.

Aşağıdaki yerel sonuç lineerleştirilmiş kararlılık teoreminin bir basit uygulamasıdır.

Lemma 2.2.1 *(a) (2.5) denkleminin $\overline{y}$ denge noktası*

$$q < 1$$

olduğunda lokal asimptotik kararlıdır.

(b) (2.5) denkleminin $\overline{y}$ denge noktası

$$q > 1$$

olduğunda da kararsız eyer noktasıdır.

İspat. (a) $q < 1$ olduğunda $\overline{y}$ denge noktasını ele alırsak, lokal asimptotik kararlı olması için

$$|s| < 1 - t < 2$$

şartının sağlanması gerekir. Yani

$$\left|\frac{-\overline{y}}{1+\overline{y}}\right| < 1 - \frac{q}{1+\overline{y}} < 2$$

olmalıdır. O halde bu şartın sağlandığını iki durumda inceleyelim.

Durum 1.

$$\overline{y} = \frac{q-1+\sqrt{(q-1)^2+4p}}{2}$$

alındığında

$$\frac{q}{1+\overline{y}} = \frac{q}{1+\frac{q-1+\sqrt{(q-1)^2+4p}}{2}} > 0$$

olduğu görülür buradan

$$1 - \frac{q}{1+\overline{y}} < 2$$

elde edilir.

Durum 2.

$$\left|\frac{-\overline{y}}{1+\overline{y}}\right| < 1 - \frac{q}{1+\overline{y}}$$

olduğunu göstermek için

$$\begin{aligned}
\frac{q}{1+\overline{y}} - 1 &< \frac{-\overline{y}}{1+\overline{y}} < 1 - \frac{q}{1+\overline{y}} \\
q-1-\overline{y} &< -\overline{y} < 1+\overline{y}-q \\
q-1 &< 0 < 1+2\overline{y}-q
\end{aligned}$$

ifadesinin sağlanması gerekir.

$$\overline{y} = \frac{q-1+\sqrt{(q-1)^2+4p}}{2}$$

alındığında ve ayrıca $q < 1$ olduğundan

$$q-1 < 0 < \sqrt{(q-1)^2+4p}$$

ifadesi sağlanır. O halde (2.5) denkleminin $\overline{y} = \frac{q-1+\sqrt{(q-1)^2+4p}}{2}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(b) $q > 1$ olduğunda

$$\overline{y} = \frac{q-1+\sqrt{(q-1)^2+4p}}{2}$$

denge noktasını incelersek

$$s^2+4t = \left(\frac{-\frac{q-1+\sqrt{(q-1)^2+4p}}{2}}{1+\frac{q-1+\sqrt{(q-1)^2+4p}}{2}}\right)^2 + 4\left(\frac{q}{1+\frac{q-1+\sqrt{(q-1)^2+4p}}{2}}\right) > 0$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$|1-t| = \left|\frac{-q+1+\sqrt{(q-1)^2+4p}}{q+1+\sqrt{(q-1)^2+4p}}\right|$$

ve

$$|s| = \left|\frac{-q+1-\sqrt{(q-1)^2+4p}}{q+1+\sqrt{(q-1)^2+4p}}\right|$$

olduğundan $q > 1$ olmak üzere $|1-t| < |s|$ olduğunu buluruz. O halde (2.5) denkleminin $\overline{y} = \frac{q-1+\sqrt{(q-1)^2+4p}}{2}$ denge noktası kararsız eyer noktasıdır.
Asal iki periyotlu çözümle ilgili olarak, aşağıdaki sonuç Kulenovic and Ladas 'da (2002) verilmiştir.

Teorem 2.2.2 *(a) (2.5) denklemi*

$$..., \phi, \psi, \phi, \psi, ... \tag{2.6}$$

şeklinde asıl iki periyotlu çözümlere sahiptir ancak ve ancak

$$q = 1 \tag{2.7}$$

dir.
(b) Varsayalım ki (2.7) sağlansın. O halde asıl iki periyotlu (2.6) çözümlerinin ϕ ve ψ değerleri

$$\{\phi, \psi \in (0, \infty) : \phi\psi = p\}$$

olduğunu verir.
(c) Varsayalım ki (2.7) sağlansın. O zaman (2.5) denkleminin her çözümü iki periyotlu çözüme yakınsar.

2.2.1 Yarı Devir Analizi

(2.5) denkleminin çözümlerinin yarı devirleri üzerine sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.2.3 *$\{y_n\}$, (2.5) denkleminin bir aşikar olmayan çözümü olsun ve $\overline{y}$, (2.5) denkleminin tek pozitif dengesi olarak tanımlansın. O halde aşağıdaki durumlar doğrudur:*
(a) İlk yarı devirden sonra, (2.5) denkleminin bir $\{y_n\}$ salınımlı çözümü $\overline{y}$ denge noktası civarında uzunluğu bir olan yarı devirli salınımlıdır.
(b) $p \geq q$ olduğunu varsayalım. O halde (2.5) denkleminin her salınımlı çözümü $\overline{y}$ denge noktasına monoton yakınsar.

İspat. (a)

$$f(x, y) = \frac{p + qy}{1 + x}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. y sabit iken $f(x, y)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-(p + qy)}{(1 + x)^2} < 0$$

dır. x sabit iken $f(x, y)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{q}{1 + x} > 0$$

dır.
O halde Teorem (1.2.16) 'den bir $\{y_n\}$ salınımlı çözümü $\overline{y}$ denge noktası civarında uzunluğu bir olan yarı devirli salınımlıdır.
(b) $\{y_n\}$ dizisi, (2.5) denkleminin salınımlı olmayan çözümü olsun. Her $n \geq K$ için $y_{n-1} \geq \overline{y}$ olacak şekilde bir pozitif K tamsayısının var olduğunu farzedelim. $n \geq K$ için $\{y_n\}$ dizisinin azalan olduğunu göstermek yeterlidir. Buradan, çelişki elde etmek için, herhangi bir $n_0 \geq K$ için

$$y_{n_0} > y_{n_0 - 1}$$

olduğunu varsayalım.
Açıkça, $p \geq q$ olması koşulu

$$f(x) = \frac{p + qx}{1 + x}$$

fonksiyonunun azalan olduğunu gösterir.

O halde

$$y_{n_0+1}=\frac{p+qy_{n_0-1}}{1+y_{n_0}}=f\left(y_{n_0},y_{n_0-1}\right)<f\left(y_{n_0},y_{n_0}\right)<f\left(\overline{y},\overline{y}\right)=\overline{y}$$

ifadesi kabulümüzle çelişir.

Diğer bir taraftan her $n\geq K$ için $y_{n-1}<\overline{y}$ olacak şekilde bir pozitif K tamsayısının var olduğunu farzedelim. Çelişki elde etmek için, herhangi bir $n_0\geq K$ için

$$y_{n_0-1}>y_{n_0}$$

olduğunu varsayalım.

$$y_{n_0+1}=\frac{p+qy_{n_0-1}}{1+y_{n_0}}=f\left(y_{n_0},y_{n_0-1}\right)>f\left(y_{n_0},y_{n_0}\right)>f\left(\overline{y},\overline{y}\right)=\overline{y}$$

olması kabulümüzle çelişir. O halde ispat tamamlanır.

2.2.2 q<1 durumu

Bu kısımdaki ana sonucumuz aşağıdadır.

Teorem 2.2.4

$$q<1$$

olduğunu varsayalım. O halde (2.5) denkleminin pozitif denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. Açıkça $n\geq 0$ için

$$y_{n+1}=\frac{p+qy_{n-1}}{1+y_n}<p+qy_{n-1} \tag{2.8}$$

dir. ε herhangi bir pozitif sayı olmak üzere

$$M=\frac{p}{1-q}+\varepsilon$$

olsun. (2.8) ve (2.5) denkleminden, (2.5) denkleminin her çözümü eninde sonunda $[0,M]$ aralığının içinde kalır.

$$f\left(x,y\right)=\frac{p+qy}{1+x},\qquad a=0\quad \text{ve}\quad b=\frac{p}{1-q}+\varepsilon$$

olsun. O halde açıkça bütün $(x,y)\in[a,b]\times[a,b]$ için

$$a\leq f\left(x,y\right)\leq b$$

dir. Teorem (1.2.13) 'yı uygularsak, $\overline{y}$ dengesinin (2.5) denkleminin bütün çözümlerinin global çekicisi olduğunu elde ederiz. $\overline{y}$ dengesinin lokal kararlılığı Teorem (2.2.1) 'de bulunmuştu. O halde ispat tamamlanır.

2.2.3 q>1 durumu

Bu kısımda sahip olunan iki alt dizilerin var olan çözümlerinin, birinin monoton şekilde sıfıra yakınsadığını ve diğerinin monoton şekilde ∞ 'a yakınsadığını göstereceğiz. Gerçekten bu, aşağıdaki eşitsizlikler doğru olacak şekilde başlangıç koşullu her $\{y_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümü için doğrudur:

$$y_{-1} < q-1 \quad \text{ve} \quad y_0 > q-1+\frac{p}{q-1}$$

dir. Bu amaçla

$$y_1 = \frac{p+qy_{-1}}{1+y_0} < \frac{p+q\left(q-1\right)}{1+y_0} < q-1$$

ve

$$y_2 = \frac{p+qy_0}{1+y_1} > \frac{p+qy_0}{q} = y_0 + \frac{p}{q}$$

olduğunu görürüz ve tümevarımla $n \geq 1$ için,

$$y_{2n-1} < q-1 \quad \text{ve} \quad y_{2n} > y_0 + n\frac{p}{q}$$

dur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n} = \infty$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{p+qy_{2n-1}}{1+y_{2n}} = 0$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

BÖLÜM 3

$x_{n+1} = \dfrac{\alpha x_n + \beta x_{n-1}}{A + x_n}$ TEKRARLI DİZİSİ

3.1 GİRİŞ

Bu bölümde Kulenovic et al. (2000) kaynağından yararlanılmıştır.

α, β, A parametreleri negatif olmayan reel sayılar ve x_{-1} ve x_0 negatif olmayan başlangıç koşulları olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + \beta x_{n-1}}{A + x_n}, \quad n = 0, 1, ... \tag{3.1}$$

tekrarlı dizisinin çözümlerinin periyodikliği, global kararlılığı ve sınırlılığını inceleyeceğiz.

Problem 3.1

$\alpha, \beta, A \in (0, \infty)$

olmak üzere (3.1) denklemini ele alalım. Aşağıdaki özellikleri sağlayan α, β ve A üzerindeki gerekli ve yeter koşulu bulunuz.

(i) Her pozitif çözüm sınırlıdır.

(ii) Her pozitif çözüm sıfıra yakınsar.

(iii) Her pozitif çözüm pozitif denge noktasına yakınsar.

(iv) Her pozitif çözüm iki-devire yakınsar.

$A = 0$ olduğunda (3.1) denkleminin özel durumu Amleh et al. 'da (1999) ve $\alpha = 0$ olduğu durumu da Gibbons et al. 'da (2000) incelenmiştir. Sonuç olarak $\beta = 0$ olduğunda,

$x_n = 1/y_n$

değişken değişimi yapıldığında (3.1) denklemi çözümlerinin karakteri kolayca görülen

$$y_{n+1} = \frac{A}{\alpha} y_n + \frac{1}{\alpha}, \quad n = 0, 1, ...$$

lineer denklemine indirgenir. $n = 0, 1, ...$ için

$x_n = Az_n$

değişken değişimi ile genelliği bozmadan $A = 1$ alınabileceği görülebilir. Bu sebeple devamında, (3.1) denklemi yerine

$\alpha, \beta \in (0, \infty)$ ve $x_{-1}, x_0 \in [0, \infty)$

olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + \beta x_{n-1}}{1 + x_n}, \quad n = 0, 1, ... \tag{3.2}$$

fark denklemini ele alacağız.

3.2 DEĞİŞMEZ ARALIKLAR

Bu kısımdaki ana sonucumuz $\beta \neq 1$ iken (3.2) denklemi ile ilgili aşağıdaki teoremdir.

$\beta = 1$

olması durumu Bölüm (3.7) 'de işlenmiştir.

Teorem 3.2.1

(a) Varsayalım ki

$$\beta < 1 \tag{3.3}$$

olsun. O halde (3.2) denkleminin her çözümü eninde sonunda $(0, \alpha/\beta]$ aralığı içinde kalır. Ayrıca $(0, \alpha/\beta]$, (3.2) denklemi için bir değişmez aralıktır. Yani, $(0, \alpha/\beta]$ aralığındaki başlangıç koşullarına sahip olan (3.2) denkleminin her çözümü, bu aralık içinde kalır.

(b) Varsayalım ki

$$\beta > 1 \tag{3.4}$$

olsun. O halde (3.2) denkleminin her çözümü eninde sonunda $[\alpha/\beta, \infty)$ aralığı içinde kalır. Ayrıca $[\alpha/\beta, \infty)$, (3.2) denklemi için bir değişmez aralıktır.

Üstteki teoremin ispatı, aşağıdaki lemmanın bir temel sonucudur.

Lemma 3.2.2 *(a) Varsayalım ki (3.3) sağlansın. O halde herhangi $k, m \in \mathbb{N}$ için*

$$x_k \leq \frac{\alpha}{\beta} \Longrightarrow x_{k+2} \leq \alpha < \frac{\alpha}{\beta}$$

ve

$$x_{k+2} \geq \frac{\alpha}{\beta^m} \Longrightarrow x_k > \frac{\alpha}{\beta^{m+1}} > \alpha$$

dır.

(b) Varsayalım ki (3.4) sağlansın. O halde herhangi $k, m \in \mathbb{N}$ için

$$x_k \geq \frac{\alpha}{\beta} \Longrightarrow x_{k+2} \geq \alpha > \frac{\alpha}{\beta}$$

ve

$$x_{k+2} \leq \frac{\alpha}{\beta^m} \Longrightarrow x_k < \frac{\alpha}{\beta^{m+1}} < \alpha$$

dır.

3.3 DENGE NOKTALARI VE LOKAL KARARLILIK

(3.2) denkleminin denge noktaları

$$\overline{x} = \frac{\alpha\overline{x} + \beta\overline{x}}{1 + \overline{x}}$$

denkleminin çözümleridir.

Buradan $\overline{x} = 0$ daima bir denge noktasıdır ve

$$\alpha + \beta > 1$$

olduğunda $\overline{x} = \alpha + \beta - 1$, (3.2) denkleminin tek pozitif denge noktasıdır.

(3.2) denklemine göre

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{\alpha\left(1 + x_n\right) - \left(\alpha x_n + \beta x_{n-1}\right)}{\left(1 + x_n\right)^2} = \frac{\alpha\left(1 + x_n\right) - \left(1 + x_n\right)x_{n+1}}{\left(1 + x_n\right)^2}$$

$$\frac{\partial f\left(\overline{x}, \overline{x}\right)}{\partial x_n} = \frac{\alpha\left(1 + \overline{x}\right) - \left(1 + \overline{x}\right)\overline{x}}{\left(1 + \overline{x}\right)^2} = \frac{\alpha - \overline{x}}{1 + \overline{x}} = s$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} = \frac{\beta\,(1+x_n)}{(1+x_n)^2} = \frac{\beta}{(1+x_n)}$$

$$\frac{\partial f\,(\overline{x},\overline{x})}{\partial x_{n-1}} = \frac{\beta}{1+\overline{x}} = t$$

olduğundan (3.2) denkleminin $\overline{x}$ noktasındaki lineerleştirilmiş denklemi

$$y_{n+1} - \frac{\alpha-\overline{x}}{1+\overline{x}}y_n - \frac{\beta}{1+\overline{x}}y_{n-1} = 0, \quad n = 0,1,...$$

dır.

Aşağıdaki lokal sonuç (3.2) denkleminin lineerleştirilmiş analizinden elde edilir (Kocic and Ladas 1993).

Teorem 3.3.1 *(a)*

$$\alpha + \beta < 1$$

olsun. O halde (3.2) denkleminin sıfır denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(b)

$$\alpha + \beta > 1$$

olsun. O zaman (3.2) denkleminin sıfır denge noktası kararsızdır.

(c)

$$1-\alpha < \beta < 1+\alpha$$

olsun. O halde (3.2) denkleminin $\overline{x} = \alpha + \beta - 1$ *pozitif denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.*

(d)

$$\beta > 1 + \alpha$$

olsun. O zaman (3.2) denkleminin $\overline{x} = \alpha + \beta - 1$ *pozitif denge noktası kararsızdır.*

İspat. (a) $\alpha + \beta < 1$ olduğunda sıfır denge noktasını ele alırsak, lokal asimptotik kararlı olması için

$$|s| < 1 - t < 2$$

şartının sağlanması gerekir. Yani

$$\left|\frac{\alpha-\overline{x}}{1+\overline{x}}\right|<1-\frac{\beta}{1+\overline{x}}<2$$

olmalıdır. O halde bu şartın sağlandığını iki durumda inceleyelim.

Durum 1. $\overline{x}=0$ alındığında

$$\alpha>0$$

olduğu görülür, buradan

$$1-\alpha<2$$

elde edilir.

Durum 2.

$$\left|\frac{\alpha-\overline{x}}{1+\overline{x}}\right|<1-\frac{\beta}{1+\overline{x}}$$

olduğunu göstermek için

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{1+\overline{x}}-1 &< \frac{\alpha-\overline{x}}{1+\overline{x}}<1-\frac{\beta}{1+\overline{x}}\\ \beta-1-\overline{x} &< \alpha-\overline{x}<1+\overline{x}-\beta\\ \beta-1 &< \alpha<1+2\overline{x}-\beta\end{aligned}$$

ifadesinin sağlanması gerekir. $\overline{x}=0$ alındığında ve ayrıca $\alpha+\beta<1$ olduğundan

$$\beta-1<\alpha<1-\beta$$

ifadesi sağlanır. O halde (3.2) denkleminin $\overline{x}=0$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(c) $1-\alpha<\beta<1+\alpha$ olduğunda $\overline{x}=\alpha+\beta-1$ pozitif denge noktasını ele alırsak, lokal asimptotik kararlı olması için

$$|s|<1-t<2$$

şartının sağlanması gerekir. Yani

$$\left|\frac{\alpha-\overline{x}}{1+\overline{x}}\right|<1-\frac{\beta}{1+\overline{x}}<2$$

olmalıdır. O halde bu şartın sağlandığını iki durumda inceleyelim.

Durum 1. $\overline{x}=\alpha+\beta-1$ alındığında

$$\frac{\beta}{1+\overline{x}}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}>0$$

olduğu görülür, buradan

$$1-\frac{\beta}{\alpha+\beta}<2$$

elde edilir.

Durum 2.

$$\left|\frac{\alpha-\overline{x}}{1+\overline{x}}\right|<1-\frac{\beta}{1+\overline{x}}$$

olduğunu göstermek için

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{1+\overline{x}}-1 &< \frac{\alpha-\overline{x}}{1+\overline{x}}<1-\frac{\beta}{1+\overline{x}}\\ \beta-1-\overline{x} &< \alpha-\overline{x}<1+\overline{x}-\beta\\ \beta-1 &< \alpha<1+2\overline{x}-\beta\end{aligned}$$

ifadesinin sağlanması gerekir. $\overline{x}=\alpha+\beta-1$ alındığında ve ayrıca $1-\alpha<\beta<1+\alpha$ olduğundan

$$\beta-1<\alpha<2\alpha+\beta-1$$

ifadesi sağlanır. O halde (3.2) denkleminin $\overline{x}=\alpha+\beta-1$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

3.4 SIFIR DENGE NOKTASININ GLOBAL KARARLILIĞI

Bu kısımda (3.2) denkleminin sıfır denge noktasının global asimptotik kararlı olması için gerekli ve yeter koşulu vereceğiz.

Aşağıdaki teorem Teorem (1.2.10) ve Teorem (3.2.1) (b) 'nin kolayca görülebilen sonucudur.

Teorem 3.4.1 *(3.2) denkleminin sıfır denge noktası global asimptotik kararlıdır ancak ve ancak*

$$\alpha+\beta\leq 1$$

dir.

İspat. **(a)** $\alpha+\beta\leq 1$ sağlansın. O halde

$$x_{n+1}=\frac{\alpha x_n+x_{n-1}}{1+x_n}$$

denkleminden

$$f_0(x_n,x_{n-1})=\frac{\alpha}{1+x_n} \text{ ve } f_1(x_n,x_{n-1})=\frac{\beta}{1+x_n}$$

bulunur.

(i)

$$f_0'=\frac{-\alpha}{(1+x_n)^2}<0$$

ve

$$f_1'=\frac{-\beta}{(1+x_n)^2}<0$$

olduğundan f_0 ve f_1 fonksiyonları her bir değişkenlerine göre artmayandır.

(ii) Her $x\geq 0$ için

$$f_0(x,x)=\frac{\alpha}{1+x}>0$$

dır.

(iii) Her $x,y\in(0,\infty)$ için

$$f_0(x,y)+f_1(x,y)=\frac{\alpha}{A+x}+\frac{\beta}{A+x}=\frac{\alpha+\beta}{A+x}<1$$

bulunur. O halde Teorem (1.2.10) 'den (3.2) denkleminin sıfır denge noktası global asimptotik kararlıdır.

3.5 İKİ DEVİRLİ ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

Aşağıdaki sonucun ispatı kolaylıkla görülür.

Teorem 3.5.1 *(3.2) denklemi asal iki periyotlu çözümlere sahiptir ancak ve ancak*

$$\beta=1+\alpha$$

dir. Ayrıca

$$\beta=1+\alpha$$

olduğunda (3.2) denkleminin $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ *çözümü asıl iki periyotlu periyodiktir ancak ve ancak*

$$x_{-1}, x_0 \in (\alpha, \infty) \ \ \textit{ve} \ x_0 = \frac{\alpha x_{-1}}{x_{-1} - \alpha} \neq 2\alpha$$

dır.

3.6 $\beta \leq 1$ OLDUĞUNDA ÇÖZÜMLERİN YARI DEVİR ANALİZİ

Bu kısımda

$$\alpha + \beta > 1 \quad \text{ve} \quad \beta \leq 1$$

olduğunda, (3.2) denkleminin pozitif çözümlerinin yarı devirlerinin davranışlarını ele alacağız.

Bundan sonra $\overline{x}$, (3.2) denkleminin $\alpha + \beta - 1$ pozitif denge noktasını gösterecektir.

$$f(x, y) = \frac{\alpha x + \beta y}{1 + x}$$

olacak şekilde $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu tanımlansın.

O halde f fonksiyonu negatif geri bildirim koşulunu sağlar, yani her $x \in (0, \infty) - \{\overline{x}\}$ için

$$(x - x)(f(x, x) - x) < 0$$

dır.

$$g(x) = \frac{(\alpha + \beta)\, x}{1 + x}$$

şeklinde $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $g(\overline{x}) = \overline{x}$ ve g fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığında artan olduğunu görürüz.

Teorem 3.6.1

$$\alpha + \beta > 1 \quad \textit{ve} \quad \beta \leq 1$$

olduğunu varsayalım. $\{x_n\}$, *(3.2) denkleminin bir pozitif çözümü olsun. O zaman her* $n > 0$ *için aşağıdaki durumlar doğrudur:*

(a) Eğer $\overline{x} \leq x_{n-1}, x_n$ *ise* $\overline{x} \leq x_{n+1} \leq \max\{x_{n-1}, x_n\}$ *dir.*

(b) Eğer $x_{n-1}, x_n \leq \overline{x}$ *ise* $\min\{x_{n-1}, x_n\} \leq x_{n+1} \leq \overline{x}$ *dır.*

(c) Eğer $x_{n-1} < \overline{x} \leq x_n$ ise $x_{n-1} < x_{n+1} < x_n$ dir.

(d) Eğer $x_n < \overline{x} \leq x_{n-1}$ ise $x_n < x_{n+1} < x_{n-1}$ dir.

(e) Her $k \geq -1$ için $\overline{x} < x_k < \overline{x}/(2-\beta)$ ise, o halde $\{x_n\}$, $\overline{x}$ denge noktasına doğru azalır.

İspat. (a) Varsayalım ki $\overline{x} \leq x_{n-1}, x_n$ olsun. O zaman

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + \beta x_{n-1}}{1+x_n} \leq \frac{(\alpha+\beta)\max\{x_{n-1}, x_n\}}{1+\overline{x}} = \max\{x_{n-1}, x_n\}$$

dir.

$$\frac{\alpha x + \beta \overline{x}}{1+x}$$

fonksiyonu $\beta \leq 1$ koşuluna denk olan $\overline{x} < \alpha/\beta$ için artan olduğundan,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + \beta x_{n-1}}{1+x_n} \geq \frac{\alpha x_n + \beta \overline{x}}{1+x_n} \geq g(\overline{x}) = \overline{x}$$

olduğunu elde ederiz. $x_{n-1} > \overline{x}$ ya da $x_n > \overline{x}$ olduğunu varsayarsak tüm eşitsizlikler kesin olarak sağlanır.

(b) $x_{n-1}, x_n \leq \overline{x}$ olduğunu farzedelim. O halde bir önceki bölüm göz önüne alınırsa

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + \beta x_{n-1}}{1+x_n} \leq \frac{\alpha x_n + \beta \overline{x}}{1+x_n} \leq g(\overline{x}) = \overline{x}$$

ve

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + \beta x_{n-1}}{1+x_n} \geq \frac{(\alpha+\beta)\min\{x_{n-1}, x_n\}}{1+\overline{x}} = \min\{x_{n-1}, x_n\}$$

dir. $x_{n-1} < \overline{x}$ ya da $x_n < \overline{x}$ olduğunu varsayarsak tüm eşitsizlikler kesin olarak sağlanır.

(c) $x_{n-1} < \overline{x} \leq x_n$ olduğunu varsayalım. O zaman

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + \beta x_{n-1}}{1+x_n} < \frac{(\alpha+\beta)x_n}{1+x_n} = \frac{(1+\overline{x})x_n}{1+x_n} \leq x_n$$

dir. $\beta \leq 1$ ve $x_{n-1} < \overline{x}$ olmak üzere

$$\alpha - \beta x_{n-1} > \alpha - \beta \overline{x} = (1-\beta)(\alpha+\beta) \geq 0$$

dır. Böylece $(\alpha - \beta x_{n-1})/(1+x)$, x 'e göre artan ve dolayısıyla

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + \beta x_{n-1}}{1+x_n} > \frac{\alpha x_{n-1} + \beta x_{n-1}}{1+x_{n-1}} = g(x_{n-1}) > x_{n-1}$$

dir. Son eşitsizlik negatif geri bildirim özelliğinden elde edilir.

(d) Varsayalım ki $x_n < \overline{x} \leq x_{n-1}$ olsun. O zaman negatif geri bildirim özelliğinden

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + \beta x_{n-1}}{1 + x_n} > \frac{\alpha x_n + \beta x_n}{1 + x_n} = g(x_n) > x_n$$

dir. $x_{n+1} < x_{n-1}$ olduğunu görmek için iki durumda ele almalıyız.

Durum 1. $\alpha - \beta x_{n-1} \geq 0$ olduğunu farzedelim. O halde $(\alpha x + \beta x_{n-1}) / (1 + x)$, x 'e göre artan ve dolayısıyla

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + \beta x_{n-1}}{1 + x_n} \leq \frac{\alpha x_{n-1} + \beta x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} < x_{n-1}$$

dir. Son eşitsizlik negatif geri bildirim özelliğinden gelir.

Durum 2. $\alpha - \beta x_{n-1} < 0$ olduğunu varsayalım. O halde

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + \beta x_{n-1}}{1 + x_n} < \frac{\beta x_{n-1}(x_n + 1)}{1 + x_n} \leq x_{n-1}$$

bulunur.

(e)

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + \beta x_{n-1}}{1 + x_n} > \overline{x} = \alpha + \beta - 1$$

olduğunu göz önüne alalım ve dolayısıyla

$$x_{n-1} \geq \beta x_{n-1} > \overline{x} + (\beta - 1) x_n > x_n$$

olduğu görülür.

3.7 YARI DEVİR ANALİZİ VE $\beta = 1$ OLDUĞUNDA GLOBAL ÇEKİCİLİK

Bu kısımda

$$\beta = 1$$

olduğunda, (3.2) denkleminin pozitif çözümlerinin davranışlarını inceleyeceğiz.

Burada (3.2) denkleminin pozitif denge noktası

$$\overline{x} = \alpha$$

dır.

Teorem 3.7.1 *$\beta = 1$ olduğunu varsayalım ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.2) denkleminin bir pozitif çözümü olsun. O zaman (3.2) denkleminin $\overline{x}$ denge noktası global asimptotik kararlıdır. Daha iyi bir ifadeyle aşağıdaki durumlar doğrudur.*

(a) Varsayalım ki $x_{-1} \geq \alpha$ ve $x_0 \geq \alpha$ olsun. O halde her $n > 0$ için $x_n \geq \alpha$ ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \tag{3.5}$$

dır.

(b) Varsayalım ki $x_{-1} \leq \alpha$ ve $x_0 \leq \alpha$ olsun. O halde her $n > 0$ için $x_n \leq \alpha$ ve (3.5) sağlanır.

(c) Varsayalım ki ya $x_{-1} < \alpha < x_0$ ya da $x_{-1} > \alpha > x_0$ olsun. O halde $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, α denge noktası civarında uzunluğu bir olan yarı devirli salınımlıdır ve (3.5) sağlanır.

İspat. (a) $x_{-1} = x_0 = \alpha$ olması durumu açıktır. Biz $x_{-1} \geq \alpha$ ve $x_0 > \alpha$ olduğunu varsayacağız. $x_{-1} > \alpha$ ve $x_0 > \alpha$ durumu benzerdir. O halde

$$x_1 = \frac{\alpha x_0 + \beta x_{-1}}{1 + x_0} \geq \frac{\alpha x_0 + \alpha}{1 + x_0} = \alpha$$

ve

$$x_2 = \frac{\alpha x_1 + \beta x_0}{1 + x_1} > \frac{\alpha x_1 + \alpha}{1 + x_1} = \alpha$$

dır. Tümevarım ile her $n > 0$ için $x_n \geq \alpha$ olduğu görülür. Ayrıca $x_{-1} \geq \alpha$ olduğundan

$$\alpha x_0 + x_{-1} \leq x_{-1}x_0 + x_{-1}$$

elde edilir ve buradan

$$x_1 = \frac{\alpha x_0 + \beta x_{-1}}{1 + x_0} \leq \frac{x_{-1}x_0 + x_{-1}}{1 + x_0} = x_{-1}$$

dir. Benzer olarak, $x_2 < x_0$ olduğunu gösterebiliriz ve tümevarımdan

$$x_{-1} \geq x_1 \geq x_3 \geq ... \geq \alpha$$

ve

$$x_0 > x_2 > x_4 > ... > \alpha$$

dır. Böylece

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = m \quad \text{ve} \quad \lim_{k\to\infty} x_{2k} = M$$

olacak şekilde $m \geq \alpha$ ve $M \geq \alpha$ vardır. (3.2) denkleminin $\beta = 1$ iken iki periyotlu çözümleri olmadığından $m = M = \alpha$ dır ve (a) kısmının ispatı tamamlanır.

$k \geq 0$ için

$$x_{-1} = \alpha \Longrightarrow x_{2k+1} = \alpha$$

ve $k \geq 0$ için

$$x_0 = \alpha \Longrightarrow x_{2k} = \alpha$$

olduğunu görebiliriz.

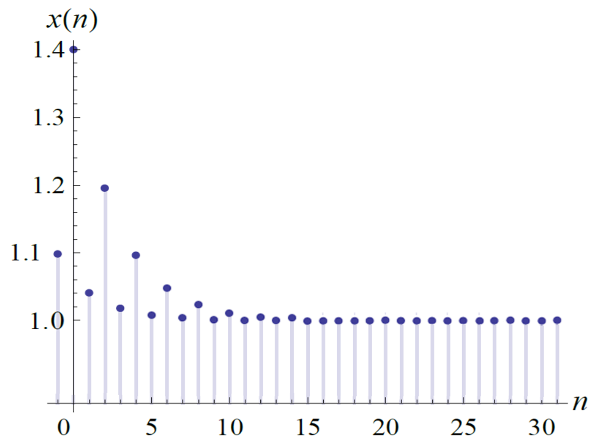
Örnek 3.7.2

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{1 + x_n} \tag{3.6}$$

denkleminin çözümleri ve çözümlerinin yakınsaklık durumu aşağıda verilmiştir.

Çizelge 3.1 (3.6) denkleminin çözümleri

n	-1	0	1	2	3
x_n	1.1	1.4	1.0416	1.1959	1.0189
x_{n+5}	1.0970	1.0090	1.0483	1.0044	1.0241



Şekil 3.1 (3.6) denkleminin çözümlerinin yakınsaklık durumu. ($x_{-1} = 1.1, x_0 = 1.4$)

(b) $x_{-1} \leq \alpha$ ve $x_0 < \alpha$ olduğunu varsayalım. $x_{-1} < \alpha$ ve $x_0 < \alpha$ durumu benzerdir. O halde

$$x_1 = \frac{\alpha x_0 + \beta x_{-1}}{1 + x_0} \leq \frac{\alpha x_0 + \alpha}{1 + x_0} = \alpha$$

ve

$$x_2 = \frac{\alpha x_1 + \beta x_0}{1 + x_1} < \frac{\alpha x_1 + \alpha}{1 + x_1} = \alpha$$

dır. Tümevarım ile her $n > 0$ için $x_n \leq \alpha$ olduğu görülür. Ayrıca $x_{-1} \leq \alpha$ olduğundan

$$\alpha x_0 + x_{-1} \geq x_{-1} x_0 + x_{-1}$$

elde edilir ve buradan

$$x_1 = \frac{\alpha x_0 + \beta x_{-1}}{1 + x_0} \geq \frac{x_{-1} x_0 + x_{-1}}{1 + x_0} = x_{-1}$$

dir. Benzer olarak, $x_2 > x_0$ olduğunu gösterebiliriz ve tümevarımdan

$$x_{-1} \leq x_1 \leq x_3 \leq ... \leq \alpha$$

ve

$$x_0 < x_2 < x_4 < ... < \alpha$$

dır. Böylece

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = m \quad \text{ve} \quad \lim_{k\to\infty} x_{2k} = M$$

olacak şekilde $m \leq \alpha$ ve $M \leq \alpha$ vardır. (3.2) denkleminin $\beta = 1$ iken iki periyotlu çözümleri olmadığından $m = M = \alpha$ dır ve (b) kısmının ispatı tamamlanır.

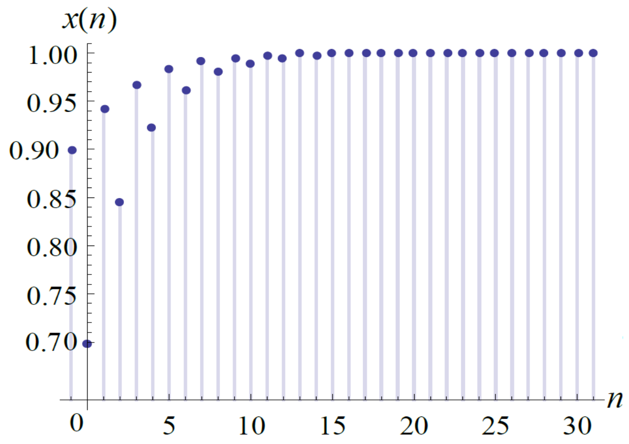
Örnek 3.7.3

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{1 + x_n} \tag{3.7}$$

denkleminin çözümleri ve çözümlerinin yakınsaklık durumu aşağıda verilmiştir.

Çizelge 3.2 (3.7) denkleminin çözümleri

n	-1	0	1	2	3
x_n	0.9	0.7	0.9411	0.8454	0.9681
x_{n+5}	0.9214	0.9834	0.9604	0.9915	0.9801



Şekil 3.2 (3.7) denkleminin çözümlerinin yakınsaklık durumu.

$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{1+x_n}, x_{-1} = 0.9, x_0 = 0.7$

(c) Varsayalım ki $x_{-1} < \alpha < x_0$ olsun. $x_{-1} > \alpha > x_0$ olduğunda ispat benzerdir.

$$x_1 = \frac{\alpha x_0 + \beta x_{-1}}{1 + x_0} < \frac{\alpha x_0 + \alpha}{1 + x_0} = \alpha$$

ve

$$x_2 = \frac{\alpha x_1 + \beta x_0}{1 + x_1} > \frac{\alpha x_1 + \alpha}{1 + x_1} = \alpha$$

dır. Tümevarımla α denge noktası civarında çözümlerin uzunluğu bir olan yarı devirli salınımlı olduğu bulunur. Şimdi $\{x_{2k+1}\}_{n=-1}^{\infty}$ alt dizisinin artan olduğunu ve buradan yakınsak olduğunu iddia edelim. Gerçekten

$$x_{-1} + \alpha x_0 > x_{-1} + x_{-1}x_0$$

olduğunda

$$x_1 = \frac{\alpha x_0 + \beta x_{-1}}{1 + x_0} > x_{-1}$$

dir ve iddia tümevarımla bulunur. Benzer bir yolla $\{x_{2k}\}_{n=-1}^{\infty}$ alt dizisinin azalan olduğunu ve buradan yakınsak olduğunu gösterebiliriz. Böylece

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = m \quad \text{ve} \quad \lim_{k\to\infty} x_{2k} = M$$

olacak şekilde $m \geq \alpha$ ve $M \geq \alpha$ vardır ve (a) 'daki gibi $m = M = \alpha$ dır.

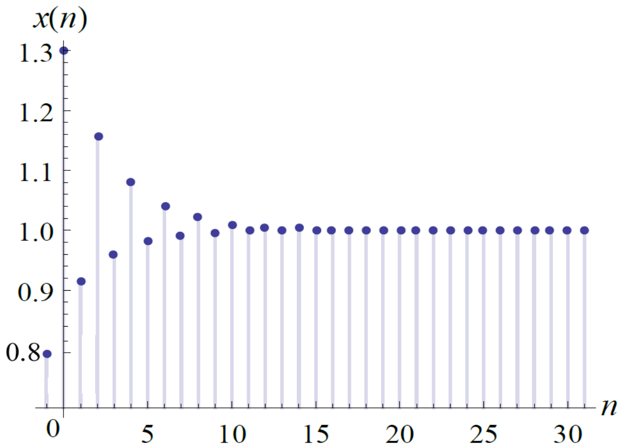
Örnek 3.7.4

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{1 + x_n} \tag{3.8}$$

denkleminin çözümleri ve çözümlerinin yakınsaklık durumu aşağıda verilmiştir.

Çizelge 3.3 (3.8) denkleminin çözümleri

n	-1	0	1	2	3
x_n	0.8	1.3	0.9130	1.1568	0.9596
x_{n+5}	1.0800	0.9806	1.0404	0.9905	1.0203



Şekil 3.3 (3.8) denkleminin çözümlerinin yakınsaklık durumu. ($x_{-1} = 0.8, x_0 = 1.3$)

Başlangıç koşullarının sıralamasını değiştirdiğimizde aşağıdaki örneği verebiliriz.

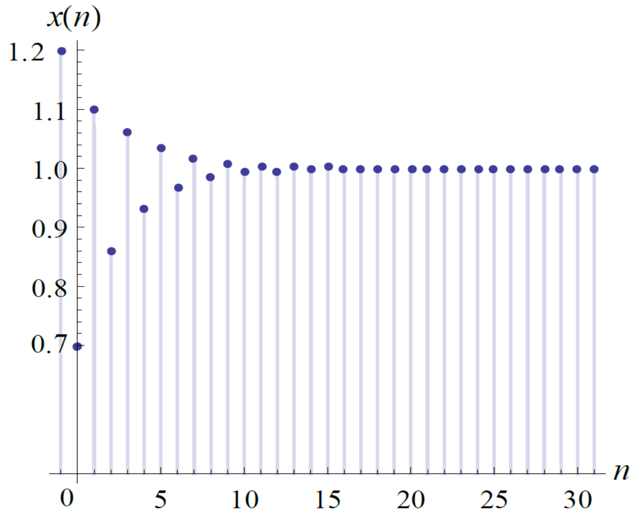
Örnek 3.7.5

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{1 + x_n} \tag{3.9}$$

denkleminin çözümleri ve çözümlerinin yakınsaklık durumu aşağıda verilmiştir.

Çizelge 3.4 (3.9) denkleminin çözümleri

n	-1	0	1	2	3
x_n	1.2	0.7	1.1176	0.8583	1.0633
x_{n+5}	0.9313	1.0327	0.9662	1.0166	0.9832



Şekil 3.4 (3.9) denkleminin çözümlerinin yakınsaklık durumu. $(x_{-1} = 1.2, x_0 = 0.7)$

3.8 $\beta < 1$ OLDUĞUNDA GLOBAL ÇEKİCİLİK

Bu kısımda

$1 - \alpha < \beta < 1$

olduğu durumu varsayalım ve $\overline{x} = \alpha + \beta - 1$ denge noktasının, (3.2) denkleminin tüm pozi-tif çözümlerinin global çekicisi olduğunu göstereceğiz. Grove et al. 'daki (2000) aşağıdaki sonucu kullanacağız.

Teorem 3.8.1 *$I \subseteq [0, \infty)$ bir aralık olsun ve $f \in C[I \times I, (0, \infty)]$ 'nin aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım.*

(i) $f(x, y)$ her bir değişkenine göre azalmayandır.
(ii)

$$x_{n+1} = f\left(x_n, x_{n-1}\right), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.10}$$

denklemi bir tek $\overline{x} \in I$ pozitif denge noktasına sahiptir ve $f(x, x)$ fonksiyonu her $x \in I - \{\overline{x}\}$ için

$(x - x)(f(x, x) - x) < 0$

negatif geri bildirim koşulunu sağlar.
O zaman I aralığındaki başlangıç koşullu, (3.10) denkleminin her pozitif çözümü $\overline{x}$ 'e yakınsar.

Teorem 3.8.2

$1-\alpha<\beta<1$

olduğunu varsayalım. O halde (3.2) denkleminin her pozitif çözümü pozitif $\overline{x}$ *denge noktasına yakınsar.*

İspat. $\overline{x}\leq\alpha/\beta$ tutarlılık koşulunun $\beta\leq 1$ koşuluna denk olduğunu görebiliriz. Teorem (3.2.1) (a) 'dan, x_{-1} ve x_0 başlangıç koşullarının $I=(0,\alpha/\beta]$ aralığı içinde kaldığını varsayalım. Açık olarak

$$f(x,y)=\frac{\alpha x+\beta y}{1+x}$$

fonksiyonu Teorem (3.8.1) 'nin koşullarını I aralığında sağlar.

3.9 $\beta>1$ OLDUĞUNDA ÇÖZÜMLERİN UZUN SÜRELİ DAVRANIŞLARI

Bu kısımda

$$\overline{x}>\frac{\alpha}{\beta}$$

ifadesinin eşiti olan

$$\beta>1$$

olması durumunda (3.2) denkleminin pozitif çözümlerinin davranışlarını inceleyeceğiz.
O halde (3.2) denkleminin her pozitif çözümü eninde sonunda $[\alpha,\infty)$ aralığı içinde kalır.
(3.2) denkleminin çözümlerinin uzun süreli davranışları ile ilgili olarak, genelliği bozmadan

$$x_{-1},x_0\in[\alpha,\infty)$$

olduğunu varsayabiliriz. O halde

$$x_n=y_n+\alpha$$

değişken değişimi ile (3.2) denklemi, $n\geq 0$ için $y_n\geq 0$ olmak üzere

$$y_{n+1}=\frac{\alpha\left(\beta-1\right)+\beta y_{n-1}}{1+\alpha+y_n}\tag{3.11}$$

denklemine dönüşür.

(3.11) denkleminin pozitif çözümlerinin karakteri Gibbons et al. 'da (2000) tamamıyla araştırılmıştır. Gibbons et al. 'daki (2000) sonuçları (3.11) denklemine uyguladığımızda, $\beta > 1$ sağlandığındaki (3.2) denkleminin çözümleri hakkındaki aşağıdaki teoremleri elde ederiz.

Teorem 3.9.1 *İlk yarı devirden sonra, (3.2) denkleminin bir salınımlı çözümü, uzunluğu bir olan yarı devirli $\overline{x}$ pozitif denge noktası civarında salınımlıdır.*

Teorem 3.9.2 *(a) Varsayalım ki*

$$\beta = 1 + \alpha$$

olsun. O halde (3.2) denkleminin her pozitif çözümü iki periyotlu çözüme yakınsar.
(b) Varsayalım ki

$$1 < \beta < 1 + \alpha$$

olsun. O halde (3.2) denkleminin her pozitif çözümü pozitif denge noktasına yakınsar.
(c) Varsayalım ki

$$\beta > 1 + \alpha$$

olsun. O halde (3.2) denklemi sınırsız çözümlere sahiptir.

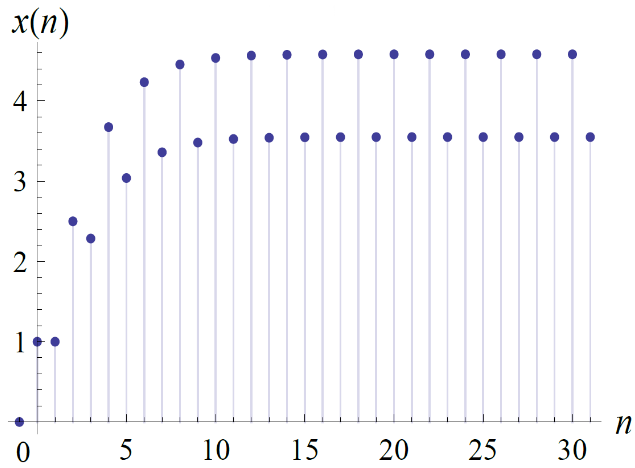
Örnek 3.9.3

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 3x_{n-1}}{1 + x_n} \tag{3.12}$$

denkleminin çözümleri ve pozitif çözümlerinin yakınsaklık durumu aşağıda verilmiştir.

Çizelge 3.5 (3.12) denkleminin çözümleri

n	-1	0	1	2	3
x_n	0	1	1	2.5	2.2857
x_{n+5}	3.6739	3.0392	4.2335	3.36	4.4542



Şekil 3.5 (3.12) denkleminin her pozitif çözümünün iki periyotlu çözüme yakınsaması.

$(x_{-1} = 0, x_0 = 1)$

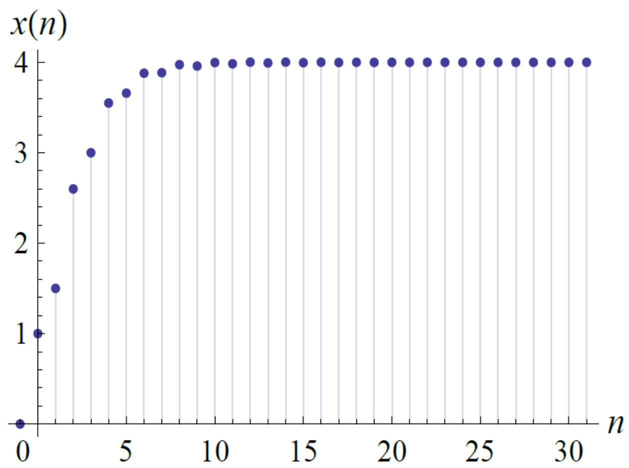
Örnek 3.9.4

$$x_{n+1} = \frac{3x_n + 2x_{n-1}}{1 + x_n} \tag{3.13}$$

denkleminin çözümleri ve pozitif çözümlerinin yakınsaklık durumu aşağıda verilmiştir.

Çizelge 3.6 (3.13) denkleminin çözümleri

n	-1	0	1	2	3
x_n	0	1	1.5	2.6	3
x_{n+5}	3.55	3.6593	3.8799	3.8849	3.9744



Şekil 3.6 (3.13) denkleminin her pozitif çözümünün pozitif denge noktasına yakınsaması.

$(x_{-1} = 0, x_0 = 1)$

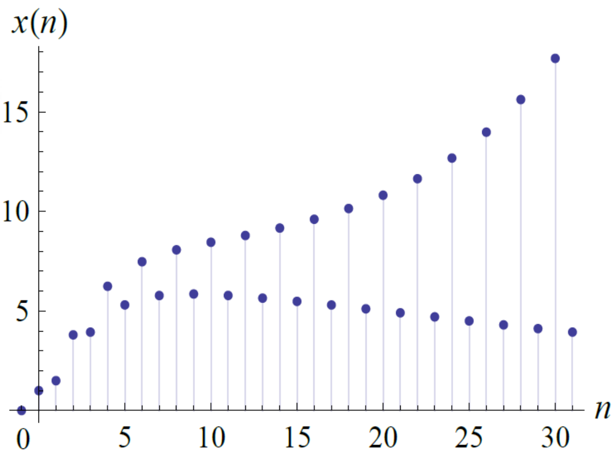
Örnek 3.9.5

$$x_{n+1} = \frac{3x_n + 5x_{n-1}}{1 + x_n} \tag{3.14}$$

denkleminin çözümleri ve çözümlerinin sınırsızlığı aşağıda verilmiştir.

Çizelge 3.7 (3.14) denkleminin çözümleri

n	-1	0	1	2	3
x_n	0	1	1.5	3.8	3.9375
x_{n+5}	6.2405	5.3047	7.4732	5.7762	8.0715



Şekil 3.7 (3.14) denkleminin sınırsız çözümlere sahip olması. $(x_{-1} = 0, x_0 = 1)$

Problem (3.1) 'in Cevabı

Giriş bölümünde bahsedilen Problem (3.1) 'in (i)-(iv) sorularının cevapları aşağıdadır.

(i) (3.1) denkleminin her pozitif çözümü sınırlıdır ancak ve ancak

$$\beta \leq A + \alpha$$

dır.

(ii) (3.1) denkleminin her pozitif çözümü sıfıra yakınsar ancak ve ancak

$$\alpha + \beta \leq A$$

dır.

(iii) (3.1) denkleminin her pozitif çözümü pozitif denge noktasına yakınsar ancak ve ancak

$$A - \alpha < \beta < A + \alpha$$

dır.

(iv) (3.1) denkleminin her pozitif çözümü iki periyotlu çözüme yakınsar ancak ve ancak

$$\beta = A + \alpha$$

dır.

BÖLÜM 4

$x_{n+1} = \dfrac{\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1}}{A + x_n}$ FARK DENKLEMİ

4.1 GİRİŞ

Bu bölümde Gibbons et al. (2002) kaynağından yararlanılmıştır.

α, β, γ, A parametreleri negatif olmayan reel sayılar ve x_{-1} ve x_0 negatif olmayan başlangıç koşulları olmak üzere, paydası daima pozitif olan

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1}}{A + x_n}, \; n = 0, 1, ... \tag{4.1}$$

ikinci dereceden rasyonel fark denkleminin çözümlerinin periyodikliği, yakınsaklık davranışı ve sınırlılığını inceleyeceğiz.

(4.1) denkleminin çeşitli özel durumları Amleh et al. (1999), Gibbons et al. (2000), Gibbons et al. (2000a) ve Kulenovic et al. 'da (2000) araştırılmıştır.

Bizim buradaki amacımız, bilinen sonuçları göstererek ve birleştirerek bunları (4.1) denklemine genişletmektir. Ana sonucumuz, (4.1) denkleminin çözümlerinin aşağıdaki **trichotomy** karakterini göstermesidir.

Teorem 4.1.1

(a)

$$\gamma = \beta + A \tag{4.2}$$

olsun. O halde (4.1) denkleminin bütün çözümleri, iki periyotlu çözüme yakınsar.

(b)

$$\gamma > \beta + A \tag{4.3}$$

olduğunu farzedelim. O halde (4.1) denklemi sınırsız çözümlere sahiptir.

(c)

$$\gamma < \beta + A \tag{4.4}$$

olduğunu varsayalım. O halde (4.1) denkleminin her çözümü sonlu limite sahiptir.

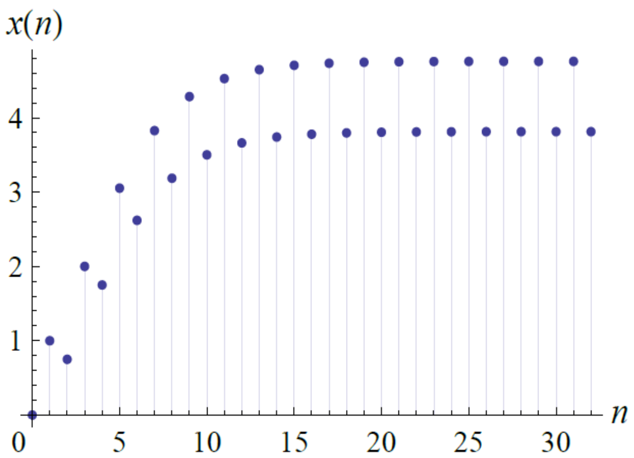
Örnek 4.1.2

$$x_{n+1} = \frac{1 + 2x_n + 5x_{n-1}}{3 + x_n} \tag{4.5}$$

denkleminin çözümleri ve çözümlerinin yakınsaklık durumu aşağıda verilmiştir.

Çizelge 4.1 (4.5) denkleminin çözümleri

n	0	1	2	3	4
x_n	0	1	0.75	2	1.75
x_{n+5}	3.0526	2.6195	3.8263	3.1862	4.2843



Şekil 4.1 (4.5) denkleminin bütün çözümlerinin iki periyotlu çözüme yakınsaması.
$(x_0 = 0, x_1 = 1)$

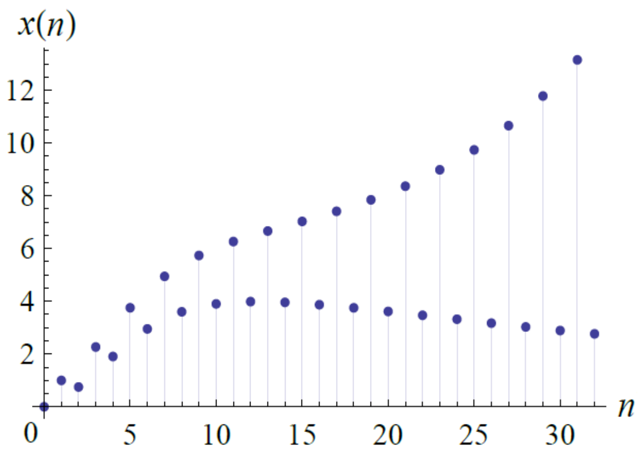
Örnek 4.1.3

$$x_{n+1} = \frac{1 + 2x_n + 6x_{n-1}}{3 + x_n} \tag{4.6}$$

denkleminin çözümleri ve çözümlerinin sınırsızlığı aşağıda verilmiştir.

Çizelge 4.2 (4.6) denkleminin çözümleri

n	0	1	2	3	4
x_n	0	1	0.75	2.26667	1.90506
x_{n+5}	3.75329	2.95218	4.94341	3.60046	5.73618



Şekil 4.2 (4.6) denkleminin sınırsız çözümlere sahip olması. ($x_0 = 0, x_1 = 1$)

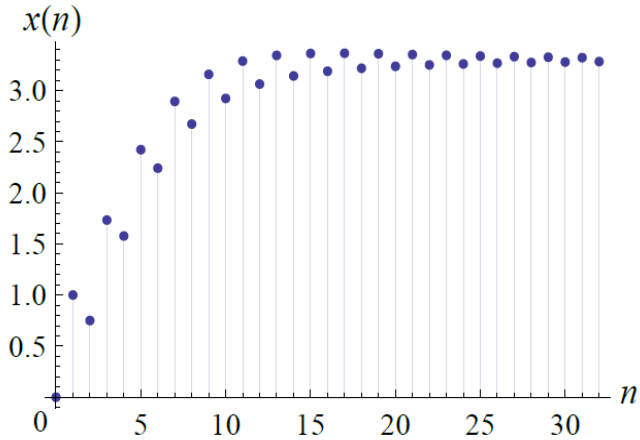
Örnek 4.1.4

$$x_{n+1} = \frac{1 + 2x_n + 4x_{n-1}}{3 + x_n} \tag{4.7}$$

denkleminin çözümleri ve çözümlerinin limit durumu aşağıda verilmiştir.

Çizelge 4.3 (4.7) denkleminin çözümleri

n	0	1	2	3	4
x_n	0	1	0.75	1.7333	1.5774
x_{n+5}	2.4223	2.2415	2.8946	2.6728	3.1596



Şekil 4.3 (4.7) denkleminin her çözümünün sonlu limite sahip olması. $(x_0 = 0, x_1 = 1)$

Teorem (4.1.1) 'in (a) kısmında, (4.1) denkleminin her $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün iki periyotlu bir çözüme yakınsamasından, $\{x_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{x_{2n+1}\}_{n=-1}^{\infty}$ tek ve çift alt dizilerinin $n \to \infty$ iken sonlu limitlere sahip olduğunu ve bu limitlerin bazen eşit olmalarına rağmen her zaman eşit olmadığını anlarız. Gerçekten, (4.2) sağlandığında (4.1) denklemi, asıl iki periyotlu sonsuz çoklukta çözüme sahiptir.

(4.3) sağlandığında, (4.1) denklemi eyer noktası olan bir pozitif denge noktasına sahiptir. Dolayısıyla kararlı manifold teoreminden, (4.1) denklemi pozitif denge noktasına yakınsayan sınırlı çözümlere sahiptir.

(4.4) sağlandığında, (4.1) denklemi sıfır veya pozitif olan bir tek denge noktasına veya biri sıfır diğeri pozitif olan iki denge noktasına sahip olabilir. (4.1) denkleminin tek denge noktası olduğunda, bu global asimptotik kararlıdır. (4.1) denkleminin iki denge noktası olduğunda, sıfır denge noktası kararsızdır, pozitif denge noktası ise lokal asimptotik kararlıdır ve bu pozitif denge noktası sıfır olmayan tüm çözümlerinin bir global çekicisidir.

I reel sayıların herhangi bir aralığı ve $f \in C^1[I \times I, I]$ olsun. $\overline{x} \in I$,

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \; n = 0, 1, ... \tag{4.8}$$

fark denkleminin bir denge noktası yani

$$\overline{x} = f(\overline{x}, \overline{x})$$

olsun.

4.2 DENGE NOKTALARI VE LİNEER KARARLILIK

(4.1) denkleminin denge noktaları,

$$\overline{x}^2 - (\beta + \gamma - A)\overline{x} - \alpha = 0$$

ikinci derece denkleminin negatif olmayan çözümleridir.

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{\beta\left(A + x_n\right) - \left(\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1}\right)}{\left(A + x_n\right)^2} = \frac{\beta\left(A + x_n\right) - \left(A + x_n\right)x_{n+1}}{\left(A + x_n\right)^2}$$

$$\frac{\partial f\left(\overline{x}, \overline{x}\right)}{\partial x_n} = \frac{\beta\left(A + \overline{x}\right) - \left(A + \overline{x}\right)\overline{x}}{\left(A + \overline{x}\right)^2} = \frac{\beta - \overline{x}}{A + \overline{x}} = s$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} = \frac{\gamma\left(A + x_n\right)}{\left(A + x_n\right)^2} = \frac{\gamma}{\left(A + x_n\right)}$$

$$\frac{\partial f\left(\overline{x}, \overline{x}\right)}{\partial x_{n-1}} = \frac{\gamma}{A + \overline{x}} = t$$

olduğundan (4.1) denkleminin $\overline{x}$ noktasındaki lineerleştirilmiş denklemi

$$y_{n+1} - \frac{\beta - \overline{x}}{A + \overline{x}}y_n - \frac{\gamma}{A + \overline{x}}y_{n-1} = 0, \quad n = 0, 1, ...$$

veya

$$y_{n+1} + \frac{\gamma\overline{x} + \alpha - \beta A}{(A + \beta + \gamma)\overline{x} + \alpha + A^2}y_n - \frac{\gamma\overline{x} + \gamma A}{(A + \beta + \gamma)\overline{x} + \alpha + A^2}y_{n-1} = 0, \quad n = 0, 1, ...$$

dır.

$$\alpha = 0 \quad \text{ve} \quad A > 0$$

iken

$$\begin{aligned} \overline{x}^2 - (\beta + \gamma - A)\overline{x} &= 0 \\ \overline{x}\left(\overline{x} - (\beta + \gamma - A)\right) &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $\overline{x} = 0$, (4.1) denkleminin bir denge noktasıdır.

$$\alpha = 0 \quad \text{ve} \quad \beta + \gamma \leq A \tag{4.9}$$

olduğunda 0, (4.1) denkleminin tek denge noktasıdır.

$$\alpha = 0 \quad \text{ve} \quad \beta + \gamma > A > 0 \tag{4.10}$$

olduğunda sıfır dengesine ek olarak, (4.1) denklemi

$$\overline{x} = \beta + \gamma - A$$

pozitif denge noktasına sahiptir.

$$\alpha > 0$$

iken

$$\overline{x}_{1,2} = \frac{(\beta + \gamma - A) \pm \sqrt{(\beta + \gamma - A)^2 + 4\alpha}}{2}$$

olduğundan (4.1) denkleminin tek pozitif denge noktası

$$\overline{x} = \frac{(\beta + \gamma - A) + \sqrt{(\beta + \gamma - A)^2 + 4\alpha}}{2}$$

dir.

Aşağıdaki sonuç, Teorem (1.2.7) ve (1.2.10) 'nin bir sonucu olarak ve bazı basit hesaplamalar ile bulunur.

Lemma 4.2.1 *(a) $A > 0$ ve (4.9) sağlansın. O halde (4.1) denkleminin sıfır dengesi global asimptotik kararlıdır.*

(b) Varsayalım ki (4.10) sağlansın. Bu durumda sıfır dengesi kararsızdır. Ayrıca, sıfır dengesi

$$\gamma < \beta + A$$

olduğunda bir eyer noktasıdır ve

$$\gamma > \beta + A$$

olduğunda da bir püskürtücüdür.

$$\gamma = \beta + A$$

olduğunda, (4.1) denklemi asıl periyotlu iki çözüme sahiptir ve sıfır dengesindeki lineerleştirilmiş denklemin karakteristik kökleri,

$$\lambda_1 = -1 \quad ve \quad \lambda_2 = 1 + \frac{\beta}{A}$$

dır. Sıfır dengesine ek olarak, (4.10) sağlandığında, (4.1) denklemi

$\gamma < \beta + A$

olduğunda lokal asimptotik kararlı

$\gamma > \beta + A$

olduğunda eyer noktası olan bir

$\overline{x} = \beta + \gamma - A$

pozitif denge noktasına sahiptir.

$\gamma = \beta + A$

olduğunda, (4.1) denklemi asıl periyotlu iki çözüme sahiptir ve $\overline{x} = \beta + \gamma - A$ *denge noktasındaki lineerleştirilmiş denklemin karakteristik kökleri*

$$\lambda_1 = -1 \quad ve \quad \lambda_2 = \frac{\gamma}{\beta + \gamma}$$

dır.

(c) $\alpha > 0$ *olsun. O halde (4.1) denkleminin pozitif denge noktası*

$\gamma < \beta + A$

olduğunda lokal asimptotik kararlıdır ve

$\gamma > \beta + A$

olduğunda da bir kararsız eyer noktasıdır.

$\gamma = \beta + A$

olduğunda, (4.1) denklemi asıl periyotlu iki çözüme sahiptir ve denge noktasındaki lineerleştirilmiş denklemin karakteristik kökleri

$$\lambda_1 = -1 \quad ve \quad \lambda_2 = \frac{\beta + A}{\beta + A + \sqrt{\beta^2 + \alpha}} \in (0, 1)$$

dir.

İspat. (a) $A > 0$, $\alpha = 0$ ve $\beta + \gamma \leq A$ sağlansın. O halde

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1}}{A + x_n}$$

denkleminden

$$f_0(x_n, x_{n-1}) = \frac{\beta}{A + x_n} \text{ ve } f_1(x_n, x_{n-1}) = \frac{\gamma}{A + x_n}$$

bulunur.

(i)

$$f_0' = \frac{-\beta}{(A + x_n)^2} < 0$$

ve

$$f_1' = \frac{-\gamma}{(A + x_n)^2} < 0$$

olduğundan f_0 ve f_1 fonksiyonları her bir değişkenlerine göre artmayandır.

(ii) Her $x \geq 0$ için

$$f_0(x, x) = \frac{\beta}{A + x} > 0$$

dır.

(iii) Her $x, y \in (0, \infty)$ için

$$f_0(x, y) + f_1(x, y) = \frac{\beta}{A + x} + \frac{\gamma}{A + x} = \frac{\beta + \gamma}{A + x} < 1$$

bulunur. O halde Teorem (1.2.10) 'den (4.1) denkleminin sıfır denge noktası global asimptotik kararlıdır.

(b) $\alpha = 0$ ve $\beta + \gamma > A > 0$ sağlansın. $\gamma < \beta + A$ olduğunda $\overline{x} = 0$ denge noktasında

$$\begin{aligned} s^2 + 4t &= \left(\frac{\beta - \overline{x}}{A + \overline{x}}\right)^2 + 4\left(\frac{\gamma}{A + \overline{x}}\right) \\ &= \left(\frac{\beta}{A}\right)^2 + 4\left(\frac{\gamma}{A}\right) > 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} |1 - t| &= \left|1 - \frac{\gamma}{A}\right| \\ &= \left|\frac{A - \gamma}{A}\right| \end{aligned}$$

ve

$$|s| = \left|\frac{\beta - \overline{x}}{A + \overline{x}}\right| = \left|\frac{\beta}{A}\right|$$

olduğundan $\gamma < \beta + A$ olmak üzere $|1 - t| < |s|$ olduğunu buluruz. O halde (4.1) denkleminin $\overline{x} = 0$ denge noktası eyer noktasıdır.

$\gamma > \beta + A$ olduğunda ise $\overline{x} = 0$ denge noktasında

$$|t| = \left|\frac{\gamma}{A + \overline{x}}\right| = \left|\frac{\gamma}{A}\right| > 1$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$|1 - t| = \left|1 - \frac{\gamma}{A}\right| = \left|\frac{A - \gamma}{A}\right|$$

ve

$$|s| = \left|\frac{\beta - \overline{x}}{A + \overline{x}}\right| = \left|\frac{\beta}{A}\right|$$

olduğundan $\gamma > \beta + A$ olmak üzere $|1 - t| > |s|$ olduğunu buluruz. O halde (4.1) denkleminin $\overline{x} = 0$ denge noktası püskürtücüdür.

Son olarak $\gamma = \beta + A$ olduğunda $\overline{x} = 0$ denge noktasındaki lineerleştirilmiş denkleme karşılık gelen

$$\lambda^2 - \frac{\beta}{A}\lambda - \frac{\gamma}{A} = 0$$

karakteristik denkleminin kökleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{\beta}{A} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{A^2} + 4\frac{\gamma}{A}}}{2}$$

bulunur ve $\gamma = \beta + A$ yazarsak

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= \frac{\frac{\beta}{A} \pm \sqrt{\frac{\beta^2 + 4A\beta + 4A^2}{A^2}}}{2} \\
&= \frac{\frac{\beta}{A} \pm \sqrt{\frac{(\beta + 2A)^2}{A^2}}}{2} \\
&= \frac{\beta}{2A} \pm \frac{\beta + 2A}{2A}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{\beta}{2A} - \frac{\beta + 2A}{2A} \\
&= \frac{\beta - \beta - 2A}{2A} \\
&= \frac{-2A}{2A} \\
&= -1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \frac{\beta}{2A} + \frac{\beta + 2A}{2A} \\
&= \frac{\beta + \beta + 2A}{2A} \\
&= \frac{2\beta + 2A}{2A} \\
&= 1 + \frac{\beta}{A}
\end{aligned}$$

dır.

$\overline{x} = 0$ denge noktasına ek olarak, (4.10) sağlandığında ve $\gamma < \beta + A$ olduğunda

$$\overline{x} = \beta + \gamma - A$$

denge noktasını ele alırsak, lokal asimptotik kararlı olması için

$$|s| < 1 - t < 2$$

şartının sağlanması gerekir. Yani

$$\left| \frac{\beta - \overline{x}}{A + \overline{x}} \right| < 1 - \frac{\gamma}{A + \overline{x}} < 2$$

olmalıdır. O halde bu şartın sağlandığını iki durumda inceleyelim.

Durum 1. $\overline{x} = \beta + \gamma - A$ alındığında

$$\frac{\gamma}{A + \overline{x}} = \frac{\gamma}{\beta + \gamma} > 0$$

olduğu görülür, buradan

$$1 - \frac{\gamma}{A + \overline{x}} < 2$$

elde edilir.

Durum 2.

$$\left| \frac{\beta - \overline{x}}{A + \overline{x}} \right| < 1 - \frac{\gamma}{A + \overline{x}}$$

olduğunu göstermek için

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{A + \overline{x}} - 1 &< \frac{\beta - \overline{x}}{A + \overline{x}} < 1 - \frac{\gamma}{A + \overline{x}} \\
\gamma - A - \overline{x} &< \beta - \overline{x} < A + \overline{x} - \gamma \\
\gamma - A &< \beta < A + 2\overline{x} - \gamma
\end{aligned}$$

ifadesinin sağlanması gerekir. $\overline{x} = \beta + \gamma - A$ alındığında ve ayrıca $\gamma < \beta + A$, $\gamma + \beta > A$ olduğundan

$$\gamma - A < \beta < -A + 2\beta + \gamma$$

ifadesi sağlanır. O halde (4.1) denkleminin $\overline{x} = \beta + \gamma - A$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

Şimdi ise $\overline{x}$ denge noktasının $\gamma > \beta + A$ olduğunda, eyer noktası olup olmadığını gösterelim.

$\gamma > \beta + A$ olduğunda $\overline{x} = \beta + \gamma - A$ denge noktasında

$$\begin{aligned} s^2 + 4t &= \left(\frac{\beta - \overline{x}}{A + \overline{x}}\right)^2 + 4\left(\frac{\gamma}{A + \overline{x}}\right) \\ &= \left(\frac{A - \gamma}{\beta + \gamma}\right)^2 + 4\left(\frac{\gamma}{\beta + \gamma}\right) > 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} |1 - t| &= \left|1 - \frac{\gamma}{A + \overline{x}}\right| \\ &= \left|1 - \frac{\gamma}{\beta + \gamma}\right| \\ &= \left|\frac{\beta}{\beta + \gamma}\right| \end{aligned}$$

ve

$$|s| = \left|\frac{\beta - \overline{x}}{A + \overline{x}}\right| = \left|\frac{A - \gamma}{\beta + \gamma}\right|$$

olduğundan $\gamma > \beta + A$ olmak üzere $|1 - t| < |s|$ olduğunu buluruz. O halde (4.1) denkleminin $\overline{x} = \beta + \gamma - A$ denge noktası eyer noktasıdır.

$\gamma = \beta + A$ olduğunda $\overline{x} = \beta + \gamma - A$ denge noktasındaki lineerleştirilmiş denkleme karşılık gelen

$$\lambda^2 - \frac{A - \gamma}{\beta + \gamma}\lambda - \frac{\gamma}{\beta + \gamma} = 0$$

karakteristik denkleminin kökleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{A-\gamma}{\beta+\gamma} \pm \sqrt{\left(\frac{A-\gamma}{\beta+\gamma}\right)^2 + 4\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}}{2}$$

şeklinde bulunur ve $\gamma = \beta + A$ yazarsak

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= \frac{\frac{A-\gamma}{\beta+\gamma} \pm \sqrt{\frac{9\beta^2+12A\beta+4A^2}{(\beta+\gamma)^2}}}{2} \\
&= \frac{\frac{A-\gamma}{\beta+\gamma} \pm \sqrt{\frac{(3\beta+2A)^2}{(\beta+\gamma)^2}}}{2} \\
&= \frac{A-\gamma}{2(\beta+\gamma)} \pm \frac{3\beta+2A}{2(\beta+\gamma)}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{-4\beta-2A}{2(\beta+\gamma)} \\
&= \frac{-2\beta-A}{\beta+\beta+A} \\
&= \frac{-(2\beta+A)}{2\beta+A} \\
&= -1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \frac{3\beta+3A-\beta-A}{2(\beta+\gamma)} \\
&= \frac{\beta+A}{\beta+\gamma} \\
&= \frac{\gamma}{\beta+\gamma}
\end{aligned}$$

dır.

(c) $\alpha > 0$ sağlansın. $\gamma < \beta + A$ olduğunda $\overline{x} = \frac{(\beta+\gamma-A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}{2}$ pozitif denge noktasını ele alırsak, lokal asimptotik kararlı olması için

$$|s| < 1 - t < 2$$

şartının sağlanması gerekir. Yani

$$\left|\frac{\beta-\overline{x}}{A+\overline{x}}\right| < 1 - \frac{\gamma}{A+\overline{x}} < 2$$

olmalıdır. O halde bu şartın sağlandığını iki durumda inceleyelim.

Durum 1.

$$1 - \frac{\gamma}{A+\overline{x}} < 2$$

her zaman doğrudur. Çünkü

$$\overline{x} = \frac{(\beta+\gamma-A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}{2}$$

denge noktasında

$$\frac{\gamma}{A+\overline{x}} = \frac{2\gamma}{(\beta+\gamma+A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}} > 0$$

dır.

Durum 2.

$$\left|\frac{\beta-\overline{x}}{A+\overline{x}}\right| < 1-\frac{\gamma}{A+\overline{x}}$$

olduğunu ele alırsak

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{A+\overline{x}}-1 &< \frac{\beta-\overline{x}}{A+\overline{x}} < 1-\frac{\gamma}{A+\overline{x}} \\
\gamma-A-\overline{x} &< \beta-\overline{x} < A+\overline{x}-\gamma \\
\gamma-A &< \beta < A+2\overline{x}-\gamma
\end{aligned}$$

bulunur ve $\overline{x} = \frac{(\beta+\gamma-A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}{2}$ yazarsak $\gamma < \beta + A$ olduğunda

$$\gamma - A < \beta < \beta + \sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}$$

eşitsizliği sağlanır. O halde (4.1) denkleminin $\overline{x} = \frac{(\beta+\gamma-A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}{2}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

$\gamma > \beta + A$ olduğunda $\overline{x} = \frac{(\beta+\gamma-A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}{2}$ pozitif denge noktasını ele alırsak

$$\begin{aligned}
s^2+4t &= \left(\frac{\beta-\overline{x}}{A+\overline{x}}\right)^2 + 4\left(\frac{\gamma}{A+\overline{x}}\right) \\
&= \left(\frac{\beta - \frac{(\beta+\gamma-A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}{2}}{A+\frac{(\beta+\gamma-A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}{2}}\right)^2 + 4\left(\frac{\gamma}{A+\frac{(\beta+\gamma-A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}{2}}\right) > 0 \\
&= \left(\frac{(\beta-\gamma+A)-\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}{(\beta+\gamma+A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}\right)^2 + 4\left(\frac{2\gamma}{(\beta+\gamma+A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}\right) > 0
\end{aligned}$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
|1-t| &= \left|1-\frac{\gamma}{A+\overline{x}}\right| \\
&= \left|1-\frac{\gamma}{A+\frac{(\beta+\gamma-A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}{2}}\right| \\
&= \left|1-\frac{2\gamma}{(\beta+\gamma+A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}\right| \\
&= \left|\frac{(\beta-\gamma+A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}{(\beta+\gamma+A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}\right|
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
|s| &= \left|\frac{\beta-\overline{x}}{A+\overline{x}}\right| \\
&= \left|\frac{\beta-\frac{(\beta+\gamma-A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}{2}}{A+\frac{(\beta+\gamma-A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}{2}}\right| \\
&= \left|\frac{(\beta-\gamma+A)-\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}{(\beta+\gamma+A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}\right|
\end{aligned}$$

dır. $\gamma>\beta+A$ olmak üzere $(\beta-\gamma+A)<0$ olacağından dolayı $|1-t|<|s|$ olduğunu elde ederiz. O halde (4.1) denkleminin $\overline{x}=\frac{(\beta+\gamma-A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}{2}$ pozitif denge noktası eyer noktasıdır.

$\gamma=\beta+A$ olduğunda $\overline{x}=\frac{(\beta+\gamma-A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}{2}$ pozitif denge noktasındaki lineerleştirilmiş denkleme karşılık gelen

$$\lambda^2-\frac{\beta-\frac{(\beta+\gamma-A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}{2}}{A+\frac{(\beta+\gamma-A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}{2}}\lambda-\frac{\gamma}{A+\frac{(\beta+\gamma-A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}{2}}=0$$

$$\lambda^2-\frac{(\beta-\gamma+A)-\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}{(\beta+\gamma+A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}\lambda-\frac{2\gamma}{(\beta+\gamma+A)+\sqrt{(\beta+\gamma-A)^2+4\alpha}}=0$$

karakteristik denkleminde $\gamma=\beta+A$ yazarsak

$$\lambda^2+\frac{\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}}{2\beta+2A+\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}}\lambda-\frac{2\beta+2A}{2\beta+2A+\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}}=0$$

buluruz ve karakteristik kökleri

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= \frac{\frac{-\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}}{2\beta+2A+\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}}\pm\sqrt{\left(\frac{\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}}{2\beta+2A+\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}}\right)^2+4\frac{2\beta+2A}{2\beta+2A+\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}}}}{2} \\
&= \frac{\frac{-\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}}{2\beta+2A+\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}}\pm\sqrt{\frac{4\beta^2+4\alpha}{\left(2\beta+2A+\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}\right)^2}+4\frac{(2\beta+2A)\left(2\beta+2A+\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}\right)}{\left(2\beta+2A+\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}\right)^2}}}{2} \\
&= \frac{\frac{-\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}}{2\beta+2A+\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}}\pm 2\sqrt{\frac{\beta^2+\alpha}{\left(2\beta+2A+\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}\right)^2}+\frac{(2\beta+2A)\left(2\beta+2A+\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}\right)}{\left(2\beta+2A+\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}\right)^2}}}{2} \\
&= \frac{\frac{-\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}}{2\beta+2A+\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}}\pm 2\sqrt{\frac{\beta^2+\alpha+(2\beta+2A)^2+(2\beta+2A)\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}}{\left(2\beta+2A+\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}\right)^2}}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{-\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}}{2\beta+2A+\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}} \pm 2\sqrt{\frac{\beta^2+\alpha+(2\beta+2A)^2+(4\beta+4A)\sqrt{\beta^2+\alpha}}{\left(2\beta+2A+\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}\right)^2}}}{2} \\
&= \frac{\frac{-\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}}{2\beta+2A+\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}} \pm 2\sqrt{\frac{\left(2\beta+2A+\sqrt{\beta^2+\alpha}\right)^2}{\left(2\beta+2A+\sqrt{(2\beta)^2+4\alpha}\right)^2}}}{2} \\
&= \frac{-\sqrt{\beta^2+\alpha}}{2\beta+2A+2\sqrt{\beta^2+4}} \pm \frac{2\beta+2A+\sqrt{\beta^2+\alpha}}{2\beta+2A+2\sqrt{\beta^2+\alpha}}
\end{aligned}$$

şeklinde elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{-\sqrt{\beta^2+\alpha}}{2\beta+2A+2\sqrt{\beta^2+\alpha}} - \frac{2\beta+2A+\sqrt{\beta^2+\alpha}}{2\beta+2A+2\sqrt{\beta^2+\alpha}} \\
&= \frac{-\sqrt{\beta^2+\alpha} - \left(2\beta+2A+\sqrt{\beta^2+\alpha}\right)}{2\beta+2A+2\sqrt{\beta^2+\alpha}} \\
&= \frac{-\left(2\beta+2A+2\sqrt{\beta^2+\alpha}\right)}{2\beta+2A+2\sqrt{\beta^2+\alpha}} \\
&= -1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \frac{-\sqrt{\beta^2+\alpha}}{2\beta+2A+2\sqrt{\beta^2+\alpha}} + \frac{2\beta+2A+\sqrt{\beta^2+\alpha}}{2\beta+2A+2\sqrt{\beta^2+\alpha}} \\
&= \frac{2\beta+2A}{2\beta+2A+2\sqrt{\beta^2+\alpha}} \\
&= \frac{\beta+A}{\beta+A+\sqrt{\beta^2+\alpha}}
\end{aligned}$$

dır.

4.3 $\alpha\beta\gamma A = 0$ OLMASI DURUMU

(4.1) denklemi aşağıdaki özel durumları kapsar; burada parametrelerin biri ya da birden fazlası sıfırdır ve aşağıdaki denklemlerde ortaya çıkan bu parametrelerin pozitif olduğu kabul edilmiştir.

$\beta = \gamma = A = 0$ için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{x_n}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{4.11}$$

$\alpha = \gamma = A = 0$ için

$$x_{n+1} = \beta, \quad n = 0, 1, ..., \tag{4.12}$$

$\alpha = \beta = A = 0$ için

$$x_{n+1} = \gamma \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{4.13}$$

$\beta = \gamma = 0$ için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{A + x_n}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{4.14}$$

$\alpha = \gamma = 0$ için

$$x_{n+1} = \frac{\beta x_n}{A + x_n}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{4.15}$$

$\alpha = \beta = 0$ için

$$x_{n+1} = \frac{\gamma x_{n-1}}{A + x_n}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{4.16}$$

$\gamma = A = 0$ için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n}{x_n}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{4.17}$$

$\beta = A = 0$ için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \gamma x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{4.18}$$

$\alpha = A = 0$ için

$$x_{n+1} = \frac{\beta x_n + \gamma x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{4.19}$$

$\gamma = 0$ için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n}{A + x_n}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{4.20}$$

$\beta = 0$ için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \gamma x_{n-1}}{A + x_n}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{4.21}$$

$\alpha = 0$ için

$$x_{n+1} = \frac{\beta x_n + \gamma x_{n-1}}{A + x_n}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{4.22}$$

$A = 0$ için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, ... \tag{4.23}$$

dir. (4.11) denkleminin bütün aşikar olmayan çözümleri, asıl iki periyotlu olacak şekilde periyodiktir.

$x_n = \gamma e^{y_n}$

değişken değişimi (4.13) denklemini sınırlı ve sınırsız çözümlere sahip olan

$y_{n+1} + y_n - y_{n-1} = 0, \quad n = 0, 1, ...$

lineer denklemine indirger. Denge noktası bir eyer noktasıdır.
(4.14), (4.15), (4.17) ve (4.20) denklemleri Riccati formundadır ve bunların çözümleri, pozitif denge noktasına sahipse pozitif denge noktasına yakınsar ya da pozitif denge noktası yoksa, sıfır dengesine yakınsar.
(4.1) denkleminin özel durumları olan (4.16), (4.18) ve (4.20) denklemleri için Teorem (4.1.1) 'in sağlandığı Gibbons et al. 'da (2000) incelenmiştir.

$x_n = \gamma y_n$

değişken değişimi (4.19) denklemini

$p = \dfrac{\beta}{\gamma}$

olmak üzere Amleh et al. 'da (1999) incelenen

$$y_{n+1} = p + \frac{y_{n-1}}{y_n}, \quad n = 0, 1, ... \tag{4.24}$$

fark denklemine dönüştürür. Gerçekten bu, Teorem (4.1.1) 'in sağlandığını gösteren (4.1) denkleminin ilk özel durumudur.

$y_n = p + z_n$

değişken değişimi ile (4.24) denkleminin, (4.21) denkleminin bir özel durumuna indirgenmesi ilgi çekicidir. (4.1) denkleminin özel durumu olan (4.22) denklemi için Teorem (4.1.1) 'in sağlandığı Kulenovic et al. 'da (2000) incelenmiştir.

$x_n = y_n + \beta$

değişken değişimi (4.23) denklemini (4.21) denkleminin bir formu olan

$$y_{n+1} = \frac{(\alpha + \beta\gamma) + \gamma y_{n-1}}{\beta + y_n}, \quad n = 0, 1, ...$$

fark denklemine indirger.

Özetle, tüm bu özel durumlar için Teorem (4.1.1) 'in sağladığını görebiliriz ve ispatlarını Gibbons et al. (2000) ve Kulenovic et al. 'da (2000) bulunabilir. Ayrıca bahsettiğimiz Teorem (4.1.1) 'in (a) kısmının ispatı Gibbons et al. 'da (2000a) verilmiştir.

KAYNAKLAR

Amleh A M, Grove E A, Ladas G and Georgiou D A (1999) On the Recursive Sequence $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}$. *J. Math. Anal. Appl.*, 233: 790-798.

Amleh A M, Camouzis E and Ladas G (2008) On the Dynamics of a Rational Difference Equation, Part 1. *International J. of Difference Equations (IJDE)*, 3(1): 1-35.

Camouzis E and Ladas G (2008) Dynamics of Third Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjecture. Chapman & Hall/CRC, London.

Gibbons C H, Kulenovic M R S, Ladas G (2000) On the Recursive Sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha+\beta x_{n-1}}{\gamma+x_n}$. *Math. Sci. Res. Hot-Line*, 4(2): 1-11.

Gibbons C H, Kulenovic M R S, Ladas G (2000a) On the Dynamics of $x_{n+1} = \frac{\alpha+\beta x_{n+\gamma x_{n-1}}}{A+Bx_n}$, Proceedings of the Fifth International Conference on Difference Equations and Applications. Jan 3-7, 2000, Temuco, Chile, *Gordon and Breach Science Publishers*.

Gibbons C H, Kulenovic M R S, Ladas G and Voulov H D (2002) On the Trichotomy Character $x_{n+1} = \frac{\alpha+\beta x_{n+\gamma x_{n-1}}}{A+x_n}$. *J. of Diff. Equations and Applications*, 8(1): 75-92.

Grove E A, Kent C M, Ladas G, Levins R and Valicenti S (2000) Global Stability in some population models. Proceedings of the Fourth International Conference on Difference Equations and Applications. August 27-31, 1999, Poznan, Poland, *Gordon and Breach Science Publishers*, 149-176.

Kocic V L and Ladas G (1993) Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications. *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht.

Kulenovic M R S and Ladas G (2000) Open Problems and Conjectures: On Period Two Solutions of $x_{n+1} = \frac{\alpha+\beta x_{n+\gamma x_{n-1}}}{A+Bx_{n+Cx_{n-1}}}$. *J. Difference Equ. Appl.*, 5:641-646.

Kulenovic M R S, Ladas G, Prokup N R (2000) On the Recursive Sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n+\beta x_{n-1}}}{A+x_n}$. *J. of Difference Equations and Applications*, 6: 563-576.

Kulenovic M R S and Ladas G (2002) Dynamics of Second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjecture. Chapman & Hall/CRC, London.

Ladas G (1995) Open Problems and Conjectures. *J. Difference Equ. Appl.*, 1(3): 317-321.

Ladas G (1999) Progress Report on $x_{n+1} = \frac{\alpha+\beta x_{n+\gamma x_{n-1}}}{A+Bx_{n+Cx_{n-1}}}$. *J. Diff. Equ. Appl.*, 5(2): 211-215.

ÖZGEÇMİŞ

Yalçın GİRGİN, 1990 yılında Zonguldak’ta doğdu. İlköğretim öğrenimini Zonguldak Yayla İlköğretim Okulu’nda, lise öğrenimini Zonguldak Fener Y.D.A Lisesi’nde tamamladı. 2008 yılında Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne girdi; 2013 yılında mezun oldu. Aynı yıl girdiği Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına başladı.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Terakki Mah. Vatan Cad. Dener Apt. No: 12/6
Merkez / ZONGULDAK

Tel : 0537 613 67 67
E-posta : yalcingirgin@hotmail.com