DEĞİŞKEN SINIRI OLAN DÖRTYÜZLÜ (ÜÇGEN PİRAMİT) BÖLGEDE ÜÇ DEĞİŞKENLİ SÜREKLİ FONKSİYONLARIN BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARIYLA AĞIRLIKLI YAKLAŞIMI

Afşin Kürşat GAZANFER

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Doktora Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

ZONGULDAK
Haziran 2015

KABUL:

Afşin Kürşat GAZANFER tarafından hazırlanan "DEĞİŞKEN SINIRI OLAN DÖRTYÜZLÜ (ÜÇGEN PİRAMİT) BÖLGEDE ÜÇ DEĞİŞKENLİ SÜREKLİ FONKSİYONLARIN BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARIYLA AĞIRLIKLI YAKLAŞIMI" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir. 19/06/2015

Başkan : Doç. Dr. Tülin COŞKUN
Bülent Ecevit Üniversitesi

Üye : Prof. Dr. Ertan İBİKLİ
Ankara Üniversitesi

Üye : Doç. Dr. İlhan KARATAŞ
Bülent Ecevit Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Can Murat DİKMEN
Bülent Ecevit Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nazmiye GÖNÜL
Bülent Ecevit Üniversitesi

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. 29/06/2015

Prof. Dr. Kemal BÜYÜKGÜZEL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Afşin Kürşat GAZANFER

ÖZET

Doktora Tezi

DEĞİŞKEN SINIRI OLAN DÖRTYÜZLÜ (ÜÇGEN PİRAMİT) BÖLGEDE ÜÇ DEĞİŞKENLİ SÜREKLİ FONKSİYONLARIN BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARIYLA AĞIRLIKLI YAKLAŞIMI

Afşin Kürşat GAZANFER

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimler Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Tülin COŞKUN
Haziran 2015, 147 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde; tez boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca, bu bölümde çeşitli fonksiyon uzayları ile doğrusal pozitif operatörlerin genel özellikleri tanıtılmış ve bu uzaylar için bazı yaklaşım teoremleri verilmiştir.

İkinci ve üçüncü bölümlerde; sırası ile tek değişkenli ve iki değişkenli fonksiyonlar için Bernstein-Chlodowsky polinomları ile yaklaşım özellikleri incelenmiş, ayrıca yaklaşım hızları alışılmış süreklilik modülü ve ağırlıklı süreklilik modülü yardımı ile analiz edilmiştir.

Son bölüm olan dördüncü bölümde ise, değişken sınırı olan üçgen piramit bölgede üç değişkenli sürekli fonksiyonlar için Bernstein-Chlodowsky polinomları ile yaklaşım

ÖZET (devam ediyor)

özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca, yaklaşım hızları alışılmış süreklilik modülü ve ağırlıklı süreklilik modülü tanımları yardımıyla incelenmiştir. Yapılan yaklaşımın etkinliği grafiksel olarak gösterilmiştir.

Anahtar Sözcükler: $C[a,b]$, Bernstein-Chlodowsky Polinomları, Ağırlıklı Uzay, Doğrusal Pozitif Operatörler, Ağırlıklı Süreklilik Modülü.

Bilim Kodu: 403.03.01

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

WEIGHTED APPROXIMATION OF CONTINUOUS FUNCTIONS OF THREE VARIABLES IN A TETRAHEDRON WITH VARIABLE BOUNDARY BY BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLYNOMS

Afşin Kürşat GAZANFER

Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Tülin COŞKUN
June 2015, 147 pages

This thesis consists of four sections. The first section is devoted to introduction and some essential definitions and theorems. Moreover, some function spaces and the general properties of linear positive operators are introduced and some of the approximation theorems for these spaces are given.

In the second and third sections the properties of approximation by Bernstein-Chlodowsky polynomials for functions of one variable and two variables are investigated respectively, and the rates of approximations are analysed by the usual modulus of continuity and the weighted modulus of continuity.

ABSTRACT (continued)

In the fourth chapter which is the final chapter of the thesis; the properties of approximation by Bernstein-Chlodowsky polynomials for continuous functions of three variables in a tetrahedron with variable boundary. The rates of approximations are analysed by the usual modulus of continuity and the weighted modulus of continuity. The effectiveness of this approximation is presented graphically.

Key Words: $C[a,b]$, Bernstein-Chlodowsky Polynoms, Weighted Space, Linear Positive Operators, Weighted Modulus of Continuity.

Science Code: 403.03.01

TEŞEKKÜR

Tezin hazırlanması ve yazılması konusunda çok kıymetli görüş ve önerileriyle yol gösteren, lisans öğrenimimden itibaren beni yetiştirmek için değerli vaktini ayıran değerli hocalarım Bölüm Başkanım Sayın Prof. Dr. Erdal COŞKUN ve tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Tülin COŞKUN'a, tez konusunun belirlenmesinden itibaren değerli fikir ve önerileri ile çalışmalarıma ışık tutan merhum Sayın Prof. Dr. Akif HACIYEV'e, tezin hazırlanmasında büyük emeği geçen, değerli vaktini bana ayıran arkadaşım Yrd. Doç. Dr. Nazmiye GÖNÜL' e, tezimin her aşamasında yanımda olan Sayın Prof. Dr. Ertan İBİKLİ ve Sayın Doç. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI'ya, ayrıca Sayın Doç. Dr. İlhan KARATAŞ'a ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Can Murat DİKMEN'e ve bu çalışma esnasında manevi desteklerini esirgemeyen eşim ve meslektaşım Nur GAZANFER'e ve aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KABUL ii
ÖZET iii
ABSTRACT v
TEŞEKKÜR vii
İÇİNDEKİLER ix
ŞEKİLLER DİZİNİ xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ xiii

BÖLÜM 1 GİRİŞ 1

1.1 SONLU ARALIKTA TANIMLI SÜREKLİ FONKSİYONLAR UZAYI 3
1.2 DOĞRUSAL POZİTİF OPERATÖRLER VE GENEL ÖZELLİKLERİ 4
1.3 SONSUZ BÖLGELERDE SÜREKLİ VE SINIRLI FONKSİYON UZAYLARI 7
1.4 $C[a,b]$ UZAYINDA TANIMLI OPERATÖR DİZİLERİ İÇİN KOROVKİN TEOREMLERİ 13
1.5 $C\rho(\mathbb{R}^m)$ UZAYINDA YAKINSAKLIK KOŞULLARI 17
1.6 BİR DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN SÜREKLİLİK MODÜLÜ VE ÖZELLİKLERİ 27
1.7 İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN TAM VE KISMİ SÜREKLİLİK MODÜLÜ TANIMI VE ÖZELLİKLERİ 28
1.8 ÜÇ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN TAM VE KISMİ SÜREKLİLİK MODÜLÜ TANIMI VE ÖZELLİKLERİ 34

BÖLÜM 2 BİR DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI İLE YAKLAŞIM 41

2.1 WEIERSTRASS YAKINSAKLIK TEOREMİ VE BERNSTEIN İSPATI 41
2.2 BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI VE YAKLAŞIM KOŞULLARI 45

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

2.3 BİR DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARININ YAKLAŞIM HIZI 51

BÖLÜM 3 İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI İLE YAKLAŞIM 59

3.1 ÜÇGENSEL BÖLGEDE İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARA BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI VE YAKLAŞIM KOŞULLARI 59

3.2 İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARININ YAKLAŞIM HIZI 75

BÖLÜM 4 ÜÇ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI İLE YAKLAŞIM 93

4.1 ÜÇGEN PİRAMİT BÖLGEDE ÜÇ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI VE YAKLAŞIM KOŞULLARI.. 93

4.2 ÜÇ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARININ YAKLAŞIM HIZI 121

KAYNAKLAR 145

ÖZGEÇMİŞ 147

ŞEKİLLER DİZİNİ

No Sayfa

3.2.1 $f(x,y)=\sqrt{|x^2-y^2|}$ fonksiyonuna $n=7,=10$, $n=15$ ve $n=18$ için yaklaşım .. 91

4.2.1 $f(x,y,z)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ fonksiyonuna $n=10$, $n=25$, ...
$n=50$ ve $n=100$ için yaklaşım 142

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$C[a,b]$	: Her $x \in [a,b]$ için a'da soldan b'de sağdan sürekli fonksiyonlar uzayı
$B_\rho(\mathbb{R}^m)$	: $\mathbb{R}^m$ deki sınırlı fonksiyonların uzayı
$C_\rho(\mathbb{R}^m)$	: $B_\rho(\mathbb{R}^m)$ üzerindeki sürekli fonksiyonların uzayı
$\|.\|_{C[a,b]}$	: $C[a,b]$ uzayında norm
$\|.\|_\rho$	: C_ρ ve B_ρ uzaylarında norm
$C(\mathbb{R}_+^2)$	: $\mathbb{R}_+^2 = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ olmak üzere bu uzayda tanımlı ve sürekli fonksiyonların uzayı
$C(\mathbb{R}_+^3)$	: $\mathbb{R}_+^3 = \{(x,y,z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ olmak üzere bu uzayda tanımlı ve sürekli fonksiyonların uzayı
$L_n(f;x)$	: Doğrusal pozitif operatör dizisi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Matematiksel analizin önemli dallarından biri olan Yaklaşım Teorisi; verilen bir fonksiyona, basit ama daha iyi özelliklere sahip ve kullanışlı fonksiyonlar ailesi ile yaklaşımını inceler. Genel olarak, bir yaklaşım probleminde üç önemli durum belirlenmelidir. Bunlardan birincisi, yaklaşım yapılan f fonksiyonu, ikincisi yaklaşım fonksiyonunun ait olduğu uzay ve üçüncüsü ise bu yaklaşımın f fonksiyonuna ne kadar yaklaştığının belirlenmesidir. Buradan yola çıkılarak yapılan ve yaklaşım teorisinin temelini oluşturan araştırma 1885 yılında Weierstrass tarafından yapılmıştır.

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli, $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda $[a, b]$ aralığındaki her x için

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir P polinomunun varlığını kanıtlamıştır.

Picard, Volterra ve Lebesgue gibi önemli matematikçiler Weierstrass teoreminin kanıtını farklı yöntemler kullanarak vermişlerdir. Rus matematikçi Bernstein (1912), Weierstrass teoreminde belirtilen P polinomunun niteliğini Binom formülü yardımıyla; $x \in [0,1]$ için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

olacak şekilde ortaya koymuştur ve ayrıca keyfi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $x \in [0,1]$ ve yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için

$|f(x) - B_n(f;x)| < \varepsilon$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir.

1953 yılında Korovkin; $L_n: C[a,b] \rightarrow C[a,b]$ doğrusal pozitif operatörler dizisi olmak üzere her $x \in [a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^\eta; x) - x^\eta\|_{C[a,b]} = 0 \qquad \eta = 0,1,2$$

şeklindeki üç koşul sağlandığında, $[a,b]$ de sürekli ayrıca a da soldan b de sağdan sürekli ve tüm reel eksende sınırlı her f fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f;x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliği geçerli olduğunu göstermiştir. Bu teoremin ispatından sonra Bernstein polinomlar dizisi doğrusal pozitif operatörler dizisi olacak şekilde ele alınarak birçok genelleşmesi tanımlanmış ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Bernstein polinomlarının çok yaygın olarak kullanılmasının nedeni sade inşası ve önemli özelliklerinin olmasındandır. 1937 yılında Bernstein öğrencisi Chlodowsky, Bernstein polinomlarını $[0, b_n]$ aralığına taşıyıp

$$B_n\ (f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n} b_n\right) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}, \quad 0 \leq x \leq b_n$$

şeklinde tanımını vermiştir. Chlodowsky tanımladığı bu operatör dizilerinin yakınsaklık özelliklerini sınırsız aralıkta incelemiştir; burada b_n artan,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

olacak şekilde gerçel değerli bir dizidir.

Verilen bir f fonksiyona yaklaşım yapan doğrusal pozitif operatör dizilerinin varlığı, yapılan yaklaşımın ne kadar hata ile yapıldığı sorusunu gündeme taşımıştır. Bu nedenle bu çalışmalar dünyanın birçok ülkesinde matematiksel çalışmaların ilk sıralarında yer almaktadır.

Bu tezde; üç değişkenli fonksiyonlar için Bernstein-Chlodowsky operatör dizilerinin tanımını ortaya koyup, $C[0,A]$ uzayı ve ağırlıklı uzaylarda yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Daha sonra yine belirtilen uzaylarda Bernstein-Chlodowsky operatör dizilerinin yaklaşım hızları süreklilik modülü ve ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla araştırılmıştır.

1.1 SONLU ARALIKTA TANIMLI SÜREKLİ FONKSİYONLAR UZAYI

Tanım 1.1.1

$[a,b]$ sonlu aralığı üzerinde tanımlanmış ve aralığın tüm noktalarında sürekli olan $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonlar uzayına $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı denir ve $C[a,b]$ ile gösterilir. Kısaca

$$C[a,b]=\{f: f, \text{her } x\in[a,b] \text{ için sürekli ve } a \text{ da soldan } b \text{ de sağdan sürekli}\}$$

şeklinde ifade edilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 1.1.2

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $C[a,b]$ uzayında norm;

$$\|f\|_{C[a,b]}=\max_{a\le x\le b}|f(x)|$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Önerme 1.1.3

$(f_n)\subset C[a,b]$ fonksiyon dizisinin bir $g\in C[a,b]$ fonksiyonuna düzgün yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul her $x\in[a,b]$ ve $M>0$ olmak üzere sıfıra yakınsayan bir $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için,

$$|f_n(x)-g(x)|<M\varepsilon_n$$

olmasıdır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 1.1.4 (Hölder Eşitsizliği)

$p > 0$ ve $q > 0$ reel sayıları $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartını sağlasın. Bu durumda her (a_k) ve (b_k) dizisi için

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik $p = q = 2$ için Cauchy-Schwarz eşitsizliği olarak adlandırılır (Lorentz 1953).

1.2 DOĞRUSAL POZİTİF OPERATÖRLER VE GENEL ÖZELLİKLERİ

Tanım 1.2.1

X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. Her $f \in X$ için,

$$L(f; x) = g(x)$$

olacak şekilde bir $g \in Y$ bulunuyorsa L dönüşümüne *operatördür* denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995). Bernstein operatörü ve Hacıyev operatörü gibi örnekler verilebilir.

Tanım 1.2.2

X, Y doğrusal uzaylar, $f_1, f_2 \in X$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ olsun.

$$L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, x) = \alpha_1 L(f_1, x) + \alpha_2 L(f_2, x)$$

eşitliğini sağlayan L operatörüne *doğrusaldır* denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Uyarı 1.2.3

L doğrusal bir operatör olsun.

$$
\begin{aligned}
L(0,x) &= L(f(t)-f(t),x) \\
&= L(f(t),x)-L(f(t),x) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olduğundan $L(0,x)=0$ dır.

Tanım 1.2.4

$X^{+} \coloneqq \{f : f(x) \geq 0, \text{her } x \in \mathbb{R} \text{ için}\}$, $Y^{+} \coloneqq \{g : \ g(x) \geq 0, \text{her } x \in \mathbb{R} \text{ için}\}$

iki fonksiyon uzayı olsun. $L: X^{+} \to Y^{+}$ operatörü için, $L(X^{+}) \subset L(Y^{+})$ oluyorsa L' ye *pozitif operatördür* denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Uyarı 1.2.5

L doğrusal pozitif operatörü negatif fonksiyonları da negatif fonksiyonlara dönüştürür.

Uyarı 1.2.6

Doğrusal pozitif operatörler monotondur.

Kanıt:
Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \leq g(x)$ olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x)-g(x) \leq 0$ eşitsizliği elde edilir. Uyarı 1.2.5 ve operatörün doğrusallığından

$$
\begin{aligned}
&L(f-g;x) \leq 0 \\
&L(f;x)-L(g;x) \leq 0
\end{aligned}
$$

olur. Böylece $L(f;x) \leq L(g;x)$ bulunur.

Tanım 1.2.7

X ve Y normlu uzaylar ve $L: X \to Y$ doğrusal bir operatör olsun. Her $f \in X$ için

$$\|L(f;x)\|_Y \leq C\|f\|_X$$

oluyorsa *L'ye sınırlı operatör* denir. Bu *C* sabitlerinin en küçüğüne *L operatörünün normu* denir. Operatör normu

$$\|L\| = \inf\{C \mid \|L(f;x)\|_Y \leq C\|f\|_X\}$$

şeklinde gösterilir (Rudin 1973).

Önerme 1.2.8

X ve Y normlu uzaylar, $L: X \to Y$ doğrusal operatör olsun. $\|f\|_X \neq 0$ olmak üzere, L operatörünün normu:

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X} \tag{1.2.1}$$

biçiminde de tanımlanır (Rudin 1973).

Uyarı 1.2.9

X ve Y normlu uzaylar, $L: X \to Y$ doğrusal operatör olsun. $\|g\|_X = 1$ olmak üzere, L operatörünün normu;

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|g\|_X = 1} \|L(g;x)\|_Y$$

şeklinde olur (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Önerme 1.2.10

$L: X \to Y$ doğrusal pozitif operatör olsun. Bu durumda
$|L(f;x)| \leq L(|f|;x)$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt:

L doğrusal pozitif operatör olsun.

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

eşitsizliğine L operatörü uygulanır ve L operatörünün monotonluk özelliği kullanılırsa;

$$L(-|f|;x) \leq L(f;x) \leq L(|f|;x)$$

olur. L operatörünün doğrusallığından,

$$-L(|f|;x) \leq L(f;x) \leq L(|f|;x)$$

yazılabilir. Bu ise

$$|L(f;x)| \leq L(|f|;x)$$

olması demektir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

1.3 SONSUZ BÖLGELERDE SÜREKLİ VE SINIRLI FONKSİYON UZAYLARI

Tanım 1.3.1

ρ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}^m$ için $\rho(x) \geq 1$ olacak şekilde $\mathbb{R}^m$de sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca,

$$\lim_{|x|\to\infty} \rho(x) = \infty$$

olsun. $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\|f(x)\| \leq M_f \rho(x)$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar uzayına $B_\rho(\mathbb{R}^m)$ *uzayı* denir ve kısaca

$$B_\rho(\mathbb{R}^m) = \{f : \forall x \in \mathbb{R}^m \text{ için } \|f(x)\| \leq M_f \rho(x), f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}\}$$

şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 1.3.2

$B_\rho(\mathbb{R}^m)$ uzayındaki sürekli fonksiyonların uzayına $C_\rho(\mathbb{R}^m)$ *uzayı* denir. Bu uzay,

$$C_\rho(\mathbb{R}^m) = \{f : f \in B_\rho(\mathbb{R}^m) \text{ ve } f, \mathbb{R}^m \text{de sürekli}\}$$

şeklinde gösterilir.

$B_\rho(\mathbb{R}^m)$ ve $C_\rho(\mathbb{R}^m)$ uzaylarına *Ağırlıklı Uzay* denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 1.3.3

$B_\rho(\mathbb{R}^m)$ ve $C_\rho(\mathbb{R}^m)$ uzayları için norm,

$$\|f\|_{\boldsymbol{\rho}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Önerme 1.3.4

$L: C_\rho(\mathbb{R}^m) \to B_\rho(\mathbb{R}^m)$ dönüşümü yapan doğrusal pozitif operatörler sınırlıdır.

Önerme 1.3.5

Bir (f_n) fonksiyonlar dizisinin

$$\|f\|_\rho = \sup_{x\in\mathbb{R}^m} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$$

normunda sıfıra yaklaşması için gerekli ve yeterli koşul (ε_n) sıfır dizisi olmak üzere her $x \in \mathbb{R}^m$ için

$$|f_n(x)| \leq \varepsilon_n \rho(x)$$

olmasıdır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Önerme 1.3.6

$\rho \geq 1$ olmak üzere, ρ tüm $\mathbb{R}^m$ uzayında sürekli bir fonksiyon,

$$\lim_{|x|\to\infty} \rho(x) = \infty$$

ve $X = C_\rho(\mathbb{R}^m)$ ve $Y = B_\rho(\mathbb{R}^m)$ olsun. Bu durumda $L: C_\rho(\mathbb{R}) \to B_\rho(\mathbb{R})$ ye dönüşüm yapan doğrusal pozitif bir operatör olmak üzere;

$$\|L\|_{C_\rho(\mathbb{R})\to B_\rho(\mathbb{R})} \leq \|L(\rho;x)\|_\rho$$

eşitsizliği geçerlidir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 1.3.7 $m = 1$ olması durumunda ise $B_\rho(\mathbb{R})$

$$B_\rho(\mathbb{R}) = \{f : \forall x \in \mathbb{R} \text{ için } |f(x)| \leq M_f\, \rho(x)\}$$

şeklinde ifade edilir. Burada M_f, f fonksiyonuna bağlı bir sabit ve $\rho(x) = 1 + x^2$ olup,

$$\lim_{|x|\to\infty} \rho(x) = \infty$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyondur. $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayındaki sürekli fonksiyonların uzayına $C_\rho(\mathbb{R})$ *uzayı* denir. Bu uzay,

$$C_\rho(\mathbb{R}) = \{f : f \in B_\rho(\mathbb{R}) \text{ ve } f\ \mathbb{R} \text{ de sürekli}\}$$

şeklinde gösterilir.

Önerme 1.3.8

$$\lim_{|x|\to\infty} \rho(x) = \infty$$

eşitliğini sağlayan her $x \in \mathbb{R}$ için $\rho(x) \geq 1$ olacak şekilde $\mathbb{R}$ de sürekli bir fonksiyon olsun. $L: C_\rho \to B_\rho$ doğrusal pozitif operatör olsun. Bu durumda $f \in C_\rho$ olmak üzere

$$\|L(f;x)\| \leq M\|f\|_\rho$$

olması için gerekli ve yeterli koşul en az bir $M > 0$ için $\|L(\rho;x)\|_\rho \leq M$ olmasıdır. (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Kanıt:

($\Rightarrow$:) $L: C_\rho \to B_\rho$ doğrusal pozitif operatör ve $f \in C_\rho$ olsun. Bu durumda $L(f;x) \in B_\rho$ olur ve her $x \in \mathbb{R}$ ve $M > 0$ için $|L(f;x)| \leq M\rho(x)$ eşitsizliği sağlanır. Özel durumda ise $\rho \in C_\rho$ olduğundan $|L(\rho;x)| \leq M\rho(x)$ olur. L pozitif ve $\rho \geq 0$ olduğundan $L(\rho;x) \geq 0$ olur. Böylece her $x \in \mathbb{R}$ için $L(\rho;x) \leq M\rho(x)$ olur. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\frac{L(\rho;x)}{\rho(x)} \leq M \text{ ve } \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{L(\rho;x)}{\rho(x)} \leq M$$

olacağından

$$\|L(\rho;x)\|_\rho \leq M < \infty$$

elde edilir.

($\Leftarrow$:) Şimdi herhangi bir L operatörü için $\|L(\rho;x)\|_{\rho} \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısının var olduğu kabul edilsin. Bu durumda her $f \in C_{\rho}$ için L'nin monotonluğu ve pozitifliği kullanılarak;

$$\begin{aligned}|L(f;x)| &\leq L(|f|;x)\\ &= L\left(\frac{|f|\rho(t)}{\rho(t)};x\right)\\ &\leq L\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\frac{|f(t)|}{\rho(t)}\rho(t);x\right)\\ &= \|f\|_{\rho}L(\rho;x)\end{aligned}$$

olur. Son eşitsizliğin her iki tarafı $\rho(x)$ ile bölünüp supremum alınırsa;

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{|L(f;x)|}{\rho(x)} \leq \|f\|_{\rho}\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{|L(\rho;x)|}{\rho(x)}$$

eşitsizliği ve buradan operatör normu tanımı kullanılarak

$$\|L(f;x)\|_{\rho} \leq \|f\|_{\rho}\|L(\rho;x)\|_{\rho}$$

eşitsizliği elde edilir. Kabulden;

$$\|L(f;x)\|_{\rho} \leq M\|f\|_{\rho}$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. Bu ise kanıtı tamamlar.

Önerme 1.3.9

$(f_n) \subset B_{\rho}$ olacak şekilde (f_n) fonksiyonlar dizisi alalım. (f_n) fonksiyonlar dizisinin B_{ρ} uzayında sıfır fonksiyonuna yakınsaması için gerek ve yeter şart (ε_n) sıfır dizisi olmak üzere her $x \in \mathbb{R}$ için

$$|f_n(x)| \leq \varepsilon_n\rho(x)$$

olmasıdır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Uyarı 1.3.10

i) $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$
olmak üzere bu uzaydaki sürekli fonksiyonların uzayı için

$$C(\mathbb{R}_+^2) = \{f \mid f: \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R} \text{ sürekli}\}$$

gösterimi kullanılacaktır.

ii) $\rho(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ olmak üzere $C(\mathbb{R}_+^2)$ nin ağırlıklı uzayları;

$$B_\rho(\mathbb{R}_+^2) = \left\{f \mid \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \text{ için } |f(x, y)| \leq M_f(1 + x^2 + y^2)\right\}$$
$$C_\rho(\mathbb{R}_+^2) = \left\{f \mid f \in C(\mathbb{R}_+^2) \text{ ve } |f(x, y)| \leq M_f(1 + x^2 + y^2)\right\}$$

şeklinde gösterilecek olup bu uzaylar

$$\|f\|_{C_\rho(\mathbb{R}_+^2)} = \sup_{x \geq 0, y \geq 0} \frac{|f(x, y)|}{1 + x^2 + y^2}$$

normuyla birer doğrusal normlu uzaylardır.

Uyarı 1.3.11

i) $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

olmak üzere bu uzayda tanımlı ve sürekli fonksiyonların uzayı için

$$C(\mathbb{R}_+^3) = \{f \mid f: \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R} \text{ sürekli}\}$$

gösterimi kullanılacaktır.

ii) $\rho(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 + z^2$ olmak üzere $C(\mathbb{R}_+^3)$ nin ağırlıklı uzayları;

$B_\rho(\mathbb{R}_+^3) = \{f \mid \forall(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^3 \text{ için } |f(x,y,z)| \leq M_f(1 + x^2 + y^2 + z^2)\}$

$C_\rho(\mathbb{R}_+^3) = \{f \mid f \in C(\mathbb{R}_+^3) \text{ ve } |f(x,y,z)| \leq M_f(1 + x^2 + y^2 + z^2)\}$

şeklinde gösterilecek olup bu uzaylar

$$\|f\|_{C_\rho(\mathbb{R}_+^3)} = \sup_{x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0} \frac{|f(x,y,z)|}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$$

normuyla birer doğrusal normlu uzaylardır.

1.4 $C[a,b]$ UZAYINDA TANIMLI OPERATÖR DİZİLERİ İÇİN KOROVKİN TEOREMLERİ

Teorem 1.4.1 (Korovkin Teoremi)

$L_n: C[a,b] \to C[a,b]$ doğrusal pozitif operatörler dizisi olsun. Her $x \in [a,b]$ için $\eta = 0,1,2$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^\eta; x) - x^\eta\|_{C[a,b]} = 0 \tag{1.4.1}$$

şeklindeki üç koşul sağlanıyorsa, $[a,b]$ de sürekli ayrıca a da soldan b de sağdan sürekli ve tüm reel eksende sınırlı her f fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f;x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliği geçerlidir. (Korovkin 1960).

Kanıt:

f fonksiyonu $\mathbb{R}$'de sınırlı olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x)| \leq M$$

olacak şekilde en az bir $M > 0$ vardır.

$f \in C[a,b]$ olduğundan; her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır, öyle ki $x, t \in [a,b]$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ olur.

Her $t \in (-\infty, \infty)$ ve $x \in [a,b]$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda da $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği geçerlidir. Gerçekten; $x \in [a,b]$ ve $t \notin [a,b]$ olsun. $|t-x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği f fonksiyonu a' da soldan, b' de sağdan sürekli olduğu için doğrudur.

Diğer taraftan, $|t-x| \geq \delta$ olduğunda ise $\frac{|t-x|^2}{\delta^2} \geq 1$ olup açıkça

$$2M \leq \frac{2M}{\delta^2}|t-x|^2$$

eşitsizliğine ulaşılır. Üçgen eşitsizliği ve son eşitsizlikler kullanılarak her $\varepsilon > 0$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}|t-x|^2 \tag{1.4.2}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|L_n(f;x) - f(x)\|_{C[a,b]} &= \|L_n(f(t) - f(x) + f(x);x) - f(x)\|_{C[a,b]} \\
&= \|L_n(f(t) - f(x);x) + L_n(f(x);x) - f(x)\|_{C[a,b]} \\
&= \|L_n(f(t) - f(x);x) + f(x)L_n(1;x) - f(x)\|_{C[a,b]} \\
&= \|L_n(f(t) - f(x);x) + f(x)[L_n(1;x) - 1]\|_{C[a,b]} \\
&\leq \|L_n(f(t) - f(x);x)\|_{C[a,b]} + \|f(x)[L_n(1;x) - 1]\|_{C[a,b]} \\
&\leq \|L_n(f(t) - f(x);x)\|_{C[a,b]} + \max_{x\in[a,b]}|f(x)|\,\|[L_n(1;x) - 1]\|_{C[a,b]}
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur ve buradan ε_n sıfır dizisi olmak üzere

$$\|L_n(1;x) - 1\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon_n$$

olacağından,

$$\|L_n(f;x)-f(x)\|_{C[a,b]} \leq \|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|_{C[a,b]} + \varepsilon_n \|f\|_{C[a,b]} \tag{1.4.3}$$

eşitsizliği elde edilir. (1.4.2)' den

$$\begin{aligned}
L_n(|f(t)-f(x)|,x) &\leq L_n\left(\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2+\varepsilon;x\right)\\
&= L_n\left(\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)+L_n(\varepsilon;x)\\
&= \varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M}{\delta^2}L_n(t^2-2tx+x^2;x)\\
&= \varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M}{\delta^2}\left(L_n(t^2;x)-L_n(2tx;x)+L_n(x^2;x)\right)\\
&= \varepsilon(L_n(1;x)-1)+\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}[(L_n(t^2;x)-x^2)+x^2\\
&-2x(L_n(t;x)-x)-2x^2+x^2(L_n(1;x)-1)+x^2]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerli olup

$$\begin{aligned}
\|L_n(f(t)-f(x);x)\|_{C[a,b]} &= \max_{x\in[a,b]}|L_n(f(t)-f(x);x)|\\
&\leq \max_{x\in[a,b]} L_n(|f(t)-f(x)|;x)\\
&\leq \max_{x\in[a,b]}\Big\{\varepsilon(L_n(1;x)-1)+\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}[(L_n(t^2;x)-x^2)\\
&-2x(L_n(t;x)-x)+x^2(L_n(1;x)-1)]\quad\Big\}\\
&\leq \varepsilon\max_{x\in[a,b]}(L_n(1;x)-1)+\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\Big[\max_{x\in[a,b]}(L_n(t^2;x)-x^2)\\
&-\max_{x\in[a,b]}2x(L_n(t;x)-x)+\max_{x\in[a,b]}x^2(L_n(1;x)-1)\Big]\\
&\leq \varepsilon\|L_n(1;x)-1\|_{C[a,b]}+\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\big[\|L_n(t^2;x)-x^2\|_{C[a,b]}\\
&-2a\|L_n(t;x)-x\|_{C[a,b]}+b^2\|L_n(1;x)-1\|_{C[a,b]}\big]
\end{aligned}$$

olur. (1.4.3) eşitsizliğinin her iki tarafının $n\to\infty$ için limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f;x)-f(x)\|_{C[a,b]} \leq \lim_{n\to\infty}\|L_n(f(t)-f(x);x)\|_{C[a,b]}$$

$$\leq \varepsilon\, \varepsilon_n + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \varepsilon_n - 2a\varepsilon_n + b^2 \varepsilon_n$$

eşitsizliği bulunur ve buradan

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f;x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliği elde edilir. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Sonuç 1.4.2

(L_n) doğrusal pozitif operatörler dizisi $[a,b]$ aralığında,

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(1;x) - 1\|_{C[a,b]} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \|L_n((t-x)^2;x) - (t-x)^2\|_{C[a,b]} = 0$$

koşullarını sağlıyorsa $C[a,b]$ uzayındaki herhangi bir f fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f;x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

sağlanır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Aşağıdaki teorem $\mathbb{R}^m$ in kompakt bir alt bölgesinde Korovkin Teoremi'nin geçerli olduğunu gösterir.

Teorem 1.4.3 $L_n: C(\mathbb{R}^m) \to C(\mathbb{R}^m)$ doğrusal pozitif operatörler dizisi olsun. $X \subset \mathbb{R}^m$ sınırlı bir bölge olmak üzere eğer (L_n) doğrusal pozitif operatörler dizisi, $K \subset X$ kompakt bölgesinde

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(1;x) - 1\|_{C(K)} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t_i;x) - x_i\|_{C(K)} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m)$$
$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(\|t\|^2;x) - \|x\|^2\|_{C(K)} = 0$$

şeklindeki $(m+2)$ koşulu sağlıyorsa X bölgesinde sürekli ve tüm $\mathbb{R}^m$ de sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için K üzerinde

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f;x) - f(x)\|_{C(K)} = 0$$

sağlanır. Burada $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ ve

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{m} x_k^2\right)^{1/2}$$

şeklindedir (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

1.5 $C_\rho(\mathbb{R}^m)$ UZAYINDA YAKINSAKLIK KOŞULLARI

$C_\rho(\mathbb{R})$ ve $B_\rho(\mathbb{R})$ uzaylarından oluşturulan, ρ_1 ve ρ_2 şeklinde farklı ağırlık fonksiyonları alınarak elde edilen $C_{\rho_1}(\mathbb{R})$ ve $C_{\rho_2}(\mathbb{R})$ uzaylarında dönüşüm yapan doğrusal pozitif operatör dizilerinin yaklaşım özellikleri Coşkun (1997, 2011, 2012) de çalışılmıştır.

ρ fonksiyonu

$$\rho(x) = 1 + x^2$$

olmak üzere ρ fonksiyonu ile bağımlı B_ρ ve C_ρ uzayları ile ilgili teorem aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 1.5.1 (Hacıyev Teoremi) $L_n: C_\rho(\mathbb{R}) \to B_\rho(\mathbb{R})$ doğrusal pozitif operatörler dizisi olsun. Bu dizi

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(1;x) - 1\|_\rho = 0 \tag{1.5.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(\mathrm{t};x) - x\|_\rho = 0 \tag{1.5.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(\mathrm{t}^2;x) - x^2\|_\rho = 0 \tag{1.5.3}$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda bir $f^* \in C_\rho(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f^*; x) - f^*(x)\|_\rho \neq 0$$

olur. (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995, Coşkun 1997).

Tanım 1.5.2

$\varphi(x)$, $\mathbb{R}$ de monoton artan sürekli bir fonksiyon ve K_f; f e bağlı pozitif bir sabit olmak üzere $\rho(x)$; $\rho(x) = 1 + \varphi^2(x)$ şeklinde tanımlansın.

$$\lim_{|x|\to\mp\infty} \frac{f(x)}{1+\varphi^2(x)} = K_f$$

eşitliğini sağlayan C_ρ nun elemanlarından oluşan alt uzaya $C_\rho^k(\mathbb{R})$ *uzayı* denir. (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Aşağıdaki teorem, $C_\rho^k(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ uzayında keyfi (L_n) doğrusal pozitif operatörler dizisi ile yaklaşımın sağlanacağını gösterir.

Teorem 1.5.3 $L_n: C_\rho(\mathbb{R}) \to B_\rho(\mathbb{R})$ doğrusal pozitif operatörler dizisi olsun. Bu dizi

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(1; x) - 1\|_\rho = 0 \tag{1.5.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(\varphi; x) - \varphi(x)\|_\rho = 0 \tag{1.5.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(\varphi^2; x) - \varphi^2(x)\|_\rho = 0 \tag{1.5.6}$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda keyfi $f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f; x) - f(x)\|_\rho = 0$$

olur. (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

1962 yılında Baskakov, $[a,b]$ aralığında sürekli ve M_f, f fonksiyonuna bağlı bir sabit olmak üzere

$$|f(x)| \leq M_f(1+x^2) \tag{1.5.7}$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonu için Korovkin Teoremi'nin sağlandığını göstermiştir.

Teorem 1.5.4 $L_n: C_\rho([a,b]) \to B_\rho([a,b])$ doğrusal pozitif operatörler dizisi olsun. Her $x \in [a,b]$ için $\eta = 0,1,2$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^\eta;x) - x^\eta\|_{C[a,b]} = 0 \tag{1.5.8}$$

şeklindeki üç koşul sağlanıyorsa, $[a,b]$ de sürekli ve (1.5.7) koşulunu sağlayan her f fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f;x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliği geçerlidir. (Baskakov 1962).

Kanıt: $f \in C[a,b]$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda her $t,x \in [a,b]$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir $\delta > 0$ vardır. $x \in [a,b]$ ve $t \notin [a,b]$ ise f a da soldan ve b de sağdan sürekli olduğundan $|t-x| < \delta$ olduğunda yine $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a,b]$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda da söz konusu eşitsizlik sağlanır. Diğer taraftan $|t-x| \geq \delta$ olduğunda ise $1 \leq \frac{|t-x|^2}{\delta^2}$ olacağından $2M_f \leq \frac{2M_f}{\delta^2}|t-x|^2$ dir ve

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq M_f(1+x^2)+M_f(1+t^2)\\
&= M_f(2+x^2+t^2)\\
&= M_f(2+(t-x+x)^2+x^2)\\
&= M_f(2+(t-x)^2+2x(t-x)+2x^2)\\
&\leq M_f\left(2\frac{(t-x)^2}{\delta^2}+(t-x)^2+2x\frac{(t-x)^2}{\delta}+2x^2\frac{(t-x)^2}{\delta^2}\right)\\
&= M_f(t-x)^2\left(\frac{2}{\delta^2}+1+\frac{2x}{\delta}+\frac{2x^2}{\delta^2}\right)
\end{aligned}
$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitsizlikte her $t\in\mathbb{R}$ ve $x\in[a,b]$ için

$$
C(x,\delta):=\frac{2}{\delta^2}+1+\frac{2x}{\delta}+\frac{2x^2}{\delta^2}
$$

olarak alınırsa

$$
|f(t)-f(x)|\leq\varepsilon+C(x,\delta)M_f(t-x)^2 \tag{1.5.9}
$$

elde edilir. L_n doğrusal operatör olduğundan

$$
\begin{aligned}
\|L_n(f;x)-f(x)\|_{C[a,b]} &= \|L_n(f(t)-f(x)+f(x);x)-f(x)\|_{C[a,b]}\\
&= \|L_n(f(t)-f(x);x)+L_n(f(x),x)-f(x)\|_{C[a,b]}\\
&\leq \|L_n(f(t)-f(x);x)\|_{C[a,b]}+\max_{x\in[a,b]}|f(x)|\|L_n(1,x)-1\|_{C[a,b]}\\
&= \|L_n(f(t)-f(x);x)\|_{C[a,b]}+\|f\|_{C[a,b]}\|L_n(1,x)-1\|_{C[a,b]}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği bulunur. ε_n sıfır dizisi olmak üzere $\|L_n(1,x)-1\|_{C[a,b]}=\varepsilon_n$ dir. Buradan, L_n nin monotonluğundan

$$
\begin{aligned}
\|L_n(f;x)-f(x)\|_{C[a,b]} &\leq \|L_n(f(t)-f(x);x)-f(x)\|_{C[a,b]}+\varepsilon_n\\
&\leq \|L_n(|f(t)-f(x)|;x)-f(x)\|_{C[a,b]}+\varepsilon_n
\end{aligned}
$$

yazılabilir. (1.5.9) eşitsizliğinden

$$L_n(|f(t)-f(x)|;x) \leq L_n(\varepsilon;x) + C(x,\delta)M_f L_n((t-x)^2;x)$$
$$= \varepsilon[L_n(1;x)-1] + \varepsilon + C(x,\delta)M_f L_n(t^2-2xt+x^2;x)$$
$$= \varepsilon[L_n(1;x)-1] + \varepsilon + C(x,\delta)M_f[L_n(t^2;x) - x^2 + x^2 - 2xL_n(t;x)$$
$$+x^2L_n(1;x) - x^2 + x^2]$$
$$= \varepsilon[L_n(1;x)-1] + \varepsilon + C(x,\delta)M_f[(L_n(t^2;x)-x^2)$$
$$-2x(L_n(t;x)-x) + x^2(L_n(1;x)-1)]$$

bulunur. Norma geçilirse

$$\|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon\|L_n(1;x)-1\|_{C[a,b]} + \varepsilon$$
$$+M_f C(b,\delta)\left\{\|L_n(t^2;x)-x^2\|_{C[a,b]} - 2b\|L_n(t;x)-x\|_{C[a,b]}\right.$$
$$\left.+b^2\|L_n(1;x)-1\|_{C[a,b]}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. (1.5.8) koşulları sağlandığından

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|_{C[a,b]} = 0$$

olur. Böylece (1.4.3) eşitsizliğinden istenen

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f;x)-f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

elde edilir. O halde Korovkin Teoremi sağlanmış olur.

Teorem 1.5.5

$f_{k,m} = t^k\tau^m$ fonksiyonu olmak üzere, $L_n: C_\rho(\mathbb{R}_+^2) \to B_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ doğrusal pozitif operatörler dizisi için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n f_{k,m} - f_{k,m}\right\|_\rho = 0\ , \quad 0 \leq k+m \leq 2, \quad k,m \in \{0,1,2\}$$

koşulları sağlandığı halde bir $f^* \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ vardır öyle ki,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|L_n f^* - f^*\|_\rho \neq 0$$

olur (İbikli 2005).

Kanıt: $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ ve $\Delta_n = \{(x,y): x,y \geq 0, x+y \leq n\}$ olmak üzere

$$L_n(f;x,y) = \begin{cases} f(x,y) + \dfrac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}[f(x+1,y+1) - f(x,y)] & ; \quad (x,y) \in \Delta_n \\ f(x,y) & ; \quad (x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \backslash \Delta_n \end{cases}$$

şeklinde tanımlı L_n operatörlerini göz önüne alınsın. $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \backslash \Delta_n$ için kanıt açıktır.

(L_n) doğrusal pozitif operatörler dizisinin $C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ dan $B_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ ya bir dönüşüm olduğu gösterilmelidir. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} L_n(\rho;x,y) &= \rho(x,y) + \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}[\rho(x+1,y+1) - \rho(x,y)] \\ &= \rho(x,y) + \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}[1+(x+1)^2+(y+1)^2 - (1+x^2+y^2)] \\ &= \rho(x,y) + \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}2[x+y+1] \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $(x,y) \in \Delta_n$ olduğundan

$$L_n(\rho;x,y) \leq \rho(x,y) + \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}2[n+1]$$

olur. $\rho(x,y) = 1+x^2+y^2$ olduğundan

$$\begin{aligned} L_n(\rho;x,y) &\leq \rho(x,y) + \frac{\rho(x,y)}{1+4n^2}2[n+1] \\ &= \rho(x,y)\left[1 + \frac{2(n+1)}{1+4n^2}\right] \\ &\leq 2\rho(x,y) \end{aligned}$$

olup, Önerme 1.3.9 dan (L_n) doğrusal pozitif operatörler dizisinin $C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ dan $B_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ ya bir dönüşümdür.

Şimdi $k, m \in \{0,1,2\}$ ve tanımlanan doğrusal pozitif operatörler dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| L_n f_{k,m} - f_{k,m} \right\|_{\rho} = 0$$

olduğu gösterilecektir.

$f_{k,m} = t^k \tau^m$ fonksiyonu olduğundan, $f_{0,0}(t,\tau) = 1$ için,

$$\begin{aligned} L_n\big(f_{0,0}; x, y\big) - f_{0,0}(x,y) &= \frac{1 + x^2 + y^2}{1 + 4n^2}\big[f_{0,0}(x+1, y+1) - f_{0,0}(x,y)\big] \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup,

$$\sup_{x\geq 0, y\geq 0} \frac{\left|L_n\big(f_{0,0}; x, y\big) - f_{0,0}(x,y)\right|}{\rho(x,y)} = 0$$

ifadesinden

$$\lim_{n\to\infty} \left\| L_n\big(f_{0,0}; x, y\big) - f_{0,0}(x,y) \right\|_{\rho} = 0$$

elde edilir.

$f_{1,0}(t,\tau) = t$ için,

$$\begin{aligned} L_n\big(f_{1,0}; x, y\big) - f_{1,0}(x,y) &= \frac{1 + x^2 + y^2}{1 + 4n^2}[x + 1 - x] \\ &= \frac{1 + x^2 + y^2}{1 + 4n^2} \end{aligned}$$

olacağından,

$$\frac{\left|L_n\big(f_{1,0}; x, y\big) - f_{1,0}(x,y)\right|}{\rho(x,y)} = \frac{1}{1 + 4n^2}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade kullanılarak,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 0, y\geq 0} \frac{\left|L_n\left(f_{1,0}; x, y\right) - f_{1,0}(x,y)\right|}{\rho(x,y)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+4n^2} = 0$$

eşitliği elde edilmiş olup

$$\lim_{n\to\infty} \left\|L_n\left(f_{1,0}; x, y\right) - f_{1,0}(x,y)\right\|_{\rho} = 0$$

olacaktır. Benzer şekilde

$f_{0,1}(t,\tau) = \tau$ için;

$$\begin{aligned} L_n\left(f_{0,1}; x, y\right) - f_{0,1}(x,y) &= \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}[y+1-y] \\ &= \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2} \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Her iki tarafın $\rho(x,y)$'e bölünmesiyle

$$\frac{\left|L_n\left(f_{0,1}; x, y\right) - f_{0,1}(x,y)\right|}{\rho(x,y)} = \frac{1}{1+4n^2}$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlik kullanılarak,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 0, y\geq 0} \frac{\left|L_n\left(f_{0,1}; x, y\right) - f_{0,1}(x,y)\right|}{\rho(x,y)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+4n^2} = 0$$

olacağından

$$\lim_{n\to\infty} \left\|L_n\left(f_{1,0}; x, y\right) - f_{1,0}(x,y)\right\|_{\rho} = 0$$

bulunur.

Son olarak, $f_{2,0}(t,\tau) = t^2$ ve $f_{0,2}(t,\tau) = \tau^2$ olmak üzere,

$$g(x,y) = f_{2,0}(t,\tau) + f_{0,2}(t,\tau)$$

fonksiyonuna operatör uygulanırsa;

$$\begin{aligned} L_n(g;x,y) &= g(x,y) + \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}[g(x+1,y+1) - g(x,y)] \\ &= g(x,y) + \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}\big[f_{2,0}(x+1,y+1) + f_{0,2}(x+1,y+1) \\ &\quad - f_{2,0}(x,y) - f_{0,2}(x,y)\big] \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} L_n(g;x,y) - g(x,y) &= \frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}[(x+1)^2 + (y+1)^2 - x^2 - y^2] \\ &= 2\frac{1+x^2+y^2}{1+4n^2}[x+y+1] \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Dolayısıyla

$$\frac{|L_n(g;x,y) - g(x,y)|}{\rho(x,y)} = \frac{2}{1+4n^2}[x+y+1]$$

elde edilir. $(x,y) \in \Delta_n$ olduğundan

$$\sup_{x\geq 0, y\geq 0} \frac{|L_n(g;x,y) - g(x,y)|}{\rho(x,y)} \leq \frac{2(n+1)}{1+4n^2}$$

ve böylece

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 0, y\geq 0} \frac{|L_n(g;x,y) - g(x,y)|}{\rho(x,y)} = 0$$

geçerli olup,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(f_{2,0}+f_{0,2};x,y\right)-\left(f_{2,0}(x,y)+f_{0,2}(x,y)\right)\right\|_\rho=0$$

eşitliği bulunur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_nf_{k,m}-f_{k,m}\right\|_\rho=0\ ,\qquad 0\le k+m\le 2,\quad k,m\in\{0,1,2\}$$

olduğu gösterilmiş olur. Şimdi;

$$f^*(x,y)=(x^2+y^2)\cos\pi(x+y)$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. Öncelikle $f^*\in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned}|f^*(x,y)|&=|x^2+y^2||\cos\pi(x+y)|\\&\le x^2+y^2+1\\&=\rho(x,y)\end{aligned}$$

olup, açıkça $f^*(x,y)\in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ olur. $(x,y)\in\Delta_n$ olduğundan fonksiyona operatörün uygulanması ile

$$\frac{|L_n(f^*;x,y)-f^*(x,y)|}{\rho(x,y)}\ge\frac{1}{1+4n^2}\left[2xy+\left(\frac{x}{2}-1\right)^2+\left(\frac{y}{2}-1\right)^2\right]|\cos\pi(x+y)|$$

elde edilir. Buradan,

$$\sup_{x\ge0,y\ge0}\frac{|L_n(f^*;x,y)-f^*(x,y)|}{\rho(x,y)}\ge\frac{2n^2-2n+2}{1+4n^2}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\ge0,y\ge0}\frac{|L_n(f^*;x,y)-f^*(x,y)|}{\rho(x,y)}\ge\frac{1}{2}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu da $f^*(x,y) \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ fonksiyonu için yakınsaklığın gerçekleşmediğini gösterir.

1.6 BİR DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN SÜREKLİLİK MODÜLÜ VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 1.6.1 Boş olmayan $I \subset \mathbb{R}$ sınırlı aralığı için

$$d(I) = \sup\{|x-y| : x, y \in I\}$$

ifadesine I kümesinin çapı denir (Natanson, 1964).

Tanım 1.6.2 $I \subset \mathbb{R}$ sınırlı bir aralık, $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde sınırlı olsun. $d = d(I)$, I kümesinin çapı olmak üzere,

$$\omega(f,\delta) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| \leq \delta\}$$

$\omega:]0,d] \to [0,\infty[$ fonksiyonuna f fonksiyonunun I üzerindeki süreklilik modülü denir (Natanson 1964).

Süreklilik modülünün bazı önemli özellikleri aşağıda verilmiştir (Musayev 2003, Natanson 1964, İzgi 2004).

Özellik 1.6.3

i. $\delta > 0$ için $\omega(f,\delta) \geq 0$ dır.

ii. $\omega(f,\delta)$ monoton artandır.

iii. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\omega(f, n\delta) \leq n\omega(f,\delta)$$

sağlanır.

iv. λ pozitif reel sayı olmak üzere

$$\omega(f,\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\omega(f,\delta)$$

eşitsizliği sağlanır.

v. f, I aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(f,\delta) = 0$$

eşitliği sağlanır.

1.7 İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN TAM VE KISMİ SÜREKLİLİK MODÜLÜ TANIMI VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 1.7.1 $D \subset \mathbb{R}^2$ sınırlı bir bölge ve $f: D \to \mathbb{R}$ tanımlı, sınırlı bir fonksiyon olsun. $K \subset D$ kompakt bir bölge ve $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ olmak üzere,

$$\omega(f,\delta) = \sup\left\{|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| : \ x,y \in K,\ \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \leq \delta\right\}$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun tam süreklilik modülü denir.

Tanım 1.7.2 $D \subset \mathbb{R}^2$ sınırlı bir bölge ve $f: D \to \mathbb{R}$ tanımlı, sınırlı bir fonksiyon olsun. $K \subset D$ kompakt bir bölge ve $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ olmak üzere,

$$\omega_1(f,\delta) = \sup\{|f(x_1,y) - f(x_2,y)| : \ (x_1,y),(x_2,y) \in K,\ |x_1 - x_2| \leq \delta\}$$

$$\omega_2(f,\delta) = \sup\{|f(x,y_1) - f(x,y_2)| : \ (x,y_1),(x,y_2) \in K,\ |y_1 - y_2| \leq \delta\}$$

fonksiyonlarına f fonksiyonunun x'e göre ve y'ye göre kısmi süreklilik modülü denir.

1.6.3 Özellikleri, Tanım 1.7.1 ve Tanım 1.7.2 için de geçerlidir. İki değişkenli fonksiyonlar için ağırlıklı süreklilik modülü tanımı ve özellikleri aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.7.3 Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ ve $x = (x_1, x_2)$, $h = (h_1, h_2)$ için

$$\Omega(f;\delta) = \sup_{\substack{x\in[0,\infty[\\ |h_1|\le\delta, |h_2|\le\delta}} \frac{|f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1,x_2)|}{(1+\|x\|^2)(1+\|h\|^2)} \tag{1.7.1}$$

şeklinde tanımlı ifadeye f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü denir. $\Omega(f;\delta)$ nin bazı temel özellikleri aşağıdaki lemmada verilmiştir.

Lemma 1.7.4 $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i. $\delta \geq 0$ olmak üzere $\Omega(f;\delta)$, δ nın monoton artan bir fonksiyonudur.

ii. Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ için

$$\lim_{\delta\to 0} \Omega(f;\delta) = 0$$

olur.

iii. Her $\mu \in \mathbb{N}$ için $\Omega(f;\mu\delta) \leq 4\mu(1+2\delta^2)\Omega(f;\delta)$ eşitsizliği geçerlidir.

iv. λ nın pozitif her değeri için $\Omega(f;\lambda\delta) \leq 4(\lambda+1)(1+2\delta^2)\Omega(f;\delta)$ eşitsizliği vardır.

v. Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ ve $x = (x_1, x_2)$, $t = (t_1, t_2)$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq (1+\|t-x\|^2)(1+\|x\|^2)\Omega(f;\|t-x\|)$$

eşitsizliği sağlanır.

vi. Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ ve $t = (t_1, t_2)$, $x = (x_1, x_2)$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq 4\left(\frac{\|t-x\|}{\delta} + 1\right)(1+\|x\|^2)(1+\|t-x\|^2)(1+2\delta^2)\Omega(f;\delta)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt:

i) ve ii) nin kanıtı açık olduğundan diğer özellikler kanıtlanacaktır.

(iii) Her $f \in C_\rho^k$ ve $x = (x_1, x_2)$, $h = (h_1, h_2)$ için

$$\Omega(f;\delta) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in [0,\infty[\\ |h_1| \le \delta, |h_2| \le \delta}} \frac{|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2)|}{(1 + \|x\|^2)(1 + \|h\|^2)}$$

ifadesinde $x_1 + h_1 =: p$ ve $x_2 + h_2 =: r$ olarak alınırsa

$$\Omega(f;\delta) = \sup_{\substack{p, r, x_1, x_2 \in [0,\infty[\\ |p - x_1| \le \delta, |r - x_2| \le \delta}} \frac{|f(p, r) - f(x_1, x_2)|}{(1 + (p - x_1)^2 + (r - x_2)^2)(1 + \|x\|^2)}$$

elde edilir. O halde $|p - x_1| \le \mu\delta$ ve $|r - x_2| \le \mu\delta$ olmak üzere $x_1 + \mu h_1 = p$ ve $x_2 + \mu h_2 = r$ şeklinde seçilirse $|h_1| \le \delta$ ve $|h_2| \le \delta$ elde edilir. Bulunanlar (1.7.1) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\Omega(f;\mu\delta) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in [0,\infty[\\ |h_1| \le \delta, |h_2| \le \delta}} \frac{|f(x_1 + \mu h_1, x_2 + \mu h_2) - f(x_1, x_2)|}{(1 + \|\mu h\|^2)(1 + \|x\|^2)}$$

bulunur. Diğer taraftan $x = (x_1, x_2)$, $h = (h_1, h_2)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |f(x + \mu h) - f(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{\mu} \big(f(x + kh) - f(x + (k-1)h)\big) \right| \\ &\le \sum_{k=1}^{\mu} \left|\big(f(x + kh) - f(x + (k-1)h)\big)\right| \\ &= \sum_{k=1}^{\mu} \frac{\left|\big(f(x + kh) - f(x + (k-1)h)\big)\right|}{(1 + \|h\|^2)(1 + \|x + (k-1)h\|^2)} (1 + \|h\|^2)(1 + \|x + (k-1)h\|^2) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitsizliği her iki tarafı $(1+\|\mu h\|^2)(1+\|x\|^2)$ ifadesiyle bölünürse,

$$\frac{|f(x+\mu h)-f(x)|}{(1+\|\mu h\|^2)(1+\|x\|^2)}$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\mu} \frac{\left|\left(f(x+kh)-f(x+(k-1)h)\right)\right|}{(1+\|h\|^2)(1+\|x+(k-1)h\|^2)} \frac{(1+\|h\|^2)(1+\|x+(k-1)h\|^2)}{(1+\|\mu h\|^2)(1+\|x\|^2)}$$

bulunur. Her iki tarafın $|h_1| \leq \delta$ ve $|h_2| \leq \delta$ üzerinden supremum alınırsa,

$$\Omega(f;\mu\delta) \leq \Omega(f;\delta)(1+2\delta^2) \sum_{k=1}^{\mu} \frac{(1+\|x+(k-1)h\|^2)}{(1+\|\mu h\|^2)(1+\|x\|^2)} \tag{1.7.2}$$

ifadesine ulaşılır. Öte yandan;

$$(1+\|x+(k-1)h\|^2) \leq 1+4(\|x\|^2+\|(k-1)h\|^2)$$
$$\leq 4(1+\|x\|^2+\|(k-1)h\|^2)$$

ifadesi elde edilir. $k-1 \leq \mu$ olduğundan

$$(1+\|x+(k-1)h\|^2) \leq 4(1+\|x\|^2+\|\mu h\|^2)$$
$$\leq 4(1+\|x\|^2+\|\mu h\|^2)+4(\|x\|^2\|\mu h\|^2)$$
$$= 4(1+\|x\|^2)(1+\|\mu h\|^2)$$

elde edilir. O halde,

$$\frac{(1+\|x+(k-1)h\|^2)}{(1+\|\mu h\|^2)(1+\|x\|^2)} \leq 4$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik (1.7.2) de yerine yazılırsa,

$$\Omega(f;\mu\delta) \leq 4\mu(1+2\delta^2)\Omega(f;\delta)$$

bulunur.

(iv) $\lambda \in \mathbb{R}^+$ nın tam kısmı $[\![\lambda]\!]$ olmak üzere

$$[\![\lambda]\!] \leq \lambda \leq [\![\lambda]\!] + 1$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik ve (ii) özelliğinden

$$\Omega(f;\lambda\delta) \leq \Omega(f;([\![\lambda]\!]+1)\delta)$$

eşitsizliği geçerlidir. yazılır. $[\![\lambda]\!] + 1 \in \mathbb{N}$ olduğundan (iii) özelliği uygulanarak,

$$\begin{aligned}\Omega(f;\lambda\delta) &\leq \Omega(f;([\![\lambda]\!]+1)\delta)\\ &\leq 4([\![\lambda]\!]+1)(1+2\delta^2)\Omega(f;\delta)\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $[\![\lambda]\!] + 1 \leq \lambda + 1$ olduğundan

$$\Omega(f;\lambda\delta) \leq 4(\lambda+1)(1+2\delta^2)\Omega(f;\delta)$$

elde edilir.

(v) $x_1 + h_1 = t_1$ ve $x_2 + h_2 = t_2$ olmak üzere $\Omega(f;\delta)$ ifadesinde $\delta = \|t-x\|$ olarak seçilirse,

$$\Omega(f;\|t-x\|) = \sup_{\substack{t_1 t_2, x_1, x_2 \in [0,\infty[\\ |t_1-x_1|\leq\delta, |t_2-x_2|\leq\delta}} \frac{|f(t)-f(x)|}{(1+\|t-x\|^2)(1+\|x\|^2)}$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca supremum tanımından,

$$\Omega(f;\|t-x\|) \geq \frac{|f(t)-f(x)|}{(1+\|t-x\|^2)(1+\|x\|^2)}$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece gösterilmek istenen

$$|f(t)-f(x)| \leq (1+\|t-x\|^2)(1+\|x\|^2)\Omega(f;\|t-x\|)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

(vi) (v) özelliğinden

$$|f(t)-f(x)| \leq (1+\|x\|^2)(1+\|t-x\|^2)\Omega\left(f;\frac{\|t-x\|}{\delta}\delta\right) \tag{1.7.3}$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca; $\frac{\|t-x\|}{\delta} \in \mathbb{R}^+$ olup, (iv) özelliğinden

$$\Omega\left(f;\frac{\|t-x\|}{\delta}\delta\right) \leq 4\left(\frac{\|t-x\|}{\delta}+1\right)(1+2\delta^2)\Omega(f;\delta)$$

eşitsizliği doğrudur. Son eşitsizlik (1.7.3) te yerine yazılırsa

$$|f(t)-f(x)| \leq 4\left(\frac{\|t-x\|}{\delta}+1\right)(1+\|x\|^2)(1+\|t-x\|^2)(1+2\delta^2)\Omega(f;\delta)$$

elde edilir. Bu ise kanıtı tamamlar.

1.8 ÜÇ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN TAM VE KISMİ SÜREKLİLİK MODÜLÜ TANIMI VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 1.8.1 $D \subset \mathbb{R}^3$ sınırlı bir bölge ve $f: D \to \mathbb{R}$ tanımlı, sınırlı bir fonksiyon olsun. $K \subset D$ kompakt bir bölge ve $x = (x_1, y_1, z_1)$, $y = (x_2, y_2, z_2)$ olmak üzere,

$$\omega(f, \delta) = \sup\Big\{|f(x_1, y_1, z_1) - f(x_2, y_2, z_2)| : x, y \in K \quad ,$$

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \leq \delta\Big\}$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun tam süreklilik modülü denir.

Tanım 1.8.2 $D \subset \mathbb{R}^3$ sınırlı bir bölge ve $f: D \to \mathbb{R}$ tanımlı, sınırlı bir fonksiyon olsun. $K \subset D$ kompakt bir bölge ve $x = (x_1, y_1, z_1)$, $y = (x_2, y_2, z_2)$ olmak üzere,

$$\omega_1(f, \delta) = \sup\{|f(x_1, y, z) - f(x_2, y, z)| : \ (x_1, y, z), (x_2, y, z) \in K, \ \ |x_1 - x_2| \leq \delta\}$$

$$\omega_2(f, \delta) = \sup\{|f(x, y_1, z) - f(x, y_2, z)| : \ (x, y_1, z), (x, y_2, z) \in K, \ \ |y_1 - y_2| \leq \delta\}$$

$$\omega_3(f, \delta) = \sup\{|f(x, y, z_1) - f(x, y, z_2)| : \ (x, y, z_1), (x, y, z_2) \in K, \ \ |z_1 - z_2| \leq \delta\}$$

fonksiyonlarına f fonksiyonunun x'e göre, y'ye göre ve z'ye göre kısmi süreklilik modülü denir.

1.6.3 Özellikleri Tanım 1.8.1 ve Tanım 1.8.2 için de geçerlidir. Üç değişkenli fonksiyonlar için ağırlıklı süreklilik modülü tanımı ve özellikleri aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.8.3 Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^3)$ ve $x = (x_1, x_2, x_3)$, $h = (h_1, h_2, h_3)$ için

$$\Omega(f;\delta) = \sup_{\substack{x\in[0,\infty[\\ |h_1|\le\delta, |h_2|\le\delta, |h_3|\le\delta}} \frac{|f(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3) - f(x_1,x_2,x_3)|}{(1+\|x\|^2)(1+\|h\|^2)} \tag{1.8.1}$$

şeklinde tanımlı ifadeye f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü denir. $\Omega(f;\delta)$ nin bazı temel özellikleri aşağıdaki lemmada verilmiştir.

Lemma 1.8.4 $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^3)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i. $\delta \geq 0$ olmak üzere $\Omega(f;\delta)$, δ nın monoton artan bir fonksiyonudur.

ii. Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^3)$ için

$$\lim_{\delta\to 0} \Omega(f;\delta) = 0$$

olur.

iii. Her $\mu \in \mathbb{N}$ için $\Omega(f;\mu\delta) \leq 4\mu(1+3\delta^2)\Omega(f;\delta)$ eşitsizliği geçerlidir.

iv. λ nın pozitif her değeri için $\Omega(f;\lambda\delta) \leq 4(\lambda+1)(1+3\delta^2)\Omega(f;\delta)$ eşitsizliği vardır.

v. Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^3)$ ve $x = (x_1, x_2, x_3)$, $t = (t_1, t_2, t_3)$için

$$|f(t) - f(x)| \leq (1+\|t-x\|^2)(1+\|x\|^2)\Omega(f;\|t-x\|)$$

eşitsizliği sağlanır.

vi. Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^3)$ ve $t = (t_1, t_2, t_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$için

$$|f(t) - f(x)| \leq 4\left(\frac{\|t-x\|}{\delta} + 1\right)(1+\|x\|^2)(1+\|t-x\|^2)(1+3\delta^2)\Omega(f;\delta)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt:

i) ve ii) nin kanıtı açık olduğundan diğer özellikler kanıtlanacaktır.

(iii) Her $f \in C_\rho^k$ ve $x = (x_1, x_2, x_3)$, $h = (h_1, h_2, h_3)$için

$$\Omega(f;\delta)=\sup_{\substack{x\in[0,\infty[\\ |h_1|\le\delta,|h_2|\le\delta,|h_3|\le\delta}}\frac{|f(x_1+h_1,x_2+h_2,x_3+h_3)-f(x_1,x_2,x_3)|}{(1+\|x\|^2)(1+\|h\|^2)}$$

ifadesinde $x_1+h_1=:p$, $x_2+h_2=:r$ ve $x_3+h_3=:q$ olarak alınırsa

$$\Omega(f;\delta)=\sup_{\substack{p,r,q,x_1,x_2\in[0,\infty[\\ |p-x_1|\le\delta,|r-x_2|\le\delta,|q-x_3|\le\delta}}\frac{|f(p,r,q)-f(x_1,x_2,x_3)|}{(1+(p-x_1)^2+(r-x_2)^2+(q-x_3)^2)(1+\|x\|^2)}$$

elde edilir. O halde $|p-x_1|\le\mu\delta$, $|r-x_2|\le\mu\delta$ ve $|q-x_3|\le\mu\delta$ olmak üzere $x_1+\mu h_1=p$, $x_2+\mu h_2=r$ ve $x_3+\mu h_3=q$ şeklinde seçilirse $|h_1|\le\delta$, $|h_2|\le\delta$ ve $|h_3|\le\delta$ elde edilir. Bulunanlar (1) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\Omega(f;\mu\delta)=\sup_{\substack{x_1,x_2,x_3\in[0,\infty[\\ |h_1|\le\delta,|h_2|\le\delta,|h_3|\le\delta}}\frac{|f(x_1+\mu h_1,x_2+\mu h_2,x_3+\mu h_3)-f(x_1,x_2,x_3)|}{(1+\|\mu h\|^2)(1+\|x\|^2)}$$

bulunur. Diğer taraftan $x=(x_1,x_2,x_3)$, $h=(h_1,h_2,h_3)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}|f(x+\mu h)-f(x)|&=\left|\sum_{k=1}^{\mu}\big(f(x+kh)-f(x+(k-1)h)\big)\right|\\&\le\sum_{k=1}^{\mu}\left|\big(f(x+kh)-f(x+(k-1)h)\big)\right|\\&=\sum_{k=1}^{\mu}\frac{\left|\big(f(x+kh)-f(x+(k-1)h)\big)\right|}{(1+\|h\|^2)(1+\|x+(k-1)h\|^2)}(1+\|h\|^2)(1+\|x+(k-1)h\|^2)\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitsizliği her iki tarafı $(1+\|\mu h\|^2)(1+\|x\|^2)$ ifadesiyle bölünürse,

$$\frac{|f(x+\mu h)-f(x)|}{(1+\|\mu h\|^2)(1+\|x\|^2)}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\mu} \frac{\left|\left(f(x+kh)-f(x+(k-1)h)\right)\right|}{(1+\|h\|^2)(1+\|x+(k-1)h\|^2)} \frac{(1+\|h\|^2)(1+\|x+(k-1)h\|^2)}{(1+\|\mu h\|^2)(1+\|x\|^2)}$$

bulunur. Her iki tarafın $|h_1| \leq \delta$, $|h_2| \leq \delta$ ve $|h_3| \leq \delta$ üzerinden supremum alınırsa,

$$\Omega(f;\mu\delta) \leq \Omega(f;\delta)(1+3\delta^2) \sum_{k=1}^{\mu} \frac{(1+\|x+(k-1)h\|^2)}{(1+\|\mu h\|^2)(1+\|x\|^2)} \tag{1.8.2}$$

ifadesine ulaşılır. Öte yandan;

$$(1+\|x+(k-1)h\|^2) \leq 1+4(\|x\|^2+\|(k-1)h\|^2)$$

$$\leq 4(1+\|x\|^2+\|(k-1)h\|^2)$$

ifadesi elde edilir. $k-1 \leq \mu$ olduğundan

$$(1+\|x+(k-1)h\|^2) \leq 4(1+\|x\|^2+\|\mu h\|^2)$$

$$\leq 4(1+\|x\|^2+\|\mu h\|^2)+4(\|x\|^2\|\mu h\|^2)$$

$$= 4(1+\|x\|^2)(1+\|\mu h\|^2)$$

elde edilir. O halde,

$$\frac{(1+\|x+(k-1)h\|^2)}{(1+\|\mu h\|^2)(1+\|x\|^2)} \leq 4$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik (1.8.2) de yerine yazılırsa,

$$\Omega(f;\mu\delta) \leq 4\mu(1+3\delta^2)\Omega(f;\delta)$$

bulunur.

(iv) $\lambda \in \mathbb{R}^+$ nın tam kısmı $[\![\lambda]\!]$ olmak üzere

$$[\![\lambda]\!] \leq \lambda \leq [\![\lambda]\!] + 1$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik ve (ii) özelliğinden

$$\Omega(f;\lambda\delta) \leq \Omega(f;([\![\lambda]\!]+1)\delta)$$

eşitsizliği geçerlidir. $[\![\lambda]\!] + 1 \in \mathbb{N}$ olduğundan (iii) özelliği uygulanarak,

$$\begin{aligned}\Omega(f;\lambda\delta) &\leq \Omega(f;([\![\lambda]\!]+1)\delta)\\ &\leq 4([\![\lambda]\!]+1)(1+3\delta^2)\Omega(f;\delta)\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $[\![\lambda]\!] + 1 \leq \lambda + 1$ olduğundan

$$\Omega(f;\lambda\delta) \leq 4(\lambda+1)(1+3\delta^2)\Omega(f;\delta)$$

elde edilir.

(v) $x_1 + h_1 = t_1$, $x_2 + h_2 = t_2$ ve $x_3 + h_3 = t_3$ olmak üzere $\Omega(f;\delta)$ ifadesinde $\delta = \|t-x\|$ olarak seçilirse,

$$\Omega(f;\|t-x\|) = \sup_{\substack{t_1 t_2, t_3, x_1, x_2, x_3 \in [0,\infty[\\ |t_1-x_1|\leq\delta, |t_2-x_2|\leq\delta, |t_3-x_3|\leq\delta}} \frac{|f(t)-f(x)|}{(1+\|t-x\|^2)(1+\|x\|^2)}$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca supremum tanımından,

$$\Omega(f;\|t-x\|) \geq \frac{|f(t)-f(x)|}{(1+\|t-x\|^2)(1+\|x\|^2)}$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece gösterilmek istenen

$$|f(t)-f(x)| \leq (1+\|t-x\|^2)(1+\|x\|^2)\Omega(f;\|t-x\|)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

(vi) (v) özelliğinden

$$|f(t)-f(x)| \leq (1+\|x\|^2)(1+\|t-x\|^2)\Omega\left(f;\frac{\|t-x\|}{\delta}\delta\right) \tag{1.8.3}$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca; $\frac{\|t-x\|}{\delta} \in \mathbb{R}^+$ olup, (iv) özelliğinden

$$\Omega\left(f;\frac{\|t-x\|}{\delta}\delta\right) \leq 4\left(\frac{\|t-x\|}{\delta}+1\right)(1+3\delta^2)\Omega(f;\delta)$$

eşitsizliği doğrudur. Son eşitsizlik (1.8.3) te yerine yazılırsa

$$|f(t)-f(x)| \leq 4\left(\frac{\|t-x\|}{\delta}+1\right)(1+\|x\|^2)(1+\|t-x\|^2)(1+3\delta^2)\Omega(f;\delta)$$

elde edilir. Bu ise kanıtı tamamlar.

BÖLÜM 2

BİR DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI İLE YAKLAŞIM

2.1 WEIERSTRASS YAKINSAKLIK TEOREMİ VE BERNSTEIN İSPATI

Bu bölümde Weierstrass yakınsaklık teoreminde ifade edilen $P(x)$ polinomunun yerine Bernstein polinomu alındığında da ilgili teoremin sağlandığı gösterilecektir.

Teorem 2.1.1 (Weierstrass Yakınsaklık Teoremi)

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli, $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda $[a,b]$ aralığındaki her x için

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir P polinomu vardır.

1912 yılında S. Bernstein, Weierstrass'ın yaklaşım teoreminin yeni bir ispatını yapmıştır ve $[0,1]$ aralığında verilmiş sürekli bir fonksiyona yakınsayan polinom tanımlamıştır.

Tanım 2.1.2
$0 \leq x \leq 1$ olmak üzere

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{2.1.1}$$

biçiminde tanımlı operatörler dizisi literatürde Bernstein polinomu olarak adlandırılır.

Açıkça, Bernstein polinomu doğrusal ve pozitiftir. Gerçekten, her $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ve $f_1, f_2 \in [0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
B_n(a_1 f_1 + a_2 f_2; x) &= \sum_{k=0}^{n} (a_1 f_1 + a_2 f_2; x)\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= a_1 \sum_{k=0}^{n} f_1\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + a_2 \sum_{k=0}^{n} f_2\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= a_1 B_n(f_1; x) + a_2 B_n(f_2; x)
\end{aligned}
$$

olduğundan B_n polinom dizisi doğrusaldır.

Ayrıca, $x^k (1-x)^{n-k} \geq 0$ olduğundan her $f \geq 0$ için $B_n(f; x) \geq 0$ olacaktır. Dolayısıyla B_n operatör dizisi pozitiftir.

Teorem 2.1.3

Eğer f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli ve $\varepsilon > 0$ ise bu aralıktaki her x değeri için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

olmak üzere

$$|f(x) - B_n(f; x)| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt: (Bernstein Kanıtı)

Kanıt için; $[0,1]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonu sürekli olduğunda $B_n(f, x)$ in $[0,1]$'de $f(x)$'e düzgün yakınsak olduğunu gösterilmelidir. Korovkin teoremine göre $B_n(f_k; x), f_k(x)$'e düzgün yakınsar. $f_k(t) = t^k$ $k = 0,1,2$ (Korovkin teoremindeki $f(x)$ fonksiyonunun sürekliliği sağda b'den solda a'dan sağlanır). Fakat Bernstein polinomu $f(t)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığının dışındaki davranışına bağımlı değildir.

Eğer $0 \leq k \leq n$ ise $0 \leq \frac{k}{n} \leq 1$ olduğundan ek varsayımlar burada gereksizdir.

$$B_n(1;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1 \qquad (2.1.2)$$

$$B_n(t;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \frac{k}{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)} = \frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!} = \binom{n-1}{k-1}$$

olduğundan

$$B_n(t;x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= x\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)} = x(x+1-x)^{n-1} = x \qquad (2.1.3)$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$B_n(t^2;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= x\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$= x\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!} x^{k-2} (1-x)^{n-k}$$

$$+ \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,k!} x^k (1-x)^{n-1-k}$$

$$= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!\,(n-k-2)!} x^k (1-x)^{n-2-k} + \frac{x}{n} B_{n-1}(1;x)$$

$$= x^2 \frac{n-1}{n} B_{n-2}(1,x) + \frac{x}{n} B_{n-1}(1,x)$$

$$= x^2 \frac{n-1}{n} + \frac{x}{n}$$

$$= x^2 + \frac{x-x^2}{n} \tag{2.1.4}$$

elde edilir. Bu da $f_k(t) = t^k$ $k = 0,1,2$ için $B_n(f_k;x)$'in $f_k(x)$'e düzgün yakınsak olduğunu gösterir. Böylece [0,1]'de sürekli $f(t)$ için $B_n(f;x)$'in [0,1]'de $f(x)$'e düzgün yakınsak olduğu bulunur. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|f(x) - B_n(x)| < \varepsilon, \;\; 0 \le x \le 1$$

eşitsizliği sağlanır. Bu ise kanıtı tamamlar.

Teorem 2.1.4 f, [0,1] aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere $B_n(f;x)$ polinomları $n \to \infty$ iken aynı aralıkta f fonksiyonuna düzgün yakınsar.

Kanıt:

Kanıt için Korovkin teoreminin koşullarının sağlandığının gösterilmesi yeterlidir. (2.1.2), (2.1.3) ve (2.1.4) eşitlikleri kullanılırsa; $n \to \infty$ için

$$\|B_n(1;x) - 1\|_{C[0,1]} \to 0$$

$$\|B_n(t;x) - x\|_{C[0,1]} \to 0$$

$$\|B_n(t^2;x) - x^2\|_{C[0,1]} = \max_{0 \le x \le 1} |B_n(t^2;x) - x^2| = \max_{0 \le x \le 1} \left| x^2 + \frac{x-x^2}{n} - x^2 \right| \to 0$$

sağlanır. Korovkin teoreminin koşulları sağlandığından her $f \in C[0,1]$ için

$$\|B_n(f;x) - f(x)\|_{C[0,1]} \to 0$$

olur. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Bernstein polinomu keyfi $[a,b]$ aralığı için de yazılabilir. Bu halde $x \in [a,b]$ için,

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-k}$$

şeklinde tanımlıdır. $a = 0$ olduğunda $[0,b]$ aralığında Bernstein polinomu $x \in [0,b]$ için,

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}b\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{n-k} \qquad (2.1.5)$$

şeklinde tanımlıdır.

Uyarı 2.1.5 (2.1.5) ifadesinde b sabit bir sayıdır. b sayısı yerine n'ye bağlı bir artan dizi alınırsa ne Weierstrass teoremi ne de Korovkin teoremi sağlanır, çünkü bu iki teorem de kapalı sonlu aralık için geçerlidir. (b_n) dizisi artan ve $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ olduğunda x değişkeninin tanım bölgesi $[0,\infty[$ yarıekseni olur. Bu nedenle bu tür artan dizilere bağlı Bernstein polinomlarını özel olarak incelemek gerekir.

2.2 BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI VE YAKLAŞIM KOŞULLARI

1932 yılında Bernstein'ın öğrencisi Chlodowsky tarafından aşağıdaki polinomlar dizisi tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.1 (b_n);

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

koşullarını sağlayan gerçel sayı dizisi olmak üzere

$$B_n\ (f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}b_n\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k},\ \ 0\le x\le b_n \tag{2.2.1}$$

şeklinde tanımlanan polinomlar dizisi Bernstein-Chlodowsky polinomu olarak adlandırılır. Chlodowsky (1932), (2.2.1) polinomlarının noktasal yakınsaklığını incelemiş ve f fonksiyonunun bir x_0 noktasında sürekli ve tüm pozitif yarım eksende sınırlı olması durumunda

$$\lim_{n\to\infty} B_n\ (f;x_0)=f(x_0)$$

eşitliğinin sağlandığını göstermiştir.

1995 yılında E. İbikli–E. Gadjieva tarafından Bernstein-Chlodowsky polinomlarının aşağıdaki gibi bir genelleşmesi ele alınmıştır. $\alpha,\beta\ge 0$ ve $\alpha+\beta=1$ gerçel sayıları için bu genelleşmeyi

$$B_n^{\alpha,\beta}(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k},\ \ a\le x\le b_n \tag{2.2.2}$$

şeklinde tanımlamışlardır. Burada yine (b_n) dizisi

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\infty\ \ ,\ \ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0$$

koşullarını sağlayan gerçel sayıların bir dizisidir.

(2.2.2) de $\alpha=0,\ \beta=1$ yazıldığı taktirde

$$B_n^{0,1}(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}b_n\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k},\ \ a\le x\le b_n$$

(2.2.1) polinomlar dizisine dönüşeceğinden (2.2.2) eşitliği ile verilen operatörlerin, Bernstein-Chlodowsky polinomlarının bir genelleşmesi olduğu kolayca görülebilir.

Uyarı 2.2.2 Genel halde $B_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ dizisinin; yalnızca f fonksiyonunun polinom olduğu durumlarda bir polinom olacağına dikkat edilmelidir.

Uyarı 2.2.3 Açıkça (2.2.1) ile gösterilen B_n^* dizisi doğrusal ve pozitiftir. Her $f_1, f_2 \in [0,\infty[$ ve her $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
B_n\ (a_1 f_1 + a_2 f_2; x) &= \sum_{k=0}^{n} (a_1 f_1 + a_2 f_2; x)\left(\frac{k}{n} b_n\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= a_1 \sum_{k=0}^{n} f_1\left(\frac{k}{n} b_n\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&+ a_2 \sum_{k=0}^{n} f_2\left(\frac{k}{n} b_n\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= a_1 B_n\ (f_1; x) + a_2 B_n\ (f_2; x)
\end{aligned}$$

eşitliği geçerli olduğundan B_n doğrusaldır. Şimdi B_n dizisinin pozitifliği incelenecektir. $0 \le x \le b_n$ olduğundan $\frac{x}{b_n} \ge 0$ ve $1 - \frac{x}{b_n} \ge 0$ dır. Dolayısıyla her $f \ge 0$ için $B_n\ (f;x) \ge 0$ olduğundan (2.2.1) pozitiftir.

Şimdi (2.2.1) ile verilen $B_n\ (f;x)$ in sonlu aralıkta f fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunu görmek için Korovkin teoremi uygulanacaktır.

Teorem 2.2.4 $A \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $[0, A]$ aralığında tanımlı, sürekli ve

$$|f(x)| \le M_f(1 + x^2)$$

şartını sağlayan olan her f fonksiyonu ve $B_n\ (f;x)$ polinom dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_n\ (f;x) - f(x) \right\|_{C[0,A]} = 0$$

olur. Yani $B_n\ (f;x)$ polinom dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

Kanıt: Yukarıda (2.2.1) ifadesinin doğrusallığı ve pozitifliği gösterildiğinden yalnızca Korovkin teoremindeki üç şartın sağlandığını göstermek yeterlidir.

$f(t)=1$ için $B_n\ (1;x)$ operatör dizisi,

$$\begin{aligned} B_n\ (1;x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &= \left(1-\frac{x}{b_n}+\frac{x}{b_n}\right)^n \\ &= 1 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

olacaktır. $f(t)=t$ olmak üzere $B_n\ (t;x)$ operatör dizisi,

$$\begin{aligned} B_n(t;x) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}b_n\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &= x\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &= x\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &= x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1} \\ &= x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1} \end{aligned}$$

olduğundan

$$B_n(t;x) = x \tag{2.2.4}$$

elde edilir. Son olarak $f(t) = t^2$ alınırsa $B_n(t^2;x)$ operatör dizisi,

$$B_n(t^2;x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}b_n\right)^2 \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} b_n^2 \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= b_n^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= b_n^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{k-1+1}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= b_n^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$+ b_n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n-1}{n} b_n^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$+ \frac{1}{n} b_n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$+ \frac{x}{n} b_n \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-2}$$

$$+\frac{x}{n}b_n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1}$$
$$=x^2\frac{n-1}{n}+\frac{x}{n}b_n$$

olduğundan

$$B_n(t^2;x)=x^2+\frac{x(b_n-x)}{n} \tag{2.2.5}$$

elde edilir. Böylece $n\to\infty$ için (2.2.3) ve (2.2.4) ten

$$\lim_{n\to\infty}\|B_n(1;x)-1\|_{C[0,A]}=0$$
$$\lim_{n\to\infty}\|B_n(t;x)-x\|_{C[0,A]}=0$$

eşitlikleri gösterilmiş olur. Son olarak (2.2.5) eşitliğinden;

$$\lim_{n\to\infty}\|B_n(t^2;x)-x^2\|_{C[0,A]}=\max_{0\leq x\leq A}\left|x^2+\frac{x(b_n-x)}{n}-x^2\right|\leq\frac{Ab_n}{n}$$

eşitsizliği geçerli olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\|B_n(t^2;x)-x^2\|_{C[0,A]}=0$$

bulunur. O halde $f\in C[0,A]$ fonksiyonu için $B_n(f;x)$ polinom dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsar.

Bernstein-Chlodowsky polinomları, tanımlı olduğu $[0,b_n]$ aralığı (b_n) artan ve

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$$

olduğu durumda $[0,\infty[$ aralığına dönüşeceğinden Korovkin Teoreminin son koşulunu sağlamayacaktır.

Yani, $C[0,\infty[$ üzerinde $f(x)=x^2$ fonksiyonuna (2.2.1) ile yaklaşım mümkün olmamaktadır. Çünkü (2.2.1) den

$$\|B_n(t^2;x)-x^2\|_{C[0,b_n]}=\frac{b_n^2}{4n}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\|B_n(t^2;x)-x^2\|_{C[0,b_n]}=\infty$$

bulunur. Bu ise yakınsamanın olmadığını gösterir.

2.3 BİR DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARININ YAKLAŞIM HIZI

Aşağıdaki teoremde $\omega_{1+A}(f,\delta)$; $[0,1+A]$ aralığında f fonksiyonunun süreklilik modülünü göstermek üzere İbikli ve Gadjiev (1995) tarafından verilen kanıtın bir uygulaması yapılacaktır.

Teorem 2.3.1

f, tüm $\mathbb{R}$ de sürekli ve

$$|f(x)|\le M_f(1+|x|^2)$$

koşulunu sağlayan fonksiyon olsun. Bu durumda herhangi bir $[0,A]$ aralığında

$$|B_n(f;x)-f(x)|\le C\,\omega_{1+A}\left(f,\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

eşitsizliğini sağlayan n den bağımsız pozitif bir C sabiti vardır.

Kanıt:

$x \in [0, A]$ olmak üzere

$$E_1 = \left\{k : \frac{k}{n} b_n \geq 1 + A\right\} \text{ ve } E_2 = \left\{k : \frac{k}{n} b_n \leq 1 + A\right\}$$

kümeleri tanımlansın.

$$\begin{aligned}
|B_n(f; x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n} b_n\right) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} - f(x) \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} \left[f\left(\frac{k}{n} b_n\right) - f(x) \right] \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \right| \\
&= \left| \sum_{k \in E_1} \left[f\left(\frac{k}{n} b_n\right) - f(x) \right] \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k \in E_2} \left[f\left(\frac{k}{n} b_n\right) - f(x) \right] \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \right| \\
&\leq \sum_{k \in E_1} \left| f\left(\frac{k}{n} b_n\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{k \in E_2} \left| f\left(\frac{k}{n} b_n\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

$$t_n \coloneqq \sum_{k \in E_1} \left| f\left(\frac{k}{n} b_n\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$s_n := \sum_{k \in E_2} \left| f\left(\frac{k}{n} b_n\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

olarak tanımlansın. t_n ve s_n ifadeleri ayrı ayrı göz önüne alınırsa; $k \in E_1$ ve $x \in [0, A]$ için f fonksiyonunun özelliklerinden

$$\left|f\left(\frac{k}{n}b_n\right) - f(x)\right| \le M_f\left(2 + \left(\frac{k}{n}b_n\right)^2 + x^2\right)$$

$$\le M_f\left[\left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^2 + 2x\left(\frac{k}{n}b_n - x\right) + 2(1 + x^2)\right]$$

elde edilir. $\left|\frac{k}{n}b_n - x\right| \ge 1$ olduğundan

$$\left|f\left(\frac{k}{n}b_n\right) - f(x)\right| \le 2M_f\left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^2 [4 + 4x + x^2]$$

$$\le 2M_f(A + 2)^2\left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^2$$

olup $B = 2M_f(A + 2)^2$ ile gösterilirse

$$\left|f\left(\frac{k}{n}b_n\right) - f(x)\right| \le B\left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^2$$

elde edilir. O halde

$$t_n \le B\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^2\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= B\frac{x(b_n - x)}{n}$$

$$\le BA\frac{b_n}{n} \tag{2.3.1}$$

eşitsizliği bulunur. $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$ olduğundan yeterince büyük n değerleri için $\frac{b_n}{n} \leq \sqrt{\frac{b_n}{n}}$ yazılabilir. Özellik 1.6.3. (iv) den

$$C_f \sqrt{\frac{b_n}{n}} \leq \omega_{1+A}\left(f, \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) \Rightarrow \sqrt{\frac{b_n}{n}} \leq \frac{1}{C_f}\omega_{1+A}\left(f, \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

olacak şekilde f fonksiyonuna bağlı $C_f > 0$ sayısı vardır. O halde $M = \frac{BA}{C_f}$ olmak üzere (2.2.1) den

$$t_n \leq M\omega_{1+A}\left(f, \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

$k \in E_2$ ve $x \in [0, A]$ için süreklilik modülünün özelliklerinden

$$\begin{aligned}\left|f\left(\frac{k}{n}b_n\right) - f(x)\right| &\leq \omega_f^{1+A}\left(\left|\frac{k}{n}b_n - x\right|\right)\\ &\leq \omega_f^{1+A}(\delta_n)\left[1 + \frac{1}{\delta_n}\left|\frac{k}{n}b_n - x\right|\right]\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanılarak

$$s_n \leq \omega_{1+A}(\delta_n)\left[1 + \frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}b_n - x\right|\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right]$$

$$\leq \omega_{1+A}(\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n-x\right)^2\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}}\right]$$

$$=\omega_{1+A}(\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x(b_n-x)}{n}}\right]$$

$$\leq \omega_{1+A}(\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{A}\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right]$$

olarak bulunur. $\delta_n=\sqrt{\frac{b_n}{n}}$ ve $K=1+\sqrt{A}$ olarak belirlenirse

$$s_n \leq K\omega_{1+A}\left(f,\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

elde edilir. Bu durumda t_n ve s_n ifadelerinden $C=M+K$ olmak üzere

$$|B_n(f;x)-f(x)| \leq C\omega_{1+A}\left(f,\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

istenen eşitsizlik elde edilir.

Örnek 2.3.2 $f(x)=\frac{1}{e^{2x+5}}$ fonksiyonunun $x\in[0,5]$ ve $b_n=\sqrt{n}$ dizisi alınarak süreklilik modülü yardımıyla elde edilen yaklaşımın hata değerlerini veren MAPLE programı aşağıda verilmiştir.

```
> restart;
> f:=x->1/exp(2*x+5);
```

$$f:=x\to\frac{1}{\mathbf{e}^{(2x+5)}}$$

```
> n:=1:
> for k from 0 to 9 do
> n:=10*n;
```

```
> beta(n):=sqrt(n):
> delta(n):=evalf(simplify(beta(n)/n));
> omega(f,delta(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h)-
f(x))),x=0..1,h=0..delta(n)))):
> errorL:= omega(f,delta(n));
> end do;
```

$$n := 10$$

$$\beta(10) := \sqrt{10}$$

$$\delta(10) := 0.3162277660$$

$$\omega(f, 0.3162277660) := 0.003158172724$$

$$errorL := 0.003158172724$$

$$n := 100$$

$$\beta(100) := 10$$

$$\delta(100) := 0.1000000000$$

$$\omega(f, 0.1000000000) := 0.001221382578$$

$$errorL := 0.001221382578$$

$$n := 1000$$

$$\beta(1000) := 10\sqrt{10}$$

$$\delta(1000) := 0.03162277660$$

$$\omega(f, 0.03162277660) := 0.0004129489526$$

$$errorL := 0.0004129489526$$

$$n := 10000$$

$$\beta(10000) := 100$$

$$\delta(10000) := 0.01000000000$$

$$\omega(f, 0.01000000000) := 0.0001334202885$$

$$errorL := 0.0001334202885$$

$$n := 100000$$

$$\beta(100000) := 100\sqrt{10}$$

$$\delta(100000) := 0.003162277660$$

$$\omega(f, 0.003162277660) := 0.00004248004381$$

$$errorL := 0.00004248004381$$

$$n := 1000000$$

$$\beta(1000000) := 1000$$

$$\delta(1000000) := 0.001000000000$$

$$\omega(f, 0.001000000000) := 0.00001346242484$$

$$errorL := 0.00001346242484$$

$$n := 10000000$$

$$\beta(10000000) := 1000\sqrt{10}$$

$$\delta(10000000) := 0.0003162277660$$

$$\omega(f, 0.0003162277660) := 0.4260107418\ 10^{-5}$$

$$errorL := 0.4260107418\ 10^{-5}$$

$$n := 100000000$$

$$\beta(100000000) := 10000$$

$$\delta(100000000) := 0.0001000000000$$

$$\omega(f, 0.0001000000000) := 0.1347454641\ 10^{-5}$$

$$errorL := 0.1347454641\ 10^{-5}$$

$$n := 1000000000$$

$$\beta(1000000000) := 10000\sqrt{10}$$

$$\delta(1000000000) := 0.00003162277660$$

$$\omega(f, 0.00003162277660) := 0.4261279821\ 10^{-6}$$

$$errorL := 0.4261279821\ 10^{-6}$$

$$n := 10000000000$$

$$\beta(10000000000) := 100000$$

$$\delta(10000000000) := 0.00001000000000$$

$$\omega(f, 0.00001000000000) := 0.1347569186\ 10^{-6}$$

$$errorL := 0.1347569186\ 10^{-6}$$

BÖLÜM 3

İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI İLE YAKLAŞIM

3.1 ÜÇGENSEL BÖLGEDE İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARA BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI VE YAKLAŞIM KOŞULLARI

Bu bölümde ilk olarak Büyükyazıcı, İbikli (2006) da tanımlanan bir üçgensel bölgedeki iki değişkenli fonksiyonlara Bernstein-Chlodowsky polinomları ile yaklaşımın bir uygulaması yapılacaktır. Daha sonra, İbikli (2005) de yine iki değişkenli fonksiyonlar için yapılan sınırsız kümelerde sürekli fonksiyonlara yaklaşımın uyarlanması yapılacaktır.

Tanım 3.1.1 (b_n) dizisi

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

eşitliklerini sağlayan monoton artan gerçel terimli pozitif sayıların bir dizisi olsun. Bu durumda Δ_{b_n} üçgensel bölgesi

$$\Delta_{b_n} = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq b_n\}$$

şeklinde tanımlansın. $(x_1, x_2) \in \Delta_{b_n}$ olmak üzere, bu üçgensel bölgede iki değişkenli fonksiyonlar yardımıyla Bernstein-Chlodowsky tipli bir polinom

$$B_n(f; x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} f\left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{n} b_n\right) \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(\frac{y}{b_n}\right)^j \left(1 - \frac{x}{b_n} - \frac{y}{b_n}\right)^{n-k-j} \quad (3.1.1)$$

şeklinde tanımlanır. (3.1.1) ile tanımlanan ifadenin doğrusallığı, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ve $f_1, f_2 \in C_{\Delta_{b_n}}$ olmak üzere

$$B_n\ (\alpha f_1+\beta f_2;x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}(\alpha f_1+\beta f_2;x_1,x_2)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$
$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$
$$=\alpha\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}f_1\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{n}b_n\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$
$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}+\beta\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}f_2\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{n}b_n\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}$$
$$\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$
$$=\alpha B_n\ (f_1;x_1,x_2)+\beta B_n\ (f_2;x_1,x_2)$$

şeklinde gösterilir.

a yeterince büyük bir sabit olmak üzere

$$\Delta_a=\{(x_1,x_2):x_1\ge 0,x_2\ge 0,x_1+x_2\le a\}$$

bölgesi ve

$$C(\Delta_a)=\{f:f,\Delta_a\ \text{bölgesinde sürekli}\}$$

uzayı tanımlansın. (3.1.1) ifadesinin $C(\Delta_a)$ dan $C(\Delta_a)$ ya dönüşüm yaptığı f fonksiyonunun sürekliliğinden açıktır.

Lemma 3.1.2 (3.1.1) ile tanımlanan $B_n: C(\Delta_a)\to C(\Delta_a)$ doğrusal pozitif operatörler dizisi aşağıdaki dört koşulu sağlar.

$$B_n\big(f_{0,0};x_1,x_2\big)=1 \tag{3.1.2}$$
$$B_n\big(f_{1,0};x_1,x_2\big)=x_1 \tag{3.1.3}$$

$$B_n\left(f_{0,1};x_1,x_2\right)=x_2 \tag{3.1.4}$$

$$B_n\left(f_{2,0}+f_{0,2};x_1,x_2\right)=x_1^2+\frac{x_1(b_n-x_1)}{n}x_2^2+\frac{x_2(b_n-x_2)}{n} \tag{3.1.5}$$

Kanıt: Kanıt için İbikli (2005) de kullanılan notasyonlar kullanılacaktır. Öncelikle, k ve m pozitif tam sayılar olmak üzere $f_{k,m}=t^k\tau^m$ fonksiyonu için $B_n\left(f_{0,0};x_1,x_2\right)$ belirlenmelidir. $B_n\left(f_{k,m};x_1,x_2\right)$ polinom dizisi için (3.1.2)-(3.1.5) eşitlikleri geçerlidir. Gerçekten;

$f_{0,0}(t,\tau)=1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
B_n\left(f_{0,0};x_1,x_2\right)&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}\\
&=1
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Benzer şekilde, $f_{1,0}(t,\tau)=t$ için,

$$\begin{aligned}
B_n\left(f_{1,0};x_1,x_2\right)&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left(\frac{k}{n}b_n\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}\\
&=x_1\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^{k-1}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}\\
&=x_1\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}\\
&=x_1\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1}=x_1
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $f_{0,1}(t,\tau)=\tau$ fonksiyonu için,

$$B_n(f_{0,1};x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left(\frac{j}{n}b_n\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$=x_2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-k}j\frac{(n-k)!}{(n-k-j)!\,j!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j-1}\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$=x_2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-k}\frac{(n-k)!}{(n-k-j)!\,(j-1)!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j-1}\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$=x_2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-k}\frac{n-k}{n-k}\frac{(n-k)!}{(n-k-j)!\,(j-1)!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j-1}$$
$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$=x_2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\frac{n-k}{n}\sum_{j=1}^{n-k}\frac{(n-k-1)!}{(n-k-j)!\,(j-1)!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j-1}$$
$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$=x_2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\frac{n-k}{n}\sum_{j=0}^{n-k-1}\frac{(n-k-1)!}{(n-k-j-1)!\,j!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j}$$
$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-1}$$

$$=x_2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\frac{n-k}{n}\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

$$=x_2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\frac{n-k}{n}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

$$=x_2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\,k!}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

$$=x_2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1}=x_2$$

olarak bulunur. Yine $f_{2,0}(t,\tau)+f_{0,2}(t,\tau)=t^2+\tau^2$ olmak üzere, $B_n(f_{2,0}+f_{0,2};x_1,x_2)$ aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$B_n(f_{2,0}+f_{0,2};x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left[\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2+\left(\frac{j}{n}b_n\right)^2\right]\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left(\frac{j}{n}b_n\right)^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$=T^{'}+T''$$

ifadesi elde edilir. İşlemlerin kolaylığı açısından toplamlar ayrı ayrı hesaplanırsa;

$$T^{'}=B_n\left(f_{2,0};x_1,x_2\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$=b_n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$=b_n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)+1}{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$=b_n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$+b_n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$=x_1^2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-2)!}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^{k-2}\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$+\frac{x_1b_n}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

$$=x_1^2\frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{(n-k-2)!\,k!}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-2}+\frac{x_1b_n}{n}$$

$$=x_1^2\frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-2}+\frac{x_1b_n}{n}$$

$$=x_1^2+\frac{x_1(b_n-x_1)}{n}$$

elde edilir. T'' ise aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$T'' = B_n\left(f_{0,2};x_1,x_2\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left(\frac{j}{n}b_n\right)^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\sum_{j=0}^{n-k}\left(\frac{j}{n}b_n\right)^2\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\frac{b_n^2}{n}\sum_{j=1}^{n-k}\frac{j}{n}\frac{(n-k)!}{(n-k-j)!\,(j-1)!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\frac{b_n^2}{n}\sum_{j=1}^{n-k}\frac{(j-1)+1}{n}\frac{(n-k)!}{(n-k-j)!\,(j-1)!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{b_n^2}{n}\sum_{j=1}^{n-k}\frac{j-1}{n}\frac{(n-k)!}{(n-k-j)!\,(j-1)!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\right.$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}+\frac{b_n^2}{n}\sum_{j=1}^{n-k}\frac{1}{n}\frac{(n-k)!}{(n-k-j)!\,(j-1)!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$

$$\left.\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{b_n^2}{n}\sum_{j=2}^{n-k}\frac{1}{n}\frac{(n-k)!}{(n-k-j)!\,(j-2)!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\right.$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}+\frac{x_2 b_n}{n^2}\sum_{j=1}^{n-k}\frac{(n-k)!}{(n-k-j)!\,(j-1)!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j-1}$$

$$\left.\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2^2}{n^2}\sum_{j=2}^{n-k}\frac{(n-k)!}{(n-k-j)!\,(j-2)!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j-2}\right.$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}+\frac{x_2 b_n}{n^2}(n-k)$$

$$\left.\sum_{j=1}^{n-k}\frac{(n-k-1)!}{(n-k-j)!\,(j-1)!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j-1}\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2^2}{n^2}(n-k)(n-k-1)\sum_{j=0}^{n-k-2}\frac{(n-k-2)!}{(n-k-j-2)!\,j!}\right.$$

$$\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-2}+\frac{x_2 b_n}{n^2}(n-k)$$

$$\left.\sum_{j=0}^{n-k-1}\frac{(n-k-1)!}{(n-k-j-1)!\,j!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-1}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2^2}{n^2}(n-k)(n-k-1)\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-2}\right.$$

$$\left.+\frac{x_2 b_n}{n^2}(n-k)\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1}\right)$$

$$=\frac{x_2^2}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k(n-k)(n-k-1)\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-2}$$

$$+\frac{x_2 b_n}{n^2}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

$$=\frac{x_2^2(n-1)}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-2}$$

$$+\frac{x_2 b_n}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

$$=\frac{x_2^2(n-1)}{n}+\frac{x_2 b_n}{n}=x_2^2+\frac{x_2(b_n-x_2)}{n}$$

olarak bulunur. Son olarak iki toplam birleştirilirse

$$B_n\left(f_{2,0}+f_{0,2};x_1,x_2\right)=x_1^2+\frac{x_1(b_n-x_1)}{n}+x_2^2+\frac{x_2(b_n-x_2)}{n}$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 3.1.3 (b_n) dizisi

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

eşitliklerini sağlayan monoton artan gerçel terimli pozitif sayıların bir dizisi olsun. Bu durumda Δ_{b_n} üçgensel bölgesi

$\Delta_{b_n} = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq b_n\}$

şeklinde tanımlansın. $(x_1, x_2) \in \Delta_{b_n}$ olmak üzere, bu üçgensel bölgede iki değişkenli fonksiyonlar yardımıyla Bernstein-Chlodowsky tipli bir polinom

$$B_n(f; x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} f\left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{n} b_n\right) \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j} \tag{3.1.6}$$

şeklinde tanımlanır.

$B_n(f; x_1, x_2)$ doğrusal pozitif operatör dizileri $C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ dan $C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ ya dönüşüm tanımlar. Gerçekten, $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ ve $K \geq 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
|B_n(f; x_1, x_2)| &\leq B_n(|f|; x_1, x_2) \\
&\leq B_n\big(M_f(1 + t^2 + \tau^2); x_1, x_2\big) \\
&= M_f[B_n(1; x_1, x_2) + B_n(t^2; x_1, x_2) + B_n(\tau^2; x_1, x_2)] \\
&= M_f\left[1 + x_1^2 + \frac{x_1(b_n - x_1)}{n} + x_2^2 + \frac{x_2(b_n - x_2)}{n}\right] \\
&= M_f\left[1 + x_1^2 + x_2^2 + \frac{x_1(b_n - x_1) + x_2(b_n - x_2)}{n}\right] \\
&= M_f\left[1 + x_1^2 + x_2^2 + \frac{b_n}{n}(x_1 + x_2) - \frac{x_1^2 + x_2^2}{n}\right] \\
&\leq M_f\left[1 + x_1^2 + x_2^2 + K(x_1 + x_2) - \frac{x_1^2 + x_2^2}{n}\right] \\
&\leq M_f[1 + x_1^2 + x_2^2 + 2K(x_1^2 + x_2^2 + 1)]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$M'_f = M_f(1 + 2K)$$

olarak tanımlanırsa,

$$|B_n(f; x_1, x_2)| \leq M'_f(1 + x_1^2 + x_2^2)$$

bulunur. O halde $B_n(f; x_1, x_2) \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ olur.

(3.1.6) ile tanımlanan $B_n(f; x_1, x_2)$ doğrusal pozitif operatörler dizisi Teorem 1.4.1 in koşullarını sağlar.

Teorem 3.1.4 (3.1.6) ile verilen $B_n: C_\rho(\mathbb{R}_+^2) \to C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ doğrusal pozitif operatör dizisi için n yeterince büyük bir sayı olmak üzere Δ_{b_n} üçgensel bölgesinin herhangi bir Δ_a üçgensel kompakt alt bölgesinde $k, m \in \{0,1,2\}$ ve $f_{k,m} = t^k \tau^m$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_n\left(f_{0,0}; x_1, x_2\right) - f_{0,0}(x_1, x_2) \right\|_{C(\Delta_a)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_n\left(f_{1,0}; x_1, x_2\right) - f_{1,0}(x_1, x_2) \right\|_{C(\Delta_a)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_n\left(f_{0,1}; x_1, x_2\right) - f_{0,1}(x_1, x_2) \right\|_{C(\Delta_a)} = 0$$

Ayrıca; $h(t, \tau) \coloneqq f_{2,0}(t, \tau) + f_{0,2}(t, \tau)$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \| B_n(h; x_1, x_2) - h(x_1, x_2) \|_{C(\Delta_a)} = 0$$

şeklindeki dört koşul sağlansın. Δ_{b_n} üçgensel bölgesinde tanımlı, tüm $\mathbb{R}^2$ de

$$|f(x_1, x_2)| \leq M_f(1 + x_1^2 + x_2^2)$$

koşulunu sağlayan sürekli fonksiyonlar için

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n(f;x_1,x_2) - f(x_1,x_2)\|_{C(\Delta_a)} = 0$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt: Lemma 3.1.2 de elde edilen (3.1.2)-(3.1.4) ifadeleri kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty} \left\|B_n\left(f_{0,0};x_1,x_2\right) - f_{0,0}(x_1,x_2)\right\|_{C(\Delta_a)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\|B_n\left(f_{1,0};x_1,x_2\right) - f_{1,0}(x_1,x_2)\right\|_{C(\Delta_a)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\|B_n\left(f_{0,1};x_1,x_2\right) - f_{0,1}(x_1,x_2)\right\|_{C(\Delta_a)} = 0$$

eşitlikleri bulunur.

Şimdi (3.1.5) ifadesi göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} B_n(h;x_1,x_2) - h(x_1,x_2) &= x_1^2 + \frac{x_1(b_n - x_1)}{n} + x_2^2 + \frac{x_2(b_n - x_2)}{n} - x_1^2 - x_2^2 \\ &= \frac{x_1(b_n - x_1)}{n} + \frac{x_2(b_n - x_2)}{n} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \sup_{(x,y)\in\Delta_a} |B_n(h;x_1,x_2) - h(x_1,x_2)| &= \sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_a} \frac{x_1(b_n - x_1)}{n} + \frac{x_2(b_n - x_2)}{n} \\ &= \sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_a} \frac{x_1(b_n - x_1)}{n} + \sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_a} \frac{x_2(b_n - x_2)}{n} \end{aligned}$$

eşitliği yazılabileceğinden, aynı zamanda,

$$\sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_a} |B_n(h;x_1,x_2) - h(x_1,x_2)| = \frac{a\left(b_n - \frac{a}{2}\right)}{2n}$$

olduğundan ve (b_n) dizisinin seçiminden

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n(h;x_1,x_2) - h(x_1,x_2)\|_{C(\Delta_a)} = 0$$

elde edilir. Böylece Teorem 1.4.1 in şartları sağlandığından her $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n^{**}(f;x_1,x_2) - f(x_1,x_2)\|_{C(\Delta_a)} = 0$$

bulunur. Bu da kanıtı tamamlar.

Sonuç 3.1.5 a yeterince büyük pozitif gerçel bir sayı olmak üzere Δ_a kompakt bölgesinde $B_n : C(\Delta_a) \to C(\Delta_a)$ doğrusal pozitif operatörler dizisi $n \to \infty$ için (3.1.2)-(3.1.5) şeklindeki şartları sağlıyorsa her $f \in C(\Delta_a)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\|B_n \ (f;x_1,x_2) - f(x_1,x_2)\right\|_{C(\Delta_a)} = 0$$

eşitliği sağlanır.

Uyarı 3.1.6 Δ_{b_n} üçgensel bölgesinin sınırlı olmadığı durumda $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$ fonksiyonuna (3.1.1) polinom dizisi ile yaklaşım mümkün değildir. Gerçekten polinom dizisinin tanımından;

$$\begin{aligned} B_n(f;x_1,x_2) - f(x_1,x_2) &= x_1^2 + \frac{x_1(b_n - x_1)}{n} + x_2^2 + \frac{x_2(b_n - x_2)}{n} - x_1^2 - x_2^2 \\ &= \frac{x_1(b_n - x_1)}{n} + \frac{x_2(b_n - x_2)}{n} \end{aligned}$$

ve

$$\sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_{b_n}} |B_n(f;x_1,x_2) - f(x_1,x_2)| = \sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_{b_n}} \left\{\frac{x_1(b_n - x_1)}{n} + \frac{x_2(b_n - x_2)}{n}\right\} = \frac{b_n^2}{2n}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_{b_n}} |B_n(f;x_1,x_2) - f(x_1,x_2)| = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n^2}{2n} = \infty$$

olacak şekilde bir tane (b_n) dizisi vardır. Bu da yakınsamanın sınırsız bölgelerde sağlanmadığını gösterir.

Şimdiki önerme, sınırsız Δ_{b_n} bölgesinde (3.1.1) ile özel bir yaklaşımın varlığını gösterir.

Önerme 3.1.7 $\gamma > 0$ olmak üzere her $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_{b_n}} \frac{|B_n(f;x_1,x_2) - f(x_1,x_2)|}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^{1+\gamma}} = 0$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt: Her $\varepsilon > 0$ için $x_1 + x_2 > a$ olmak üzere

$$\frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2} < \varepsilon \tag{3.1.7}$$

eşitsizliğini sağlayan yeterince büyük $a > 0$ sayısı seçilirse

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

olduğundan $\frac{b_n}{n}$ dizisi sınırlıdır. O halde

$$\frac{b_n}{n} < C$$

olacak şekilde $C > 0$ sayısı vardır. Diğer taraftan

$$\sup_{(x,y)\in\Delta_{b_n}} \frac{|B_n(f;x_1,x_2) - f(x_1,x_2)|}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^{1+\gamma}} \leq \sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_a} \frac{|B_n(f;x_1,x_2) - f(x_1,x_2)|}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^{1+\gamma}} +$$

$$+\sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_{b_n}\setminus\Delta_a}\frac{|B_n(f;x_1,x_2)-f(x_1,x_2)|}{(1+x_1^2+x_2^2)^{1+\gamma}}$$

$$\leq \sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_a}|B_n(f;x_1,x_2)-f(x_1,x_2)|+$$

$$+\sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_{b_n}\setminus\Delta_a}\frac{|B_n(f;x_1,x_2)-f(x_1,x_2)|}{(1+x_1^2+x_2^2)^{1+\gamma}}$$

$$=I'_n(f)+I''_n(f)$$

şeklinde yazılabilir. Lemma 3.1.2 den

$$\lim_{n\to\infty} I'_n(f)=0$$

olur. Ayrıca (3.1.6) polinom dizisi için,

$$\begin{aligned}
|B_n(f;x_1,x_2)| &\leq B_n(|f|;x_1,x_2)\\
&\leq B_n\left(M_f(1+t^2+\tau^2);x_1,x_2\right)\\
&= M_f[B_n(1;x_1,x_2)+B_n(t^2;x_1,x_2)+B_n(\tau^2;x_1,x_2)]\\
&= M_f\left[1+x_1^2+\frac{x_1(b_n-x_1)}{n}+x_2^2+\frac{x_2(b_n-x_2)}{n}\right]\\
&= M_f\left[1+x_1^2+x_2^2+\frac{x_1(b_n-x_1)+x_2(b_n-x_2)}{n}\right]\\
&= M_f\left[1+x_1^2+x_2^2+\frac{b_n}{n}(x_1+x_2)-\frac{x_1^2+x_2^2}{n}\right]\\
&\leq M_f\left[1+x_1^2+x_2^2+C(x_1+x_2)-\frac{x_1^2+x_2^2}{n}\right]\\
&\leq M_f[1+x_1^2+x_2^2+2C(x_1^2+x_2^2+1)]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$M'_f=M_f(1+2C)$$

olarak tanımlanırsa,

$$|B_n(f;x_1,x_2)|\leq M'_f(1+x_1^2+x_2^2)$$

bulunur. Dolayısıyla, $|f(x_1,x_2)| \leq M_f(1+x_1^2+x_2^2)$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
I''_n(f) &= \sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_{b_n}\setminus\Delta_a} \frac{|B_n(f;x_1,x_2)-f(x_1,x_2)|}{(1+x_1^2+x_2^2)^{1+\gamma}} \\
&\leq \sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_{b_n}\setminus\Delta_a} \frac{|B_n(f;x_1,x_2)|+|f(x_1,x_2)|}{(1+x_1^2+x_2^2)^{1+\gamma}} \\
&\leq \sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_{b_n}\setminus\Delta_a} \left[\frac{M'_f(x_1^2+x_2^2+1)+M_f(1+x_1^2+x_2^2)}{(1+x_1^2+x_2^2)^{1+\gamma}}\right] \\
&\leq \left(M'_f+M_f\right) \sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_{b_n}\setminus\Delta_a} \frac{1}{(1+x_1^2+x_2^2)^{\gamma}}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerli olur, her $\varepsilon > 0$ ve her $\gamma > 0$ için (3.1.7) den,

$$I''_n(f) \leq \left(M'_f+M_f\right)\varepsilon^{\alpha}$$

sağlanır. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} I''_n(f) = 0$$

elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_{b_n}} \frac{|B_n(f;x_1,x_2)-f(x_1,x_2)|}{(1+x_1^2+x_2^2)^{1+\gamma}} \leq \lim_{n\to\infty}(I'_n(f)+I''_n(f)) = 0$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_{b_n}} \frac{|B_n(f;x_1,x_2)-f(x_1,x_2)|}{(1+x_1^2+x_2^2)^{1+\gamma}} = 0$$

eşitliği bulunur. Bu da kanıtı tamamlar.

$\gamma = 0$ olması durumunda (3.1.1) ifadesi Teorem 1.5.6 nın koşullarını sağladığı için $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ fonksiyonuna yakınsaması sağlanmaz. $\gamma = 0$ için yakınsama koşullarını aşağıdaki önerme ile verilebilir.

Önerme 3.1.8 $k, m \in \mathbb{N}_0$ ve $f_{k,m} = t^k \tau^m$ olmak üzere (3.1.6) ile tanımlanan iki değişkenli fonksiyonlar için Bernstein-Chlodowsky tipi polinomlar dizisi, $k + m \leq 2$ için

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n\left(f_{k,m}; x_1, x_2\right) - f_{k,m}(x_1, x_2)\right|}{1 + x_1^2 + x_2^2} = 0$$

ifadesini sağlar.

Kanıt: $B_n(f; x_1, x_2)$ polinom dizisinin tanımını kullanarak; açıkça

$$B_n\left(f_{0,0}; x_1, x_2\right) - f_{0,0}(x_1, x_2) = 0,$$

$$B_n\left(f_{1,0}; x_1, x_2\right) - f_{1,0}(x_1, x_2) = 0$$

ve

$$B_n\left(f_{0,1}; x_1, x_2\right) - f_{0,1}(x_1, x_2) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla her bir $k, m \in \{0,1,2\}$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n\left(f_{k,m}; x_1, x_2\right) - f_{k,m}(x_1, x_2)\right|}{1 + x_1^2 + x_2^2} = 0$$

bulunur.

Şimdi de, olmak üzere (3.1.5) ve $f_{2,0}$ fonksiyonu için (3.1.6) polinom dizisi tanımı kullanılırsa

$$B_n\left(f_{2,0}; x_1, x_2\right) - f_{2,0}(x_1, x_2) = \frac{x_1(b_n - x_1)}{n}$$

olacaktır. Bu eşitliği kullanarak;

$$\frac{\left|B_n\left(f_{2,0}; x_1, x_2\right) - f_{2,0}(x_1, x_2)\right|}{1 + x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_1(b_n - x_1)}{n(1 + x_1^2 + x_2^2)} \leq \frac{(b_n - x)}{n}$$

eşitsizliği yazılabileceğinden Δ_{b_n} üzerinden supremum alınarak,

$$\sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n\left(f_{2,0};x_1,x_2\right)-f_{2,0}(x_1,x_2)\right|}{1+x_1^2+x_2^2} \leq \sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_{b_n}} \frac{(b_n-x_1)}{n} \leq \frac{b_n}{n}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Her iki tarafın $n\to\infty$ üzerinden limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n\left(f_{2,0};x_1,x_2\right)-f_{2,0}(x_1,x_2)\right|}{1+x_1^2+x_2^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n}=0$$

bulunur. Son olarak;

$k=0,\ m=2$ olmak üzere (3.1.5) ve $f_{0,2}(x_1,x_2)=x_2^2$ olduğundan

$$B_n\left(f_{0,2};x_1,x_2\right)-f_{0,2}(x_1,x_2)=\frac{x_2(b_n-x_2)}{n}$$

elde edilir. O halde

$$\frac{\left|B_n\left(f_{0,2};x_1,x_2\right)-f_{0,2}(x_1,x_2)\right|}{1+x_1^2+x_2^2}=\frac{x_2(b_n-x_2)}{n(1+x_1^2+x_2^2)} \leq \frac{(b_n-x_2)}{n}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n\left(f_{0,2};x_1,x_2\right)-f_{0,2}(x,y)\right|}{1+x_1^2+x_2^2} \leq \sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_{b_n}} \frac{(b_n-x_2)}{n} \leq \frac{b_n}{n}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Her iki tarafın $n\to\infty$ üzerinden limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x_1,x_2)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n\left(f_{0,2};x_1,x_2\right)-f_{0,2}(x_1,x_2)\right|}{1+x_1^2+x_2^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n}=0$$

gerçeklenir. Bu durumda kanıt tamamlanır.

3.2 İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARININ YAKLAŞIM HIZI

Teorem 3.2.1 $\omega(f;\delta_n)$, f fonksiyonunun $A>1$ olmak üzere $[0,A]$ aralığı üzerinde tanımlı tam süreklilik modülü olsun. $f\in C(\Delta_A)$ fonksiyonu için $[0,A]$ aralığı üzerinde, yeterince büyük n ler için

$$|B_n(f;x_1,x_2)-f(x_1,x_2)|\le 6A\omega\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt: $x_1,x_2\in[0,A]$ olmak üzere

$$B_n(f;x_1,x_2)-f(x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left[f\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{n}b_n\right)-f(x_1,x_2)\right]\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left[f\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{n}b_n\right)-f\left(\frac{k}{n}b_n,x_2\right)+f\left(\frac{k}{n}b_n,x_2\right)-f(x_1,x_2)\right]\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

elde edilir. Buradan;

$$|B_n(f;x_1,x_2)-f(x_1,x_2)|\le\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{n}b_n\right)-f\left(\frac{k}{n}b_n,x_2\right)\right|\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left[f\left(\frac{k}{n}b_n,x_2\right)-f(x_1,x_2)\right]\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$\le\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\omega_2\left(f;\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\omega_1\left(f;\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$=\psi_1(x_1,x_2)+\psi_2(x_1,x_2)$$

bulunur. $\psi_1(x_1,x_2)$ ve $\psi_2(x_1,x_2)$ ayrı ayrı hesaplanırsa; ilk olarak $\psi_2(x_1,x_2)$ ele alındığında,

$$
\begin{aligned}
\psi_2(x_1,x_2) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\omega_1\left(f;\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\omega_1\left(f;\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\omega_1\left(f;\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}
\end{aligned}
$$

ifadesine ulaşılır. $x,t\in[0,A]$ ve $A>1$ olmak üzere, süreklilik modülünün

$$
|f(t)-f(x)|\leq\omega(f;\delta)\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right) \tag{3.2.1}
$$

özelliği ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği son eşitsizlikte kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
\psi_2(x_1,x_2) &\leq \omega_1(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n-x_1\right)^2\left[\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}\right]\right]^{1/2}\right\} \\
&\leq \omega_1(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x_1(b_n-x_1)}{n}}\right\}\leq\omega_1(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x_1b_n}{n}}\right\} \\
&\leq \omega_1(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{Ab_n}{n}}\right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $\delta_n=\sqrt{\frac{b_n}{n}}$ olarak seçilirse,

$$
\begin{aligned}
\psi_2(x_1,x_2) &\leq \omega_1\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\left\{1+\sqrt{A}\right\} \\
&< 2A\omega_1\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)
\end{aligned} \tag{3.2.2}
$$

eşitsizliğine ulaşılır. Diğer taraftan (3.2.1) özelliği kullanılarak $\psi_1(x_1,x_2)$ ifadesi hesaplanırsa;

$$
\psi_1(x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\omega_2\left(f;\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}
$$

$$\leq \omega_2(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\right.\right.$$
$$\left.\left.\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}\right]\right\}$$
$$=\omega_2(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\sum_{j=0}^{n-k}\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\right.\right.$$
$$\left.\left.\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}\right]\right\}$$
$$\leq \omega_2(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\sum_{j=0}^{n-k}\left(\frac{j}{n}b_n\right)\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k x_2\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}\right]\right\}$$
$$\leq \omega_2(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}2x_2\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. $x_2\in[0,A]$ olduğundan,

$$\psi_1(x_1,x_2)\leq \omega_2(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}2A\right\}$$

eşitsizliği sağlanmış olur. Yeterince büyük n ler için $\delta_n=\sqrt{\frac{b_n}{n}}$ olarak seçilirse;

$$\psi_1(x_1,x_2)<3A\omega_2\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) \tag{3.2.3}$$

ifadesine ulaşılır. (3.2.2) ve (3.2.3) eşitsizliklerinden

$$|B_n(f;x_1,x_2)-f(x_1,x_2)|\leq 2A\omega_1\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)+3A\omega_2\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

elde edilir. Son olarak;

$$\omega_1\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)+\omega_2\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)<2A\omega_1\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)+3A\omega_2\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$
$$<3A\left[\omega_1\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)+\omega_2\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\right]$$

olduğundan, ayrıca kısmi süreklilik ve süreklilik modülü arasında iyi bilinen

$$\omega_1\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)+\omega_2\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\leq 2\omega\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

ifadesi kullanılarak

$$|B_n(f;x_1,x_2)-f(x_1,x_2)|\leq 6A\omega\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Teorem 3.2.2 Her $f\in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ ve yeterince büyük n için $B_n(f;x_1,x_2)$ ile tanımlı operatör olmak üzere,

$$\sup_{x_1,x_2\in[0,\infty[}\frac{|B_n(f;x_1,x_2)-f(x_1,x_2)|}{(1+\|x\|^2)^3}\leq K\,\Omega\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt: Operatörün tanımından

$$B_n(1;x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$
$$=1 \qquad (3.2.4)$$

eşitliği doğrudur. Operatörün doğrusallığı ve monotonluğu kullanılarak

$$|B_n(f;x_1,x_2)-f(x_1,x_2)|\leq\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{n}b_n\right)-f(x_1,x_2)\right|\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j} \tag{3.2.5}$$

eşitsizliği elde edilir. İki değişkenli fonksiyonlar için ağırlıklı süreklilik modülünün (vi) özelliğinde $t_1=\frac{k}{n}b_n$ ve $t_2=\frac{j}{n}b_n$ olarak seçilirse; her $\delta_n>0$ için

$$\left|f\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{n}b_n\right)-f(x_1,x_2)\right|\leq 4(1+\delta_n^2)\Omega(f;\delta_n)(1+\|x\|^2)$$
$$\left(\frac{\left\|\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{n}b_n\right)-(x_1,x_2)\right\|}{\delta_n}+1\right)$$
$$\left(1+\left\|\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{n}b_n\right)-(x_1,x_2)\right\|^2\right)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlik (3.2.5) de yerine yazılırsa yine operatörün monotonluk özelliği kullanılarak;

$$|B_n(f;x_1,x_2)-f(x_1,x_2)|\leq 4(1+\delta_n^2)\Omega(f;\delta_n)(1+\|x\|^2)$$
$$\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left(\frac{\left\|\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{n}b_n\right)-(x_1,x_2)\right\|}{\delta_n}+1\right)\right.$$
$$\left(1+\left\|\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{n}b_n\right)-(x_1,x_2)\right\|^2\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k$$
$$\left.\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}\right)$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $\|x\|=\sum_{i=1}^{2}|x_i|$ normu kullanılarak,

$$|B_n(f;x_1,x_2)-f(x_1,x_2)|\leq 4(1+\delta_n^2)\Omega(f;\delta_n)(1+\|x\|^2)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left(\frac{\left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right|}{\delta_n}+\frac{\left|\frac{j}{n}b_n - x_2\right|}{\delta_n}+1\right)\right.$$

$$\left(1+\left(\left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right|+\left|\frac{j}{n}b_n - x_2\right|\right)^2\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k$$

$$\left.\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}\right)$$

$$\leq 16(1+\delta_n^2)\Omega(f;\delta_n)(1+\|x\|^2)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left(\frac{\left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right|}{\delta_n}+\frac{\left|\frac{j}{n}b_n - x_2\right|}{\delta_n}+1\right)\right.$$

$$\left(1+\left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right|^2+\left|\frac{j}{n}b_n - x_2\right|^2\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k$$

$$\left.\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}\right)$$

$$= 16(1+\delta_n^2)\Omega(f;\delta_n)(1+\|x\|^2)$$

$$\left(1+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\right.$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left|\frac{j}{n}b_n - x_2\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k$$

$$\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}+\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right|\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}$$

$$\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}+\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right|^3$$

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}+$$

$$\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right|\left|\frac{j}{n}b_n - x_2\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}+\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k$$

$$\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}+\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|^2\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|$$

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}+$$

$$\left.\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|^3\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}\right) \tag{3.2.6}$$

ifadesine ulaşılır. Elde edilen toplamlar ayrı ayrı hesaplanmalıdır. Yani;

$$I_1=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$I_2=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$I_3=\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$I_4=\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|^3\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$I_5=\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$I_6 = \frac{1}{\delta_n} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \left| \frac{j}{n} b_n - x_2 \right| \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{x_1}{b_n} \right)^k \left(\frac{x_2}{b_n} \right)^j \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n} \right)^{n-k-j}$$

$$I_7 = \frac{1}{\delta_n} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \left| \frac{k}{n} b_n - x_1 \right|^2 \left| \frac{j}{n} b_n - x_2 \right| \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{x_1}{b_n} \right)^k \left(\frac{x_2}{b_n} \right)^j \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n} \right)^{n-k-j}$$

$$I_8 = \frac{1}{\delta_n} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \left| \frac{j}{n} b_n - x_2 \right|^3 \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{x_1}{b_n} \right)^k \left(\frac{x_2}{b_n} \right)^j \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n} \right)^{n-k-j}$$

yazılırsa, I_1 ve I_2 için daha önce yapılan hesaplamalar dikkate alınarak,

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \left| \frac{k}{n} b_n - x_1 \right|^2 \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{x_1}{b_n} \right)^k \left(\frac{x_2}{b_n} \right)^j \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n} \right)^{n-k-j} = \frac{x_1(b_n - x_1)}{n}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \left| \frac{j}{n} b_n - x_2 \right|^2 \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{x_1}{b_n} \right)^k \left(\frac{x_2}{b_n} \right)^j \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n} \right)^{n-k-j} = \frac{x_2(b_n - x_2)}{n}$$

eşitlikleri yazılabilir. Üçüncü toplam için Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa;

$$\frac{1}{\delta_n} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \left| \frac{k}{n} b_n - x_1 \right| \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{x_1}{b_n} \right)^k \left(\frac{x_2}{b_n} \right)^j \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n} \right)^{n-k-j} =$$

$$\frac{1}{\delta_n} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{k}{n} b_n - x_1 \right| \binom{n}{k} \left(\frac{x_1}{b_n} \right)^k \left(1 - \frac{x_1}{b_n} \right)^{n-k}$$

$$\leq \frac{1}{\delta_n}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n - x_1\right)^2 \binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}\right]^{1/2} \leq \frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x_1(b_n-x_1)}{n}}$$

ifadesine ulaşılır. Dördüncü toplam ele alınarak, Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right|^3 \binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j} =$$

$$\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right|\left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right|^2 \binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k} =$$

$$\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right|\left(\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}\right)^{1/2}$$

$$\left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right|^2\left(\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}\right)^{1/2} \leq$$

$$\frac{1}{\delta_n}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right|^2 \binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}\right)^{1/2}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right|^4 \binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}\right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x_1(b_n-x_1)}{n}}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right|^4 \binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}\right)^{1/2} \tag{3.2.7}$$

ifadesine ulaşılır. (3.2.7) ifadesi ise aşağıdaki şekilde ayrıca hesaplanmalıdır.

$$\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x_1(b_n-x_1)}{n}}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right|^4 \binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}\right)^{1/2} =$$

$$\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x_1(b_n-x_1)}{n}}\left(\sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{k}{n}b_n\right)^4 - 4\left(\frac{k}{n}b_n\right)^3 x_1 + 6\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2 x_1^2 -\right.\right.$$

$$4\left(\frac{k}{n}b_n\right) \quad x_1^3 + x_1^4\Bigg]\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}\Bigg)^{1/2}$$

eşitliğinde $t^4 = t(t-1)(t-2)(t-3) + 6t^3 - 11t^2 + 6t$ açılımı kullanılarak her bir ifade ayrı ayrı hesaplanmalıdır.

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n\right)^4\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{k}{n}b_n\right)\left(\frac{k-1}{n}b_n\right)\left(\frac{k-2}{n}b_n\right)\left(\frac{k-3}{n}b_n\right) + 6\left(\frac{k}{n}b_n\right)^3\left(\frac{b_n}{n}\right) - 11\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2\left(\frac{b_n}{n}\right)^2 + 6\left(\frac{k}{n}b_n\right)\left(\frac{b_n}{n}\right)^3\right]\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k} \tag{3.2.8}$$

şeklinde ifade edilebilir. Diğer taraftan $t^3 = t(t-1)(t-2) + 3t^2 - 2t$ eşitliği yardımıyla,

$$\left(\frac{b_n}{n}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n\right)^3\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{k}{n}b_n\right)\left(\frac{k-1}{n}b_n\right)\left(\frac{k-2}{n}b_n\right) + 3\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2\left(\frac{b_n}{n}\right) - 2\left(\frac{k}{n}b_n\right)\left(\frac{b_n}{n}\right)^2\right]\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k} \tag{3.2.9}$$

yazılabileceğinden (3.2.9) eşitliği

$$\left(\frac{b_n}{n}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n\right)^3\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{k}{n}b_n\right)\left(\frac{k-1}{n}b_n\right)\left(\frac{k-2}{n}b_n\right) + 3\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2\left(\frac{b_n}{n}\right) - 2\left(\frac{k}{n}b_n\right)\left(\frac{b_n}{n}\right)^2\right]\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= x_1^3\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\left(\frac{b_n}{n}\right) + 3x_1\frac{(b_n-x_1)}{n}\left(\frac{b_n}{n}\right)^2$$

$$-2x_1\left(\frac{b_n}{n}\right)^3 \qquad (3.2.10)$$

şeklinde bulunur. (3.2.10) eşitliği yardımıyla (3.2.8) eşitliği hesaplanırsa,

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n\right)^4\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{k}{n}b_n\right)\left(\frac{k-1}{n}b_n\right)\left(\frac{k-2}{n}b_n\right)\left(\frac{k-3}{n}b_n\right)+\right.$$

$$\left.6\left(\frac{k}{n}b_n\right)^3\left(\frac{b_n}{n}\right)-11\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2\left(\frac{b_n}{n}\right)^2+6\left(\frac{k}{n}b_n\right)\left(\frac{b_n}{n}\right)^3\right]$$

$$\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$=x_1^4\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}+6x_1^3\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\left(\frac{b_n}{n}\right)+$$

$$18x_1\frac{(b_n-x_1)}{n}\left(\frac{b_n}{n}\right)^2-12x_1\left(\frac{b_n}{n}\right)^3-11x_1\frac{(b_n-x_1)}{n}$$

$$\left(\frac{b_n}{n}\right)^2+\ 6x_1\left(\frac{b_n}{n}\right)^3 \qquad (3.2.11)$$

ifadesine ulaşılır. (3.2.10) ve (3.2.11) ifadeleri (3.2.7) ifadesinde yerlerine yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

$$\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|^3\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$\leq\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x_1(b_n-x_1)}{n}}\left(x_1^4\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}-4x_1^4\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\right.$$

$$+6x_1^3\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\left(\frac{b_n}{n}\right)+6x_1^3\frac{(b_n-x_1)}{n}-12x_1^2\frac{(b_n-x_1)}{n}\left(\frac{b_n}{n}\right)$$

$$\left.+8x_1^2\left(\frac{b_n}{n}\right)^2+7x_1\frac{(b_n-x_1)}{n}\left(\frac{b_n}{n}\right)^2-6x_1\left(\frac{b_n}{n}\right)^3-\ 3x_1^4\right)^{1/2}$$

yazılır. I_5, I_6, I_7, I_8 toplamları için ise, $\left|\frac{k}{n} b_n - x_1\right| < \delta_n$ ve $\left|\frac{j}{n} b_n - x_2\right| < \delta_n$ eşitsizlikleri dikkate alınarak (3.2.6) eşitsizliği yeniden yazılırsa,

$$|B_n(f; x_1, x_2) - f(x_1, x_2)| \leq 16(1+\delta_n^2)\Omega(f; \delta_n)(1+\|x\|^2)\left[2 + 3\delta_n^2 + \frac{x_1(b_n - x_1)}{n} + \right.$$

$$\frac{x_2(b_n - x_2)}{n} + \frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x_1(b_n - x_1)}{n}} + \frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x_1(b_n - x_1)}{n}}$$

$$\left(x_1^4 \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3} - 4x_1^4 \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \right.$$

$$+6x_1^3 \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\left(\frac{b_n}{n}\right) + 6x_1^3 \frac{(b_n - x_1)}{n}$$

$$-12x_1^2 \frac{(b_n - x_1)}{n}\left(\frac{b_n}{n}\right) + 8x_1^2\left(\frac{b_n}{n}\right)^2 + 7x_1 \frac{(b_n - x_1)}{n}\left(\frac{b_n}{n}\right)^2$$

$$\left.\left. -6x_1\left(\frac{b_n}{n}\right)^3 - 3x_1^4 \right)^{1/2} \right]$$

elde edilir. Buradan, $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3} \leq 1$, $\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \leq 1$ eşitsizlikleri kullanılarak,

$$|B_n(f; x_1, x_2) - f(x_1, x_2)| \leq 16(1+\delta_n^2)\Omega(f; \delta_n)(1+\|x\|^2)\left[2 + 3\delta_n^2 + \frac{x_1(b_n - x_1)}{n} + \right.$$

$$\frac{x_2(b_n - x_2)}{n} + \frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x_1(b_n - x_1)}{n}} + \frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x_1(b_n - x_1)}{n}}$$

$$\left(8x_1^4 + 6x_1^3\left(\frac{b_n}{n}\right) + 6x_1^3 \frac{(b_n - x_1)}{n} + 12x_1^2 \frac{(b_n - x_1)}{n}\left(\frac{b_n}{n}\right) \right.$$

$$\left.\left. + 8x_1^2\left(\frac{b_n}{n}\right) + 7x_1 \frac{(b_n - x_1)}{n}\left(\frac{b_n}{n}\right)^2 + 6x_1\left(\frac{b_n}{n}\right)^3 \right)^{1/2} \right]$$

yazılabilir.

$$|B_n(f;x_1,x_2)-f(x_1,x_2)| \le 16(1+\delta_n^2)\Omega(f;\delta_n)(1+\|x\|^2)$$

$$\left[2+3\delta_n^2+\frac{b_n}{n}(x_1+x_2)+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{x_1\frac{b_n}{n}}+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{x_1\frac{b_n}{n}}\right.$$

$$\left.\left(8x_1^4+12x_1^3\left(\frac{b_n}{n}\right)+20x_1^2\left(\frac{b_n}{n}\right)^2+13x_1\left(\frac{b_n}{n}\right)^3\right)^{1/2}\right]$$

yazılabilir. Son eşitsizliğin her iki tarafı $(1+\|x\|^2)^3$ ye bölünürse;

$$\frac{|B_n(f;x_1,x_2)-f(x_1,x_2)|}{(1+\|x\|^2)^3} \le 16(1+\delta_n^2)\Omega(f;\delta_n)\left[\frac{2}{(1+\|x\|^2)^2}+3\frac{\delta_n^2}{(1+\|x\|^2)^2}\right.$$

$$+\frac{b_n}{n}\frac{(x_1+x_2)}{(1+\|x\|^2)^2}+\frac{1}{\delta_n}\frac{\sqrt{x_1}}{(1+\|x\|^2)^2}\sqrt{\frac{b_n}{n}}+\frac{1}{\delta_n}\frac{\sqrt{x_1}}{(1+\|x\|^2)}\sqrt{\frac{b_n}{n}}$$

$$\left(8\frac{x_1^4}{(1+\|x\|^2)^2}+12\frac{x_1^3}{(1+\|x\|^2)^2}\left(\frac{b_n}{n}\right)+20\frac{x_1^2}{(1+\|x\|^2)^2}\left(\frac{b_n}{n}\right)^2\right.$$

$$\left.\left.+13\frac{x_1}{(1+\|x\|^2)^2}\left(\frac{b_n}{n}\right)^3\right)^{1/2}\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Burada,

$\frac{1}{(1+\|x\|^2)^2}\le 1,\ \frac{(x_1+x_2)}{(1+\|x\|^2)^2}\le 1,\ \frac{\sqrt{x_1}}{(1+\|x\|^2)^2}\le 1,\ \frac{\sqrt{x_1}}{(1+\|x\|^2)}\le 1,\ \frac{x_1^4}{(1+\|x\|^2)^2}\le 1,\ \frac{x_1^3}{(1+\|x\|^2)^2}\le 1,$ ve $\frac{x_1}{(1+\|x\|^2)^2}\le 1$ eşitsizlikleri kullanılarak

$$\frac{|B_n(f;x_1,x_2)-f(x_1,x_2)|}{(1+\|x\|^2)^3} \le 16(1+\delta_n^2)\Omega(f;\delta_n)\left[2+3\delta_n^2+\frac{b_n}{n}+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right.$$

$$+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{b_n}{n}}\left(8+12\left(\frac{b_n}{n}\right)+20\left(\frac{b_n}{n}\right)^2+13\left(\frac{b_n}{n}\right)^3\right)^{1/2}\Bigg]$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada K; b_n den bağımsız bir sabit olmak üzere $\delta_n=\sqrt{\frac{b_n}{n}}$ olarak alınırsa ve $\frac{b_n}{n}\to 0$ olduğundan

$$\sup_{x_1,x_2\in[0,\infty[}\frac{|B_n(f;x_1,x_2)-f(x_1,x_2)|}{(1+\|x\|^2)^3}\le K\,\Omega\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

eşitsizliği gösterilmiş olur. Bu da kanıtı tamamlar.

Örnek 3.2.3 $f(x,y)=x^3y^2$ fonksiyonunun $x,y\in[0,5]$ ve $b_n=\sqrt{n}$ dizisi alınarak süreklilik modülü yardımıyla elde edilen hata değerlerini veren MAPLE program aşağıda verilmiştir.

```
> restart;
> f:=(x,y)->x^3*y^2;
```

$$f:=(x,y)\to x^3y^2$$

```
> n:=1:
> for i from 1 to 9 do
> n:=10*n;
> beta(n):=sqrt(n):
> delta(n):=evalf(simplify(beta(n)/n));
>
omega(f,delta(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h,y+h)-f(x,y))),x=0..1-delta(n),y=0..1-delta(n),h=0..delta(n)))):
> errorL:= 30*omega(f,delta(n));
> end do;
```

$$n:=10$$

$$\beta(10):=\sqrt{10}$$

$$\delta(10):=0.3162277660$$

$$\omega(f,0.3162277660):=0.8505288739$$

$$errorL:=25.51586622$$

$$n:=100$$

$$\beta(100):=10$$

$$\delta(100):=0.1000000000$$

$$\omega(f, 0.1000000000) := 0.4095100000$$

$$errorL := 12.28530000$$

$$n := 1000$$

$$\beta(1000) := 10\sqrt{10}$$

$$\delta(1000) := 0.03162277660$$

$$\omega(f, 0.03162277660) := 0.1484251424$$

$$errorL := 4.452754272$$

$$n := 10000$$

$$\beta(10000) := 100$$

$$\delta(10000) := 0.01000000000$$

$$\omega(f, 0.01000000000) := 0.04900995010$$

$$errorL := 1.470298503$$

$$n := 100000$$

$$\beta(100000) := 100\sqrt{10}$$

$$\delta(100000) := 0.003162277660$$

$$\omega(f, 0.003162277660) := 0.01571170403$$

$$errorL := 0.4713511209$$

$$n := 1000000$$

$$\beta(1000000) := 1000$$

$$\delta(1000000) := 0.001000000000$$

$$\omega(f, 0.001000000000) := 0.004990009995$$

$$errorL := 0.1497002998$$

$$n := 10000000$$

$$\beta(10000000) := 1000\sqrt{10}$$

$$\delta(10000000) := 0.0003162277660$$

$$\omega(f, 0.0003162277660) := 0.001580139146$$

$$errorL := 0.04740417438$$

$$n := 100000000$$

$$\beta(100000000) := 10000$$

$$\delta(100000000) := 0.0001000000000$$

$$\omega(f, 0.0001000000000) := 0.0004999000100$$

$$errorL := 0.01499700030$$

$$n := 1000000000$$

$$\beta(1000000000) := 10000\sqrt{10}$$

$$\delta(1000000000) := 0.00003162277660$$

$$\omega(f, 0.00003162277660) := 0.0001581038833$$

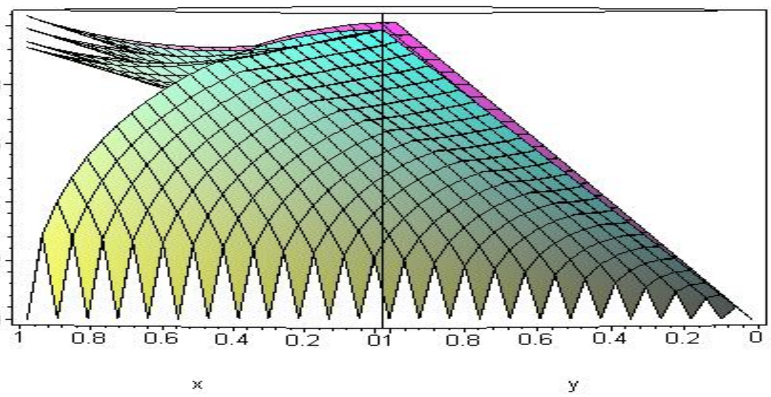
$$errorL := 0.004743116499$$

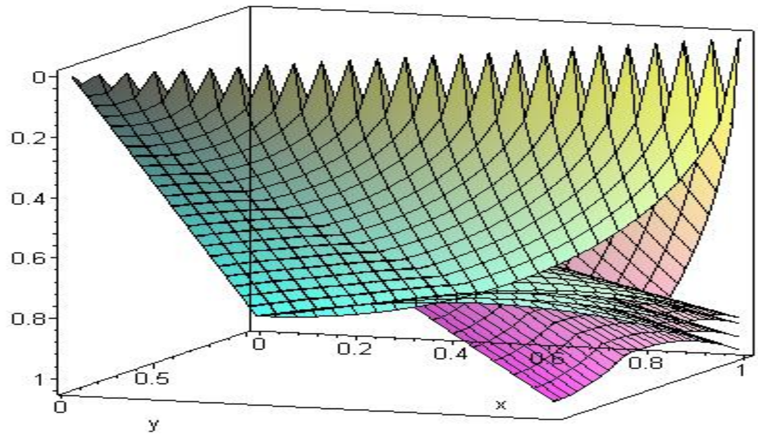
Örnek 3.2.4 $b_n = \sqrt{n}$ olmak üzere $f(x,y) = \sqrt{|x^2 - y^2|}$ fonksiyonuna (3.1.1) iki değişkenli Bernstein-Chlodowsky polinom dizileri yardımıyla, $n = 7$, $n = 10$, $n = 15$ ve $n = 18$ için yaklaşımı grafik üzerindeki görünümü aşağıdaki şekildedir.

```
> restart;
*****************************************************************************
******************f:=(x,y)->sqrt(abs((x^2)-
(y^2)));*****************************************************************
*****************************      n:=1:c:=n^(1/2):
P[k,j](n,x,y):=binomial(n,k)*binomial(n-
k,j)*(x/c)^k*(y/c)^j*(1-(x/c)-(y/c))^(n-k-j):
B[n](f,x,y):=sum(sum(f((k/n)*c,(j/n)*c)*P[k,j](n,x,y),j=0..n-
k),k=0..n):*************************************************************
********************************      n:=7:c:=n^(1/2):
P[k,j](n,x,y):=binomial(n,k)*binomial(n-
k,j)*(x/c)^k*(y/c)^j*(1-(x/c)-(y/c))^(n-k-j):
B[n](f,x,y):=sum(sum(f((k/n)*c,(j/n)*c)*P[k,j](n,x,y),j=0..n-
k),k=0..n):*************************************************************
********************************      n:=10:c:=n^(1/2):
P[k,j](n,x,y):=binomial(n,k)*binomial(n-
k,j)*(x/c)^k*(y/c)^j*(1-(x/c)-(y/c))^(n-k-j):
B[n](f,x,y):=sum(sum(f((k/n)*c,(j/n)*c)*P[k,j](n,x,y),j=0..n-
k),k=0..n):*************************************************************
********************************      n:=15:c:=n^(1/2):
P[k,j](n,x,y):=binomial(n,k)*binomial(n-
k,j)*(x/c)^k*(y/c)^j*(1-(x/c)-(y/c))^(n-k-j):
B[n](f,x,y):=sum(sum(f((k/n)*c,(j/n)*c)*P[k,j](n,x,y),j=0..n-
k),k=0..n):*************************************************************
********************************      n:=18:c:=n^(1/2):
P[k,j](n,x,y):=binomial(n,k)*binomial(n-
k,j)*(x/c)^k*(y/c)^j*(1-(x/c)-(y/c))^(n-k-j):
B[n](f,x,y):=sum(sum(f((k/n)*c,(j/n)*c)*P[k,j](n,x,y),j=0..n-
k),k=0..n):

>
plot3d({f(x,y),B[7](f,x,y),B[15](f,x,y),B[10](f,x,y),B[18](f,x
,y)},x=0..1,y=0..1);
```

$$f := (x,y) \rightarrow \sqrt{|x^2 - y^2|}$$





Şekil 3.2.1 $f(x,y) = \sqrt{|x^2 - y^2|}$ fonksiyonuna $n = 7,\ = 10,\ n = 15$ ve $n = 18$ için yaklaşım.

BÖLÜM 4

ÜÇ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI İLE YAKLAŞIM

4.1 ÜÇGEN PİRAMİT BÖLGEDE ÜÇ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI VE YAKLAŞIM KOŞULLARI

Bu bölüm tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bir önceki bölümdeki iki değişkenli fonksiyonlar için kullanılan (3.1.1) Bernstein-Chlodowsky polinom dizisi üç değişkenli fonksiyonlara taşınarak yaklaşım koşulları elde edilmiştir. Üç değişkenli fonksiyonlar için süreklilik modülü tanımı ve özellikleri inşa edilerek oluşturulan yeni polinom dizisinin yaklaşım hızı incelenmiştir. Son olarak, yeni polinom dizisinin farklı fonksiyonlara yaklaşımı grafik olarak desteklenmiştir.

Tanım 4.1.1 (b_n) dizisi

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

eşitliklerini sağlayan monoton artan gerçel terimli pozitif sayıların bir dizisi olsun.
Bu durumda Δ_{b_n} üçgen piramit bölgesi

$$\Delta_{b_n} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leq b_n\}$$

şeklinde tanımlansın. $(x_1, x_2, x_3) \in \Delta_{b_n}$ olmak üzere, bu üçgen piramit bölgede üç değişkenli fonksiyonlar yardımıyla Bernstein-Chlodowsky tipli bir polinom

$$B_n\ (f; x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{s=0}^{n-k-j} f\left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{n} b_n, \frac{s}{n} b_n\right) \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \binom{n-k-j}{s} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$

$$\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s} \tag{4.1.1}$$

şeklinde tanımlanır. (4.1.1) ifadesinin doğrusallığı, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ve $f_1, f_2 \in C_{\Delta_{b_n}}$ olmak üzere

$$B_n\ (\alpha f_1+\beta f_2; x_1,x_2,x_3)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}(\alpha f_1+\beta f_2; x_1,x_2,x_3)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}$$
$$\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$
$$=\alpha\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j} f_1\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{n}b_n,\frac{s}{n}b_n\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}$$
$$\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$
$$+\beta\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j} f_2\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{n}b_n,\frac{s}{n}b_n\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k$$
$$\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$
$$=\alpha B_n\ (f_1; x_1,x_2,x_3)+\beta B_n\ (f_2; x_1,x_2,x_3)$$

şeklinde gösterilir.

d yeterince büyük bir sabit olmak üzere

$\Delta_d=\{(x_1,x_2,x_3) : x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_1+x_2+x_3\le d\}$

bölgesi ve

$C_{\Delta_d}=\{f\!: f,\ \ \Delta_d$ bölgesinde sürekli$\}$

uzayı tanımlansın. Açıkça (4.1.1) ifadesi C_{Δ_d} den C_{Δ_d} ye dönüşüm yapar.

Lemma 4.1.2 (4.1.1) eşitliği ile verilen $B_n\ (f; x_1, x_2, x_3)$ operatör dizisi C_{Δ_d} den C_{Δ_d} ye tanımlı olup aşağıdaki beş koşulu sağlar.

$$B_n\ \left(f_{0,0,0}; x_1, x_2, x_3\right) = 1 \tag{4.1.2}$$

$$B_n\ \left(f_{1,0,0}; x_1, x_2, x_3\right) = x_1 \tag{4.1.3}$$

$$B_n\ \left(f_{0,1,0}; x_1, x_2, x_3\right) = x_2 \tag{4.1.4}$$

$$B_n\ \left(f_{0,0,1}; x_1, x_2, x_3\right) = x_3 \tag{4.1.5}$$

Ayrıca; $g(t, \tau, \eta) \coloneqq f_{2,0,0}(t, \tau, \eta) + f_{0,2,0}(t, \tau, \eta) + f_{0,0,2}(t, \tau, \eta)$ olmak üzere,

$$B_n\ (g; x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + \frac{x_1(b_n - x_1)}{n} + x_2^2 + \frac{x_2(b_n - x_2)}{n} + x_3^2 + \frac{x_3(b_n - x_3)}{n} \tag{4.1.6}$$

Kanıt: Kanıt için Δ_d üzerinde (4.1.1) ifadesinin Korovkin teoreminin şartlarını sağladığı gösterilmelidir. Yani, $k, m, p \in \{0,1,2\}$, $f_{k,m,p} = t^k \tau^m \eta^p$, ve $f \in C(\Delta_d)$ olmak üzere (4.1.2)-(4.1.6) eşitlikleri geçerlidir. Gerçekten;

$f_{0,0,0}(t, \tau, \eta) = 1$ olduğundan

$$B_n\ \left(f_{0,0,0}; x_1, x_2, x_3\right) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{s=0}^{n-k-j} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \binom{n-k-j}{s} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$
$$\left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n} - \frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \sum_{s=0}^{n-k-j} \binom{n-k-j}{s}$$
$$\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n} - \frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

eşitliği yazılabilir. Burada,

$$\left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n} - \frac{x_3}{b_n} + \frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j} = \sum_{s=0}^{n-k-j} \binom{n-k-j}{s} \left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n} - \frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$(4.1.7)$$

eşitliği geçerli olduğundan,

$$B_n\left(f_{0,0,0};x_1,x_2,x_3\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

halini alır. Yine burada,

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}+\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k}=\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j} \qquad (4.1.8)$$

ifadesi kullanılarak

$$B_n\left(f_{0,0,0};x_1,x_2,x_3\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}=1$$

bulunur. Şimdi de,

$f_{1,0,0}(t,\tau,\eta)=t$ fonksiyonu için benzer bir hesap yapılırsa,

$$B_n\left(f_{1,0,0};x_1,x_2,x_3\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left(\frac{k}{n}b_n\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$
$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left(\frac{k}{n}b_n\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\sum_{s=0}^{n-k-j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$
$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada, (4.1.7) eşitliği kullanılarak $B_n\ \left(f_{1,0,0}; x_1, x_2, x_3\right)$ polinom dizisi

$$\begin{aligned}
B_n\ \left(f_{1,0,0}; x_1, x_2, x_3\right) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \left(\frac{k}{n} b_n\right) \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} b_n\right) \binom{n}{k} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j} \\
&= x_1 \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^{k-1} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Diğer taraftan, (4.1.8) eşitliği geçerli olduğundan

$$\begin{aligned}
B_n\ \left(f_{1,0,0}; x_1, x_2, x_3\right) &= x_1 \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= x_1 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^{k} \left(1 - \frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1} \\
&= x_1
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

$f_{0,1,0}(t, \tau, \eta) = \tau$ fonksiyonu için ise polinom dizisi aşağıdaki şekilde belirlenir:

$$\begin{aligned}
B_n\ \left(f_{0,1,0}; x_1, x_2, x_3\right) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{s=0}^{n-k-j} \left(\frac{j}{n} b_n\right) \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \binom{n-k-j}{s} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s \\
&\quad \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n} - \frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \left(\frac{j}{n} b_n\right) \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \sum_{s=0}^{n-k-j} \binom{n-k-j}{s} \left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s \\
&\quad \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n} - \frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}
\end{aligned}$$

Burada, (4.1.7) eşitliği geçerli olduğundan, bu eşitlik polinomda yerine yazılırsa;

$$B_n\ \left(f_{0,1,0};x_1,x_2,x_3\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left(\frac{j}{n}b_n\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$=x_2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-k}j\,\frac{(n-k)!}{(n-k-j)!\,j!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j-1}\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$=x_2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-k}\frac{(n-k)!}{(n-k-j)!\,(j-1)!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j-1}$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$=x_2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-k}\frac{n-k}{n-k}\frac{(n-k)!}{(n-k-j)!\,(j-1)!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j-1}$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$=x_2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\frac{n-k}{n}\sum_{j=1}^{n-k}\frac{(n-k-1)!}{(n-k-j)!\,(j-1)!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j-1}$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$=x_2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\frac{n-k}{n}\sum_{j=0}^{n-k-1}\frac{(n-k-1)!}{(n-k-j-1)!\,j!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j}$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-1}$$

olarak bulunur. Burada;

$$\left(\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)+\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-1}=\sum_{j=0}^{n-k-1}\binom{n-k-1}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-1}\tag{4.1.9}$$

ifadesi geçerli olduğundan $B_n\ \left(f_{0,1,0};x_1,x_2,x_3\right)$ için

$$B_n\ \left(f_{0,1,0};x_1,x_2,x_3\right)=x_2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\frac{n-k}{n}\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

$$= x_2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \frac{n-k}{n} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

$$= x_2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\,k!} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

$$= x_2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

$$= x_2$$

eşitliği geçerlidir.

Benzer şekilde $f_{0,0,1}(t,\tau,\eta) = \eta$ fonksiyonu için operatör dizisi

$$B_n\,\left(f_{0,0,1};x_1,x_2,x_3\right) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{s=0}^{n-k-j} \left(\frac{s}{n} b_n\right) \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \binom{n-k-j}{s} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$
$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \sum_{s=0}^{n-k-j} \left(\frac{s}{n} b_n\right) \binom{n-k-j}{s} \left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$
$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$= x_3 \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n-k-j} \frac{(n-k-j)!}{(n-k-j-s)!\,(s-1)!}$$
$$\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^{s-1} \left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$= x_3 \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n-k-j} \frac{n-k-j}{n-k-j}$$
$$\frac{(n-k-j)!}{(n-k-j-s)!\,(s-1)!} \left(\frac{x_3}{b_n}\right)^{s-1} \left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$= x_3 \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \frac{n-k-j}{n}$$

$$\sum_{s=1}^{n-k-j} \frac{(n-k-j-1)!}{(n-k-j-s)!\,(s-1)!}\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^{s-1}\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$= x_3 \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^{k}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j}\frac{n-k-j}{n}$$

$$\sum_{s=0}^{n-k-j-1} \frac{(n-k-j-1)!}{(n-k-j-s-1)!\,s!}\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^{s}\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s-1}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\left(\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)+\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-1} = \sum_{s=0}^{n-k-j-1}\binom{n-k-j-1}{s}\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^{s}$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s-1} \tag{4.1.10}$$

eşitliği dikkate alınırsa,

$$B_n\left(f_{0,0,1};x_1,x_2,x_3\right) = x_3\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^{k}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j}\frac{n-k-j}{n}\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-1}$$

$$= x_3\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^{k}\sum_{j=0}^{n-k-1}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j}\frac{n-k-j}{n}\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-1}$$

$$= x_3\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^{k}\sum_{j=0}^{n-k-1}\frac{(n-k)!}{(n-k-j)!\,j!}\frac{n-k-j}{n}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j}$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-1}$$

$$= x_3\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^{k}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-k-1}\frac{(n-k)!}{(n-k-j-1)!\,j!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j}$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-1}$$

$$= x_3\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^{k}\frac{n-k}{n}\sum_{j=0}^{n-k-1}\frac{(n-k-1)!}{(n-k-j-1)!\,j!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j}$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-1}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada yine, (4.1.9) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
B_n\ \left(f_{0,0,1};x_1,x_2,x_3\right) &= x_3\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\frac{n-k}{n}\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1} \\
&= x_3\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\frac{n-k}{n}\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1} \\
&= x_3\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\,k!}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1} \\
&= x_3
\end{aligned}$$

olacaktır. $g(t,\tau,\eta)=f_{2,0,0}(t,\tau,\eta)+f_{0,2,0}(t,\tau,\eta)+f_{0,0,2}(t,\tau,\eta)$ olduğundan

$$f_{2,0,0}(t,\tau,\eta)+f_{0,2,0}(t,\tau,\eta)+f_{0,0,2}(t,\tau,\eta)=t^2+\tau^2+\eta^2$$

fonksiyonu için de polinom dizisi,

$$\begin{aligned}
B_n\ (g;x_1,x_2,x_3) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left[\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2+\left(\frac{j}{n}b_n\right)^2+\left(\frac{s}{n}b_n\right)^2\right]\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s} \\
&\quad \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s \\
&\quad \left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s} \\
&\quad +\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left(\frac{j}{n}b_n\right)^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s \\
&\quad \left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}
\end{aligned}$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left(\frac{s}{n}b_n\right)^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$=T^{'}+T^{''}+T^{'''}$$

bulunur. Kolaylık açısından T', T'' ve T''' ifadeleri ayrı ayrı hesaplanacaktır. T' ifadesinin hesabı için (4.1.1) den

$$T^{'}=B_n\left(f_{2,0,0};x_1,x_2,x_3\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$

$$\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\sum_{s=0}^{n-k-j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

eşitliği geçerlidir. Yine, (4.1.7) eşitliği kullanılarak

$$T^{'}=B_n\left(f_{2,0,0};x_1,x_2,x_3\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

ifadesine ulaşılır. Burada, (4.1.8) ifadesinden

$$T^{'}=B_n\left(f_{2,0,0};x_1,x_2,x_3\right)=b_n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$=b_n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)+1}{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= b_n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$+ b_n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= x_1^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-2)!} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^{k-2} \left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$+ \frac{x_1 b_n}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

$$= x_1^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n-k-2)!\,k!} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-2} + \frac{x_1 b_n}{n}$$

$$= x_1^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-2} + \frac{x_1 b_n}{n}$$

$$= x_1^2 + \frac{x_1(b_n - x_1)}{n}$$

ifadesi bulunur. Benzer şekilde T'' hesaplanırsa;

$$T'' = B_n\left(f_{0,2,0}; x_1, x_2, x_3\right) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{s=0}^{n-k-j} \left(\frac{j}{n} b_n\right)^2 \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \binom{n-k-j}{s} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$
$$\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s \left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \left(\frac{j}{n} b_n\right)^2 \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \sum_{s=0}^{n-k-j} \binom{n-k-j}{s}$$
$$\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s \left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

elde edilir. Yine benzer eşitlik kullanılarak, yani (4.1.7)'den

$$T'' = B_n\left(f_{0,2,0}; x_1, x_2, x_3\right) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \left(\frac{j}{n} b_n\right)^2 \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \sum_{j=0}^{n-k} \left(\frac{j}{n} b_n\right)^2 \binom{n-k}{j} \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \frac{b_n^2}{n} \sum_{j=1}^{n-k} \frac{j}{n} \frac{(n-k)!}{(n-k-j)!\,(j-1)!} \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$

$$\left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \frac{b_n^2}{n} \sum_{j=1}^{n-k} \frac{(j-1)+1}{n} \frac{(n-k)!}{(n-k-j)!\,(j-1)!} \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$

$$\left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{b_n^2}{n} \sum_{j=1}^{n-k} \frac{j-1}{n} \frac{(n-k)!}{(n-k-j)!\,(j-1)!} \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\right.$$

$$\left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j} + \frac{b_n^2}{n}$$

$$\left.\sum_{j=1}^{n-k} \frac{1}{n} \frac{(n-k)!}{(n-k-j)!\,(j-1)!} \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{b_n^2}{n} \sum_{j=2}^{n-k} \frac{1}{n} \frac{(n-k)!}{(n-k-j)!\,(j-2)!} \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\right.$$

$$\left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j} + \frac{x_2 b_n}{n^2}$$

$$\left.\sum_{j=1}^{n-k} \frac{(n-k)!}{(n-k-j)!\,(j-1)!} \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j-1} \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2^2}{n^2} \sum_{j=2}^{n-k} \frac{(n-k)!}{(n-k-j)!\,(j-2)!} \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j-2}\right.$$

$$\left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j} + \frac{x_2 b_n}{n^2}$$

$$\left.(n-k) \sum_{j=1}^{n-k} \frac{(n-k-1)!}{(n-k-j)!\,(j-1)!} \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j-1} \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2^2}{n^2}\sum_{j=0}^{n-k-2}\frac{(n-k)(n-k-1)(n-k-2)!}{(n-k-j-2)!\,j!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\right.$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-2}+\frac{x_2 b_n}{n^2}$$

$$\left.(n-k)\sum_{j=0}^{n-k-1}\frac{(n-k-1)!}{(n-k-j-1)!\,j!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-1}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2^2}{n^2}(n-k)(n-k-1)\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-2}\right.$$

$$\left.+\frac{x_2 b_n}{n^2}(n-k)\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1}\right)$$

$$=\frac{x_2^2}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k(n-k)(n-k-1)\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-2}$$

$$+\frac{x_2 b_n}{n^2}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

$$=\frac{x_2^2(n-1)}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-2}$$

$$+\frac{x_2 b_n}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

$$=\frac{x_2^2(n-1)}{n}+\frac{x_2 b_n}{n}=x_2^2+\frac{x_2(b_n-x_2)}{n}$$

ifadesine ulaşılır. T''' toplamı için (4.1.1) den

$$T'''=B_n\left(f_{0,0,2};x_1,x_2,x_3\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left(\frac{s}{n}b_n\right)^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$

$$\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\sum_{s=0}^{n-k-j}\left(\frac{s}{n}b_n\right)^2\binom{n-k-j}{s}$$

$$\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\frac{b_n^2}{n}\sum_{s=1}^{n-k-j}\frac{s}{n}\frac{(n-k-j)!}{(n-k-j-s)!\,(s-1)!}$$

$$\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\frac{b_n^2}{n}\sum_{s=1}^{n-k-j}\frac{(s-1)+1}{n}$$

$$\frac{(n-k-j)!}{(n-k-j-s)!\,(s-1)!}\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$

$$\left(\frac{b_n^2}{n}\sum_{s=2}^{n-k-j}\frac{s-1}{n}\frac{(n-k-j)!}{(n-k-j-s)!\,(s-1)!}\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\right.$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}+\frac{b_n^2}{n}\sum_{s=1}^{n-k-j}\frac{1}{n}\frac{(n-k-j)!}{(n-k-j-s)!\,(s-1)!}$$

$$\left.\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$

$$\left(\frac{b_n^2}{n^2}\sum_{s=2}^{n-k-j}\frac{(n-k-j)!}{(n-k-j-s)!\,(s-2)!}\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\right.$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}+\frac{x_3b_n^2}{n^2}\sum_{s=1}^{n-k-j}\frac{(n-k-j)!}{(n-k-j-s)!\,(s-1)!}$$

$$\left.\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^{s-1}\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$

$$\left(\frac{x_3^2}{n^2}\sum_{s=2}^{n-k-j}\frac{(n-k-j)!}{(n-k-j-s)!\,(s-2)!}\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^{s-2}\right.$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}+\frac{x_3 b_n}{n^2}\sum_{s=1}^{n-k-j}\frac{(n-k-j)(n-k-j-1)!}{(n-k-j-s)!\,(s-1)!}$$

$$\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^{s-1}\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}\Bigg)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$

$$\left(\frac{x_3^2}{n^2}(n-k-j)(n-k-j-1)\sum_{s=2}^{n-k-j}\frac{(n-k-j-2)!}{(n-k-j-s)!\,(s-2)!}\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^{s-2}\right.$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$+\frac{x_3 b_n}{n^2}(n-k-j)\sum_{s=1}^{n-k-j-1}\frac{(n-k-j-1)!}{(n-k-j-s-1)!\,s!}$$

$$\left.\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^{s}\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s-1}\right)$$

bulunur. Ayrıca, (4.1.10)’dan

$$T''' = B_n\left(f_{0,0,2};x_1,x_2,x_3\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$

$$\left(\frac{x_3^2}{n^2}\sum_{s=0}^{n-k-j-2}\frac{(n-k-j)(n-k-j-1)(n-k-j-2)!}{(n-k-j-s-2)!\,s!}\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^{s}\right.$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s-2}+\frac{x_3 b_n}{n^2}(n-k-j)$$

$$\left.\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-1}\right)$$

elde edilir. Aynı şekilde,

$$\left(\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)+\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-2}=\sum_{s=0}^{n-k-j-2}\binom{n-k-j-2}{s}$$

$$\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s-2}$$

olduğundan,

$$T''' = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3^2}{n^2}(n-k-j)(n-k-j-1)\right.$$

$$\left.\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-2}+\frac{x_3 b_n}{n^2}(n-k-j)\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-1}\right)$$

$$=\frac{x_3^2}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j(n-k-j)(n-k-j-1)$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-2}+\frac{x_3 b_n}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$

$$(n-k-j)\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-1}$$

$$=\frac{z^2}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j(n-k-j)(n-k-j-1)$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-2}\frac{x_3 b_n}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}+\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j(n-k-j)$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-1}$$

$$=\frac{x_3^1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(n-k)!}{(n-k-j-2)!\,j!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-2}$$

$$+\frac{x_3 b_n}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(n-k)!}{(n-k-j-1)!\,j!}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-1}$$

$$=\frac{x_3^2}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k(n-k)(n-k-1)\sum_{j=0}^{n-k-2}\binom{n-k-2}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-2}+\frac{x_3 b_n}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k(n-k)\sum_{j=0}^{n-k-1}\binom{n-k-1}{j}$$

$$\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-1}$$

$$\left(\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)+\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-2} = \sum_{j=0}^{n-k-2}\binom{n-k-2}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^{j}\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j-2}$$

ve (4.1.9)'dan

$$\begin{aligned}
T''' = B_n\left(f_{0,0,2};x_1,x_2,x_3\right) &= \frac{x_3^2}{n^2}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^{k}(n-k)(n-k-1)\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-2} \\
&+\frac{x_3 b_n}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^{k}(n-k)\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1} \\
&=\frac{x_3^2}{n^2}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{n!}{(n-k-2)!\,k!}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-2} \\
&+\frac{x_3 b_n}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{(n-k-1)!\,k!}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1} \\
&=\frac{x_3^2}{n}(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-2} \\
&+\frac{x_3 b_n}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca,

$$1=\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-2}$$

ve

$$1=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

olduğundan,

$$T''' = B_n\left(f_{0,0,2}; x_1, x_2, x_3\right) = \frac{x_3^2}{n}(n-1) + \frac{x_3 b_n}{n} = x_3^2 + \frac{x_3(b_n - x_3)}{n}$$

sonucuna ulaşılır. T', T'' ve T''' için

$$\begin{aligned} B_n(g; x_1, x_2, x_3) &= T' + T'' + T''' \\ &= x_1^2 + \frac{x_1(b_n - x_1)}{n} + x_2^2 + \frac{x_2(b_n - x_2)}{n} + x_3^2 + \frac{x_3(b_n - x_3)}{n} \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 4.1.3 (b_n) dizisi

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

eşitliklerini sağlayan monoton artan gerçel terimli pozitif sayıların bir dizisi olsun.
Bu durumda Δ_{b_n} üçgen piramit bölgesi

$$\Delta_{b_n} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leq b_n\}$$

şeklinde tanımlansın. $(x_1, x_2, x_3) \in \Delta_{b_n}$ olmak üzere, $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^3)$ için Bernstein-Chlodowsky tipi bir polinom

$$B_n(f; x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{s=0}^{n-k-j} f\left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{n} b_n, \frac{s}{n} b_n\right) \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \binom{n-k-j}{s} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n} - \frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s} \tag{4.1.11}$$

şeklinde tanımlanır.

$B_n(f; x_1, x_2, x_3)$ doğrusal pozitif operatör dizileri $C_\rho(\mathbb{R}_+^3)$ dan $C_\rho(\mathbb{R}_+^3)$ ya dönüşüm sağlar. Gerçekten, $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^3)$ ve $K \geq 1$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\left|B_n\ (f; x_1, x_2, x_3)\right| &\le B_n\ (|f|; x_1, x_2, x_3) \\
&\le B_n\ \left(M_f(1 + t^2 + \tau^2 + \eta^2); x_1, x_2, x_3\right) \\
&= M_f\big[B_n\ (1; x_1, x_2, x_3) + B_n\ (t^2; x_1, x_2, x_3) + B_n\ (\tau^2; x_1, x_2, x_3) \\
&\quad + B_n\ (\eta^2; x_1, x_2, x_3)\big] \\
&= M_f\left[1 + x_1^2 + \frac{x_1(b_n - x_1)}{n} + x_2^2 + \frac{x_2(b_n - x_2)}{n} + x_3^2 + \frac{x_3(b_n - x_3)}{n}\right] \\
&= M_f\left[1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{b_n}{n}(x_1 + x_2 + x_3) - \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{n}\right] \\
&\le M_f\left[1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + K(x_1 + x_2 + x_3) - \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{n}\right] \\
&\le M_f[1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + K(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1)]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$M'_f = M_f(1 + K)$$

denilirse

$$\left|B_n\ (f; x_1, x_2, x_3)\right| \le M'_f(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

bulunur. Böylece $B_n\ (f; x_1, x_2, x_3) \in C_\rho\left(\mathbb{R}_+^{3,*}\right)$ olur.

Tanımlanan $B_n\ (f; x_1, x_2, x_3)$ doğrusal pozitif operatörler dizisi Teorem 1.4.5 in koşullarını sağlar.

Teorem 4.1.4 (4.1.11) ile verilen $B_n\ : C_\rho(\mathbb{R}_+^3) \to C_\rho(\mathbb{R}_+^3)$ doğrusal pozitif operatör dizisi için n yeterince büyük bir sayı olmak üzere Δ_{b_n} üçgen piramidinin herhangi bir Δ_d kompakt alt bölgesinde $k, m, p \in \{0,1,2\}$ ve $f_{k,m,p} = t^k \tau^m \eta^p$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \left\|B_n\ \left(f_{0,0,0}; x_1, x_2, x_3\right) - f_{0,0,0}(x_1, x_2, x_3)\right\|_{C(\Delta_d)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\|B_n\ \left(f_{1,0,0}; x_1, x_2, x_3\right) - f_{1,0,0}(x_1, x_2, x_3)\right\|_{C(\Delta_d)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n\ \left(f_{0,1,0};x_1,x_2,x_3\right)-f_{0,1,0}(x_1,x_2,x_3)\right\|_{C(\Delta_d)}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n\ \left(f_{0,0,1};x_1,x_2,x_3\right)-f_{0,0,1}(x_1,x_2,x_3)\right\|_{C(\Delta_d)}=0$$

Ayrıca; $g(t,\tau,\eta)\coloneqq f_{2,0,0}(t,\tau,\eta)+f_{0,2,0}(t,\tau,\eta)+f_{0,0,2}(t,\tau,\eta)$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n\ (g;x_1,x_2,x_3)-g(x_1,x_2,x_3)\right\|_{C(\Delta_d)}=0$$

şeklindeki beş koşul sağlansın. Δ_{b_n} bölgesinde tanımlı, tüm $\mathbb{R}^3$ de

$$|f(x_1,x_2,x_3)|\le M_f(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

koşulunu sağlayan sürekli fonksiyonlar için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n\ (f;x_1,x_2,x_3)-f(x_1,x_2,x_3)\right\|_{C(\Delta_d)}=0$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt: Lemma 4.1.2 de elde edilen (4.1.2)-(4.1.5) ifadeleri göz önüne alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n\ \left(f_{0,0,0};x_1,x_2,x_3\right)-f_{0,0,0}(x_1,x_2,x_3)\right\|_{C(\Delta_d)}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n\ \left(f_{1,0,0};x_1,x_2,x_3\right)-f_{1,0,0}(x_1,x_2,x_3)\right\|_{C(\Delta_d)}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n\ \left(f_{0,1,0};x_1,x_2,x_3\right)-f_{0,1,0}(x_1,x_2,x_3)\right\|_{C(\Delta_d)}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n\ \left(f_{0,0,1};x_1,x_2,x_3\right)-f_{0,0,1}(x_1,x_2,x_3)\right\|_{C(\Delta_d)}=0$$

eşitlikleri bulunur.

Şimdi (4.1.6) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
B_n\ (g;x_1,x_2,x_3)-g(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2+\frac{x_1(b_n-x_1)}{n}+x_2^2+\frac{x_2(b_n-x_2)}{n}+x_3^2\\
&\quad+\frac{x_3(b_n-x_3)}{n}-x_1^2-x_2^2-x_3^2\\
&=\frac{x_1(b_n-x_1)}{n}+\frac{x_2(b_n-x_2)}{n}+\frac{x_3(b_n-x_3)}{n}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_d}|B_n(g;x_1,x_2,x_3)-g(x_1,x_2,x_3)| &= \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_d}\left\{\frac{x_1(b_n-x_1)}{n}+\frac{x_2(b_n-x_2)}{n}\right.\\
&\quad\left.+\frac{x_3(b_n-x_3)}{n}\right\}\\
&=\sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_d}\frac{x_1(b_n-x_1)}{n}+\sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_d}\frac{x_2(b_n-x_2)}{n}\\
&\quad+\sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_d}\frac{x_3(b_n-x_3)}{n}
\end{aligned}$$

yazılabileceğinden, diğer taraftan,

$$\sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_d}\left|B_n\ (g;x_1,x_2,x_3)-g(x_1,x_2,x_3)\right| = \frac{3}{2}\frac{d\left(b_n-\frac{d}{2}\right)}{n}$$

olduğundan ve (b_n) dizisinin seçiminden

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n\ (g;x_1,x_2,x_3)-g(x_1,x_2,x_3)\right\|_{C(\Delta_d)}=0$$

elde edilir. Böylece Teorem 1.4.5 in koşulları sağlandığından her $f\in C_\rho(\mathbb{R}_+^3)$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n\ (f;x_1,x_2,x_3)-f(x_1,x_2,x_3)\right\|_{C(\Delta_d)}=0$$

bulunur. Bu da kanıtı tamamlar.

Sonuç 4.1.5 d yeterince büyük pozitif gerçel bir sayı olmak üzere Δ_d kompakt bölgesinde $B_n : C(\Delta_d) \to C(\Delta_d)$ doğrusal pozitif operatörler dizisi $n \to \infty$ için (4.1.2)-(4.1.6) şeklindeki şartları sağlıyorsa her $f \in C(\Delta_d)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_n \ (f; x_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3) \right\|_{C(\Delta_d)} = 0$$

eşitliği sağlanır.

Uyarı 4.1.6 $n \to \infty$ için Δ_{b_n} üçgensel piramit bölgesi üzerinde $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ fonksiyonuna (4.1.1) polinom dizisi ile yaklaşım mümkün değildir.
Gerçekten polinom dizisinin tanımından,

$$\begin{aligned} B_n \ (f; x_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + \frac{x_1(b_n - x_1)}{n} + x_2^2 + \frac{x_2(b_n - x_2)}{n} + x_3^2 \\ &\quad + \frac{x_3(b_n - x_3)}{n} - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \\ &= \frac{x_1(b_n - x_1)}{n} + \frac{x_2(b_n - x_2)}{n} + \frac{x_3(b_n - x_3)}{n} \end{aligned}$$

yazılabilir. Norm tanımından;

$$\begin{aligned} \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}} \left| B_n \ (f; x_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3) \right| &= \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}} \left\{ \frac{x_1(b_n - x_1)}{n} + \frac{x_2(b_n - x_2)}{n} \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_3(b_n - x_3)}{n} \right\} \\ &= \frac{3b_n^2}{4n} \end{aligned}$$

eşitliği geçerli olup, $n \to \infty$ için $\frac{b_n^2}{n} \to \infty$ olacak şekilde bir (b_n) dizisi bulunabileceğinden

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}} \left| B_n \ (f; x_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3) \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3b_n^2}{4n} = \infty$$

olacak şekilde (b_n) vardır. Bu da yakınsamanın sınırsız bölgelerde olmadığını gösterir.

Şimdiki teorem, $n \to \infty$ için Δ_{b_n} bölgesinde (4.1.1) ifadesi ile özel bir yaklaşımın varlığını ortaya koyar.

Teorem 4.1.7 $\rho(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ olmak üzere her $\gamma > 0$ ve $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^3)$ için

$$\Delta_{b_n} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leq b_n\}$$

bölgesinde

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n\ (f; x_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)\right|}{(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1+\gamma}} = 0$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt: Her $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}\backslash\Delta_d} \frac{1}{(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\gamma}} < \varepsilon \tag{4.1.12}$$

olmak üzere $x_1 + x_2 + x_3 > d$ olacak şekilde yeterince büyük $d > 0$ sayısı seçilirse (b_n) dizisinin seçiminden $\frac{b_n}{n}$ dizisi sınırlıdır. O halde

$$\frac{b_n}{n} < K$$

olacak şekilde $K > 0$ sayısı vardır. Aynı zamanda,

$$\begin{aligned}
\sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}} & \frac{\left|B_n\ (f; x_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)\right|}{(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1+\gamma}} \\
&\leq \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_d} \frac{\left|B_n\ (f; x_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)\right|}{(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1+\gamma}} + \\
&+ \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}\backslash\Delta_d} \frac{\left|B_n\ (f; x_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)\right|}{(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1+\gamma}} \\
&\leq \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_d} \left|B_n\ (f; x_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)\right| +
\end{aligned}$$

$$+\sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}\setminus\Delta_d}\frac{\left|B_n\ (f;x_1,x_2,x_3)-f(x_1,x_2,x_3)\right|}{(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1+\gamma}}$$
$$=h'_n(f)+h''_n(f)$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 4.1.3 den

$$\lim_{n\to\infty}h'_n(f)=0$$

olur. Ayrıca, yine Lemma 4.1.2 de elde edilen ifadeler yardımıyla

$$\begin{aligned}\left|B_n\ (f;x_1,x_2,x_3)\right| &\le B_n\ (|f|;x_1,x_2,x_3)\\ &\le B_n\ \left(M_f(1+t^2+\tau^2+\eta^2);x_1,x_2,x_3\right)\\ &= M_f\big[B_n\ (1;x_1,x_2,x_3)+B_n\ (t^2;x_1,x_2,x_3)+B_n\ (\tau^2;x_1,x_2,x_3)\\ &\quad +B_n\ (\eta^2;x_1,x_2,x_3)\big]\\ &= M_f\left[1+x_1^2+\frac{x_1(b_n-x_1)}{n}+x_2^2+\frac{x_2(b_n-x_2)}{n}+x_3^2+\frac{x_3(b_n-x_3)}{n}\right]\\ &= M_f\left[1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+\frac{b_n}{n}(x_1+x_2+x_3)-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{n}\right]\\ &\le M_f\left[1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+K(x_1+x_2+x_3)-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{n}\right]\\ &\le M_f[1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+K(x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)]\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$M'_f=M_f(1+K)$$

denilirse

$$\left|B_n\ (f;x_1,x_2,x_3)\right|\le M'_f(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

bulunur. Aynı zamanda

$$
\begin{aligned}
h''_n(f) &= \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}\backslash\Delta_d} \frac{\left|B_n\ (f;x_1,x_2,x_3)-f(x_1,x_2,x_3)\right|}{(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1+\gamma}} \\
&\leq \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}\backslash\Delta_d} \frac{\left|B_n\ (f;x_1,x_2,x_3)\right|+|f(x_1,x_2,x_3)|}{(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1+\gamma}} \\
&\leq \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}\backslash\Delta_d} \left[\frac{M'_f(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2)+M_f(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1+\gamma}}\right] \\
&\leq \left(M'_f+M_f\right) \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}\backslash\Delta_d} \frac{1}{(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\gamma}}
\end{aligned}
$$

olur, (4.1.12) den, her $\varepsilon > 0$ için

$$h''_n(f) \leq \left(M'_f+M_f\right)\varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} h''_n(f) = 0$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n\ (f;x_1,x_2,x_3)-f(x_1,x_2,x_3)\right|}{(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1+\gamma}} \leq \lim_{n\to\infty}\left(h'_n(f)+h''_n(f)\right) = 0$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n\ (f;x_1,x_2,x_3)-f(x_1,x_2,x_3)\right|}{(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1+\gamma}} = 0$$

eşitliği gösterilmiş olur.

$\gamma = 0$ olması durumunda (4.1.1) ifadesi Teorem 1.5.5 gereği her $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^3)$ için yakınsama sağlamak zorunda değildir. $\gamma = 0$ için yakınsama koşulları aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 4.1.8 $f_{k,m,p} = x^k y^m z^p$ fonksiyonu için (4.1.1) ile tanımlanan üç değişkenli fonksiyonlar için Bernstein-Chlodowsky tipi polinomlar dizisi,

$\vartriangle' = \{(k,m,p): k,m,p \in \mathbb{N}_0, k \geq 0, m \geq 0, p \geq 0, k,m,p \in \{0,1,2\}\}$

olmak üzere $(k,m,p) \in\vartriangle'$ için

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n\left(f_{k,m,p};x_1,x_2,x_3\right) - f_{k,m,p}(x_1,x_2,x_3)\right|}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2} = 0$$

ifadesini sağlar.

Kanıt: $k=m=p=0$ olmak üzere $f_{0,0,0}(x_1,x_2,x_3)=1$ fonksiyonu için polinom dizisinin tanımından,

$$B_n\left(f_{0,0,0};x_1,x_2,x_3\right) - f_{0,0,0}(x_1,x_2,x_3) = 0$$

elde edilir. O halde

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n\left(f_{0,0,0};x_1,x_2,x_3\right) - f_{0,0,0}(x_1,x_2,x_3)\right|}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2} = 0$$

bulunur.

$k=1,\ m=0$ ve $p=0$ olmak üzere $f_{1,0,0}(x_1,x_2,x_3)=x_1$ fonksiyonu ve polinom dizisinin sağladığı (4.1.3) eşitliğinden

$$B_n\left(f_{1,0,0};x_1,x_2,x_3\right) - f_{1,0,0}(x_1,x_2,x_3) = 0$$

yazılabilir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n\left(f_{1,0,0};x_1,x_2,x_3\right) - f_{1,0,0}(x_1,x_2,x_3)\right|}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2} = 0$$

olacaktır. Benzer şekilde,

$k = 0,\ m = 1$ ve $p = 0$ olmak üzere $f_{0,1,0}(x_1, x_2, x_3) = x_2$ fonksiyonu için (4.1.4) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$B_n\ \left(f_{0,1,0}; x_1, x_2, x_3\right) - f_{0,1,0}(x_1, x_2, x_3) = 0$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n\ \left(f_{0,1,0}; x_1, x_2, x_3\right) - f_{0,1,0}(x_1, x_2, x_3)\right|}{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 0$$

eşitliği geçerlidir.

$k = 0,\ m = 0$ ve $p = 1$ olmak üzere $f_{0,0,1}(x_1, x_2, x_3) = x_3$ fonksiyonu için (4.1.5) eşitliği yardımıyla,

$$B_n\ \left(f_{0,0,1}; x_1, x_2, x_3\right) - f_{0,0,1}(x_1, x_2, x_3) = 0$$

bulunur. O halde

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n\ \left(f_{0,0,1}; x_1, x_2, x_3\right) - f_{0,0,1}(x_1, x_2, x_3)\right|}{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 0$$

elde edilir.

$k = 1,\ m = 1$ ve $p = 0$ olmak üzere $f_{1,1,0}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2$ fonksiyonu için (4.1.3) ve (4.1.4) eşitlikleri göz önüne alınarak,

$$B_n\ \left(f_{1,1,0}; x_1, x_2, x_3\right) - f_{1,1,0}(x_1, x_2, x_3) = 0$$

bulunur. O halde

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n\ \left(f_{1,1,0}; x_1, x_2, x_3\right) - f_{1,1,0}(x_1, x_2, x_3)\right|}{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 0$$

elde edilir.

Benzer şekilde; $k = 1,\ m = 0$ ve $p = 1$ olmak üzere $f_{1,0,1}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3$ fonksiyonu için (4.1.3) ve (4.1.5) eşitlikleri kullanılarak,

$$B_n\ \left(f_{1,0,1}; x_1, x_2, x_3\right) - f_{1,0,1}(x_1, x_2, x_3) = 0$$

bulunur. O halde

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n\ \left(f_{1,0,1}; x_1, x_2, x_3\right) - f_{1,0,1}(x_1, x_2, x_3)\right|}{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 0$$

bulunur.

Diğer taraftan, $k = 0,\ m = 1$ ve $p = 1$ olmak üzere $f_{0,1,1}(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3$ fonksiyonu için (4.1.4) ve (4.1.5) eşitlikleri yardımıyla,

$$B_n\ \left(f_{0,1,1}; x_1, x_2, x_3\right) - f_{0,1,1}(x_1, x_2, x_3) = 0$$

bulunur. O halde

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}} \frac{\left|B_n\ \left(f_{0,1,1}; x_1, x_2, x_3\right) - f_{0,1,1}(x_1, x_2, x_3)\right|}{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 0$$

elde edilir.

Son olarak,

$$g(t, \tau, \eta) = f_{2,0,0}(t, \tau, \eta) + f_{0,2,0}(t, \tau, \eta) + f_{0,0,2}(t, \tau, \eta)$$

fonksiyonu için

$$B_n\ (g; x_1, x_2, x_3) - g(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1(b_n - x_1)}{n} + \frac{x_2(b_n - x_2)}{n} + \frac{x_3(b_n - x_3)}{n}$$

elde edilir. $1+x_1^2+x_2^2+x_3^2$ ifadesine bölünür ve $(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}$ üzerinden supremum alınırsa,

$$\frac{\left|B_n\ (g;x_1,x_2,x_3)-g(x_1,x_2,x_3)\right|}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}=\frac{x_1(b_n-x_1)+x_2(b_n-x_2)+x_3(b_n-x_3)}{n(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2)}$$
$$\leq\frac{(b_n-x_1)+(b_n-x_2)+(b_n-x_3)}{n}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}}\frac{\left|B_n\ (g;x_1,x_2,x_3)-g(x_1,x_2,x_3)\right|}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}\leq\sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}}\frac{(b_n-x_1)+(b_n-x_2)+(b_n-x_3)}{n}$$
$$\leq\frac{3b_n}{n}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Her iki tarafın $n\to\infty$ üzerinden limiti alınırsa (b_n) dizisinin tanımından

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{(x_1,x_2,x_3)\in\Delta_{b_n}}\frac{\left|B_n\ (g;x_1,x_2,x_3)-g(x_1,x_2,x_3)\right|}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{3b_n}{n}=0$$

bulunur. Bu ise kanıtı tamamlar.

4.2 ÜÇ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARININ YAKLAŞIM HIZI

Teorem 4.2.1 $\omega(f;\delta_n)$, f fonksiyonunun $B>1$ olmak üzere $[0,B]\times[0,B]\times[0,B]$ üzerinde tanımlı tam süreklilik modülü olsun. $f\in C(\Delta_B)$ fonksiyonu için $[0,B]\times[0,B]\times[0,B]$ üzerinde, yeterince büyük n ler için

$$|B_n(f;x_1,x_2,x_3)-f(x_1,x_2,x_3)|\leq 9B\omega\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt: $x_1, x_2, x_3 \in [0, B]$ olmak üzere

$$B_n(f; x_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{s=0}^{n-k-j} \left[f\left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{n} b_n, \frac{s}{n} b_n\right) - f(x_1, x_2, x_3) \right] \binom{n}{k}$$

$$\binom{n-k}{j} \binom{n-k-j}{s} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n} - \frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

elde edilir. Buradan;

$$|B_n(f; x_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)| \leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{s=0}^{n-k-j} \left| f\left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{n} b_n, \frac{s}{n} b_n\right) - f(x_1, x_2, x_3) \right| \binom{n}{k}$$

$$\binom{n-k}{j} \binom{n-k-j}{s} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n} - \frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{s=0}^{n-k-j} \left| f\left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{n} b_n, \frac{s}{n} b_n\right) - f\left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{n} b_n, x_3\right) \right.$$

$$\left. + f\left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{n} b_n, x_3\right) - f\left(x_1, \frac{j}{n} b_n, x_3\right) + f\left(x_1, \frac{j}{n} b_n, x_3\right) - f(x_1, x_2, x_3) \right|$$

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \binom{n-k-j}{s} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n} - \frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{s=0}^{n-k-j} \left| f\left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{n} b_n, \frac{s}{n} b_n\right) - f\left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{n} b_n, x_3\right) \right| \binom{n}{k}$$

$$\binom{n-k}{j} \binom{n-k-j}{s} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n} - \frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{s=0}^{n-k-j} \left| f\left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{n} b_n, x_3\right) - f\left(x_1, \frac{j}{n} b_n, x_3\right) \right| \binom{n}{k} \binom{n-k}{j}$$

$$\binom{n-k-j}{s} \left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s \left(1 - \frac{x_1}{b_n} - \frac{x_2}{b_n} - \frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{s=0}^{n-k-j} \left| f\left(x_1, \frac{j}{n} b_n, x_3\right) - f(x_1, x_2, x_3) \right| \binom{n}{k} \binom{n-k}{j}$$

$$\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$\leq\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\omega_3\left(f;\left|\frac{s}{n}b_n-x_3\right|\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}$$

$$\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\omega_1\left(f;\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}$$

$$\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\omega_2\left(f;\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}$$

$$\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$=\theta_1(x_1,x_2,x_3)+\theta_2(x_1,x_2,x_3)+\theta_3(x_1,x_2,x_3)$$

bulunur. $\theta_1(x_1,x_2,x_3)$, $\theta_2(x_1,x_2,x_3)$ ve $\theta_3(x_1,x_2,x_3)$ ayrı ayrı hesaplanırsa; ilk olarak $\theta_2(x_1,x_2,x_3)$ ele alındığında,

$$\theta_2(x_1,x_2,x_3)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\omega_1\left(f;\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$

$$\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\omega_1\left(f;\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\sum_{s=0}^{n-k-j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\omega_1\left(f;\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\omega_1\left(f;\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}$$

ifadesine ulaşılır. $x,t\in[0,A]$ ve $A>1$ olmak üzere, süreklilik modülünün

$$|f(t)-f(x)| \leq \omega(f;\delta)\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right) \tag{4.2.1}$$

özelliği ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği son eşitsizlikte kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\theta_2(x_1,x_2,x_3) &\leq \omega_1(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n-x_1\right)^2\left[\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}\right]\right]^{1/2}\right\} \\
&\leq \omega_1(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x_1(b_n-x_1)}{n}}\right\} \leq \omega_1(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x_1 b_n}{n}}\right\} \\
&\leq \omega_1(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{Ab_n}{n}}\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\delta_n=\sqrt{\frac{b_n}{n}}$ olarak seçilirse,

$$\begin{aligned}
\theta_2(x_1,x_2,x_3) &\leq \omega_1\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\{1+\sqrt{A}\} \\
&< 2A\omega_1\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) \qquad (4.2.2)
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Diğer taraftan (4.2.1) özelliği kullanılarak $\theta_3(x_1,x_2,x_3)$ ifadesi hesaplanırsa;

$$\begin{aligned}
\theta_3(x_1,x_2,x_3) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\omega_2\left(f;\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \\
&\quad \left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s} \\
&\leq \omega_2(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\right.\right.
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j \left(\frac{x_2}{b_n}\right)^s \left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}\Bigg]\Bigg\}$$

$$= \omega_2(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \sum_{j=0}^{n-k}\left|\frac{j}{n}b_n - x_2\right|\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\right.\right.$$

$$\left.\left.\sum_{s=0}^{n-k-j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}\right]\right\}$$

$$= \omega_2(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \sum_{j=0}^{n-k}\left|\frac{j}{n}b_n - x_2\right|\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}\right]\right\}$$

$$\leq \omega_2(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k \sum_{j=0}^{n-k}\left(\frac{j}{n}b_n\right)\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k y\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}\right)^{n-k-j}\right]\right\}$$

$$\leq \omega_2(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}2x_2\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. $x_2 \in [0,B]$ olduğundan,

$$\theta_3(x_1,x_2,x_3) \leq \omega_2(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}2B\right\}$$

eşitsizliği sağlanmış olur. Yeterince büyük n ler için $\delta_n = \sqrt{\frac{b_n}{n}}$ olarak seçilirse;

$$\theta_3(x_1,x_2,x_3) < 3B\omega_2\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) \qquad (4.2.3)$$

ifadesine ulaşılır. Son olarak (4.2.1) özelliği yardımıyla benzer olarak $\theta_1(x_1,x_2,x_3)$ ifadesi hesaplanırsa;

$$\theta_1(x_1,x_2,x_3)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\omega_3\left(f;\left|\frac{s}{n}b_n-x_3\right|\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$

$$\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$\leq \omega_3(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{s}{n}b_n-x_3\right|\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}\right]\right\}$$

$$=\omega_3(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{s}{n}b_n-x_3\right|\right.\right.$$

$$\left.\left.\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}\right]\right\}$$

$$\leq \omega_3(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\sum_{s=0}^{n-k-j}\left(\frac{s}{n}b_n\right)\binom{n-k-j}{s}\right.\right.$$

$$\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$

$$\left.\left.x_3\sum_{s=0}^{n-k-j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}\right]\right\}$$

$$\leq \omega_3(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}2x_3\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. $x_3\in[0,B]$ olduğundan,

$$\theta_1(x_1,x_2,x_3)\leq \omega_3(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}2B\right\}$$

eşitsizliği sağlanmış olur. Yeterince büyük n ler için $\delta_n=\sqrt{\frac{b_n}{n}}$ olarak seçilirse;

$$\theta_1(x_1,x_2,x_3)<3B\omega_3\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) \tag{4.2.4}$$

ifadesine ulaşılır. (4.2.2)-(4.2.4) eşitsizliklerinden

$$|B_n(f;x_1,x_2,x_3)-f(x_1,x_2,x_3)| \le 2B\omega_1\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)+3B\omega_2\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)+3B\omega_3\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

elde edilir. Son olarak;

$$\begin{aligned}\omega_1\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)+\omega_2\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)+\omega_3\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) &< 2B\omega_1\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)+3B\omega_2\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\\ &\quad +3B\omega_3\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\\ &< 3B\left[\omega_1\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)+\omega_2\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)+\omega_3\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\right]\end{aligned}$$

olduğundan, ayrıca kısmi süreklilik ve süreklilik modülü arasında iyi bilinen

$$\omega_1\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)+\omega_2\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)+\omega_3\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) \le 3\omega\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

ifadesi kullanılarak

$$|B_n(f;x_1,x_2,x_3)-f(x_1,x_2,x_3)| \le 9B\omega\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Teorem 4.2.2 Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^3)$ ve yeterince büyük n için $B_n(f;x_1,x_2,x_3)$ ile tanımlı operatör olmak üzere,

$$\sup_{x_1,x_2,x_3\in[0,\infty[} \frac{|B_n(f;x_1,x_2,x_3)-f(x_1,x_2,x_3)|}{(1+\|x\|^2)^3} \leq K\,\Omega\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt: Operatörün tanımından

$$B_n(1;x_1,x_2,x_3) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s} = 1 \qquad (4.2.5)$$

eşitliği doğrudur. Operatörün doğrusallığı ve monotonluğu kullanılarak

$$|B_n(f;x_1,x_2,x_3)-f(x_1,x_2,x_3)| \leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|f\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{n}b_n,\frac{s}{n}b_n\right)-f(x_1,x_2,x_3)\right|\binom{n}{k}$$

$$\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

(4.2.6)

eşitsizliği elde edilir. Üç değişkenli fonksiyonlar için ağırlıklı süreklilik modülünün (v) özelliğinde $t_1=\frac{k}{n}b_n$, $t_2=\frac{j}{n}b_n$ ve $t_3=\frac{s}{n}b_n$ olarak seçilirse; her $\delta_n>0$ için

$$\left|f\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{n}b_n,\frac{s}{n}b_n\right)-f(x_1,x_2,x_3)\right| \leq 4(1+\delta_n^2)\Omega(f;\delta_n)(1+\|x\|^2)$$

$$\left(\frac{\left\|\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{n}b_n,\frac{s}{n}b_n\right)-(x_1,x_2,x_3)\right\|}{\delta_n}+1\right)$$

$$\left(1+\left\|\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{n}b_n,\frac{s}{n}b_n\right)-(x_1,x_2,x_3)\right\|^2\right)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlik (4.2.6) da yerine yazılırsa yine operatörün monotonluk özelliği kullanılarak;

$$|B_n(f;x_1,x_2,x_3)-f(x_1,x_2,x_3)|\leq 4(1+\delta_n^2)\Omega(f;\delta_n)(1+\|x\|^2)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left(\frac{\left\|\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{n}b_n,\frac{s}{n}b_n\right)-(x_1,x_2,x_3)\right\|}{\delta_n}+1\right)\right.$$

$$\left(1+\left\|\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{n}b_n,\frac{s}{n}b_n\right)-(x_1,x_2,x_3)\right\|^2\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}$$

$$\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left.\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}\right)$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $\|x\|=\sum_{i=1}^{3}|x_i|$ normu kullanılarak,

$$|B_n(f;x_1,x_2,x_3)-f(x_1,x_2,x_3)|\leq 4(1+\delta_n^2)\Omega(f;\delta_n)(1+\|x\|^2)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left(\frac{\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|}{\delta_n}+\frac{\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|}{\delta_n}+\frac{\left|\frac{s}{n}b_n-x_3\right|}{\delta_n}+1\right)\right.$$

$$\left(1+\left(\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|+\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|+\left|\frac{s}{n}b_n-x_3\right|\right)^2\right)\binom{n}{k}$$

$$\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left.\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}\right)$$

$$\leq 16(1+\delta_n^2)\Omega(f;\delta_n)(1+\|x\|^2)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left(\frac{\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|}{\delta_n}+\frac{\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|}{\delta_n}+\frac{\left|\frac{s}{n}b_n-x_3\right|}{\delta_n}+1\right)\right.$$

$$\left(1+\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|^2+\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|^2+\left|\frac{s}{n}b_n-x_3\right|^2\right)\binom{n}{k}$$

$$\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left.\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}\right)$$

$$= 16(1+\delta_n^2)\Omega(f;\delta_n)(1+\|x\|^2)$$

$$\left(1+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\right.$$

$$\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|^2$$

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}+$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{s}{n}b_n-x_3\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$

$$\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}+\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|$$

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}+\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|\binom{n}{k}$$

$$\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}+\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{s}{n}b_n-x_3\right|\binom{n}{k}$$

$$\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}+\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|$$

$$\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}+\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|$$

$$\left|\frac{s}{n}b_n-x_3\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}+\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|$$

$$\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}+\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|$$

$$\left|\frac{s}{n}b_n-x_3\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}+\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{s}{n}b_n-x_3\right|$$

$$\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}+\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{s}{n}b_n-x_3\right|$$

$$\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}+\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|^3\binom{n}{k}$$

$$\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$+\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|^3\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k$$

$$\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{s}{n}b_n-x_3\right|^3\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j$$

$$\left.\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}\right) \tag{4.2.7}$$

ifadesine ulaşılır. Elde edilen toplamlar ayrı ayrı hesaplanacaktır. Yani;

$$I^1=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$I^2=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$I^3 = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j} \left|\frac{s}{n}b_n - x_3\right|^2 \binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$I^4 = \frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j} \left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right| \binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$I^5 = \frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j} \left|\frac{j}{n}b_n - x_2\right| \binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$I^6 = \frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j} \left|\frac{s}{n}b_n - x_3\right| \binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$I^7 = \frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j} \left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right|^3 \binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$I^8 = \frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j} \left|\frac{j}{n}b_n - x_2\right|^3 \binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$I^9 = \frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j} \left|\frac{s}{n}b_n - x_3\right|^3 \binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$I^{10}=\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$I^{11}=\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|\left|\frac{s}{n}b_n-x_3\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$I^{12}=\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$I^{13}=\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|\left|\frac{s}{n}b_n-x_3\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$I^{14}=\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{s}{n}b_n-x_3\right|\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

$$I^{15}=\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{s}{n}b_n-x_3\right|\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}$$

yazılırsa, I^1, I^2 ve I^3 için daha önce yapılan hesaplamalar dikkate alınarak,

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}=\frac{x_1(b_n-x_1)}{n},$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{j}{n}b_n-x_2\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}=\frac{x_2(b_n-x_2)}{n}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{s}{n}b_n-x_3\right|^2\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}=\frac{x_3(b_n-x_3)}{n}$$

eşitlikleri yazılabilir. I^4 toplamı için Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa;

$$\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s}=\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}b_n-x_1\right|\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$\leq\frac{1}{\delta_n}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n-x_1\right)^2\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}\right]^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x_1(b_n - x_1)}{n}}$$

ifadesine ulaşılır. I^5 ve I^6 toplamlarının hesabı için $\left|\frac{j}{n}b_n - x_2\right| < \delta_n$ ve $\left|\frac{s}{n}b_n - x_3\right| < \delta_n$ eşitsizlikleri yardımıyla,

$$I^5 = \frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{j}{n}b_n - x_2\right|\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s} \leq 1 \tag{4.2.8}$$

$$I^6 = \frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{s}{n}b_n - x_3\right|\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s} \leq 1 \tag{4.2.9}$$

eşitsizliklerine ulaşılır. I^7 ifadesinin hesaplanması için daha önce elde edilen (3.2.7) eşitsizliği kullanılırsa,

$$I^7 = \frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-j}\left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right|^3\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{s}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(\frac{x_2}{b_n}\right)^j\left(\frac{x_3}{b_n}\right)^s$$

$$\left(1-\frac{x_1}{b_n}-\frac{x_2}{b_n}-\frac{x_3}{b_n}\right)^{n-k-j-s} = \frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right|\left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right|^2\binom{n}{k}\left(\frac{x_1}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x_1(b_n - x_1)}{n}}\left(x_1^4\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3} - \right.$$

$$4x_1^4\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + 6x_1^3\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\left(\frac{b_n}{n}\right)$$

$$+6x_1^3\frac{(b_n-x_1)}{n}-12x_1^2\frac{(b_n-x_1)}{n}\left(\frac{b_n}{n}\right)+8x_1^2\left(\frac{b_n}{n}\right)^2$$

$$+7x_1\frac{(b_n-x_1)}{n}\left(\frac{b_n}{n}\right)^2-6x_1\left(\frac{b_n}{n}\right)^3-\ 3x_1^4\Bigg)^{1/2}$$

yazılır. $I^8 - I^{15}$ toplamları için ise, $\left|\frac{k}{n}b_n - x_1\right| < \delta_n$, $\left|\frac{j}{n}b_n - x_2\right| < \delta_n$ ve $\left|\frac{s}{n}b_n - x_3\right| < \delta_n$ eşitsizlikleri dikkate alınarak (4.2.7) eşitsizliği yeniden düzenlenerek yazılırsa,

$$|B_n(f;x_1,x_2,x_3)-f(x_1,x_2,x_3)|\leq 16(1+\delta_n^2)\Omega(f;\delta_n)(1+\|x\|^2)$$

$$\Bigg[3+8\delta_n^2+\frac{x_1(b_n-x_1)}{n}+\ \frac{x_2(b_n-x_2)}{n}+\frac{x_3(b_n-x_3)}{n}$$

$$+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x_1(b_n-x_1)}{n}}+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x_1(b_n-x_1)}{n}}$$

$$\Bigg(x_1^4\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}-4x_1^4\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}+$$

$$6x_1^3\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\left(\frac{b_n}{n}\right)+6x_1^3\frac{(b_n-x_1)}{n}-$$

$$12x_1^2\frac{(b_n-x_1)}{n}\left(\frac{b_n}{n}\right)8x_1^2\left(\frac{b_n}{n}\right)^2+7x_1\frac{(b_n-x_1)}{n}\left(\frac{b_n}{n}\right)^2$$

$$-6x_1\left(\frac{b_n}{n}\right)^3-\ 3x_1^4\Bigg)^{1/2}\Bigg]$$

elde edilir. Buradan, $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3} \leq 1$, $\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \leq 1$ eşitsizlikleri kullanılarak,

$$|B_n(f;x_1,x_2,x_3)-f(x_1,x_2,x_3)|\leq 16(1+\delta_n^2)\Omega(f;\delta_n)(1+\|x\|^2)$$

$$\Bigg[3+8\delta_n^2+\frac{x_1(b_n-x_1)}{n}+\frac{x_2(b_n-x_2)}{n}+\frac{x_3(b_n-x_3)}{n}$$

$$+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x_1(b_n-x_1)}{n}}+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x_1(b_n-x_1)}{n}}$$

$$\left(8x_1^4+6x_1^3\left(\frac{b_n}{n}\right)+6x_1^3\frac{(b_n-x_1)}{n}+12x_1^2\frac{(b_n-x_1)}{n}\left(\frac{b_n}{n}\right)\right.$$

$$\left.\left.+8x_1^2\left(\frac{b_n}{n}\right)+7x_1\frac{(b_n-x_1)}{n}\left(\frac{b_n}{n}\right)^2+6x_1\left(\frac{b_n}{n}\right)^3\right)^{1/2}\right]$$

yazılabilir. Buradan bazı düzenlemeler yapılarak,

$$|B_n(f;x_1,x_2,x_3)-f(x_1,x_2,x_3)|\leq 16(1+\delta_n^2)\Omega(f;\delta_n)(1+\|x\|^2)$$

$$\left[3+8\delta_n^2+\frac{b_n}{n}(x_1+x_2+x_3)+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{x_1\frac{b_n}{n}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{x_1\frac{b_n}{n}}\left(8x_1^4+12x_1^3\left(\frac{b_n}{n}\right)+20x_1^2\left(\frac{b_n}{n}\right)^2+13x_1\left(\frac{b_n}{n}\right)^3\right)^{1/2}\right]$$

yazılabilir. Son eşitsizliğin her iki tarafı $(1+\|x\|^2)^3$ ye bölünürse;

$$\frac{|B_n(f;x_1,x_2,x_3)-f(x_1,x_2,x_3)|}{(1+\|x\|^2)^3}\leq 16(1+\delta_n^2)\Omega(f;\delta_n)\left[\frac{3}{(1+\|x\|^2)^2}+8\frac{\delta_n^2}{(1+\|x\|^2)^2}+\right.$$

$$\frac{b_n}{n}\frac{(x_1+x_2+x_3)}{(1+\|x\|^2)^2}+\frac{1}{\delta_n}\frac{\sqrt{x_1}}{(1+\|x\|^2)^2}\sqrt{\frac{b_n}{n}}+\frac{1}{\delta_n}\frac{\sqrt{x_1}}{(1+\|x\|^2)}$$

$$\sqrt{\frac{b_n}{n}}\left(8\frac{x_1^4}{(1+\|x\|^2)^2}+12\frac{x_1^3}{(1+\|x\|^2)^2}\left(\frac{b_n}{n}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+20\frac{x_1^2}{(1+\|x\|^2)^2}\left(\frac{b_n}{n}\right)^2+13\frac{x_1}{(1+\|x\|^2)^2}\left(\frac{b_n}{n}\right)^3\right)^{1/2}\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Burada,

$\frac{1}{(1+\|x\|^2)^2} \leq 1,\ \frac{(x_1+x_2+x_3)}{(1+\|x\|^2)^2} \leq 1,\ \frac{\sqrt{x_1}}{(1+\|x\|^2)^2} \leq 1,\ \frac{\sqrt{x_1}}{(1+\|x\|^2)} \leq 1,\ \frac{x_1^4}{(1+\|x\|^2)^2} \leq 1,\ \frac{x_1^3}{(1+\|x\|^2)^2} \leq 1,$ ve $\frac{x_1}{(1+\|x\|^2)^2} \leq 1$ eşitsizlikleri kullanılarak

$$\frac{|B_n(f;x_1,x_2,x_3) - f(x_1,x_2,x_3)|}{(1+\|x\|^2)^3} \leq 16(1+\delta_n^2)\Omega(f;\delta_n)\left[3 + 8\delta_n^2 + \frac{b_n}{n} + \frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{b_n}{n}}\left(8 + 12\left(\frac{b_n}{n}\right) + 20\left(\frac{b_n}{n}\right)^2 + 13\left(\frac{b_n}{n}\right)^3\right)^{1/2}\right]$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada K; b_n den bağımsız bir sabit olmak üzere $\delta_n = \sqrt{\frac{b_n}{n}}$ olarak alınırsa ve $\frac{b_n}{n} \to 0$ olduğundan

$$\sup_{x_1,x_2,x_3 \in [0,\infty[} \frac{|B_n(f;x_1,x_2,x_3) - f(x_1,x_2,x_3)|}{(1+\|x\|^2)^3} \leq K\,\Omega\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

eşitsizliği gösterilmiş olur. Bu da kanıtı tamamlar.

Örnek 4.2.3 $f(x,y,z) = x^3y^2z$ fonksiyonunun $x,y,z \in [0,5]$ ve $b_n = \sqrt{n}$ dizisi alınarak süreklilik modülü yardımıyla elde edilen yaklaşımın hata değerlerini veren MAPLE programı aşağıda verilmiştir.

```
> restart;
> f:=(x,y,z)->x^3*y^2*z;
```

$$f := (x,y,z) \to x^3\, y^2\, z$$

```
> n:=1:
> for i from 1 to 9 do
> n:=10*n;
> beta(n):=sqrt(n):
```

```
> delta(n):=evalf(simplify(sqrt(beta(n)/n)));
>
omega(f,delta(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h,y+
h,z+h)-f(x,y,z))),x=0..1-delta(n),y=0..1-delta(n),z=0..1-
delta(n),h=0..delta(n)))):
> errorL:= 45*omega(f,delta(n));
> end do;
```

$$n := 10$$

$$\beta(10) := \sqrt{10}$$

$$\delta(10) := 0.3162277660$$

$$\omega(f, 0.3162277660) := 0.8977957944$$

$$errorL := 40.40081075$$

$$n := 100$$

$$\beta(100) := 10$$

$$\delta(100) := 0.1000000000$$

$$\omega(f, 0.1000000000) := 0.4685590000$$

$$errorL := 21.08515500$$

$$n := 1000$$

$$\beta(1000) := 10\sqrt{10}$$

$$\delta(1000) := 0.03162277660$$

$$\omega(f, 0.03162277660) := 0.1753543039$$

$$errorL := 7.890943676$$

$$n := 10000$$

$$\beta(10000) := 100$$

$$\delta(10000) := 0.01000000000$$

$$\omega(f, 0.01000000000) := 0.05851985060$$

$$errorL := 2.633393277$$

$$n := 100000$$

$$\beta(100000) := 100\sqrt{10}$$

$$\delta(100000) := 0.003162277660$$

$$\omega(f, 0.003162277660) := 0.01882429692$$

$$errorL := 0.8470933614$$

$$n := 1000000$$

$$\beta(1000000) := 1000$$

$$\delta(1000000) := 0.001000000000$$

$$\omega(f, 0.001000000000) := 0.005985019985$$

$$errorL := 0.2693258993$$

$$n := 10000000$$

$$\beta(10000000) := 1000\sqrt{10}$$

$$\delta(10000000) := 0.0003162277660$$

$$\omega(f, 0.0003162277660) := 0.001895867229$$

$$errorL := 0.08531402530$$

$$n := 100000000$$

$$\beta(100000000) := 10000$$

$$\delta(100000000) := 0.0001000000000$$

$$\omega(f, 0.0001000000000) := 0.0005998500200$$

$$errorL := 0.02699325090$$

$$n := 1000000000$$

$$\beta(1000000000) := 10000\sqrt{10}$$

$$\delta(1000000000) := 0.00003162277660$$

$$\omega(f, 0.00003162277660) := 0.0001897216602$$

$$errorL := 0.008537474709$$

Örnek 4.2.4 (4.1.1) de tanımlanan Bernstein-Chlodowsky tipli polinom dizisinde $b_n = \ln n$ alınarak $f(x,y,z) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ fonksiyonuna $n = 10$, $n = 25$, $n = 50$ ve $n = 100$ için yaklaşımın yapıldığı grafik ve program parçası aşağıdaki şeklindedir. Dört boyutta grafik çizmek mümkün olmadığından yaklaşımın yapıldığı grafik özel olarak $z = \frac{1}{2}$ alınarak çizdirilmiştir.

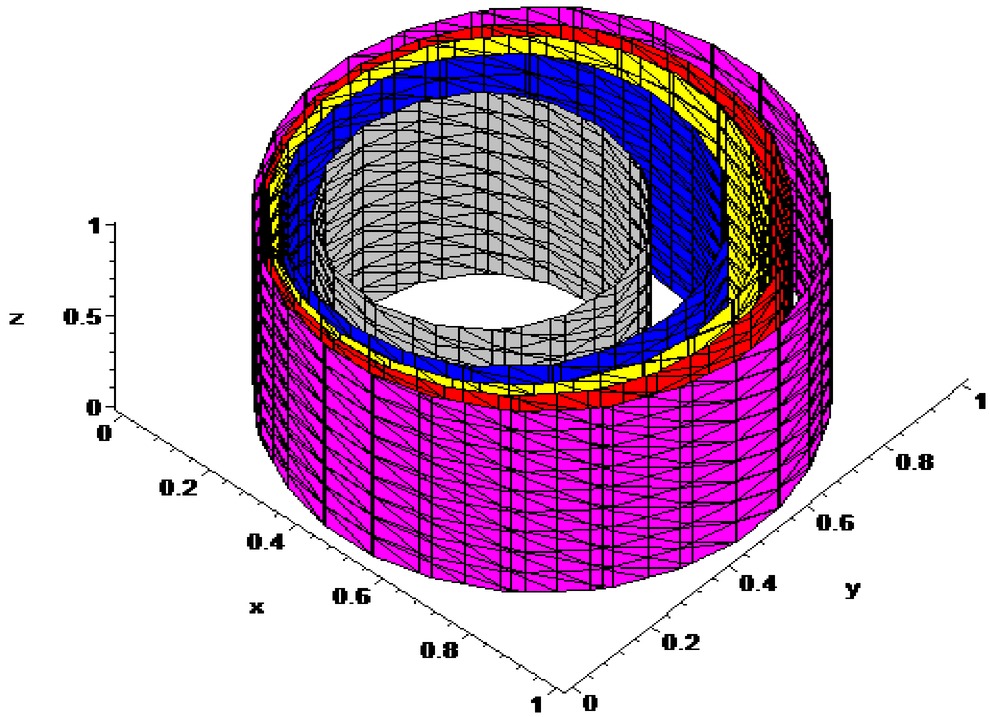
```
> restart;
with(plots):
with(plottools):
f:=(x,y,z)->(x-1/2)^2+(y-1/2)^2-1/4;
c:=n->ln(n);
B:=(n,x,y,z)-> simplify(sum(binomial(n,k)*sum(binomial(n-
k,j)*sum(f((k/n)*c(n),(j/n)*c(n),(s/n)*c(n))*binomial(n-k-
j,s)*(x/c(n))^k*(y/c(n))^j*(z/c(n))^s*(1-(x/c(n))-(y/c(n))-
(z/c(n)))^(n-k-j-s),s=0..(n-k-j)),j=0..(n-k)),k=0..n));
implicitplot3d([f(x,y,z)=0,B(10,x,y,z)=0,B(25,x,y,x)=0,B(50,x,
y,z)=0,B(100,x,y,z)=0
```

```
],x=0..1,y=0..1,z=0..1,color=[magenta,gray,blue,yellow,red],tr
ansparency=0.6);
```

$$f := (x, y, z) \to \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$c := n \to \ln(n)$$

$$B := (n, x, y, z) \to \mathrm{simplify}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{binomial}(n, k) \left(\sum_{j=0}^{n-k} \mathrm{binomial}(n-k, j) \left(\sum_{s=0}^{n-k-j} \mathrm{f}\left(\frac{k\,\mathrm{c}(n)}{n}, \frac{j\,\mathrm{c}(n)}{n}, \frac{s\,\mathrm{c}(n)}{n}\right) \mathrm{binomial}(n-k-j, s) \left(\frac{x}{\mathrm{c}(n)}\right)^k \left(\frac{y}{\mathrm{c}(n)}\right)^j \left(\frac{z}{\mathrm{c}(n)}\right)^s \left(1 - \frac{x}{\mathrm{c}(n)} - \frac{y}{\mathrm{c}(n)} - \frac{z}{\mathrm{c}(n)}\right)^{(n-k-j-s)}\right)\right)\right)$$



Şekil 4.2.1 $f(x,y,z) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ fonksiyonuna $n = 10$, $n = 25$, $n = 50$ ve $n = 100$ için yaklaşım

Örnek 4.2.5 $f(x,y,z) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ fonksiyonunun, $x, y, z \in [0,1]$ ve $b_n = \ln n$ alınarak süreklilik modülü yardımıyla elde edilen yaklaşımın hata değerlerini aşağıdaki tabloda verilmiştir.

n	f fonksiyonunun süreklilik modülü yardımıyla elde edilen yaklaşımın hata değerleri
10	6,739040215
10^2	4,550712319
10^3	2,057539091
10^4	0,7945427310
10^5	0,2865969234
10^6	0,09998388036
10^7	0,03423488795
10^8	0,01158324296
10^9	0,003886246460

KAYNAKLAR

Altomare F and Campiti M (1994) *Korovkin-Type Approximation Theory and its Applications*. Walter de Gruyter Studies in Mathematics 17, Berlin.

Büyükyazıcı İ (2009) On the Approximation Properties of Two Dimensional q-Bernstein-Chlodowsky Polynomials. *Mathematical Commun.,* 14:255-269.

Büyükyazıcı İ and Sharma H (2012) Approximation Properties of Two Dimensional $q-$Bernstein-Chlodowsky-Durrmeyer Operators. *Numerical Functional Analysis and Optimization,* 33(12):1351-1371.

Coşkun E (2001) *Analiz I,* Alp Yayınları, 1-200.

Coşkun T (1997) Some Properties of Linear Positive Operators in the Weighted Spaces of Unbounded Functions. *Common. Fac. Sci. Univ. Ank. Series*, 47:175-191.

Coşkun T (2000) Weighted Approximation of Continuous Functions by Sequences of Linear Positive Operators. *Proc. Indian Acad. Sci*., 110(4):357-362.

Gadjiev A D, Efendiev R O and İbikli E (1998) Generalized Bernstein-Chlodowsky Polynomials. *Rocky Mountain Journal of Mathematics,* 28(4):1267-1277.

Gadjieva E A and Gasanova T Kh (2000) Approximation by Two Dimensional Bernstein-Chlodowsky Polynomials in Triangle with Mobile Boundary. *Transactions of AS Azerbaijan*, 20:47-51.

Gadjieva E A and İbikli E (1999) Weighted Approximation by Bernstein-Chlodowsky Polynomials. *Indian Journal of Appl. Mathematics.* 30(1):83-87.

Hacısalihoğlu H ve Hacıyev A (1995) *Doğrusal Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı,* A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, 1-71.

Holhoş A (2008) The Rate of Convergence of Positive Linear Operators in Weighted Spaces. *Automat. Comput. Appl. Math.*, 17(2):239-246.

İbikli E (2003) On Approximation by Bernstein-Chlodowsky Polynomials. *Math. Balkanika*, 17:259-265.

İbikli E and Büyükyazıcı İ (2004) The Approximation Properties of Generalized Bernstein Polynomials of Two Variables. *Appl. Math. Comp.,* Num. 156(2):367-380.

İbikli E. (2005) On Approximation for Functions of Two Variables on a Triangular Domain by Bernstein-Chlodowsky Polynomials. *Rocky Mountain Journal of Mathematics,* 35(5):1523-1531.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Korovkin P P (1953) On Convergence of Linear Positive Operators in the Space of Continuous Functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 90:961-964.

Korovkin P P (1960) *Linear Operators and Approximation Theory*. Hindustan Publising Corp. Delhi, India.

Lorentz G G (1953) *Bernstein Polynomials*. University of Toronto Press. Toronto.

Natanson I P (1964) *Constructive Function Theory Volume I Uniform Approximation*. Frederick Ungar Publising Company, New York, USA.

Paltanea R (2004) *Approximation Theory Using Positive Linear Operators*. Springer Science Birkhauser, USA.

Rudin W (1973) *Functional Analysis*. McGraw Hill Book Company, USA.

Stancu D D (1959) On the Approxiamtion of Bivariable Functions by Means of Bernstein Type Polynomials, *Commun. Acad. RPR*, 8:773-777.

Szasz O (1950) Generalization of Bernstein’s Polynomials to the Infinite Interval. *J. Research of the Nat. Bureau of Stand*, 45:239-245.

ÖZGEÇMİŞ

Afşin Kürşat GAZANFER 1981'de İstanbul'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamladı; 1999 yılında ZKÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde üniversite öğrenimine başladı. 2003 yılında "iyi" derece ile mezun olduktan sonra ZKÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans programına kabul edildi. Daha sonra ZKÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başlamış olup, halen BEÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora programında öğrenimini sürdürmektedir.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
67100 / ZONGULDAK
Tel : 0 (372) 2911279
E-posta : afsinkursat@beun.edu.tr