ULTRAHİPERBOLİK TÜRDEN KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER İÇİN CARLEMAN DEĞERLENDİRMELERİ

Pelin ŞEN

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

ZONGULDAK
Haziran 2015

KABUL:

Pelin ŞEN tarafından hazırlanan "ULTRAHİPERBOLİK TÜRDEN KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER İÇİN CARLEMAN DEĞERLENDİRMELERİ" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 15/06/2015

Başkan: Prof. Dr. Hüseyin DEMİR
Ondokuz Mayıs Üniversitesi ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN
Bülent Ecevit Üniversitesi ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. İnci ÇİLİNGİR SÜNGÜ
Ondokuz Mayıs Üniversitesi ....

ONAY:

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. ../../2015

Prof. Dr. Kemal BÜYÜKGÜZEL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

P. Şen

Pelin ŞEN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ULTRAHİPERBOLİK TÜRDEN KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER İÇİN CARLEMAN DEĞERLENDİRMELERİ

Pelin ŞEN

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN
Haziran 2015, 75 sayfa

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezde gerekli olan bazı temel tanım, teoremlere ve ayrıca kısmi türevli diferensiyel denklemlerin sınıflandırılmasına yer verilmiştir. İkinci bölümde; Asgeirsson Teoremi, bir boyutlu ve çok boyutlu zamanda dalga denklemlerinin çözülebilirliği ele alınmıştır. Üçüncü bölümde; ultrahiperbolik tipten kısmi türevli diferensiyel denklemler ve bu bağlamda Sicim Kuramı ve M-Kuramı üzerinde durulmuştur. Dördüncü bölüm, bir Riemann manifoldu üzerinde dalga denklemi için Carleman değerlendirmelerine ayrılmıştır. Beşinci bölümde ultrahiperbolik denklemler için Carleman değerlendirmeleri araştırılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Ultrahiperbolik Denklem, Sicim Kuramı, Carleman Değerlendirmeleri

Bilim Kodu: 403.06.01

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

CARLEMAN ESTIMATES FOR ULTRAHYPERBOLIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Pelin ŞEN

Bülent Ecevit University
Gradute School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assist. Prof. Fikret GÖLGELEYEN
June 2015, 75 pages

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, some necessary definitions, theorems and also a classification of partial differential equations are presented. In the second chapter, Asgeirsson Theorem and the solvability of one- time dimensional and multi- time dimensional wave equations are studied. In the third chapter, ultrahyperbolic equations and in this connection String Theory and M-Theory are considered. The fourth chapter is devoted to the Carleman estimates for the wave equation on a Riemannian manifold. In the fifth chapter, Carleman estimates for ultrahyperbolic equations are investigated.

Key Words: Ultrahyperbolic Equation, String Theory, Carleman Estimates

Science Code: 403.06.01

TEŞEKKÜR

Tezin tüm aşamalarında değerli vaktini bana ayıran, görüş ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın tüm aşamalarında olduğu gibi bu çalışma esnasında da manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim, canım anneme, babama ve kardeşime en içten duygularımla sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Ω	:	Verilen bir bölge
$\bar{\Omega}$	:	Ω bölgesinin kapanışı
$\partial\Omega$	:	Ω bölgesinin sınırı
$C^k(\Omega)$	:	Ω kümesinde tanımlı k. mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar uzayı
$C_0^k(\Omega)$	:	Ω kümesinde tanımlı k defa diferensiyellenebilir ve supportu Ω nın kompakt alt kümesi olan fonksiyonlar uzayı
D^α	:	Türev için multiindeks gösterimi
$\nabla u(x)$	:	$u(x)$ fonksiyonunun gradienti; $\nabla u(x)=(u_{x_1},u_{x_2},...,u_{x_n})$
Δ	:	Laplace operatörü
$L_2(\Omega)$	:	Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
Λ^T	:	Λ matrisinin transpozu
$<\cdot,\cdot>$	:	$\mathbb{R}^n$ de skaler çarpım

BÖLÜM 1

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1 *(Hadamard anlamında iyi konulmuş problem) İyi konulmuş problem tanımı 20. yüzyılın başlarında Fransız matematikçi J. S. Hadamard tarafından verilmiştir.* U *ve* F *metrik uzaylar,* $A : U \longrightarrow F$ *bir operatör olmak üzere*

$$Au = f \tag{1.1}$$

denklemini ele alalım. (1.1) denkleminin aşağıdaki özellikleri sağlayan çözümünün bulunması problemine (U, F) *uzay çifti için Hadamard anlamında iyi konulmuş problem denir;*

i. Her $f \in F$ *için* U *uzayında problemin çözümü vardır.*

ii. Problemin çözümü U *uzayında tektir.*

iii. Problemin koşulları F *uzayında az değiştiğinde problemin çözümü de* U *uzayında az değişir (kararlılık koşulu) (Lavrent'ev et al. 1986, s. 26). Bu şartlardan herhangi birinin sağlanmaması durumunda problem,* (U, F) *uzay çifti için Hadamard anlamında kötü konulmuş problem olarak adlandırılır. Bir* (U_1, F_1) *uzay çifti için iyi, başka bir* (U_2, F_2) *uzay çifti için kötü konulmuş probleme* (U_2, F_2) *uzay çifti için zayıf kötü konulmuş problem denir. Tüm uzay çiftlerinde kötü konulmuş probleme kuvvetli kötü konulmuş problem denir.*

Tanım 1.2 *(Tikhonov anlamında iyi konulmuş problem) İlk defa, bir Rus matematikçi olan A. N. Tikhonov, Hadamard anlamında kötü konulmuş problemlerin gerekliliğini ortaya koymuştur. (1.1) denkleminin aşağıdaki özellikleri sağlayan çözümünün bulunması problemine şartı iyi (doğru) konulmuş problem veya Tikhonov anlamında iyi konulmuş problem denir:*

i. U *bir metrik uzay olmak üzere, problemin çözümü var ve belirli bir* $M \subset U$ *cümlesine aittir.*

ii. Problemin çözümü M *de tektir.*

iii. Problemin çözümü M de koşullara sürekli bağımlıdır, yani çözümü M cümlesinin dışına çıkarmayan koşullar F metrik uzayında sonsuz küçük bir değişikliğe uğradıklarında problemin çözümü de U metrik uzayında sonsuz küçük değişir (Lavrent'ev et al. 1986, s. 27).

M cümlesine problemin doğruluk cümlesi denir ve M genellikle kompakt bir cümle olarak seçilir.

Tanım 1.3 *(Ağırlıklı L^2 uzayı) ω, $-\infty \le a < b \le +\infty$ olmak üzere (a, b) üzerinde pozitif integrallenebilir bir fonksiyon olsun, öyle ki*

$$\int_a^b \omega(t)dt = \infty$$

dır. (a, b) üzerinde tanımlanan f reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar sınıfını oluşturan $L^2_\omega = L^2_\omega(a, b)$ ağırlıklı uzayını ele alalım öyle ki

$$\|f\|_{L^2w} = \left(\int_a^b f(x)^2 \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

şeklinde yazılır (Kruglyak et al. 2006).

Tanım 1.4 *(Riemann manifoldu) M manifoldunun her bir p noktasına T_p uzayı üstünde g_p iç çarpımı karşılık getiren bir g dönüşümüne M üstünde bir metrik tensörü adı verilir. M manifoldu üstünde bir metrik tensör varsa bu metrik tensörüyle birlikte bu manifolda bir Riemann manifoldu denir (Sabuncuoğlu 2006, s. 405).*

Tanım 1.5 *(Kovaryant tensör alanı) $\mathbb{R}^n$ uzayının her bir p noktasına $T_p(\mathbb{R}^n)$ vektör uzayı üstünde reel değerli k lineer bir fonksiyon karşılık getiren bir K dönüşümüne, $\mathbb{R}^n$ uzayı üstünde k ıncı basamaktan bir kovaryant tensör alanı denir (Sabuncuoğlu 2006, s. 411).*

Tanım 1.6 *(Teğet uzay) $q \in \mathbb{R}^n$ olsun. $v \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere q noktasından $q+v$ noktasına giden yönlü doğru parçasına, q noktasında, v teğet vektörü denir ve v_q biçiminde gösterilir. q noktasındaki bütün teğet vektörlerin kümesi $T_q(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $T_q(\mathbb{R}^n)$ kümesinde toplama işlemi, $v_q + w_q = (v + w)_q$ eşitliğiyle tanımlanır. Skalerle çarpma işlemi, $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda v_q = (\lambda v)_q$ eşitliği ile tanımlanır. $T_q(\mathbb{R}^n)$ kümesi yukarıda tanımlanan işlemlere göre $\mathbb{R}$ cismi üstünde bir vektör uzayıdır. Böylece elde edilen $T_q(\mathbb{R}^n)$ vektör uzayına, $\mathbb{R}^n$ uzayının q noktasındaki teğet uzayı denir (Sabuncuoğlu 2006, s. 5).*

1.1 İKİ BAĞIMSIZ DEĞİŞKEN İÇEREN DENKLEMLERİN KANONİK FORMLARI VE SINIFLANDIRILMASI

Bu bölümde

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \tag{1.2}$$

lineer denklemi ve iki değişkenli

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{1.3}$$

hemen hemen lineer denklemi ele alınacaktır. Burada $a, ..., g$; $C^2(\Omega)$ sınıfının elemanları, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ve Ω da $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ dır. (1.2) ve (1.3) denklemlerinde

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}$$

ifadesine bu denklemlerin baş (esas) kısmı denir. Çözümlerin özelliklerini temel olarak baş kısım belirlediğinden (1.2) yerine daha genel olan (1.3) denkleminin sınıflandırmasını yapacağız.

$$\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$$

şeklinde tanımlanan Δ fonksiyonuna (1.3) denkleminin diskriminantı denir. Diskriminantın işareti terslenebilir değişken dönüşümleri altında değişmezdir.

Teorem 1.1

$$\phi : \begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}$$

düzgün bir değişken dönüşümü olsun, öyle ki Jakobiyen

$$J\phi(P) = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0.$$

Bu dönüşüm altında (1.3) denklemi

$$Au_{\xi\xi} + 2Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + \psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0 \tag{1.4}$$

formuna dönüşür. Burada

$$\begin{aligned} A &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 \\ B &= a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + c\xi_y\eta_y \\ C &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 \end{aligned}$$

dır. Bu durumda $Q = \phi(P)$ deki diskriminantın işareti P deki ile aynıdır.

Tanım 1.7 *$P(x,y) \in \Omega$ noktasında (1.3) denklemi*
i. Hiperboliktir, eğer $\Delta(x,y) > 0$,
ii. Paraboliktir, eğer $\Delta(x,y) = 0$,
iii. Eliptiktir, eğer $\Delta(x,y) < 0$.

Eğer denklem G nin her noktasında hiperbolikse (parabolik, eliptik) $G \subset \Omega$ nın bir alt kümesinde de hiperboliktir (parabolik, eliptik).
(1.3) denkleminin esas kısmını yeni ξ ve η koordinatları tanımlayarak daha basit bir hale getirebiliriz. Bu şekilde bir yazılışa denklemin kanonik formu adı verilir.

Teorem 1.2 *Kabul edelim ki (1.3) denklemi bir $P_0(x_0, y_0)$ noktasının bir komşuluğunda hiperbolik, parabolik ya da eliptik olsun. Bu durumda $P_0(x_0, y_0)$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı*

$$\phi : \begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$$

terslenebilir bir değişken dönüşümü vardır öyle ki (1.3) denklemi aşağıdaki üç formdan birine indirgenebilir:

i. Eğer $P_0(x_0, y_0)$ hiperbolik bir nokta ise

$$u_{\xi\eta} + \psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0, \tag{1.5}$$

(hiperbolik denklemler için birinci kanonik form)
ii. Eğer $P_0(x_0, y_0)$ parabolik bir nokta ise

$$u_{\eta\eta} + \psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0, \tag{1.6}$$

iii. Eğer $P_0(x_0, y_0)$ eliptik bir nokta ise

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0 \tag{1.7}$$

şeklindedir.
Hiperbolik denklemler için

$$\alpha = \xi + \eta, \qquad \beta = \xi - \eta$$

dönüşümü tanımlanırsa (1.5) denklemi

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \theta(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) = 0$$

şekline indirgenir. Bu da hiperbolik denklemlerin ikinci kanonik formu olarak adlandırılır.

İspat. i. $P_0(x_0, y_0)$ hiperbolik bir nokta olsun.

$$\begin{aligned} A &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0, \\ C &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 = 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanacak şekilde ξ ve η seçelim. O halde ξ ve η

$$a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0 \tag{1.8}$$

birinci mertebeden lineer olmayan denklemin çözümleridir. Dolayısıyla

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = pF_p + qF_q = 2(ap^2 + 2bpq + cq^2) = 0$$

olur. (1.8) denkleminin karakteristikleri boyunca

$$\varphi(x, y) = sabit \tag{1.9}$$

bulunur. Eğer $\varphi_y(x_0, y_0) \neq 0$ olduğunu kabul edersek, x_0 noktasının bir komşuluğunda bir $y = y(x)$ kapalı fonksiyonu tanımlanabilir ve

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)}$$

dır. (1.8) denkleminden $y(x)$ fonksiyonu

$$ay'^2 - 2by' + c = 0 \tag{1.10}$$

adi diferensiyel denklemini sağlar. Eğer $\varphi_x(x_0, y_0) \neq 0$ olduğunu kabul edersek, y_0 noktasının bir komşuluğunda bir $x = x(y)$ kapalı fonksiyonu belirlenebilir ve

$$x' = \frac{dx}{dy} = -\frac{\varphi_y(x, y)}{\varphi_x(x, y)}$$

olur. Bu durumda $x(y)$ fonksiyonu

$$cx'^2 - 2bx' + a = 0 \tag{1.11}$$

adi diferensiyel denklemini sağlar. Hem (1.10) hem de (1.11) denklemi

$$a(dy)^2 - 2bdxdy + c(dx)^2 = 0 \tag{1.12}$$

diferensiyel formunda ifade edilebilir. Genelliği bozmadan $a(x_0, y_0) \neq 0$ ya da $c(x_0, y_0) \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Çünkü $a(x_0, y_0) = c(x_0, y_0) = 0$ ise, $b(x_0, y_0) \neq 0$ olur ve (1.3)

$b(x_0, y_0)$ ile bölünerek (1.5) formu elde edilir. (x_0, y_0) noktasının bir $\mathcal{N}$ komşuluğunda $a(x_0, y_0) \neq 0$ ve $a(x, y) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. (1.10) denklemi

$$y_1' = \frac{b + \sqrt{\Delta}}{a}, \; y_2' = \frac{b - \sqrt{\Delta}}{a}, \;\; \Delta = b^2 - ac$$

iki adi diferensiyel denkleme dönüşür. Sırasıyla $\xi(x, y) = C_1$ ve $\eta(x, y) = C_2$ bu denklemlerin $N_1 \subset N$ bölgesinde tanımlanan genel çözümleri olsun. Bu durumda

$$\xi_y \neq 0 \text{ ve } \eta_y \neq 0, \;\; (x, y) \in N_1.$$

$$\phi : \begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}$$

değişken değiştirmesi (1.3) denklemini (1.5) formuna indirger. Bu dönüşüm terslenebilirdir çünkü,

$$\begin{aligned} y_1' &= -\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{b + \sqrt{\Delta}}{a}, \\ y_2' &= -\frac{\eta_x}{\eta_y} = \frac{b - \sqrt{\Delta}}{a}, \end{aligned}$$

ifadelerinden

$$\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = -\frac{2\sqrt{\Delta}}{a} \xi_y \eta_y \neq 0$$

olduğu görülür. Benzer şekilde $c(x_0, y_0) \neq 0$ durumunda da bu işlemler yapılır.

ii. $P_0(x_0, y_0)$ parabolik bir nokta olsun. Burada ξ ve η sayılarını $A = B = 0$ olacak şekilde seçelim. $b^2 - ac = 0$ olduğundan a ve c katsayılarından herhangi biri sıfırdan farklıdır. Aksi takdirde b de sıfır olabilir ki bu durum da $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ ifadesine ters düşer. Eğer $a \neq 0$ ise (1.12) denklemi

$$y' = \frac{b}{a}$$

formuna indirgenir. Farz edelim ki genel çözüm

$$\xi(x, y) = K$$

olsun. Bir $\eta = \eta(x, y)$ basit fonksiyonunu alalım, öyle ki

$$J\phi(P) = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0.$$

O halde $A = B = 0$ ve $C \neq 0$ dır.

$$\phi : \begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$$

değişken dönüşümü (1.3) denklemini (1.6) kanonik formuna indirger. $a = 0$ durumunda $c \neq 0$ olur ve benzer bir yol takip edilir.

iii. $P_0(x_0, y_0)$ eliptik bir nokta olsun. Burada ξ ve η sayılarını $A = C$ ve $B \neq 0$ olacak şekilde seçelim. $b^2 - ac < 0$ olduğundan $a \neq 0$ için (1.12) denklemi

$$y_1' = \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{a}, \; y_2' = \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{a}$$

kompleks formunu adi diferensiyel denkleme indirger.

$\phi(x,y) = \xi(x,y) + i\eta(x,y) = K$ ilk denklemin genel çözümü olsun. (1.8) denkleminden $A = C$ ve $B \neq 0$ sonucuna ulaşılır. O halde değişken dönüşümleri

$$\phi : \begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$$

(1.7) formundan (1.3) denklemine indirgenir. ∎

(1.12) denklemine (1.3) denkleminin karakteristik denklemi ve çözümlerine de karakteristikler denir. Hiperbolik bölgede (1.3) denkleminin enine kesişen iki reel karakteristik ailesi vardır. Parabolik bölgede (1.3) denkleminin bir tane reel karakteristik ailesi mevcuttur. Diğer taraftan eliptik bölgede ise reel karakteristikler yoktur.

1.2 $\mathbb{R}^n$ UZAYINDA HEMEN HEMEN LİNEER DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

D, $\mathbb{R}^n$ $n-$boyutlu Öklid uzayında bir bölge olsun. $\mathbb{R}^n$ de bir noktayı $x = (x_1, ..., x_n)$ ile ve skaler çarpımı da $< \cdot, \cdot >$ sembolü ile gösterelim. $\mathbb{R}^n$ de ikinci mertebeden hemen hemen lineer bir denklem

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} \alpha_{ij}(x) u_{x_i x_j} + F(x, u, \nabla u) = 0 \tag{1.13}$$

şeklindedir. Burada $\alpha_{ij}(x)$ katsayıları x e göre sürekli, diferensiyellenebilir fonksiyonlar; $\alpha_{ij}(x) = \alpha_{ji}(x)$; $u(x)$ bilinmeyen bir fonksiyon ve $\nabla u = (u_{x_1}, ..., u_{x_n})$, u nun gradyantıdır.

Denklem (1.13) ün hemen hemen lineerliğinden anlatılmak istenen bu denklemin $u_{x_ix_j}$ ikinci meretebeden türevlerine göre lineer olmasıdır. Ayrca

$$L := \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

lineer operatörüne (1.13) denkleminin baş (esas) kısmı denir.
Denklem (1.13) ün sınıflandırılmasında temel koşul bağımsız değişkenlerin tekil olmayan bir dönüşümü altında tipinin sabit kalmasıdır. Daha önce yaptığımız gibi sınıflandırmayı lokal yani bir $x^0 \in D$ sabit noktası için yapacağız. Kabul edelim ki

$$y = \phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix}$$

ve

$$x = \psi(y) = \begin{bmatrix} \psi_1(y) \\ \vdots \\ \psi_n(y) \end{bmatrix}$$

dönüşümleri x^0 ve $y^0 = \phi(x^0)$ noktalarının sırasıyla N ve N' komşuluklarında tanımlı tekil olmayan dönüşümler olsun, öyle ki

$$y = \phi(\psi(y)),\ y \in N' \text{ ve } x = \psi(\phi(x)),\ x \in N$$

dir. $u(x) \in C^2(D)$, D de (1.13) denkleminin bir çözümü ve

$$v(y) = u(\psi(y)),\ y \in N'$$

olsun. Bu durumda

$$u(x) = v(\phi(x)),\ x \in N$$

ve

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} v_{y_k}(\phi(x)) \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i},$$

$$u_{x_ix_j} = \sum_{k,l=1}^{n} v_{y_ky_l}(\phi(x)) \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} v_{y_k}(\phi(x)) \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

dır. Yukarıdaki ifadeler (1.13) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x) \sum_{k,l=1}^{n} v_{y_k y_l}(\phi(x)) \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j} + \Phi(y, v, \nabla v) = 0,$$

ya da

$$\sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}(y) v_{y_k y_l}(y) + \Phi(y, v, \nabla v) = 0 \tag{1.14}$$

sonucuna ulaşılır. Burada

$$b_{ki}(y) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x) \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \tag{1.15}$$

dır.

x^0 noktasında (1.13) denkleminin sınıflandırılması

$$Q(x^0, \xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x^0) \xi_i \xi_j, \;\; \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.16}$$

karakteristik formunun sınıflandırılmasına dayanır.

A aşağıdaki gibi simetrik bir matris

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(x^0) & ... & \alpha_{1n}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1}(x^0) & ... & \alpha_{nn}(x^0) \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda

$$Q = (x^0, \xi) =< A\xi, \xi >$$

yazılabilir ve Λ, nxn lik bir matris olmak üzere eğer

$$\xi = \Lambda \eta \in \mathbb{R}^n$$

ise

$$Q(x^o, \xi) =< A\Lambda\eta, \Lambda\eta >=< \Lambda^T A \Lambda \eta, \eta > \tag{1.17}$$

dır. Burada Λ^T, Λ matrisinin transpozunu ifade eder. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \lambda_{ki} &= \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(x^0), \;\; k, i = 1, ..., n, \qquad (1.18) \\ \Lambda &= \begin{bmatrix} \lambda_{11} & ... & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & ... & \lambda_{nn} \end{bmatrix}, \\ y &= \Lambda^T x \end{aligned}$$

olsun.

Dikkat edilirse

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ki} x_i, \ \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \lambda_{ki}$$

dir. Eğer (1.18) lineer değişken dönüşümü yapılırsa

$$b_{ki} = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}(x^0)\lambda_{ki}\lambda_{kj}$$

katsayıları elde edilir ve bu da (1.15) ile çakışır. Elemanları b_{ki} olan B matrisini tanımlayalım, yani:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & ... & b_{nn} \end{bmatrix}$$

dır. Bu matris simetriktir ve

$$B = \Lambda^T A \Lambda$$

olur. (1.17) den (1.13) denkleminin karakteristik formu ve x^0 ve $y^* = \Lambda^T x^0$ da dönüştürülmüş denklem birbirine eşittir:

$$Q(x^0, \xi) = Q(y^*, \eta), \ \xi = \Lambda \eta.$$

Kuadratik formlar için temel teoreme göre tekil olmayan bir Λ matrisi vardır öyle ki $Q(x^0, \xi)$,

$$Q(y^*, \eta) = \eta_1^2 + ... + \eta_p^2 - \eta_{p+1}^2 - ... - \eta_{p+q}^2 \tag{1.19}$$

kanonik formuna indirgenir. Burada $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q \leq n$ dir. (1.19) daki pozitif terimlerin sayısına pozitif indeks, negatif terimlerin sayısına negatif indeks denir ve sırasıyla p ve q ile gösterilir. Ayrıca $r = p + q$ sayısına (1.16) karakteristik formunun rankı, $v = n - r$ ye de sıfırlığı denir. Burada üzerinde durulması gereken nokta, bu sayılar ξ ve x değişkenlerinin tekil olmayan lineer dönüşümlerine göre sabittir. Öyleyse (1.13) ün sınıflandırması (1.16) karakteristik formun kanonik formundan bağımsız olarak yapılır.

$$\xi = \Lambda \eta$$

(1.16) kanonik formu (1.19) karakteristik formuna indirgeyen tekil olmayan lineer bir dönüşüm olsun. Sonra

$$y = \Lambda^T x$$

dönüşümü

$$\sum_{i=1}^{p} v_{y_i y_i} - \sum_{i=1}^{q} v_{y_{p+i} y_{p+i}} + \Phi(y, v, \nabla u) = 0$$

formunu x^0 noktasında (1.19) denklemine dönüştürür. Burada

$$v(y) = u((\Lambda^T)^{-1} y)$$

dir.

(1.13) denklemi x^0 noktasında:

i. Eğer $v = n - p - q = 0$ ve $p = 0$ ya da $q = 0$ ise eliptik, yani terimlerin hepsi pozitif ya da negatif ise;

ii. Eğer $v = 0$ ve $p = n - 1$ ve $q = 1$ ya da $p = 1$ ve $q = n - 1$ ise hiperbolik, yani biri negatif diğer tüm terimler pozitif ya da tersine biri pozitif diğer tüm terimler negatif ise;

iii. Eğer $v = 0$ ve $1 < p < n - 1$ ise ultrahiperbolik, yani birden fazla pozitif ve negatif terim varsa;

iv. Eğer $v > 0$ ise paraboliktir denir.

Denklem (1.13), D nin her noktasında eliptik (hiperbolik, ultrahiperbolik, parabolik) ise D de eliptiktir (hiperbolik, ultrahiperbolik, parabolik) denir.

Bu tür denklemlerin sınıflandırması ayrıca A matrisinin katsayılarının öz değerlerine göre de yani

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}(x^0) - \lambda & ... & \alpha_{1n}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1}(x^0) & ... & \alpha_{nn}(x^0) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

denkleminin köklerine göre yapılabilir. Lineer cebirden bilindiği gibi A matrisi simetrik olduğundan özdeğerlerinin hepsi reeldir. Üstelik A matrisinin pozitif, negatif ve sıfır olan özdeğerlerinin sayısı bağımsız değişkenlerin tekil olmayan dönüşümleri altında sabit kalır. (1.13) denkleminin baş kısmına karşılık gelen A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ olsun. Bu durumda, (1.13) denklemi x^0 noktasında

i. Eğer $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sıfırdan farklı ve aynı işaretli ise eliptiktir,

ii. Eğer $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sıfırdan farklı ve bir tanesi hariç hepsi aynı işaretli ise hiperboliktir,
iii. Eğer $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sıfırdan farklı ve bunlardan en az ikisi pozitif ya da negatif ise ultra-hiperboliktir,
iv. Eğer $\lambda_1, ..., \lambda_n$ den herhangi biri sıfır ise paraboliktir denir.
Örnek olarak, Laplace denklemi

$$\Delta u := u_{x_1x_1} + ... + u_{x_nx_n} = 0$$

$\mathbb{R}^n$ de eliptik, dalga denklemi

$$u_{tt} - c^2\Delta u = 0$$

$\mathbb{R}^{n+1}$ de hiperboliktir. Burada c sabit bir sayıdır. Isı yada difüzyon denklemi olarak adlandırılan

$$u_t - a^2\Delta u = 0$$

denklemi $\mathbb{R}^{n+1}$ de paraboliktir. Burada a bir sabittir. Diğer taraftan

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} - u_{x_4x_4} - u_{x_5x_5} = 0$$

denklemi $\mathbb{R}^5$ te ultrahiperboliktir.

Örnek 1.1 *Aşağıda verilen denklemi kanonik forma indirgeyerek denklemin tipini ve ilgili değişken dönüşümünü belirleyelim:*

$$2u_{x_1x_1} + 3u_{x_2x_2} - \frac{1}{2}u_{x_3x_3} + 6u_{x_1x_2} - 2u_{x_2x_3} = 0.$$

Denklemin karakteristik formu

$$\begin{aligned} & 2\xi_1^2 + 3\xi_2^2 - \frac{1}{2}\xi_3^2 + 6\xi_1\xi_2 - 2\xi_2\xi_3 \\ = \; & (\sqrt{2}\xi_1 + \sqrt{2}\xi_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_3)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2 - (\xi_1 - \xi_3)^2 \\ = \; & \eta_1^2 + \eta_2^2 - \eta_3^2 \end{aligned}$$

olup değişken dönüşümü

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu dönüşümün bir tersi vardır ve

$$\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{2} & 2 & 1\\ \sqrt{2} & -1 & -1\\ -\sqrt{2} & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{bmatrix}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

lineer dönüşümü orijinal denklemi kanonik forma indirger

$$v_{y_1y_1}+v_{y_2y_2}-v_{y_3y_3}=0.$$

O halde bu denklem bütün uzaylarda hiperboliktir. Dikkat edilirse

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 1 & 1\\ \sqrt{2} & 1 & 0\\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}$$

ve

$$v(y_1,y_2,y_3)=u(\sqrt{2}y_1+y_2+y_3,\sqrt{2}y_1+y_2,-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-y_3)$$

şeklindedir.

BÖLÜM 2

DALGA DENKLEMİ VE ASGEIRSSON TEOREMİ

2.1 BİR BOYUTLU ZAMANDA DALGA DENKLEMİ

Bu bölüm Robinson (2011) esas alınarak hazırlanmıştır. Modern matematiğin kullanışlı ve üzerinde iyi çalışılmış bir denklemi olan dalga denklemi, bir $u = u(x, y, z, t)$ fonksiyonu için

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada x, y, z bağımsız uzay değişkenleri ve t de bağımsız zaman değişkeni olarak alınmaktadır. Bu denklem genellikle ses, ışık ve su dalgasının yayılımını içeren problemlerde karşımıza çıkar.

$(n + 1)-$boyutlu Öklid uzayına genelleştirildiğinde dalga denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{tt} = \Delta_x u \tag{2.1}$$

formunda yazılır. Burada $n \geq 1$ olup

$$\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

şeklinde tanımlıdır. (2.1) denkleminin fiziksel önemini gösteren ilginç bir nokta şudur ki her $n \geq 1$ için ilgili başlangıç değer problemleri fiziksel açıdan önem arzeden başlangıç koşullarının önemli bir sınıfı için iyi konulmuştur. Bu tür problemler için klasik bir durum (2.1) denklemi ve aşağıdaki (2.2) başlangıç koşulu ile verilen başlangıç değer problemidir:

$$u(x, 0) = f(x), \ u_t(x, 0) = g(x). \tag{2.2}$$

Burada $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n = 2k$ ya da $n = 2k + 1$ şeklinde tanımlansın.

(2.1)-(2.2) başlangıç değer problemi genellikle dalga denklemi için bir Cauchy Problemi olarak adlandırılır ve bu problem $f \in C_0^{k+2}$ ve $g \in C_0^{k+2}$ olmak şartıyla iyi konulmuştur.

2.2 ÇOK BOYUTLU ZAMANDA DALGA DENKLEMİ

$t = (t_1, t_2, ..., t_m)$ ve $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ olmak üzere çok boyutlu zamanda dalga denklemi

$$\Delta_t u = \Delta_x u$$

şeklinde tanımlanır. Buna denk olarak, $y = (t_1, t_2, ..., t_{m-1})$ ve $t = t_m$ olarak tanımlandığında yukarıdaki denklem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\Delta_x - \Delta_y)u \tag{2.3}$$

olarak yazılabilir. Bu yazılım şeklinin yapacağımız işlemlerde sağlayacağı avantajlar vardır. (2.1)-(2.2) Cauchy Problemine benzer olarak (2.3) denklemi için ilgili başlangıç koşulları aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$u(x, y, 0) = f(x, y),\ u_t(x, y, 0) = g(x, y), \tag{2.4}$$

burada $f, g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı fonksiyonlardır. (2.3)-(2.4) Cauchy Problemi f ve g üzerine ilave bir şart konulmadığı sürece, her $k \geq 1$ için $f \in C_0^k$ ve $g \in C_0^k$ başlangıç verilerine göre kötü konulmuştur (Renardy and Rogers 1962). Bunu ispatlamak için aşağıdaki önemli teoreme ihtiyacımız vardır.

2.3 ASGEIRSSON TEOREMİ

Teorem 2.1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\Delta_x - \Delta_y)u,\ m = n,$$

diferensiyel denkleminin bir $u \in C^2$ çözümü için $x-$uzayında x_0 merkezli ve R yarıçaplı bir küre üzerinde $u(x, t_0)$ fonksiyonunun ortalaması ile $t-$uzayında t_0 merkezli R yarıçaplı bir küre üzerinde $u(x_0, t)$ fonksiyonunun ortalaması aynıdır (John Fritz 1955).

İspat. *Her $\alpha, \beta > 0$ için $\mathbb{R}^n$ de u nun elipsoidal ortalamasını*

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{2n\omega_{2n}} \int\limits_{F(\alpha,\beta,x,t)=1} u(x, t)d\omega$$

olarak tanımlayalım. Burada $F(\alpha, \beta, x, t) = \frac{|x|^2}{\alpha} + \frac{|t|^2}{\beta}$ ve ω_k, $\mathbb{R}^k$ de birim kürenin hacmidir. Dikkat edilirse $d\omega$, afin dönüşümleri altında değişmez olduğundan $x = \sqrt{\alpha}\eta$ ve $t = \sqrt{\beta}\xi$

değişken dönüşümleri uygulandığında

$$I(\alpha,\beta)=\frac{1}{2n\omega_{2n}}\int\limits_{|\eta|^2+|\zeta|^2=1}u(\sqrt{\alpha}\eta,\sqrt{\beta}\zeta)d\omega$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}I(\alpha,\beta) &= \frac{1}{2n\omega_{2n}\sqrt{\alpha}}\int\limits_{|\eta|^2+|\zeta|^2=1}\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}(\sqrt{\alpha}\eta,\sqrt{\beta}\zeta)\eta_i d\omega\\ &= \frac{1}{2n\omega_{2n}}\int\limits_{|\eta|^2+|\zeta|^2=1}\nabla_x u(\sqrt{\alpha}\eta,\sqrt{\beta}\zeta)\cdot\eta d\omega\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $(\nabla_x u(\sqrt{\alpha}\eta,\sqrt{\beta}\zeta),0_t)$ *vektörü dikkate alınırsa diverjans teoreminden*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}I(\alpha,\beta) &= \frac{1}{2n\omega_{2n}}\int\limits_{|\eta|^2+|\zeta|^2<1}\Delta_x u(\sqrt{\alpha}\eta,\sqrt{\beta}\zeta)d\eta d\zeta\\ &= \frac{1}{2n\omega_{2n}}(\alpha\beta)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{F(a,\beta,y)<1}\Delta_x u(x,t)dxdt \qquad (2.5)\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\frac{\partial}{\partial\beta}I(\alpha,\beta)=\frac{1}{2n\omega_{2n}}(\alpha\beta)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{F(a,\beta,y)<1}\Delta_x u(x,t)dxdt \qquad (2.6)$$

sonucuna varılır. Böylece (2.5) ve (2.6) denklemlerinden $(\Delta_x-\Delta_t)u=0$ *olduğunu da dikkate alarak* $(\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial\beta})I(\alpha,\beta)=0$ *bulunur. O halde bazı* $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *fonksiyonu için* $I(\alpha,\beta)=\phi(\alpha+\beta)$ *dır. Özel olarak her* $\alpha,\beta>0$ *için*

$$I(\alpha,\beta)=I(\beta,\alpha) \qquad (2.7)$$

dır. Buna ek olarak

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta\to 0^+} 2n\omega_{2n} I(\alpha,\beta) &= \int\limits_{|\eta|^2+|\zeta|^2=1} u(\sqrt{\alpha}\eta,0)d\omega \\
&= \left[\frac{d}{dr}\int\limits_{|\eta|^2+|\zeta|^2\le r^2} u(\sqrt{\alpha}\eta,0)d\eta d\zeta\right]_{r=1} \\
&= \left[\frac{d}{dr}\int\limits_{|\eta|^2\le r^2} u(\sqrt{\alpha}\eta,0)\int\limits_{|\zeta|^2\le r^2-|\eta|^2} d\zeta d\eta\right]_{r=1} \\
&= \left[\frac{d}{dr}\omega_n\int\limits_{|\eta|^2\le r^2} u(\sqrt{\alpha}\eta,0)(r^2-|\eta|^2)^{\frac{n}{2}}d\eta\right]_{r=1} \\
&= n\omega_n\int\limits_{|\eta|^2\le 1} u(\sqrt{\alpha}\eta,0)(1-|\eta|^2)^{\frac{n-2}{2}}d\eta \\
&= n\omega_n\alpha^{1-n}\int\limits_{|x|^2\le\alpha} u(x,0)(\alpha-|x|^2)^{\frac{n-2}{2}}dx. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

(2.8) denklemi integrant tüm $|x|\le\alpha$ için sınırlı olduğundan yukarıdaki limit vardır ve I bölgesi $\beta=0$ ı içerecek şekilde genişletilebilir. Benzer şekilde, $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} I(\alpha,\beta)$ limiti de vardır ve I bölgesi yine genişletilebilir. Diğer taraftan (2.7) denkleminden her $\alpha>0$ için

$$I(\alpha,0)=I(0,\alpha) \qquad (2.9)$$

bulunur.

Sonuç olarak, sırasıyla $x-$uzayı ve $t-$uzayındaki küresel ortalamalar

$$I_1(R)=\frac{1}{n\omega_n}\int\limits_{|x|=R} u(x,0)dS_x \text{ ve } I_2(R)=\frac{1}{n\omega_n}\int\limits_{|t|=R} u(0,t)dS_t \qquad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır. Bu yüzden $\alpha=R^2$ için (2.8) ve (2.9) denklemleri dikkate alındığında *sabitleştirilmiş herhangi* $R > 0$ *için*

$$\begin{aligned}
0 &= I(\alpha,0) - I(0,\alpha) \\
&= \frac{\omega_n R^{2-2n}}{2\omega_{2n}} \int\limits_{|x|^2 \le R^2} u(x,0)(R^2 - |x|^2)^{\frac{n-2}{2}} dx \\
&\quad - \frac{\omega_n R^{2-2n}}{2\omega_{2n}} \int\limits_{|t|^2 \le R^2} u(0,t)(R^2 - |t|^2)^{\frac{n-2}{2}} dt \\
&= \frac{\omega_n R^{2-2n}}{2\omega_{2n}} \int\limits_0^R r^{n-1}(R^2 - r^2)^{\frac{n-2}{2}} \int\limits_{|x|=r} u(x,0) dS_x dr \\
&\quad - \frac{\omega_n R^{2-2n}}{2\omega_{2n}} \int\limits_0^R r^{n-1}(R^2 - r^2)^{\frac{n-2}{2}} \int\limits_{|t|=r} u(0,t) dS_t dr \\
&= \frac{n\omega_n^2 R^{2-2n}}{2\omega_{2n}} \int\limits_0^R r^{n-1}(R^2 - r^2)^{\frac{n-2}{2}} (I_1(r) - I_2(r)) dr
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla, tüm $0 < r < R$ *için* $r^{n-1}(R^2 - r^2)^{\frac{n-2}{2}} > 0$ *olduğundan tüm* $r > 0$ *için* $I_1(r) = I_2(r)$ *olmalıdır. Çünkü* $R > 0$ *keyfi olarak alınmaktadır.*
Yukarıda teoremin sadece $x_0 = t_0 = 0$ *için sağlandığı gösterilmiştir. Fakat bu sonuç diferensiyel denklem lineer olduğundan* x_0 *ve* t_0 *noktalarının herhangi bir öteleme dönüşümü altında da sağlanır.* ■

Dikkat edelirse Asgeirsson Teoremi'nde $n = m$ varsayımı doğal bir kabul değildir ve elde edilen sonuç $n \neq m$ olmak üzere $\Delta_x u = \Delta_t u$ formundaki denklemler için de geçerlidir. Böyle bir durumda çözüm ihmal edilen değişkenlerden bağımsız olarak araştırılır ve ortalama değerlere karşılık gelen integral $maks\{n,m\}$ boyutlu uzayda x_0 ve t_0 noktası civarında alınır.

2.4 ÇÖZÜMLER VE İYİ KONULMUŞLUK

2.4.1 Tek Boyutlu Zaman Durumu

Hiperbolik denklemler sınıfının temsilci denklemi dalga denklemidir.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{2.11}$$

denklemine bir boyutlu homojen dalga denklemi,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t) \tag{2.12}$$

denklemine ise bir boyutlu homojen olmayan dalga denklemi denir. (2.11) ve (2.12) denklemlerinde x değişkeni yer ve t değişkeni zamanı göstermektedir. c, pozitif bir sabittir ve F, dalgaya etki eden bilinen bir dış kuvveti temsil etmektedir.
Homojen dalga denklemi, genel çözümü kolayca elde edilebilen denklemlerden biridir. Denklemin karakteristikleri

$$x \pm ct = sabit$$

doğrularıdır. Eğer

$$\xi = x + ct, \eta = x - ct$$

değişken değişimi yapılırsa, (2.11) denklemi

$$u_{\xi\eta} = 0$$

formuna dönüşür. Buradan, C^2 sınıfından ϕ ve ψ fonksiyonları için

$$u = \phi(\xi) + \psi(\eta)$$

veya tekrar x, y değişkenlerine dönüştürülürse,

$$u = \phi(x + ct) + \psi(x - ct) \tag{2.13}$$

elde edilir. Homojen dalga denklemi için önemli bir problem başlangıç değer problemidir:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \tag{2.14}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{2.15}$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{2.16}$$

Bu problem, fiziksel olarak, uzunluğu sonsuz farzedilen titreşen bir telin (sicimin) serbest salınımlarını ifade eder.
Şimdi, problemin bir çözümünün mevcut olduğunu varsayalım. Bu çözüm, ϕ ve ψ fonksiyonları C^2 sınıfından olmak üzere, (2.13) biçimindedir. Buradan (2.15) ve (2.16) başlangıç koşullarını sağlaması için

$$u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x) \tag{2.17}$$

$$u_t(x, 0) = c\,[\phi'(x) - \psi'(x)] = g(x) \tag{2.18}$$

olmalıdır. (2.18) den

$$\phi(x) - \psi(x) = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(\xi)d\xi + K \tag{2.19}$$

yazılabilir. Burada x_0 ve K keyfi sabitlerdir. (2.17) ve (2.19) denklemlerinden ϕ ve ψ çözülerek

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(\xi)d\xi + \frac{K}{2}, \\
\psi(x) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(\xi)d\xi - \frac{K}{2},
\end{aligned}$$

ve dolayısıyla (2.13) ten

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \phi(x+ct) + \psi(x-ct) \\
&= \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\left[\int_{x_0}^{x+ct} g(\xi)d\xi - \int_{x_0}^{x-ct} g(\xi)d\xi\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.20) çözümüne d'Alembert formülü denir.

(2.14)-(2.16) başlangıç değer problemlerinin çözümü başlangıç verilerine sürekli bağımlıdır. Yani eğer $u^*(x,t)$,

$$u^*(x,0) = f^*(x), \qquad u_t^*(x,0) = g^*(x)$$

başlangıç koşullarını sağlayan diğer bir çözüm; eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$|f(x) - f^*(x)| < \delta(\varepsilon), |g(x) - g^*(x)| < \delta(\varepsilon)$$

ise, bu taktirde

$$|u(x,t) - u^*(x,t)| < \varepsilon$$

dir.

$$u_{tt} - c^2u_{xx} = F(x,t), \ -\infty < x < \infty, \ 0 \leq t < \infty, \tag{2.21}$$

$$u(x,0) = f(x), \ -\infty < x < \infty, \tag{2.22}$$

$$u_t(x,0) = g(x), \ -\infty < x < \infty, \tag{2.23}$$

problemine homojen olmayan dalga denklemi için başlangıç değer problemi denir. Burada $F(x,t)$, sonsuz uzunluktaki bir sicime etki eden dış kuvveti, örneğin yerçekimi kuvvetini temsil eden verilmiş bir fonksiyondur.

Homojen ve homojen olmayan dalga denklemleri için yukarıda alınan başlangıç değer problemlerinde veriler, $x-$ekseni üzerinde verilmiştir. Veriler $xt-$düzleminde bir eğri üzerinde de verilebilir. Bu durumda probleme, daha önce de ifade edildiği gibi, başlangıç değer problemi yerine ekseriya Cauchy problemi denir.

Cauchy probleminin çözümünün mevcut olması için başlangıç eğrisinin eğimleri mutlak değerce 1 den küçük olan eğriler olması gerekir. Böyle eğrilere uzay-tipi (space-like) eğriler denir. Eğimleri mutlak değerce 1 den büyük olan eğrilere de zaman-tipi (time-like) eğriler denir. Örneğin, $x-$ekseni dalga denklemi için uzay-tipi, $t-$ekseni ise zaman-tipi eğridir (Çağlıyan ve Çelebi 2013, s. 143-154).

Dalga denklemi için önceki kısımlarda ele alınan başlangıç veya Cauchy problemlerinden başka, sınırlı bölgelere kısıtlandırılan fiziksel olaylarla ilgili diğer bazı problemlerle de karşılaşılır. Bu tip problemlerde başlangıç verileri, $t = 0$ doğrusunun sonlu bir alt aralığında, mesela $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlanır. Ayrıca bu başlangıç verilerine ilave olarak aralığın uç noktalarında yani $x = a$, $x = b$ doğruları üzerinde u (veya u_t) nun değerleri de önceden tanımlanır. Böylece homojen veya homojen olmayan dalga denkleminin, aşağıdaki şekilde gösterilen Ω bölgesinde, yukarıda verilen koşulları sağlayan çözümleri aranır. Bu tür problemlere başlangıç-sınır değer problemi denir.

Kabul edelim ki $n = 2k$ ya da $n = 2k+1$ olsun. $u \in C^2$ olduğundan her $f \in C^{k+2}$ ve $g \in C^{k+1}$, $n \geq 1$ için (2.1)-(2.2) probleminin aşağıda verilen kapalı çözümlerinin varlığı gösterilebilir. $n = 1$ olduğunda çözümün D'Alembert formülünden elde edildiği bilinmektedir

$$u(x,t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} g(s)ds.$$

Bundan başka, $c_n = 1.3...(2k-1)$ olarak tanımlandığında, n nin diğer tüm tek değerleri için

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{c_n\omega_n}\frac{\partial}{\partial t}\left((\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t})^{\frac{n-3}{2}}t^{n-2}\int\limits_{|\xi|=1} f(x+t\xi)dS_\xi\right) \\
&\quad +\frac{1}{c_n\omega_n}\left((\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t})^{\frac{n-3}{2}}t^{n-2}\int\limits_{|\xi|=1} g(x+t\xi)dS_\xi\right)
\end{aligned}
$$

dir. Diğer taraftan bütün çift n değerleri için

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{c_n\omega_n}\frac{\partial}{\partial t}\left((\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t})^{\frac{n-3}{2}}t^{n-2}\int\limits_{|\xi|\leq 1} \frac{f(x+t\xi)}{\sqrt{1+|\xi|^2}}d\xi\right) \\
&\quad +\frac{1}{c_n\omega_n}\left((\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t})^{\frac{n-3}{2}}t^{n-2}\int\limits_{|\xi|\leq 1} \frac{g(x+t\xi)}{\sqrt{1+|\xi|^2}}d\xi\right)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır.

Yukarıdaki formüllerden $t>0$ için (x,t) noktasındaki çözümün tanım kümesinin $\{x+t\xi : |\xi|\leq 1\}$ olduğu görülür. Buradan (2.2) denkleminde f ve g kompakt supporta sahip olduğundan t değişkeni sabit alındığında çözümün de kompakt supporta sahip olması gerektiği görülür. Özel olarak her $f\in C_0^{k+2}$ ve $g\in C_0^{k+1}$ için bir $R>0$ sayısı vardır, öyle ki

$$
u(x,t)=0, \text{ her } x\in\mathbb{R}^n\backslash B_{R+t}(0). \tag{2.24}
$$

Yukarıdaki düşünceler ışığında $f\in C_0^{k+2}$ ve $g\in C_0^{k+1}$ fonksiyonları için (2.1)-(2.2) probleminin çözümlerinin tek olduğunu ispatlayacağız. Esas itibariyle, bu her $f\in C_0^{k+2}$ ve $g\in C_0^{k+1}$ için (2.1)-(2.2) başlangıç değer probleminin iyi konulmuş olduğunu göstermek için yeterlidir. Çünkü problemin çözümünün sürekli bağımlılığı direkt olarak çözümün yukarıda verilen kapalı formundan görülür.

Tekliğin İspatı: u_1 ve u_2, (2.1)-(2.2) probleminin çözümü olsun. Bu durumda $v=u_1-u_2$ için dalga denklemi lineer olduğundan

$$
\begin{cases}
v_{tt}=\Delta_x v,\ (x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+, \\
v(x,0)=f(x)-f(x)=0,\ x\in\mathbb{R}^n, \\
v_t(x,0)=g(x)-g(x)=0,\ x\in\mathbb{R}^n,
\end{cases} \tag{2.25}
$$

bulunur, yani $f=g=0$ için v, (2.1)-(2.2) problemlerini sağlar.

Şimdi fiziksel değerlendirmelerde kullanılan

$$E(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (v_t^2 + |\bigtriangledown_x v|^2)dx$$

global enerji fonksiyonunu ele alalım. O halde

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (v_t v_{tt} + \sum_{i=1}^{n} v_{x_i} v_{x_i t})dx \\
&= \int\limits_{B_{R+t}(0)} (v_t v_{tt} + \bigtriangledown_x v.\bigtriangledown_x v_t)dx \\
&= \int\limits_{B_{R+t}(0)} (v_t v_{tt} - v_t \bigtriangledown_x v)dx + \int\limits_{\partial B_{R+t}(0)} v_t \bigtriangledown_x v.\bar{v} dS \\
&= \int\limits_{B_{R+t}(0)} v_t.0dx + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Burada ikinci ve dördüncü eşitlik (2.24) ve (2.25) denklemlerinden ve üçüncü eşitlik ise Green'nin birinci özdeşliğinden gelir. Böylece her $t > 0$ için, $E(t) = E(0)$ dır ve

$$\bigtriangledown_x v = 0 \text{ ve } v_t = 0, \text{ her } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$$

bulunur. O halde v nin sabit olduğu görülür ve denklem (2.25) ten $v = 0$ elde edilir ve bu yüzden teklik koşulu sağlanır.

2.4.2 Çok Boyutlu Zaman Durumu

(2.3) ve (2.4) probleminin kötü konulmuş olduğunu göstermek için Courant and Hilbert (1962) 'in standart yöntemi kullanılacaktır.

2.4.3 Ortalama Değerlerinden Fonksiyonların Belirlenmesi Problemi

$(y,t)-$uzayında $(y,0)$ merkezli bir $u = u(y,t)$ fonksiyonunun bir r yarıçaplı kürede ortalamasını ele alalım:

$$M_u(y,r) = \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{|\xi|^2+\tau^2=r^2} u(y+\xi,\tau) = dS = Q[u].$$

$t = 0$ koordinatına göre simetri dikkate alınarak $Q[u]$, t değişkenine göre u nun çift kısmına bağlı olur, yani temel olarak $\frac{1}{2}(u(y,t)+u(y,-t))$. Özel bir $M_u(y,r)$ bilineninden

$u(y,t)+u(y,-t)$ yi belirlemek için

$$N_u(y,r)=\int_0^\tau M_u(y,\rho)d\rho=\frac{1}{n\omega_n}\int_{|\xi|^2+\tau^2\leq r^2} u(y+\xi,\tau)d\xi d\tau \tag{2.26}$$

tanımlayalım. Bununla birlikte, herhangi bir y_i değişkenine göre N_u nun türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_k}N_u(y,r) &= \frac{1}{n\omega_n}\int_{|\xi|^2+\tau^2\leq r^2} u_{y_i}(y+\xi,\tau)d\xi d\tau\\ &= \frac{1}{n\omega_n}\int_{|\xi|^2+\tau^2=r^2} u(y+\xi,\tau)\hat{v}_i dS\\ &= \frac{1}{n\omega_n}\int_{|\xi|^2+\tau^2=r^2} u(y+\xi,\tau)\xi_i dS\end{aligned}$$

olur. Burada ikinci ve üçüncü eşitlikler $\hat{v}_i=\frac{\xi_i}{\tau}$ dikkate alınarak diverjans teoreminden elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}Q[u(y,t)y_i] &= \frac{1}{n\omega_n}\int_{|\xi|^2+\tau^2=r^2} u(y+\xi,\tau)(y_i+\xi_i)dS\\ &= y_iM_u(y,r)+\tau\frac{\partial}{\partial y_i}N_u(y,r)\\ &= y_iM_u(y,r)+\tau\frac{\partial}{\partial y_i}\int_0^\tau N_u(y,\rho)d\rho\\ &= D_iM_u\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada

$$D_i=(y_i+\tau\frac{\partial}{\partial y_i}\int_0^\tau .d\rho)$$

$M_u(y,r)$ fonksiyonları üzerinde lineer bir operatördür. Lineerlikten, verilen bir $P:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ polinomu için

$$Q[Pu]=P(D_1,...,D_n)M_n$$

dir ve bu yüzden $M_{Pu(y,r)}=Q[Pu]$ ve M_u elde edilir. Bundan farklı olarak

$$\begin{aligned}Q[Pu] &= \frac{1}{n\omega_n}\int_{|\xi|^2+\tau^2=r^2} P(y+\xi)u(y+\xi,\tau)dS_{\xi,\tau}\\ &= \frac{1}{n\omega_n}\int_{|y-\eta|^2+\tau^2=r^2} P(\eta)u(\eta,\tau)dS_{\eta,\tau}\\ &= \frac{1}{2n\omega_n}\int_{|y-\eta|^2+\tau^2=r^2} P(\eta)(u(\eta,\tau)+u(\eta,-\tau))dS_{\eta,\tau}\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki ifadede $\eta = y + \xi$ olarak alınmıştır. Ayrıca $Q[u]$ ve dolayısıyla $Q[Pu]$ nun $t-$değişkenine göre u nun çift kısmına bağlı olarak ele alınır.

Şimdi $|y-\eta|^2 + \tau^2 = r^2$ için $\tau \geq 0$ durumunu ele alalım. O halde $\tau = \phi(\eta) = \sqrt{r^2 - |\eta - y|^2}$ yazarak

$$\begin{aligned} dS_{\eta,\tau} &= \sqrt{1 + |\nabla_n \phi|^2} d\eta \\ &= \frac{\sqrt{\tau^2 + |\eta - y|^2}}{\tau} d\eta \\ &= \frac{r}{\tau} d\eta \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$Q[Pu] = \frac{r}{2n\omega_n} \int\limits_{|y-\eta|^2 \leq r^2} P(\eta)(u(\eta,\tau) + u(\eta,-\tau))\frac{d\eta}{\tau} \tag{2.27}$$

olur. Sonuç olarak Stone-Weierstrass Teoremi'ne göre polinomlar supremum normu altında $C(\bar{B}_r,(0),\mathbb{R})$ de yoğun olduğundan $\frac{1}{\tau}(u(\eta,\tau) + u(\eta,-\tau))$ fonksiyonları $Q[Pu] = P(D_1,...,D_n)M_u$ yardımıyla tek türlü belirlenebilir. Buradan $|y_0 - y|^2 + t^2 = r^2$ için $u(y,t)$ nin çift kısmı tek türlü elde edilir.

Lemma 2.2 *Yeteri kadar küçük her $\varepsilon > 0$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $r_0 > 0$ için u fonksiyonunun, $|y_0 - y|^2 + t^2 \leq r_0^2$, küresine göre çift kısmı $\frac{1}{2}(u(y,t) + u(y,-t))$, $0 \leq r \leq r_0$ ve $|y - y_0| \leq \varepsilon$ sonlu silindirine göre $M_u(y_0, r_0)$ yardımı ile tek türlü belirlenir.*

İspat. Dikkat edilirse y_0 ve r_0 için $D_i M_u = y_i M_u(y,r) + r\frac{\partial}{\partial y_i}\int\limits_0^r M_u(y,\rho)d\rho$ ifadesini hesaplarken $0 \leq r \leq r_0$ olmak üzere, y uzayında y_0 ın bazı komşuluğunda sadece $M_u(y,r)$ yi bilmeye ihtiyaç vardır. Genelliği bozmadan farzedelim ki gerekli olan komşuluk y_0 merkezli $\varepsilon > 0$ yarıçaplı bir yuvar olsun. $Q[Pu]$ ifadesini hesaplamak için $|y - y_0| \leq \varepsilon$ ve $0 \leq r < r_0$ için sadece $M_u(y,r)$ yi bilmek gereklidir. Buna ek olarak, (2.27) denkleminden ve sadece $0 \leq r < r_0$ aralığını göz önünde bulundurarak yukarıdaki silindirde M_u nun $|y_0 - y|^2 + t^2 \leq r_0^2$ küresinin tamamında u nun çift kısmını tek olarak belirlediği sonucuna varılır. ■

Ayrıca şunu vurgulamak gerekir ki (2.1)-(2.2) probleminin her çözümü t değişkenine göre çift olacaktır. Çünkü $t \to -t$ dönüşümü (2.1) denklemini korur.

Şimdi (2.3)-(2.4) problemini tekrar anımsayalım:

$$u_{tt} = (\Delta_x - \Delta_y)u, (x,y,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

$$
\begin{aligned}
u(x,y,0) &= f(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-1}, \\
u_t(x,y,0) &= g(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-1}.
\end{aligned}
$$

G, $\mathbb{R}^n$ nin bir alt bölgesi ve $\varepsilon > 0$ olsun. Sadece $y \in B_\varepsilon(y_0)$ ve $x \in G$ yi göz önüne alalım. (2.2)-(2.3) ün bir u çözümünü ele alalım. Ayrıca sabitlenmiş x için, f fonksiyonu (y,t) uzayında tüm küreler üzerinde M_u yu belirler. Öyle ki $(y,t) \in B_\varepsilon(y_0) \times \{0\}$ ve r_0 yarıçapı hala $B_{r_0}(x) \subset G$ olacak şekilde yeterince küçüktür.

Asgeirsson Teoremi'nin ispatını tekrar hatırlarsak aşağıdaki iki duruma ulaşırız:

Durum 1. $(m \geq n)$: Doğrudan Asgeirsson Teoremi kullanılarak

$$
\frac{1}{m\omega_m} \int\limits_{|\zeta'|^2 = r_0^2} u(x+\zeta, y, 0)\, dS_{\zeta'} = \frac{1}{m\omega_m} \int\limits_{|\xi|^2+\tau^2 = r_0^2} u(x, y+\xi, \tau)\, dS_{\xi,\tau}
$$

bulunur. Burada $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n)$ ve $\zeta' = (\zeta_1, ..., \zeta_n, ..., \zeta_m)$ dır.

Durum 2. $(n \geq m)$: Tekrar Asgeirsson Teoremi'nden

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{|\zeta|^2 = r_0^2} u(x+\zeta, y, 0)\, dS_\zeta \\
= & \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{|\xi'|^2+\tau^2 = r_0^2} u(x, y+\xi, \tau)\, dS_{\xi',\tau} \\
= & \frac{1}{n\omega_n} \left[\frac{d}{dr} \int\limits_{|\xi'|^2+\tau^2 \leq r^2} u(x, y+\xi, \tau)\, d\xi' d\tau \right]_{r=r_0} \\
= & \frac{1}{n\omega_n} \left[\frac{d}{dr} \int\limits_{|\xi|^2+\tau^2 \leq r^2} u(x, y+\xi, \tau) \int\limits_{|\xi'-\xi|^2 \leq r^2 - |\xi|^2 - \tau^2} d\xi' d\tau \right]_{r=r_0} \\
= & \frac{1}{n\omega_n} \left[\frac{d}{dr} \omega_{n-m} \int\limits_{|\xi|^2+\tau^2 \leq r^2} u(x, y+\xi, \tau)(r^2 - |\xi|^2 - \tau^2)^{\frac{n-m}{2}}\, d\xi d\tau \right]_{r=r_0} \\
= & \frac{(n-m)\omega_{n-m} r_0}{n\omega_n} \int\limits_{|\xi|^2+\tau^2 \leq r_0^2} u(x, y+\xi, \tau)(r_0^2 - |\xi|^2 - \tau^2)^{\frac{n-m-2}{2}}\, d\xi d\tau
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada $\xi = (\xi_1, ..., \xi_{m-1})$ ve $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_{m-1}, ..., \xi_{n-1})$ dir. Bu yüzden Asgeirsson Teoremi'nin ispatına benzer şekilde $0 \leq r < r_0$ için yukarıdaki denklem

$$
\frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{|\zeta|^2 = r^2} u(x, y+\zeta,)\, dS_\zeta = \frac{m(n-m)\omega_{n-m}\omega_m r}{n\omega_n} \int_0^\tau \rho^{n-m-1}(r^2 - \rho^2)^{\frac{n-m-2}{2}} I(\rho)\, d\rho \qquad (2.28)
$$

olarak yazılabilir. Burada

$$I(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{|\xi|^2+\tau^2=r^2} u(x, y+\xi, \tau) dS_{\xi,\tau}$$

bir r yarıçapı için u nun küresel ortalamasıdır. Sabitlenmiş bir $x \in G$ için M_u, (y,t)-uzayında $(x,y,0)$ noktasında alınmıştır. Çünkü (2.28) denkleminin sol tarafı f tarafından tek türlü belirlendiğinden (2.28) denkleminin r ye göre türevini alırsak $I(r)$ için birinci mertebeden bir diferensiyel denklem elde ederiz. Adi diferensiyel denklemler için varlık ve teklik teoreminden bu elde ettiğimiz diferensiyel denklemin tek çözüme sahip olduğunu söyleyebiliriz. n ve m keyfi sayılar verildiğinde $r_0 \geq 0$ ın $B_{r_0} \subset G$ olacak şekilde yeterince küçük olarak sınırlandırılması gerekir. Böylece

$$\int\limits_{|\zeta|^2=r_0^2} u(x+\zeta, y, 0) dS_\zeta$$

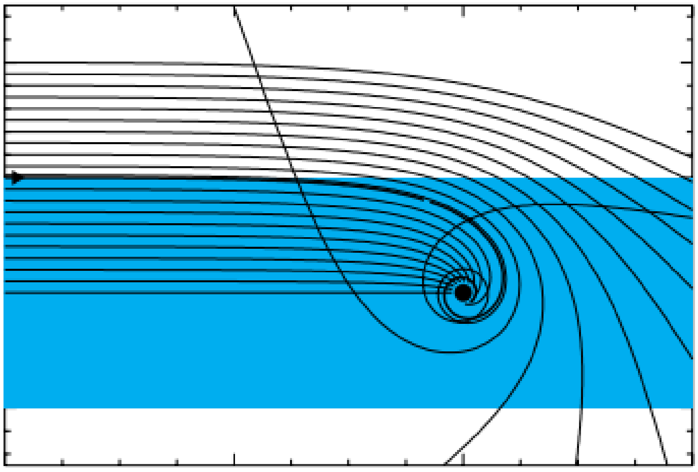
iyi tanımlı olur. Bunu göz önünde bulundurarak bir önceki iddiadan $\frac{1}{2}(u(x,y,t)+u(x,y,-t))$ çift fonksiyonunun ve u nun kendisi $|y_0-y|^2+t^2 \leq r_0^2$ küresinde (y,t) uzayında M_u ortalama değeriyle tek türlü belirlenir. Öyle ki $(y,t) \in B_\varepsilon(y_0) \times \{0\}$ olacaktır. Ayrıca M_u nun kendisi verilen f fonksiyonunun integraline eşit olacağından M_u, f tarafından tek türlü belirlenir. Benzer bir yolla $\frac{1}{2}(u_t(x,y,t)+u_t(x,y,-t))$ fonksiyonu $g(x,y)$ tarafından tek türlü belirlenir ve buradan u, f ve g tarafından tek türlü belirlendiği sonucuna varılır. Özel olarak $u(x,y,0)$, $t=0$ başlangıç değeri için $y-$ uzayında $|y_0-y|^2 \leq r_0^2$ kürenin içerisinde belirlenir. Böylece ispatlanmış olur ki eğer (2.3)-(2.4) probleminin u çözümünün başlangıç değerleri $x \in G$ olmak üzere $|y_0-y|^2 \leq \varepsilon^2$ küçük yuvarında bir t için biliniyorsa bu durumda başlangıç değerleri daha büyük olan $|y_0-y|^2 \leq r_0^2$ küresinin her yerinde de tek türlü belirlenir. Burada r_0 yukarıdaki gibi tanımlanmıştır (Courant and Hilbert 1962). Böylece çok boyutlu dalga denklemi üzerine keyfi başlangıç koşulları konulamaz. Çünkü bu genel olarak iyi konulmuşluk şartını ortadan kaldırır. Eğer f ve g başlangıç koşulları uygun şekilde tanımlanmazsa çözümün varlığı söz konusu olmaz.

(2.1)-(2.2) ve (2.3)-(2.4) başlangıç değer problemleri arasındaki temel fark yukarıda ifade edilmiş oldu. Tekrar özetlersek birinci problem iyi konulmuştur yani basit bir ifadeyle fiziksel olarak anlamlıdır, diğer taraftan ikinci problem ise kötü konulmuş bir problem olup fiziksel açıdan muhtemelen pek bir anlama sahip değildir. Muhtemel bir fiziksel yorum şöyle yapılabilir: (2.3)-(2.4) problemini ele aldığımızda buradaki başlangıç koşulları karışık bir hiperyüzey üzerinde verilir ki bu hiperyüzey sadece konum uzayına değil aynı zamanda zamana göre de genişleyen bir hiperyüzey olarak düşünülür. Böylece muhtemel çözümle ilgili karakteristikler bazı yönlerde zaman benzeri (time-like) olur ve verilmiş zaman benzeri başlangıç koşullarını sağlaması gerekir. Bu da gelecekle ilgili verilen şartlarda sınırlama oluşturacağından fiziksel olmayan bir durum olacaktır. Yakın zamanlarda çoklu zaman boyutu içeren dalga denkleminin iyi konulmuşluğu ile ilgili Craig and Weinstein (2009) tarafından önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmada özel bir Fourier dönüşüm kullanılmış ve başlangıç koşulları üzerindeki bazı kısıtlamalar altında (2.3)-(2.4) başlangıç değer probleminin iyi konulmuşluğu ispatlanmıştır.

BÖLÜM 3

ULTRAHİPERBOLİK DENKLEMLER VE MODERN FİZİK KURAMLARI

Zaman boyutunun (m) birden az ya da çok olması durumunda doğadaki olayları ifade eden kısmi diferensiyel denklem, gözlemcilerin öngörüde bulanabilmelerine imkan tanıyan hiperboliklik özelliğinden yoksun olacaktır. Uzay boyutunun (n) üçten büyük olduğu durumda klasik anlamda atomlar mevcut olmayabilir ya da kararsız yapılar söz konusu olabilir. Üçten daha az boyuta sahip uzaylar ise yer çekim kuvvetinin olmamasından dolayı çok basit ve gözlemciyi içermeyen anlamsız bir duruma sebebiyet verebilir. İlk olarak $m = 1$ olduğunda uzaysal boyutların sayısı ile ilgili eski fakat az bilinen sonuçları ifade edeceğiz. Daha sonra da zaman boyutunun sayısı ile bağlantılı yeni sonuçları sunacağız. Burada bizim amacımız sadece $(n, m) = (3, 1)$ durumunda gözlemcilerin var olduğunu söylemek değildir. Daha çok diğer durumların bir gözlemcinin varlığına imkan tanımaktan uzak olduğunu basitce tartışacağız. 1917'de Ehrenfest'in ifade ettiği gibi ne klasik atomlar ne gezegen yörüngeleri ne de klasik kuantum atomları $n > 3$ olan uzaylarda kararlı olabilir. Bu özellikler bir nokta parçacığın elektrostatik/gravitasyonel potansiyelini veren $\nabla^2\phi = \rho$ Poisson denkleminin temel Green fonksiyonunun $n > 2$ için r^{2-n} olmasıyla bağlantılıdır. $n > 3$ iken iki parçacıklı problem artık çözüm olarak hiçbir kararlı yörüngeye sahip olmayacaktır. Bu şekil 3.1 de gösterilmiştir (Tegmark 1997).Örneğin benzer bir durum kuantum mekaniğinde Schrödinger denkleminde de ortaya çıkar. Burada da hidrojen atomları $n > 3$ olduğunda birbiriyle ilişkili değillerdir. Peki $n < 3$ iken durum nedir? Whitrow (1955) tarafından $n = 2$ için organizmaların üstesinden gelinemez topolojik problemlerle yüzleşecekleri tartışılmıştır. Wheeler (1973) tarafından vurgulanan diğer bir problem de $n < 3$ durumunda genel relativitede gravitasyonel kuvvet olmamasıdır. Dolayısıyla $n = 2$ durumu $n = 3$ durumundan daha az bir karmaşıklığa sahip olduğundan $n < 3$ olan bir dünya çok basit olacaktır ve gözlemci içermeyecektir. Burada bizim dünyamız ile aynı fiziksel kanunları içeren bir $(n + m)-$boyutlu uzay-zamanın neden



Şekil 3.1: Dört boyutlu uzayda 2-parçacık problemi (Tegmark 1997).

uzay boyutuna bakılmaksızın sadece zaman boyutu $m = 1$ olduğunda gözlemciler içerebileceğini açıklayacağız. Kısmi diferensiyel denklemlerin hiperboliklik özellikleri ile ilgili olan bu durumu açıklamadan önce zamanın çok boyutluluğu ile ilgili birkaç genel yorum sunacağız. Birden büyük zaman benzeri boyutlu bir manifoldda bir gözlemciye gerçek acaba nasıl görünür? $m > 1$ oduğunda bile bir gözlemcinin zamanı neden bir boyutlu durumda olduğu gibi algılayamadığının kesin bir sebebi yoktur. Dolayısıyla kendi gerçek algısını karakterize eden bir boyutlu düşünceler zincirine sahip olma kalıbını sürdürür. Eğer gözlemci lokalize edilmiş bir nesne ise temel olarak $(n + m)-$boyutlu uzay-zaman manifoldunda bir boyutlu zaman benzeri dünya çizgisi üzerinde hareket edecektir. $m > 1$ olduğunda parçacıkların daha az kararlı olduğu geometrik yöntemler kullanılarak gösterilebilir. $m = 1$ olduğu zaman bozunabilen bir parçacık için aynı kuantum sayılı parçacıklar kümesinin varlığı yeterli değildir. Bilindiği gibi durgun kütlelerinin toplamının kinetik enerjileri ne kadar büyük olsa da orijinal parçacığın durgun kütlesinden daha küçük olması gerekir. $m > 1$ olduğunda bu sınırlama kalkar. Örneğin;

i. Bir proton; bir nötron, pozitron ve nötronoya bozunabilir,

ii. Bir elektron; bir nötron, antiproton ve nötronoya bozunabilir,

iii. Yeterli büyüklükteki enerjiye sahip bir foton herhangi bir parçacığa ve onun anti parçacığına bozunabilir.

$\mathbb{R}^d$ uzayında aşağıdaki ikinci mertebeden lineer kısmi diferensiyel denklemini ele alalım:

$$\left[\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{d}b_i\frac{\partial}{\partial x_i}+c\right]u=0.$$

Burada A simetrik bir matris, b bir vektör ve c skaleri de d koordinatında diferensiyellenebilen fonksiyonlardır. Burada sınıflandırma Bölüm 1'de belirtildiği üzere A nın özdeğerlerinin işaretine göre yapılabilir. Bu kısmi diferensiyel denklem, $\mathbb{R}^d$ nin bir bölgesinde özdeğerlerinin;

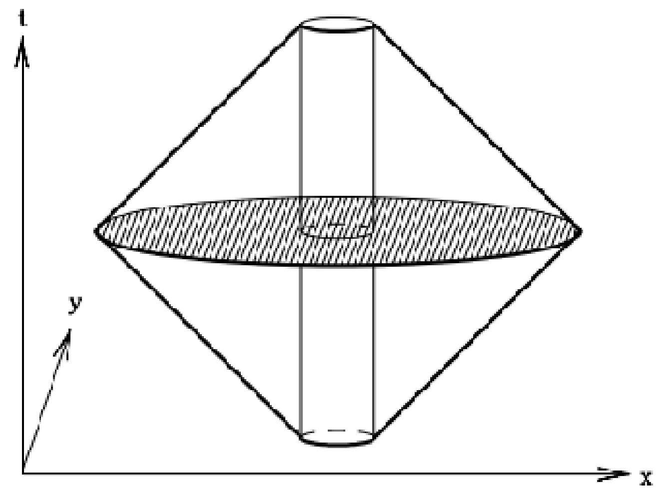
i. Eğer hepsi pozitif veya negatif ise eliptik,

ii. Eğer birisi pozitif geri kalanların hepsi negatif ise veya tam tersi ise hiperbolik,

iii. Eğer en az iki tane özdeğeri pozitif ve en az iki tane özdeğeri negatifse ultrahiperbolik olarak adlandırılır.

Kısmi türevli diferensiyel denklemlerin bu standart sınıflandırılmasının önemli bir özelliği bu denklemlerin nedensellik yapılarını yani sınır koşullarının problemin iyi konulmuş olması için nasıl verilmesi gerektiğini belirlemesidir. Daha açık bir ifadeyle eğer bu sınır koşullarından tek bir u çözümü elde ediliyorsa ve bu çözümün sınır koşullarına bağlılığı sınırlıysa problem iyi konulmuştur. En son yazılan gereksinim yani çözümün sınır koşullarına bağlılığı, u çözümünün bir noktasında sınır değerlerinin sonlu miktarda değişiminin çözümde de sonlu miktarda değişim meydana getirmesini ifade eder. Bu yüzden kötü konulmuş bir problem formal olarak çözülse de bu çözüm pratikte bir gözlemci için yararsızdır. Çünkü herhangi bir ölçüm hatası çözümde sonsuz bir hataya sebep olacaktır. Uzay-zaman boyutluluğuyla bu sınıflandırma arasında da bir ilişki mevcuttur. Dünyamızdaki olayları tasvir eden birçok kovaryant alan denklemleri (örneğin; dalga denklemi, Klein-Gordon denklemi) için A matrisi metrik tensörle aynı özdeğerlere sahiptir. Örneğin; $(n, m) = (3, 1)$ e karşılık gelen (+ - - -) işaretli (imzalı) bir metrikte hiperbolik, (+ + + +) işaretli metrikte eliptik, (+ + - -) işaretli metrikte ultrahiperbolik olacaktır.

Eliptik denklemler için sınır değer problemi iyi konulmuştur. Diğer taraftan kapalı olmayan hiperyüzeyler üzerinde (örneğin bir düzlem üzerinde) eliptik türden bir kısmi türevli denklem için başlangıç koşullarının verilmesi kötü konulmuş bir problemi ortaya çıkarır. Bu da zaman boyutu olmayan $(m = 0)$ bir dünyada bir gözlemcinin lokal olarak gözlemlediği şeylere bağlı olarak uzayın başka bir bölümündeki duruma ilişkin herhangi bir öngörüde bulunamayacağı anlamına gelir. Diğer taraftan hiperbolik denklemler için başlangıç sınır problemleri iyi konulmuştur. Örneğin şekil 3.2 deki taralı bölgede



Şekil 3.2: Hiperbolik ve ultrahipebolik denklemler açısından nedensellik ilkesi (Tegmark 1997).

tanımlı, başlangıç verisi (u ve $\dot{u}$) olarak belirlenen Klein-Gordon denklemi için çözüm, iki koni tarafından sınırlandırılan ve tepe noktasını da içeren hacimde belirlenir. Burada lokalize olmuş bir gözlemci bu nedenle gelecek hakkında öngörülerde bulunabilir. Tersine eğer hiperbolik kısmi türevli denklem için başlangıç verisi uzay benzeri olmayan bir hiperyüzeyde verilirse o zaman problem kötü konulmuş olur.

Asgeirsson Teoremi'nin önemli bir sonucu olarak eğer u fonksiyonu şekil 3.2 deki silindir içerisinde verilirse bu durumda u fonksiyonu, iki tane kesik koni tarafından oluşturulan bölgenin tamamında belirlenmiş olur. Eğer bu silindirin yarıçapını sıfıra götürürsek bu durumda rahatsız edici bir sonuç elde ederiz. Şöyle ki elimizde bir boyutlu bölgede verilen veriler üç boyutlu bölgede çözümü belirler. Böyle bir durum, yani çözümün başlangıç giriş verisinden daha fazla bilgi içermesi kötü konulmuş bir problemin klasik özelliğidir. Burada ödenmesi gereken bir bedel vardır: Başlangıç verisi kesin olarak belirlenmelidir. Oysa bu gerçek dünyada mümkün değildir. Başlangıç verisi uzay benzeri olmayan bir hiperyüzeyin bir bölümünde verildiği zaman da aynı durumun ortaya çıktığını görmek zor değildir. Bu özellikler $(n+1)$ boyuttakine benzerdir ve bir gözlemcinin $(n+1)-$boyutlu uzay zamanda neden sadece zaman benzeri yönlerde öngörüde bulunabileceğini gösterir (Tegmark 1997).

Asgeirsson teoremi ultrahiperbolik denklemler için de geçerlidir ve bize şunu gösterir: Hem uzay benzeri hem de zaman benzeri yönleri içeren hiperyüzeyler üzerindeki başlangıç verileri kötü konulmuş bir problemin ortaya çıkmasına neden olur. Bununla birlikte bir hiperyüzeyin boyutu uzay-zaman manifoldundan bir boyut az olduğu için ultrahiperbolik durumda uzay benzeri veya zaman benzeri hiperyüzeyler yoktur. Dolayısıyla bu durumda da iyi konulmuş problemin varlığından bahsedemeyiz.

Verilen diğer fizik kanunlarına göre sadece $(3+1)-$boyutlu uzay-zamanda dünyaları hakkında öngörülerde bulunabilecek ve anlayabilecek gözlemcilerin varlığının mantıksız olmadığını aşağıdaki nedenlerden dolayı söyleyebiliriz:

i. Birden çok veya az zaman boyutu yetersiz öngörülebilirliktir (insufficient predictability),

ii. Üçten fazla uzay boyutu yetersiz kararlılıktır (insufficient stabillity),

iii. Üçten daha az zaman boyutu yetersiz karmaşıklıktır (insufficient complexity).

Sonuç olarak, burada amaç diğer boyutlarda kesin olarak bir gözlemcinin olmadığını göstermek değildir. Örneğin özel modellerde $(n, m) = (4, 1)$ durumunda kararlı yapıların olabileceği düşünülebilir. Burada basit olarak $(n, m) = (3, 1)$ dışındaki kombinasyonlarda gözlemcinin olma olasılığının uzak olduğu ifade edildi. Bunun nedeni n veya m nin değişmesi durumunda ciddi, niteliksel değişikliklerin ortaya çıkmasıdır (Tegmark 1997).

3.1 SİCİM TEORİSİ VE M-KURAMI

3.1.1 SİCİM TEORİSİ

Evrenin nasıl oluştuğunu ve karadelikleri daha iyi anlayabilmek için kütleçekimini de içeren bir kurama gereksinim vardır. Standart modelle genel göreliliği birleştirmek çok zor bir iştir. Çünkü ikisinin de kuvvet tanımları birbirinden farklıdır. Bu problem Sicim/M-Kuramı tarafından çözüme kavuşmuştur. Sicim kuramının ana varsayımına göre, maddenin yapıtaşları nokta parçacıklar değil, $1-$boyutlu sicimlerdir. Noktasal bir parçacık, uzay-zamanda hareket ettiğinde $1-$boyutlu bir çizgi çizerken, bir sicim $2-$boyutlu bir yüzeyi tarar. Sicim kuramının kuantum mekaniğiyle tutarlı olabilmesi için uzay-zamanın $26-$boyutlu (1 zaman, 25 uzay) olması gerekir.

Bir fizik kuramında her bozona (fermiyona) karşılık gelen, aynı kütleye sahip bir fermiyon (bozon) varsa bu simetriye "süpersimetri" denir. Eğer sicim kuramında süpersimetri olursa, kuantum mekaniğiyle tutarlılık göstermesi için uzay-zamanın boyut sayısının 10 $(9+1)$ olması gerekir.

Gravitasyonel kuvvetle ilgili ilk kuram Isaac Newton tarafından 1686 yılında ortaya atılmıştır. Newton'un gravitasyon teorisi bazı doğa olaylarını açıklamakta yetersiz kalmıştır. 1915 yılında Albert Einstein genel görelilik kuramı ile gravitasyonun temel teorisini açıklamıştır. Bu kuram bugüne kadar gravitasyonel kuvvet için gerçekleştirilmiş olan deneylerle ve gözlemlerle uyumluluk göstermiş bir teoridir.

Einstein'nin Genel Görelilik kuramına ek uzaysal boyutlar ekleyerek teoriyi genişletme fikri ilk olarak 1921 yılında Theodor Kaluza tarafından önerilmiştir. 1926 yılında Oscar Klein tarafından geliştirilen Kaluza'nın teorisi günümüzde Kaluza-Klein teorisi adıyla bilinmektedir. Kaluza-Klein teorisinin temel amacı, iki temel kuvvet olan gravitasyonel kuvvet ile elektromanyetik kuvveti birleştirmektir. Bu birleştirme denemesi $(4+1)-$boyutlu yani $5-$boyutlu uzay zamanda gerçekleştirilmiştir. Buna göre $5-$boyutlu evrende yalnızca kütleçekimi vardır; ama 5. boyuttaki gravitonu (kütleçekimini taşıyan bozon) 4 boyuta indirdiğimizde iki farklı parçacığa ayrılır. Bunlardan biri graviton, diğeri ise 4 boyuttaki fotondur (elektromanyetizmayı taşıyan bozon).

Kaluza-Klein teorisi Genel Görelilik ile Kuantum Mekaniği'nin birleştirilmesini sağlayamadığı, yeni öngörülerde bulunamadığı ve daha sonraki yıllarda anlaşılan güçlü ve zayıf çekirdek kuvvetlerini içermediğinden dolayı terk edilmiştir. 1980'li yıllarda Sicim teorilerinin ortaya çıkması ile birlikte ek boyut fikri tekrar gündeme gelmiştir. Ancak bu teoriler günümüz deneylerinin ulaşabileceğinin ötesinde çok küçük ek boyutları içerirler. Günümüz deneylerinin ulaşabileceği ölçüde büyük ek boyutların modern parçacık fiziğine uygulanması 1990'lı yıllarda I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos ve G.R. Dvali'nin öncü çalışmaları ile olmuştur. Ek boyutlar, çok sayıdaki araştırmacının standart model bağlamında çözülemeyen pek çok problemin çözülmesinde ek boyut fikrini bir araç olarak kullanması ile birlikte, yeni bir paradigmaya dönüşmüştür. Ek boyutları içeren teorilerin sağladığı en önemli başarı hiyerarşi problemi olarak bilinen probleme getirdikleri çözümdür. Hiyerarşi problemi basitçe, Planck ölçeği ile zayıf ölçek arasındaki büyük farklılığın sebebinin anlaşılamaması olarak tanımlanabilir. Ek boyutları içeren farklı modeller vardır. Bunlardan en iyi bilinenleri: ADD (Arkani-Hamed, Dimopoulos, Dvali) düz ek boyutlar modeli, RS (Randall-Sundrum) bükülmüş ek boyutlar modeli olarak sıralanabilir. Evreni anlayabilmek için $10-$boyutlu sicim kuramının $6-$boyutlu bir uzay üzerinde büzüştürülmesi gerekir. Buna örnek olarak Calabi-Yau uzayları verilebilir (Değer 2002).

3.1.2 M-KURAMI

1987'den sonra Green ve Schwarz'ın anomalilerden temizledikleri süpersicim kuramı, "herşeyin kuramı" olarak ifade edilmiştir. Herşeyin kuramı, kara deliklerden büyük patlamaya kadar herşeyi matematiksel olarak ifade eden bir kuramdır. 80'li yılların ikinci yarısında, bu kuramlardan bildiğimiz 4−boyutlu fiziğin elde edilebilmesi için 10 boyuttan altısının kendi üzerine kapanmış, çok küçük ve bazı çok özel niteliklere sahip Calabi-Yau uzayları olması gerektiği ortaya atılmıştı. Ancak 6−boyutlu kaç Calabi-Yau uzayı olduğu bilinmiyordu ve denenen hiçbir Calabi-Yau uzayı 4 boyutta beklenen cevabı vermedi. 1995'ten sonra beş süpersicim kuramıyla 11−boyutlu süperçekim kuramının, daha temel bir kuramın özel durumları olduğu gösterildi. Bu kurama Witten tarafından verilen isim "M-Kuramı"dır. M-kuramının anlamlı olduğu 11 boyuttaki temel cisim, sicim değil, zardır. M-kuramına göre evren 11−boyutludur. 11. boyut, sicimlerin birer zar gibi uzamalarına olanak verir. Teorik olarak yeterli enerji sağlandığında bir sicim bir evren kadar büyüyebilir. M-kuramına göre 10−boyutlu evrenler, 11 boyutta süzülen zarlardan ibarettir. M-kuramının sonuçlarının bir yorumuna göre evrenimizin bulunduğu bir zar ile diğer bir evrenin bulunduğu zar çarpışması nedeni ile Büyük Patlama (Big Bang) oluşmuş ve bildiğimiz evren dünyaya gelmiştir. Stephen Hawking, evreni gerçekte iç içe geçmiş, birbirini şekillendiren ve hatta belki birbiriyle iletişim halinde olan, birbirine paralel çok sayıda evrenlerin bulunduğu sonsuz bir uzayın minik bir kesiti olarak ifade etmektedir.

10−boyutlu süpersicim kuramlarından ya da 11−boyutlu M-kuramından 4−boyutlu bilinen fiziğe ulaşmak için, fizikçiler tarafından 6 ya da 7−boyutlu, çok küçük ölçeklere büzüşmüş ve 4−boyutlu uzayın her noktasında bulunan çok özel nitelikli mini uzaylar olduğu düşünülmüştür. Onbinlerce farklı mini uzayı tek tek denemek pratik ve mantıklı olmadığından fizikçiler, M kuramından 4−boyutlu fiziği elde etmek için daha farklı yöntemler araştırmışlardır. Fizikçilerin çalışmaları sonucu, süpersicim kuramlarının, her noktasında büzüşmüş bir küre içeren hiperbolik uzay-zaman (Anti-de Sitter (AdS) uzay-zaman) içinde de çözümlerinin olabileceği bulundu. Maldacena D-zar teknolojisini kullanarak yaşadığımız evrenin, yukarıda bahsedilen bir hiperbolik uzay-zamanın yüzeyi olabileceğini bir öngörü olarak ileri sürdü. Ancak bu kuram hiperbolik uzayda tanımlanmış bir süpersicim ya da M-kuramından elde edilebilir.

İçinde yaşadığımız evrenin 11 ya da daha küçük boyutlu bir uzay-zamanda bir ada (bir D-zar) olabileceği fikri çok etkileyicidir. Son yıllarda yüksek enerji fizikçilerinin büyük bir kısmı, bu fikrin matematiksel ve fiziksel boyutlarını incelemektedir.

BÖLÜM 4

DALGA DENKLEMİ İÇİN CARLEMAN DEĞERLENDİRMELERİ

Bu bölümde, bir M Riemann manifoldu üzerinde ikinci mertebeden bir hiperbolik operatör için iki büyük parametreli bir Carleman değerlendirmesi ispatlanacaktır. Burada elde edilen Carleman değerlendirmeleri eğer verilen fonksiyonlar $\partial(M \times (0,T))$ sınırı üzerinde sıfır oluyorsa ağırlık fonksiyonu tarafından üretilen seviye eğrilerinden bağımsız olarak bütün $M \times (0,T)$ silindirik bölgesinde sağlanır. Carleman değerlendirmelerinin bu türüne $(0,T) \times M$ de global Carleman değerlendirmesi adı verilir. Bu bölüm Bellassoued and Yamamoto (2012) üçüncü bölüm esas alınarak hazırlanmıştır.

$P(x;\partial)$, M Riemann manifoldunda tanımlanan bir diferensiyel operatör olsun. Bu operatör için Carleman değerlendirmesi

$$s\,||e^{s\varphi}u||_{L^2(M)} \leq C\,||e^{s\varphi}Pu||_{L^2(M)} \tag{4.1}$$

şeklinde yani ağırlıklı L^2 normuna göre verilir. Burada φ gradyanı sıfır olmayan reel değerli bir ağırlık fonksiyonu, s pozitif büyük bir parametre ve u da M de düzgün kompakt supporta sahip bir fonksiyon olsun. (4.1) Carleman değerlendirmesi, her büyük $s > 0$ için yani s_0 bir sabit olmak üzere $s \geq s_0$ için düzgün olarak geçerlidir. Başka bir ifadeyle, $C > 0$ sabiti $u \in C_0^\infty(M)$ ve $s > s_0$ dan bağımsız olmalıdır. Uygulamalar açısından s parametresi temel bir rol oynar ve ele alınan problemin geometrik özellikleri açısından φ ağırlık fonksiyonunun nasıl seçildiği önemlidir.

Carleman değerlendirmesi, iki boyutlu eliptik denklemlerin çözümlerinin bazı özelliklerinin araştırılması amacıyla 1939'da ilk kez Torsten Carleman tarafından ortaya konulmuştur. Daha sonra, Calderon (1958) ve Hörmander (1963) tarafından daha genel ispatlar verilmiştir. Bu metodun ters problemlere uygulanması ise Bukhgeim and Klibanov (1981) tarafından gerçekleştirilmiştir.

4.1 AĞIRLIK FONKSİYONU VE ÖZELLİKLERİ

Carleman değerlendirmesini ifade etmek için uygun bir φ ağırlık fonksiyonunu seçmek gerekir. (M, g), sınırı ∂M olan kompakt bir manifold olsun. M üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan ψ_0 pozitif ve düzgün bir fonksiyon olduğunu kabul edelim:

(A.1) ψ_0, g Riemann metriğine göre M üzerinde kesin olarak (strictly) konvekstir. Yani ψ_0 fonksiyonunun g Riemann metriğindeki Hessian matrisi $\bar{M}$ üzerinde pozitiftir:

$$D^2\psi_0(X, X)(x) > 0,\ x \in M,\ X \in T_xM\backslash\{0\}.$$

M kompakt olduğundan bir $\varrho > 0$ sabiti vardır öyle ki

$$D^2\psi_0(X, X)(x) > 2\varrho\,|X|^2,\ x \in \bar{M},\ X \in T_xM\backslash\{0\} \tag{4.2}$$

sağlanır.

(A.2) $\psi_0(x)$ fonksiyonu M üzerinde kritik bir noktaya sahip değildir:

$$\min_{x\in M} |\nabla\psi_0(x)| > 0. \tag{4.3}$$

(A.3) Bir $\Gamma_0 \subset \partial M$ altsınırı (A.1)-(A.2) şartları altında

$$\{x \in \partial M; \partial_v\psi_0 \geq 0\} \subset \Gamma_0 \tag{4.4}$$

geometrik koşulunu sağlasın.

$$Q = M \times (0, T),\ \Sigma = \partial M \times (0, T),\ \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T)$$

ve

$$\psi(t, x) = \psi_0(x) - \beta(t - t_0)^2 + \beta_0,\ 0 < \beta < \varrho,\ 0 < t_0 < T,\ \beta_0 \geq 0 \tag{4.5}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada ϱ sabiti (4.2) de verilmiştir. Bir β_0 parametresi seçelim öyle ki (4.5) tarafından verilen ψ fonksiyonu pozitif olsun. $\varphi : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olacak şekilde

$$\varphi(x, t) = e^{\gamma\psi(x,t)} \tag{4.6}$$

ağırlık fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $\gamma > 0$ ikinci büyük parametredir. Ayrıca

$$\sigma(t, x) = s\gamma\varphi(t, x) \tag{4.7}$$

şeklinde alalım. Burada s birinci büyük parametre olarak alınmış reel bir sayıdır. Ön hazırlık olarak φ ağırlık fonksiyonunun daha sonra yararlanacağımız bazı temel özelliklerini gösterelim.

Lemma 4.1 *φ, (4.6) tarafından verilen ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda*

$$\varphi' = \gamma\varphi\psi', \ \nabla\varphi = \gamma\varphi\nabla\psi, \tag{4.8}$$

$$\varphi'' = \gamma\varphi(\psi'' + \gamma\,|\psi'|^2), \ \Delta_g\varphi = \gamma\varphi(\Delta_g\psi + \gamma\,|\nabla\psi|^2), \tag{4.9}$$

$$D^2\varphi(\nabla z, \nabla z) = \gamma\varphi(D^2\psi(\nabla z, \nabla z) + \gamma\,|\langle\nabla z, \nabla\psi\rangle|^2) \tag{4.10}$$

olur. Buna ek olarak bir $C > 0$ sabiti vardır öyle ki

$$\left|(\partial_t^2 - \Delta_g)^2\varphi(t,x)\right| \leq C\gamma^3\varphi(t,x), \ \textit{her} \ (t,x) \in Q \tag{4.11}$$

dir.

İspat.

$$D^2\psi(X,X) = X(\langle X, \nabla\psi\rangle) - \frac{1}{2}\nabla\psi(|X|^2)$$

eşitliği kullanılarak herhangi bir X vektör alanı için

$$\begin{aligned} D^2\varphi(X,X) &= X(\langle X, \nabla(e^{\gamma\psi})\rangle) - \frac{1}{2}\nabla(e^{\gamma\psi})(|X|^2) \\ &= X(\gamma\varphi\langle X, \nabla\psi\rangle) - \frac{1}{2}\gamma\varphi\nabla\psi(|X|^2) \\ &= \gamma\varphi(X(\langle X, \nabla\psi\rangle) - \frac{1}{2}\nabla\psi(|X|^2)) + \gamma\langle X, \nabla\psi\rangle X(\varphi) \\ &= \gamma\varphi D^2\psi(X,X) + \gamma^2\varphi\,|\langle X, \nabla\psi\rangle|^2 \end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir. $X = \nabla z$ alınarak (4.10) elde edilir. Son olarak benzer hesaplamalar yardımıyla (4.11) olduğu gösterilir. ■

4.2 CARLEMAN DEĞERLENDİRMELERİNİN ELDE EDİLİŞİ

Bu bölümde

$$P(x,\partial) = \partial_t^2 - \Delta_g \tag{4.13}$$

formundaki ikinci mertebeden bir hiperbolik operatörü ele alacağız. Carleman değerlendirmesini ispat etmek için ilk adım üstel ağırlık fonksiyonuna göre P operatörünün eşleniğini hesaplamaktır. (4.1) formundaki bir Carleman değerlendirmesini elde etmek için

$$e^{s\varphi}P(x,\partial)u = P_s(t,x,\partial)z \tag{4.14}$$

eşitliği kullanılır. Burada P_s,

$$P_s(t,x,\partial) = e^{s\varphi} P(x,\partial) e^{-s\varphi}$$

olarak tanımlı ikinci mertebeden diferensiyel operatördür. Ayrıca

$$z(t,x) = e^{s\varphi} u(x,t), \ (t,x) \in Q \tag{4.15}$$

şeklinde yeni bir fonksiyon tanımlayalım. Diğer taraftan

$$e^{s\varphi}\partial_t(e^{-s\varphi} z) = z' - s\varphi' z \text{ ve } e^{s\varphi}\nabla(e^{-z\varphi} z) = \nabla z - sz\nabla\varphi \tag{4.16}$$

olduğundan

$$P_s(t,x,\partial)z = P_s^+ z + P_s^- z = G_s \tag{4.17}$$

kolayca elde edilir. Burada P_s^+ ve P_s^- sırasıyla

$$\begin{aligned} P_s^+ z &= z'' - \Delta_g z + s^2(|\varphi'|^2 - |\nabla\varphi|^2)z, \\ P_s^- z &= -2s(z'\varphi' - \langle \nabla z, \nabla\varphi \rangle) - s(\varphi'' - \Delta_g \varphi)z \end{aligned} \tag{4.18}$$

şeklindedir ve

$$G_s = e^{s\varphi} F \tag{4.19}$$

dir. Burada (4.1) formunda bir değerlendirme elde etmek için P_s operatörünü göz önünde bulundurmak yeterlidir. Önceki notasyonlar kullanılarak

$$\left\|P_s^+ z\right\|^2 + \left\|P_s^- z\right\|^2 + 2(P_s^+ z, P_s^- z) = \|G_s\|^2 \tag{4.20}$$

yazılabilir. Şimdi $2(P_s^+ z, P_s^- z)$ ifadesini hesaplayalım. Bunun için $(P_s^+ z, P_s^- z)$ de ortaya çıkan altı adet terim uzay ve zaman değişkenine göre kısmi integrasyon uygulanarak değerlendirilir.

Lemma 4.2 *φ, Q da düzgün bir fonksiyon olsun. Bu durumda herhangi bir $z \in H^2(Q)$ için*

$$z(x,\tau) = z'(x,\tau) = 0, \ \tau = 0, T \tag{4.21}$$

olmak üzere aşağıdaki özdeşlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
(P_s^+ z, P_s^- z) &= 2s\int\limits_Q (\varphi'' \left|z'\right|^2 - 2z'\langle\nabla z, \nabla\varphi'\rangle + D^2\varphi(\nabla z, \nabla z))dv_g dt \\
&\quad +2s^3\int\limits_Q \left|z\right|^2 (\left|\varphi'\right|^2 \varphi'' + D^2\varphi(\nabla\varphi, \nabla\varphi) - 2\varphi'\langle\nabla\varphi, \nabla\varphi'\rangle)dv_g dt \\
&\quad -\frac{s}{2}\int\limits_Q \left|z\right|^2 (\partial_t^2 - \Delta_g)^2\varphi dv_g dt + B_0.
\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}
B_0 &= s\int\limits_\Sigma (\partial_v\varphi \left|\nabla z\right|^2 - 2\langle\nabla z, \nabla\varphi\rangle\partial_v z)d\sigma_g dt + s\int\limits_\Sigma (2\varphi' z'\partial_v z - \left|z'\right|^2 \partial_v\varphi)d\sigma_g dt \\
&\quad +s\int\limits_\Sigma (z\partial_v z(\varphi'' - \Delta_g\varphi) + s^2\partial_v\varphi \left|z\right|^2 (\left|\varphi'\right|^2 - \left|\nabla\varphi\right|^2) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left|z\right|^2 \partial_v(\varphi'' - \Delta\varphi))d\sigma_g dt \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

şeklinde olup sınır üzeri integralleri içerir.

İspat. (4.18) kullanılarak

$$\begin{aligned}
(P_s^+ z, P_s^- z) &= -2s\int\limits_Q z''(z'\varphi' - \langle\nabla z, \nabla\varphi\rangle)dv_g dt - s\int\limits_Q z''(\varphi'' - \Delta_g\varphi)z dv_g dt \\
&\quad +2s\int\limits_Q \Delta_g z(z'\varphi' - \langle\nabla z, \nabla\varphi\rangle)dv_g dt + s\int\limits_Q \Delta_g z(\varphi'' - \Delta_g\varphi)z dv_g dt \\
&\quad -2s^3\int\limits_Q (\left|\varphi'\right|^2 - \left|\nabla\varphi\right|^2)z(z'\varphi' - \langle\nabla z, \nabla\varphi\rangle)dv_g dt \\
&\quad -s^3\int\limits_Q (\left|\varphi'\right|^2 - \left|\nabla\varphi\right|^2)z(\varphi'' - \Delta_g\varphi)\left|z\right|^2 dv_g dt \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

$$:= \sum_{i=1}^{6} I_i$$

elde edilir. Şimdi de I_1, I_2,..., I_6 ifadelerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
I_1 &= -2s\int\limits_Q z''(z'\varphi' - \langle\nabla z, \nabla\varphi\rangle)dv_g dt \\
&= -2s\int\limits_Q z''z'\varphi' dv_g dt + 2s\int\limits_Q z''\langle\nabla z, \nabla\varphi\rangle dv_g dt \\
&= -s\int\limits_Q \partial_t(|z'|^2)\varphi' dv_g dt - 2s\int\limits_Q z'(\langle\nabla z', \nabla\varphi\rangle + \langle\nabla z, \nabla\varphi'\rangle\, dv_g dt + 2s\int\limits_M z'\langle\nabla\varphi, \nabla z\rangle dv_g dt \\
&= -s\int\limits_Q \partial_t\left|z'\right|^2\varphi' dv_g dt - s\int\limits_Q \left\langle\nabla\left|z'\right|^2, \nabla\varphi\right\rangle dv_g dt - 2s\int\limits_Q z'\langle\nabla\varphi', \nabla z\rangle dv_g dt \\
&= -s\int\limits_M \left|z'\right|^2\varphi' dv dt + s\int\limits_Q \left|z'\right|^2\varphi'' dv dt + s\int\limits_Q \left|z'\right|^2\Delta\varphi dv dt \\
&\quad -s\int\limits_\Sigma \partial_v\varphi\left|z'\right|^2 d\sigma dt - 2s\int\limits_Q z'\langle\nabla\varphi', \nabla z\rangle dv_g dt \\
&= s\int\limits_Q \left|z'\right|^2(\varphi'' + \Delta_g\varphi)dv_g dt - 2s\int\limits_Q z'\langle\nabla\varphi', \nabla z\rangle dv_g dt - s\int\limits_\Sigma \partial_v\varphi\left|z'\right|^2 d\sigma_g dt \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
I_2 &= -s\int\limits_Q z''(\varphi'' - \Delta_g\varphi)z dv_g dt \\
&= -s\int\limits_M z'(\varphi'' - \Delta\varphi)z dv dt + s\int\limits_Q z'\partial_t[(\varphi'' - \Delta_g\varphi)z]dv_g dt \\
&= s\int\limits_Q z'[z'(\varphi'' - \Delta_g\varphi) + (\partial_t^2 - \Delta_g)\varphi' z]dv_g dt \\
&= s\int\limits_Q \left|z'\right|^2(\varphi'' - \Delta_g\varphi)dv_g dt + \frac{s}{2}\int\limits_Q \partial_t\left|z\right|^2(\partial_t^2 - \Delta_g)\varphi' dv_g dt \\
&= s\int\limits_Q \left|z'\right|^2(\varphi'' - \Delta_g\varphi)dv_g dt - \frac{s}{2}\int\limits_Q \left|z\right|^2(\partial_t^2 - \Delta_g)\varphi'' dv_g dt \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna ek olarak, Green formülü ve kısmi integrasyon yardımıyla

$$\begin{aligned}
I_3 &= 2s\int\limits_Q \Delta_g z(z'\varphi' - \langle\nabla z, \nabla\varphi\rangle)dv_g dt \\
&= 2s\int\limits_Q \Delta_g z z'\varphi' dv_g dt - 2s\int\limits_Q \Delta_g z\langle\nabla z, \nabla\varphi\rangle dv_g dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2s\int\limits_Q \langle\nabla z, \nabla(z'\varphi')\rangle dv_g dt - 2s\int\limits_\Sigma \partial_v z(z'\varphi')d\sigma dt \\
&\quad +2s\int\limits_Q \langle\nabla z, \nabla(\langle\nabla z, \nabla\varphi\rangle)\rangle dv_g dt - 2s\int\limits_\Sigma \partial_v z\langle\nabla z, \nabla\varphi\rangle d\sigma_g dt \\
&= -2s\int\limits_Q \langle\nabla z, \nabla z'\rangle\varphi' dv_g dt - 2s\int\limits_Q \langle\nabla z, \nabla\varphi'\rangle z' dv_g dt \\
&\quad +2s\int\limits_Q \langle\nabla z, \nabla(\langle\nabla z, \nabla\varphi\rangle)\rangle dv_g dt + 2s\int\limits_\Sigma \partial_v z(z'\varphi' - \langle\nabla z, \nabla\varphi\rangle)d\sigma_g dt \\
&= -s\int\limits_M |\nabla z|^2 \varphi' dv_g dt + s\int\limits_Q |\nabla z|^2 \varphi'' dv_g dt - 2s\int\limits_Q \langle\nabla z, \nabla\varphi'\rangle z' dv_g dt \\
&\quad +2s\int\limits_Q \langle\nabla z, \nabla(\langle\nabla z, \nabla\varphi\rangle)\rangle dv_g dt + 2s\int\limits_\Sigma \partial_v z(z'\varphi' - \langle\nabla z, \nabla\varphi\rangle)d\sigma_g dt \\
&= s\int\limits_Q |\nabla z|^2 \varphi'' dv_g dt - 2s\int\limits_Q \langle\nabla z, \nabla\varphi'\rangle z' dv_g dt + 2s\int\limits_Q D^2\varphi(\nabla z, \nabla z) dv_g dt \\
&\quad +s\int\limits_Q \langle\nabla\varphi, \nabla(|\nabla z|^2)\rangle dv_g dt + 2s\int\limits_\Sigma \partial_v z(z'\varphi' - \langle\nabla z, \nabla\varphi\rangle)d\sigma dt \\
&= s\int\limits_Q (|\nabla z|^2 \varphi'' - 2\langle\nabla z, \nabla\varphi'\rangle z' + 2\langle\nabla z, \nabla(\langle\nabla z, \nabla\varphi\rangle)\rangle) dv_g dt \\
&\quad +2s\left[\int\limits_\Sigma \partial_v z(z'\varphi' - \langle\nabla z, \nabla\varphi\rangle)d\sigma_g dt\right]
\end{aligned}$$

bulunur. ■

Lemma 4.3 *X ve Z düzgün reel vektör alanları olsun. Bu durumda*

$$X(\langle Z, X\rangle) = DZ(X, X) + \frac{1}{2}Z(|X|^2)$$

özdeşliği sağlanır.

$Z = \nabla z$ için lemma 4.3 ten

$$\langle\nabla z, \nabla(\langle\nabla z, \nabla\varphi\rangle)\rangle = D^2\varphi(\nabla z, \nabla z) + \frac{1}{2}\langle\nabla\varphi, \nabla(|\nabla z|^2)\rangle$$

elde edilir. Öyleyse

$$\begin{aligned}
I_3 &= s\int\limits_Q (|\nabla z|^2 (\varphi'' - \Delta_g\varphi) - 2z'\langle\nabla z, \nabla\varphi'\rangle + 2D^2\varphi(\nabla z, \nabla z)) dv_g dt \\
&\quad + \left[s\int\limits_\Sigma (2\partial_v z(z'\varphi' - \langle\nabla z, \nabla\varphi\rangle) + \partial_v\varphi\,|\nabla z|^2) d\sigma_g dt\right] \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

şeklinde sonuçlandırılır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
I_4 &= s\int_Q \Delta_g z(\varphi'' - \Delta_g\varphi)zdv_gdt \\
&= -s\int_Q \langle \nabla z, \nabla((\varphi'' - \Delta_g\varphi)z)\rangle dv_gdt + s\int_\Sigma \partial_v z(\varphi'' - \Delta\varphi)zd\sigma dt \\
&= -s\int_Q (z\langle \nabla z, \nabla(\varphi'' - \Delta_g\varphi)\rangle - (\varphi'' - \Delta_g\varphi)\langle \nabla z, \nabla z\rangle)dv_gdt \\
&\quad + s\int_\Sigma \partial_v z(\varphi'' - \Delta_g\varphi)zd\sigma dt \\
&= -s\int_Q (\frac{1}{2}\langle \nabla(|z|^2), \nabla(\varphi'' - \Delta_g\varphi)\rangle + (\varphi'' - \Delta_g\varphi)\,|\nabla z|^2)dv_gdt \\
&\quad + \int_\Sigma \partial_v z(\varphi'' - \Delta_g\varphi)zd\sigma dt \\
&= \frac{1}{2}s\int_Q |z|^2\,\Delta_g(\varphi'' - \Delta_g\varphi)dv_gdt - \frac{1}{2}s\int_\Sigma \partial_v(\varphi'' - \Delta_g\varphi)\,|z|^2\,d\sigma dt \\
&\quad - s\int_Q (\varphi'' - \Delta_g\varphi)\,|\nabla z|^2\,dv_gdt + s\int_\Sigma \partial_v z(\varphi'' - \Delta_g\varphi)zd\sigma dt \\
&= -s\left[\int_Q |\nabla z|^2\,(\varphi'' - \Delta_g\varphi) - \frac{1}{2}\,|z|^2\,\Delta_g(\varphi'' - \Delta_g\varphi)\right]dv_gdt \\
&\quad - s\int_\Sigma \left[\partial_v z(\varphi'' - \Delta_g\varphi)z - \frac{1}{2}\,|z|^2\,\partial_v(\varphi'' - \Delta_g\varphi)\right]d\sigma dt \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Benzer işlemler uygulayarak

$$\begin{aligned}
I_5 &= -2s^3\int_Q (|\varphi'|^2 - |\nabla\varphi|^2)z(z'\varphi' - \langle \nabla z, \nabla\varphi\rangle))dv_gdt \\
&= -s^3\int_Q \partial_t(|z|^2)\varphi' - \langle \nabla(|z|^2), \nabla\varphi\rangle)(|\varphi'|^2 - |\nabla\varphi|^2)dv_gdt \\
&= -s^3\int_Q \partial_t(|z|^2)\varphi'(|\varphi'|^2 - |\nabla\varphi|^2)dv_gdt + s^3\int_Q \langle \nabla(|z|^2), \nabla\varphi\rangle(|\varphi'|^2 - |\nabla\varphi|^2)dv_gdt \\
&= s^3\int_Q |z|^2\,\varphi''(|\varphi'|^2 - |\nabla\varphi|^2)dv_gdt + s^3\int_Q |z|^2\,\varphi'\partial_t(|\varphi'|^2 - |\nabla\varphi|^2)dv_gdt \\
&\quad - s^3\int_Q \Delta_g\varphi\,|z|^2\,(|\varphi'|^2 - |\nabla\varphi|^2)dv_gdt - s^3\int_\Sigma \partial_v\varphi\,|z|^2\,(|\varphi'|^2 - |\nabla\varphi|^2)d\sigma_gdt \\
&\quad - s^3\int_M |z|^2\,\varphi'(|\varphi'|^2 - |\nabla\varphi|^2)dv_gdt - s^3\int_Q \left\langle |z|^2\,\nabla(|\varphi'|^2 - |\nabla\varphi|^2), \nabla\varphi\right\rangle dv_gdt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= s^3\int_Q |z|^2(\varphi''-\Delta_g\varphi)(|\varphi'|^2-|\nabla\varphi|^2)dv_gdt \\
&\quad +s^3\int_Q |z|^2\Big[(\varphi'\partial_t(|\varphi'|^2-|\nabla\varphi|^2)-\langle\nabla(|\varphi'|^2-|\nabla\varphi|^2,\nabla\varphi\rangle\Big]dv_gdt \\
&\quad -s^3\int_\Sigma \partial_v\varphi\,|z|^2(|\varphi'|^2-|\nabla\varphi|^2)d\sigma_gdt \\
&= s^3\int_Q |z|^2(\varphi''-\Delta_g\varphi)(|\varphi'|^2-|\nabla\varphi|^2)dv_gdt \\
&\quad +s^3\int_Q |z|^2(2|\varphi'|^2\varphi''-2\varphi'|\nabla\varphi||\nabla\varphi'|-\Big\langle\nabla|\varphi'|^2,\nabla\varphi\Big\rangle+\nabla\left\langle|\nabla\varphi|^2,\nabla\varphi\right\rangle)dvdt \\
&\quad -s^3\int_\Sigma \partial_v\varphi\,|z|^2(|\varphi'|^2-|\nabla\varphi|^2)d\sigma_gdt \\
&= s^3\int_Q |z|^2(\varphi''-\Delta_g\varphi)(|\varphi'|^2-|\nabla\varphi|^2)dv_gdt \\
&\quad +2s^3\int_Q |z|^2(|\varphi'|^2\varphi''-2\varphi'\langle\nabla\varphi,\nabla\varphi'\rangle+D^2\varphi\langle\nabla\varphi,\nabla\varphi\rangle)dv_gdt \\
&\quad -s^3\int_\Sigma \partial_v\varphi\,|z|^2(|\varphi'|^2-|\nabla\varphi|^2)d\sigma_gdt
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

bulunur. Son olarak

$$
I_6=-s^3\int_Q |z|^2(\varphi''-\Delta_g\varphi)(|\varphi'|^2-|\nabla\varphi|^2)dv_gdt \tag{4.29}
$$

olduğu görülür. O halde (4.24)-(4.29) eşitlikleri toplanarak

$$
\begin{aligned}
(P_s^+z,P_s^-z) &= s\int_Q |z'|^2(\varphi''+\Delta_g\varphi)dv_gdt-2s\int_Q z'\langle\nabla\varphi',\nabla z\rangle dv_gdt \\
&\quad -s\int_\Sigma \partial_v\varphi\,|z'|^2d\sigma_gdt+s\int_Q |z'|^2(\varphi''-\Delta_g\varphi)dv_gdt \\
&\quad -\frac{s}{2}\int_Q |z|^2(\partial_t^2-\Delta_g)\varphi''dv_gdt \\
&\quad +s\int_Q (|\nabla z|^2(\varphi''-\Delta_g\varphi)-2z'\langle\nabla z,\nabla\varphi'\rangle+2D^2\varphi(\nabla z,\nabla z))dv_gdt \\
&\quad -s\int_Q \left[|\nabla z|^2(\varphi''-\Delta_g\varphi)-\frac{1}{2}|z|^2\Delta_g(\varphi''-\Delta_g\varphi)\right]dv_gdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+s^3\int_Q |z|^2(\varphi''-\Delta_g\varphi)(|\varphi'|^2-|\nabla\varphi|^2)dv_g dt\\
&+2s^3\int_Q |z|^2(|\varphi'|^2\varphi''-2\varphi'\langle\nabla\varphi,\nabla\varphi'\rangle+D^2\varphi\langle\nabla\varphi,\nabla\varphi\rangle)dv_g dt\\
&-s^3\int_Q |z|^2(\varphi''-\Delta_g\varphi)(|\varphi'|^2-|\nabla\varphi|^2)dv_g dt\\
=\ & 2s\int_Q (\varphi''|z'|^2-2z'\langle\nabla z,\nabla\varphi'\rangle+D^2\varphi(\nabla z,\nabla z))dv_g dt\\
&+2s^3\int_Q |z|^2(|\varphi'|^2\varphi''+D^2\varphi(\nabla\varphi,\nabla\varphi)-2\varphi'\langle\nabla\varphi,\nabla\varphi'\rangle)dv_g dt\\
&-\frac{s}{2}\int_Q |z|^2(\partial_t^2-\Delta_g)^2\varphi dv_g dt+B_0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada B_0, (4.22) ile verilmiştir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.2.1 Ek Değerlendirme

Bu bölümde (P_s^+z, P_s^-z) ifadesi için bir alt sınır bulmak istiyoruz. Bunun için

$$(P_s^+z, P_s^-z) = J_1+J_2+J_3+B_0 \tag{4.30}$$

olarak alınır. Burada J_1, J_2, ve J_3

$$J_1 = 2s\int_Q (\varphi''|z'|^2-2z'\langle\nabla z,\nabla\varphi'\rangle+D^2\varphi(\nabla z,\nabla z))dv_g dt, \tag{4.31}$$

$$J_2 = 2s^3\int_Q |z|^2(|\varphi'|^2\varphi''+D^2\varphi(\nabla\varphi,\nabla\varphi)-2\varphi'\langle\nabla\varphi,\nabla\varphi'\rangle)dv_g dt, \tag{4.32}$$

$$J_3 = -\frac{s}{2}\int_Q |z|^2(\partial_t^2-\Delta_g)^2\varphi dv_g dt \tag{4.33}$$

şeklindedir.

$$b(\psi) = |\psi'|^2-|\nabla\psi|^2$$

olsun. Aşağıdaki işlemlerde s, γ ve z den bağımsız olan sabitleri göstermek için aynı C harfi kullanılacaktır. Bununla birlikte farklı durumlarda farklı değerlere sahip olabilirler.

Lemma 4.4 *φ, (4.6) ile verilen ağırlık fonksiyonu olsun ve yukarıda belirtilen (A.1) şartı sağlansın. Bu durumda bir $C>0$ sabiti vardır öyle ki herhangi bir $\varepsilon>0$ için $C_\varepsilon>0$*

vardır ve

$$\begin{aligned} J_1 + 2(\varrho+\beta)B_1 &\geq 2(\varrho-\beta)\int_Q \sigma(|z'|^2 + |\nabla z|^2)dv_g dt \\ & -C\left(\int_Q \sigma^3 |b(\psi)| |z|^2 dv_g dt + C_\varepsilon \int_Q \sigma^2 |z|^2 dv_g dt + \varepsilon \left\| P_s^+ z \right\|^2 \right) \quad (4.34) \end{aligned}$$

olur. Burada B_1 bir sınır terimi olup

$$B_1 = \int_\Sigma \sigma(\gamma \partial_v \psi |z|^2 - z\partial_v z) d\sigma_g dt$$

şeklindedir.

İspat. Lemma (4.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} J_1 &= 2s\int_Q (\varphi'' |z'|^2 - 2z'\langle \nabla z, \nabla \varphi' \rangle + D^2\varphi(\nabla z, \nabla z)) dv_g dt \\ &= 2s\int_Q \gamma\varphi(\psi'' + \gamma |\psi'|^2) |z'|^2 - 2z'\langle \nabla z, \nabla(\gamma\varphi\psi')\rangle \\ & \quad +\gamma\varphi(D^2\psi(\nabla z, \nabla z) + \gamma |\langle \nabla z, \nabla \psi\rangle|^2) dv_g dt \\ &= 2\int_Q \sigma(\psi'' |z'|^2 + D^2\psi(\nabla z, \nabla z) + \gamma(\psi z' + \langle \nabla z, \nabla \psi\rangle)^2) dv_g dt \quad (4.35) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$J_1 \geq 2\int_Q \sigma(D^2\psi(\nabla z, \nabla z) + \psi'' |z'|^2) dv_g dt \geq 4\varrho \int_Q \sigma |\nabla z|^2 dv_g dt - 4\beta \int_Q \sigma |z'|^2 dv_g dt \quad (4.36)$$

elde edilir. Böylece, (4.18) eşitliğinin ilk denklemi σz ile çarpılırsa ve kısmi integrasyon alınırsa

$$\begin{aligned} \int_Q P_s^+ z(\sigma z) dv_g dt &= \int_Q (\sigma z)(z'' - \Delta_g z + s^2(|\varphi'|^2 - |\nabla \varphi|^2)z) dv_g dt \\ &= \int_Q \sigma z z'' dv_g dt - \int_Q \sigma z \Delta_g z dv_g dt + s^2 \int_Q \sigma z^2 (|\varphi'|^2 - |\nabla\varphi|^2) dv_g dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_Q z'(\sigma z)_t dv_g dt + \int_Q \langle \nabla z, \nabla(\sigma z)\rangle dv_g dt - \int_\Sigma \partial_v z(\sigma z) d\sigma_g dt \\
&\quad + s^2 \int_Q \sigma z^2(|\gamma\varphi\psi'|^2 - |\gamma\varphi\nabla\psi|^2) dv_g dt + \int_M \sigma z z' dv dt \\
&= -\int_Q \sigma |z'|^2 dv_g dt - \frac{1}{2}\int_Q \sigma' \partial_t(|z|^2) dv dt \\
&\quad + \int_Q \sigma(\nabla z)^2 dv_g dt + \frac{1}{2}\int_Q \langle \nabla(|z|^2), \nabla\varphi\rangle dv_g dt \\
&\quad - \int_\Sigma \partial_v z(\sigma z) d\sigma_g dt + \int_Q \sigma^3 |z|^2 (|\psi'|^2 - |\nabla\psi|^2) dv_g dt \\
&= -\int_Q \sigma |z'|^2 dv_g dt - \frac{1}{2}\int_M |z'|^2 \sigma' dv_g dt + \frac{1}{2}\int_Q \sigma'' |z|^2 dv_g dt \\
&\quad + \int_Q \sigma |\nabla z|^2 dv_g dt - \frac{1}{2}\int_Q |z|^2 \Delta_g \sigma dv_g dt \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_\Sigma \partial_v \sigma(|z|^2) d\sigma_g dt - \int_\Sigma \partial_v z(\sigma z) d\sigma_g dt + \int_Q \sigma^3 b(\psi) |z|^2 dv_g dt \\
&= -\int_Q \sigma |z'|^2 dv_g dt + \frac{1}{2}\int_Q |z|^2 (\sigma'' - \Delta_g\sigma) dv_g dt + \int_Q \sigma |\nabla z|^2 dv_g dt \\
&\quad + \int_Q \sigma^3 b(\psi) |z|^2 dv_g dt + \left[\int_\Sigma \sigma(\gamma\partial_v\psi |z|^2 - z\partial_v z) d\sigma_g dt\right] \qquad (4.37)
\end{aligned}
$$

bulunur. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\sigma'' - \Delta_g\sigma &= (s\gamma\varphi)'' - \Delta_g(s\gamma\varphi) \\
&= s\gamma\varphi'' - \nabla\nabla(s\gamma\varphi) \\
&= s\gamma\left[\gamma\varphi(\psi'' + \gamma|\psi'|^2)\right] - \nabla(s\gamma(\gamma\varphi\nabla\psi)) \\
&= s\gamma^2\varphi(\psi'' + \gamma|\psi'|^2) - s\gamma^2(\nabla\varphi\nabla\psi + \varphi\Delta_g\psi) \\
&= \sigma\gamma\psi'' + \sigma\gamma^2|\psi'|^2 - \sigma\gamma^2|\Delta_g\psi|^2 - \sigma\gamma\Delta_g\psi \\
&= \sigma\gamma^2(|\psi|^2 - |\nabla\psi|^2) + \sigma\gamma(\psi'' - \Delta_g\psi)
\end{aligned}
$$

eşitliğinden bir $\varepsilon > 0$ için $C_\varepsilon > 0$ vardır öyle ki

$$
\begin{aligned}
\left|\int_Q \sigma |z'|^2 dv_g dt - B_1\right| &\le \int_Q \sigma^3 |z|^2 |b(\psi)| dv_g dt + \varepsilon \left\|P_s^+ z\right\|^2 \\
&\quad + \int_Q \sigma |\nabla z|^2 dv_g dt + C_\varepsilon \int_Q \sigma^2 |z|^2 dv_g dt \qquad (4.38)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. (4.38) ve (4.36) birleştirilirse

$$\begin{aligned} J_1+4\beta B_1 &\geq 4(\varrho-\beta)\int_Q \sigma\left|\nabla z\right|^2 dv_g dt \\ &\quad -C\left(\int_Q \sigma^3\left|z\right|^2\left|b(\psi)\right| dv_g dt+\varepsilon\left\|P_s^+ z\right\|^2+C_\varepsilon\int_Q \sigma^2\left|z\right|^2 dv_g dt\right) \qquad (4.39) \end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar (4.38) kullanılırsa

$$\begin{aligned} & 2(\varrho-\beta)\int_Q \sigma\left|z'\right|^2 dv_g dt-C\left(\int_Q \sigma^3\left|z\right|^2\left|b(\psi)\right| dv_g dt+\varepsilon\left\|P_s^+ z\right\|^2+C_\varepsilon\int_Q \sigma^2\left|z\right|^2 dv_g dt\right) \\ \leq\ & 2(\varrho-\beta)\int_Q \sigma\left|\nabla z\right|^2 dv_g dt+2(\varrho-\beta)B_1 \qquad (4.40) \end{aligned}$$

bulunur. (4.40) ve (4.39) birleştirilirse (4.34) elde edilir. ■

Lemma 4.5 *φ, (4.6) ile tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olsun ve (A.1) şartını sağlasın. Bu durumda öyle bir $C>0$ sabiti vardır ki aşağıdaki değerlendirme sağlanır:*

$$J_2 \geq 2\gamma\int_Q \sigma^3(b(\psi))^2\left|z\right|^2 dv_g dt+4\int_Q \sigma^3\left(\varrho\left|\nabla\psi\right|^2-\beta\left|\psi'\right|^2\right)\left|z\right|^2 dv_g dt. \qquad (4.41)$$

İspat. Lemma (4.2) kullanılarak

$$\begin{aligned} J_2 &= 2s^3\int_Q (\gamma\varphi)^3\left|\psi'\right|^2(\psi''+\gamma\left|\partial_t\psi\right|^2)\left|z\right|^2 dv_g dt-4s^3\int_Q \gamma^4\varphi^3\left|\psi'\right|^2\left|\nabla\psi\right|^2 dv_g dt \\ &\quad +2s^3\int_Q \gamma^3\varphi^3(D^2\psi(\nabla\psi,\nabla\psi)+\gamma\left|\nabla\psi\right|^4)\left|z\right|^2 dv_g dt \\ &= 2\int_Q \sigma^3(\psi''\left|\psi'\right|^2\left|z\right|^2+D^2\psi(\nabla\psi,\nabla\psi)\left|z\right|^2)dv_g dt+2\gamma\int_Q \sigma^3(b(\psi))^2\left|z\right|^2 dv_g dt \\ &\geq 2\gamma\int_Q \sigma^3(b(\psi))^2\left|z\right|^2 dv_g dt+4\int_Q \sigma^3(\varrho\left|\nabla\psi\right|^2-\beta\left|\psi'\right|^2)\left|z\right|^2 dv_g dt \qquad (4.42) \end{aligned}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Diğer taraftan (4.11) e göre

$$\left|J_3\right| \leq C\gamma^2\int_Q \sigma\left|z\right|^2 dv_g dt \leq C\gamma\int_Q \sigma^2\left|z\right|^2 dv_g dt \qquad (4.43)$$

bulunur. (4.43), Lemma (4.30) ve Lemma (4.31) den yola çıkılarak aşağıdaki lemma elde edilir:

Lemma 4.6 *φ, (4.6) ile tanımlanan bir ağırlık fonksiyonu olsun ve (A.1) şartını sağlasın. Bu durumda öyle bir $C>0$ sabiti vardır ki herhangi bir $\varepsilon>0$ için $C_\varepsilon>0$ vardır öyle ki*

$$\begin{aligned} J_1+J_2+J_3+2(\varrho+\beta)B_1 \quad \geq \quad & 2(\varrho-\beta)\int_Q \sigma(|\nabla z|^2+|z'|^2)dv_g dt \\ & +2\gamma\int_Q \sigma^3(b(\psi))^2|z|^2 dv_g dt \\ & +4\int_Q \sigma^3(\varrho|\nabla\psi|^2-\beta|\psi'|^2)|z|^2 dv_g dt \\ & -C(\int_Q \sigma^3|z|^2|b(\psi)|dv_g dt+\varepsilon\left\|P_s^+ z\right\|^2 \\ & +C_\varepsilon\gamma\int_Q \sigma^2|z|^2 dv_g dt) \end{aligned} \tag{4.44}$$

sağlanır.

Teorem 4.7 *Kabul edelim ki*

$$\sigma(t,x)=s\gamma\varphi(t,x)$$

olsun. Ayrıca (A.1) ve (A.2) şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda öyle $C>0$ ve $\gamma_*>0$ sabitleri vardır ki herhangi bir $\gamma>\gamma_*$ için $s_*=s_*(\gamma)$ vardır öyle ki $s\geq s_*$ için

$$z\in H^2(Q), \qquad z(0,\cdot)=z'(0,\cdot)=0, \qquad z(T,\cdot)=z'(T,\cdot)=0$$

olmak üzere

$$C\int_Q \sigma(|\nabla z|^2+|z'|^2+\sigma^2|z|^2)dv_g dt \leq \int_Q |P_s z|^2 dv_g dt - B \tag{4.45}$$

Carleman değerlendirmesi sağlanır. Burada

$$\begin{aligned} B \quad = \quad & \int_\Sigma \sigma(\partial_v\psi_0|\nabla z|^2-2\langle\nabla z,\nabla\psi_0\rangle\partial_v z)d\sigma_g dt+\int_\Sigma \sigma(2\psi' z'\partial_v z-|z'|^2\partial_v\psi_0)d\sigma_g dt \\ & +\int_\Sigma \sigma(z\partial_v z(-2\beta-\Delta_g\psi+\gamma b(\psi))+\sigma^2\partial_v\psi_0|z|^2 b(\psi) \\ & +\frac{1}{2}|z|^2\partial_v(\Delta_g\psi_0+\gamma|\nabla\psi_0|^2))d\sigma_g dt \\ & -2(\varrho+\beta)\left[\int_\Sigma \sigma(\gamma\partial_v\psi|z|^2-z\partial_v z)d\sigma_g dt\right] \end{aligned} \tag{4.46}$$

ile verilen bir sınır terimidir.

İspat. $\beta < \varrho$ olduğundan küçük $\eta > 0$ için

$$\beta(1+\eta) < \varrho \tag{4.47}$$

bulunur.

$$Q^\eta = \left\{(x,t) \in Q; |b(\psi)| \leq \eta \left|\nabla\psi\right|^2\right\}$$

kümesini göz önüne alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} J_1 + J_2 + J_3 + 2(\varrho+\beta)B_1 \;\geq\; & 2(\varrho-\beta)\int\limits_Q \sigma(\left|\nabla z\right|^2 + \left|z'\right|^2)dv_g dt \\ & +2\gamma \int\limits_{Q\backslash Q^\eta} \sigma^3 (b(\psi))^2 \left|z\right|^2 dv_g dt \\ & +4(\varrho - \beta(1+\eta))\int\limits_{Q^\eta} \sigma^3 \left|z\right|^2 \left|\nabla\psi\right|^2 dv_g dt \\ & -C\left(\begin{array}{c} \eta\int\limits_{Q^\eta} \sigma^3 \left|z\right|^2 dv_g dt \\ +\int\limits_{Q\backslash Q^\eta} \sigma^3 \left|z\right|^2 dv_g dt + \varepsilon \left\|P_s^+ z\right\|^2 \\ +C_\varepsilon \gamma \int\limits_Q \sigma^2 \left|z\right|^2 dv_g dt) \end{array}\right) \end{aligned} \tag{4.48}$$

elde edilir. (4.48) ve (A.2) şartı kullanılırsa

$$\begin{aligned} J_1 + J_2 + J_3 + 2(\varrho+\beta)B_1 \;\geq\; & \delta\int\limits_Q \sigma(\left|\nabla z\right|^2 + \left|z'\right|^2)dv_g dt + 2\gamma\eta^2 C_1 \int\limits_{Q\backslash Q^\eta} \sigma^3 \left|z\right|^2 dv_g dt \\ & +C_2(\varrho - \beta(1+\eta))\int\limits_{Q^\eta} \sigma^3 \left|z\right|^2 dv_g dt \\ & -C(\eta\int\limits_{Q^\eta} \sigma^3 \left|z\right|^2 dv_g dt + \int\limits_{Q\backslash Q^\eta} \sigma^3 \left|z\right|^2 dv_g dt + \varepsilon \left\|P_s^+ z\right\|^2 \\ & +\gamma\int\limits_Q \sigma^2 \left|z\right|^2 dv_g dt) \\ \geq\; & \delta\int\limits_Q \sigma(\left|\nabla z\right|^2 + \left|z'\right|^2)dv_g dt \\ & +(2\gamma\eta^2 C_1 - C)\int\limits_{Q\backslash Q^\eta} \sigma^3 \left|z\right|^2 dv_g dt \\ & +(C_2(\varrho - \beta(1+\eta)) - \eta C)\int\limits_{Q^\eta} \sigma^3 \left|z\right|^2 dv_g dt \\ & -C(\varepsilon \left\|P_s^+ z\right\|^2 + \gamma\int\limits_Q \sigma^2 \left|z\right|^2 dv_g dt) \end{aligned} \tag{4.49}$$

elde edilir. O halde küçük η, büyük $\gamma \geq \gamma_*$ ve $s \geq s_*(\gamma)$ için

$$J_1 + J_2 + J_3 + 2(\varrho + \beta)B_1 \geq \delta \int\limits_Q \sigma(|\nabla z|^2 + |z'|^2 + \sigma^2 |z|^2) dv_g dt - \frac{1}{4} \left\| P_s^+ z \right\|^2 \tag{4.50}$$

olur. (4.30) eşitliğinden

$$2(P_s^+ z, P_s^- z) - 2B \geq 2\delta \int\limits_Q \sigma(|\nabla z|^2 + |z'|^2 + \sigma^2 |z|^2) dv_g dt - \frac{1}{2} \left\| P_s^+ z \right\|^2 \tag{4.51}$$

bulunur. Burada $B = B_0 - 2(\varrho+\beta)B_1$ dır. Bu durumda $s_*(\gamma) > 0$ vardır öyle ki herhangi bir $s \geq s_*$ için

$$\|G_s\|^2 - 2B \geq C \int\limits_Q \sigma(|\nabla z|^2 + |z'|^2 + \sigma^2 |z|^2) dv_g dt \tag{4.52}$$

olup ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.1 *(A.1) ve (A.2) şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda öyle $C > 0$ ve $\gamma_* > 0$ sabitleri vardır ki herhangi bir $\gamma > \gamma_*$ için $s_* = s_*(\gamma)$ vardır öyle ki her $s \geq s_*$ için*

$$u \in H^2(Q), \qquad u(0,\cdot) = u'(0,\cdot) = 0, \qquad u(T,\cdot) = u'(T,\cdot) = 0$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} C\int\limits_Q e^{2s\varphi}\sigma(|\nabla u|^2 + |u'|^2 + \sigma^2 |u|^2) dv_g dt \;\; &\leq \;\; \int\limits_Q e^{2s\varphi} \left|(\partial_t^2 - \Delta_g)u\right|^2 dv_g dt \\ &\quad + \int\limits_\Sigma \sigma(|\nabla u|^2 + |u'|^2 + \sigma^2 |u|^2) e^{2s\varphi} d\sigma_g dt) \end{aligned} \tag{4.53}$$

Carleman değerlendirmesi sağlanır.

Sonuç 4.2 *(A.1), (A.2) ve (A.3) şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda öyle $C > 0$ ve $\gamma_* > 0$ sabitleri vardır ki herhangi bir $\gamma > \gamma_*$ için $s_* = s_*(\gamma)$ vardır öyle ki her $s \geq s_*$ için*

$$u \in H^2(Q), \qquad u(0,\cdot) = u'(0,\cdot) = 0, \qquad u(T,\cdot) = u'(T,\cdot) = 0$$

ve Σ üzerinde $u(t,x) = 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} C\int\limits_Q e^{2s\varphi}\sigma(|\nabla u|^2 + |u'|^2 + \sigma^2 |u|^2) dv_g dt \;\; &\leq \;\; \int\limits_Q e^{2s\varphi} \left|(\partial_t^2 - \Delta_g)u\right|^2 dv_g dt \\ &\quad + \int\limits_\Sigma \sigma(|\partial_v u|^2) e^{2s\varphi} d\sigma_g dt) \end{aligned} \tag{4.54}$$

Carleman değerlendirmesi sağlanır.

İspat. Eğer Σ üzerinde $u(t,x)=0$ ise bu durumda Σ üzerinde $z(t,x)=0$ olur ve B sınır terimi

$$B=-\int_{\Sigma}\sigma\left|\partial_v z\right|^2\partial_v\psi_0 d\sigma_g dt$$

şeklini alır. ■

BÖLÜM 5

ULTRAHİPERBOLİK DENKLEMLER İÇİN CARLEMAN DEĞERLENDİRMELERİ

Bir $\Omega = \{(x,y) : x \in D \subset \mathbb{R}^n, y \in G \subset \mathbb{R}^m\}$ bölgesinde

$$Lu \equiv \Delta_y u(x,y) - \Delta_x u(x,y) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y)\, u_{x_i} + \sum_{i=1}^{m} b_i(x,y)\, u_{y_i} + a_0(x,y)\, u(x,y) = f(x,y) \tag{5.1}$$

ultrahiperbolik denklemini göz önüne alalım.

Ω bölgesinin sınırını $\partial\Omega = \Gamma_x \cup \Gamma_y$ şeklinde ifade edelim. Burada $\Gamma_x = \partial D \times G$ ve $\Gamma_y = D \times \partial G$ biçimindedir. Ayrıca

$$L_0 u \equiv \Delta_y u(x,y) - \Delta_x u(x,y), \tag{5.2}$$

$$z(x,y) = e^{s\varphi(x,y)} u(x,y), \tag{5.3}$$

$$Pz(x,y) = e^{s\varphi} L_0 u, \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= e^{\gamma\psi(x,y)}, \\ \psi(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_i^0\right)^2 - \beta \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - y_i^0\right)^2 \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. (5.2)-(5.4) eşitliklerinden

$$P^+ z = \Delta_y z - \Delta_x z + s^2 \left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2\right) z, \tag{5.5}$$

$$P^- z = -2s\left(\langle \nabla_y \varphi, \nabla_y z\rangle - \langle \nabla_x \varphi, \nabla_x z\rangle\right) - s\left(\Delta_y \varphi - \Delta_x \varphi\right) z \tag{5.6}$$

olmak üzere

$$Pz = P^+ z + P^- z, \tag{5.7}$$

bulunur. (5.5) ve (5.6) eşitlikleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -2s\int_\Omega \Delta_y z\left(\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y z\rangle-\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x z\rangle\right)dxdy,\\
I_2 &= -s\int_\Omega \Delta_y z\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)zdxdy,\\
I_3 &= 2s\int_\Omega \Delta_x z\left(\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y z\rangle-\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x z\rangle\right)dxdy,\\
I_4 &= s\int_\Omega \Delta_x z\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)zdxdy,\\
I_5 &= -2s^3\int_\Omega\left(|\nabla_y\varphi|^2-|\nabla_x\varphi|^2\right)z\left(\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y z\rangle-\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x z\rangle\right)dxdy,\\
I_6 &= -s^3\int_\Omega\left(|\nabla_y\varphi|^2-|\nabla_x\varphi|^2\right)\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)|z|^2dxdy
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\left(P^+z,P^-z\right)=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6,
$$

elde edilir. Şimdi, kısmi integrasyon yardımıyla, ilgili sınır koşullarını da dikkate alarak $I_k,\ k=1,...,6$ terimlerini değerlendirelim:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -2s\int_\Omega \Delta_y z\left(\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y z\rangle-\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x z\rangle\right)dxdy\\
&= 2s\int_\Omega \nabla_y z\nabla_y\left(\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y z\rangle\right)dxdy-2s\int_{\Gamma_y}\partial_\nu z\left\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y z\right\rangle d\sigma_2dx\\
&\quad -2s\int_\Omega \nabla_y z\nabla_y\left(\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x z\rangle\right)dxdy+2s\int_{\Gamma_y}\partial_\nu z\left\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x z\right\rangle d\sigma_2dx\\
&= 2s\sum_{k,j=1}^m\int_\Omega z_{y_k}\left(\varphi_{y_j}z_{y_j}\right)_{y_k}dxdy-2s\int_{\Gamma_y}\partial_\nu z\left\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y z\right\rangle d\sigma_2dx\\
&\quad -2s\sum_{k=1}^m\sum_{j=1}^n\int_\Omega z_{y_k}\left(\varphi_{x_j}z_{x_j}\right)_{y_k}dxdy+2s\int_{\Gamma_y}\partial_\nu z\left\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x z\right\rangle d\sigma_2dx\\
&= 2s\sum_{k,j=1}^m\int_\Omega z_{y_k}z_{y_j}\varphi_{y_jy_k}dxdy+s\sum_{k,j=1}^m\int_\Omega\left(|z_{y_k}|^2\right)_{y_j}\varphi_{y_j}dxdy\\
&\quad -2s\int_{\Gamma_y}\partial_\nu z\left\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y z\right\rangle d\sigma_2dx-2s\sum_{k=1}^m\sum_{j=1}^n\int_\Omega z_{y_k}z_{x_j}\varphi_{x_jy_k}dxdy\\
&\quad -s\sum_{k=1}^m\sum_{j=1}^n\int_\Omega\left(|z_{y_k}|^2\right)_{x_j}\varphi_{x_j}dxdy+2s\int_{\Gamma_y}\partial_\nu z\left\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x z\right\rangle d\sigma_2dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2s\sum_{k,j=1}^{m}\int_{\Omega} z_{y_k} z_{y_j}\varphi_{y_j y_k} dxdy - s\int_{\Omega}\left|\nabla_y z\right|^2 \Delta_y\varphi dxdy \\
&\quad -2s\int_{\Gamma_y}\partial_\nu z\left\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y z\right\rangle d\sigma_2 dx + s\int_{\Gamma_y}\partial_\nu\varphi\left|\nabla_y z\right|^2 d\sigma_2 dx \\
&\quad -2s\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega} z_{y_k} z_{x_j}\varphi_{x_j y_k} dxdy + s\int_{\Omega}\left|\nabla_y z\right|^2 \Delta_x\varphi dxdy \\
&\quad +2s\int_{\Gamma_y}\partial_\nu z\left\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x z\right\rangle d\sigma_2 dx - s\int_{\Gamma_x}\partial_\nu\varphi\left|\nabla_y z\right|^2 d\sigma_1 dy \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

bulunur. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -s\int_{\Omega}\Delta_y z\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right) z dxdy \\
&= s\int_{\Omega}\nabla_y z\nabla_y\left(\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right) z\right) dxdy - s\int_{\Gamma_y}\partial_\nu z\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right) z d\sigma_2 dx \\
&= s\int_{\Omega}\left|\nabla_y z\right|^2\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right) dxdy + \frac{s}{2}\int_{\Omega}\nabla_y\left(|z|^2\right)\nabla_y\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right) dxdy \\
&\quad -s\int_{\Gamma_y}\partial_\nu z\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right) z d\sigma_2 dx \\
&= s\int_{\Omega}\left|\nabla_y z\right|^2\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right) dxdy - \frac{s}{2}\int_{\Omega}|z|^2\Delta_y\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right) dxdy \\
&\quad -s\int_{\Gamma_y}\partial_\nu z\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right) z d\sigma_2 dx + \frac{s}{2}\int_{\Gamma_y}\partial_\nu\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)|z|^2 d\sigma_2 dx \qquad (5.9)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Buna ek olarak, Green formülü ve kısmi integrasyon yardımıyla

$$
\begin{aligned}
I_3 &= 2s\int_{\Omega}\Delta_x z\left\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y z\right\rangle dxdy - 2s\int_{\Omega}\Delta_x z\left\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x z\right\rangle dxdy \\
&= -2s\int_{\Omega}\nabla_x z\nabla_x\left(\left\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y z\right\rangle\right) dxdy + 2s\int_{\Gamma_x}\partial_\nu z\left\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y z\right\rangle d\sigma_1 dy \\
&\quad +2s\int_{\Omega}\nabla_x z\nabla_x\left(\left\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x z\right\rangle\right) dxdy - 2s\int_{\Gamma_x}\partial_\nu z\left\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x z\right\rangle d\sigma_1 dy \\
&= -2s\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\int_{\Omega} z_{x_k}\left(\varphi_{y_j} z_{y_j}\right)_{x_k} dxdy + 2s\sum_{k,j=1}^{n}\int_{\Omega} z_{x_k}\left(\varphi_{x_j} z_{x_j}\right)_{x_k} dxdy \\
&\quad +2s\int_{\Gamma_x}\partial_\nu z\left\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y z\right\rangle d\sigma_1 dy - 2s\int_{\Gamma_x}\partial_\nu z\left\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x z\right\rangle d\sigma_1 dy \\
&= -2s\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\int_{\Omega} z_{x_k} z_{y_j}\varphi_{y_j x_k} dxdy - s\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\int_{\Omega}\left(\left|z_{x_k}\right|^2\right)_{y_j}\varphi_{y_j} dxdy \\
&\quad +2s\sum_{k,j=1}^{n}\int_{\Omega} z_{x_k} z_{x_j}\varphi_{x_j x_k} dxdy + s\sum_{k,j=1}^{n}\int_{\Omega}\left(\left|z_{x_k}\right|^2\right)_{x_j}\varphi_{x_j} dxdy \\
&\quad +2s\int_{\Gamma_x}\partial_\nu z\left\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y z\right\rangle d\sigma_1 dy - 2s\int_{\Gamma_x}\partial_\nu z\left\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x z\right\rangle d\sigma_1 dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -2s\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\int_{\Omega} z_{x_k} z_{y_j}\varphi_{y_j x_k}dxdy + s\int_{\Omega}\left|\nabla_x z\right|^2\Delta_y\varphi dxdy \\
&\quad -s\int_{\Gamma_y}\partial_\nu\varphi\left|\nabla_x z\right|^2 d\sigma_2 dx - s\int_{\Omega}\left|\nabla_x z\right|^2\Delta_x\varphi dxdy \\
&\quad +s\int_{\Gamma_x}\partial_\nu\varphi\left|\nabla_x z\right|^2 d\sigma_1 dy + 2s\sum_{k,j=1}^{n}\int_{\Omega} z_{x_k} z_{x_j}\varphi_{x_j x_k}dxdy \\
&\quad +2s\int_{\Gamma_x}\partial_\nu z\left\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y z\right\rangle d\sigma_1 dy - 2s\int_{\Gamma_x}\partial_\nu z\left\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x z\right\rangle d\sigma_1 dy
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
I_4 &= s\int_{\Omega}\Delta_x z\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)zdxdy \\
&= -s\int_{\Omega}\nabla_x z\nabla_x\left(\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)z\right)dxdy + s\int_{\Gamma_x}\partial_\nu z\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)zd\sigma_1 dy \\
&= -s\int_{\Omega}\left|\nabla_x z\right|^2\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)dxdy - \frac{s}{2}\int_{\Omega}\nabla_x\left(|z|^2\right)\nabla_x\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)dxdy \\
&\quad +s\int_{\Gamma_x}\partial_\nu z\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)zd\sigma_1 dy \\
&= -s\int_{\Omega}\left|\nabla_x z\right|^2\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)dxdy + \frac{s}{2}\int_{\Omega}|z|^2\Delta_x\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)dxdy \\
&\quad +s\int_{\Gamma_x}\partial_\nu z\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)zd\sigma_1 dy - \frac{s}{2}\int_{\Gamma_x}\partial_\nu\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)|z|^2 d\sigma_1 dy
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

olarak hesaplanır. Benzer işlemler uygulanarak

$$
\begin{aligned}
I_5 &= -2s^3\int_{\Omega}\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)z\left(\left\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y z\right\rangle-\left\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x z\right\rangle\right)dxdy \\
&= -s^3\int_{\Omega}\left(\left\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y\left(|z|^2\right)\right\rangle-\left\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x\left(|z|^2\right)\right\rangle\right)\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)dxdy \\
&= -s^3\int_{\Omega}\left\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y\left(|z|^2\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)\right)\right\rangle dxdy \\
&\quad +s^3\int_{\Omega}\left\langle\nabla_y\varphi,|z|^2\nabla_y\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)\right\rangle dxdy \\
&\quad +s^3\int_{\Omega}\left\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x\left(|z|^2\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)\right)\right\rangle dxdy \\
&\quad -s^3\int_{\Omega}\left\langle\nabla_x\varphi,|z|^2\nabla_x\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)\right\rangle dxdy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= s^3\int_{\Omega}|z|^2\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)\Delta_y\varphi dxdy \\
&\quad -s^3\int_{\Gamma_y}\partial_\nu\varphi|z|^2\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)d\sigma_2 dx \\
&\quad +s^3\int_{\Omega}|z|^2\left\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)\right\rangle dxdy \\
&\quad -s^3\int_{\Omega}|z|^2\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)\Delta_x\varphi dxdy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+s^3 \int_{\Gamma_x} \partial_\nu \varphi \, |z|^2 \left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2 \right) d\sigma_1 dy \\
&-s^3 \int_\Omega |z|^2 \left\langle \nabla_x \varphi, \nabla_x \left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2 \right) \right\rangle dxdy \\
= \; & s^3 \int_\Omega |z|^2 \left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2 \right) \left(\Delta_y \varphi - \Delta_x \varphi \right) dxdy \\
&+s^3 \int_\Omega |z|^2 \left\langle \nabla_y \varphi, \nabla_y \left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2 \right) \right\rangle dxdy \\
&-s^3 \int_\Omega |z|^2 \left\langle \nabla_x \varphi, \nabla_x \left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2 \right) \right\rangle dxdy \\
&-s^3 \int_{\Gamma_y} \partial_\nu \varphi \, |z|^2 \left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2 \right) d\sigma_2 dx \\
&+s^3 \int_{\Gamma_x} \partial_\nu \varphi \, |z|^2 \left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2 \right) d\sigma_1 dy \qquad (5.12)
\end{aligned}
$$

bulunur. Son olarak

$$
I_6 = -s^3 \int_\Omega \left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2 \right) \left(\Delta_y \varphi - \Delta_x \varphi \right) |z|^2 \, dxdy \qquad (5.13)
$$

olur. Yukarıda bulduğumuz (5.8)-(5.13) ifadeleri birleştirilirse daha basit olarak

$$
\left(P^+ z, P^- z \right) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + B_0,
$$

elde edilir. Burada

$$
\begin{aligned}
J_1 &= 2s \sum_{k,j=1}^{m} \int_\Omega z_{y_k} z_{y_j} \varphi_{y_j y_k} dxdy - 4s \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega z_{y_k} z_{x_j} \varphi_{x_j y_k} dxdy, \\
J_2 &= 2s \sum_{k,j=1}^{n} \int_\Omega z_{x_k} z_{x_j} \varphi_{x_j x_k} dxdy, \\
J_3 &= -\frac{s}{2} \int_\Omega |z|^2 \Delta_y \left(\Delta_y \varphi - \Delta_x \varphi \right) dxdy, \\
J_4 &= \frac{s}{2} \int_\Omega |z|^2 \Delta_x \left(\Delta_y \varphi - \Delta_x \varphi \right) dxdy, \\
J_5 &= s^3 \int_\Omega |z|^2 \left\langle \nabla_y \varphi, \nabla_y \left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2 \right) \right\rangle dxdy \\
&\quad -s^3 \int_\Omega |z|^2 \left\langle \nabla_x \varphi, \nabla_x \left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2 \right) \right\rangle dxdy,
\end{aligned}
$$

ve

$$\begin{aligned}
B_0 &= 2s\int_{\Gamma_y}\partial_v z\left(\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x z\rangle-\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y z\rangle\right)d\sigma_2 dx\\
&+s\int_{\Gamma_y}\partial_v\varphi\left(|\nabla_y z|^2-|\nabla_x z|^2\right)d\sigma_2 dx-s^3\int_{\Gamma_y}\partial_v\varphi\,|z|^2\left(|\nabla_y\varphi|^2-|\nabla_x\varphi|^2\right)d\sigma_2 dx\\
&-s\int_{\Gamma_y}\partial_v z\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)z d\sigma_2 dx+\frac{s}{2}\int_{\Gamma_y}\partial_v\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)|z|^2 d\sigma_2 dx\\
&+2s\int_{\Gamma_x}\partial_v z\left(\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y z\rangle-\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x z\rangle\right)d\sigma_1 dy\\
&-s\int_{\Gamma_x}\partial_v\varphi\left(|\nabla_y z|^2-|\nabla_x z|^2\right)d\sigma_1 dy+s^3\int_{\Gamma_x}\partial_v\varphi\,|z|^2\left(|\nabla_y\varphi|^2-|\nabla_x\varphi|^2\right)d\sigma_1 dy\\
&+s\int_{\Gamma_x}\partial_v z\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)z d\sigma_1 dy-\frac{s}{2}\int_{\Gamma_x}\partial_v\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)|z|^2 d\sigma_1 dy.
\end{aligned}$$

İkinci olarak, φ ağırlık fonksiyonunun aşağıda verilen özelliklerini kullanarak $J_1, ..., J_5$ ve B_0 ifadelerini değerlendirelim:

$$\begin{aligned}
\varphi_{x_i x_i} &= \gamma\varphi\left(2+\gamma\psi_{x_i}^2\right), & \varphi_{x_i y_j} &= \gamma^2\varphi\psi_{x_i}\psi_{x_j},\\
\varphi_{x_i x_j} &= \gamma\varphi\left(\psi_{x_i x_j}+\gamma\psi_{x_i}\psi_{x_j}\right), & \varphi_{y_i y_j} &= \gamma\varphi\left(\psi_{y_i y_j}+\gamma\psi_{y_i}\psi_{y_j}\right),\\
\nabla_x\varphi &= \gamma\varphi\nabla_x\psi, & \nabla_y\varphi &= \gamma\varphi\nabla_y\psi,\\
\Delta_x\varphi &= \gamma\varphi\left(\Delta_x\psi+\gamma|\nabla_x\psi|^2\right), & \Delta_y\varphi &= \gamma\varphi\left(\Delta_y\psi+\gamma|\nabla_y\psi|^2\right),\\
\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi &= \gamma\varphi d_1(\psi)+\gamma^2\varphi d_2(\psi).
\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}
d_1(\psi) &= \Delta_y\psi-\Delta_x\psi,\\
d_2(\psi) &= |\nabla_y\psi|^2-|\nabla_x\psi|^2
\end{aligned}$$

şeklindedir. O halde

$$\begin{aligned}
J_1 &= 2s\sum_{k,j=1}^{m}\int_\Omega z_{y_k}z_{y_j}\varphi_{y_j y_k}dxdy-4s\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega z_{y_k}z_{x_j}\varphi_{x_j y_k}dxdy\\
&= \sum_{k,j=1}^{m}\int_\Omega 2s\gamma\varphi\left(\psi_{y_j y_k}+\gamma\psi_{y_k}\psi_{y_j}\right)z_{y_k}z_{y_j}dxdy\\
&\quad-\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega 4s\gamma^2\varphi\psi_{y_k}\psi_{x_j}z_{y_k}z_{x_j}dxdy\\
&= \sum_{k,j=1}^{m}\int_\Omega 2s\gamma\varphi\psi_{y_j y_k}z_{y_k}z_{y_j}dxdy+\int_\Omega 2s\gamma^2\varphi\left(\sum_{j=1}^{m}\psi_{y_j}z_{y_j}\right)^2dxdy\\
&\quad-\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega 4s\gamma^2\varphi\psi_{y_k}\psi_{x_j}z_{y_k}z_{x_j}dxdy \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
J_2 &= 2s\sum_{k,j=1}^{n}\int_{\Omega} z_{x_k} z_{x_j}\varphi_{x_j x_k}dxdy \\
&= \sum_{k,j=1}^{n}\int_{\Omega} 2s\gamma\varphi z_{x_k} z_{x_j}\left(\psi_{x_j x_k}+\gamma\psi_{x_k}\psi_{x_j}\right)dxdy \\
&= \sum_{k,j=1}^{n}\int_{\Omega} 2s\gamma\varphi z_{x_k} z_{x_j}\psi_{x_j x_k}dxdy+\int_{\Omega}2s\gamma^2\varphi\left(\sum_{k=1}^{n}z_{x_k}\psi_{x_k}\right)^2dxdy
\end{aligned} \tag{5.15}$$

formunda hesaplanır. Diğer yandan, J_3 ifadesinin değerlendirilmesi yapılmadan önce

$$\begin{aligned}
\Delta_y\left(\varphi d_2\left(\psi\right)\right) &= \gamma\varphi\Delta_y\psi d_2\left(\psi\right)+\gamma^2\varphi\left|\nabla_y\psi\right|^2 d_2\left(\psi\right) \\
&\quad +2\gamma\varphi\left\langle\nabla_y\psi,\nabla_y\left(d_2\left(\psi\right)\right)\right\rangle+\varphi\Delta_y\left(d_2\left(\psi\right)\right)
\end{aligned}$$

özdeşliğini ispatlayalım:

$$\begin{aligned}
\Delta_y\left(\varphi d_2\left(\psi\right)\right) &= \sum_{j=1}^{m}\left(\varphi d_2\left(\psi\right)\right)_{y_j y_j} \\
&= \sum_{j=1}^{m}\left(\varphi_{y_j}d_2\left(\psi\right)+\varphi\left(d_2\left(\psi\right)\right)_{y_j}\right)_{y_j} \\
&= \sum_{j=1}^{m}\left(\varphi_{y_j y_j}d_2\left(\psi\right)+2\varphi_{y_j}\left(d_2\left(\psi\right)\right)_{y_j}+\varphi\left(d_2\left(\psi\right)\right)_{y_j y_j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\left(\gamma\varphi\left(\psi_{y_j y_j}+\gamma\psi_{y_j}^2\right)d_2\left(\psi\right)+2\gamma\varphi\psi_{y_j}\left(d_2\left(\psi\right)\right)_{y_j}+\varphi\left(d_2\left(\psi\right)\right)_{y_j y_j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\gamma\varphi\psi_{y_j y_j}d_2\left(\psi\right)+\sum_{j=1}^{m}\gamma^2\varphi\psi_{y_j}^2 d_2\left(\psi\right) \\
&\quad +\sum_{j=1}^{m}\left(2\gamma\varphi\psi_{y_j}\left(d_2\left(\psi\right)\right)_{y_j}+\varphi\left(d_2\left(\psi\right)\right)_{y_j y_j}\right) \\
&= \gamma\varphi\Delta_y\psi d_2\left(\psi\right)+\gamma^2\varphi\left|\nabla_y\psi\right|^2 d_2\left(\psi\right) \\
&\quad +2\gamma\varphi\left\langle\nabla_y\psi,\nabla_y\left(d_2\left(\psi\right)\right)\right\rangle+\varphi\Delta_y\left(d_2\left(\psi\right)\right).
\end{aligned}$$

Buna bağlı olarak

$$\begin{aligned}
J_3 &= -\frac{s}{2}\int_{\Omega}\left|z\right|^2\Delta_y\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)dxdy \\
&= -\frac{s}{2}\int_{\Omega}\left|z\right|^2\Delta_y\left(\gamma\varphi d_1\left(\psi\right)+\gamma^2\varphi d_2\left(\psi\right)\right)dxdy \\
&= -\int_{\Omega}\frac{s}{2}\gamma^2\varphi\left|z\right|^2 d_1\left(\psi\right)\Delta_y\psi dxdy-\int_{\Omega}\frac{s}{2}\gamma^3\varphi\left|z\right|^2 d_1\left(\psi\right)\left|\nabla_y\psi\right|^2dxdy \\
&\quad -\int_{\Omega}\frac{s}{2}\gamma^3\varphi\left|z\right|^2\Delta_y\psi d_2\left(\psi\right)dxdy-\int_{\Omega}\frac{s}{2}\gamma^4\varphi\left|z\right|^2\left|\nabla_y\psi\right|^2 d_2\left(\psi\right)dxdy \\
&\quad -\int_{\Omega}s\gamma^3\varphi\left|z\right|^2\left\langle\nabla_y\psi,\nabla_y\left(d_2\left(\psi\right)\right)\right\rangle dxdy-\int_{\Omega}\frac{s}{2}\gamma^2\varphi\left|z\right|^2\Delta_y\left(d_2\left(\psi\right)\right)dxdy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_\Omega \frac{s}{2}\gamma^2\varphi\,|z|^2\left(d_1(\psi)\,\Delta_y\psi+\Delta_y\left(d_2(\psi)\right)\right)dxdy \\
&\quad -\int_\Omega \frac{s}{2}\gamma^3\varphi\,|z|^2\left(d_1(\psi)\,|\nabla_y\psi|^2+\Delta_y\psi d_2(\psi)+2\left\langle\nabla_y\psi,\nabla_y\left(d_2(\psi)\right)\right\rangle\right)dxdy \\
&\quad -\int_\Omega \frac{s}{2}\gamma^4\varphi\,|z|^2\,|\nabla_y\psi|^2\,d_2(\psi)\,dxdy
\end{aligned} \tag{5.16}
$$

şeklinde hesaplanır. J_4 ifadesi için

$$
\begin{aligned}
\Delta_x\left(\varphi d_2(\psi)\right) &= \gamma\varphi\Delta_x\psi d_2(\psi)+\gamma^2\varphi\,|\nabla_x\psi|^2\,d_2(\psi) \\
&\quad +2\gamma\varphi\left\langle\nabla_x\psi,\nabla_x\left(d_2(\psi)\right)\right\rangle+\varphi\Delta_x\left(d_2(\psi)\right)
\end{aligned}
$$

eşitliğini kullanalım:

$$
\begin{aligned}
J_4 &= \frac{s}{2}\int_\Omega |z|^2\,\Delta_x\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)dxdy \\
&= \frac{s}{2}\int_\Omega |z|^2\,\Delta_x\left(\gamma\varphi d_1(\psi)+\gamma^2\varphi d_2(\psi)\right)dxdy \\
&= \int_\Omega \frac{s}{2}\gamma d_1(\psi)\,|z|^2\,\Delta_x\varphi dxdy+\int_\Omega \frac{s}{2}\gamma^2\,|z|^2\,\Delta_x\left(\varphi d_2(\psi)\right)dxdy \\
&= \int_\Omega \frac{s}{2}\gamma d_1(\psi)\,|z|^2\left(\gamma\varphi\left(\Delta_x\psi+\gamma\,|\nabla_x\psi|^2\right)\right)dxdy \\
&\quad +\int_\Omega \frac{s}{2}\gamma^3\varphi\,|z|^2\,\Delta_x\psi d_2(\psi)\,dxdy+\int_\Omega \frac{s}{2}\gamma^4\varphi\,|z|^2\,|\nabla_x\psi|^2\,d_2(\psi)\,dxdy \\
&\quad +\int_\Omega s\gamma^3\varphi\,|z|^2\left\langle\nabla_x\psi,\nabla_x\left(d_2(\psi)\right)\right\rangle dxdy+\int_\Omega \frac{s}{2}\gamma^2\varphi\,|z|^2\,\Delta_x\left(d_2(\psi)\right)dxdy \\
&= \int_\Omega \frac{s}{2}\gamma^2\varphi\,|z|^2\left(d_1(\psi)\,\Delta_x\psi+\Delta_x\left(d_2(\psi)\right)\right)dxdy \\
&\quad +\int_\Omega \frac{s}{2}\gamma^3\varphi\,|z|^2\left(\Delta_x\psi d_2(\psi)+2\left\langle\nabla_x\psi,\nabla_x\left(d_2(\psi)\right)\right\rangle+d_1(\psi)\,|\nabla_x\psi|^2\right)dxdy \\
&\quad +\int_\Omega \frac{s}{2}\gamma^4\varphi\,|z|^2\,|\nabla_x\psi|^2\,d_2(\psi)\,dxdy.
\end{aligned} \tag{5.17}
$$

J_5 ifadesinin değerlendirilmesinde

$$
\begin{aligned}
\left\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y\left(|\nabla_y\varphi|^2-|\nabla_x\varphi|^2\right)\right\rangle &= \left\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y\left(\gamma^2\varphi^2 d_2(\psi)\right)\right\rangle \\
&= \gamma^2\left\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y\left(\varphi^2 d_2(\psi)\right)\right\rangle \\
&= \gamma^2\left\langle\nabla_y\varphi,d_2(\psi)\,\nabla_y\left(\varphi^2\right)\right\rangle+\gamma^2\left\langle\nabla_y\varphi,\varphi^2\nabla_y\left(d_2(\psi)\right)\right\rangle \\
&= 2\gamma^2\varphi d_2(\psi)\left\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y\varphi\right\rangle+\gamma^2\varphi^2\left\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y\left(d_2(\psi)\right)\right\rangle \\
&= 2\gamma^4\varphi^3 d_2(\psi)\left\langle\nabla_y\psi,\nabla_y\psi\right\rangle+\gamma^3\varphi^3\left\langle\nabla_y\psi,\nabla_y\left(d_2(\psi)\right)\right\rangle,
\end{aligned}
$$

$$
\left\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x\left(|\nabla_y\varphi|^2-|\nabla_x\varphi|^2\right)\right\rangle = 2\gamma^4\varphi^3 d_2(\psi)\left\langle\nabla_x\psi,\nabla_x\psi\right\rangle+\gamma^3\varphi^3\left\langle\nabla_x\psi,\nabla_x\left(d_2(\psi)\right)\right\rangle
$$

eşitliklerini kullanalım:

$$\begin{aligned}
J_5 &= s^3\int_\Omega |z|^2\left\langle \nabla_y\varphi, \nabla_y\left(|\nabla_y\varphi|^2-|\nabla_x\varphi|^2\right)\right\rangle dxdy \\
&\quad -s^3\int_\Omega |z|^2\left\langle \nabla_x\varphi, \nabla_x\left(|\nabla_y\varphi|^2-|\nabla_x\varphi|^2\right)\right\rangle dxdy \\
&= s^3\int_\Omega |z|^2\left(2\gamma^4\varphi^3 d_2(\psi)\langle\nabla_y\psi,\nabla_y\psi\rangle+\gamma^3\varphi^3\langle\nabla_y\psi,\nabla_y(d_2(\psi))\rangle\right)dxdy \\
&\quad -s^3\int_\Omega |z|^2\left(2\gamma^4\varphi^3 d_2(\psi)\langle\nabla_x\psi,\nabla_x\psi\rangle+\gamma^3\varphi^3\langle\nabla_x\psi,\nabla_x(d_2(\psi))\rangle\right)dxdy \\
&= \int_\Omega s^3\gamma^3\varphi^3|z|^2\left(\langle\nabla_y\psi,\nabla_y(d_2(\psi))\rangle-\langle\nabla_x\psi,\nabla_x(d_2(\psi))\rangle\right)dxdy \\
&\quad +\int_\Omega 2s^3\gamma^4\varphi^3|z|^2(d_2(\psi))^2\,dxdy. \qquad (5.18)
\end{aligned}$$

Son olarak sınır terimleri

$$\begin{aligned}
B_0 &= \int_{\Gamma_y} 2s\gamma\varphi\partial_v z\left(\langle\nabla_x\psi,\nabla_x z\rangle-\langle\nabla_y\psi,\nabla_y z\rangle\right)d\sigma_2 dx \\
&\quad +\int_{\Gamma_y} s\gamma\varphi\partial_v\psi\left(|\nabla_y z|^2-|\nabla_x z|^2\right)d\sigma_2 dx-\int_{\Gamma_y} s^3\gamma^3\varphi^3\partial_v\psi|z|^2 d_2(\psi)\,d\sigma_2 dx \\
&\quad -\int_{\Gamma_y} s\left(\gamma\varphi d_1(\psi)+\gamma^2\varphi d_2(\psi)\right)z\partial_v z\,d\sigma_2 dx \\
&\quad +\int_{\Gamma_y}\frac{s}{2}\left[\left(\gamma^2\varphi d_1(\psi)+\gamma^3\varphi d_2(\psi)\right)\partial_v\psi+\gamma^2\varphi\partial_v(d_2(\psi))\right]|z|^2 d\sigma_2 dx \\
&\quad +\int_{\Gamma_x} 2s\gamma\varphi\partial_v z\left(\langle\nabla_y\psi,\nabla_y z\rangle-\langle\nabla_x\psi,\nabla_x z\rangle\right)d\sigma_1 dy \\
&\quad -\int_{\Gamma_x} s\gamma\varphi\partial_v\psi\left(|\nabla_y z|^2-|\nabla_x z|^2\right)d\sigma_1 dy+\int_{\Gamma_x} s^3\gamma^3\varphi^3\partial_v\psi|z|^2 d_2(\psi)\,d\sigma_1 dy \\
&\quad +\int_{\Gamma_x} s\left(\gamma\varphi d_1(\psi)+\gamma^2\varphi d_2(\psi)\right)z\partial_v z\,d\sigma_1 dy \\
&\quad -\int_{\Gamma_x}\frac{s}{2}\left[\left(\gamma^2\varphi d_1(\psi)+\gamma^3\varphi d_2(\psi)\right)\partial_v\psi+\gamma^2\varphi\partial_v(d_2(\psi))\right]|z|^2 d\sigma_1 dy
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca (5.14)-(5.18) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\left(P^+z,P^-z\right) &= \sum_{k,j=1}^{m}\int_\Omega 2s\gamma\varphi\psi_{y_jy_k}z_{y_k}z_{y_j}dxdy+\int_\Omega 2s\gamma^2\varphi\left(\sum_{j=1}^{m}\psi_{y_j}z_{y_j}\right)^2dxdy \\
&\quad -\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega 4s\gamma^2\varphi\psi_{y_k}\psi_{x_j}z_{y_k}z_{x_j}dxdy \\
&\quad +\sum_{k,j=1}^{n}\int_\Omega 2s\gamma\varphi z_{x_k}z_{x_j}\psi_{x_jx_k}dxdy+\int_\Omega 2s\gamma^2\varphi\left(\sum_{k=1}^{n}z_{x_k}\psi_{x_k}\right)^2dxdy \\
&\quad -\int_\Omega\frac{s}{2}\gamma^2\varphi|z|^2 d_3(\psi)\,dxdy-\int_\Omega s\gamma^3\varphi|z|^2 d_5(\psi)\,dxdy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_\Omega \frac{s}{2}\gamma^4\varphi\,|z|^2\,(d_2(\psi))^2\,dxdy+\int_\Omega s^3\gamma^3\varphi^3\,|z|^2\,d_4(\psi)\,dxdy\\
&+\int_\Omega 2s^3\gamma^4\varphi^3\,|z|^2\,(d_2(\psi))^2\,dxdy+B_0,
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada

$$d_3 := d_3(\psi) = (d_1(\psi))^2 + \Delta_y(d_2(\psi)) - \Delta_x(d_2(\psi)),$$

$$d_4 := d_4(\psi) = \langle \nabla_y\psi, \nabla_y(d_2(\psi))\rangle - \langle \nabla_x\psi, \nabla_x(d_2(\psi))\rangle,$$

$$d_5 := d_5(\psi) = d_1(\psi)\,d_2(\psi) + \langle \nabla_y\psi, \nabla_y(d_2(\psi))\rangle - \langle \nabla_x\psi, \nabla_x(d_2(\psi))\rangle$$

dir. Şimdi $\delta > 0$ olmak üzere

$$\Omega = \Omega(\delta) := \{(x,y);\ \psi(x,y) > \delta\}$$

kümesini tanımlayalım. Ayrıca $0 < \beta < 1$ olduğunu farzedelim. Bu durumda $\overline{\Omega}$ üzerinde $\varphi \geq 1$ ve dolayısıyla $k = 1,2,3$ için $\varphi^k \leq C\varphi^4$ olur.

Buna ek olarak sağ taraftaki ikinci, üçüncü ve beşinci terimler dikkate alınarak

$$\int_\Omega 2s\gamma^2\varphi\left(\sum_{j=1}^{m}\psi_{y_j}z_{y_j} - \sum_{k=1}^{n}\psi_{x_k}z_{x_k}\right)^2 dxdy \geq 0$$

yazılabilir. Bunun sonucu olarak

$$
\begin{aligned}
&(P^+z, P^-z) \geq -\int_\Omega 4\beta s\gamma\varphi|\nabla_y z|^2dxdy + \int_\Omega 4s\gamma\varphi|\nabla_x z|^2dxdy\\
&+\int_\Omega 2s^3\gamma^4\varphi^3 d_2^2|z|^2dxdy + \int_\Omega o(s^3\gamma^4\varphi^3)|z|^2dxdy
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca $0 < \beta < 1$ için $|x-x_0|^2 - \beta^2|y-y_0|^2 \geq \psi(x,y) > \delta$ olduğundan

$$d_2^2 = 16(|x-x_0|^2 - \beta^2|y-y_0|^2)^2 \geq 16\delta^2$$

bulunur. Öyleyse

$$
\begin{aligned}
&\left(P^+z, P^-z\right) \geq -\int_\Omega 4\beta s\gamma\varphi|\nabla_y z|^2dxdy + \int_\Omega 4s\gamma\varphi|\nabla_x z|^2dxdy\\
&+32\delta^2\int_\Omega s^3\gamma^4\varphi^3|z|^2dxdy + \int_\Omega o(s^3\gamma^4\varphi^3)|z|^2dxdy \qquad (5.19)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\int_\Omega \left(P^+z + P^-z\right)\varphi z\,dxdy$$

için yeni bir değerlendirme yapılması gerekir. Bu yüzden son ifade φz ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& \Delta_y z-\Delta_x z+s^2\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)z \\
& -2s\left(\left\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y z\right\rangle-\left\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x z\right\rangle\right)-s\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)z \\
= \; & fe^{s\varphi}
\end{aligned}$$

bulunur. Kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_\Omega\left(P^+z+P^-z\right)\varphi z dxdy=K_1+K_2+K_3+K_4+K_5+K_6$$

elde edilir. Burada sırasıyla

$$\begin{aligned}
K_1 &= \int_\Omega \Delta_y z\left(\varphi z\right)dxdy \\
&= -\int_\Omega \nabla_y z\nabla_y\left(\varphi z\right)dxdy+\int_{\Gamma_y}\partial_\nu z\left(\varphi z\right)d\sigma_2 dx \\
&= -\int_\Omega\left|\nabla_y z\right|^2\varphi dxdy-\frac{1}{2}\int_\Omega\nabla_y\left(|z|^2\right)\nabla_y\varphi dxdy+\int_{\Gamma_y}\partial_\nu z\left(\varphi z\right)d\sigma_2 dx \\
&= -\int_\Omega\left|\nabla_y z\right|^2\varphi dxdy+\frac{1}{2}\int_\Omega|z|^2\Delta_y\varphi dxdy+\int_{\Gamma_y}\partial_\nu z\left(\varphi z\right)d\sigma_2 dx \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_y}\partial_\nu\varphi\,|z|^2 d\sigma_2 dx \\
&= -\int_\Omega\varphi\left|\nabla_y z\right|^2 dxdy+\frac{1}{2}\int_\Omega\gamma\varphi\,|z|^2\Delta_y\psi dxdy \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_\Omega\gamma^2\varphi\,|z|^2\left|\nabla_y\psi\right|^2dxdy+\int_{\Gamma_y}\partial_\nu z\left(\varphi z\right)d\sigma_2 dx \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_y}\gamma\varphi\partial_\nu\psi\,|z|^2 d\sigma_2 dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_2 &= -\int_\Omega \Delta_x z\left(\varphi z\right)dxdy \\
&= \int_\Omega\varphi\left|\nabla_x z\right|^2dxdy-\frac{1}{2}\int_\Omega|z|^2\Delta_x\varphi dxdy \\
&\quad -\int_{\Gamma_x}\partial_\nu z\left(\varphi z\right)d\sigma_1 dy+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_x}\partial_\nu\varphi\,|z|^2d\sigma_1 dy \\
&= \int_\Omega\varphi\left|\nabla_x z\right|^2dxdy-\frac{1}{2}\int_\Omega\gamma\varphi\,|z|^2\Delta_x\psi dxdy \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_\Omega\gamma^2\varphi\,|z|^2\left|\nabla_x\psi\right|^2dxdy-\int_{\Gamma_x}\partial_\nu z\left(\varphi z\right)d\sigma_1 dy \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{\Gamma_x}\gamma\varphi\partial_\nu\psi\,|z|^2d\sigma_1 dy,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
K_3 &= \int_\Omega s^2\left(|\nabla_y\varphi|^2-|\nabla_x\varphi|^2\right)|z|^2\varphi dxdy\\
&= \int_\Omega s^2\gamma^2\varphi^3\left(|\nabla_y\psi|^2-|\nabla_x\psi|^2\right)|z|^2 dxdy\\
&= \int_\Omega s^2\gamma^2\varphi^3 d_2(\psi)|z|^2 dxdy,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_4 &= -\int_\Omega 2s\left(\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y z\rangle-\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x z\rangle\right)\varphi z dxdy\\
&= -\int_\Omega s\left(\left\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y\left(|z|^2\right)\right\rangle-\left\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x\left(|z|^2\right)\right\rangle\right)\varphi dxdy\\
&= -\int_\Omega s\left\langle\nabla_y\varphi,\nabla_y\left(|z|^2\varphi\right)\right\rangle dxdy+\int_\Omega s\left\langle\nabla_y\varphi,|z|^2\nabla_y\varphi\right\rangle dxdy\\
&\quad+\int_\Omega s\left\langle\nabla_x\varphi,\nabla_x\left(|z|^2\varphi\right)\right\rangle dxdy-\int_\Omega s\left\langle\nabla_x\varphi,|z|^2\nabla_x\varphi\right\rangle dxdy\\
&= \int_\Omega s\varphi|z|^2\Delta_y\varphi dxdy+\int_\Omega s|z|^2|\nabla_y\varphi|^2 dxdy\\
&\quad-\int_\Omega s\varphi|z|^2\Delta_x\varphi dxdy-\int_\Omega s|z|^2|\nabla_x\varphi|^2 dxdy\\
&\quad-s\int_{\Gamma_y}\partial_\nu\varphi|z|^2\varphi d\sigma_2 dx+s\int_{\Gamma_x}\partial_\nu\varphi|z|^2\varphi d\sigma_1 dy\\
&= \int_\Omega s\gamma\varphi^2|z|^2 d_1(\psi)dxdy+2\int_\Omega s\gamma^2\varphi^2|z|^2 d_2(\psi)dxdy\\
&\quad-s\int_{\Gamma_y}\gamma\varphi^2\partial_\nu\psi|z|^2 d\sigma_2 dx+s\int_{\Gamma_x}\gamma\varphi^2\partial_\nu\psi|z|^2 d\sigma_1 dy,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_5 &= -\int_\Omega s\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)|z|^2\varphi dxdy\\
&= -\int_\Omega s\varphi\Delta_y\varphi|z|^2 dxdy+\int_\Omega s\varphi\Delta_x\varphi|z|^2 dxdy\\
&= -\int_\Omega s\gamma\varphi^2\left(\Delta_y\psi+\gamma|\nabla_y\psi|^2\right)|z|^2 dxdy\\
&\quad+\int_\Omega s\gamma\varphi^2\left(\Delta_x\psi+\gamma|\nabla_x\psi|^2\right)|z|^2 dxdy\\
&= -\int_\Omega s\gamma\varphi^2|z|^2\Delta_y\psi dxdy-\int_\Omega s\gamma^2\varphi^2|z|^2|\nabla_y\psi|^2 dxdy\\
&\quad+\int_\Omega s\gamma\varphi^2|z|^2\Delta_x\psi dxdy+\int_\Omega s\gamma^2\varphi^2|z|^2|\nabla_x\psi|^2 dxdy\\
&= -\int_\Omega s\gamma\varphi^2|z|^2 d_1(\psi)dxdy-\int_\Omega s\gamma^2\varphi^2|z|^2 d_2(\psi)dxdy
\end{aligned}
$$

şeklinde hesaplanır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}\left(P^{+}z+P^{-}z\right)\varphi z dxdy &= -\int_{\Omega}\varphi\left|\nabla_{y}z\right|^{2}dxdy+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\gamma\varphi\left|z\right|^{2}d_{1}\left(\psi\right)dxdy \\
&+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\gamma^{2}\varphi\left|z\right|^{2}d_{2}\left(\psi\right)dxdy+\int_{\Omega}\varphi\left|\nabla_{x}z\right|^{2}dxdy \\
&+\int_{\Omega}s^{2}\gamma^{2}\varphi^{3}d_{2}\left(\psi\right)\left|z\right|^{2}dxdy+\int_{\Omega}s\gamma^{2}\varphi^{2}\left|z\right|^{2}d_{2}\left(\psi\right)dxdy \\
&+B_{1}, \qquad (5.20)
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
B_{1} &= \int_{\Gamma_{y}}\partial_{\nu}z\left(\varphi z\right)d\sigma_{2}dx-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_{y}}\gamma\varphi\left(1+2s\varphi\right)\partial_{\nu}\psi\left|z\right|^{2}d\sigma_{2}dx \\
&-\int_{\Gamma_{x}}\partial_{\nu}z\left(\varphi z\right)d\sigma_{1}dy+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_{x}}\gamma\varphi\left(1+2s\varphi\right)\partial_{\nu}\psi\left|z\right|^{2}d\sigma_{1}dy
\end{aligned}$$

dir. Bunun sonucunda $-s\gamma(4\beta+\mu)$ ile (5.20) denklemi çarpılırsa, $\mu>0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega}(4\beta+\mu)s\gamma\varphi(Pz)zdxdy &= \int_{\Omega}(4\beta+\mu)s\gamma\varphi|\nabla_{y}z|^{2}dxdy-\int_{\Omega}(4\beta+\mu)s\gamma\varphi|\nabla_{x}z|^{2}dxdy \\
&+\int_{\Omega}o(s^{3}\gamma^{4}\varphi^{3})|z|^{2}dxdy \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

bulunur. (5.19) ve (5.21) denklemi toplanırsa:

$$\begin{aligned}
& (P^{+}z,P^{-}z)-\int_{\Omega}(Pz)(4\beta+\mu)s\gamma\varphi zdxdy \\
\geq\ & \mu\int_{\Omega}s\gamma\varphi|\nabla_{y}z|^{2}dxdy+(4-4\beta-\mu)\int_{\Omega}s\gamma\varphi|\nabla_{x}z|^{2}dxdy \\
+\ & 32\delta^{2}\int_{\Omega}s^{3}\gamma^{4}\varphi^{3}|z|^{2}dxdy+\int_{\Omega}o(s^{3}\gamma^{4}\varphi^{3})|z|^{2}dxdy
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\text{sol taraf}\leq\frac{1}{2}|Pz|^{2}+(4\beta+\mu)\left\{\frac{1}{2}\int_{\Omega}|Pz|^{2}dxdy+\frac{1}{2}\int_{\Omega}s^{2}\gamma^{2}\varphi^{2}|z|^{2}dxdy\right\}$$

olduğu görülür. Son olarak $0<\beta<1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda yeterince küçük $\mu>0$ için

$$4-4\beta-\mu>0$$

yazılabilir. Bunun sonucu olarak, $o(s^{3}\gamma^{4}\varphi^{2})$ ve $|z|^{2}$ ifadelerini içeren terimler absorbe edilirse $z\in C_{0}^{2}(\Omega(\delta))$ için

$$\int_{\Omega}\{s\gamma\varphi(|\nabla_{y}z|^{2}+|\nabla_{x}z|^{2})+s^{3}\gamma^{4}\varphi^{3}|z|^{2}\}dxdy\leq C\int_{\Omega}|Pz|^{2}dxdy$$

elde edilir.

BÖLÜM 6

SONUÇ

Bu çalışmada ultrahiperbolik tipten kısmi türevli denklemler için Carleman değerlendirmeleri ele alınmıştır. Ultrahiperbolik denklemler fiziksel ve felsefik yorumları bakımından son zamanlarda büyük ilgi görmektedir. Bu konu 3. Bölümde ayrıntılı olarak tartışılmıştır. Diğer taraftan Carleman değerlendirmeleri başta hiperbolik, parabolik ve eliptik tipten denklemler olmak üzere birçok problemin çeşitli özelliklerinin araştırılmasında önemli bir araçtır. Ters problemler teorisinde de son 30 yılda bu alanda önemli gelişmeler kaydedilmiştir. Özellikle bu tür problemlerin çözümlerinin Lipschitz ve Hölder kararlılığının incelenmesinde Amirov (2001), Bellassoued and Yamamoto (2012), Bukhgeim and Klibanov (1981), Imanuvilov and Yamamoto (1998), Imanuvilov and Yamamoto (2001), Isakov (2006), Klibanov and Timonov (2004), Romanov (2006), Yamamoto (2009) tarafından önemli sonuçlar elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Amirov A (2001) *Integral Geometry and Inverse Problems for Kinetic Equations*. VSP, Utrecht, The Netherlands, 191 pp.

Bukhgeim A and Klibanov M (1981) Global Uniqueness of Class of Multidimensional Inverse Problems. Soviet Math. Dokl., Amsterdam, 24: 244-247.

Bellassoued M and Yamamoto M (2012) *Carleman Estimates for Anisotropic Hyperbolic Systems in Riemannian Manifolds and Applications*. Lecture Notes in Mathematical Sciences, The University of Tokyo, Tokyo, 113 pp.

Bellassoued M and Yamamoto M (2012) Carleman Estimate with Second Large Parameter for Second Order Hyperbolic Operators in a Riemannian Manifold and Applications *in* Thermoelasticity Cases. *Applicable Analysis*, Tokyo, 91: 35-67.

Calderon A (1958) Uniqueness in the Cauchy Problem for Partial Differential Equations. *Amer. J. Math*.,Baltimore, 16-36 .

Carleman T (1939) *Sur* un Probleme D'unicite Pour les Systemes D'equations Aux Derivees Partilles a Deux Variables Independents. Ark. Mat. Astr. Fys, Paris, 2B: 1-9.

Courant R and Hilbert D (1962) *Methods of Mathematical Physics, vol 2, Partial Differential Equations.* Wiley-Interscience Publication, New York, 819 pp.

Craig W and Weinstein S (2009) On Determinism and Well-Posedness in Multiple Time Dimensions. *Proc. Royal Society A*, Kanada, 465: 3023-3046.

Çağlıyan M ve Çelebi O (2013) *Kısmi Diferans*iyel *Denklemler*. Dora Yayıncılık, Bursa, 143-156 s.

Değer S (2002) Sicim Kuramları. *Bilim ve Teknik Dergisi*, İstanbul, Ağustos Sayısı: 2-5.

Ehrenfest P (1917) In What Way Does it Become Manifest in the Fundamental Laws Physics that Space has Three Dimensions?. *Proc. Amsterdam Acad*, 20: 200-209.

Fritz J (1955) *Plane Wawes and Spherial Means Applied to Partial Differential Equations.* Interscience Publishers, New York-London, 171 pp.

Hörmander L (1963) *Linear Partial Differential Operators.* Springer-Verlag, Berlin, 121 pp.

Imanuvilov O and Yamamoto M (1998) Lipschitz Stability in Inverse Parabolic Problems by the Carleman Estimate. *Inverse Problems,* Tokyo, 14: 1229-1249.

Imanuvilov O and Yamamoto M (2001) Global Lipschitz Stability in an Inverse Hyperbolic Problem by Interior Observations. *Inverse Problems*, Tokyo, 17: 717-728.

Isakov V (2006) *Inverse Problems for Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, Berlin, 343 pp.

Klibanov M and Timonov A (2004) *Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications.* VSP, Utrecht, 283 pp.

Kruglyak N, Maligranda L and Persson E (2006) *Structure of the Hardy Operator Related to Laguerre Polynomials and the Euler Differential Equation.* Lulea University of Technology, Lulea, SE-971 87, 467-476.

Lavrent'ev M M, Romanov V G and Shishatskii S P (1986) *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*. *American Mathematical Society,* 680 pp.

Minser C W, Thorne K S and Wheeler J A (1973) *Gravitation.* CA: Freeman, New York, 1255 pp.

Renardy M and Rogers C (1962) *An Introduction to Partial Differential Equations.* Wiley-Interscience Publication, Springer, New York, 431 pp.

Robison B K (2011) The Wave Equation and Multi-Dimensional Time. The Waterloo Mathematics Review, Kanada, 1 (1): 32-41.

Romanov V G (2006) Estimate for the Solution to the Cauchy Problem for an Ultrahyperbolic Inequality. Doklady Math., Springer, Novosibirsk, 74: 751-754.

Sabuncuoğlu A (2006) *Diferansiyel Geometri.* Nobel yayın dağıtım, İstanbul, 405-411 s.

Stavrouklakis P and Tersian S (2004) *Partial Differential Equations*. World Scientific, London, 319 pp.

Tegmark M (1997) On the Dimensionality of Spacetime. Class. Quantum Grav, Olden Lane, Princeton, 14: L69- L75.

Tektaş P (2012) Parçacık Fiziğinde Modern Kaluza-Klein Teorileri, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Zonguldak, 128 s.

Whitrow C J (1955) Why Physical Space Has Three Dimensions. Brit. J. Phill, Sci., 6 (21): 13-31.

Yamamoto M (1999) Uniqueness and Stability in Multidimensional Hyperbolic Inverse Problems. J. Math. Pures App., Tokyo, 78: 65-98.

Yamamoto M (2009) *Carleman Estimates for Parabolic Equations and Applications. Inverse Problems.* Department of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, Tokyo, 25: 123013, 75 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Pelin ŞEN, 1987 yılında Zonguldak'ta doğdu. İlk ve orta öğrenimini Zonguldak'ta tamamladıktan sonra 2006 yılında girdiği Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2010 yılında mezun oldu. Aynı yıl Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans programına başladı. Halen Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı Kapuz Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

ADRES BİLGİLERİ

Adres: Karaelmas Mah. Kaptan Sok. 26 Evler 70/C
ZONGULDAK

Tel: 0531 924 71 13
E-posta: pelin.mats@gmail.com