YARI-GRUP TEORİSİ KULLANILARAK BAZI DİREKT VE TERS PROBLEMLERİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİNİN ARAŞTIRILMASI

Betül ÇETİNCE

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

ZONGULDAK
Eylül 2015

KABUL:

Betül ÇETİNCE tarafından hazırlanan "Yarı-Grup Teorisi Kullanılarak Bazı Direkt Ve Ters Problemlerin Çözülebilirliğinin Araştırılması" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 14/09/2015

Başkan: Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIZ ....
Bülent Ecevit Üniversitesi

Üye : Doç. Dr. Celil NEBİYEV ....
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN ....
Bülent Ecevit Üniversitesi

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. ..../..../2015

Prof. Dr. Kemal BÜYÜKGÜZEL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Betül ÇETİNCE

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YARI-GRUP TEORİSİ KULLANILARAK BAZI DİREKT VE TERS PROBLEMLERİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİNİN ARAŞTIRILMASI

Betül ÇETİNCE

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIZ

Eylül 2015, 59 sayfa

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezde gerekli olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde, lineer operatörlerin yarı-grupları üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölüm, Hille-Yosida teorisine ayrılmıştır. Dördüncü bölümde, ısı ve dalga denklemlerinin varlık, teklik ve regülerliği incelenmiştir. Beşinci bölümde, operatör yarı-grup teorisini kullanarak, Liouville denklemi için başlangıç değer probleminin çözülebilirliği ele alınmıştır. Son bölümde ise iki nokta ters probleminin çözülebilirliği araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Yarı-grup, Hille-Yosida, Evolüsyon problemi, ters problem.

Bilim Kodu: 403.06.00

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

INVESTIGATION OF SOLVABILITY OF SOME DIRECT AND INVERSE PROBLEMS BY USING SEMI-GROUP THEORY

Betül ÇETİNCE

Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assist. Prof. Mustafa YILDIZ

September 2015, 59 pages

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, some necessary definition and theorems are given. In the second chapter, semi-groups of linear operators are considered. The third chapter is devoted to the theory of Hille-Yosida. In the fourth chapter, the existence, uniqueness and regularity of the solution of the heat and wave equations are investigated. In the fifth chapter, the solvability of a Cauchy problem for Liouville equation is proven by using the theory of operator semi-group. Finally, in the sixth chapter the solvability of a two-point inverse problem is investigated.

Key Words: Semi-group, Hille-Yosida, Evolution problem, inverse problem.

Science Code: 403.06.00

TEŞEKKÜR

Bilgi ve tecrübeleri ile, yüksek lisans programım boyunca değerli vaktini bana ayıran, görüş ve önerileri ile beni yönlendiren, çalışmalarımı titizlikle takip eden değerli hocam ve tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIZ' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım süresince değerli vaktini ayıran, yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, her türlü sorumu içtenlikle cevaplayan, çok kıymetli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN' e en içten duygularımla sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın tüm aşamalarında olduğu gibi, eğitimim boyunca da, her türlü sıkıntıma katlanıp, beni destekleyen ve her zaman yanımda olan canım annem Ayşe ÇETİNCE' ye, canım babam Mehmet Emin ÇETİNCE' ye ve biricik kardeşim Ömer Faruk ÇETİNCE' ye sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$D'(\Omega)$	: Genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfı
Ω	: Verilen bir bölge
$\overline{\Omega}$	: Ω bölgesinin kapanışı
$\partial\Omega$	: Ω bölgesinin sınırı; $\partial\Omega = \Gamma$
$C^k(\Omega)$	: Ω bölgesinde tanımlı $k.$ mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar uzayı
$C_0^\infty(\Omega)$	: Ω bölgesinde bölgesinde tanımlı sonsuz defa diferensiyellenebilir ve supportu Ω nın kompakt alt kümesi olan fonksiyonlar uzayı
D^α	: Türev için multiindeks gösterimi
$\nabla u(x)$	: $u(x)$fonksiyonunun gradienti; $\nabla u(x) = (u_{x_1}, u_{x_2}, ..., u_{x_n})$
$H^k(\Omega)$	: Kendisi ve $k.$ mertebeye kadar tüm genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ ya ait olan fonksiyonlar uzayı
$L_1(\Omega)$	: Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_2(\Omega)$	: Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$(\cdot,\cdot)_{L_2(\Omega)}$	: $L_2(\Omega)$ da iç çarpım
$supp\varphi(x)$	: φ fonksiyonun supportu; $supp\varphi(x) = \overline{\{x \mid x \in \Omega, \varphi(x) \neq 0\}}$

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam ediyor)

$H_k^0(\Omega)$: Kendisi ve k. mertebeye kadar genelleşmiş türevleri $L_2(\Omega)$ ya ait olan ve $(k-1)$. mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri Ω nın sınırında sıfır olan fonksiyonlar sınıfı

$R(\lambda; A)$: A operatörünün rezolvantı

$\rho(A)$: A operatörünün regüler değerler kümesi

$A^{\perp}$: A nın ortogonal tümleyeni

$D(A)$: A operatörünün operatörünün tanım kümesi

$\Delta u(x)$: $u(x)$ fonksiyonun Laplacian' ı; $\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$

$R(A)$: A operatörünün operatörünün değer kümesi

$L^p(\Omega)$ $= \{u \in \Omega \to \mathbb{R}: u$ ölçülebilir ve $\int_{\Omega} |u|^p < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$

$L^{\infty}(\Omega)$ $= \{u: \Omega \to \mathbb{R}: u \text{ ölçülebilir ve bazı } c \text{ sabitleri için } \Omega \text{ da } |u(x)| \leq c \}$

L(X,X) = L(X) : X den X e sınırlı lineer operatörler kümesi

X' = L(X,K) : X normlu uzayının dual uzayı

BÖLÜM 1

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tezde gerekli olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir:

Tanım 1.1 (Metrik, Metrik Uzay) *Boş olmayan bir X kümesi ve bir*

$d : X \times X \to \mathbb{R}^{+}, (x, y) \to d(x, y)$

dönüşümü verilsin. Eğer, her $x, y, z \in X$ için

1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

2) $d(x, y) = d(y, x),$

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(Üçgen Eşitsizliği)*

özellikleri sağlanıyorsa o takdirde d dönüşümüne X üzerinde uzaklık fonksiyonu ya da metrik adı verilir ve bu durumda (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir. Bir küme üzerinde birden fazla metrik tanımlanabilir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 1.2 (Norm, Normlu Uzay) *Bir X vektör uzayı üzerindeki norm, X üzerinde tanımlı olup bir $x \in X$ noktasındaki değeri $\|x\|$ ile gösterilen ve $x, y \in X$ de keyfi vektörler ve c bir skaler olmak üzere aşağıdaki özellikleri gerçekleyen reel değerli bir fonksiyondur:*

1) $\|x\| \geq 0,$

2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

3) $\|cx\| = |c| \, \|x\|,$

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Üçgen Eşitsizliği).*

Üzerinde bir norm tanımlanmış bir X vektör uzayına bir normlu uzay adı verilir. Normlu uzaylar $(X, \|\cdot\|)$ ya da kısaca X ile gösterilir (Kreyszig 1989).

Tanım 1.3 (Cauchy Dizisi) *(X,d) bir metrik uzay ve X in içinde bir dizi (x_n) olsun. Bu durumda $\forall\ \varepsilon>0$ için $m,n>n_\varepsilon$ olduğunda $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ doğal sayısı varsa, (x_n) dizisine X içinde bir Cauchy dizisi adı verilir.*
Bu tanım daha kısa olarak şöyle yazılabilir:

$\forall\varepsilon>0$ *için* $\exists\ n_\varepsilon\in\mathbb{N}\ni\forall m,n>n_\varepsilon$ *için*

$d(x_n,x_m)<\varepsilon\Leftrightarrow(x_n)$ *dizisi* X *içinde bir Cauchy dizisidir (Musayev ve Alp 2000).*

Tanım 1.4 (Tam uzay) *X bir normlu lineer uzay olmak üzere X in elemanlarından oluşan her bir Cauchy dizisi X in bir elemanına yakınsıyor ise X e tam uzay denir (Mikhailov 1978).*

Tanım 1.5 (Banach Uzayı) *Tam normlu bir lineer uzaya Banach uzayı denir (Mikhailov 1978).*

Tanım 1.6 (Yoğun Küme) *(X,d) bir metrik uzay ve A, X in bir alt kümesi olsun. A nın kapanışı X e eşit ise yani $\overline{A}=X$ ise A ya X de yoğun küme adı verilir. Örneğin, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ de yoğundur. Ancak, $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi $\mathbb{R}$ de yoğun değildir (Musayev ve Alp 2000).*

Tanım 1.7 (Her Yerde Yoğunluk) *$M\subset X$ olmak üzere, her bir $x\in X$ için, M nin elemanlarından oluşan bir (x_n) dizisi x e yakınsayacak şekilde varsa, M kümesine X de her yerde yoğundur denir (Mikhailov 1978).*

Tanım 1.8 (İç Çarpım Uzayı) *Bir iç çarpım uzayı, üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış bir X vektör uzayıdır. Burada sözü edilen iç çarpım $X\times X$ den X in bir K skaler cismi içine yapılan bir dönüşümdür, yani X in her x ve y vektör çifti, (x,y) ile gösterilen ve aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir skalerle eşlenmektedir:*

1) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$,

2) $(cx,y)=c(x,y)$,

3) $(x,y)=(y,x)$,

4) $(x,x)\geq 0$, $(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$ *(Kreyszig 1989).*

Tanım 1.9 (Hilbert Uzayı) *Bir Hilbert uzayı, üzerindeki iç çarpımla tanımlı metriğe göre tam olan bir iç çarpım uzayıdır (Kreyszig 1989).*

Tanım 1.10 (Lineer Operatör) *Bir A lineer operatörü, aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir operatördür:*

1) *A nın $D(A)$ tanım bölgesi bir vektör uzayı olup, $R(A)$ değer bölgesi, aynı cisim üzerinde bir vektör uzayıdır.*

2) *Her $x, y \in D(A)$ ve c skaleri için,*

$$\begin{aligned} A(x+y) &= A(x) + A(y) \\ A(cx) &= cA(x) \end{aligned}$$

dir (Kreyszig 1989).

Tanım 1.11 (Sınırlı Lineer Operatör) *X ve Y normlu uzaylar ve $D(A) \subset X$ olmak üzere, $A : D(A) \to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer, her $x \in D(A)$ için,*

$\|Ax\| \leq c\,\|x\|$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı varsa, A operatörü sınırlıdır denir (Kreyszig 1989).

Tanım 1.12 (Sürekli Operatör) *X ve Y normlu uzaylar, $D(A) \subset X$ olmak üzere, $A : D(A) \to Y$ lineer olması zorunlu olmayan herhangi bir operatör olsun. A operatörünün bir $x_0 \in D(A)$ noktasında sürekli olması için, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\|x - x_0\| < \delta$ koşulunu gerçekleyen her $x \in D(A)$ için, $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının var olması gerekmektedir. Eğer her $x \in D(A)$ noktasında A sürekli ise, A operatörü süreklidir denir. A operatörünün lineer olması halinde aşağıdaki önemli teorem ifade edilebilir:*

Teorem 1.1 (Süreklilik ve Sınırlılık) *X ve Y normlu uzaylar ve $D(A) \subset X$ olmak üzere, $A : D(A) \to Y$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda*

1) *A nın sürekli olması için gerek ve yeter koşul A nın sınırlı olmasıdır,*

2) *A bir tek noktada sürekli ise, her noktada süreklidir (Kreyszig 1989).*

Tanım 1.13 (Zayıf Yakınsaklık) *Normlu bir* X *uzayında bir* (x_n) *dizisi verilmiş olsun. Eğer, her* $f \in X^{'}$ *için*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ *elemanı varsa,* (x_n) *dizisi* (x_0)*' a zayıf yakınsaktır denir ve* $x_n \xrightarrow{z} x_0$ *şeklinde yazılır.*

Burada, zayıf yakınsaklığın her $f \in X'$ için $f(x_n)$ sayılarından oluşan dizinin yakınsaklığı anlamına geldiğine dikkat edilmelidir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 1.14 (Norma Göre Yakınsaklık) *Normlu bir* X *uzayı içinde bir* (x_n) *dizisi ve* $x_0 \in X$ *verilmiş olsun. Eğer,*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

ise (x_n) *dizisi* x_0 *noktasına yakınsıyor denir ve*

$$x_n \to x_0 \text{ ya da } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

olarak ifade edilir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya norma göre yakınsama adı verilir. Bu tanım aynı zamanda, "kuvvetli yakınsaklık" olarak da adlandırılmakta ve $x_n \xrightarrow{k} x_0$ *şeklinde de ifade edilmektedir (Musayev ve Alp 2000).*

Tanım 1.15 (Noktasal Yakınsaklık) *Her* $n \in \mathbb{N}$ *olmak üzere* $f_n : D \to \mathbb{R}$ *fonksiyonları verilmiş olsun. Bu durumda* $n \to f_n$ *dizisine (kısaca* (f_n) *ile gösterilir),* $D \subset \mathbb{R}$ *kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonlar dizisi adı verilir. Burada her bir* $x \in D$ *için* $f_n(x) \in \mathbb{R}$ *olacağından* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *şeklinde gerçel sayıların bir dizisi oluşmaktadır. Eğer her bir* $x \in D$ *için* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *sayı dizisi, bir* $f(x)$ *sayısına yakınsıyor, yani her* $x \in D$ *için*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

oluyor ise, (f_n) *fonksiyon dizisine* $f : D \to \mathbb{R}$ *fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir. Bu durum*

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f, \; f_n \to f, \; \ldots$$

gibi simgelerle ifade edilir (Coşkun 2002).

Tanım 1.16 (Düzgün Yakınsaklık) *Her $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f_n : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilmiş olsun. Bu durumda $n \to f_n$ dizisine (kısaca (f_n) ile gösterilir), $D \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonlar dizisi adı verilir. Burada her bir $x \in D$ için $f_n(x) \in \mathbb{R}$ olacağından $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ şeklinde gerçel sayıların bir dizisi oluşmaktadır. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $n_0 := n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı var ve her $x \in D$, her $n \geq n_0$ için*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

oluyor ise, (f_n) fonksiyon dizisine $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir (Coşkun 2002).

Tanım 1.17 (Süreklilik) *$D \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f : D \to \mathbb{R}^m$ bir dönüşüm ve bir $a \in D$ noktası için*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

oluyor ise, f ye a noktasında süreklidir denir. Süreklilik tanımı daha açık olarak şu anlamdadır: Her $k \in \mathbb{N}$ için $a_k \in D$ olmak üzere $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = a$ olan her $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi için

$$\lim_{k \to \infty} f(a_k) = f(a)$$

dır.

D nin her bir noktasında sürekli olan $f : D \to \mathbb{R}^m$ dönüşümüne D' de süreklidir denir (Coşkun 2003).

Tanım 1.18 (Düzgün Süreklilik) *$D \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f : D \to \mathbb{R}^m$ dönüşümü verilmiş olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı var ve $\|x - y\| < \delta$ olan her $x, y \in D$ için*

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

oluyor ise, f dönüşümüne D de düzgün süreklidir denir (Coşkun 2003).

Tanım 1.19 (Kompakt Küme) *(M, d) bir metrik uzay ve $A \subset M$ olsun. A daki her (x_n) dizisi, A nın bir elemanına yakınsayan bir alt diziye sahipse A ya kompakttır denir. Eğer M cümlesinin kendisi kompakt ise (M, d) ye kompakt metrik uzay denir (Rynne and Youngson 2000).*

Tanım 1.20 (Kompaktlık) *Bir X metrik uzayı verilmiş olsun. Eğer X' deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahip ise X uzayı kompakttır (Kreyszig 1978).*

Tanım 1.21 (Operatör) *X ve Y boş olmayan kümeler ve $D \subset X$ olsun. D' nin her elemanına Y' nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala D' den Y' ye bir operatör veya dönüşüm denir (Musayev ve Alp 2000).*

Tanım 1.22 (Kompakt Operatör) *X ve Y herhangi iki normlu uzay ve $A : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer X deki her sınırlı (x_n) dizisi için, Y deki (Ax_n) dizisi bir yakınsak alt diziye sahipse, A operatörüne kompakttır denir (Rynne and Youngson 2000).*

Tanım 1.23 (Kısmi Türevli Denklem) *Bir kısmi türevli denklem $x_1, x_2, ..., x_n$ bağımsız değişkenlerine bağlı bilinmeyen u fonksiyonu ve onun sonlu sayıda kısmi türevlerinin oluşturduğu bir bağıntıdır. Bu denklemin en genel biçimi, $k = k_1 + k_2 + ... + k_n$ olmak üzere*

$$F = \left(x_1, x_2, ..., x_n, u\left(x_1, x_2, ..., x_n\right), \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_n^{k_n}} \right) = 0 \tag{1.1}$$

dır. (1.1) denkleminde en yüksek kısmi türev basamağı k dır. k ya kısmi türevli denklemin basamağı (mertebesi) denir (Dernek 2009).

Tanım 1.24 ($C\left(\overline{\Omega}\right)$, $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ Uzayları) *$C\left(\overline{\Omega}\right)$, $\overline{\Omega}$ üzerinde sürekli tüm fonksiyonların oluşturduğu cümle, $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, $k = 1, 2, ..., \overline{\Omega}$ üzerinde k. mertebeye kadar tüm türevleri sürekli olan tüm fonksiyonların oluşturduğu cümledir. $f \in C^k(\Omega)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ bir multiindeks $(\alpha_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, i = 1, 2, ..., n)$ ve $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ olsun. Bu durumda,*

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n} f(x),$$

f fonksiyonunun kısmi türevlerini ifade eder (Bulut 2014).

Tanım 1.25 ($C_0^\infty(\Omega)$ Uzayı) *$C_0^\infty(\Omega)$, Ω üzerinde tanımlı sonsuz defa diferensiyellenebilir ve supportu $\left(supp\varphi(x) = \overline{\{x \mid x \in \Omega, \varphi(x) \neq 0\}} \right)$ Ω nın kompakt alt cümlesi olan tüm fonksiyonların oluşturduğu cümledir (Mikhailov 1978).*

Tanım 1.26 ($L_1(\Omega)$, $L_2(\Omega)$ Uzayları) *$L_1(\Omega)$, Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve integrallenebilir tüm fonksiyonların oluşturduğu cümle, $L_2(\Omega)$, Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve modülünün karesi integrallenebilir tüm fonksiyonların oluşturduğu cümledir. Bu kümelere ait bazı önemli özellikler aşağıda verilmiştir (Mikhailov 1978);*

1) $L_1(\Omega)$ *ve* $L_2(\Omega)$ *lineer uzaydır ve* Ω *sınırlı bir bölge ise*

$$C\left(\overline{\Omega}\right) \subset L_2(\Omega) \subset L_1(\Omega),$$

2) $L_1(\Omega)$, *üzerinde tanımlanan*

$$\|f\|_{L_1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)|\, dx$$

normuna göre bir Banach uzayıdır,

3) $L_2(\Omega)$, *üzerinde tanımlanan*

$$(f_1, f_2)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} f_1(x)\, \overline{f_2(x)} dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır, bu iç çarpım ile tanımlanan norm

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2\, dx \right)^{1/2}$$

biçimindedir,

4) $C\left(\overline{\Omega}\right)$ *ve* $C_0^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)$ *uzayı,* $L_1(\Omega)$ *ve* $L_2(\Omega)$ *da her yerde yoğundur,*

5) $L_1(\Omega)$ *ve* $L_2(\Omega)$ *ayrılabilir uzaydır.*

Tanım 1.27 (Genelleştirilmiş Fonksiyon) $C_0^{\infty}(\Omega)$ *üzerinde aşağıdaki yakınsaklık yardımı ile verilen topoloji ile elde edilen uzaya test fonksiyonlar uzayı denir. Bu uzay,* $D(\Omega)$ *ile gösterilir. Eğer,*

1) *Öyle bir* $K \subset \Omega$ *kompakt cümlesi vardır;*

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \textit{için} \quad supp\varphi_k \in K,$$

2) *Her* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *ve* $k \to \infty$ *iken*

$$D^{\alpha}_{\varphi_k(x)} \to D^{\alpha}_{\varphi(x)}$$

yakınsaması Ω *bölgesinde düzgün ise,* $k \to \infty$ *için* $\varphi_k \overset{D(\Omega)}{\to} \varphi$ *yakınsar denir.*

$D(\Omega)$ topolojik uzayında tanımlı sürekli, lineer fonksiyonellere, genelleştirilmiş fonksiyon denir. Genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfı $D'(\Omega)$ ile gösterilir (Vladimirov 1984).

Tanım 1.28 (Genelleştirilmiş Türev) *$f_\alpha(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları Ω da integrallenebilir fonksiyonlar olsun. Herhangi bir $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ olmak üzere,*

$$\int_\Omega f_\alpha(x)\,\varphi d\Omega = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x)\, D_\varphi^\alpha d\Omega$$

ise, $f_\alpha(x)$ ya Ω bölgesinde $v(x)$ in α' ıncı mertebeden genelleştirilmiş türevi denir. Burada,

$$f_\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+...\alpha_n} v}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}...\partial_{x_n}^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}...\partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

şeklindedir (Mikhailov 1978).

Tanım 1.29 (Kapalı Operatör) *Eğer A lineer operatörü, aşağıdaki şartları sağlıyor ise her u_n dizisi için,*

$$u_n \longrightarrow u_o \quad ve \quad Au_n \longrightarrow y_o \Rightarrow Au_o = y_o$$

kapalıdır denir. Her sürekli operatör kapalıdır ama tersi, doğru olmayabilir. Mesela, $\dfrac{d}{dx}$ türev operatörü $L_2(0,1)$ uzayında kapalıdır ama sınırlı değildir (Kreyszig 1978).

Tanım 1.30 (Ortogonallik, Ortogonal Kümeler, Ortogonal Tümleyen) *$(X, (.,.))$ bir iç çarpım uzayı ve $x, y \in X$ olsun. $(x,y) = 0$ ise x vektörü y vektörüne ortogonaldir (diktir) denir ve $x \perp y$ ile gösterilir. Benzer şekilde A, $B \subset X$ alt kümeleri verildiğinde eğer her $a \in A$ için $x \perp a$ ise x vektörü A kümesine ortogonaldir denir ve $x \perp A$ yazılır. Eğer her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $a \perp b$ ise A ve B kümelerine ortogonal kümeler denir ve $A \perp B$ ile gösterilir.*

Bir $A \subset X$ için $\{x \in X : x \perp A\}$ kümesi A kümesinin ortogonal tümleyeni adını alır ve $A^\perp$ ile gösterilir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 1.31 (Adjoint Operatör) *X ve Y aynı bir K cismi üzerinde normlu uzaylar, $A \in L(X,Y)$ ve $g \in Y'$ olsun.*

$$f : X \to K, \quad f(x) = (g \circ A)(x) = g(A(x)), \quad x \in X$$

biçiminde bir f fonksiyoneli tanımlayalım. g ile A lineer ve sınırlı olduklarından f de lineer ve sınırlıdır. $g \in Y'$ verildiğinde, buna karşılık gelen ve yukarıdaki gibi tanımlanan

f fonksiyonelinin tek olduğu açıktır. Bu nedenle, bir $A \in L(X,Y)$ için $f = g \circ A$ olmak üzere

$$A' : Y' \to X', \ g \to A'(g) = g \circ A = f$$

biçiminde bir A' operatörü tanımlanabilir. Bu biçimde tanımlanan A' operatörüne, A nın adjoint operatörü denir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 1.32 (Self-Adjoint Operatör) *H_1, H_2 Hilbert uzayları ve $A \in L(H_1, H_2)$ olsun. Her $x \in H_1$, $y \in H_2$ için*

$$(Ax, y) = (x, A^* y)$$

olacak biçimde tanımlı sürekli lineer A^* operatörüne A nın self-adjoint operatörü adı verilir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 1.33 (Sobolev Uzayı) *m bir pozitif tam sayı, $1 \leq p \leq \infty$ ve $\|\cdot\|_p$ de $L^p(\Omega)$ uzayında bir norm olmak üzere, sağ tarafı anlamlı kılan her u için*

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, \qquad 1 \leq p < \infty, \tag{1.2}$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty \tag{1.3}$$

şeklinde bir $\|\cdot\|_{m,p}$ fonksiyoneli tanımlayalım. Bazı durumlarda bölgeler ile ilgili çıkabilecek karışıklığı önlemek için $\|u\|_{m,p}$ sembolü yerine $\|u\|_{m,p,\Omega}$ de kullanılmaktadır. (1.2) veya (1.3) normu ile verilen aşağıdaki uzaylar Sobolev uzayı olarak adlandırılır:

1) $H^{m,p}(\Omega) : \left\{ u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty \right\}$ *kümesinin $\|\cdot\|_{m,p}$ normuna göre tamlanışı,*

2) $W^{m,p}(\Omega) \equiv \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$,

3) $W_o^{m,p}(\Omega) : W^{m,p}(\Omega)$ *uzayında $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı.*

Açıktır ki,

$$W^{o,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$$

ve eğer $1 \leq p < \infty$ ise

$$W_o^{o,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$$

dır, çünkü $C_0^\infty(\Omega)$ *uzayı* $L^p(\Omega)$ *uzayında yoğundur. Her* m *için aşağıdaki gömme zinciri mevcuttur:*

$$W_o^{m,p}(\Omega) \longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega).$$

Ayrıca her Ω *bölgesi için* $H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ *dır. 1964 yılında Meyer ve Serrin tarafından yayınlanan bu sonuç, o zamana kadar literatürde var olan bu uzaylar arasındaki ilişkiye dair karışıklığı ortadan kaldırmıştır. Bu temel sonucun uzun bir süre elde edilememiş olması şaşırtıcı bir durumdur.* $W^{m,p}(\Omega)$ *uzayları Sobolev tarafından tanıtılmıştır. Bu tür uzayları göstermek için birçok farklı sembol (* $W^{m,p}$, $H^{m,p}$, $P^{m,p}$, L_p^m, *vb.) kullanılmıştır. Ayrıca Sobolev' in ismiyle anılmadan önce başka isimler altında, örneğin Beppo Levi uzayları olarak adlandırılırlardı (Adams 2002).*

Tanım 1.34 ($H^k(\Omega)$ Uzayları) $H^k(\Omega)$, *kendisi ve* k. *mertebeye kadar tüm genelleştirilmiş türevleri* $L_2(\Omega)$ *ya ait olan tüm fonksiyonların oluşturduğu cümledir. Bu cümleye ait bazı önemli özellikler aşağıda verilmiştir (Mikhailov 1978);*

1) $H^k(\Omega)$ *lineer uzaydır ve* $H^o(\Omega) = L_2(\Omega)$,

2) $H^k(\Omega)$, *üzerinde tanımlanan*

$$(f_1, f_2)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha f_1 D^\alpha \overline{f_2} dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır, bu iç çarpım ile tanımlanan norm

$$\|f\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega |D^\alpha f|^2 dx \right)^{1/2}$$

biçimindedir,

3) $\partial\Omega \in C^k$ *ise* $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ *uzayı,* $H^k(\Omega)$ *da her yerde yoğundur,*

4) $\partial\Omega \in C^k$ *ise* $H^k(\Omega)$ *ayrılabilir uzaydır.*

Tanım 1.35 ($\mathring{H}^k(\Omega)$ Uzayı) $\mathring{H}^k(\Omega)$, $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ *uzayına ait ve* Ω *bölgesi ile* $\partial\Omega$ *yüzeyinin bir komşuluğunun ara kesitinde sıfır olan tüm fonksiyonların oluşturduğu cümlenin kapanışıdır (Mikhailov 1978).*

Tanım 1.36 (Birebir Fonksiyon, Örten Fonksiyon ve Bijektif Fonksiyon) *Bir* $f : X \to Y$ *fonksiyonu verildiğinde;*

1) *Her* $y \in Y$ *için* $f(x) = y$ *olacak biçimde en az bir* $x \in X$ *elemanı varsa (veya* $f(X) = Y$ *ise),* f *fonksiyonuna örten (veya surjektif) fonksiyon,*

2) $x_1, x_2 \in X$ *için* $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ *(ya da* $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ *) ise,* f *fonksiyonuna birebir (veya injektif) fonksiyon denir.*

3) *Bazı kaynaklarda birebir ve örten bir fonksiyona bijektif fonksiyon denir (Musayev ve Alp 2000).*

Tanım 1.37 (Değer Kümesi) E *ve* F *iki Banach uzayı olsun.* A *sınırsız lineer operatörü,* F *değerli,* $D(A) \subset E$ *lineer alt uzayında tanımlı bir* $A : D(A) \subset E \to F$ *lineer dönüşümüdür.* $D(A)$*,* A *nın tanım kümesi olmak üzere,* A *nın değer kümesi*

$$R(A) = \{AU : U \in D(A)\} \subset F$$

dir ve $R(A)$ *ile gösterilir (Brezis 2011).*

Teorem 1.2 X *bir Banach uzayı,* $T : X \to X$ *sürekli doğrusal bir operatör olmak üzere değer kümesi* $R(T) = X$ *ve* T *birebir ise, o zaman* T *operatörünün* T^{-1} *tersi var ve süreklidir (Kolay 2003).*

Tanım 1.38 (Laplace Dönüşümü, Ters Laplace Dönüşümü) $F(t)$, $t \geq 0$ *ın pozitif değerleri için tanımlı* t *reel değişkeninin bir fonksiyonu olsun. (*$t < 0$ *için* $F(t) = 0$ *kabul edilebilir)* $s > 0$ *reel veya kompleks bir parametre olmak üzere,* t *reel değişkeninin bir fonksiyonu* e^{-st} *olmak üzere;*

$$\int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

integrali var olacak şekilde s *parametresi için bir değer bulmak mümkün oluyorsa bu integrale* $F(t)$ *fonksiyonunun Laplace Dönüşümü denir. Bu dönüşüm* $L\{F(t)\}$ *veya* $f(s)$ *ifadeleri ile gösterilir ve*

$$f(s) = L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

şeklinde yazılır.

Eğer $f(s)$, $F(t)$ *fonksiyonunun Laplace dönüşümü ise, yani* $L\{F(t)\} = f(s)$ *ise, bu takdirde* $F(t)$ *fonksiyonuna* $f(s)$ *Laplace dönüşümünün Ters Laplace dönüşümü denir. Gösterim olarak,*

$$F(t) = L^{-1}\{f(s)\}$$

şeklinde yazılır (Yaşar 2005).

Tanım 1.39 (Hamilton Denklemleri)

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \text{ ve } \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

ile tanımlı denklemler, Hamilton denklemleri olarak adlandırılır. Burada,

$$\dot{p} \equiv \frac{\partial p}{\partial t} \text{ ve } \dot{q} \equiv \frac{dq}{dt}$$

şeklindedir. H *da Hamiltonian olarak adlandırılır. Bu denklemlerin vektör formu aşağıdaki gibidir:*

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= H_{pi}(t, q, p), \\ \dot{p}_i &= -H_{qi}(t, q, p). \end{aligned}$$

Hamilton denklemlerine ait başka bir formülasyon da $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}}$ *dir. Burada* L, *Lagrangian olarak adlandırılır (Zwillinger 1997 and Iyanaga and Kawada 1980).*

Tanım 1.40 (Başlangıç Değer Problemi) *Bir diferensiyel denklemde, bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde, bağımsız değişkenin aynı değerleri için verilen şartlar altında çözümünün bulunması problemine başlangıç değer problemi denir (Yaşar 2009).*

Tanım 1.41 (Sınır Değer Problemi) *Bir diferensiyel denklemde, bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde, bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar altında çözümünün bulunması problemine sınır değer problemi denir (Yaşar 2009).*

Tanım 1.42 (Direkt Problem) *Matematiksel fizikte denklem ve koşullar verilerek problemin çözümünün bulunmasına direkt problem denir (Yıldız 1995).*

Teorem 1.3 (Morrey Teoremi) *$m \geq 1$ bir tamsayı ve $p \in [1, +\infty)$ olsun. O zaman, eğer $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$ ise,*

$W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \subset L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$

dır. Burada $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$ dir. Eğer $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$ ise,

$W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \subset L^q\left(\mathbb{R}^N\right), \quad \forall q \in [p, +\infty)$

dır. Eğer $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$ ise,

$W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \subset L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$

dır. Yukarıdaki ifadelerin tümü sürekli birebirdir. Üstelik, eğer $m - (N/p) > 0$ bir tam sayı değil ise

$k = [m - (N/p)] \quad$ *ve* $\quad \theta = m - (N/p) - k \;, \quad (0 < \theta < 1)$

dir. Burada $[.]$ tam sayı kısmı gösterir. Tüm $u \in W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ için,

$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}\,, \quad |\alpha| \leq k$ *ile birlikte* $\forall \alpha$

ve

$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} |x - y|^\theta \quad$ *h.h.h* $\quad x, y \in \mathbb{R}^N, \; |\alpha| = k$ *ile birlikte* $\forall \alpha$

dır (Bu gerektirir ki $D^\alpha u, |\alpha| < k$ ile birlikte tüm α lar için Lipschitz süreklidir, yani,

$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C \|u\|_{W^{m,p}} |x - y| \quad$ *h.h.h* $\quad x, y \in \mathbb{R}^N$

dir.).

Özel olarak,

$W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \subset C^k\left(\mathbb{R}^N\right)$

dir (Brezis 2011).

Sonuç 1.1 ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$ Durumu) *Eğer $\mathbb{R}^N$, Ω ile değiştirilirse, Teorem 1.3 ten elde edilen netice doğru kalır. Daha açık olarak, eğer $m - (N/p) > 0$ bir tam sayı değil ise, o zaman*

$W^{m,p}(\Omega) \subset C^k\left(\overline{\Omega}\right)$

dır. Burada $k = [m - (n/p)]$ *dir ve* $C^k\left(\overline{\Omega}\right) = \{u \in C^k\left(\overline{\Omega}\right) : D^{\alpha}u, |\alpha| \leq k$ *ile tüm* α *lar için* $\overline{\Omega}$ *üzerinde bir sürekli genişlemeye sahiptir*$\}$*. Burada* Ω*,* Γ *sınırı ile birlikte* C^1 *sınıfının bir açık kümesidir (ya da* $\Omega = \mathbb{R}^N_+$*) (Brezis 2011).*

Tanım 1.43 (Zayıf Çözümlerin Regülerliği) *$m \geq 1$ bir tam sayı olmak üzere, Ω, C^m sınıfının bir açık kümesi olsun. Eğer her $x \in \Gamma$ için $\mathbb{R}^N$ de, x in bir U komşuluğu vardır ve $H : Q \to U$ dönüşümü bir bijektif dönüşümdür öyleki*

$$H \in C^m\left(\overline{Q}\right), \quad H^{-1} \in C^m\left(\overline{U}\right), \quad H\left(Q_+\right) = \cup \cap \Omega, \quad H\left(Q_0\right) = \cup \cap \Gamma$$

dır (Brezis 2011). Bu tanımla birlikte aşağıdaki Teorem 1.4 sağlanır:

Teorem 1.4 (Dirichlet Problemi İçin Regülerlik) *Ω, Γ sınırı ile birlikte, C^2 sınıfının bir açık kümesi olsun (ya da $\Omega = \mathbb{R}^N_+$). Aşağıdaki eşitlik sağlanmak üzere, $f \in L^2(\Omega)$ ve $u \in H^1_0(\Omega)$ olsun.*

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} u\varphi = \int_{\Omega} f\varphi, \quad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

O zaman,

$$u \in H^2(\Omega) \ \text{ ve } \ \|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}$$

dir. Burada C, sadece Ω ya bağlı bir sabittir. Ayrıca, eğer Ω, C^{m+2} sınıfından ise ve $f \in H^m(\Omega)$ ise, o zaman

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \ \text{ ve } \ \|u\|_{H^{m+2}} \leq C\|f\|_{H^m}$$

dir. Özel olarak, eğer $m > N/2$ ile birlikte $f \in H^m(\Omega)$ ise, o zaman

$$u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$$

dır. Son olarak, eğer Ω, C^{∞} sınıfından ise ve eğer $f \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)$ ise, o zaman

$$u \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)$$

dır (Brezis 2011).

Tanım 1.44 ($L^2(a,b;X)$ Uzayı) *X bir Hilbert uzayı olsun. ($[a,b]$ üzerinde dt Lebesgue ölçümü için) X deki değeri ile birlikte $[a,b]$ üzerinde kuvvetli ölçülebilir, f fonksiyonunun (sınıflarının) uzayıdır, öyle ki*

$$\left(\int_a^b \|f(t)\|_x^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2(a,b;X)} < +\infty \tag{1.4}$$

şeklindedir. Burada, $\|\cdot\|_x$, X' in Hilbert normunu ifade eder.

(1.4) deki norm ile birlikte, $L_2(a, b; X)$, bir Hilbert uzayıdır (Lions and Magenes 1972).

Tanım 1.45 (Homomorfizm) *Bir G kümesi için; $\mu : G \times G \to G$ dönüşümü*

$$\mu(a, b) = ab$$

biçiminde tanımlanmış olsun. Eğer

1) *Her $a, b, c \in G$ için $a(b \cdot c) = (a \cdot b)c$,*

2) *Her bir $a \in G$ için $ae = ea = a$ eşitliğini sağlayan bir $e \in G$ elemanı vardır (birim (etkisiz) eleman),*

3) *Her $a \in G$ için $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ olacak şekilde a^{-1} (a' nın tersi) vardır*

koşulları sağlanıyorsa, G kümesine (μ dönüşümü ile) bir gruptur denir. A, B herhangi iki grup $h : A \to B$ dönüşümü, $h(ab) = h(a)h(b)$ eşitliğini sağlıyorsa; h' ya bir homomorfizm' dir denir (Dunford and Schwartz 1957).

1.1 HADAMARD ANLAMINDA İYİ VE KÖTÜ KONULMUŞ PROBLEMLER

İyi konulmuş problem tanımı 20. yüzyılın başlarında Fransız matematikçi J. S. Hadamard tarafından verilmiştir. U ve F metrik uzaylar, $A : U \to F$ bir operatör olmak üzere

$$Au = f \tag{1.5}$$

(1.5) denklemini ele alalım. (1.5) denkleminin aşağıdaki özellikleri sağlayan çözümünün bulunması problemine (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında iyi konulmuş problem denir:

1) Her $f \in F$ için U uzayında problemin çözümü vardır.

2) Problemin çözümü U uzayında tektir.

3) Problemin koşulları F uzayında az değiştiğinde problemin çözümü de U uzayında az değişir (kararlılık koşulu) (Lavrent'ev et al. 1986). Bu şartlardan herhangi birinin sağlanmaması durumunda problem, (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında kötü konulmuş problem olarak adlandırılır. Bir (U_1, F_1) uzay çifti için iyi, başka bir (U_2, F_2) uzay çifti için kötü konulmuş probleme (U_2, F_2) uzay çifti için zayıf kötü konulmuş problem denir. Tüm uzay çiftlerinde kötü konulmuş probleme kuvvetli kötü konulmuş problem denir.

Hadamard' a göre kötü konulmuş problemler, reel fiziksel anlamı olan pratik olayları tanımlamaz. Çünkü pratikte her zaman koşullar belirli bir hata payı ile verilir. Bu hatalı koşullar kullanılarak bulunan çözüm, kesin çözümden çok farklı olabilir ve bu da pratikte yanlış sonuçlara götürebilir. Bu nedenle bir çok matematikçi önceleri sadece Hadamard anlamında iyi konulmuş problemler ile ilgilenmişti. Öte yandan birçok pratik problem de Hadamard anlamında kötü konulmuş problemlere dönüşerek ister istemez matematikçilerin karşısına çıkıyordu. Hadamard' ın kendisinin örnek olarak gösterdiği kötü konulmuş problem, Laplace denklemi için Cauchy problemidir, bu da elektromanyetik alanların bulunması problemiyle ilgilidir.

Ayrıca, diferensiyel denklemler için ters problemler teorisinin karakteristik özelliklerinden biri, bu problemlerin Hadamard anlamında kötü konulmuş olmalarıdır (Bulut 2014).

1.2 TIKHONOV ANLAMINDA İYİ VE KÖTÜ KONULMUŞ PROBLEMLER

İlk defa, bir Rus matematikçi olan A. N. Tikhonov, Hadamard anlamında kötü konulmuş problemlerin gerekliliğini ortaya koymuştur. (1.5) denkleminin aşağıdaki özellikleri sağlayan çözümünün bulunması problemine şartı iyi (doğru) konulmuş problem veya Tikhonov anlamında iyi konulmuş problem denir:

1) U bir metrik uzay olmak üzere, problemin çözümü var ve belirli bir $M \subset U$ cümlesine aittir.

2) Problemin çözümü M de tektir.

3) Problemin çözümü M de koşullara sürekli bağımlıdır, yani çözümü M cümlesinin dışına çıkarmayan koşullar F metrik uzayında sonsuz küçük bir değişikliğe uğradıklarında problemin çözümü de U metrik uzayında sonsuz küçük değişir (Lavrent'ev et al. 1986).

M cümlesine problemin doğruluk cümlesi denir ve M genellikle kompakt bir cümle olarak seçilir.

1.3 TERS PROBLEMLER

Pratikte karşılaşılan öyle problemler vardır ki, bunların çözümleri için ayrıca ek bilgiye gerek duyulur. Verilen bu ek bilgiye göre problemdeki denklemi ve koşulları yani denklemin bir veya birkaç katsayısının veya sağ tarafının ya da sınır koşullarından bir veya birkaçını denklemin çözümü ile birlikte bulmak gerekir. Böyle problemlere ters problem adı verilir (Yıldız 1995).

Genel anlamda ters problemler, cevabın bilindiği halde, sorunun bilinmediği ya da sonuçların bilindiği halde sebebin bilinmediği problemler olarak da tanımlanabilir. Doğrudan erişilemeyen bir çevre hakkında bilgi edinmek için, bu bölgelerden gelen akustik, sismik ve elektromanyetik işaretler özel algılayıcılar yardımı ile değerlendirilir. Bu işaretler üzerinde yapılan geliş zamanı, geliş doğrultusu, genlik, faz/frekans, polarizasyon vb. ölçümlerden elde edilen bilgilere göre çevrenin ilgi duyulan özelliklerinin araştırılması, bir ters problemin ortaya çıkmasına sebep olur. Bu nedenle ters problemler teorisi, uzaktan algılama ve tahribatsız değerlendirme dallarındaki çalışmaların teorik alt yapısını oluşturmuştur. "Ters problem" ve "kötü konulmuş problem" kavramları 20. yüzyılın ortalarında başlayarak modern bilimde her geçen gün daha popüler hale gelmiştir. Elli yılı aşkın bir süredir bu problemler üzerinde yapılan çalışmalar şunu göstermiştir: Klasik matematiğin çeşitli branşlarında (bilgisayar cebiri, diferensiyel ve integral denklemler, kısmi diferensiyel denklemler, fonksiyonel analiz) ortaya çıkan çok sayıda karmaşık (kararsız ve genellikle lineer olmayan) problem ters veya kötü konulmuş olarak sınıflandırılabilir. Ters ve kötü konulmuş problemler aynı zamanda fizik, jeofizik, tıp ve astronomi gibi matematiğin kullanıldığı pek çok sahada çalışılmaya ve sistematik olarak uygulanmaya başlanmıştır, çünkü bu problemlerin çözümleri incelenen ortamın yoğunluk ve dalga yayılım hızı, elastisite parametreleri, iletkenlik, elektriksel ve manyetik geçirgenlik gibi önemli özelliklerini ve ayrıca doğrudan erişilemeyen bölgelerde homojenliğin bozulduğu noktaların konumuna ve karakterine ilişkin bilgileri vermektedir.

Matematiksel fiziğin direkt problemlerinde araştırmacılar; sesin, sıcaklığın, sismik veya elektromanyetik dalgaların yayılımı gibi çeşitli fiziksel olayları ifade eden fonksiyonları kesin veya yaklaşık olarak bulmaya çalışırlar. Bu problemlerde, ortamın özelliklerinin (denklemin katsayıları ile ifade edilir), fiziksel sürecin başlangıç anındaki durumunun (durağan olmayan hallerde), sınırda sağlanan özelliklerin (bölge sınırlı ise ve/veya durağan halde) bilindiği kabul edilmektedir. Bununla birlikte sıklıkla ortamın özelliklerinin bilinmediği durumlarla karşılaşılmaktadır. Bu da direkt problemin çözümü hakkında verilen bilgi yardımıyla ilgili denklemin katsayılarının belirlenmesi ters probleminin ortaya çıkmasına sebebiyet vermektedir. Ancak bu problemlerin birçoğu kötü konulmuştur. Çünkü verilerdeki hatalara karşı çözümlerinin kararsızlığı söz konusudur. Diğer yandan ters problemlerin çözümleri ele alınan ortama dair önemli bilgiler verir, örneğin sıcaklık, potansiyel fark veya kirlilik ile ilgili bir araştırma söz konusu ise ihlalin, bozulmanın veya kaynağın yerinin, şeklinin ve yapısının belirlenmesine yardımcı olur.

Günlük yaşantımızda sıklıkla ters ve kötü konulmuş problemlerle karşılaşmaktayız ve eğer ruhsal ve fiziksel olarak sağlıklı durumdaysak genellikle bu problemleri hızlı ve etkili bir şekilde çözebilmekteyiz. Örneğin, görsel algımızı ele alalım. Gözlerimizin belli bir anda çevremizdeki sadece sınırlı sayıdaki noktadan görsel bilgi alabildiği bilinmektedir. Peki bu durumda neden etrafımızdaki herşeyi görebildiğimiz hissine kapılıyoruz? Hiç şüphesiz bunun nedeni kişisel bir bilgisayar gibi çalışarak belirli noktalardan alınan verileri interpolasyon ve kestirim yaparak görüntüyü tamamlayan beynimizdir. Bir cismin gerçek görüntüsünün belli sayıdaki noktadan tatmin edici bir şekilde oluşturulabilmesi için bu cismin daha önceden bizim tarafımızdan görülmüş olması gerekir. Dolayısıyla bir nesnenin ve çevresinin görüntüsünün oluşturulması problemi kötü konulmuş bir problemdir (çözüm tek değil veya kararsız), buna rağmen beynimiz oldukça hızlı bir şekilde bu problemi çözebilmektedir. Bunun nedeni beynin önceki geniş tecrübelerini (a priori information) kullanabilme yeteneğidir (Kabanikhin 2008).

Ters ve kötü konulmuş problemler teorisi bilimin ve teknolojinin hemen hemen tüm sahalarında sıklıkla kullanılmaktadır. Özel olarak, fizik (astronomi, kuantum mekaniği, akustik, elektrodinamik vb.), jeofizik (sismik çalışmalar, elektrik, manyetik ve gravimetrik araştırmalar, sondaj, manyetotellürik ölçüm vb.), tıp (X-ışını, NMR tomografi, ultrason vb.), çevre (hava ve su kalitesinin araştırılması, uzay gözlem vb.), ekonomi (optimal kontrol teorisi, finans matematiği vb.) bu alanlardan bazılardır (Bulut 2014).

BÖLÜM 2

LİNEER OPERATÖRLERİN YARI-GRUPLARI

Genel olarak, yarı-gruplar, evolüsyon denklemleri gibi yaygın olarak bilinen problemlerin büyük bir sınıfını çözmek için de kullanılabilir. Bu tip denklemler fizik, kimya, biyoloji, mühendislik ve ekonomi de dahil olmak üzere birçok bilim dalında kullanılır. Yarı-grup teorisi genellikle, kısmi ya da adi diferensiyel denklem için başlangıç değer problemlerine uygulanabilir. Eğer bir yarı-grup mevcut ise, doğrudan başlangıç değer problemi (BDP) ile çalışmak yerine, yarı-grup ve onun uygulanabilir teorisi vasıtasıyla çalışılabilir.
Lineer yarı-grup teorisi, çok gelişmiş bir teoridir. Aslında bu teori, bir problemin iyi konulmuş olup olmadığına karar vermek için gerekli ve yeterli koşulları sağlar. Bu bölümde, kuvvetli sürekli sınırlı lineer operatörlerin yarı-grupları olan, C_0 yarı-gruplar olarak adlandırılan lineer yarı-grupların özel bir sınıfı üzerinde durulacaktır.

2.1 YARI-GRUP NEDİR?

Tanım 2.1 (Yarı-Grup) *Bir S kümesine, birleşme özelliğine sahip, $*: S \times S \to S$ ikili işlemi ile birlikte bir yarı-grup denir. Yani,*

$$\forall x, y, z \in S \ \textit{için} \ (x * y) * z = x * (y * z)$$

dir. Birleşme özelliği, aynı zamanda, $F(F(x,y), z) = F(x, F(y,z))$ olarak da gerçekleştirilmiş olabilir. Burada $F(x,y)$, $S \times S$ den S ye dönüşümündeki gibidir.

Grup yapısından farklı olarak, yarı-grupların, birim eleman e ye sahip olması gerekmez. Ayrıca, bir yarı-grubun ters elemana da ihtiyacı yoktur. Bu nedenle, birçok problem yarı-gruplar yardımı ile çözülebilir.

2.1.1 Örnekler

Yarı-grupların en temel örneklerinden bazıları şunlardır:

1) $w = \{0, 1, 2, \ldots\}$ tüm doğal sayıların kümesi (sıfır dahil), doğal sayıların toplama işlemi altında, bir $(w, +)$ yarı-grubunu oluşturur.

Benzer şekilde, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ tüm pozitif doğal sayıların kümesi (sıfır hariç), toplama işlemi altında, $(\mathbb{N}, +)$ yarı-grubunu oluşturur.
Aynı zamanda, w ve $\mathbb{N}$ kümelerinin her ikisi de, çarpma işlemi altında sırasıyla, $(w, \cdot)$ ve $(\mathbb{N}, \cdot)$ yarı-gruplarını oluştururlar.

2) $S = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, *=matris çarpımı.

Burada, $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, reel girdiler ile 2×2 matrislerin kümesidir.
Bir yarı-grubun en genel tanımının verilmesine rağmen, bu bölümde lineer operatörlerin yarı-grupları üzerine odaklanılacaktır.

2.1.2 Somut Bir Örnek Olarak Cauchy Problemi

Aşağıda Soyut Cauchy Problemi (kısaca SCP) ile verildiği gibi, zamanla değişen bir sistemin fiziksel durumunu göz önüne alalım:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= A[u(t)], \qquad (t \geq 0), && (2.1) \\ u(0) &= f. && (2.2) \end{aligned}$$

Burada $u(t)$, A fonksiyonu tarafından belirlenen oranda zamana göre değişen, t anındaki durumu ifade eder.
(2.1), (2.2) probleminin çözümü aşağıdaki gibidir:

$$u(t) = e^{At}f. \qquad (2.3)$$

Gerçekten de, (2.1), (2.2) problemlerinin çözümü;

$$u_h(t) + u_{ö}(t) = u(t)$$

genel çözümü kullanılarak, karakteristik denklem yardımı ile,

$$\begin{aligned} u'(t) - Au(t) &= 0 \\ r - A &= 0 \\ r &= A \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$u_h = e^{At} \cdot c$$

elde edilir. (2.2) başlangıç koşulundan,

$$\begin{aligned} f &= e^{A \cdot 0} \cdot c \\ f &= c \end{aligned}$$

dir. Böylece (2.1) denkleminin (2.2) koşulunu sağlayan çözümü;

$$u(t) = e^{At} f$$

olarak elde edilir.

"(2.1), (2.2) problemi, iyi konulmuş bir problem midir?" sorusu, ilk olarak akla gelen doğal bir sorudur. İyi konulmuş bir problemin çözümü vardır ve tektir. Yarı-grup teorisi kullanılarak, bir problemin ne zaman iyi konulmuş olduğu belirlenebilir. Bu amaçla,

$$T(t) : u(s) \to u(t+s) \tag{2.4}$$

şeklinde bir T operatörü tanımlayalım:

Eğer A nın, zamana bağlı olmadığı varsayılır ise, o zaman $T(t)$, s den bağımsızdır. Çözüm, $t+s$ zamanında $u(t+s)$, f ye göre hareket ederek, $T(t+s)$ olarak hesaplanabilir. Benzer şekilde, aşağıdaki gibi iki adımda inceleyelim:

1.Adım $T(s)(f) = u(s)$,

2.Adım $T(t)(u(s)) = T(t)(T(s)(f)) = u(t+s) = T(t+s)(f)$

dir.

2.1.3 Cauchy Fonksiyonel Denklemi

Bu kısımda, orijinal ifadesi Cauchy' ye uzanan aşağıdaki soruyla başlayalım (Cauchy 1821):

$T(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ biçiminde olan ve

$$(FD) \begin{cases} \text{her } t, s \geq 0 \text{ için } T(t+s) = T(t)\,T(s) \\ T(0) = I \end{cases}$$

fonksiyonel denklemini (kısaca (FD) yi) sağlayan bütün dönüşümleri belirleyiniz.
Açıkça herhangi bir $a \in \mathbb{C}$ için

$$t \rightarrow e^{at}$$

üstel fonksiyonu yukarıdaki (FD) fonksiyonel deklemini sağlar.
Yukarıdaki ifadenin daha genel bir durumunu düşünerek X uzayını karmaşık Banach uzayı olarak alalım. Bu durumda $\mathcal{L}(X)$, X üzerindeki bütün sınırlı doğrusal operatörlerin Banach cebiridir ve Cauchy problemi şu şekilde verilebilir:
"$T(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ biçiminde olan ve

$$(FD) \begin{cases} \text{her } t, s \geq 0 \text{ için } T(t+s) = T(t)T(s) \\ \qquad\qquad T(0) = I \end{cases}$$

fonksiyonel denklemini sağlayan bütün dönüşümleri belirleyiniz."
Bu sorunun yanıtının araştırılması, bu kısmın temelini oluşturmaktadır. (FD) fonksiyonel denklemini sağlayan her bir $T(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ fonksiyonu için $(T(t))_{t\geq 0}$ ile gösterilen $\{T(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ alt kümesi, $(\mathcal{L}(X), \cdot)$ nın alt yarı-grubudur. Yani $t \rightarrow T(t)$ dönüşümü $(\mathbb{R}, +)$ dan $(\mathcal{L}(X), \cdot)$ içine bir homomorfizmdir. Bu durum aşağıdaki tanımlamayı uygun kılmaktadır (Engel and Nagel 2000):

2.1.4 Banach Uzaylarında Bir Parametreli Yarı-Gruplar

Tanım 2.2 (Bir Parametreli Yarı-Grup) *Yukarıdaki (FD) fonksiyonel denklemini sağlayan X üzerindeki sınırlı doğrusal operatörlerin $(T(t))_{t\geq 0}$ ailesine bir parametreli yarı-grup adı verilir.*

Buna göre;

$$\begin{aligned} T(t) : X &\rightarrow X \\ f &\rightarrow T(t)f \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $T(t)$ sınırlı doğrusal dönüşümü,

1) $T(0) = I$ (I Birim Operatör),

2) $\forall s, t \in \mathbb{R}_+$ için

$$T(t+s) = T(t)T(s) \tag{2.5}$$

koşullarını sağlıyorsa $(T(t))_{t\geq 0}$ ailesine sınırlı doğrusal $T(t)$ operatörlerinin bir parametreli yarı-grubu adı verilir (Engel and Nagel 2000 and Davies 1980 and Goldstein 1985). Yukarıda, temel yarı-grup özelliği gösterilmiştir. Şimdi ise, A operatörü ve T yarı-grubu arasında ne gibi bir bağlantı olduğunu anlayabilmek için, ilk olarak skaler durum incelenecektir. A operatörü ve T yarı-grubu arasındaki bağlantının ilk adımı olarak aşağıdaki iki gözlem verilebilir:

$$\begin{aligned} T(t)(f) &= T(t)(u(0)) = u(t) = e^{At}f, && (2.6)\\ \frac{d}{dt}T(t)(f) &= A(T(t)(f)). && (2.7) \end{aligned}$$

Dikkat edilirse, (2.1), (2.2) probleminin çözümü,

$u(t) = T(t)(f)$

dir. Buradan da,

$$T(t)(f) = e^{At}f \tag{2.8}$$

olduğu görülebilir.

Burada A, $T(t)$ nin türevidir. Bununla birlikte, her $T(t) : f \to e^{At}f$, f üzerinde $u(t)$ nin sürekli bağımlılığını gösteren, $\mathbb{R}$ üzerinde bir sürekli operatördür (Ya da X bir Banach uzayı olmak üzere, sonsuz boyutlu bir kümedir.). Başlangıç verisi f, A nın tanım kümesine ait olmalıdır. (2.8) in incelenmesi üzerine, aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1) $T(t)$, (2.5) deki gibi bir yarı-grup özelliği gösterir,

2) $T(t)$, bir sürekli fonksiyondur,

3) $T(0)f = f$,

4) A lineer olmak üzere, $T(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineerdir.

Bu bölümde lineer yarı-gruplar ile ilgilenildiğinden dolayı, A operatörünün lineer olduğu kabul edilecektir.

Önerme 2.1 *Bir X Banach uzayındaki bir-parametreli bir $(T(t))_{t\geq 0}$ yarı-grubunun kuvvetli sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, herhangi bir $f \in X$ için $t \to 0$ iken $T(t)f \to f$ olmasıdır (Engel and Nagel 2000).*

Bu gözlemler ise, aşağıda verilen C_0 yarı-gruplar kavramını ortaya çıkarır.

2.2 C_0 YARI-GRUPLAR

Genel olarak C_0 yarı-grup, bir X Banach uzayı üzerinde tanımlı sınırlı bir lineer operatörün kuvvetli sürekli bir parametreli yarı-grubudur.

Tanım 2.3 (C_0 Yarı-Grup) *Bir C_0 yarı-grup (ya da kuvvetli sürekli yarı-grup), $T = \{T(t) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$ olmak üzere, X den X e sınırlı lineer operatörlerin bir ailesidir ki aşağıdaki özellikler sağlanır:*

1) $\forall t,\ s \in \mathbb{R}^+$ *için* $T(t+s) = T(t)\,T(s)$,

2) I, X *üzerinde özdeşlik (birim) operatörü olmak üzere,* $T(0) = I$,

3) X *üzerindeki norm ile birlikte,* $\forall f \in X$ *için* $\lim\limits_{t \to 0^+} T(t)\,f \to f$

dir.

Bundan sonra yarı-grup kelimesi, C_0 yarı-grup anlamına gelecektir. Yarı-grup tanımının daha dikkatli incelenmesi, aşağıdaki soruya neden olur:

"X üzerindeki norm ile birlikte,

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(t) - I\| = 0 \tag{2.9}$$

koşulu ile **3)** özelliğini değiştirebilir miyiz?". (Burada $\|\cdot\|$, X üzerindeki normu ifade eder.) Bu sorunun cevabı olumsuzdur. (2.9) de verilen koşulu sağlayan yarı-gruplar, sınırlı lineer operatörlerin düzgün sürekli yarı-grupları olarak adlandırılır. (2.9) de verilen koşul, kuvvetli sürekli yarı-gruplar için çok güçlüdür. Bu nedenle, düzgün sürekli yarı-gruplar, kuvvetli sürekli yarı-grupların bir alt kümesidir. Bu bölümde, yarı-grupların daha büyük kümeleri üzerine odaklanılacaktır. Daha küçük kümeler üzerine ise, gerektiği şekilde yorum yapılacaktır.

2.2.1 Bazı Sorular

Artık, bir yarı-grubun tanımı yapıldığı için A ve $T(t)$ arasındaki bağlantıyı açıklayacak olan aşağıdaki üç sorunun cevabı araştırılabilir:

(S_1) Verilen $T(t)$ yarı-grubundan, $e^{At}f$ deki A operatörü nasıl bulunur?

(S_2) Hangi A operatörleri, hangi yarı-grupları doğurur?

(S_3) Verilen A operatörü, $T(t)$ yarı-grubuna uygun olarak nasıl düzenlenebilir?
Bir sonraki kısımda bu soruların cevapları ele alınacaktır.

2.3 YARI-GRUP OLUŞUMU

Bu kısımda, yarı-grupların oluşumunu inceleyeceğiz. Buradan da, (2.4) ifadesindeki $T(t)$ ve (2.1), (2.2) problemindeki A operatörü arasındaki ilişkiyi ortaya koyacağız.

İlk olarak (S_1) sorusunu inceleyeceğiz. Buradan, (2.8) den

"$T(t) = e^{tA}$"

olduğu görülür. Dikkat edilmelidir ki,

$T'(t) = A.e^{At} = AT(t)$

ve

$T'(0) = A$

dır. Böylelikle,

$A = \frac{d}{dt}T(t)\mid_{t=0}$

ile A elde edilebilir. Bu da, aşağıdaki tanıma yol açar.

Tanım 2.4 (Üretici) *T bir yarı-grup olsun. T nin sonsuz küçük üreticisi, A ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir:*

$$Af = \lim_{t\to 0^+} A_t f = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)f - f}{t} \tag{2.10}$$

Burada limit, X üzerindeki normun koşulları içinde değerlendirilmiştir ve f, A nın tanım kümesi içindedir, ancak ve ancak, bu limit varsa. Bu nedenle, (2.10) e göre, A üreticisi T yarı-grubunun türevi alınarak elde edilmiştir. Buradan da, (2.1), (2.2) probleminin çözümünün,

$u(\cdot) = T(\cdot)f$

olduğu görülür. Bu da (S_1) sorusunu cevaplar.

2.3.1 A nın Yapısı Üzerine

Şimdiye kadar, düzgün sürekli yarı-gruplar ve kuvvetli sürekli yarı-gruplar olmak üzere, lineer yarı-grupların iki tipini görmüş olduk. Böylece (S_2) sorusuna dayanarak, "Yarı-grupların iki farklı tipini, hangi A operatörleri doğurur?" sorusunu ele aldık. Özellikle, A nın bir sınırlı operatör mü yoksa sınırsız operatör mü olduğu, çok önemlidir.

Neredeyse her zaman karşımıza çıkan, ilginç problemler ile çalışmak daha zordur. Bu nedenle, çoğu uygulamalarda, A bir sınırsız operatör olacaktır. Aslında, düzgün sürekli yarı-gruplar ile kuvvetli sürekli yarı-gruplar arasındaki tek fark, A nın yapısıdır. Yani, daha açık olarak, A, bir düzgün sürekli yarı-grup T nin üreticisidir, ancak ve ancak, A bir sınırlı operatördür. Bu nedenle, eğer T, kuvvetli sürekli bir yarı-grup ise, o zaman T yarı-grubu, sınırsız bir A üreticisine sahip olur.

Gerçek şu ki, A operatörü (2.1), (2.2) problemindeki gibi sınırsız olabilir. Bu şaşırtıcı bir sonuç olmamalıdır, çünkü $\frac{d}{dx}$ türev operatörünün sınırsız olduğu bilinmektedir. Bu durum, (S_2) sorusunu doğru yapmadığı için, bu soruya tekrar geri dönülecektir.

2.3.2 $T(t)$ nin Yapısı Üzerine

(S_3) sorusunu incelemek için (2.8) i hatırlayalım. (2.8) deki üstel, A operatöründen $T(t)$ yarı-grubunu elde etmede önemli bir rol oynamaktadır. Bu nedenle, aşağıdaki şartları inceleyelim:

1) $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$,

2) $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{tA}{n}\right)^{-n}$,

3) $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{\lambda - A}), \qquad \lambda > \mathrm{Re}\,(A)$

dır. Burada $\mathcal{L}^{-1}$, Laplace dönüşümünün tersini göstermektedir.

Artık, A nın sınırlılığının, sürekli yarı-grubun türünü belirlediğini görmüş olduk. Bu nedenle, yukarıdaki sorunun, operatörlerin sınırlılığı ve sınırsızlığı bağlamında cevaplanması gerekmektedir.

İlk olarak, daha basit olan sınırlı durumu ele alalım. $T(t)$ yarı-grubunun üreticisinin A olduğunu göstermek, sınırlı durum için zor değildir. Bu nedenle, $T(t)$ yarı-grubu,

$T(t) = e^{At}$ olarak düzenlendiğinde, A operatörünün sınırlı olması durumunda, (S_3) sorusu cevaplanmış olur. Bu nedenle (2.8) deki öneri, sınırlı bir A üreticisi için doğrudur. Buna ek olarak $t \to T(t) = e^{tA}$ dönüşümü türevlenebilirdir.
Peki, A operatörü sınırsız olduğunda, yarı-grup nasıl oluşturulabilir? Ayrıca, (S_2) sorusuna geri dönelim ve "A nın hangi özellikleri, onu, bir kuvvetli sürekli yarı-grubun üreticisi yapar?" sorusunu soralım. Bu sorunun cevabı, Hille-Yosida teoremi olarak adlandırılan, lineer yarı-grupların "ana teoremi" içinde verilmiştir.

2.4 HILLE-YOSIDA TEOREMİ

Bir önceki kısımda, sınırlı üreticiler ve onların düzgün sürekli yarı-grupları için temel sonuçları göstermiş olduk. Bu kısımda, birçok ilginç problemi inceleyebilmek için önemli olan sınırsız üreticileri ele alacağız. Bu üreticiler için de, sınırlı üreticiler için kullandığımız yaklaşımı kullanmak daha uygun olacaktır. Ancak, yukarıda bahsedilen serilerin yakınsaklığı, A sınırsız olduğunda uygun değildir. Daha önce gösterilen, "A operatörünü, bir yarı-grubun üreticisi yapan nedir?" ve "üreticiden, $T(t)$ yarı-grubunu nasıl elde ederiz?" sorularını hatırlatalım.

2.4.1 Rezolvantlar Üzerine Notlar

Sonuç olarak, bu bölümde A operatörü ve $T(t)$ yarı-grubu arasındaki ilişkiler araştırılmaktadır. Bunu yaparken de, A operatörünün rezolvantı ve $T(t)$ yarı-grubu arasında bir ilişki kurulabilir. Bunun için,

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I)^{-1} \in L(X) \right\}$$

ile verilen kompleks sayılar kümesini hatırlayalım. Bu kümeye, A operatörünün regüler değerler (veya rezolvant) kümesi denir.

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

kümesi ise, A operatörünün spektrumu olarak adlandırılır (Musayev ve Alp 2000).
A operatörünün rezolvantı (veya çözücü operatörü), $R(\lambda; A)$ ile gösterilen, sınırlı lineer operatörlerin bir ailesidir. Burada, $\lambda \in \rho(A)$ olmak üzere,

$$R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

dir. A operatörünün rezolvantının $T(t)$ yarı-grubu ile arasındaki ilişkiyi görebilmek için, aşağıdaki eşitliği göz önüne alalım:

$$\frac{1}{\lambda - A} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{tA} dt.$$

Burada, $\operatorname{Re}(\lambda) > A$ ile birlikte $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $A \in \mathbb{R}$ dir. Aslında, yukarıdaki eşitlikte özel olarak, $f(t) = e^{tA} = T(t)$ ve $s = \lambda$ alarak Laplace dönüşümünü elde ederiz. Bu eşitlik, aşağıdaki operatör versiyona yol açar:

$$R(\lambda; A) f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) f dt.$$

Burada, $\lambda > 0$ dır. Bu yüzden rezolvant, yarı-grubun Laplace dönüşümü gibi düşünülebilir. Bilindiği gibi Laplace dönüşümü, sınır değer problemleri de dahil olmak üzere, diferensiyel denklemler için çeşitli problemleri çözmekte kullanılmaktadır. Diğer taraftan, ters Laplace dönüşümü kullanılarak, rezolvanta bağlı olarak, yarı-grubun ifadesi elde edilebilir. Bu yöntem, e^{tA} yı görüntülemek için tek yoldur.

Ayrıca, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{tA}{n}\right)^{-n}$ iken, e^{tA} yı aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$e^{tA} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{tA}{n}\right)^{-1}\right]^n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{t}\left(\frac{n}{t} I - A\right)^{-1}\right]^n. \tag{2.11}$$

Yani, $\lambda = \frac{n}{t}$ olmak üzere e^{tA}, bu formül içine gömülü, $(\lambda I - A)^{-1}$ rezolvantıdır.

Teorem 2.2 *$T(t)$ bir yarı-grup olsun. $w \in \mathbb{R}$ ve $M \geq 1$ sabitleri vardır öyleki aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\|T(t)\| \leq M e^{wt}, \qquad 0 \leq t \leq \infty. \tag{2.12}$$

Dolayısıyla, yarı-grup için her zaman (2.12) eşitsizliğinde gösterildiği gibi bir sınır bulunabilir.

Tanım 2.5 (Daralma Yarı-Grubu) *(2.12) de, $w = 0$ ve $M = 1$ olduğunda, yani, $\|T(t)\| \leq 1$ olduğunda, $T(t)$ yarı-grubu, bir daralma yarı-grubu olarak adlandırılır.*

Teorem 2.3 *$(T(t))_{t\geq 0}$ ailesi, X Banach uzayında kuvvetli sürekli yarı-grup ve $w \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$ sabitleri için $t \geq 0$ olmak üzere*

$$\|T(t)\| \leq M e^{wt}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $(A, D(A))$ üreteci için aşağıdaki iddialar geçerlidir:

1) *Her* $f \in X$ *fonksiyonu ve* $\lambda \in \mathbb{C}$ *sayısı için* $R(\lambda) f := \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(t) f d(t)$ *integrali varsa* $\lambda \in \rho(A)$ *dır ve* $R(\lambda,\ A) = R(\lambda)$ *olur.*

2) $\operatorname{Re}\lambda > w$ *ise* $\lambda \in \rho(A)$ *ve rezolvant,* ***1)*** *iddiasındaki integral ifadesiyle verilir.*

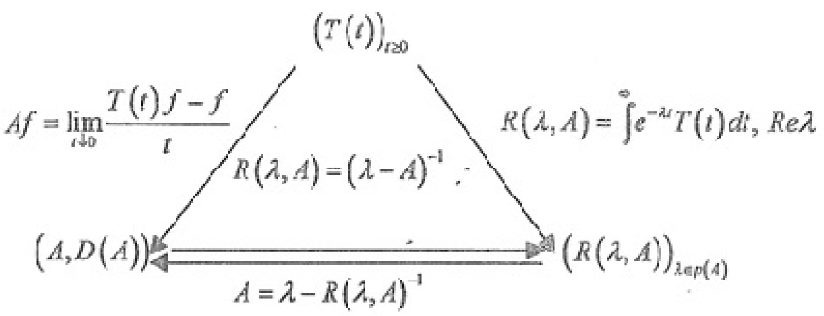
3) *Her* $\operatorname{Re}\lambda > w$ *için* $\|R(\lambda,\ A)\| \leq \dfrac{M}{\operatorname{Re}\lambda - w}$ *eşitsizliği vardır.*

1) *özelliğindeki* $R(\lambda,\ A)$ *dönüşümü için alınmış olan formül rezolvantın integral gösterimidir. Her* $f \in X$ *için*

$$R(\lambda,\ A) f = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda s} T(t) f dt$$

eşitliği vardır (Engel and Nagel 2000).

$T(t)$ yarı-grubu, A üreticisi ve A operatörünün rezolvantı arasında nasıl bir ilişki olduğu aşağıdaki diyagram yardımı ile kolaylıkla görülebilir:



Şekil 2.1: Yarı-grup, üretici ve rezolvant arasındaki ilişki diyagramı (Engel and Nagel 2000)

Teorem 2.4 (Hille-Yosida) *Bir lineer sınırsız* A *operatörü, bir* C_0 *yarı-grubun üreticisidir, ancak ve ancak,*

1) A*, bir kapalı operatördür,*

2) A*, yoğun bir* $D(A)$ *bölgesine sahiptir,*

3) $\forall\lambda > 0$ *için* $\lambda \in \rho(A)$ *dır,*

4) $\|R(\lambda; A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$

dır.

Bu teoremin ispatı, oldukça uzundur. Bu nedenle, teoremin bu tezde ispatı yerine uygulamaları ele alınacaktır. Ayrıca, (S_2) sorusuna cevap olarak, A nın karakterini daha ayrıntılı olarak ortaya koymamıza yardımcı olur.
Ayrıca, A nın rezolvantının, yarı-grubun Laplace dönüşümü olduğuna dikkat edilmelidir. Bu durumda Hille-Yosida Teoremi son derece önemlidir.

BÖLÜM 3

HILLE-YOSIDA TEOREMİNİN UYGULAMALARI

3.1 MAKSİMAL MONOTON OPERATÖRLERİN TEMEL TANIM VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölüm boyunca H, bir Hilbert uzayını gösterecektir.

Tanım 3.1 *Eğer,* $\forall\ v \in D(A)$ *için*

$(Av, v) \geq 0$

sağlanıyorsa, $A : D(A) \subset H \to H$ *sınırsız lineer operatörü, monoton olarak adlandırılır. Eğer, ek olarak,* $R(I + A) = H$, *yani* $\forall f \in H$ *için* $\exists u \in D(A)$ *vardır öyle ki* $u + Au = f$ *o takdirde* A *operatörüne maksimal monoton operatör denir.*

Önerme 3.1 A *bir maksimal monoton operatör olsun. O takdirde;*

1) $D(A)$, H *da yoğundur,*

2) A, *bir kapalı operatördür,*

3) $\forall\ \lambda > 0$ *için* $(I + \lambda A)$, $D(A)$ *dan* H *ya bijektiftir,* $(I + \lambda A)^{-1}$ *bir sınırlı operatördür ve* $\left\|(I + \lambda A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$

dir.

3.2 TEOREM (HILLE-YOSIDA)

A bir maksimal monoton operatör olsun. O takdirde, verilen herhangi bir $u_o \in D(A)$ için, tek bir

$u \in C^1([0, +\infty); H) \cap C([0, +\infty); D(A))$

fonksiyonu vardır öyle ki

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= 0, \qquad [0, +\infty) \quad \text{üzerinde,} \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

dır. Üstelik, her $t \geq 0$ için,

$$|u(t)| \leq |u_0| \text{ ve } \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |Au(t)| \leq |Au_0|$$

dır.

Uyarı 3.1 *Yukarıdaki teoremin ilginç özelliklerinden bir tanesi de şudur: Evolüsyon problemi, $u + AU = f$ durağan denklemine indirgenir.*

3.3 SELF-ADJOINT DURUMU

$A : D(A) \subset H \to H$, $\overline{D(A)} = H$ ile birlikte, bir sınırsız lineer operatör olsun. H ile birlikte H^* tanımlanırken, A^*, H da bir sınırsız lineer operatör olarak görülebilir.

Tanım 3.2 *Eğer her $u, v \in D(A)$ için,*

$$(Au, v) = (u, Av)$$

ise A simetriktir, eğer

$$D(A^*) = D(A) \text{ ve } A^* = A$$

ise, A self-adjointtir.

Uyarı 3.2 *Sınırlı operatörler için simetrik ve self-adjoint operatör kavramları birbirine denktir. Ancak, eğer A operatörü sınırsız ise, simetrik ve self-adjoint operatör kavramları arasında çok ince bir fark vardır. Daha açık olarak, her self-adjoint operatör simetriktir. Tersi doğru değildir:*

Bir A operatörü simetriktir $\Leftrightarrow$ $A \subset A^*$ dır, yani, $D(A)$ üzerinde, $D(A) \subset D(A^*)$ ve $A^* = A$ dır. A simetrik olabilir ve $D(A) \neq D(A^*)$ eşitsizliği ortaya çıkabilir. Eğer A maksimal monoton operatör ise, o zaman,

$$(A \text{ simetriktir}) \Leftrightarrow (A, \text{ self-adjointtir})$$

dir.

Önerme 3.2 *A bir maksimal monoton simetrik operatör olsun. O takdirde A, self-adjointtir.*

Uyarı 3.3 *Eğer A bir monoton operatör (hatta bir simetrik monoton operatör) ise o zaman, A^* ın monoton olmasına gerek yoktur. Bununla birlikte, aşağıdaki özellikler eş değerdir:*

$$\begin{aligned} A, \textit{maksimal monotondur} &\Leftrightarrow A^*, \textit{ maksimal monotondur.} \\ &\Leftrightarrow A \textit{ kapalıdır, } D(A) \textit{ yoğundur, } A \textit{ ve } A^* \textit{ monotondur.} \end{aligned}$$

Teorem 3.3 *A, bir self-adjoint maksimal monoton operatör olsun. O taktirde, her $u_0 \in H$ için tek bir*

$$u \in C([0,+\infty);H) \cap C^1((0,+\infty);H) \cap C((0,+\infty);D(A))$$

fonksiyonu vardır öyleki

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= 0, \qquad (0,+\infty) \textit{ üzerinde,} \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

dır. Üstelik, her $t > 0$ için,

$$|u(t)| \le |u_0| \ \textit{ ve } \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \le \frac{1}{t}|u_0|.$$

Her k, ℓ tamsayısı için,

$$u \in C^k\left((0,+\infty);D\left(A^\ell\right)\right). \tag{3.2}$$

BÖLÜM 4

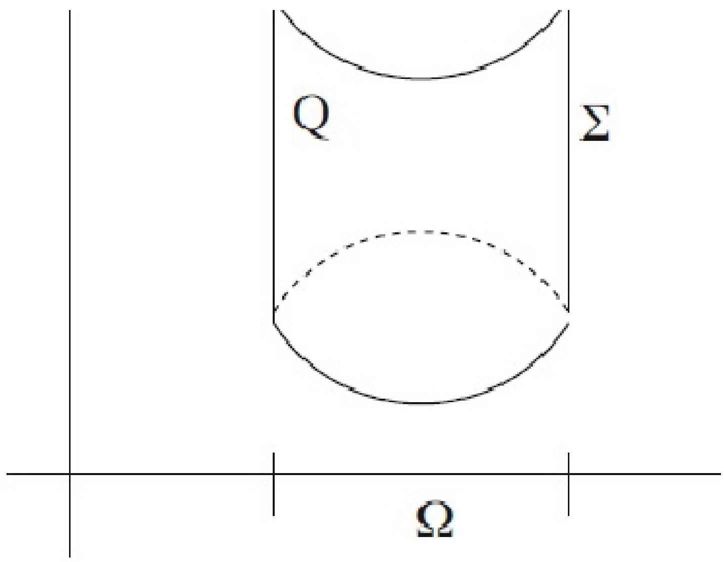
EVOLÜSYON PROBLEMLERİ

4.1 ISI DENKLEMİ: VARLIK, TEKLİK VE REGÜLERLİK

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, Γ sınırı ile birlikte bir açık küme olsun. Q ve Σ yı aşağıdaki şekilde oluşturalım.

$$\begin{aligned} Q &= \Omega \times (0, +\infty), \\ \Sigma &= \Gamma \times (0, +\infty). \end{aligned}$$

Burada Σ, aşağıdaki Q silindirinin yan sınırı olarak adlandırılır. Şekil 4.1' e bakınız.



Şekil 4.1: Şekil 4.1: Isı Denklemi için tanım bölgesi (Brezis 2011)

Aşağıdaki problemi göz önüne alalım:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad (x,t) \in Q, \tag{4.1}$$

$$u = 0, \quad (x,t) \in \Sigma \times (0,T), \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{4.3}$$

(4.1) denkleminin (4.2), (4.3) koşullarını sağlayan bir $u(x,t) : \overline{\Omega}\times[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ çözümünü bulalım.

Burada $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, x değişkenler uzayında Laplacian, t zaman değişkeni, ve $u_0(x)$ verilen bir fonksiyon başlangıç (ya da Cauchy) koşulu olarak adlandırılır.

(4.1) denklemi, ısı denklemi olarak adlandırılır. Bu denklemler, t zamanında Ω bölgesindeki u sıcaklık dağılımını modelize eder. Isı denklemi ve onun türevleri birçok difüzyon olayında ortaya çıkar. Örneğin, ısı difüzyonu, diğerleri arasından sadece bir örnektir. Isı denklemi, bir parabolik denklemin en basit örneğidir (Kısmi diferensiyel denklemlerin, "eliptik", "parabolik", hiperbolik" olarak üç kategori içinde geleneksel sınıflandırması ile ilgili bakınız: R. Courant-D. Hilbert).

(4.2) denklemi, (homojen) Dirichlet sınır koşuludur. Bu koşul,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \Sigma \text{ üzerinde,} \tag{4.4}$$

Neumann koşulu ile değiştirilebilir. Burada n, Γ ya göre dışa doğru birim normal vektördür. (4.2) koşulu, Γ sınır koşulunun sıfır sıcaklıkta tutulması varsayımına karşılık gelir iken; (4.4) koşulu, Γ genelinde ısı akışının sıfır olduğu durumun varsayımına karşılık gelir. (4.1), (4.2), (4.3) problemi, bir H uzayındaki değerleri ile birlikte, $[0,+\infty)$ üzerinde tanımlı $u(x,t)$ gibi bir fonksiyon bulunarak çözülecektir. Burada H, sadece x' e bağlı olan bir fonksiyonlar uzayıdır. Örnek olarak, $H = L^2(\Omega)$ ya da $H = H_0^1(\Omega)$ verilebilir. $u(t)$ gösterimi ile, $u(t)$' nin H' nın bir elemanı olduğu kastedilmektedir, yani buradan, fonksiyonun $x \to u(x,t)$ şeklinde olduğu anlaşılmalıdır. Bu bakış açısı, önceki bölümün sonuçları ve Hille-Yosida teoreminin kombinasyonu ile birlikte, (4.1), (4.2), (4.3) probleminin çözümü için kolaylık sağlayacaktır.

Konunun daha kolay anlaşılabilmesi için, bu bölüm boyunca Ω' nın, Γ sınırı ile birlikte C^∞ sınıfından olduğu varsayılacaktır.

Teorem 4.1 *Kabul edelim ki $u_0 \in L^2(\Omega)$ olsun. O takdirde, (4.1) denkleminin (4.2), (4.3) koşullarını ve aşağıdaki*

$$u \in C\left([0,\infty); L^2(\Omega)\right) \cap C\left((0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right), \tag{4.5}$$

$$u \in C^1\left((0,\infty); L^2(\Omega)\right) \tag{4.6}$$

özelliklerini sağlayan tek bir $u(x,t)$ çözümü vardır. Üstelik,

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \text{için} \quad u \in C^\infty\left(\overline{\Omega} \times [\varepsilon,\infty)\right)$$

dır. Son olarak, $u \in L^2((0,\infty); H_0^1(\Omega))$ *ve* $\forall T > 0$ *için*

$$\frac{1}{2}|u(T)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)} dt = \frac{1}{2}|u_0|^2_{L^2(\Omega)} \tag{4.7}$$

sağlanır.

Yukarıdaki tartışma doğrultusunda, aşağıdaki gösterimler kullanılacaktır:

$$|u(T)|_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u(x,T)|^2 \, dx$$

ve

$$|\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) \right|^2 dx.$$

İspat. $H = L^2(\Omega)$ uzayında Hille-Yosida teorisini uygulayacağız.

$$\begin{aligned} D(A) &= H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ Au &= -\Delta u \end{aligned}$$

ile tanımlı, $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ sınırsız operatörünü göz önüne alalım.
Burada (4.2) sınır koşulu, A nın tanım kümesi içine dahil edilerek verilmiştir. Bu duruma dikkat etmek önemlidir. İddia ediyoruz ki A, bir self-adjoint maksimal monoton operatördür. O takdirde, Teorem 3.3 uygulanabilir ve (4.1) denkleminin (4.2), (4.3) koşullarını ve (4.5), (4.6) özelliklerini sağlayan tek bir çözümü olduğu sonucuna varılabilir.

i) A monotondur. O halde, her $u \in D(A)$ için

$$(Au, u)_{L^2} = \int_\Omega (-\Delta u)\, u = \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq 0$$

sağlanır.

ii) A, maksimal monotondur. O halde, $R(I + A) = H = L^2$ nin doğruluğunu göstermemiz gerekir. Ama bunu yapmak yerine, Teorem 1.4 den bilinmektedir ki; her $f \in L^2$ için, $u - \Delta u = f$ denkleminin tek bir $u \in H^2 \cap H_0^1$ çözümü vardır.

iii) A, self-adjointtir. Önerme 3.2, bunun doğruluğu için yeterlidir. Bu önerme yardımı ile A nın simetrik olduğunu kolaylıkla görülebilir. $\forall\ u, v \in D(A)$ için,

$$(Au, v)_{L^2} = \int_{\Omega} (-\Delta u)\, v = \int_{\Omega} \nabla u . \nabla v$$

ve

$$(u, Av)_{L^2} = \int_{\Omega} u\,(-\Delta v) = \int_{\Omega} \nabla u . \nabla v$$

sağlanır. Böylece, $(Au, v) = (u, Av)$ olduğu görülür.

Hemen sonrasında, sürekli birebirlik ile, her ℓ tamsayısı için, Teorem 1.4 den $D\left(A^{\ell}\right) \subset H^{2\ell}(\Omega)$ olduğu görülür. Daha açık bir ifade ile,

$$D\left(A^{\ell}\right) = \left\{u \in H^{2\ell}(\Omega) : u = \Delta u = ... = \Delta^{\ell-1} u = 0, \Gamma \text{ üzerinde}\right\}$$

şeklindedir. Teorem 3.3 den bilinmektedir ki, (4.1), (4.2), (4.3) ün u çözümü,

$$\textit{her } k, \ell \text{ için } u \in C^{k}\left((0, \infty); D\left(A^{\ell}\right)\right)$$

yı sağlar ve bu nedenle,

$$\textit{her } k, \ell \text{ için } u \in C^{k}\left((0, \infty); H^{2\ell}(\Omega)\right)$$

dır. Bunu takiben, Sonuç (1.1) dan yararlanarak,

$$\textit{her } k \text{ için } u \in C^{k}\left((0, \infty); C^{k}\left(\overline{\Omega}\right)\right)$$

elde edilir.

Şimdi (4.7) eşitliğinin ispatına geri dönelim. Bu ispat için, (4.1) denklemini u ile çarpıp, $\Omega \times (0, T)$ üzerinde integral alalım. Bununla birlikte, dikkat edilmesi gereken bir nokta da, $u(t)$ nin $(0, \infty)$ üzerinde türevlenebilir, fakat $[0, \infty)$ üzerinde türevlenebilir olmamasıdır.

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} |u(t)|^{2}_{L^2(\Omega)}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon, (4.6) özelliğinden bilindiği gibi, $(0, \infty)$

üzerinde C^1 sınıfındandır ve $t > 0$ için,

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \frac{1}{2}(u(t), u(t))_{L^2}. \\
\varphi'(t) &= \frac{1}{2}((u'(t), u(t)) + (u(t), u'(t)))_{L^2} \\
&= \frac{1}{2}2\left(u(t), \frac{du}{dt}(t)\right)_{L^2} = (u(t), \Delta u(t))_{L^2} \\
&= -\int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2
\end{aligned}$$

dir. Bu nedenle, $0 < \varepsilon < T < \infty$ için,

$$\varphi(T) - \varphi(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{T} \varphi'(t)\,dt = -\int_{\varepsilon}^{T} |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)}\,dt$$

elde edilir. Son olarak, $\varepsilon \to 0$ olsun. Bu durumda, $\varphi(\varepsilon) \to \frac{1}{2}|u_0|^2$ olduğundan, (Çünkü (4.5) özelliğinden bilindiği gibi

$$u \in C\left([0,\infty); L^2(\Omega)\right)$$

dır.)

$$u \in L^2\left((0,\infty); H_0^1(\Omega)\right)$$

olduğu bulunur ve ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\varphi(T) + \int_{\varepsilon}^{T} |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)}\,dt &= \varphi(\varepsilon) \\
\frac{1}{2}|u(T)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{0}^{T} |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)}\,dt &= \frac{1}{2}|u_0|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Böylece, (4.7) eşitliği sağlanır.

Eğer, u_0 üzerine ilave varsayımlar koyulursa, u çözümü $t = 0$ a kadar, daha regüler hale gelir. (Hatırlayalım ki $t = 0$ dan uzakta, Teorem 4.1 daima u fonksiyonunun düzgün olduğunu garantiler, yani her $\varepsilon > 0$ için u $\in C^\infty\left(\overline{\Omega} \times [\varepsilon,\infty)\right)$ dur.) ■

4.2 DALGA DENKLEMİ

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ bir açık küme olsun. Q ve Σ yı aşağıdaki şekilde oluşturalım:

$$\begin{aligned}
Q &= \Omega \times (0,\infty), \\
\Sigma &= \Gamma \times (0,\infty).
\end{aligned}$$

Aşağıdaki problemi göz önüne alalım:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad (x,t) \in Q, \tag{4.8}$$

$$u = 0, \quad (x,\cdot) \in \Gamma, \tag{4.9}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{4.11}$$

(4.8) denkleminin, (4.9)-(4.11) koşullarını sağlayan bir $u(x,t) : \overline{\Omega} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ çözümünü bulalım.

Burada $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, x değişkenler uzayında Laplacian, t zaman değişkeni ve u_0, v_0 verilen fonksiyonlardır.

(4.8) denklemi, dalga denklemi olarak adlandırılır. $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)$ operatörü, sıklıkla $\Box$ ile gösterilir ve d'Alembertian olarak adlandırılır. Dalga denklemi, bir hiperbolik denklemin tipik bir örneğidir.

$N = 1$ ve $\Omega = (0,1)$ iken, (4.8) denklemi, herhangi bir dış kuvvet olmadığı durumlarda, bir telin küçük titreşimlerini ifade eder (Denklemin tam hali, çok zor bir lineer olmayan denklemdir. (4.8) denklemi, bir denge noktası civarında bu denklemin lineerleştirilmiş halidir.). Her t için, $x \in \Omega \longmapsto u(x,t)$ fonksiyonunun grafiği, t anındaki telin konfigürasyonunu (durumunu) temsil eder. $N = 2$ olduğunda, (4.8) denklemi, bir elastik membranın küçük titreşimlerini ifade eder. Her t için, $x \in \Omega \longmapsto u(x,t)$ fonksiyonunun grafiği, t anındaki membranın konfigürasyonunu (durumunu) temsil eder. Daha genel olarak, (4.8) denklemi, bazı homojen elastik $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ortamında bir dalganın (akustik, elektromanyetik, vb.) yayılımını ifade eder.

(4.9) denklemi, (homojen) Dirichlet sınır koşuludur. Bu koşul, Neumann koşulu ile değiştirilebilir. Σ üzerinde $u = 0$ koşulu, telin (ya da membran) Γ üzerinde sabit olduğunu söylerken, Neumann koşulu, telin uç noktalarda serbest olduğunu söylemektedir.

(4.10) ve (4.11) denklemleri, sistemin başlangıç durumunu temsil etmektedir ki; başlangıç konfigürasyonu u_0 ile tanımlı iken, başlangıç hızı v_0 ile tanımlıdır. (u_0, v_0) verisi, genellikle Cauchy verisi olarak adlandırılmaktadır.

Konunun daha kolay anlaşılabilmesi için, bu kısım boyunca Ω nın, Γ sınırı ile birlikte C^∞ sınıfından olduğu varsayılacaktır.

Teorem 4.2 (Varlık ve Teklik) *Kabul edelim ki* $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *ve* $v_0 \in H_0^1(\Omega)$

olsun. O takdirde, (4.1) denkleminin, (4.2), (4.3), (4.4) koşullarını ve

$$u \in C\left([0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,\infty); H_0^1(\Omega)\right) \cap C^2\left([0,\infty); L^2(\Omega)\right) \tag{4.12}$$

özelliğini sağlayan, tek bir $u(x,t)$ çözümü vardır. Üstelik her $t \geq 0$ için

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)} = |v_0|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla u_0|^2_{L^2(\Omega)} \tag{4.13}$$

dır.

Yukarıdaki tartışma doğrultusunda, aşağıdaki gösterimler kullanılacaktır:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 dx$$

ve

$$|\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)\right|^2 dx$$

dır.

Uyarı 4.1 *(4.13) denklemi, sistemin enerjisinin zamana göre değişmez olduğunu gösteren korunum kanunudur.*

Teorem (4.2) in ispatına geçmeden önce bir regülerlik sonucuna değinelim:

Teorem 4.3 (Regülerlik) *Varsayalım ki başlangıç verisi, her k için*

$$u_0 \in H^k(\Omega), \quad v_0 \in H^k(\Omega)$$

olsun ve her $j \geq 0$, j tamsayısı için,

$$\begin{aligned} \Delta^j u_0 &= 0, \quad \Gamma \text{ üzerinde}, \\ \Delta^j v_0 &= 0, \quad \Gamma \text{ üzerinde}, \end{aligned}$$

uygunluk koşulları sağlansın. O zaman, (4.8)-(4.11) un u çözümü $C^\infty\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right)$ uzayına aittir.

Teorem 4.2 nin İspatı. $[0,\infty)$ üzerinde tanımlı vektör değerli bir $u(x,t)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Daha açık bir ifade ile, her $t \geq 0$ için $u(t)$, $x \longmapsto u(x,t)$ dönüşümünü ifade eder. (4.8) denklemi, birinci mertebeden bir denklem sistemi şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - v &= 0, \quad Q \text{ da}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta u &= 0, \quad Q \text{ da}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Buna ek olarak, $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ vektörünü oluşturalım. Böylece (4.14) denklem sistemi,

$$\frac{dU}{dt} + AU = 0 \tag{4.15}$$

haline gelir. Burada,

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

şeklindedir. Şimdi,

$$(U_1, U_2) = \int_\Omega \nabla u_1 . \nabla u_2 dx + \int_\Omega u_1 u_2 dx + \int_\Omega v_1 v_2 dx$$

iç çarpımı ile birlikte, $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ uzayında Hille-Yosida teorisini uygulayacağız. Burada,

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \text{ ve } U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

dir.

$$D(A) = \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \right) \times H_0^1(\Omega)$$

bölgesi ile birlikte, (4.16) tarafından tanımlanan $A : D(A) \subset H \to H$ sınırsız operatörünü göz önüne alalım. Burada (4.9) sınır koşulu, H uzayı içerisine dahil edilerek verilmiştir. Bu duruma dikkat etmek önemlidir. Σ üzerinde $v = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ koşulu, (4.9) koşulunun direkt bir sonucudur.

İddia ediyoruz ki $A + I$, H da maksimal monotondur:

i) $A + I$ monotondur. Yani, $(AU, U)_H + |U|_H^2 \geq 0$ dır. Gerçekten;

eğer

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$$

ise, iç çarpım tanımından;

$$
\begin{aligned}
(AU, U)_H &= \left(\begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = -\int_\Omega \nabla v . \nabla u - \int_\Omega vu - \int_\Omega (\Delta u)\, v, \\
|U|_H^2 &= \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega u^2 + \int_\Omega v^2
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
(AU, U)_H + |U|_H^2 &= -\int_\Omega \nabla v . \nabla u - \int_\Omega uv + \int_\Omega (-\Delta u)\, v + \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega u^2 + \int_\Omega v^2 \\
&= -\int_\Omega uv + \int_\Omega u^2 + \int_\Omega v^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

ii) $A+I$ maksimal monotondur. Bu ispat, $A+2I$ nın örten olduğunu ifade eder. Gerçekten;

$F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H$ verilsin. $AU + 2U = F$ denklemini çözmemiz gerekmektedir, yani daha açık olarak,

$u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ve $v \in H_0^1(\Omega)$

ile birlikte

$$
\begin{aligned}
-v + 2u &= f\,, \quad \Omega \text{ da}, \\
-\Delta u + 2v &= g, \quad \Omega \text{ da},
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

sistemini çözmemiz gerekmektedir. Burada, $-v + 2u = f$ denklemi, $v = 2u - f$ şeklinde düzenlenip, $-\Delta u + 2v = g$ denkleminde v yerine yazıldığında;

$$
\begin{aligned}
-\Delta u + 2(2u - f) &= g \\
-\Delta u + 4u - 2f &= g
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece, (4.17) sisteminden,

$$
-\Delta u + 4u = 2f + g \tag{4.18}
$$

elde edilir. (4.18) denklemi, Teorem 1.4 den, tek bir

$u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

çözümüne sahiptir.

Hille-Yosida teoremi (3.2 Teorem) uygulanarak,

$$U \in C^1([0,\infty); H) \cap C([0,\infty); D(A)) \tag{4.19}$$

ile birlikte

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} + AU &= 0, \qquad [0,\infty) \text{ üzerinde,} \\ U(0) &= U_0 \end{aligned} \tag{4.20}$$

probleminin tek bir çözümünün olduğu görülür. Burada, $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(A)$ dır. (4.19) den (4.12) sonucuna varılır.

Şimdi (4.13) eşitliğinin ispatına geri dönelim. Bu ispat için, (4.8) denklemini $\frac{\partial u}{\partial t}$ ile çarpıp, Ω üzerinde integral alalım:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0.$$

$$\underbrace{\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t} dx}_{1)} + \underbrace{\int_\Omega (-\Delta u)\frac{\partial u}{\partial t} dx}_{2)} = 0.$$

1) $$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 dx,$$

2) $$\int_\Omega (-\Delta u)\frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_\Omega \nabla u . \frac{\partial}{\partial t}(\nabla u)\, dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

dır. Buradan,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = 0$$

olduğu görülür. Yukarıdaki ifade, L^2 normu tanımından, aşağıdaki şekilde tekrar yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left|\nabla u\right|^2_{L^2(\Omega)} &= 0 \\
\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2_{L^2(\Omega)} dx+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left|\nabla u\right|^2_{L^2(\Omega)} dx &= 0 \\
\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right|^2_{L^2(\Omega)}-\left|\frac{\partial u}{\partial t}(0)\right|^2_{L^2(\Omega)}+\left|\nabla u(t)\right|^2_{L^2(\Omega)}-\left|\nabla u(0)\right|^2_{L^2(\Omega)} &= 0 \\
\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right|^2_{L^2(\Omega)}+\left|\nabla u(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} &= \left|\frac{\partial u}{\partial t}(0)\right|^2_{L^2(\Omega)}+\left|\nabla u(0)\right|^2_{L^2(\Omega)} \\
\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right|^2_{L^2(\Omega)}+\left|\nabla u(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} &= \left|v_0\right|^2_{L^2(\Omega)}+\left|\nabla u_0\right|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.13) eşitliği sağlanır. ■

Uyarı 4.2 *(4.8) dalga denklemini, (4.14) deki gibi birinci mertebeden bir denklem sistemine dönüştürme yöntemi, ya da, daha genel olarak, k. mertebeden bir diferensiyel denklemi, k tane birinci mertebeden denklemin oluşturduğu bir sisteme dönüştürme yöntemi, standart bir yöntemdir. Şöyle ki;*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

dalga denklemi,

$$p=\frac{\partial y}{\partial t},\quad q=c\frac{\partial y}{\partial x}$$

değişkenleri tanıtılarak, birinci mertebeden bir denklem sistemi olarak yazılabilir:

$$\frac{\partial p}{\partial t}=c\frac{\partial q}{\partial x},\quad \frac{\partial q}{\partial t}=c\frac{\partial p}{\partial x}$$

dır. Bu denklemler kısaca,

$$\frac{\partial a}{\partial t}=cB\frac{\partial a}{\partial x}$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$a=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{ ve } B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dir.

BÖLÜM 5

LIOUVILLE DENKLEMİ İÇİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ

Bu bölümde, operatör yarı-grup teorisi kullanılarak, Liouville denklemi için başlangıç değer probleminin çözülebilirliği araştırılmıştır. Başlangıç verisinin, L^2 uzayının bazı alt kümelerine ait olduğu durumlarda, bu problemin çözümünün varlık ve tekliği gösterilmiştir.

İlk olarak, aşağıdaki Liouville denklemini inceleyelim:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [H, u]\,. \tag{5.1}$$

Burada, $u \triangleq u\,(t, q, p)\,,\ H \triangleq H\,(t, q, p)\,,\ q \triangleq (q_1, ..., q_N)\,,\ p \triangleq (p_1, ..., p_N)$ şeklinde verilen fonksiyonlar olup, $[.,.]$, Poisson parantezi olarak adlandırılır:

$$[E, F] = \sum_{\ell=1}^{N} \left(\frac{\partial E}{\partial q_1} \frac{\partial F}{\partial p_1} - \frac{\partial F}{\partial q_1} \frac{\partial E}{\partial p_1} \right). \tag{5.2}$$

H, sistemin Hamilton fonksiyonudur.

Operatör yarı-grup teorisi kullanılarak, ele alınan problem için (5.1) denklemi yeniden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{du}{dt} + Au = 0. \tag{5.3}$$

Burada $A \triangleq -[H, .]$ dır. A, $L^2\left(R^{2N}\right)$ de tanımlı genelleştirilmiş bir diferensiyel operatör, ya da $L^2\left(R^{2N}\right)$ nin kendi içine bir dönüşümü olarak kabul edilebilir.

$$D\,(A) = \left\{ x \in L^2\left(R^{2N}\right) : Ax \in L^2\left(R^{2N}\right) \right\}$$

olsun. Kabul edelim ki A ya da H, $C_0^\infty\left(R^{2N}\right) \subseteq D\,(A)$ sağlasın. Burada $C_0^\infty\left(R^{2N}\right)$, elemanları kompakt supporta sahip ve düzgün fonksiyonlar olan bir test uzayıdır. Örneğin, dış kuvvetlerin olmadığı bir ortamda, birim kütle ile birlikte, k tane aynı parçacıktan oluşan bir sistemi göz önüne alalım. Böylece,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3k} p_i^2, \quad A = \sum_{i=1}^{3k} p_i\,(\partial/\partial p_i) \quad \text{ve} \quad C_0^\infty\left(R^{6k}\right) \subseteq D\,(A)$$

dır. u fonksiyonu, değeri $L^2\left(R^{2N}\right)$ den olan, t ye bağlı soyut bir fonksiyondur. Aşağıda, başlangıç koşulunu ele alalım:

$$u\mid_{t=0}= u_0. \tag{5.4}$$

Burada, $u_0 \triangleq u_0\,(q,p)$ dir. O halde, (5.3), (5.4) bağıntıları, Liouville denklemi için başlangıç değer problemi olarak adlandırılır.

Liboff (1990)' dan bilinen, Liouville denklemi için başlangıç değer probleminin çözümüne ilişkin dört yaklaşım vardır. Bu yaklaşımlar, Taylor seri açılımı, yörünge çözümleri, öz fonksiyon açılımları ve rezolvanttır. 1990 yılında Petrina ve Gezasimehko, yukarıda bahsi geçen özel sisteme dair, Liouville denklemi için başlangıç değer probleminin üzerinde çalışmışlardır ve A operatörünün $L^1\left(R^{6k}\right)$ uzayında, bir daralma operatör yarı-grubunun sonsuz küçük üreticisi olduğunu göstermişlerdir.

Teorem 5.1 *A operatörü, bir daralma operatör yarı-grubunun sonsuz küçük üreticisidir. Teorem 5.1' in ispatını vermeden önce, aşağıdaki yardımcı lemmalar ispatlanacaktır.*

Lemma 5.2 *A bir artan-üretici operatördür, yani, her $\in D\,(A)$ için $\operatorname{Re}(Au,u)\geq 0$ dır. Burada $(.,.)\,,\ L^2\left(R^{2N}\right)$ uzayındaki iç çarpımdır.*

İspat. (5.2) eşitliğinden bilinmektedir ki, her $u,v\in D\,(A)$ için,

$$(Av,u) = -\int \overline{u}\sum_{\ell=1}^{N}\left(\frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial v}{\partial p_1}-\frac{\partial v}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}\right)dqdp$$

dir. Kısmi integrasyon yöntemi ve Hamilton denklemi kullanılarak, yukarıdaki integrali aşağıdaki şekilde tekrar ifade edelim:

$$\begin{aligned}(Av,u) &= \overline{\int v\sum_{\ell=1}^{N}\left(\frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial \overline{u}}{\partial p_1}-\frac{\partial \overline{u}}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}\right)dqdp} \\ &= \int \overline{v}\sum_{\ell=1}^{N}\left(\frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial u}{\partial p_1}-\frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}\right)dqdp = -\overline{(Au,v)}.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Özel olarak,

$$(Au,u) = -\overline{(Au,u)}, \tag{5.6}$$

ya da eş değer olarak, her $u\in D\,(A)$ için,

$$\operatorname{Re}(Au,u) = 0 \tag{5.7}$$

dır. ■

Lemma 5.3 *A operatörü, $L^2\left(R^{2N}\right)$ uzayındaki yoğun bölgesi ile birlikte bir kapalı operatördür.*

İspat. $C_0^\infty\left(R^{2N}\right)$, $L^2\left(R^{2N}\right)$ de yoğun ve $C_0^\infty\left(R^{2N}\right) \subseteq D(A)$ olduğundan dolayı, $D(A)$ $L^2\left(R^{2N}\right)$ de yoğundur. Bu yüzden, A operatörünün $L^2\left(R^{2N}\right)$ uzayında bir kapalı operatör olduğunu göstermek, ispat için yeterlidir. Yani, $n \to +\infty$ iken, $D(A)$ da bir x_n dizisi vardır öyle ki,

$$x_n \to x, \qquad L^2\left(R^{2N}\right) \text{ de} \tag{5.8}$$

ve

$$Ax_n \to y, \qquad L^2\left(R^{2N}\right) \text{ de} \tag{5.9}$$

iken, $Ax = y$ ve $x \in D(A)$ dır. Gerçekten de, (5.5) denkleminden, her $u \in C_0^\infty\left(R^{2N}\right)$ için,

$$(Ax_n, u) = -\overline{(Au, x_n)} \tag{5.10}$$

dir. (5.9) denkleminden,

$$(Ax_n, u) \to (y, u) \tag{5.11}$$

dur. (5.8) denkleminden,

$$(Au, x_n) \to (Au, x) \tag{5.12}$$

dir. (5.10), (5.11) ve (5.12) denklemleri birleştirilirse, her $u \in C_0^\infty\left(R^{2N}\right)$ için,

$$(y, u) = -\overline{(Au, x)} = \langle Ax, u\rangle$$

olduğu gösterilebilir. Gerçekten de; (5.10) denklemi, (5.11) denkleminde yerine yazılırsa,

$$-\overline{(Au, x_n)} \to (y, u)$$

elde edilir. (5.12) denkleminden,

$$-\overline{(Au, x_n)} \to -\overline{(Au, x)}$$

dir. Dolayısıyla, buradan

$$(y, u) \to -\overline{(Au, x)} = (Ax, u)$$

dir. Genelleştirilmiş fonksiyon tanımından;

$(y, u) = -\overline{(Au, x)} = \langle Ax, u \rangle$

elde edilir. Burada ve aşağıda, $\langle ., . \rangle$ gösterimi ile, test fonksiyonu ve genelleştirilmiş fonksiyon arasında bir dual bağıntısı temsil edilir. Eğer genelleştirilmiş fonksiyon $L^2\left(R^{2N}\right)$ uzayına ait ise, o zaman $\langle ., . \rangle$ dual bağıntısı, $L^2\left(R^{2N}\right)$ uzayındaki iç çarpımı ifade eder. Yukarıda sözü geçen eşitlik ile genelleştirilmiş fonksiyon anlamında $Ax = y$ kastedilir. $y \in L^2\left(R^{2N}\right)$ olduğundan, $Ax \in L^2\left(R^{2N}\right)$ dir. Buna ek olarak, $x \in D(A)$ dır. Dolayısıyla, her $u \in C_0^\infty\left(R^{2N}\right)$ için, $(Ax, u) = (y, u)$ eşitliği sağlanr. Burada kastedilen, $C_0^\infty\left(R^{2N}\right)$, $L^2\left(R^{2N}\right)$ uzayında yoğun olduğundan, $\forall u \in L^2\left(R^{2N}\right)$ için $(Ax, u) = (y, u)$ olduğudur. Buradan da, $L^2\left(R^{2N}\right)$ uzayında $Ax = y$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Uyarı 5.1 *Eğer S, P de heryerde yoğun ise, o zaman S, P de yoğundur. Eğer $S \subset P$ ve S, P de yoğun ise, o zaman S, P de her yerde yoğundur. Özel olarak, Lemma 5.3 de, $S = C_0^\infty$ ve $P = L^2$ alındığında, $D(A)$ nın $L^2\left(R^{2N}\right)$ de yoğun olduğu kolaylıkla görülebilir (Morgan 1990).*

Lemma 5.4 $\lambda I + A$, $L^2\left(R^{2N}\right)$ *nin kendi üzerine (örten) bir dönüşümüdür. Yani, I bir özdeşlik dönüşümü olmak üzere, verilen her $\lambda > 0$ için $\lambda I + A$ dönüşümünün $R(\lambda I + A)$ rangı, $L^2\left(R^{2N}\right)$ dir.*

İspat. İlk olarak, Lemma 5.2 dan ya da (5.7) denkleminden, her $x \in D(A)$ ve $\lambda > 0$ için,

$$\|(\lambda I \pm A)x\| \geq \lambda \|x\| \tag{5.13}$$

sonucuna varılabilir. Bu sonuç, $\lambda I \pm A$ nın bir birebir dönüşüm olduğunu ifade eder. Yukarıdaki sonucun ardından, $R(\lambda I + A)$ nın, $L^2\left(R^{2N}\right)$ nin bir kapalı kümesi olduğunu gösterelim: Gerçekten, $n \to +\infty$ iken, $L^2\left(R^{2N}\right)$ uzayında $f_n \to f$ özelliği ile birlikte, her $\mathrm{f}_n \in R(\lambda I + A)$ dizisi alınır ve böylece *her* $u \in C_0^\infty\left(R^{2N}\right)$ için

$$(f_n, u) \to (f, u) \tag{5.14}$$

elde edilir. Diğer taraftan, bir $x_n \in D(\lambda I + A)$ elemanı vardır öyle ki

$(\lambda I + A)x_n = f_n$

dir. Burada,

$$D(\lambda I + A) = \left\{x \in L^2\left(R^{2N}\right) : (\lambda I + A)\, x \in L^2\left(R^{2N}\right)\right\},$$

$L^2\left(R^{2N}\right)$ den kendi üzerine tanımlı, $\lambda I + A$ dönüşümünün tanım kümesi olarak kabul edilebilir. (5.13) eşitsizliğinden görülür ki; $n \to +\infty$ iken, tüm $j \in Z^+$ için,

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{n+j}\| &\leq \lambda^{-1}\|(\lambda I + A)\, x_n - (\lambda I + A)\, x_{n+j}\| \\ &= \lambda^{-1}\|f_n - f_{n+j}\| \to 0, \end{aligned}$$

yani, $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $L^2\left(R^{2N}\right)$ uzayında temel bir dizidir. Böylece, bir $x \in L^2\left(R^{2N}\right)$ elemanı vardır öyle ki, $n \to +\infty$ iken $L^2\left(R^{2N}\right)$ de $x_n \to x$ dir. Dolayısıyla, (5.5) denkleminden,

$$(f_n, u) = ((\lambda I + A)\, x_n, u) = \overline{((\lambda I - A)\, u, x_n)} \to \overline{((\lambda I - A)\, u, x)} \tag{5.15}$$

elde edilir.
(5.14) ve (5.15) denklemlerinden bilinmektedir ki; her $u \in C_0^\infty\left(R^{2N}\right)$ için

$$(f, u) = \overline{((\lambda I - A)\, u, x)} = \langle(\lambda I + A)\, x, u\rangle,$$

yani, genelleştirilmiş fonksiyon anlamında $(\lambda I + A)\, x = f$ dir. $f \in L^2\left(R^{2N}\right)$ olduğundan, $x \in D(\lambda I + A)$ dır. Bu nedenle, $f \in R(\lambda I + A)$ dır.
Kabul edelim ki verilen her $\lambda > 0$ için $R(\lambda I + A) \neq L^2\left(R^{2N}\right)$ olsun. O zaman,

$$L^2\left(R^{2N}\right) = R(\lambda I + A) \cup R^{\perp}(\lambda I + A)$$

dır. Burada $R^{\perp}(\lambda I + A)$, $L^2\left(R^{2N}\right)$ uzayında $R(\lambda I + A)$ nın bir ortogonal kümesidir. Bu nedenle $f^{\perp} \neq 0$ ile birlikte bir $f^{\perp} \in R^{\perp}(\lambda I + A)$ elamanı vardır. Buradan şu sonuç çıkar ki, tüm $u \in C_0^\infty\left(R^{2N}\right)$ için,

$$\langle(\lambda I - A)\, f^{\perp},\ u\rangle = \overline{((\lambda I + A)\, u,\ f^{\perp})} = 0$$

dır. Yani, genelleştirilmiş fonksiyon anlamında,

$$(\lambda I - A)\, f^{\perp} = 0 \quad \text{ya da} \quad A f^{\perp} = f^{\perp} \in L^2\left(R^{2N}\right)$$

dir. Ayrıca, $f^{\perp} \in D(A)$ dır. Bu nedenle her $u \in C_0^\infty\left(R^{2N}\right)$ için $\left((\lambda I - A)\, f^{\perp}, u\right) = 0$ dır. $C_0^\infty\left(R^{2N}\right)$, $L^2\left(R^{2N}\right)$ uzayında yoğun olduğundan, her $u \in L^2\left(R^{2N}\right)$ için

$$\left((\lambda I - A)\, f^{\perp}, u\right) = 0$$

dır. Bu da, $L^2\left(R^{2N}\right)$ uzayında

$$(\lambda I - A)\, f^{\perp} = 0$$

olduğunu gösterir.
$\lambda I - A$, bir birebir dönüşüm olduğundan, $f^{\perp} = 0$ dır ki bu durum, yukarıda sözü geçen $f^{\perp} \neq 0$ hipotezi ile çelişir. Bu nedenle, $R(\lambda I + A) = L^2\left(R^{2N}\right)$ dir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 5.1 in İspatı. Lemma 5.4 tarafından, $(\lambda I + A)^{-1}$ in $\lambda > 0$ da analitik olduğu gösterilebilir. Ayrıca, pozitif α ve M sabitleri vardır öyleki her pozitif n tamsayısı ve her $\lambda > \alpha$ için,

$$|(\lambda I + A)|^{-n} \leq M\,(\lambda - \alpha)^{-n} \tag{5.16}$$

dır. Bu nedenle, Hille-Yosida-Phillips teoremine göre, (5.16) eşitsizliğinden ve Lemma 5.3 den bilinmektedir ki, Teorem 5.1 sağlanır.
Ayrıca, bir daralma operatör yarı-grubu $T(t)$, aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$T(t) = \lim_{\lambda \to +\infty} T_{\lambda}(t)\,. \tag{5.17}$$

Burada, her $x \in L^2\left(R^{2N}\right)$ için

$$A_{\lambda}x = \left[\lambda^2 (\lambda I + A)^{-1} - \lambda I\right] x \tag{5.18}$$

ile birlikte

$$T_{\lambda}(t) = e^{A_{\lambda}t} \tag{5.19}$$

dir ve $\lambda \to +\infty$ iken, her $x \in D(A)$ için

$$A_{\lambda}x \to -Ax \tag{5.20}$$

dir. O zaman $-A$, bir daralma operatör yarı-grubu olan $T(t)$ nin sonsuz küçük üreticisidir. ■
Benzer şekilde, aşağıda verilen Teorem 5.5 de ispatlanabilir.

Teorem 5.5 *A operatörü, bir daralma operatör yarı-grubunun sonsuz küçük üreticisidir.*

Operatör yarı-grup teorisine göre, Teorem 5.1 tarafından, Teorem 5.6 elde edilir.

Teorem 5.6 *Eğer* $u_0 \in D(A)$ *ise, o zaman (5.3), (5.4) başlangıç değer probleminin tek bir*

$$u = T(t)\, u_0 \in C^1\left([0, +\infty) ; L^2\left(R^{2N}\right)\right) \cap C^0\left([0, +\infty) ; D(A)\right)$$

çözümü vardır. Burada $T(t)$*, (5.17)-(5.20) denklemleri tarafından tanımlıdır.*

Bu teoremin ispatı, burada atlanmıştır. Tümevarım yöntemi kullanılarak, Teorem 5.6 den kolaylıkla Teorem 5.7 sonucuna varılabilir.

Teorem 5.7 *Eğer* $u_0 \in D\left(A^k\right)$*,* k *bir pozitif tamsayı ise, o zaman (5.3), (5.4) denklemlerinin* u *çözümü,*

$$\cap_{j=0}^{k} C^{k-j}\left([0, +\infty) ; D\left(A^j\right)\right)$$

ye aittir. Burada

$$D\left(A^{\circ}\right) \triangleq L^2\left(R^{2N}\right)$$

dir.

BÖLÜM 6

İKİ NOKTA TERS PROBLEMİ

Problem 6.1 *D ve G, $\mathbb{R}^n$ Euclid uzayında sırasıyla, ∂D ve ∂G sınırları yeterince düzgün olan sınırlı bölgeler olsun.*

Aşağıdaki ters problemi göz önüne alalım:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial v_i}-\frac{\partial u}{\partial v_i}\frac{\partial H}{\partial x_i}\right) &= f(x,v,t),(x,v)\in D\times G, 0\le t\le T, && (6.1)\\
u(x,v,0) &= u_0(x,v), \qquad (x,v)\in D\times G, && (6.2)\\
u(x,v,t) &= 0, \ \ (x,v)\in\partial(D\times G),\ 0\le t\le T, && (6.3)\\
u(x,v,T) &= u_1(x,v), \qquad (x,v)\in D\times G. && (6.4)
\end{aligned}$$

(6.1) denkleminin, (6.2), (6.3) koşullarını ve (6.4) ek bilgisini sağlayan, $u(x,v,t)$ ve $f(x,v,t)$ fonksiyon çiftini bulalım.

Burada (6.1) denklemi, zamana bağlı kinetik denklem, (6.2) başlangıç koşulu, (6.3) sınır koşulu ve (6.4), son aşırı belirginlik koşulu adı verilen ek bilgidir.

(6.1) denkleminde, f bilinmeyen kaynak fonksiyonunun yapısının aşağıdaki şekilde olduğunu varsayalım:

$$f(x,v,t)=p(x,v)+F(x,v,t). \qquad (6.5)$$

Burada F, bilinen fonksiyondur.

Problem 6.1, aşağıdaki gibi soyut formda da ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
u'(t)+Au(t) &= p+F(t) \qquad , \qquad 0\le t\le T, && (6.6)\\
u(0) &= u_0 \qquad , && (6.7)\\
u(T) &= u_1 \qquad . && (6.8)
\end{aligned}$$

Burada $A=[H,.]$, Poisson parantezi olup, tanım kümesi

$$D(A)=\left\{u\in L^2(D\times G):[H,u]\in L^2(D\times G), u\mid_{\partial(D\times G)}=0\right\}$$

şeklindedir. Ayrıca (6.3) sınır koşulu, A nın tanım kümesi içine dahil edilerek verilmiştir. Bu duruma dikkat etmek önemlidir.
Zamana bağlı olmayan bazı kinetik denklemler için, çeşitli ters problemlerin çözülebilirliği ve yaklaşık çözümleri Gölgeyen and Amirov (2011) da ele alınmıştır.
Jiang (2002)' da, A operatörünün, bir daralma operatör yarı-grubunun sonsuz küçük üreticisi olduğu ispatlanmıştır. Bu ispatta sırasıyla gösterilmiştir ki; A bir artan-üretici operatördür, A, $L^2\left(R^{2N}\right)$ uzayındaki yoğun bölgesi ile birlikte bir kapalı operatördür ve $\lambda I+A$, $L^2\left(R^{2N}\right)$ nin kendi üzerine (örten) bir dönüşümüdür, yani, I bir özdeşlik dönüşümü olmak üzere, verilen her $\lambda>0$ için $\lambda I+A$ dönüşümünün $R\left(\lambda I+A\right)$ rangı, $L^2\left(R^{2N}\right)$ dir.
Diğer taraftan, Prilepko (1999)' da, aşağıdaki teorem ispatlanmıştır:

Teorem 6.1 *Kabul edelim ki A operatörü, bir daralma operatör yarı-grubunu üretsin. Eğer, $u_0, u_1 \in D\left(A\right)$ ve F fonksiyonu,*

$$F_1 \in C^1\left(\left[0,T\right];L^2\left(D\times G\right)\right), \qquad F_2 \in C\left(\left[0,T\right];D\left(A\right)\right)$$

ile birlikte,

$$F = F_1 + F_2$$

formuna sahip ise, o zaman (6.6)-(6.8) ters probleminin

$$u \in C^1\left(\left[0,T\right];L^2\left(D\times G\right)\right)\cap C\left(\left[0,T\right];D\left(A\right)\right), \qquad p \in L^2\left(D\times G\right)$$

fonksiyonlar sınıfından bir çözümü vardır ve tektir.
Ayrıca, aşağıdaki kararlılık değerlendirmeleri sağlanır:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{C^1([0,T];X)} &\leq C\Big(\|u_0\|_{D(A)}+\|u_1\|_{D(A)}+\|F_1\|_{C^1([0,T];X)} \\
&\quad +\|F_2\|_{C([0,T];D(A))}\Big), && (6.9)\\
\|u\|_{C([0,T];D(A))} &\leq C\Big(\|u_0\|_{D(A)}+\|u_1\|_{D(A)}+\|F_1\|_{C^1([0,T];X)} \\
&\quad +\|F_2\|_{C([0,T];D(A))}\Big), && (6.10)\\
\|p\| &\leq C\Big(\|u_0\|_{D(A)}+\|u_1\|_{D(A)}+\|F_1\|_{C^1([0,T];X)} \\
&\quad +\|F_2\|_{C([0,T];D(A))}\Big). && (6.11)
\end{aligned}$$

KAYNAKLAR

Adams R A and Fournier J J F (2003) *Sobolev Spaces*. Elsevier, 305 pp.

Brezis H (2011) *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 599 pp.

Bulut H (2014) Vlasov-Poisson sistemi için bazı ters problemlerin çözümlerinin tekniğinin ve kararlılığının araştırılması. *Yüksek Lisans Tezi*, Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Zonguldak, 79 s.

Cauchy A L (1821) *Analyse Algebrique*. Cours D' analyse De L'ecole Royale Polytechnique, Premiere Partie.

Courant R and Hilbert D (1962) *Methods of Mathematical Physics (2 volumes)*. Interscience.

Çağlıyan M ve Çelebi O (2013) *Kısmi Diferensiyel Denklemler.* 3. Baskı, Dora Basım, Bursa, 276 s.

Davies E B (1980) *One Parameter Semigroups*. Academic Press, New York.

Dernek A N (2009) *Kısmi Türevli Denklemler ve Çözümlü Problemler.* 2. Baskı, Nobel Yayıncılık, 270 s.

Dunford N and Schwartz J T (1957) *Linear Operators, Part I: General Theory*. Wiley Inter-science Publishers, New York.

Engel K J and Nagel R (2000) *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Springer-Verlag New York, Inc., 586 pp.

Goldstein J A (1985) *Semigroup of Operators and Applications*. Oxford University Press.

Gölgeleyen F ve Amirov A (2011) On the approximate solution of a coefficient inverse problem for the kinetic equation. *Mathematical Communications*, 16: 283-298.

Iyanaga S and Kawada Y (1980) *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*. Cambridge, MA: MIT Press, 1005 pp.

Jiang Z (2002) On The Liouville Equation. *Transport Theory And Statistical Physics,* 31(3): 267-272.

Kabanikhin S I (2008) *Inverse and III-Posed Problems.* Siberian Scientific publishers, Novosibirsk, 450 pp.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Kolay N (2003) Banach Uzaylarında Bir Parametreli Yarı Gruplar. *Bilim Uzmanlığı Tezi*, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Zonguldak, 83s.

Kreyszig E (1989) *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley-Sons, Canada.

Lavrent'ev M M Romanov VG and Shishatskii S P (1986) *III.Posed Problems of Mathematical Pyhsics and Analysis.* American Mathematical Society, Providence RI.

Liboff R L (1990) *Kinetic Theory: Classical, Quantum, and Relativistic Descriptions*. Prentice Hall, Englewood Cliffs: New Jersey, 24-32.

Lions J L and Magenes E (1972) *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications.*Springer-New York.

Mikhailov V P (1978) *Partial Differential Equations*. Mir Publishers, Moscow.

Morgan J C (1990) *Point set Theory*. Marcel Dekker, New York, 296 pp.

Musayev B ve Alp M (2000) *Fonksiyonel Analiz*. Balcı Yayınları , Kütahya , 470 s.

Prilepko A I and Orlovsky D G and Vasin O A (1999) *Methods For Solving Inverse Problems In Matmematical Physics*. Marcel Dekker, Inc., New York. BASEL, 709 pp.

Rynne B P and Youngson M A (2000) *Linear Functional Analysis*. Springer-Verlag London Limited.

Sheree L LeVarge (2003) "Semigroups of Linear Operators" .available at: http: .//math.arizona.edu/~flaschka/Topmatter/

URL-1 *http://www.mi.fu.-berlin.de/math/groups/ag-logik/Lehre/UST-chapter01.pdf,* Ziyaret tarihi: 14.09.2015.

Vladimirov V S (1984) *Equations of Mathematical Physics*. Mir Publishers, Moscow.

Yaşar B İ (2009) *Diferensiyel Denklemler Ve Uygulamaları*. 4. Basım, Siyasal Kitabevi, Ankara.

Yaşar İ B (2005) *Uygulamalı Matematik*. 2. Baskı, Siyasal Kitabevi, Ankara, 289 s.

Yıldız M (1995) $Lu\equiv x\Delta u+ku_x=xf(x,y)$ Eliptik Denklemi İçin Genelleştirilmiş Fonksiyon Sınıflarında Bazı Problemler. *Doktora Tezi,* Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara, 86 s.

Zwillinger D (1997) *Handbook of Differential Equations*. 3rd ed. Boston, MA: Academic Press.

ÖZGEÇMİŞ

Betül ÇETİNCE, 1988 yılında Kırklareli' nde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Tekirdağ / Çorlu' da tamamladıktan sonra 2007 yılında girdiği Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nden 2013 yılında mezun oldu. Aynı yıl Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans programına başladı.

ADRES BİLGİLERİ:

Adres : Reşadiye Mah. Mandıracı Cad. Üren Ap. No:21
59850 TEKİRDAĞ / Çorlu

Tel : (543) 205 84 98
E-posta : cetince_betul@hotmail.com