BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI GADJİEV-İBRAGİMOV OPERATÖR SINIFLARININ YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

Sevda CEBECİK

DANIŞMAN: Nazmiye GÖNÜL BİLGİN

ZONGULDAK

Ocak 2016

KABUL:

Sevda CEBECİK tarafından hazırlanan "Bazı Gadjiev-İbragimov Tipi Operatör Sınıflarının Yaklaşım Özellikleri" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 14/01/2016

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Nazmiye GÖNÜL BİLGİN ....
Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. Tülin COŞKUN ....
Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. İlhan KARATAŞ ....
Bülent Ecevit Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. ..../..../2016

Prof. Dr. Kemal BÜYÜKGÜZEL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Scebecik

Sevda CEBECİK

ÖZET

Yüksek Lisans

BAZI GADJİEV-İBRAGİMOV OPERATÖR SINIFLARININ YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Sevda CEBECİK

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Nazmiye GÖNÜL BİLGİN
Ocak 2016, 157 sayfa

Bu tezde ilk bölüm; tez boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır. Bu bölümde bazı fonksiyon uzaylarının genel özellikleri tanıtılmıştır. Doğrusal pozitif operatörlerin genel özellikleri verilmiştir ve $C[a,b]$, $C_\rho(\mathbb{R})$, $C_\rho^k(\mathbb{R})$ uzaylarında Korovkin tipli yaklaşım teoremleri incelenmiştir. $C[a,b]$ ve $C_\rho^k(\mathbb{R})$ uzayları için klasik anlamda süreklilik modülünün genel özellikleri verilmiştir.

İkinci bölümde, $C[0,A]$ uzayında klasik Gadjiev-İbragimov operatörü ve Gadjiev-İbragimov operatörünün iki farklı genelleştirmesi tanımlanmıştır. Klasik Gadjiev-İbragimov operatörünün ve bu genelleştirmelerinin yaklaşım hızı alışılmış süreklilik modülü yardımıyla araştırılmıştır.

Üçüncü bölümde, sınırsız kümelerde Gadjiev-İbragimov operatörünün bazı genelleştirmeleri tanımlanarak yaklaşım özellikleri verilmiştir. Ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla bu operatörlerin yaklaşım hızı hesabı yapılmıştır.

ÖZET (devam ediyor)

Son bölüm olan dördüncü bölümde ise, sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal Pozitif Operatör, Korovkin Teoremi, Gadjiev-İbragimov Operatörü, Süreklilik Modülü, Ağırlıklı Süreklilik Modülü

Bilim Kodu: 403.03.01

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

APPROXIMATION PROPERTIES OF CLASSES OF SOME GADJIEV-IBRAGIMOV TYPE OPERATORS

Sevda CEBECİK

Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Asst. Prof. Nazmiye GÖNÜL BİLGİN
January 2016, 157 pages

The first chapter in this thesis is devoted to fundamental definitions and theorems. In this chapter general properties of some function spaces are presented. General properties of linear positive operators are given, and Korovkin Type approximation theorems in spaces $C[a,b]$, $C_\rho(\mathbb{R})$, $C_\rho^k(\mathbb{R})$ are investigated. General properties of classical modulus of continuity for spaces $C[a,b]$ and $C_\rho^k(\mathbb{R})$ are given.

In the second chapter, in $C[0,A]$ space classic Gadjiev-İbragimov operators and two different generalizations of the Gadjiev-Ibragimov operators are defined .The rate of convergence of classic Gadjiev-İbragimov operators and these generalizations of the Gadjiev-Ibragimov operators are investigated by means of the usual definition modulus of continuity.

In the third chapter ,by defining some generalizations of the Gadjiev-Ibragimov operators in unbounded sets,their approximation properties are given. Approximation speeds of these operators are studied by the weighted modulus of continuity.

ABSTRACT (continued)

In the last chapter, results and suggestions are given.

Keywords: Linear Positive Operator, Korovkin Theorem, Gadjiev-Ibragimov Operators, Modulus of Continuity, Weighted Modulus of Continuity.

Science Code: 403.03.01

TEŞEKKÜR

Yüksek lisansa başladığım günden itibaren güler yüzü, hoşgörüsü ve sevgisiyle onun öğrencisi olma ayrıcalığını ve mutluluğunu bana yaşatan, tezin her aşamasında bilgi ve tecrübelerini hiçbir zaman esirgemeyerek değerli fikir ve önerileri ile çalışmalarıma yön veren, tezin ortaya çıkmasında büyük emeği geçen çok değerli danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Nazmiye GÖNÜL BİLGİN'e, yüksek lisans yapmam konusunda beni yüreklendiren arkadaşım Sema AYAĞ'a, her konuda olduğu gibi bu çalışmalar esnasında da bana en büyük desteği veren babam Durcan CEBECİK, annem Naciye CEBECİK ve kardeşlerime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

SİMGELER DİZİNİ

$C[a,b]$: $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı

$\rho(x)$: Ağırlık fonksiyonu

$B_\rho(R)$: $Her\ x \in R$ için $|f(x)| \leq M_f.\rho(x)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı

$C_\rho(R)$: $B_\rho(R)$ uzayından olan sürekli fonksiyonların uzayı

$\|\cdot\|_{C[a,b]}$: $C[a,b]$ uzayında norm

$\|\cdot\|_\rho$: $B_\rho(R)$ ve $C_\rho(R)$ uzayında norm

$\|L\|_{X\to Y}$: X normlu uzayından Y normlu uzayına dönüşüm yapan L operatörünün normu

$C(R_0)$: $[0,\infty[$ üzerinde gerçel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı

$B(R_0)$: $C(R_0)$ daki sınırlı fonksiyonlar uzayı

$C_m(R_0)$: $\frac{f(x)}{1+x^m} \in B(R_0)$ olacak şekilde sürekli fonksiyonların uzayı

$C_m^2(R_0)$: $\{f: f, f', f'' \in C_m(R_0)\}$ biçiminde ifade edilen polinom ağırlıklı fonksiyonlar uzayı

$C^K(R_0)$: K_f, f ye bağlı bir sabit olmak üzere, $\left\{f \in C_m(R_0): lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{1+x^m} = K_f\right\}$ biçiminde tanımlanan ağırlıklı uzayı

$V_a^b(f)$: $[a,b]$ üzerinde f nin toplam varyasyonu

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Fonksiyonların doğrusal pozitif operatörler dizileri yardımıyla yaklaşımı, Fonksiyonlar Teorisinin önemli dallarından biridir ve bu alandaki araştırmalar dünyanın birçok ülkesinde matematiksel çalışmaların ilk sıralarında yer almaktadır. Yaklaşımlar teorisi, verilen bir uzaydaki bir fonksiyona iyi özellikleri olan aynı uzaya ait fonksiyonlar ailesi ile yaklaşım yapılıp yapılamayacağını araştıran matematiksel analizin önemli alanlarındandır. D ve E doğrusal normlu fonksiyon uzayları $D \subset E$ ve $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, D den E ye dönüşüm yapan doğrusal pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda $f \in D$ olmak üzere $A_n f \in E$ olacağından $(A_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi E uzayında bir dizidir. O halde yaklaşım problemi $(A_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin E normuna göre f ye yakınsamasının araştırılmasıdır. Yani hangi koşullar altında

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n f - f\|_E = 0\,, \qquad (f \in D)$$

eşitliğinin sağlanacağı araştırılmalıdır. Böylece teorik matematikte ve gerçek hayatta karşılaşılan, çözümlenmesi zor olan fonksiyonların daha basit ve daha kullanışlı diğer fonksiyonlar yardımıyla bir gösterimi elde edilir. Bu amaçla ilk araştırma 1885 te Weierstrass tarafından yapılmıştır.

1950 den sonra yaklaşım teorisi büyük gelişme göstermiş olup P. P. Korovkin, H. Bohman ve T. Popoviciu bu alanda önemli çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmalarla doğrusal pozitif operatörlerin düzgün yakınsaklığını belirlemek için basit ve kolayca kontrol edilebilecek kriterler oluşturulmuştur. Bu yöntem gereği doğrusal pozitif bir (L_n) operatörler dizisinin kapalı ve sınırlı bir $[a, b]$ aralığında sürekli bir f fonksiyonuna düzgün yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul $m = 0, 1, 2$ olmak üzere x^m şeklindeki üç test fonksiyonu için düzgün yakınsamanın geçerli olmasıdır.

1974 yılında A.D. Gadjiev C_ρ dan B_ρ uzayına dönüşüm yapan (L_n) doğrusal pozitif operatörler dizisinin $m = 0, 1, 2$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^m, x) - x^m\|_\rho = 0$$

şeklindeki üç koşulu sağlamasına rağmen

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f, x) - f(x)\|_\rho = 0$$

eşitliğini sağlaması gerekmediğini kanıtlamıştır. Yine Gadjiev bu çalışmasında yaklaşımın geçerli olduğu C_ρ nun uygun bir alt uzayını oluşturmuştur.

Yakınsamanın araştırılmasında ikinci bir problem şu şekilde ortaya çıkmıştır:

$D \subset E$ doğrusal normlu fonksiyon uzayları ve $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, D den E ye dönüşüm yapan doğrusal pozitif operatörler dizisi olmak üzere

$$(\|L_n f - f\|_D)_{n\in\mathbb{N}}$$

dizisinin sıfıra yakınsama hızının ne olduğudur. Yine bu alanda da son yıllarda birçok çalışma yapılmıştır.

Bu tezde 1970 yılında Gadjiev-İbragimov tarafından tanımlanan operatör ve bu operatörün genelleştirmeleri tanımlanarak $C[0, A]$ uzayında ve sınırsız kümeler üzerinde yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızları süreklilik modülü yardımıyla araştırılmıştır.

1.1 SONLU ARALIKTA TANIMLI SÜREKLİ FONKSİYONLAR UZAYI

Tanım 1.1.1

$D \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: D \to \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon ve $a \in D$ olsun.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

eşitliğini sağlayan f fonksiyonuna a noktasında *süreklidir* denir. D nin her noktasında sürekli olan fonksiyona *D üzerinde sürekli fonksiyon* denir (Coşkun 2002).

Tanım 1.1.2

$f: D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ sayısı var ve

$|x - y| < \delta$ olan her $x, y \in D$ için $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa

f fonksiyonuna D kümesi üzerinde *düzgün süreklidir* denir (Coşkun 2002).

Teorem 1.1.1

Kapalı ve sınırlı aralıkta tanımlı sürekli her fonksiyon düzgün süreklidir.

Uyarı 1.1.1

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f_n: D \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilmiş olsun. Bu durumda (f_n) fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul

$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$

olmasıdır.

Tanım 1.1.3

$\mathbb{R}$ de tanımlanmış ve $[a, b]$ aralığının tüm noktalarında sürekli ayrıca a'da soldan ve b'de sağdan sürekli olan fonksiyonlar uzayına $[a, b]$ *aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı* denir ve kısaca $C[a, b]$ şeklinde gösterilir. Açıkça $C[a, b]$ bir doğrusal uzaydır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 1.1.4

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve f, $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$'de sürekli olsun.

$C[a, b]$ uzayında norm;

$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \le x \le b} |f(x)|$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

1.2 SONSUZ ARALIKTA TANIMLI SÜREKLİ VE SINIRLI FONKSİYON UZAYLARI

Tanım 1.2.1

$\rho: \mathbb{R} \to [1, \infty[$ sürekli ve her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{|x|\to\infty} \rho(x) = \infty$$

olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x)| \leq M_f \rho(x) \tag{1.1}$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar uzayına $B_\rho(\mathbb{R})\, uzayı$ denir. ρ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir (Gadjiev 1976).

Tanım 1.2.2

$C_\rho(\mathbb{R}) = \{f \in B_\rho(\mathbb{R}): f\ sürekli\}$ şeklinde tanımlı ağırlık uzayı $\mathbb{R}$ üzerinde bir doğrusal uzaydır.

Tanım 1.2.3

$B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ ağırlıklı uzaylar için norm;

$$\|f\|_\rho = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} \tag{1.2}$$

biçiminde tanımlanır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995)

Tanım 1.2.4

$\rho: \mathbb{R} \to [1, \infty[$ sürekli ve

$$\lim_{|x|\to\infty} \rho(x) = \infty$$

şeklinde bir fonksiyon olmak üzere her $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{f(x)}{\rho(x)}=K_f<\infty \tag{1.3}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı $C_\rho^k(\mathbb{R})$ ile gösterilir ve açıkça bu uzay $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayının bir alt uzayıdır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

1.3 DOĞRUSAL POZİTİF OPERATÖRLERİN GENEL ÖZELLİKLERİ

Tanım 1.3.1

X ve Y iki fonksiyon uzayı, $L: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Her $f \in X$ için,

$$L(f,x)=g(x) \tag{1.4}$$

olacak şekilde bir $g \in Y$ bulunuyorsa *L'ye operatördür* denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Örnek 1.3.1

Aşağıda verilen üç örnek birer operatördür.

i$)D \subset C[0,\infty[$ olmak üzere $L: D \to C[0,\infty[$ olsun. Her $x \in [0,\infty[$ için

$$L(f,x)=e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}f(k)$$

bir operatördür. Bu operatör Szasz-Mirakjan operatörü olarak adlandırılır (Szasz 1950).

$$\boldsymbol{ii})L(f,x)=\int_a^x f(t)dt$$

$$\boldsymbol{iii})L(f,x)=\int_a^b f(t)e^{-ix}dt$$

Burada ii) de verilen operatör *integral operatörü* olarak adlandırılır.

Tanım 1.3.2

X, Y doğrusal uzaylar $f_1, f_2 \in X$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ olsun.

$L: X \to Y$ operatörü için,

$L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, x) = \alpha_1 L(f_1, x) + \alpha_2 L(f_2, x)$

eşitliği sağlanıyorsa L operatörüne *doğrusaldır* denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Uyarı 1.3.1

L doğrusal bir operatör olsun.

$$\begin{aligned} L(0, x) &= L(f(t) - f(t), x) \\ &= L(f(t), x) - L(f(t), x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $L(0, x) = 0$'dır (Coşkun 1997).

Tanım 1.3.3

$X^+ := \{f: f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}, Y^+ := \{g: g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$

iki fonksiyon uzayı olsun. $L: X \to Y$operatörü için,

$L(X^+) \subset Y^+$ oluyorsa L'ye *pozitif operatördür* denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Uyarı 1.3.2

L doğrusal pozitif operatörü negatif fonksiyonları negatif fonksiyonlara dönüştürür.

Şöyle ki; $f(x) \leq 0$ olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için $-f(x) \geq 0$ olur.

L pozitif olduğundan

$L(-f, x) \geq 0$

dır. L doğrusal olduğundan

$-L(f,x) \geq 0$

olur. O halde $L(f,x) \leq 0$'dır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Uyarı 1.3.3

Doğrusal pozitif operatörler monotondurlar.

Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \leq g(x)$ olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için

$f(x) - g(x) \leq 0$

olur. Böylece her $x \in \mathbb{R}$ için

$(f-g)(x) \leq 0$

eşitsizliği bulunur. Uyarı 1.3.2'den $L(f-g,x) \leq 0$ olduğundan $L(f\,,x) - L(g,x) \leq 0$ eşitsizliği sağlanır. Bu ise

$L(f,x) \leq L(g,x)$

olması demektir.

Örnek 1.3.2

$[0,\infty[$ aralığından $[0,\infty[$ a tanımlı gerçel değerli her f fonksiyonu için $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0,\infty[$ olmak üzere

$$L_n(f,x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k f\left(\frac{k}{n-k+1}\right)$$

operatörleri açıkça doğrusal ve pozitiftir. 1980 de tanımlanan bu operatör Bleimann, Butzer ve Hahn operatörü olarak bilinir

Tanım 1.3.4

X ve Y normlu uzaylar ve $L: X \to Y$ doğrusal bir operatör olsun. Her $f \in X$ için

$\|L(f,x)\|_Y \leq C\|f\|_X$

eşitsizliğini sağlayan bir $C > 0$ sayısı varsa L operatörüne sınırlı operatör denir. Bu C sabitlerinin en büyük alt sınırına L operatörünün normu denir.

$$\|L\|_{X\to Y} = \inf\{C : \|L(f,x)\|_Y \leq C\|f\|_X\} \tag{1.5}$$

şeklinde gösterilir.

Uyarı 1.3.4

X ve Y normlu uzaylar ve $L: X \to Y$ doğrusal sınırlı operatör olsun. $f \in X$ olmak üzere

$\|f\|_X \neq 0$ olsun. Bu durumda L'nin normu;

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f,x)\|_Y}{\|f\|_X} \tag{1.6}$$

biçiminde de tanımlanabilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Sonuç 1.3.1

$L: X \to Y$ sınırlı doğrusal operatörü için

$\|g\|_X = 1$ olmak üzere,

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|g\|_X = 1} \|L(g,x)\|_Y \tag{1.7}$$

eşitliği geçerlidir.

Tanım 1.3.5

L: $C_\rho \to B_\rho$ doğrusal pozitif operatörü için

$$\|L\|_{C_\rho\to B_\rho} = \|L(\rho,x)\|_\rho$$

dır.

Önerme 1.3.1

X ve Y normlu uzaylar ve $L: X \to Y$ tanımlı, doğrusal pozitif bir operatör olsun. Bu durumda;

$$|L(f,x)| \leq L(|f|,x) \tag{1.8}$$

eşitsizliği sağlanır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Kanıt

L doğrusal pozitif bir operatör olsun. Uyarı 1.3.3 gereği doğrusal pozitif operatörler monoton olduğundan;

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

eşitsizliğine L operatörü uygulanırsa;

$$L(-|f|,x) \leq L(f,x) \leq L(|f|,x)$$

olur. L operatörünün doğrusallığından,

$$-L(|f|,x) \leq L(f,x) \leq L(|f|,x)$$

olacaktır. Böylece $|L(f,x)| \leq L(|f|,x)$ bulunur.

Sonuç 1.3.2

$L: C_\rho \to B_\rho$ doğrusal pozitif operatörü sınırlıdır. Yani

$$\|L(f,x)\|_\rho \leq \|L\|_{C_\rho \to B_\rho} \|f\|_\rho \tag{1.9}$$

eşitsizliği sağlanır. Gerçekten;

$$\|L\|_{C_\rho \to B_\rho} = \sup_{\|f\|_\rho \neq 0} \frac{\|L(f,x)\|_\rho}{\|f\|_\rho} = \|L(\rho,x)\|_\rho$$

olur. $\|f\|_\rho \neq 0$ olan her $f \in C_\rho$ için,

$$\frac{\|L(f,x)\|_\rho}{\|f\|_\rho} \leq \|L(\rho,x)\|_\rho$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu ise $\|L(f,x)\|_\rho \leq \|L(\rho,x)\|_\rho \|f\|_\rho$ eşitsizliğinin sağlanması demektir. $C := \|L(\rho,x)\|_\rho$ olarak alınırsa L operatörünün sınırlı olduğu görülür.

Önerme 1.3.2

$L: C_\rho \to B_\rho$ doğrusal pozitif bir operatör olsun. Bu durumda $f \in C_\rho$ olmak üzere

$$\|L(f,x)\|_\rho \leq M\|f\|_\rho$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul

$$\|L(\rho,x)\|_\rho \leq M$$

olmasıdır (Coşkun 1997).

Kanıt

(⇒):

$L: C_\rho \to B_\rho$ doğrusal pozitif bir operatör ve $f \in C_\rho$ olsun. Bu durumda $L(f,x) \in B_\rho$ olup her $x \in \mathbb{R}$ için $|L(f,x)| \leq M\rho(x)$ eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $\rho \in C_\rho$ olduğundan

$|L(\rho,x)| \leq M\rho(x)$ olur. L pozitif ve $\rho \geq 1$ olduğundan, $L(\rho,x) \geq 0$ olup her $x \in \mathbb{R}$ için

$$L(f,x) \leq M\rho(x)$$

olur. Buradan $\frac{L(\rho,x)}{\rho(x)} \leq M$ ve $\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{L(\rho,x)}{\rho(x)} \leq M$ olacağından açıkça

$$\|L(\rho,x)\|_\rho \leq M < \infty$$

elde edilir. Yani $L: C_\rho \to B_\rho$ doğrusal pozitif operatörü $\|L(f,x)\| \leq M\|f\|_\rho$ eşitliğini sağlıyorsa bu durumda

$$\|L(\rho,x)\|_\rho \leq M$$

olur.

($\Leftarrow$):

Diğer taraftan herhangi bir L operatörü için

$\|L(\rho, x)\|_\rho \leq M$

eşitsizliği geçerli olsun. Bu durumda operatörün doğrusal pozitifliği ve monotonluğu kullanılarak her $f \in C_\rho$ için

$$
\begin{aligned}
|L(f, x)| &\leq L(|f|, x) \\
&= L\left(\frac{|f|\rho(t)}{\rho(t)}, x\right) \\
&\leq L\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|f|}{\rho(t)} \rho(t), x\right) \\
&= \|f\|_\rho L(\rho, x)
\end{aligned}
$$

olacağından her iki taraf $\rho(x)$ e bölünüp supremumu alınırsa

$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|L(f,x)|}{\rho(x)} \leq \|f\|_\rho \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{L(\rho,x)}{\rho(x)}$

eşitsizliği geçerli olup

$\|L(f, x)\|_\rho \leq \|f\|_\rho \|L(\rho, x)\|_\rho$

olur. Buradan

$\|L(f, x)\|_\rho \leq M\|f\|_\rho$

sonucuna ulaşılır. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

1.4 C[a,b], $C_\rho(\mathbb{R})$ VE $C_\rho^k(\mathbb{R})$ UZAYLARINDA KOROVKİN TİPLİ TEOREMLER

Teorem 1.4.1 (Korovkin Teoremi)

$m = 0,1,2$ olmak üzere L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi için

$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^m, x) - x^m\|_{C[a,b]} = 0$

şeklindeki üç koşul sağlanıyorsa bu durumda $[a, b]$ de sürekli ve a da soldan b de sağdan sürekli tüm $\mathbb{R}$ de sınırlı her f fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliği geçerlidir (Korovkin 1960)

Kanıt

f, $\mathbb{R}$'de sınırlı olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x)| \leq M$$

olacak şekilde en az bir $M > 0$ vardır.

$f \in C[a,b]$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır, öyle ki $x,t \in [a,b]$ için ve $|t-x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ olur.

Her $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a,b]$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda da $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği doğrudur. Gerçekten

$x \in [a,b]$ ve $t \notin [a,b]$ olsun. $|t-x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği

f fonksiyonu a da soldan b de sağdan sürekli olduğu için yine doğrudur.

Diğer taraftan $|t-x| \geq \delta$ olduğunda ise $\frac{|t-x|^2}{\delta^2} \geq 1$ olup açıkça

$$2M \leq \frac{2M}{\delta^2}|t-x|^2$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlikler ve üçgen eşitsizliği kullanılarak her $\varepsilon > 0$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M < \frac{2M}{\delta^2}|t-x|^2 + \varepsilon \tag{1.10}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[a,b]} &= \|L_n(f(t) - f(x) + f(x), x) - f(x)\|_{C[a,b]} \\ &= \|L_n(f(t) - f(x), x) + L_n(f(x), x) - f(x)\|_{C[a,b]} \\ &\leq \|L_n(f(t) - f(x), x)\|_{C[a,b]} + \|f(x)\|_{C[a,b]} \|L_n(1,x) - 1\|_{C[a,b]}\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerli olduğundan hipotezden (ε_n) sıfır dizisi olmak üzere

$$\|L_n(1,x)-1\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon_n$$

olacaktır. Böylece

$$\|L_n(f,x)-f(x)\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon\|L_n(1,x)-1\|_{C[a,b]} + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\|L_n(t^2,x)-x^2\|_{C[a,b]}$$

$$-2a\|L_n(t,x)-x\|_{C[a,b]} + b^2\|L_n(1,x)-1\|_{C[a,b]}$$

bulunur. Ayrıca (1.10) eşitsizliğinden son eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınacak olursa;

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f,x)-f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliği gösterilmiş olur. Dolayısıyla her $f \in C[a,b]$ için $L_n(f,x)$, f fonksiyonuna düzgün yakınsar. ■

Korovkin Teoreminin gerçel sayılar kümesi üzerinde sürekli olan fonksiyonlar için geçerli olmadığını veren aşağıdaki teorem Hacıyev tarafından kanıtlanmış olup Hacıyev Teoremi olarak bilinir.

Teorem 1.4.2 (Hacıyev Teoremi)

C_ρ dan B_ρ uzayına dönüşüm yapan bir L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi; $m = 0,1,2$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(t^m,x)-x^m\|_\rho = 0$$

şeklindeki üç koşulu sağlasın. Bu durumda en az bir $f^* \in C_\rho$ için

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|L_n(f^*,x)-f^*(x)\|_\rho > 0$$

eşitsizliği geçerlidir (Gadjiev 1976).

Sonuç 1.4.1

C_ρ dan B_ρ uzayına dönüşüm yapan L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi için $m = 0, 1, 2$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^m, x) - x^m\|_\rho = 0$$

şeklindeki üç koşul sağlansın. Bu durumda her $f \in C_\rho^k$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f, x) - f(x)\|_\rho = 0$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla C_ρ ağırlıklı uzayında Korovkin Tipli bir teorem geçerli olmayıp C_ρ^k alt uzayında geçerlidir.

1.4 kesmin bundan sonraki kısmında Coşkun (1998) çalışmasında yer alan gösterimler kullanılacaktır.

Tanım 1.4.1

$\rho_1 \neq \rho_2$ olmak üzere $C_{\rho_1}(\mathbb{R})$ den $B_{\rho_2}(\mathbb{R})$ ye, aşağıdaki özellikleri sağlayan doğrusal pozitif operatörler göz önünü alınacaktır.

$\boldsymbol{i}$) C_{ρ_1} den B_{ρ_2} ye tanımlanan L doğrusal pozitif operatörü,

$$\|L(\rho_1, x)\|_{\rho_2} \leq M_1$$

eşitsizliğini sağlar.

$\boldsymbol{ii}$) $L: C_{\rho_1}(\mathbb{R}) \to B_{\rho_2}(\mathbb{R})$ doğrusal pozitif operatör olsun.

$$\|L\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}} = \|L(\rho_1, x)\|_{\rho_2}$$

dir. Bu nedenle her $f \in C_{\rho_1}$ için,

$$\|L(f, x)\|_{\rho_2} \leq \|L(\rho_1, x)\|_{\rho_2} \|f\|_{\rho_1}$$

eşitsizliği sağlanır.

$\boldsymbol{iii}$) $n \in \mathbb{N}$ için $A_n: C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}$ ye doğrusal pozitif operatörler olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\rho_1(x) \leq M\rho_2(x)$$

koşulunu sağlayan $M > 0$ olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(\rho_1, x) - \rho_1(x)\|_{\rho_2} = 0$$

ise $\|A_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}}$ norm dizisi düzgün sınırlıdır (Coşkun 1998).

Uyarı 1.4.1

Yukarıdaki özellikten $\rho_1(x) \leq M\rho_2(x)$ olduğundan, $C_{\rho_1} \subset C_{\rho_2} \subset B_{\rho_2}$ dir (Coşkun 1998).

Kanıt

$f \in C_{\rho_1}$olsun.

$\|f(x)\| \leq M\rho_1(x) \leq \underbrace{M\,M}_{M'}\rho_2(x)$ ise,

$\leq M'\rho_2(x)$ olduğundan $f \in C_{\rho_2}$ dir.

Teorem 1.4.3

Aşağıdaki özellikleri sağlayan gerçel eksende monoton artan ve sürekli φ_1 ve φ_2 fonksiyonları, her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\varphi_1(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\varphi_2(x) = \pm\infty \text{ ve } \rho_1(x) \leq M\rho_2(x) \qquad (M > 0 \text{ keyfi bir sabit})$$

olmak üzere,

$\rho_k(x) = 1 + \varphi_k^2(x),\ k = 1, 2$ ve $lim_{x\to\infty}\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} = a \neq 0$ olsun.

$A_n: C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}$ ye bir doğrusal pozitif operatörler dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n(\varphi_1^\nu, x) - \varphi_1^\nu(x)\|_{\rho_2} = 0 \ , \nu = 0, 1, 2 \qquad (1.11)$$

üç koşulu sağlansın. Bu durumda bir $f^* \in C_{\rho_1} \subset B_{\rho_2}$ vardır öyle ki

$$\limsup_{n\to\infty}\|A_n(f^*, x) - f^*(x)\|_{\rho_2} \neq 0$$

dır (Coşkun 1998).

Kanıt

φ_1 ve φ_2 fonksiyonları için, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$A_n(f,x):=\begin{cases} f(x)+\dfrac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)}\left[\dfrac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)}f(x+1)-f(x)\right] & ;0\le x\le n \\ f(x) & ;x\notin[0,n]\end{cases}$$

biçiminde tanımlı operatörler dizisi olsun.

Genelliği bozmadan, $\varphi_1(0)=0$ ve $\varphi_2(0)=0$ iken $\overline{\varphi_1}(x):=\varphi_1(x)-\varphi_1(0)$ ve $\varphi_1(0)\neq 0$ olduğunda $\overline{\varphi_1}(0)=0$ olarak kabul edilsin.

İlk olarak, $f_1$ve $f_2\in C_{\rho_1}$ve $\alpha_1,\ \alpha_2\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\|x\|\le n$ için (A_n) operatör dizisinin doğrusal ve pozitif olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned}A_n(\alpha_1f_1+\alpha_2f_2,x) &= (\alpha_1f_1+\alpha_2f_2)(x)+\frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)}\left[\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)}(\alpha_1f_1+\alpha_2f_2)(x+1)\right. \\ &\quad \left.-(\alpha_1f_1+\alpha_2f_2)(x)\right] \\ &= \alpha_1f_1(x)+\alpha_2f_2(x)+\frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)}\left[\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)}\ \alpha_1f_1(x+1)\right. \\ &\quad \left.+\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)}\ \alpha_2f_2(x+1)-\ \alpha_1f_1(x)-\ \alpha_2f_2(x)\right] \\ &= \alpha_1f_1(x)+\frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)}\left[\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)}\ \alpha_1f_1(x+1)-\ \alpha_1f_1(x)\right] \\ &\quad +\alpha_2f_2(x)\frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)}\left[\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)}\ \alpha_2f_2(x+1)-\ \alpha_2f_2(x)\right] \\ &= \alpha_1\left[f_1(x)+\frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)}\left[\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)}\ \alpha_1f_1(x+1)-\ \alpha_1f_1(x)\right]\right] \\ &\quad +\alpha_2\left[f_2(x)\frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)}\left[\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)}\ \alpha_2f_2(x+1)-\ \alpha_2f_2(x)\right]\right] \\ &= \alpha_1A_n(f_1,x)+\ \alpha_2A_n(f_2,x)\end{aligned}$$

eşitliği sağlandığından ve ayrıca $x \notin [0,n]$ için $A_n(f,x) = f(x)$ olduğundan (A_n) operatörleri doğrusaldır.

Şimdi de (A_n) operatör dizisinin pozitifliği gösterilecektir.

$$f(x) + \frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)}\left[\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)} f(x+1) - f(x)\right]$$

ifadesinin pozitif olması için

$$\frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)} f(x) < f(x)$$

eşitsizliğinin bilinmesi yeterlidir. Bu ise $\rho_2(x)$ monoton artan olduğundan $\|x\| \leq n$ için $\frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)} < 1$ olduğundan açıktır. Böylece $x \in [0,n]$ için $f > 0$ iken $A_n(f,x) > 0$ olduğu kolayca elde edilir. Diğer durumda $x \notin [0,n]$ iken $A_n(f,x) = f(x)$ olduğundan (A_n) pozitifliği açıktır. Dolayısıyla her $x \in \mathbb{R}$ için A_n operatörlerinin C_{ρ_1} uzayından B_{ρ_2} uzayına dönüşüm yaptığı gösterilecektir. Bunun için ilk olarak $\|A_n(f,x)\|_{\rho_2} \leq \|A_n(\rho_1,x)\|_{\rho_2} \|f\|_{\rho_1}$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilecektir. φ_1 fonksiyonu monoton artan ve

$\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)} - 1 < 0$ olduğundan,

$$A_n(\rho_1,x) = \rho_1(x) + \frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)}\left[\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)} \rho_1(x+1) - \rho_1(x)\right]$$

$$= \rho_1(x) + \frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)}\left[\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)} \left(1 + \varphi_1^2(x+1) - 1 - \varphi_1^2(x)\right)\right]$$

$$= \rho_1(x) + \frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)}\left[\frac{\varphi_1^2(x) + \varphi_1^2(x)\varphi_1^2(x+1) - \varphi_1^2(x+1) - \varphi_1^2(x)\varphi_1^2(x+1)}{\varphi_1^2(x+1)}\right]$$

$$= \rho_1(x) + \frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)}\left[\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)} - \frac{\varphi_1^2(x+1)}{\varphi_1^2(x+1)}\right]$$

$$= \rho_1(x) + \frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)}\left[\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)} - 1\right]$$

$$= \left[\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)} - 1\right]$$

$$\leq \rho_1(x) \leq M\rho_2(x)$$

eşitliği sağlanır.

Böylece $A_n(\rho_1, x) \leq M\rho_2(x)$ olup $A_n(\rho_1, x) \in B_{\rho_2}$dir.

Dolayısıyla $A_n: C_{\rho_1} \rightarrow B_{\rho_2}$dönüşümünü yapan doğrusal pozitif bir operatördür.

Şimdi bu operatör dizisinin (1.11) eşitliğindeki,

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n(1, x) - 1\|_{\rho_2} = 0$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n(\varphi_1, x) - \varphi_1(x)\|_{\rho_2} = 0$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n(\varphi_1^2, x) - \varphi_1^2(x)\|_{\rho_2} = 0$

şeklindeki üç koşulun sağlandığı gösterilecektir. $x \in [0, n]$ alınsın.

i) $\quad A_n(1, x) = 1 + \dfrac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)}\left[\dfrac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)} - 1\right]$

$$|A_n(1, x) - 1| = \left|\frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)}\right|\left[\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)} - 1\right]$$

$$\frac{|A_n(1, x) - 1|}{\rho_2(n)} = \frac{1}{2\rho_2(n)}\left|\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)} - 1\right| \leq \frac{1}{2\rho_2(n)}$$

$$\sup_{[0,n]} \frac{|A_n(1, x) - 1|}{\rho_2(n)} \leq \frac{1}{2\rho_2(n)}$$

olur. Böylece

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \|A_n(1, x) - 1\|_{\rho_2}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\rho_2(n)}$$

$$= 0$$

bulunur. Bu ise,

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(1, x) - 1\|_{\rho_2} = 0$$

olması demektir.

$\boldsymbol{ii}$) $$A_n(\varphi_1,x)=\varphi_1(x)+\frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)}\left[\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)}\varphi_1(x+1)-\varphi_1(x)\right]$$

$$|A_n(\varphi_1,x)-\varphi_1(x)|=\frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)}\left|\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)}\varphi_1(x+1)-\varphi_1(x)\right|$$

$$\frac{|A_n(\varphi_1,x)-\varphi_1(x)|}{\rho_2(x)}=\frac{\varphi_1(x)}{2\rho_2(n)}\left|\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(x+1)}-1\right|$$

$$\sup_{[0,n]}\frac{|A_n(\varphi_1,x)-\varphi_1(x)|}{\rho_2(x)}=\sup_{[0,n]}\frac{\varphi_1(x)}{2\rho_2(n)}\left|\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(x+1)}-1\right|$$

eşitliğinden,

$$\|A_n(\varphi_1,x)-\varphi_1(x)\|_{\rho_2}\leq\frac{|\varphi_1(x)|}{2\rho_2(n)}$$

eşitliği elde edilir ve $n\to\infty$ için limit alınırsa,

$$0\leq\lim_{n\to\infty}\|A_n(\varphi_1,x)-\varphi_1(x)\|_{\rho_2}$$

$$\leq\lim_{n\to\infty}\frac{|\varphi_1(x)|}{2\rho_2(n)}$$

$$=0$$

bulunur. Bu ise

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n(\varphi_1,x)-\varphi_1(x)\|_{\rho_2}=0$$

olması demektir.

$\boldsymbol{iii}$) $$A_n(\varphi_1^2,x)=\varphi_1^2(x)+\frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)}\left[\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)}\varphi_1^2(x+1)-\varphi_1^2(x)\right]$$

Sonuç olarak;

$$A_n(\varphi_1^2,x)-\varphi_1^2(x)=\frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)}\left[\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)}\varphi_1^2(x+1)-\varphi_1^2(x)\right]=0$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(\varphi_1^2, x) - \varphi_1^2(x)\|_{\rho_2} = 0$$

olduğu kolayca elde edilir. Dolayısıyla teoremin bütün şartları sağlanır.

Şimdi $g(x), [-1,1]$ aralığında tanımlanan

$$g(x) := \begin{cases} 2(1+x); -1 \leq x \leq 0 \\ 2(1-x); 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

biçiminde verilen bir g fonksiyonu için $g(x)$, periyodu 2 olan $\mathbb{R}$ üzerinde bir $h(x)$ fonksiyonuna genişletilsin. Eğer f^*, her $x \in \mathbb{R}$ için

$$f^*(x) := \varphi_1^2(x).h(x)$$

biçiminde tanımlanırsa, $x \in [0, n]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$A_n(f^*, x) = f^*(x) + \frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)}\left[\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)} f^*(x+1) - f^*(x)\right]$$

$$= f^*(x) + \frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)}\left[\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x+1)} \varphi_1^2(x+1)h(x+1) - \varphi_1^2(x)h(x)\right]$$

$$= f^*(x) + \frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)} \varphi_1^2(x)[h(x+1) - h(x)]$$

$$A_n(f^*, x) - f^*(x) = \frac{\rho_2(x)}{2\rho_2(n)} \varphi_1^2(x)[h(x+1) - h(x)]$$

eşitliği elde edilir. Her $x \in [0, n]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\sup_{x\in[0,n]} \frac{|A_n(f^*, x) - f^*(x)|}{\rho_2(x)} \geq \frac{\varphi_1^2(n)}{2\rho_2(n)} |h(n+1) - h(n)|$$

$$= \frac{\varphi_1^2(n)}{2\rho_2(n)} 2 = \frac{\varphi_1^2(n)}{1 + \varphi_2^2(n)}$$

$$\|A_n(f^*, x) - f^*(x)\| \geq \frac{\varphi_1^2(n)}{2\rho_2(n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(f^*, x) - f^*(x)\| \geq \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_1^2(n)}{2\rho_2(n)}$$

$lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\varphi_2^2(n)} = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\varphi_1^2(n)}{1+\varphi_2^2(n)} = a \neq 0$ olduğundan

$\lim_{n\to\infty} sup\|A_n(f^*,x) - f^*(x)\|_{\rho_2} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1+\varphi_1^2(n)}{1+\varphi_2^2(n)} = a \neq 0$ olur.

Böylece kanıt tamamlanır.■

Bu teorem, C_{ρ_1} den B_{ρ_2} ye tanımlanan doğrusal pozitif operatör sınıfı için Korovkin teoreminin geçerli olmadığını gösterir. Bu genel durum, C_{ρ_1} den C_{ρ_2} ye tanımlanan doğrusal pozitif operatör sınıfı içinde geçerlidir (Coşkun 1998).

Teorem 1.4.4

$lim_{x\to\infty} \frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} = 0$ olan ρ_1 ve ρ_2 fonksiyonları ve $A_n: C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}$ doğrusal pozitif bir operatör dizisi için

$F_j(x) := \frac{x^j}{1+x^2}\rho_1(x) \ (x \in \mathbb{R})$

olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\left\|A_n(F_j,x) - F_j(x)\right\|_{\rho_2} = 0 \quad , j = 0,1,2. \tag{1.12}$$

şeklinde üç koşulun sağlanması için gerekli ve yeterli koşul,

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n(f,x) - f(x)\|_{\rho_2} = 0$$

dır (Coşkun 2003).

Kanıt

($\Leftarrow$):

$j = 0,1,2$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $\frac{x^j}{1+x^2} \leq 1$ dir. Bu nedenle

$$\left|F_j(x)\right| \leq \rho_1(x)$$

dir. Bu ise $F_j(x) \in C_{\rho_1}$ anlamına gelir. Her $f \in C_{\rho_1}$ için

$lim_{n\to\infty}\|A_n(f,x)-f(x)\|_{\rho_2}=0$

eşitliği sağlandığında C_{ρ_1} in elemanı olan $F_j(x)$ ler içinde

$lim_{n\to\infty}\left\|A_n(F_j,x)-F_j(x)\right\|_{\rho_2}=0$

sağlanır.

(⇒):

Tersine $j=0,1,2$ için

$lim_{n\to\infty}\left\|A_n(F_j,x)-F_j(x)\right\|_{\rho_2}=0$

olsun. Bu durumda her $f\in C_{\rho_1}$ için

$lim_{n\to\infty}\|A_n(f,x)-f(x)\|_{\rho_2}=0$

olduğu gösterilmelidir. $\|A_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}}$ operatör normları dizinin düzgün sınırlı ve herhangi bir $|x|\le s_0$ olan keyfi bir s_0 için,

$lim_{n\to\infty}\|A_n(f,x)-f(x)\|=0$

olduğu gösterilmelidir. $lim_{x\to\infty}\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)}=0$ ve $M>0$ için

$$\|\rho_1(x)\|_{\rho_2}=\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)}\le M$$

olduğundan Tanım 1.4.1 deki ii) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\|A_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}}&=\|A_n(\rho_1,x)\|_{\rho_2}\\&\le\left\|A_n\left(\frac{1}{1+t^2}\rho_1,x\right)-\frac{1}{1+x^2}\rho_1(x)\right\|_{\rho_2}+\left\|A_n\left(\frac{t^2}{1+t^2}\rho_1,x\right)-\frac{x^2}{1+x^2}\rho_1(x)\right\|_{\rho_2}+M\\&=\|A_n(F_0,x)-F_0(x)\|_{\rho_2}+\|A_n(F_2,x)-F_2(x)\|_{\rho_2}+M\end{aligned}$$

(1.12) eşitliği kullanılarak, bir $n_0\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n\ge n_0$ için

$\|A_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}}\le 2+M$

eşitsizliği sağlanır.

Eğer,

$$K := max\left\{\|A_1\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}}, \dots, \left\|A_{n_0} - 1\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}}, 2 + M\right\}$$

olarak gösterilirse her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|A_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}} \leq K$$

olur. Bu ise $\left(\|A_n\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin düzgün sınırlı olduğu anlamına gelmektedir. Sonra, keyfi bir s_0 için, $|x| \leq s_0$ ve her $f \in C_{\rho_1}$ için,

$$lim_{n\to\infty}\|A_n(f,x) - f(x)\| = 0$$

olduğu gösterilecektir. A_n doğrusal pozitif bir operatör olduğundan her bir $n \in \mathbb{N}$ için,

$$|A_n(f,x) - f(x)| \leq A_n(|f(t) - f(x)|, x) + |f(x)||A_n(1,x) - 1|$$

dir. Şimdi,

$$S_n'(x) := A_n(|f(t) - f(x)|, x) \text{ ve } S_n''(x) := |f(x)||A_n(1,x) - 1| \qquad (1.13)$$

olsun. F_j nin tanımı gereği,

$$A_n((t-x)^2F_0(t),x) \leq |A_n(F_2,x) - F_2| + 2|x||A_n(F_1,x) - F_1| + x^2|A_n(F_0,x) - F_0|$$

(1.12) varsayımı kullanılarak ve $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bir sıfır dizisi olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|A_n\left(F_j,x\right) - F_j(x)\right\| \leq \varepsilon_n\rho_2(x) \qquad (1.14)$$

yazılabilir. Yani,

$$A_n((t-x)^2F_0(t),x) \leq \varepsilon_n\rho_2(x)(1 + 2|x| + x^2) \leq \varepsilon_n\rho_2(x)2(1 + x^2)$$

dir. Bu ise

$$\lim_{n\to\infty} A_n((t-x)^2F_0(t),x) = 0 \qquad (1.15)$$

anlamına gelir. f,$\mathbb{R}$ de sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır öyle ki,

$|t - x| < \delta$ olan her $|x| \leq s_0$ için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ olur. Eğer $|t - x| > \delta$ ise

$$|f(t)-f(x)| \le 4M_f\rho_1(x)F_0(t)\left[\frac{|t-x|^2}{\delta^2}(1+|x|^2)+|t-x|^2\right]$$

$$= 4M_f\rho_1(x)F_0(t)|t-x|^2\left[\frac{1+|x|^2}{\delta^2}+1\right]$$

elde edilir. Her $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}$, $|x| \le s_0$ için

$$K_{\rho_1} := 4M_f\rho_1(x)\left[\frac{1+|x|^2}{\delta^2}+1\right]$$

ile gösterilirse

$$|f(t)-f(x)| \le \varepsilon + K_{\rho_1}(x)(t-x)^2F_0(t) \tag{1.16}$$

elde edilir. Öncelikle $S_n'(x)$ incelensin. (1.16) eşitsizliği kullanılarak,

$$S_n'(x) := A_n(|f(t)-f(x)|, x) \le \varepsilon A_n(1,x) + K_{\rho_1}(x)A_n((t-x)^2F_0(t),x)$$

bulunur. Diğer taraftan, aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$0 \le \limsup_{n\to\infty} S_n'(x) \le \lim_{n\to\infty}\left(\varepsilon A_n(1,x) + K_{\rho_1}(x)A_n((t-x)^2F_0(t),x)\right).$$

Tanım gereği, $\rho_1(x) \ge 1$ ve doğrusal pozitif operatörün monotonluğundan

$$A_n(1,x) \le A_n(\rho_1,x)$$

yazılabilir. Ayrıca bir $M_1 > 0$ için $\|A_n(\rho_1,x)\|_{\rho_2} \le M_1$ ve $A_n(\rho_1,x) \in C_{\rho_2}$ olduğundan

$$A_n(\rho_1,x) \le M_1\,\rho_2(x)$$

dir. Dolayısıyla (1.15) eşitliği kullanılarak ve her $|x| \le s_0$ için,

$$0 \le \limsup_{n\to\infty} S_n'(x) \le \varepsilon M_1\rho_2(x)$$

olur. $\varepsilon > 0$ keyfi verildiğinden,

$$\lim_{n\to\infty} S_n'(x) = 0$$

dır. Son olarak, $S_n''(x)$ incelenebilir. f, sürekli ve $|x| \le s_0$ kapalı aralığında sınırlıdır.

$$S_n''(x) := |f(x)||A_n(1,x)-1|$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} |A_n(1,x) - 1| = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$|a+b| \geq |a| - |b|$ özelliği kullanılarak,

$$|A_n(F_0,x) - F_0(x)| = |A_n(F_0(t) - F_0(x) + F_0(x), x) - F_0(x)|$$

$$\geq |F_0(x)||A_n(1,x) - 1| - |A_n(F_0(t) - F_0(x), x)|$$

(1.15) eşitliğinden dolayı

$$|F_0(x)||A_n(1,x) - 1| \leq |A_n(F_0,x) - F_0(x)| + |A_n(F_0(t) - F_0(x), x)|$$

$$\leq \varepsilon_n \rho_2(x) + A_n(|F_0(t) - F_0(x)|, x)$$

$F_0(x) \in C_{\rho_1}$ olduğundan F_0 da (1.16) eşitsizliğini sağlar. Yani,

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + K_{\rho_1}(x)(t-x)^2 F_0(t)$$

Bu eşitsizliğe A_n operatör dizisi uygulanırsa

$$|F_0(x)||A_n(1,x) - 1| \leq \varepsilon_n \rho_2(x) + \varepsilon A_n(1,x) + K_{\rho_1}(x) A_n((t-x)^2 F_0(t), x)$$

elde edilir.

Dolayısıyla $|x| \leq s_0$ için,

$$|F_0(x)| \lim_{n\to\infty} |A_n(1,x) - 1| = 0$$

dır. Bu ise $|F_0(x)| \neq 0$ olduğundan $|x| \leq s_0$ için

$$\lim_{n\to\infty} |A_n(1,x) - 1| = 0$$

olduğu anlamına gelir.$|x| \leq s_0$ için

$$\lim_{n\to\infty} S_n''(x) = 0$$

dır. Burada (1.13) eşitlikleri kullanılarak, $|x| \leq s_0$,

$$\lim_{n\to\infty} |A_n(f,x) - f(x)| \leq \lim_{n\to\infty} S_n'(x) + \lim_{n\to\infty} S_n''(x) = 0$$

olacaktır. Bu ise kanıtı tamamlar.

Teorem 1.4.5

$\chi(x) = 1 + x^2$ olmak üzere $L_n : C_\chi \to B_\chi$, $\nu = 0,1,2$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^\nu, x) - x^\nu\|_\chi = 0$$

koşulunu sağlayan doğrusal pozitif bir operatör olsun. $lim_{x\to\infty} \frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} = 0$ ve C_{ρ_1} uzayından B_{ρ_2}ye,

$$A_n(f, x) := \frac{\rho_2(x)}{\chi(x)} L_n\left(\frac{\chi(t)}{\rho_1(t)} f(t), x\right)$$

biçiminde tanımlı A_n operatör dizisi doğrusal pozitif bir operatör dizisidir ve

$F_j(x) := \frac{x^j}{\chi(x)} \rho_1(x)$, $j = 0, 1, 2.$

fonksiyonları için,

$$\lim_{n\to\infty} \left\|A_n(F_j, x) - F_j(x)\right\|_{\rho_2} = 0$$

eşitliği geçerlidir (Coşkun 2003).

Kanıt

Her bir $n \in \mathbb{N}$ için A_n doğrusal ve pozitiftir. Gerçekten,

$f, g \in C_{\rho_1}$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$A_n(af + bg, x) := \frac{\rho_2(x)}{\chi(x)} L_n\left(\frac{\chi(t)}{\rho_1(t)} (af + bg)(t), x\right)$$

$$= \frac{\rho_2(x)}{\chi(x)} L_n\left(a \frac{\chi(t)}{\rho_1(t)} f(t) + b \frac{\chi(t)}{\rho_1(t)} g(t), x\right)$$

L_n doğrusal olduğundan,

$$= \frac{\rho_2(x)}{\chi(x)} \left[aL_n \left(\frac{\chi(t)}{\rho_1(t)} f(t), x \right) + bL_n \left(\frac{\chi(t)}{\rho_1(t)} g(t), x \right) \right]$$

$$= a \left[\frac{\rho_2(x)}{\chi(x)} L_n \left(\frac{\chi(t)}{\rho_1(t)} f(t), x \right) \right] + b \left[\frac{\rho_2(x)}{\chi(x)} L_n \left(\frac{\chi(t)}{\rho_1(t)} g(t), x \right) \right]$$

$$= aA_n(f, x) + bA_n(g, x)$$

olduğundan A_n operatör dizisi doğrusaldır.

$$A_n(f, x) := \frac{\rho_2(x)}{\chi(x)} L_n \left(\frac{\chi(t)}{\rho_1(t)} f(t), x \right)$$

$\rho_2(x) \geq 1, \chi(t) = 1 + t^2 > 0$ ve L_n operatörü pozitif olduğundan A_n operatörünün pozitif olduğu açıkça görülür.

Kabulde L_n, C_χ den B_χ e giden doğrusal pozitif bir operatör olduğundan bir $K > 0$ vardır öyle ki,

$$\|L_n(\chi, x)\|_\chi \leq K$$

dır. Ayrıca hipotezden $sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ vardır. Öte yandan L_n doğrusal pozitif operatör dizisi monoton artandır. Açıkça (A_n) doğrusal pozitif operatör dizisi C_{ρ_1} den B_{ρ_2}ye dönüşüm yapar. Bunun için,

$$\|A_n(f, x)\|_{\rho_2} \leq \|A_n(\rho_1, x)\|_{\rho_2} \|f\|_{\rho_1}$$

eşitsizliği gösterilmelidir. (1.12) eşitliği kullanılarak her bir $n \in \mathbb{N}$ için C_{ρ_1} den B_{ρ_2} ye tanımlı A_n pozitif doğrusal operatör dizisinin normu Teorem 1.4.3 de φ_1 yerine x^2 fonksiyonu alınırsa,

$$\|A_n(\rho_1, x)\|_{\rho_2} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|A_n(\rho_1, x)|}{\rho_2(x)}$$

$$= \|L_n(\chi, x)\|_\chi \leq K$$

eşitliğini sağlar. $F_j \in C_{\rho_1}$ olduğundan,

$$A_n(F_j(t), x) = \frac{\rho_2(x)}{1 + x^2} L_n \left(\frac{1 + t^2}{\rho_1(t)} \frac{t^j}{1 + t^2} \rho_1(t), x \right)$$

$$= \frac{\rho_2(x)}{1+x^2} L_n\left(t^j, x\right)$$

$$A_n\left(F_j, x\right) - F_j(x) = \frac{\rho_2(x)}{\chi(x)}\left[L_n\left(t^j, x\right) - x^j\right]$$

dir ve

$$\left\|A_n\left(F_j, x\right) - F_j(x)\right\|_{\rho_2} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\left|\frac{\rho_2(x)}{\chi(x)}\left[L_n\left(t^j, x\right) - x^j\right]\right|}{\rho_2(x)}$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\left|L_n\left(t^j,x\right)-x^j\right|}{\chi(x)}$$

$$= \left\|L_n\left(t^j, x\right) - x^j\right\|_{\chi}$$

olduğundan,

$$\left\|A_n\left(F_j, x\right) - F_j(x)\right\|_{\rho_2} = \left\|L_n\left(t^j, x\right) - x^j\right\|_{\chi}$$

eşitliği elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(t^j, x\right) - x^j\right\|_{\chi} = 0$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|A_n\left(F_j, x\right) - F_j(x)\right\|_{\rho_2} = 0$$

olur. Bu ise kanıtı tamamlar.

1.5 SÜREKLİLİK MODÜLÜ YARDIMIYLA YAKLAŞIM HIZININ HESABI

Bu bölümde operatörlerin yaklaşım hızını hesaplamak için kullanılan yöntemlerden biri olan süreklilik modülü ve ağırlıklı süreklilik modülünün özellikleri verilecektir.

$L_n(f, x)$ keyfi bir doğrusal pozitif operatörler dizisi olmak üzere $\|L_n(f) - f\| \to 0$ $(n \to \infty)$ olması $L_n(f, x)$ in $f(x)$ e düzgün olarak yakınsadığını gösterir. Yaklaşma hızı $\alpha_n \to 0$, $(n \to \infty)$ olmak üzere, $\|L_n(f, x) - f(x)\| < c.\alpha_n$ olacak şekilde α_n lerin belirlenmesiyle hesaplanır. α_n ler L_n operatörü ve f fonksiyonuna bağlı olarak değişirler. Yaklaşma hızı problemi olarak adlandırılan bu hesaplama sonlu aralıkta genel olarak $\omega(f, \delta)$ şeklinde gösterilen *Süreklilik Modülü* yardımıyla yapılır.

Tanım 1.5.1

$f \in C[a,b]$ olsun. $\forall\, \delta > 0$ için

$$\omega(f,\delta) = \sup_{\substack{x,t\in[a,b] \\ |t-x|\leq\delta}} |f(t) - f(x)|$$

ile tanımlanan $\omega(f,\delta)$ ifadesine f fonksiyonunun *süreklilik modülü* denir.

Lemma 1.5.1

$f \in C[a,b]$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i) $\omega(f,\delta) \geq 0$

ii)$\delta_1 \leq \delta_2$ için $\omega(f,\delta_1) \leq \omega(f,\delta_2)$

iii)Her $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f,m\delta) \leq m\,\omega(f,\delta)$

iv)Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f,\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\,\omega(f,\delta)$

v) $\lim_{\delta\to0} \omega(f,\delta) = 0$

vi) $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f,|t-x|)$

vii)$|f(t) - f(x)| \leq (1 + \dfrac{|t-x|}{\delta})\,\omega(f,\delta)$

$C_\rho^k(\mathbb{R})$ uzayında tanımlı fonksiyonlar için yaklaşım hızı hesabında kullanılan süreklilik modülü ve temel özellikleri verilecektir:

Tanım 1.5.2

Her $f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ için

$$\Omega(f,\delta) = \sup_{x\in[0,\infty[,|h|\leq\delta} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{(1+h^2)(1+x^2)} \tag{1.17}$$

şeklinde tanımlı ifadeye f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü denir.

$\Omega(f,\delta)$ nin bazı temel özellikleri literatürde birçok kaynakta bulunabileceğinden Lemma 1.5.2 de kanıtına değinilmeden verilmiştir.

Lemma 1.5.2

$f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

$\boldsymbol{i}$) $\delta \geq 0$ olmak üzere $\Omega(f,\delta)$; δ nın monoton artan bir fonksiyonudur.

$\boldsymbol{ii}$) Her $f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ için $lim_{\delta \to 0}\, \Omega(f,\delta) = 0$ olur.

$\boldsymbol{iii}$) λ nın her pozitif değeri için

$\Omega(f,\lambda\delta) \leq 4(1+\lambda)(1+\delta^2)\Omega(f,\delta)$

eşitsizliği geçerlidir.

$\boldsymbol{iv}$) Her $f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ ve $x,t \in [0,\infty[$ için

$|f(t)-f(x)| \leq 4(1+\delta^2)\Omega(f,\delta)(1+x^2)(1+(t-x)^2)\left(1+\dfrac{|t-x|}{\delta}\right)$ dır.

BÖLÜM 2

DOĞRUSAL POZİTİF OPERATÖRLERİN BİR AİLESİ İLE $C[0,A]$ UZAYINDA YAKLAŞIM

2.1 KLASİK GADJİEV-İBRAGİMOV OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM

Gadjiev and Ibragimov (1970) tarafından literatüre kazandırılan (klasik) Gadjiev-İbragimov operatörünün $C[0,A]$ uzayında yaklaşım özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.1.1

$A>0$ olmak üzere $(\varphi_n(t))$ ve $(\psi_n(t))$; $C[0,A]$ uzayında iki fonksiyon dizisi, (α_n) ise pozitif sayılar dizisi olsun. Bu diziler için $\varphi_n(0)=0, \psi_n(0)\neq 0,\ t\in[0,A], n\in\mathbb{N}$ olmak üzere,

$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{n}=1$ ve $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}=0$

koşulları sağlansın. Ayrıca

$x,t\in[0,A]$ ve $u\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\left(K_n(x,t,u)\right)$ üç değişkenli fonksiyonlar dizisi için aşağıdaki dört koşul sağlansın.

1°) Bu dizinin her bir terimi x ve t nin $[0,A]$ aralığındaki her belirli değerine karşılık u ya göre tam analitik fonksiyondur.

2°) Her $x\in[0,A]$ ve $n\in\mathbb{N}$ için $K_n(x,0,0)=1$ dir.

3°) Her $x\in[0,A]$ ve $\nu,n\in\mathbb{N}$ ve bir $u_1\in\mathbb{R}$ için

$\left\{(-1)^\nu\left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\right]_{\substack{u=u_1\\ t=0}}\right\}\geq 0$ eşitsizliği sağlanır.

4°) $\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1\\ t=0}} = -nx\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{n+m}(x,t,u)\right]_{\substack{u=u_1\\ t=0}}$

eşitliğini sağlayan $(n+m) \in \mathbb{N}_0$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}$ vardır.

Bu tanım yardımıyla aşağıdaki operatörler dizisi tanımlanabilir.

Tanım 2.1.2

Yukarıdaki koşulları sağlayan $\left(K_n(x,t,u)\right)$ üç değişkenli fonksiyonlar dizisi yardımıyla $L_n(f,x)$ operatörler dizisi

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)\left\{\left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\right]_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu operatöre Gadjiev-İbragimov operatörü adı verilir (Gadjiev and Ibragimov 1970).

Bu operatörler dizisine 4°) özelliğinin $\nu -$ defa uygulanmasıyla

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)\frac{n(n+m)\dots(n+(\nu-1)m)}{\nu!}K_{n+\nu m}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\left(\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu x^\nu$$

eşitliği elde edilir.

Uyarı 2.1.1

$$K_n(x,t,u) = \left[1-\frac{ux}{1+t}\right]^n, m=-1$$

için $u_1 = \alpha_n\psi_n(0)$ alınarak

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)\binom{n}{\nu}\left[1-x\alpha_n\psi_n(0)\right]^{n-\nu}\left(x\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu \tag{2.2}$$

operatörü elde edilir.

α_n ve $\psi_n(0)$ için bazı özel seçimlerle bilinen bazı operatörler elde edilir.

i) Eğer (2.2) eşitliğinde $\alpha_n = n$ ve $\psi_n(0) = \frac{1}{n}$ seçilirse operatör

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2 \frac{1}{n}}\right)(-1)^\nu \binom{n}{\nu}\left[1 - xn\frac{1}{n}\right]^{n-\nu}\left(-xn\frac{1}{n}\right)^\nu$$

şeklinde olacaktır. Böylece Bernstein polinomları olarak bilinen aşağıdaki operatörü bulunur.

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu}[1-x]^{n-\nu}x^\nu$$

ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$ olmak üzere (2.2) eşitliğinde

$\alpha_n = n$ ve $\psi_n(0) = \frac{1}{nb_n}$ olarak seçilirse

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\frac{1}{nb_n}}\right)(-1)^\nu n(n-1)\,(n-2)\ldots\big(n-(\nu-1)\big)\left[1 - n\frac{1}{nb_n}x\right]^{n-\nu}\left[-n\frac{1}{nb_n}x\right]^\nu$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu b_n}{n}\right)\binom{n}{\nu}\left[1-\frac{x}{b_n}\right]^{n-\nu}\left[\frac{x}{b_n}\right]^\nu$$

bulunur. Böylece Bernstein- Cholodowsky polinomları olarak bilinen operatöre ulaşılır.

Uyarı 2.1.2

$K_n(x,t,u) = e^{-n(ux+t)}, m = 0$

olmak üzere

α_n ve $\psi_n(0)$ için $u_1 = n^2\psi_n(0)$ alınarak

$$L_n(f,x) = e^{-n(\alpha_n\psi_n(0)x)}\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)\frac{(nx)^\nu}{\nu!}\big(\alpha_n\psi_n(0)\big)^\nu$$

operatörü elde edilir. $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha_n = n + p$ ve $\psi_n(0) = \frac{1}{n}$ olarak seçilirse

Szasz operatörleri olarak bilinen

$$L_n(f,x) = e^{-x(n+p)} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \frac{(n+p)^\nu}{\nu!} x^\nu$$

operatörü elde edilir.

Teorem 2.1.1

$[0,\infty[$ yarı ekseninde tanımlı

$|f(x)| \leq M_f(1+x^2)$

eşitsizliğini sağlayan ve $f \in C[0,A]$ olan her f fonksiyonu için $L_n(f,x)$;

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)\left\{\left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\right]_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $f \in C[0,A]$ için

$\lim\limits_{n\to\infty} \|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[0,A]} = 0$

eşitliği geçerlidir (Gadjiev and Ibragimov 1970).

Kanıt

Açıkça Korovkin Teoreminin koşullarının sağlandığını göstermek yeterlidir.

$K_n(x,t,u)$ tam analitik fonksiyon olduğundan Taylor serisi şeklinde yazılabilir. $(u-u_1)$ farkının kuvvetlerine göre Taylor serisine açılır ve $u = \varphi_n(t)$, $u_1 = \alpha_n\psi_n(t)$ olarak alınırsa;

$$K_n(x,t,\varphi_n(t)) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\right]_{u_1=\alpha_n\psi_n(t)}\right\}\frac{\left(\varphi_n(t)-\alpha_n\psi_n(t)\right)^\nu}{\nu!}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $t=0$ alınırsa 2°) özelliği ile $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{n} = 1$ ve $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2\psi_n(0)} = 0$ eşitlikleri dikkate alınarak $L_n(1,x) = 1$ elde edilir.

Diğer taraftan 4°) özelliğinden

$$L_n(t,x) = \frac{x\alpha_n}{n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_{n+m}\big(x,0,{}_{\alpha_n}\psi_n(0)\big)\right] \frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^\nu}{\nu!} = \frac{x\alpha_n}{n}$$

olup $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{n} = 1$ eşitliği kullanılarak 3°) özelliği yardımıyla; $\lim_{n\to\infty}L_n(t,x) = x$ bulunur. Bu operatöre iki defa 4°) özelliği uygulanırsa;

$$L_n(t^2,x) = \left(\frac{x\alpha_n}{n}\right)^2\frac{n+m}{n}\sum_{\nu=2}^{\infty}\left[\frac{\partial^{\nu-2}}{\partial u^{\nu-2}}K_{n+2m}\big(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\big)\right] \frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^{\nu-2}}{(\nu-2)!} + \frac{x\alpha_n}{n}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}$$

$$= \left(\frac{x\alpha_n}{n}\right)^2\frac{n+m}{n} + \frac{x\alpha_n}{n}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}$$

eşitliği elde edilecektir. Bu ise $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{n} = 1$ olması nedeniyle

$\lim_{n\to\infty}L_n(t^2,x) = x^2$

olduğunu gösterir. Dolayısıyla Korovkin teoreminin koşulları geçerli olduğundan her $f \in C[0,A]$ için

$\lim\limits_{n\to\infty}\|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[0,A]} = 0$

eşitliği gösterilmiş olur.

2.2 GADJİEV-İBRAGİMOV OPERATÖRLERİNİN BİR GENELLEŞTİRMESİ İLE $C[0,A]$ UZAYINDA YAKLAŞIM

Bu kesimde Doğru (1997a) tarafından çalışılan $C[0,A]$ dan olan fonksiyonlara Gadjiev-İbragimov operatörlerinin bir genelleştirmesi ile yaklaşım özellikleri çalışılacaktır.

f ; $[0,\infty[$ da tanımlı , $[0,A]$da sürekli ve M_f , f ye bağlı pozitif bir sabit olmak üzere

$\forall x \in [0,\infty[$ için,

$$|f(x)| \le M_f(1+x^2) \qquad (2.3)$$

eşitliğini sağlayan fonksiyonların uzayı $C(\,[0,A];x^2)$ olsun.

Daha sonra $L_\lambda(f,x)$ ile gösterilen doğrusal pozitif operatörlerin $f \in C[0,A]$ fonksiyonlarına yaklaşım hızının hesabı için süreklilik modülü kullanılacaktır. Gösterim olarak yazarın kullandığı notasyonlar tercih edilmiştir.

Tanım 2.2.1

λ, A pozitif gerçel sayı, $\forall t \in [0,A]$ için $\varphi_\lambda(0) = 0$ ve $\psi_\lambda(t) > 0$ olan $\left(\varphi_\lambda(t)\right)$ ve $\left(\psi_\lambda(t)\right)$, $C[0,A]$da fonksiyonlar dizisi olsun.

Ayrıca (α_λ),

$$\lim_{\lambda\to\infty} \alpha_\lambda = \infty,\ \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\alpha_\lambda}{\lambda} = 1 \text{ ve } \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda^2 \psi_\lambda(0)} = 0$$

koşullarını sağlayan pozitif sayılar dizisi olsun.

$\left(K_\lambda(x,t,u)\right)$ dizisi ise $x,t \in [0,A], -\infty < u < \infty, \lambda > 0$ olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan üç değişkenli fonksiyonlar dizisi olsun.

1°) Bu dizinin her elemanı x ve t nin $[0,A]$ aralığındaki her belirli değerine karşılık u ya göre tam analitik fonksiyondur.

2°) Her $x \in [0,A]$ ve $\lambda > 0$ için $K_\lambda(x,0,0) = 1$ dir.

3°) Her $x \in [0,A], \lambda > 0, \nu = 0,1,2,\dots$ için $\left\{(-1)^\nu \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_\lambda(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1\\ t=0}}\right\} \geq 0$ dır.

4°) $\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_\lambda(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1\\ t=0}} = -\lambda x \left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{h(\lambda)}(x,t,u)\right]_{\substack{u=u_1\\ t=0}}$ eşitliği geçerlidir.

(Her $x \in [0,A], \lambda \in \mathbb{R}^+, \nu = 0,1,2,\dots$) $h(\lambda)$, $\lim_{\lambda\to\infty} \frac{h(\lambda)}{\lambda} = 1$ koşulunu sağlayan negatif olmayan bir fonksiyondur.

$f \in C([0,A]; x^2)$ olmak üzere doğrusal operatörler dizisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$L_\lambda(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{\lambda^2 \psi_\lambda(0)}\right) \left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_\lambda(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda \psi_\lambda(t)\\ t=0}}\right\} \frac{\left(-\alpha_\lambda \psi_\lambda(0)\right)^\nu}{\nu!} \tag{2.4}$$

(Doğru 1997a).

Uyarı 2.2.1

$\lambda = n$ ve $h(\lambda) = m + n$ $(m + n = 0, 1, 2, \dots)$ alınırsa (2.4) eşitliğinde tanımlanan operatör, Gadjiev and Ibragimov (1970) de tanımlanan operatörlere indirgenir.

$$L_n(f, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi(0)}\right)\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x, t, u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t) \\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!} \tag{2.5}$$

(Doğru 1997a).

Uyarı 2.2.2

(2.5) eşitliğinde yapılan gibi (2.4) operatöründe $\lambda = n$ alınarak aşağıdaki operatörler elde edilir.

Ibragimov-Gadjiev operatörünün, Berstein, Berstein-Chlodowsky, Szasz-Mirakyan ve V. A. Baskakov operatörleri gibi iyi bilinen doğrusal pozitif operatörleri içerdiği bilinmektedir.

i) $K_n(x, t, u) = \left[1 - \frac{ux}{1+t}\right]^n$, $\alpha_n = n,\ \psi_n(0) = \frac{1}{n}$ seçilirse Berstein operatörü elde edilir.

ii) $K_n(x, t, u) = \left[1 - \frac{ux}{1+t}\right]^n$, $\alpha_n = n,\ \psi_n(0) = \frac{1}{nb_n}$ $\left(lim_{n\to\infty} b_n = \infty,\ lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0\right)$

seçilirse Berstein-Chlodowsky operatörü elde edilir.

iii) $K_n(x, t, u) = e^{-n(t+ux)}$, $\alpha_n = n$, $\psi_n(0) = \frac{1}{n}$ seçilirse Szasz-Mirakyan operatörleri elde edilir.

vi) $K_n(x, t, u) = K_n(t + ux),\ \alpha_n = n, \psi_n(0) = \frac{1}{n}$ seçilirse Baskakov operatörü elde edilir (Doğru 1997a)

Kanıt

i) $K_n(x, t, u) = \left[1 - \frac{ux}{1+t}\right]^n$, $\alpha_n = n$, $\psi_n(0) = \frac{1}{n}$ ve $h(n) = (n - 1)$ alınırsa

(2.4) operatörü Berstein operatörüne dönüşür.

Gerçekten,

$$K_n'(x,t,u) = (-1)n\left(\frac{x}{1+t}\right)\left[1-\frac{ux}{1+t}\right]^{n-1}$$

$$K_n''(x,t,u) = (-1)^2 n(n-1)\left(\frac{x}{1+t}\right)^2\left[1-\frac{ux}{1+t}\right]^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$K_n^{(\nu)}(x,t,u) = (-1)^\nu n(n-1)\dots\big(n-(\nu-1)\big)\left(\tfrac{x}{1+t}\right)^\nu\left[1-\tfrac{ux}{1+t}\right]^{n-\nu}$$

$$= (-1)^\nu n(n-1)\dots(n-\nu+1)\left(\tfrac{x}{1+t}\right)^\nu\left[1-\tfrac{ux}{1+t}\right]^{n-\nu}$$

olur. Böylece $t=0$ ve $u=\alpha_n\psi_n(0)$ için

$$K_n^{(\nu)}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(0)\\ t=0}} = (-1)^\nu n(n-1)\dots(n-\nu+1)x^\nu[1-\alpha_n\psi_n(0)x\,]^{n-\nu}$$

olur. Dolasıyla $x\in[0,1]$ olmak üzere

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

elde edilir. Şöyle ki

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\frac{1}{n}}\right)K_n^{(\nu)}\left(x,0,n\frac{1}{n}\right)\frac{\left(-n\frac{1}{n}\right)^\nu}{\nu!}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right)(-1)^\nu n(n-1)\dots(n-\nu+1)x^\nu\left[1-n\frac{1}{n}x\right]^{n-\nu}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\left(\frac{n(n-1)\dots(n-\nu+1)}{\nu!}\right)x^\nu[1-x\,]^{n-\nu}$$

$$= \textstyle\sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}$$

bulunur. O halde Berstein operatörü elde edilmiş olur.

ii) $\alpha_n = n,\ \psi_n(0) = \frac{1}{nb_n}$ ve $lim_{n\to\infty} b_n = \infty,\ lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n} = 0$ olarak seçilirse yine $K_n(x,t,u) = \left[1 - \frac{ux}{1+t}\right]^n$ olmak üzere,

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{\nu b_n}{n}\right)\binom{n}{\nu}\left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-\nu}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{\nu}$$

Berstein-Chlodowsky operatörü elde edilir. Gerçekten $\alpha_n = n,\ \psi_n(0) = \frac{1}{nb_n}$ alınırsa,

$$K_n^{(\nu)}(x,t,u) = (-1)^{\nu} n(n-1)\ldots(n-\nu+1)\left(\frac{x}{1+t}\right)^{\nu}\left[1 - \frac{ux}{1+t}\right]^{n-\nu}$$

olacağından $t = 0$ ve $u = \alpha_n\psi_n(0)$ için

$$K_n^{(\nu)}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(0)\\ t=0}} = (-1)^{\nu} n(n-1)\ldots(n-\nu+1)x^{\nu}[1 - \alpha_n\psi_n(0)x\,]^{n-\nu}$$

$$= (-1)^{\nu} n(n-1)\ldots(n-\nu+1)x^{\nu}\left[1 - n\frac{1}{nb_n}x\right]^{n-\nu}$$

$$= (-1)^{\nu} n(n-1)\ldots(n-\nu+1)x^{\nu}\left[1 - \frac{1}{b_n}x\right]^{n-\nu}$$

olacaktır. Böylece

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\frac{1}{nb_n}}\right)K_n^{(\nu)}\left(x,0,n\frac{1}{nb_n}\right)\frac{\left(-n\frac{1}{nb_n}\right)^{\nu}}{\nu!}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n\frac{1}{b_n}}\right)(-1)^{\nu} n(n-1)\ldots(n-\nu+1)x^{\nu}\left[1 - \frac{x}{b_n}\right]^{n-\nu}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu b_n}{n}\right)\frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{\nu!}\left[1 - \frac{x}{b_n}\right]^{n-\nu}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\upsilon=0}^{n} f\left(\frac{\nu b_n}{n}\right)\binom{n}{\nu}\left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-\nu}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{\nu}\right)$$

eşitliği geçerli olduğundan Berstein- Cholodowsky polinomu elde edilmiş olur.

iii) $K_n(x,t,u) = e^{-n(t+ux)}$, $\alpha_n = n$, $\psi_n(0) = \frac{1}{n}$ seçilirse Szasz operatörleri elde edilir.

Gerçekten,

$$K_n'(x,t,u) = (-1)(nx)\, e^{-n(t+ux)}$$

$$K_n''(x,t,u) = (-1)^2(nx)^2 e^{-n(t+ux)}$$

$$\vdots$$

$$K_n^{(\nu)}(x,t,u) = (-1)^\nu (nx)^\nu e^{-n(t+ux)}$$

olur. $t = 0$ ve $u = \alpha_n \psi_n(0)$ için

$$K_n^{(\nu)}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(0)\\ t=0}} = (-1)^\nu (nx)^\nu e^{-n(\alpha_n \psi_n(0) x)}$$

olur. Böylece

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2 \frac{1}{n}}\right) K_n^{(\nu)}\left(x, 0, n\frac{1}{n}\right) \frac{\left(-n\frac{1}{n}\right)^\nu}{\nu!}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right) (-1)^\nu (nx)^\nu e^{-n\left(n\frac{1}{n}x\right)} \frac{(-1)^\nu}{\nu!}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \frac{(nx)^\nu}{\nu!}\, e^{-nx}$$

$$= e^{-nx} \textstyle\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \frac{(nx)^\nu}{\nu!}$$

eşitsizliğinden Szasz operatörleri elde edilir.

vi) $K_n(z)$ tam analitik fonksiyon ve $K_n(x,t,u) = K_n(t+ux)$, $\alpha_n = n$, $\psi_n(0) = \frac{1}{n}$

alındığında Baskakov operatörü elde edilir.

$K_n(x,t,u) = K_n(t+ux)$ alınırsa,

$$K_n'(x,t,u) = xK_n'(t+ux)$$

$$K_n''(x,t,u) = x^2 K_n''(t+ux)$$

$$\vdots$$

$$K_n^{(\nu)}(x,t,u) = x^\nu K_n^{(\nu)}(t+ux)$$

olur. Böylece t=0 ve $u = \alpha_n \psi_n(0)$ için

$$K_n^{(\nu)}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(0)\\ t=0}} = x^\nu K_n^{(\nu)}(\alpha_n \psi_n(0)x)$$

olur. (2.5) eşitliğinde tanımlanan operatör

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2 \frac{1}{n}}\right) x^\nu K_n^{(\nu)}\left(n\frac{1}{n}x\right)\frac{\left(-n\frac{1}{n}\right)^\nu}{\nu!}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right) x^\nu K_n^{(\nu)}(x)\frac{(-1)^\nu}{\nu!}$$

olup $K_n^{(\nu)}(x) = \phi_n^{(\nu)}(x)$ olarak alınırsa,

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right) x^\nu \phi_n^{(\nu)}(x)\frac{(-x)^\nu}{\nu!}$$

Baskakov operatörü elde edilir.

Lemma 2.2.1

(2.4) eşitliği ile tanımlı doğrusal pozitif operatörler aşağıdaki üç özelliğe sahiptir:

i) $L_\lambda(1,x) = 1$ (2.6)

ii) $L_\lambda(t,x) = \frac{\alpha_\lambda}{\lambda}x$ (2.7)

iii) $L_\lambda(t^2,x) = \left(\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}\right)^2 \frac{h(\lambda)}{\lambda}x^2 + \frac{\alpha_\lambda}{\lambda}\frac{1}{\lambda^2 \psi_\lambda(0)}x$ (2.8)

(Doğru 1997b).

Kanıt

i) $K_\lambda(x,t,u)$ bir analitik fonksiyon olduğundan $(u-u_1)$ in kuvvetlerine göre Taylor serisine açılabilir. $u = \varphi_\lambda(t)$, $u_1 = \alpha_\lambda \psi_\lambda(t)$ olduğu kabul edilirse $\varphi_\lambda(0) = 0$ olduğundan

$$K_\lambda\big(x,t,\varphi_\lambda(t)\big) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_\lambda(x,t,u)\Big|_{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)} \frac{\big(\varphi_\lambda(t)-\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\big)^\nu}{\nu!}$$

Taylor serisi elde edilir. Bu eşitlikte $t = 0$ alınırsa

$$K_\lambda(x,0,0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_\lambda\big(x,0,\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\big) \frac{\big(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\big)^\nu}{\nu!} = 1$$

olacaktır.

$$L_\lambda(1,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_\lambda(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}} \frac{\big(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\big)^\nu}{\nu!}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_\lambda\big(x,0,\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\big) \frac{\big(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\big)^\nu}{\nu!}$$

$$= K_\lambda(x,0,0)$$

$$= 1$$

bulunur.

ii) Öncelikle $L_\lambda(t,x)$ in eşitliğini hesaplamak için ihtiyaç duyulan $K_{h(\lambda)}(x,0,0)$ bulunacaktır.

Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\big(K_\lambda(x,t,u)\big)$ dizisi, her $x,t \in [0,A]$ ve $-\infty < u < \infty$ için u değişkenine göre tam analitik olduğundan $\big(K_{h(\lambda)}(x,t,u)\big)$ dizisi de her $x,t \in [0,A]$ ve $-\infty < u < \infty$ için u değişkenine göre tamdır. Dolayısıyla keyfi bir $u = u_1$ noktasında Taylor serisine açılabilir. Bu seri;

$$K_{h(\lambda)}(x,t,u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_{h(\lambda)}(x,t,u)\Big|_{u=u_1} \right\} \frac{(u-u_1)^\nu}{\nu!}$$

şeklindedir. Bu açılımında $u = \varphi_\lambda(t)$ ve $u_1 = \alpha_\lambda\psi_\lambda(t)$ olduğu kabul edilirse;

$$K_{h(\lambda)}\big(x,t,\varphi_\lambda(t)\big) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_{h(\lambda)}(x,t,u)\Big|_{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)} \right\} \frac{\big(\varphi_\lambda(t)-\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\big)^\nu}{\nu!}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $t = 0$ alınırsa $\varphi_\lambda(0) = 0$ olduğundan,

$$K_{h(\lambda)}(x,0,0)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_{h(\lambda)}(x,t,u)\bigg|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu}}{\nu!}$$

eşitliği bulunur. Tanım 2.2.1 deki 2°) özelliğinden $K_{h(\lambda)}(x,0,0)=1$ dir. Dolayısıyla

$$1=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_{h(\lambda)}(x,t,u)\bigg|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu}}{\nu!}$$

eşitliği yazılabilir.

$$L_\lambda(t,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\nu}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\left\{\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_{\lambda}(x,t,u)\bigg|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu}}{\nu!}$$

$$=-\frac{\alpha_\lambda}{\lambda^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_{\lambda}(x,t,u)\bigg|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

$$=-\frac{\alpha_\lambda}{\lambda^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-\lambda x)\left\{\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_{h(\lambda)}(x,t,u)\bigg|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

eşitliği elde edilir. Burada $(\nu-1)$ yerine ν alınırsa son eşitlik,

$$L_\lambda(t,x)=\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_{h(\lambda)}(x,t,u)\bigg|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu}}{\nu!}$$

$$=\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}K_{h(\lambda)}(x,0,0)$$

$$=\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}$$

olur.

iii) Benzer şekilde,

$$L_\lambda(t^2,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\right)^2\left\{\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_{\lambda}(x,t,u)\bigg|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu}}{\nu!}$$

olup Tanım 2.2.1 deki 4°) özelliği kullanılırsa,

$$L_\lambda(t^2,x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\right)^2(-\lambda x)\left\{\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{h(\lambda)}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu}}{\nu!}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-\lambda x)\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)\nu}{\left(\lambda^2\psi_\lambda(0)\right)^2}\left\{\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{h(\lambda)}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

$$=\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\left\{\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{h(\lambda)}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

elde edilir. Bu eşitlikte ν yerine $\nu-1+1$ yazılırsa,

$$=\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu-1+1}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\left\{\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{h(\lambda)}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

$$=\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu-1}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\left\{\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{h(\lambda)}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

$$+\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\left\{\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{h(\lambda)}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitliğin sağ tarafındaki birinci toplam ifadesine Tanım 2.2.1 deki 4°) özelliği tekrar uygulanırsa,

$$=\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{(-h(\lambda)x)\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\left\{\frac{\partial^{\nu-2}}{\partial u^{\nu-2}}K_{h(\lambda)}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu-2}}{(\nu-2)!}$$

$$+\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\frac{1}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{h(\lambda)}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte toplamların birincisinde ν yerine $\nu+2$, ikincisinde ise ν yerine $\nu+1$ alıp düzenlenirse,

$$=\left(\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\right)^2\frac{h(\lambda)}{\lambda}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_{h(\lambda)}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu}}{\nu!}$$

$$+\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\frac{1}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_{h(\lambda)}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^\nu}{\nu!}$$

$$=\left(\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\right)^2\frac{h(\lambda)}{\lambda}+\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\frac{1}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}$$

Bu ise kanıtı tamamlar.

Sonuç 2.2.1

Lemma 2.2.1 deki i), ii) ve iii) özelliklerinden

$$0\le L_\lambda((t-x)^2,x)=\left(\frac{\alpha_\lambda^2}{\lambda^2}\frac{h(\lambda)}{\lambda}-2\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}+1\right)x^2+\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\frac{1}{\lambda^2\psi(0)}$$

eşitsizliği geçerlidir (Doğru 1997a).

Kanıt

Doğrusallıktan;

$$L_\lambda((t-x)^2,x)=L_\lambda(t^2-2tx+x^2,x)$$

$$=L_\lambda(t^2,x)+2xL_\lambda(t,x)+x^2L_\lambda(1,x)$$

$$=\left(\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\right)^2\frac{h(\lambda)}{\lambda}+\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\frac{1}{\lambda^2\psi(0)}-2x\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}+x^2$$

$$L_\lambda((t-x)^2,x)=\left(\frac{\alpha_\lambda^2}{\lambda^2}\frac{h(\lambda)}{\lambda}-2\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}+1\right)x^2+\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\frac{1}{\lambda^2\psi(0)}$$

eşitliği elde edilir.

Uyarı 2.2.3

Her $A>0$ için $C[0,A]$ da norm

$$\|f(x)\|_{C[0,A]}=max_{x\in[0,A]}|f(x)| \qquad (2.9)$$

biçiminde tanımlanmak üzere

$$\delta_\lambda = \left(\left\| \left(\frac{\alpha_\lambda^2}{\lambda^2} \frac{h(\lambda)}{\lambda} - 2\frac{\alpha_\lambda}{\lambda} + 1 \right) x^2 + \frac{\alpha_\lambda x}{\lambda} \frac{1}{\lambda^2 \psi(0)} \right\|_{C[0,A]} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlı dizi için $lim_{\lambda\to\infty}\, \delta_\lambda = 0$ dır (Doğru 1997a).

Kanıt

Gerçekten (2.10) eşitliğinde verilen δ_λ tanımı ve (2.9) eşitliğinde verilen $C[0, A]$ uzayındaki norm tanımı gereği,

$$\delta_\lambda = max_{x\in[0,A]} \left(\left\| \left(\frac{\alpha_\lambda^2}{\lambda^2} \frac{h(\lambda)}{\lambda} - 2\frac{\alpha_\lambda}{\lambda} + 1 \right) x^2 + \frac{\alpha_\lambda x}{\lambda} \frac{1}{\lambda^2 \psi_\lambda(0)} \right\|_{C[0,A]} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.11}$$

elde edilir. Burada $lim_{\lambda\to\infty} \frac{\alpha_\lambda}{\lambda} = 1,\ lim_{\lambda\to\infty} \frac{h(\lambda)}{\lambda} = 1,\ lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda^2\psi_\lambda(0)} = 0$ eşitlikleri kabul edildiğinde her $x \in [0, A]$ için

$\lim\limits_{\lambda\to\infty} \delta_\lambda = 0$

olduğu görülür.

Lemma 2.2.2

$L_\lambda(|t - x|, x) \le \delta_\lambda$ eşitsizliği geçerlidir (Doğru 1997b).

Kanıt

Sonuç 2.2.1 ve uyarı 2.2.3 den

$$L_\lambda((t - x)^2, x) \le {\delta_\lambda}^2 \tag{2.12}$$

olacağı açıktır.

Şimdi de teoremin ispatında gerekli olacağı için $L_\lambda(|t - x|, x)$ in δ_λ ya bağlı ifadesi elde edilecektir. (2.4) eşitliğinden dolayı,

$$L_\lambda(|t - x|, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{\nu}{\lambda^2\psi_\lambda(0)} - x \right| \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_\lambda(x, t, u) \Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t) \\ t=0}} \frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^\nu}{\nu!}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{\nu}{\lambda^2 \psi_\lambda(0)} - x \right| \left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_\lambda(x,t,u) \Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda \psi_\lambda(t) \\ t=0}} \frac{\left(-\alpha_\lambda \psi_\lambda(0)\right)^\nu}{\nu!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_\lambda(x,t,u) \Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda \psi_\lambda(t) \\ t=0}} \frac{\left(-\alpha_\lambda \psi_\lambda(0)\right)^\nu}{\nu!} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.13}$$

eşitliği sağlanır. Diğer yandan Cauchy-Schwartz-Bünyakovski eşitsizliği uyarınca;

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu \le \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte a_ν ve b_ν ler yerine

$$a_\nu = \left| \frac{\nu}{\lambda^2 \psi_\lambda(0)} - x \right| \left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_\lambda(x,t,u) \Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda \psi_\lambda(t) \\ t=0}} \frac{\left(-\alpha_\lambda \psi_\lambda(0)\right)^\nu}{\nu!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$b_\nu = \left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_\lambda(x,t,u) \Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda \psi_\lambda(t) \\ t=0}} \frac{\left(-\alpha_\lambda \psi_\lambda(0)\right)^\nu}{\nu!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

alınırsa;

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{\nu}{\lambda^2 \psi_\lambda(0)} - x \right| \left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_\lambda(x,t,u) \Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda \psi_\lambda(t) \\ t=0}} \frac{\left(-\alpha_\lambda \psi_\lambda(0)\right)^\nu}{\nu!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_\lambda(x,t,u) \Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda \psi_\lambda(t) \\ t=0}} \frac{\left(-\alpha_\lambda \psi_\lambda(0)\right)^\nu}{\nu!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\lambda^2 \psi_\lambda(0)} - x \right)^2 \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_\lambda(x,t,u) \Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda \psi_\lambda(t) \\ t=0}} \frac{\left(-\alpha_\lambda \psi_\lambda(0)\right)^\nu}{\nu!} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_\lambda(x,t,u) \Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda \psi_\lambda(t) \\ t=0}} \frac{\left(-\alpha_\lambda \psi_\lambda(0)\right)^\nu}{\nu!} \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin (2.13) eşitliğinde kullanılmasıyla,

$$L_\lambda(|t-x|,x) \leq \left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}-x\right)^2 \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_\lambda(x,t,u)\bigg|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}} \frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^\nu}{\nu!}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_\lambda(x,t,u)\bigg|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}} \frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^\nu}{\nu!}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\right)^2 \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_\lambda(x,t,u)\bigg|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}} \frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^\nu}{\nu!}\right.$$

$$-2x\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\nu}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_\lambda(x,t,u)\bigg|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}} \frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^\nu}{\nu!}$$

$$\left.+x^2\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_\lambda(x,t,u)\bigg|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}} \frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^\nu}{\nu!}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_\lambda(x,t,u)\bigg|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}} \frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^\nu}{\nu!}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[L_\lambda(t^2,x)-2xL_\lambda(t,x)+x^2L_\lambda(1,x)\right]^{1/2}L_\lambda(1,x)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte,

$$L_\lambda(t^2,x)-2xL_\lambda(t,x)+x^2L_\lambda(1,x)=L_\lambda((t-x)^2,x)$$

ve $L_\lambda(1,x)=1$ olduğundan

$$L_\lambda(|t-x|,x)\leq\left[L_\lambda((t-x)^2,x)\right]^{\frac{1}{2}}$$

olur ve (2.12) eşitsizliğinden

$$L_\lambda(|t-x|,x)\leq\delta_\lambda \tag{2.14}$$

eşitsizliği gösterilmiş olur.

Tanım 2.2.2

A pozitif bir sabit olmak üzere, f fonksiyonunun $[0,2A]$ da tanımlı süreklilik modülü $\omega_{2A}(f,\delta)$;

$$\omega_{2A}(f,\delta) = sup\{|f(t) - f(x)|, x,t \in [0,2A], |x-t| \leq \delta\} \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanır (Doğru 1997a).

$\omega_{2A}(f,\delta)$ aşağıdaki özelliklere sahiptir:

Lemma 2.2.3

$\boldsymbol{i}$) $|f(x) - f(t)| \leq \omega_{2A}(f,|t-x|)$

$\boldsymbol{ii}$) $|f(x) - f(t)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right) \omega_{2A}(f,x)$

$\boldsymbol{iii}$) C_f, f ' e bağlı pozitif bir gerçel sabit olmak üzere $\delta \leq C_f\ \omega_{2A}(f,\delta)$ (Doğru 1997a).

Teorem 2.2.1

λ yeterince büyük pozitif gerçel sayı, M_f, f ye bağlı pozitif bir sabit, C_f süreklilik modülünün iii) özelliğindeki sabit ve δ_λ (2.10) eşitliğinde tanımlandığı şekilde olsun.

f fonksiyonu $[0,\infty)$ da sürekli ve $|f(x)| \leq M_f(1+x^2)$ eşitsizliğini sağlasın. $\omega_{2A}(f,\delta)$ $[0,2A]$ sonlu aralığında süreklilik modülü olmak üzere (2.6)-(2.8) özelliklerine sahip (2.4) eşitliğinde verilen (L_λ) doğrusal pozitif operatör dizisi için

$$\|L_\lambda(f,x) - f(x)\|_{C[0,A]} \leq \left[C_f M_f\left(5 + \frac{2}{A^2}\right) + 2\right] \omega_{2A}(f,\delta_\lambda) \quad (2.16)$$

eşitsizliği geçerlidir (Doğru 1997a).

Kanıt

$x \in [0,A]$ ve $t \in [0,\infty[$ için E_1 ve E_2 kümeleri

$E_1 = \{(x,t); x \in [0,A]; t > 2A\}$

$E_2 = \{(x,t); x \in [0,A]; t \leq 2A\}$

şeklinde tanımlansın.

$|f(x)| \leq M_f(1+x^2)$

olmak üzere $x \in [0,A]$ ve $t \in [0,\infty[$ için

$|f(t)-f(x)| \leq M_f(2+(t-x)^2+2A|t-x|+2A^2)$

dir.

$|f(x)| \leq M_f(1+x^2)$

olur.

f fonksiyonu sınırlı olduğunda her $x \in \mathbb{R}$ için $|f(x)| \leq M$ dir. Burada

$|f(x)| \leq M_f(1+x^2)$

$|f(t)| \leq M_f(1+t^2)$ eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa;

$|f(t)-f(x)| \leq |f(t)|+|f(x)| \leq M_f(1+x^2+1+t^2)$

Ayrıca süreklilikten $|t-x| \leq A$ olduğunda $|t-x|^2 \leq A^2$ ve $\frac{|t-x|^2}{A^2} \leq 1$ eşitsizlikleri geçerlidir. Aynı şekilde $|t-x| > A$ olduğunda $|t-x|^2 \geq A^2, \frac{|t-x|^2}{A^2} \geq 1$ ise

$2M\frac{|t-x|^2}{A^2} \geq 2M$ dir. Böylece

$|f(t)|+|f(x)| \leq M_f(1+x^2+1+t^2) = M_f(2+x^2+t^2)$

$(x,t) \in E_1$ için $|t-x| > A$ olduğundan

$$|f(t)-f(x)| \leq M_f\left(2\frac{(t-x)^2}{A^2}+(t-x)^2+2(t-x)^2+2(t-x)^2\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$|f(t)-f(x)| \leq M_f(t-x)^2\left(\frac{2}{A^2}+5\right) \tag{2.17}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Şimdi $(x,t) \in E_2$ olsun $|t-x| \leq 2A$ ve süreklilik modülünün Lemma 2.2.3 deki $i)$ ve $ii)$ özelliklerinden,

$$|f(t)-f(x)| \leq \omega_{2A}(f,|t-x|) \leq \omega_{2A}(f,\delta_\lambda)\left(\frac{|t-x|}{\delta_\lambda}+1\right) \tag{2.18}$$

yazılabilir. $x \in [0,A]$ ve $t \in [0,\infty[$ için (2.17) ve (2.18) eşitsizliklerinden

$$|f(t)-f(x)| \leq M_f(t-x)^2\left(\frac{2}{A^2}+5\right)+\omega_{2A}(f,\delta_\lambda)\left(\frac{|t-x|}{\delta_\lambda}+1\right) \tag{2.19}$$

bulunur. $L_\lambda\,(f,x)$ monoton artan ve doğrusal olduğundan

$$L_\lambda\,(|f(t)-f(x)|,x) \leq M_f\left(5+\frac{2}{A^2}\right)L_\lambda((t-x)^2,x)$$

$$+\omega_{2A}(f,\delta_\lambda)\left(\frac{1}{\delta_\lambda}L_\lambda\,(|t-x|,x)+L_\lambda\,(1,x)\right) \tag{2.20}$$

olur. $\delta_\lambda \to 0$ olduğundan yeterince büyük λ için ${\delta_\lambda}^2 \leq \delta_\lambda$ ve süreklilik modülünün

Lemma 2.2.3 deki $iii)$ özelliğinden

$$\delta_\lambda \leq C_f\,\omega_{2A}(f,\delta_\lambda) \tag{2.21}$$

elde edilir. Böylece (2.12) eşitsizliğinden

$$L_\lambda((t-x)^2,x) \leq {\delta_\lambda}^2 \leq C_f\,\omega_{2A}(f,\delta_\lambda)$$

yazılabilir.(2.5) eşitliği, (2.14) ve (2.21) eşitsizlikleri (2.20) eşitsizliğinde kullanılırsa,

$$L_\lambda\,(|f(t)-f(x)|,x) \leq \left[C_f M_f\left(5+\frac{2}{A^2}\right)+2\right]\omega_{2A}(f,\delta_\lambda)$$

den istenilen sonuç elde edilmiş olur. Bu ise kanıtı tamamlar.

2.3 $C[0, A]$ UZAYINDA GADJİEV İBRAGİMOV OPERATÖRLERİNİN BİR DİĞER GENELLEŞTİRMESİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Tanım 2.3.1

(α_n) ve (β_n);

$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} n = 1$

koşullarını sağlayan gerçel sayı dizileri olsun. $K_{n,\nu}(x)$ ise ν ve n parametrelerine bağlı aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyon olsun.

1°) Her $n = 1,2,3, \ldots$, her $\nu = 0,1,2, \ldots$ ve her sonlu A sayısı için $x \in [0, A]$ olmak üzere

$(-1)^\nu K_{n,\nu}(x) \geq 0$

olur.

2°) Her $x \in [0, A]$ için

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!} = 1$$

eşitliği geçerlidir.

3°) Her $x \in [0, A]$ için

$K_{n,\nu}(x) = -nxK_{n+m,\nu-1}(x)$

eşitliği sağlanacak ve $n + m$ bir doğal sayı olacak biçimde bir m sayısı vardır.

Bu bilgiler yardımıyla Gadjiev- İbragimov operatörünün bir genelleştirmesi olan operatör her $f \in C[0, A]$ için

$$L_n(f, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{\beta_n}\right) K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!} \tag{2.22}$$

biçiminde tanımlanacaktır. Açıkça bu operatör doğrusal ve pozitiftir (Gönül and Coşkun 2013).

Uyarı 2.3.1

$K_{n,\nu}(x)$ fonksiyonuna $\nu -$ defa Tanım 2.3.1 de verilen 3°) özelliği uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
K_{n,\nu}(x) &= -nxK_{n+m,\nu-1}(x) \\
&= (-1)^2 n(n+m)x^2 K_{n+2m,\nu-2}(x) \\
&= (-1)^3 n(n+m)(n+2m)x^3 K_{n+3m,\nu-3}(x) \\
&\ \ \vdots \\
&= (-1)^{\nu} n(n+m)(n+2m)\dots(n+(\nu-1)m)x^{\nu} K_{n+\nu m,0}(x)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri geçerli olduğundan

$$K_{n,\nu}(x) = (-1)^{\nu} n(n+m)(n+2m)\dots(n+(\nu-1)m)x^{\nu} K_{n+\nu m,0}(x)$$

eşitliği elde edilir. Böylece (2.22) eşitliği ile verilen operatör dizisi

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{\beta_n}\right)(-1)^{\nu} n(n+m)(n+2m)\dots(n+(\nu-1)m)x^{\nu} K_{n+\nu m,0}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{\nu!} \qquad (2.23)$$

şeklinde ifade edilebilir (Gönül 2012).

Önerme 2.3.1

$f \in C[0,A]$ olmak üzere (2.22) eşitliğinde verilen operatör için

$$L_n(1,x) = 1$$

$$L_n(t,x) = \frac{\alpha_n}{\beta_n} nx$$

$$L_n(t^2,x) = \frac{{\alpha_n}^2 n(n+m)x^2}{{\beta_n}^2} + \frac{\alpha_n nx}{{\beta_n}^2}$$

eşitlikleri geçerlidir (Gönül and Coşkun 2013).

Kanıt

2°) özelliği gereği

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!} = 1$$

olduğundan açıkça

$$L_n(1,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!} = 1$$

bulunur. 3°) özelliği kullanılarak; $(n+m) \in \mathbb{N}$ olduğundan

$$L_n(t,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu}{\beta_n} K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^\nu}{(\nu-1)!}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{-nx}{\beta_n} K_{n+m,\nu-1}(x)\frac{(-\alpha_n)^\nu}{(\nu-1)!}$$

$$= \frac{n\alpha_n x}{\beta_n}\sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n+m,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!}$$

$$= \frac{\alpha_n}{\beta_n} nx$$

eşitliğine ulaşılır. Benzer şekilde

$$L_n(t^2,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\beta_n}\right)^2 K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu^2-\nu+\nu}{{\beta_n}^2} K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!}$$

$$= \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\nu(\nu-1)}{{\beta_n}^2} K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!} + \frac{1}{\beta_n}L_n(t,x)$$

$$= \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2} K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^{\nu-2}}{(\nu-2)!} + \frac{1}{\beta_n} L_n(t,x)$$

$$= \frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} n(n+m)x^2 K_{n+2m,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{(\nu)!} + \frac{1}{\beta_n} L_n(t,x)$$

olur.

$(m+n) \in \mathbb{N}$ ve $(n+2m) \in \mathbb{N}$ olduğundan

$$L_n(t^2,x) = \frac{{\alpha_n}^2 n(n+m)x^2}{{\beta_n}^2} + \frac{\alpha_n n x}{{\beta_n}^2}$$

bulunur. Bu ise kanıtı tamamlar.

Teorem 2.3.1

$f \in C[0,A]$ ve

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{\beta_n}\right) K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{\nu!}$$

olsun. Bu durumda her $f \in C[0,A]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[0,A]} = 0$$

olur (Gönül 2012).

Kanıt

Açıkça; kanıt için Korovkin Teoreminin koşullarının sağlandığının gösterilmesi yeterlidir. Önerme 2.3.1 den

$$|L_n(1,x) - 1| = \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{\nu!} - 1 \right| = 0$$

eşitliği geçerli olduğundan $C[0,A]$ uzayında norm tanımı gereği

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(1,x) - 1\|_{C[0,A]} = 0 \qquad (2.24)$$

eşitliği sağlanır. Benzer şekilde

$$|L_n(t,x)-x| = \left| \frac{\alpha_n}{\beta_n}nx - x\right|$$

$$= \left|x\left(\frac{n\alpha_n}{\beta_n}-1\right)\right|$$

eşitliği geçerli olduğundan $x \in [0,A]$ ve $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}n = 1$ olmak üzere

$$\max_{x\in[0,A]}|L_n(t,x)-x| = \max_{x\in[0,A]}\left|x\left(\frac{n\alpha_n}{\beta_n}-1\right)\right| \leq |A|\left|\frac{n\alpha_n}{\beta_n}-1\right|$$

eşitsizliği yazılabilir. Her iki tarafın limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(t,x)-x\|_{C[0,A]} \leq A\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\alpha_n}{\beta_n}-1\right| = 0$$

olacağından

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(t,x)-x\|_{C[0,A]} = 0 \tag{2.25}$$

bulunur.

Son olarak;

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(t^2,x)-x^2\|_{C[0,A]} = 0$$

eşitliği gösterilecektir.

$$|L_n(t^2,x)-x^2| = \left|\frac{{\alpha_n}^2 n(n+m)x^2}{{\beta_n}^2} + \frac{\alpha_n nx}{{\beta_n}^2} - x^2\right|$$

$$= \left|x^2\left(\frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2}n(n+m)-1\right) + n\frac{\alpha_n}{{\beta_n}^2}x\right|$$

olacağından

$$\max_{x\in[0,A]}|L_n(t^2,x)-x^2| = \max_{x\in[0,A]}\left|x^2\left(\frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2}n(n+m)-1\right) + n\frac{\alpha_n}{{\beta_n}^2}x\right|$$

$$\leq A^2\left|\left(\frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2}n(n+m)-1\right)\right| + \left|n\frac{\alpha_n}{{\beta_n}^2}\right|A$$

bulunur. (α_n) ve (β_n) dizilerinin tanımı nedeniyle

$$\lim_{n\to\infty} \frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2} n(n+m) = \lim_{n\to\infty} \frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2} n^2 + \lim_{n\to\infty} \frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2} nm = 1$$

eşitlikleri geçerlidir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^2,x) - x^2\|_{C[0,A]} \leq \lim_{n\to\infty} A^2 \left(\frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2} n(n+m) - 1 \right) + \lim_{n\to\infty} n \frac{\alpha_n}{{\beta_n}^2} A$$

eşitsizliği geçerli olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} A^2 \left(\frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2} n(n+m) - 1 \right) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^2,x) - x^2\|_{C[0,A]} = 0 \tag{2.26}$$

eşitliği de gösterilmiş olur.

O halde Korovkin teoreminin tüm koşulları sağlandığından her $f \in C[0,A]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[0,A]} = 0$$

bulunur.

Örnek 2.3.1

$$K_{n,\nu}(x) = (-1)^\nu (nx)^\nu e^{-nx\alpha_n}$$

$1^\circ) - 3^\circ)$ özelliklerini sağlayan bir fonksiyondur.

Gerçekten

$1^\circ)$ Her $n = 1,2,3,...,\nu = 0,1,2,...$ ve her sonlu A sayısı için $x \in [0,A]$ olmak üzere

$e^{-nx} \geq 0$ olduğundan

$$(-1)^\nu K_{n,\nu}(x) = (nx)^\nu e^{-nx\alpha_n} \geq 0$$

olur.

2°) Her $x \in [0, A]$ için operatörün tanımından

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} (nx)^{\nu} e^{-nx\alpha_n} \frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{\nu!} = 1$$

3°) $K_{n,\nu}(x) = -nxK_{n+m,\nu-1}(x)$

ve $n + m$ bir doğal sayı olacak biçimde bir m sayısı bulmalıdır.

$$(-1)^{\nu}(nx)^{\nu}e^{-nx\alpha_n} = -nx(-1)^{\nu-1}\big((n+m)x\big)^{\nu-1}e^{-(n+m)x\alpha_{n+m}}$$

eşitliğinden $m = 0$ eşitliği sağlayan bir köktür (Gönül 2012).

Uyarı 2.3.2

$K_{n,\nu}(x) = (-1)^{\nu}(nx)^{\nu}e^{-nx\alpha_n}$ fonksiyonu ve

$$L_n(f, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{\beta_n}\right) K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{\nu!}$$

operatörü yardımıyla bazı operatörler elde edilebilir.

$$K_{n,\nu}(x) = (-1)^{\nu}(nx)^{\nu}e^{-nx\alpha_n}$$

ve $m = 0$ olmak üzere

$$L_n(f, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{\beta_n}\right) (-1)^{\nu}(nx)^{\nu}e^{-nx\alpha_n} \frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{\nu!} \tag{2.27}$$

şeklinde ifade edilebileceği gibi (2.23) eşitliği yardımıyla

$$L_n(f, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{\beta_n}\right) (nx)^{2\nu}e^{-nx\alpha_n} \frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{\nu!} \tag{2.28}$$

şeklinde de yazılabilir (Gönül 2012).

Uyarı 2.3.3

$\lim_{n\to\infty}\beta_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}=0$ ve $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}n=1$ koşullarını sağlayan

$\alpha_n=n$ ve $\beta_n=n^2$ dizileri ve (2.27) operatör dizisi kullanılarak

$$L_n(f,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}f\left(\frac{\nu}{n^2}\right)(nx)^{\nu}e^{-n^2x}\frac{n^{\nu}}{\nu!}$$

ve (2.28) operatör dizisi kullanılarak

$$L_n(f,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}f\left(\frac{\nu}{n^2}\right)(nx)^{2\nu}(-1)^{\nu}e^{-n^2x}\frac{n^{\nu}}{\nu!}$$

eşitliği elde edilir (Gönül 2012).

Teorem 2.3.2

$f\in C[0,A]$ ve (α_n), (β_n) dizileri Tanım 2.3.1 de tanımlanan diziler olsun. Bu durumda yeterince büyük n ve (α_n), (β_n) den bağımsız bir K sabiti için

$$\|L_n(f,x)-f(x)\|_{C[0,A]}\leq K\omega\left(f,\sqrt{\left(n\frac{\alpha_n}{\beta_n}-1\right)^2+\frac{\alpha_n}{\beta_n}+\frac{1}{A\beta_n}}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir (Gönül 2012).

Kanıt

Her hangi bir operatör dizisi için

$|L_n(f,x)-f(x)|\ \leq L_n(|f(t)-f(x)|,x)$

olacağından

$$|L_n(f,x)-f(x)|\leq\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|f\left(\frac{\nu}{\beta_n}\right)-f(x)\right|K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{\nu!}\qquad(2.29)$$

eşitsizliği geçerlidir. Süreklilik modülünün iv) özelliğinde $t = \frac{\nu}{\beta_n}$ olarak seçilirse; her $\delta_n > 0$ için

$$\left| f\left(\frac{\nu}{\beta_n}\right) - f(x) \right| \leq \omega(f, \delta_n)\left(1 + \frac{\left|\frac{\nu}{\beta_n} - x\right|}{\delta_n}\right)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik (2.29) da yerine yazılırsa doğrusallık ve pozitifliği kullanarak

$$|L_n(f,x) - f(x)| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \omega(f, \delta_n)\left(1 + \frac{\left|\frac{\nu}{\beta_n} - x\right|}{\delta_n}\right) K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!}$$

$$= \omega(f, \delta_n)\left\{\frac{1}{\delta_n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{\nu}{\beta_n} - x\right| K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!} + 1\right\} \tag{2.30}$$

elde edilir. Burada

$$M = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{\nu}{\beta_n} - x\right| K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!}$$

olarak tanımlanırsa;

$$M = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\left|\frac{\nu}{\beta_n} - x\right|^2\right)^{1/2}\left[K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!}\right]^{1/2}\left[K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!}\right]^{1/2}$$

şeklinde yazılabileceğinden Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$M \leq \left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{\nu}{\beta_n} - x\right|^2 K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!}\right]^{1/2}\underbrace{\left[\sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!}\right]^{1/2}}_{1}$$

$$= \left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{\nu}{\beta_n} - x\right|^2 K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!}\right]^{1/2}$$

bulunur.

Bu eşitsizlik (2.30) da yerine yazılırsa

$$|L_n(f,x)-f(x)| \leq \omega(f,\delta_n)\left\{\frac{1}{\delta_n}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{\nu}{\beta_n}-x\right|^2 K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!}\right]^{1/2}+1\right\}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Diğer taraftan

$$\left(\frac{\nu}{\beta_n}-x\right)^2=\left(\frac{\nu}{\beta_n}\right)^2-2x\frac{\nu}{\beta_n}+x^2$$

olduğundan

$$|L_n(f,x)-f(x)| \leq \omega(f,\delta_n)\left\{\frac{1}{\delta_n}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\beta_n}\right)^2 K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!}-2x\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\nu}{\beta_n}K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!}\right.\right.$$

$$\left.\left.+x^2\sum_{\nu=0}^{\infty}K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!}\right)^{1/2}+1\right\}$$

$$=\omega(f,\delta_n)\left\{\frac{1}{\delta_n}\left(L_n(t^2,x)-2xL_n(t,x)+x^2L_n(1,x)\right)^{1/2}+1\right\}$$

eşitsizliği geçerlidir. $x\in[0,A]$ olmak üzere $L_n(t^2,x)$, $L_n(t,x)$, $L_n(1,x)$ yerlerine yazılırsa; $\lim_{n\to\infty}\beta_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}=0$ ve $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}n=1$ eşitlikleri dikkate alınarak yeterince büyük n ler için $\frac{\alpha_n}{\beta_n}\leq 1$, $\frac{\alpha_n}{\beta_n}n\leq 2$ eşitsizlikleri kullanılarak

$$|L_n(f,x)-f(x)| \leq \omega(f,\delta_n)\left\{\frac{1}{\delta_n}\left(\frac{n(n+m)}{{\beta_n}^2}{\alpha_n}^2A^2+\frac{1}{\beta_n}\frac{\alpha_n}{\beta_n}nA-2A\frac{\alpha_n}{\beta_n}n+A^2\right)^{1/2}+1\right\}$$

$$=\omega(f,\delta_n)\left\{\frac{1}{\delta_n}\left[A^2\left[\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^2n^2-2\frac{\alpha_n}{\beta_n}n+1\right]+A^2\left[\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^2nm+\frac{1}{A}\frac{1}{\beta_n}\frac{\alpha_n}{\beta_n}n\right]\right]^{1/2}+1\right\}$$

$$\leq \omega(f,\delta_n)\left\{\frac{A}{\delta_n}\left[\left(n\frac{\alpha_n}{\beta_n}-1\right)^2+4\frac{\alpha_n}{\beta_n}m+4\frac{1}{A}\frac{1}{\beta_n}m\right]^{1/2}+1\right\}$$

$$\leq \omega(f,\delta_n)\left\{\frac{2mA}{\delta_n}\left[\left(n\frac{\alpha_n}{\beta_n}-1\right)^2+\frac{\alpha_n}{\beta_n}+\frac{1}{\beta_n}\right]^{1/2}+1\right\}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\delta_n = \sqrt{\left(n\frac{\alpha_n}{\beta_n} - 1\right)^2 + \frac{\alpha_n}{\beta_n} + \frac{1}{A\beta_n}}$$

seçimiyle n den bağımsız bir K sabiti için

$$\|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[0,A]} \leq K\omega\left(f, \sqrt{\left(n\frac{\alpha_n}{\beta_n} - 1\right)^2 + \frac{\alpha_n}{\beta_n} + \frac{1}{A\beta_n}}\right)$$

olur. Bu teoremle gösterildi ki yaklaşım $\sqrt{\left(n\frac{\alpha_n}{\beta_n} - 1\right)^2 + \frac{\alpha_n}{\beta_n} + \frac{1}{A\beta_n}}$ hızında olup bu hız $\alpha_n$ve β_n in seçimine göre artırılabilir.

BÖLÜM 3

SINIRSIZ KÜMELER ÜZERİNDE DOĞRUSAL POZİTİF OPERATÖRLERİN BİR AİLESİ İLE YAKLAŞIM

3.1 GENELLEŞTİRİLMİŞ GADJİEV-İBRAGİMOV OPERATÖRLERİ İLE AĞIRLIKLI YAKLAŞIM

Bu kesimde Gadjiev and Ispir (1999) tarafından çalışılan Gadjiev-İbragimov operatörlerinin bir genelleşmesinin yaklaşım özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.1.1

(γ_n) sonlu veya sonsuz limite sahip pozitif sayıların bir dizisi olsun.

$x, t \in [0, \gamma_n], u \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\big(K_n(x,t,u)\big)$ üç değişkenli fonksiyon dizisi aşağıdaki koşulları sağlasın.

1°) Bu dizinin her elemanı x in ve t nin $[0, \gamma_n]$ aralığındaki belirli değerine karşılık u ya göre tam analitik fonksiyondur.

2°) Her $x \in [0, \gamma_n]$ için $K_n(x, 0{,}0) = 1$ dir.

3°) $x \in [0, \gamma_n]$ ve $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ için $\left\{(-1)^\nu \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1\\ t=0}}\right\} \geq 0$ eşitsizliği sağlanır.

4°) $x \in [0, \gamma_n]$; $\nu, n = 1, 2, \cdots$ olmak üzere $m + n = 0$ veya $m + n \in \mathbb{N}$ yapan bir m sayısı vardır öyle ki,

$$\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1\\ t=0}} = -nx\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{m+n}(x,t,u)\right]_{\substack{u=u_1\\ t=0}}$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca $\big(\varphi_n(t)\big)$ ve $\big(\psi_n(t)\big)$, $C[0, \gamma_n]$ de iki fonksiyon dizisi olsun öyle ki $\varphi_n(0) = 0$, $t \in [0, \gamma_n]$ için $\psi_n(t) > 0$ ve

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}=0 \tag{3.1}$$

olsun. Burada (α_n) pozitif sayılar dizisi için,

$$\frac{\alpha_n}{n}=1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right) \tag{3.2}$$

eşitliği geçerlidir. Bu bilgiler yardımıyla operatör,

$$L_n(f,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!} \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır (Gadjiev and Ispir 1999).

Uyarı 3.1.1

Bu operatörde $lim_{n\to\infty}\gamma_n=A$ ve $lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{n}=1$ alınırsa Gadjiev and Ibragimov (1970) de tanımlanan Gadjiev-İbragimov operatörüne dönüşür (Gadjiev and Ispir 1999).

Lemma 3.1.1

Açıkça, Gadjiev-İbragimov operatörünün bu modifikasyonu için,

i) $L_n(1,x)=1$

ii) $L_n(t,x)=\frac{\alpha_n}{n}x$

iii) $L_n(t^2,x)=\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2\frac{n+m}{n}x^2+\frac{\alpha_n}{n}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}x$

özellikleri sağlanır (Gadjiev and Ibragimov 1970).

Önerme 2.3.1 deki ispata benzer olduğundan kanıtına yer verilmeyecektir.

Gadjiev and Ispir (1999) da verilen önemli iki teorem şu şekildedir;

Teorem A.

C_ρ dan B_ρ uzayına dönüşüm yapan (L_n) doğrusal pozitif operatörler dizisi için $\nu = 0,1,2$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^\nu, x) - x^\nu\|_\rho = 0$$

şeklindeki üç koşul sağlanıyorsa bu durumda her $f \in C_\rho^k$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f, x) - f\|_\rho = 0$$

eşitliği sağlanır ve en az bir $f^* \in C_\rho \setminus C_\rho^k$ için

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|L_n(f^*, x) - f^*(x)\|_\rho \geq 1$$

eşitsizliği geçerlidir (Gadjiev and Ispir 1999).

Teorem B.

(α_n), $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \infty$ koşulunu sağlayan pozitif sayılar dizisi olmak üzere,

$$\|f\|_{\rho,[0,\alpha_n]} = \sup_{0\leq x\leq\alpha_n} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$$

olsun. C_ρ dan $B_{\rho,[0,\alpha_n]}$ uzayına dönüşüm yapan (L_n) doğrusal pozitif operatörler dizisi için $\nu = 0, 1, 2$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^\nu, x) - x^\nu\|_{\rho,[0,\alpha_n]} = 0$$

şeklindeki üç koşul sağlanıyorsa bu durumda her $f \in C_\rho^k$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f, x) - f\|_{\rho,[0,\alpha_n]} = 0$$

eşitliği geçerlidir (Gadjiev and Ispir 1999).

Teorem 3.1.1

(L_n), (3.3) eşitliğinde tanımlı doğrusal pozitif operatörler dizisi olsun. Bu durumda her C_ρ^k fonksiyonu için,

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n f - f\|_{\rho,[0,\gamma_n]} = 0$$

eşitliği geçerlidir (Gadjiev and Ispir 1999).

Kanıt

Açıkça $\nu = 0, 1, 2$ ve $n \to \infty$ için $\|L_n(t^\nu, x) - x\| \to 0$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

Lemma 3.1.1 ve $L_\lambda(1, x) = 1$ olduğundan $[0, \gamma_n]$ üzerinde $n \to \infty$ iken,

$\|L_n(1, x) - 1\|_{\rho,[0,\gamma_n]} \to 0$ dır.

Lemma 3.1.1 deki $ii)$ ve (3.2) eşitliklerinden,

$$\sup_{x\in[0,\gamma_n]} \frac{|L_n(t,x) - x|}{1+x^2} \le \left|\frac{\alpha_n}{n} - 1\right| \sup_{x\in[0,\gamma_n]} \frac{x}{1+x^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)$$

eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\gamma_n]} \frac{|L_n(t,x) - x|}{1+x^2} = 0$$

eşitliği elde edilir. Lemma 3.1.1 deki $iii)$ eşitsizliğinden,

$$\sup_{x\in[0,\gamma_n]} \frac{|L_n(t^2,x) - x^2|}{1+x^2} \le \left|\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2 \frac{n+m}{n} - 1\right| \sup_{x\in[0,\gamma_n]} \frac{x}{1+x^2}$$

$$+ \frac{\alpha_n}{n} \frac{1}{n^2\psi_n(0)} \sup_{x\in[0,\gamma_n]} \frac{x}{1+x}$$

$$\le \left|\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2 \frac{n+m}{n} - 1\right| + \frac{\alpha_n}{n} \frac{1}{n^2\psi_n(0)}$$

eşitsizliği yazılabilir. Her iki tarafın limiti alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\gamma_n]} \frac{|L_n(t^2,x) - x^2|}{1+x^2} = 0$$

olur. Böylece Teorem B den dolayı her $f \in C_\rho^k$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\gamma_n]} \frac{|L_n(f,x)-f(x)|}{1+x^2} = \lim_{n\to\infty} \|L_n(f,x)-f(x)\|_{\rho,[0,\gamma_n]} = 0$$

eşitliği gösterilmiş olur. Bu ise kanıtı tamamlar. ■

Yukarıda tanımlanan bu operatörler dizisi için süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı araştırılacaktır. Bunun için kullanılacak süreklilik modülü tanımı ve özellikleri aşağıda verilmiştir.

Modifiye edilen bu operatör dizisi için yakınsaklık hızı tanımlanacaktır. Bu operatörde $t \in [0,\infty[$ olduğundan f fonksiyonuna birinci süreklilik modülü ile yaklaşım hızı uygulanmayacaktır. Çünkü $\omega(f,\delta)$ süreklilik modülü sonsuz aralık üzerinde $\delta \to 0$ iken 0 a yakınsamaz. Bu sebeple $\delta \to 0$ iken 0 a yakınsayan $\Omega(f,\delta)$ ağırlıklı süreklilik modülü kullanılacaktır.

Tanım 3.1.2

Her $f \in C_\rho^k$ için $\Omega(f,\delta)$,

$$\Omega(f,\delta) = \sup_{|h|\le\delta,t,x\in[0,\gamma_n]} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{(1+h^2)(1+x^2)}$$

biçiminde tanımlanır. $\Omega(f,\delta)$, C_ρ^k uzayındaki fonksiyonların süreklilik modülü olarak adlandırılır (Gadjiev and Ispir 1999).

Literatürde kanıt birçok kaynakta bulunabileceğinden Önerme 3.1.1 kanıtına değinilmeden verilecektir.

Önerme 3.1.1

$f \in C_\rho^k$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i) Her $f \in C_\rho^k$ için, $lim_{\delta\to 0}\,\Omega(f,\delta) = 0$

$\boldsymbol{ii}$) Her $f \in C_\rho^k$ ve $m \in \mathbb{N}$ için $\Omega(f, m\delta) \leq 2m(1+\delta^2)\Omega(f,\delta)$

$\boldsymbol{iii}$) Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için, $\Omega(f, \lambda\delta) \leq 2(1+\lambda)(1+\delta^2)\Omega(f,\delta)$

$\boldsymbol{iv}$) Her $f \in C_\rho^k$ için, $|f(t)-f(x)| \leq 2\left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right)(1+x^2)(1+(t-x)^2)$ (3.4)

Uyarı 3.1.2

3.1 kesimde $\left.\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\right|_{u=\alpha_n\psi_n(0),t=0}$ gösterimi yerine $K_n^{(\nu)}(x, 0, \alpha_n\psi_n(0))$ ifadesi kullanılacaktır (Gadjiev and Ispir 1999).

Teorem 3.1.2

$f \in C_\rho^0$ ve K, n den bağımsız bir sabit olmak üzere yeterince büyük bir n için,

$$\sup_{x\in[0,\gamma_n]} \frac{|L_n(f,x)-f(x)|}{(1+x^2)^3} \leq K\Omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n^2\psi_n(0)}}\right) \quad (3.5)$$

eşitsizliği sağlanır (Gadjiev and Ispir 1999).

Kanıt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} K_n^{(\nu)}(x,0,\alpha_n\psi_n(0))\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!} = 1$$

olduğundan,

$$L_n(f,x)-f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)-f(x)\right]K_n^{(\nu)}(x,0,\alpha_n\psi_n(0))\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!}$$

dır. (3.4) eşitsizliği kullanılarak,

$$|L_n(f,x)-f(x)| \leq 2(1+x^2)(1+\delta_n^2)\Omega(f,\delta_n)\sum_{\nu=0}^{\infty}K_n^{(\nu)}(x,0,\alpha_n\psi_n(0))$$

$$\times\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu}}{\nu!}\left(1+\frac{\left|x-\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right|}{\delta_n}\right)\left(1+\left(x-\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)^2\right)$$

$$\leq 4(1+x^2)\Omega(f,\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|x-\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right|K_n^{(\nu)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\right.$$

$$\times\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu}}{\nu!}+\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(x-\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)^2K_n^{(\nu)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu}}{\nu!}$$

$$+\frac{1}{\delta_n}\sum_{\nu=0}^{\infty}K_n^{(\nu)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\left|x-\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right|\left(x-\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)^2\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu}}{\nu!}$$

bulunur. Burada kısalık olması bakımından

$$I_1=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(x-\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)^2K_n^{(\nu)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu}}{\nu!}$$

ve

$$I_2=\sum_{\nu=0}^{\infty}K_n^{(\nu)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\left(x-\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)^4\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu}}{\nu!}$$

tanımlamaları yapılırsa, Hölder eşitsizliği uygulanılarak,

$$|L_n(f,x)-f(x)|\leq 4(1+x^2)\Omega(f,\delta_n)\left(1+\tfrac{2}{\delta_n}I_1^{1/2}+I_1+\tfrac{1}{\delta_n}I_2\right)\tag{3.6}$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 3.1.1 kullanılarak I_1 için,

$$I_1=x^2\left(1-2\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)\frac{n+m}{n}+\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2\frac{(n+m)(n+2m)}{n^2}\right)+x\frac{\alpha_n}{n}\frac{n+m}{n}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\tag{3.7}$$

ve I_2 için,

$$I_2=x^4\left(1-4\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)\frac{n+m}{n}-4\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^3\frac{(n+m)(n+2m)(n+3m)}{n^3}\right.$$

$$\left.+6\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2\frac{(n+m)(n+2m)}{n^2}+\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^4\frac{(n+m)(n+2m)(n+3m)(n+4m)}{n^4}\right)$$

$$+x^3\left(6\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)\frac{n+m}{n}\frac{1}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}-12\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2\frac{(n+m)(n+2m)}{n^2}\frac{1}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}\right.$$

$$\left.+6\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^3\frac{(n+m)(n+2m)(n+3m)}{n^3}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)+7x^2\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2\frac{(n+m)(n+2m)}{n^2}$$

$$\times\frac{1}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}+x\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)\frac{(n+m)}{n}\frac{1}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^3} \tag{3.8}$$

eşitlikleri elde edilir.

(3.2) ,(3.7) ve (3.8) eşitlikleri kullanılarak I_1 ve I_2 aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$I_1=(x^2+x)\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)$$

$$I_2=(x^4+x^3+x^2+x)\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)$$

Bu eşitlikler (3.6) eşitsizliğinde kullanılırsa,

$$|L_n(f,x)-f(x)|\leq 4(1+x^2)\Omega(f,\delta_n)\left\{1+\frac{2}{\delta_n}\sqrt{(x^2+x)\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)}+\right.$$

$$\left.+(x^2+x)\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)+\frac{1}{\delta_n}(x^4+x^3+x^2+x)\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

$\delta_n=\frac{1}{\sqrt{n^2\psi_n(0)}}$ seçilirse,

$$|L_n(f,x)-f(x)|\leq 4(1+x^2)\Omega(f,\delta_n)\left\{1+2\sqrt{x^2+x}+\delta_n^2(x^2+x)+\right.$$

$$\left.+(x^4+x^3+x^2+x)\right\}$$

olur. Yeterince büyük n için $\delta_n^2<1$ olduğundan,

$$|L_n(f,x)-f(x)|\leq 4(1+x^2)\Omega(f,\delta_n)\left\{1+2\sqrt{x^2+x}+x^4+x^3+2x^2+2x\right\}$$

basit eşitsizliği elde edilir. Buradan, yeterince büyük n için, K pozitif sabit olmak üzere,

$$\sup_{x\in[0,\gamma_n]} \frac{|L_n(f,x)-f(x)|}{(1+x^2)^3} \leq K\Omega\left(f,\frac{1}{\sqrt{n^2\psi_n(0)}}\right)$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu ise kanıtı tamamlar.

Uyarı 3.1.3

Teorem A da, $\left(L_n(f,x)\right)$,ağırlık fonksiyonu $\rho(x)=1+x^2$olan ağırlık uzayında $f(x)$ e yakınsamaktadır. Fakat Teorem B den görülebilir ki (3.3) eşitliğinde verilen operatörün yaklaşım hızı sadece ağırlık fonksiyonu $(1+x^2)^3$ olan ağırlıklı uzayda bulunabilir. Bu nedenle (3.3) operatörünün yaklaşım hızı, ağırlık fonksiyonu $(1+x^2)^a, 1\leq a<3$ olduğundaki durum Gadjiev and Ispir (1999) isimli çalışmada açık problem olarak kalmıştır. Ancak Coşkun (2012) de bu durum bir cevap bulmuştur.

1.4 kesimde tanımlanan C_χ uzayı için geçerli olan uyarılar kanıtına değinilmeden aşağıdaki gibi verilebilir.

Uyarı 3.1.4

$\nu=0,1,2$ için $C_\chi \rightarrow B_\chi$ ye tanımlanan Tanım 2.1.2 de 4°) özelliğinin ν −defa uygulanması ile bulunan

$$L_n(f,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)\frac{n(n+m)\dots(n+(\nu-1)m)}{\nu!}K_{n+\nu m}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\left(\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu}x^{\nu}$$

operatörler dizisi Teorem 1.4.4 den

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(t^\nu,x)-x^\nu\|_\chi=0$$

özelliğini sağlar (Coşkun 2003).

$L_n(f,x)$, Uyarı 3.1.4 de verildiği şekilde olmak üzere teorem 1.4.5 kullanılarak uyarı 3.1.5 verilebilir.

Uyarı 3.1.5

$$A_n(f,x) := \frac{\rho_2(x)}{\chi(x)} L_n\left(\frac{\chi(x)}{\rho_1(x)} f(t), x\right)$$

ile verilen operatör dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| A_n(F_j, x) - F_j(x) \right\|_{\rho_2} = 0$$

eşitliği geçerlidir. Böylece Teorem 1.4.4 den her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$\lim_{n\to\infty} \| A_n(f,x) - f(x) \|_{\rho_2} = 0$$

eşitliği sağlanır (Coşkun 2003).

3.2 AĞIRLIKLI POLİNOM UZAYINDA GADJİEV-İBRAGİMOV OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM

Bu bölümde Aral (2003) tarafından çalışılan aşağıdaki şekilde tanımlı Gadjiev-İbragimov operatörleri için yaklaşım özellikleri ve türev yardımıyla elde edilen bazı önemli eşitsizlikler kanıtlanacaktır. Daha sonra ağırlıklı süreklilik modülü tanımlanarak bu operatör için yaklaşım hızı hesabı yapılacaktır.

Tanım 3.2.1

$B(\mathbb{R}_0)$, $\mathbb{R}_0 = [0,\infty[$ üzerinde gerçel değerli sınırlı fonksiyonlar kümesi, $C(\mathbb{R}_0)$ bu uzaydaki sürekli fonksiyonların kümesi ve $C_m(\mathbb{R}_0)$ ise $\frac{f(x)}{1+x^m} \in B(\mathbb{R}_0)$ olacak şekilde sürekli fonksiyonların uzayı olsun. Bu durumda bu uzay üzerindeki norm $\lim_{\lambda\to\infty} b_\lambda = \infty$ olmak üzere,

$$\|f\|_{m,[0,b_\lambda]} := \sup_{0 \le x \le b_\lambda} \frac{|f(x)|}{1+x^m}$$

şeklinde tanımlanır (Aral 2003).

Tanım 3.2.2

λ, pozitif gerçel sayı; $(\varphi_\lambda(t))$ ve $(\psi_\lambda(t))$; her $t \in [0, b_\lambda]$ için $\varphi_\lambda(0) = 0$ ve $\psi_\lambda(t) > 0$ olan; $C[0, b_\lambda]$ da fonksiyonların dizisi olsun. Ayrıca (α_λ),

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\alpha_\lambda}{\lambda} = 1 \text{ ve } \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda^2 \psi_\lambda(0)} = 0$$

koşullarını sağlayan pozitif sayıların dizisi olsun.

$x, t \in [0, b_\lambda], -\infty < u < \infty, \lambda \geq 0$ olmak üzere $(K_\lambda(x,t,u))$ aşağıdaki koşulları sağlayan üç değişkenli fonksiyon dizisi olsun.

1°) $(K_\lambda(x,t,u))$, sabit $x, t \in [0, b_\lambda]$ için u ya göre tam analitik fonksiyondur.

2°) Her $x \in [0, b_\lambda]$ ve $\lambda \geq 0$ için $K_\lambda(x, 0,0) = 1$ dir.

3°) Her $x \in [0, b_\lambda]$, $\lambda \geq 0, \nu = 0, 1, 2, ...$için, $\left\{(-1)^\nu \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_\lambda(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1\\t=0}}\right\} \geq 0$

eşitsizliği sağlanır.

4°) Her $x \in [0, b_\lambda], \lambda \geq 0$, $\nu = 0, 1, 2, ...$ için, $h(\lambda)$, $\lim_{\lambda\to\infty} \frac{h(\lambda)}{\lambda} = 1$ koşulunu sağlayan negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere,

$$\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_\lambda(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1\\t=0}} = -\lambda x \left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{h(\lambda)}(x,t,u)\right]_{\substack{u=u_1\\t=0}}$$

eşitliği geçerlidir.

Bu durumda yukarıdaki 1°) − 4°) özelliklerini sağlayan $(K_\lambda(x,t,u))$ yardımıyla $L_\lambda(f,x)$ doğrusal operatörü,

$$L_\lambda(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{\lambda^2 \psi_\lambda(0)}\right) \left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_\lambda(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1, u=\alpha_\lambda \cdot \psi_\lambda(t)\\t=0}}\right\} \frac{\left(-\alpha_\lambda \psi_\lambda(0)\right)^\nu}{\nu!} \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlanır (Aral 2003).

Uyarı 3.2.1

$\lambda = n, m+n = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere $h(\lambda) = m+n$ ve $lim_{\lambda\to\infty} b_\lambda = A$ alınırsa (3.9) eşitliğinde tanımlanan operatör, Klasik Gadjiev-İbragimov operatörüne dönüşür (Aral 2003).

Lemma 3.2.1

$L_\lambda(f,x)$ doğrusal pozitif operatörü aşağıdaki üç özelliğe sahiptir:

$\boldsymbol{i})L_\lambda(1,x) = 1$

$$\boldsymbol{ii})L_\lambda(s-x,x) = \left(\tfrac{\alpha_\lambda}{\lambda} - 1\right)x \tag{3.10}$$

$\boldsymbol{iii})L_\lambda((s-x)^2,x) = \left(\left(\dfrac{\alpha_\lambda}{\lambda}\right)^2\dfrac{h(\lambda)}{\lambda} - 2\dfrac{\alpha_\lambda}{\lambda} + 1\right)x^2 + \dfrac{\alpha_\lambda}{\lambda}\dfrac{1}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}x$

(Aral 2003).

Kanıt

$$\boldsymbol{i})\ L_\lambda(1,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} 1.\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_\lambda(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1, u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(t)\right)^\nu}{\nu!}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_\lambda\big(x,0,\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\big)\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^\nu}{\nu!}$$

$$= K_\lambda(x,0,0)$$

$$= 1$$

bulunur.

$$\boldsymbol{ii})\ L_\lambda(s-x,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\lambda^2\psi_\lambda(0)} - x\right)\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_\lambda(x,s,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(s)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^\nu}{\nu!}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\nu}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_\lambda(x,s,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(s)\\ s=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^\nu}{\nu!}$$

$$-\sum_{\nu=0}^{\infty} x\left\{\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}} K_{\lambda}(x,s,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(s)\\ s=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu}}{\nu!}$$

$$=-\frac{\alpha_\lambda}{\lambda^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}} K_{\lambda}(x,s,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(s)\\ s=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

$$-x\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}} K_{\lambda}(x,s,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(s)\\ s=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu}}{\nu!}$$

$$=-\frac{\alpha_\lambda}{\lambda^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-\lambda x)\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{h(\lambda)}(x,s,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(s)\\ s=0}}\right]\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}-x$$

$$=\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}} K_{h(\lambda)}(x,s,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(s)\\ s=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu}}{\nu!}-x$$

$$=\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}x-x$$

$$=\left(\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}-1\right)x$$

iii) $L_\lambda((s-x)^2,x)=L_\lambda(s^2-2sx+x^2,x)$

$$=L_\lambda(s^2,x)-2xL_\lambda(s,x)+x^2L_\lambda(1,x) \tag{3.11}$$

olduğundan öncelikle $L_\lambda(s^2,x)$ hesaplanmalıdır.

$$L_\lambda(s^2,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\right)^2\left\{\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}} K_{\lambda}(x,s,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(s)\\ s=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu}}{\nu!}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\right)^2(-\lambda x)\left\{\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{h(\lambda)}(x,s,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(s)\\ s=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu}}{\nu!}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-\lambda x)\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)\nu}{\left(\lambda^2\psi_\lambda(0)\right)^2}\left\{\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{h(\lambda)}(x,s,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(s)\\ s=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

$$=\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\left\{\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{h(\lambda)}(x,s,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(s)\\ s=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

$$=\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu-1+1}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\left\{\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{h(\lambda)}(x,s,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(s)\\ s=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

$$=\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu-1}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\left\{\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{h(\lambda)}(x,s,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(s)\\ s=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

$$+\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\left\{\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{h(\lambda)}(x,s,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(s)\\ s=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

$$=\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{(-h(\lambda)x)\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\left\{\frac{\partial^{\nu-2}}{\partial u^{\nu-2}}K_{h(\lambda)}(x,s,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(s)\\ s=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu-2}}{(\nu-2)!}$$

$$+\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\frac{1}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{h(\lambda)}(x,s,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(s)\\ s=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

$$=\left(\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\right)^2\frac{h(\lambda)}{\lambda}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_{h(\lambda)}(x,s,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(s)\\ s=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu}}{\nu!}$$

$$+\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\frac{1}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_{h(\lambda)}(x,s,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(s)\\ s=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu}}{\nu!}$$

$$=\left(\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\right)^2\frac{h(\lambda)}{\lambda}+\frac{\alpha_\lambda x}{\lambda}\frac{1}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}$$

Bu eşitlik (3.11) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$L_\lambda((s-x)^2,x)=\left(\left(\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}\right)^2\frac{h(\lambda)}{\lambda}-2\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}+1\right)x^2+\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}\frac{1}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}x$$

eşitliği kanıtlanmış olur.

Lemma 3.2.2

$k=1,2,\cdots,m-1$ için $\lim\limits_{\lambda\to\infty}A_m(\lambda)=1$ ve $\lim\limits_{\lambda\to\infty}B_{k,m}(\lambda)=1$ olmak üzere herhangi m doğal sayısı için,

$$L_\lambda(s^m,x) = A_m(\lambda) + \sum_{k=1}^{m-1} B_{k,m}(\lambda)x^k \tag{3.12}$$

eşitliği geçerlidir (Aral 2003).

Kanıt

Kanıt için tümevarım yöntemi kullanılacaktır.

$$\left(\frac{\nu}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\right)^m = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-m+1)}{\left(\lambda^2\psi_\lambda(0)\right)^m} + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j \left(\frac{\nu}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\right)^j + \frac{1}{\left(\lambda^2\psi_\lambda(0)\right)^{m-j}}$$

eşitliğini sağlayan uygun $a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}$ sabitleri seçilebilir. Böylece,

$$L_\lambda(s^m,x) = \frac{1}{\left(\lambda^2\psi_\lambda(0)\right)^m} \sum_{\nu=m}^{\infty} \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_\lambda(x,s,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(s)\\ s=0}} \frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^\nu}{(\nu-m)!}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j \frac{1}{\left(\lambda^2\psi_\lambda(0)\right)^{m-j}} L_\lambda\left(s^j,x\right)$$

Burada $\nu \to \nu + m$ ve $m \to m+1$ yazılırsa,

$$= \frac{1}{\left(\lambda^2\psi_\lambda(0)\right)^m} \sum_{\nu=m}^{\infty} \frac{\partial^{\nu+m}}{\partial u^{\nu+m}} K_\lambda(x,s,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(s)\\ s=0}} \frac{\left(-\alpha_\lambda\psi_\lambda(0)\right)^{\nu+m}}{\nu!}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j \frac{1}{\left(\lambda^2\psi_\lambda(0)\right)^{m+1-j}} L_\lambda\left(s^j,x\right)$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada,

$\left[\frac{\partial^{\nu+m}}{\partial u^{\nu+m}} K_\lambda(x,s,u)\right]\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(s)\\ s=0}}$ ifadesi için 4°) özelliği uygulanırsa

$h_{(m)}(\lambda) = \underbrace{h(h(\cdots h}_{m\ tane}(\lambda)))$ olmak üzere,

$$\left[\frac{\partial^{\nu+m}}{\partial u^{\nu+m}} K_\lambda(x,s,u)\right]\Big|_{\substack{u=\alpha_\lambda\psi_\lambda(s)\\ s=0}} = (-1)^m x^m \lambda h_1(\lambda) h_2(\lambda) \cdots h_{(m-1)}(\lambda) \times$$

$$\times \quad \left[\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}} K_{h_{(m)}(\lambda)}(x,s,u)\right]\Bigg|_{\substack{u=\alpha_\lambda \psi_\lambda(s)\\ s=0}}$$

eşitliği geçerli olur.

$$c_{1,m+1} = a_m c_{2,m+1} = a_{m-1} + a_{m-1} c_{1,m-1}$$

$$\vdots$$

$$c_{m,m+1} = a_1 + a_2 c_{1,2} + \cdots + a_m c_{m-1,m}$$

olmak üzere,

$$L_\lambda(s^m, x) = \left(\frac{a_\lambda}{\lambda}\right)^m \left(\frac{h(\lambda)h_2(\lambda)\cdots h_{(m-1)}(\lambda)}{\lambda^m}\right) x^m +$$

$$+\left(\frac{a_\lambda}{\lambda}\right)^{m-1} \left(\frac{h(\lambda)h_2(\lambda)\cdots h_{(m-2)}(\lambda)}{\lambda^{m-2}}\right) \frac{a_{m-1}}{\left(\lambda^2 \psi_\lambda(0)\right)} x^{m-1}$$

$$+\left(\frac{a_\lambda}{\lambda}\right)^{m-2} \frac{\left(h(\lambda)h_2(\lambda)\cdots h_{(m-3)}(\lambda)\right)}{\lambda^{m-3}} \frac{\{a_{m-2} + a_{m-2} c_{1,m-2}\}}{\left(\lambda^2 \psi_\lambda(0)\right)^2} x^{m-2}$$

$$\vdots$$

$$+\left(\frac{a_\lambda}{\lambda}\right) \frac{\{a_1 + a_2 c_{1,2} + \cdots + a_{m-1} c_{m-1,m}\}}{\left(\lambda^2 \psi_\lambda(0)\right)^m} x$$

eşitliği geçerli olur. Burada,

$$A_m(\lambda) = \left(\frac{a_\lambda}{\lambda}\right)^m \left(\frac{h(\lambda)h_2(\lambda)\cdots h_{(m-1)}(\lambda)}{\lambda^{m-1}}\right), B_{k,m}(\lambda) = A_k(\lambda) \frac{C}{\left(\lambda^2 \psi_\lambda(0)\right)^{m-k}}$$

olarak alınırsa kanıt tamamlanmış olur.

Lemma 3.2.3

$m \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $f \in C_m(\mathbb{R}_0)$ ve her $\lambda > \lambda_0$ için,

i) $\|L_\lambda(1 + s^m, x)\|_m \leq 2$ (3.13)

ii) $\|L_\lambda(f, x)\|_m \leq 2\|f\|_m$ (3.14)

eşitliklerini sağlayan bir λ_0 sabiti vardır (Aral 2003).

Kanıt

i) İlk olarak L_λ nın $C_m(\mathbb{R}_0)$ dan $C_m(\mathbb{R}_0)$ a doğrusal pozitif bir operatör olduğu gösterilmelidir. Sınırlı operatörler için

$$\|L_\lambda(f,x)\|_m \leq \|L_\lambda(1+s^m,x)\|_m \|f\|_m$$

eşitsizliği geçerli olduğundan (3.13) ve (3.14) eşitsizliklerinden açıkça L_λ operatörü $C_m(\mathbb{R}_0)$ dan $C_m(\mathbb{R}_0)$ a dönüşüm yapar.

Her $x \geq 0$ ve $\nu = 1,2,3,\cdots,$ m için $\frac{x^\nu}{1+x^m} \leq 1$ olduğundan Lemma 3.2.2 den

$k = 1,2,\cdots,m-1$, $A_m(\lambda)$ ve $B_{k,m}(\lambda)$ (3.12) eşitliğinde tanımlandığı şekilde olmak üzere

$$\frac{L_\lambda(s^m,x)}{1+x^m} \leq A_m(\lambda) + \sum_{k=1}^{m-1} B_{k,m}(\lambda)$$

eşitsizliği geçerlidir. $\lim\limits_{\lambda\to\infty} A_m(\lambda) = 1$ ve $\lim\limits_{\lambda\to\infty} B_{k,m}(\lambda) = 0$ olduğundan yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı $\lambda \to \infty$ için 1 e yaklaşır. Sonuç olarak her $\lambda > \lambda_0$ için bir λ_0 sabiti vardır öyle ki

$$\frac{L_\lambda(1+s^m,x)}{1+x^m} \leq 1$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kullanılarak

$$\sup_{0\leq x\leq b_\lambda} \frac{1+L_\lambda(s^m,x)}{1+x^m} \leq 1 + \|L_\lambda(s^m,x)\|_{m,[0,b_\lambda]} \leq 2$$

eşitsizliği elde edilir.

ii) $f \in C_m(\mathbb{R}_0)$ için (3.13) eşitsizliğinden

$$\|L_\lambda(f,x)\|_{m,[0,b_\lambda]} \leq \left\| L_\lambda\left((1+s^m)|f(s)|\frac{1}{(1+s^m)},x\right)\right\|_{m,[0,b_\lambda]}$$

$$\leq \left\|L_\lambda\big((1+s^m),x\big)\right\|_{m,[0,b_\lambda]} \|f\|_{m,[0,b_\lambda]} \leq 2\|f\|_{m,[0,b_\lambda]}$$

eşitsizliği bulunur. Bu ise kanıtı tamamlar.

Lemma 3.2.4

$$
\begin{aligned}
H_m(\lambda) = max\Bigg\{ & \sum_{k=1}^{m} |B_k(\lambda) - 2B_{k-1}(\lambda) + B_{k-2}(\lambda)|, \\
& \left|B_{m+1,m+2}(\lambda) - 2B_{m,m+1}(\lambda) + B_{m-1,m}(\lambda)\right|, \\
& |A_{m+2}(\lambda) - 2A_{m+1}(\lambda) + A_m(\lambda)|, \\
& \left|\left(\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}\right)^2 \frac{h(\lambda)}{\lambda} - 2\frac{\alpha_\lambda}{\lambda} + 1\right| + \frac{\alpha_\lambda}{\lambda}\frac{1}{\lambda^2 \psi_\lambda(0)}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

olmak üzere her bir $m \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $x \in [0, b_\lambda]$ ve $\lambda > 0$ için,

$$
\frac{L_\lambda\big((1+s^m)(s-x)^2, x\big)}{1+x^m} \leq H_m(\lambda)(x^2 + x + 2)\,, \qquad x \in \mathbb{R}_0 \tag{3.15}
$$

eşitsizliği geçerlidir (Aral 2003).

Kanıt

Kolaylık için $B_{-1,m+1}(\lambda) = B_{0,m}(\lambda) = 0$ seçilirse Lemma 3.2.2 den

$$
\begin{aligned}
L_\lambda((s-x)^2 s^m, x) &= L_\lambda(s^{m+2}, x) - 2xL_\lambda(s^{m+1}, x) + x^2 L_\lambda(s^m, x) \\
&\leq |A_{m+2}(\lambda) - 2A_{m+1}(\lambda) + A_m(\lambda)|x^{m+2} + \\
&+ \sum_{k=1}^{m+1} \left|B_{k,m+2}(\lambda) - 2B_{k-1,m+1}(\lambda) + B_{k-2,m}(\lambda)\right| x^k
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

elde edilir. (3.16) eşitsizliği kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
\frac{L_\lambda\big((1+s^m)(s-x)^2, x\big)}{1+x^m} \leq & \left|\left(\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}\right)^2 \frac{h(\lambda)}{\lambda} - 2\frac{\alpha_\lambda}{\lambda} + 1\right| + \frac{\alpha_\lambda}{\lambda}\frac{1}{\lambda^2 \psi_\lambda(0)} + \\
& + |A_{m+2}(\lambda) - 2A_{m+1}(\lambda) + A_m(\lambda)|x^2 + \\
& + \left|B_{m+1,m+2}(\lambda) - 2B_{m,m+1}(\lambda) + B_{m-1,m}(\lambda)\right| x + \\
& + \sum_{k=1}^{m} \left|B_{k,m+2}(\lambda) - 2B_{k-1,m+1}(\lambda) + B_{k-2,m}(\lambda)\right|
\end{aligned}
$$

ifadesine ulaşılır. Bu ise kanıtı tamamlar.■

3.2 kesimin bundan sonraki bölümünde $C_m^2(\mathbb{R}_0) := \{f: f, f', f'' \in C_m(\mathbb{R}_0)\}$ biçiminde ifade edilen polinom ağırlıklı fonksiyon uzaylarında noktasal tahminler verilecektir. Ayrıca Gadjiev and Ispir (1999) da verilen ağırlıklı süreklilik modülüne benzer bir tanım kullanılarak sınırsız aralık üzerinde (3.9) operatörü ile fonksiyonlara yaklaşım teoremleri verilecektir.

Teorem 3.2.1

$f \in C_m^2(\mathbb{R}_0)$ ve $H_m(\lambda)$ Lemma 3.2.4 deki şekilde tanımlı olsun. Bu durumda $L_\lambda(f,x)$ doğrusal pozitif operatörü için,

$$\left\|\frac{L_\lambda(f,x)-f(x)}{2+x+x^2}\right\|_{m,[0,b_\lambda]} \leq \|f'\|_m \left|\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}-1\right| + \|f''\|_m \times$$
$$\times \left\{\left|\left(\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}\right)^2 \frac{h(\lambda)}{\lambda} - 2\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}+1\right| + \frac{\alpha_\lambda}{\lambda}\frac{1}{\lambda^2\psi_\lambda(0)} + H_m(\lambda)\right\}$$

eşitsizliği sağlanır (Aral 2003).

Kanıt

$x \in \mathbb{R}_0$ bir sabit nokta olsun. $f \in C_m^2(\mathbb{R}_0)$ ve $s \in \mathbb{R}_0$ için,

$$f(s) = f(x) + f'(x)(s-x) + \int_x^s (s-y)f''(y)\,dy$$

yazılabilir. L_λ, doğrusal pozitif bir operatör ve $L_\lambda(1,x) = 1$ olduğundan,

$$L_\lambda(f(s),x) = f(x) + f'(x)L_\lambda\big((s-x),x\big) + L_\lambda\left(\int_x^s (s-y)f''(y)\,dy\ ,x\right) \tag{3.17}$$

elde edilir. Buradan

$$\int_x^s (s-y)f''(y)\,dy = f(s) - f(x) - f'(x)(s-x)$$
$$\leq 1 + s^2 - (1+x^2) + f'(x)(s-x)$$
$$\leq (2+s^2+x^2) - (2+s^2+x^2)\|f''\|(s-x) \leq (2+s^2+x^2)(s-x)^2$$

$$\left|\int_x^s (s-y)f''(y)\,dy\right| \le \|f''\|_{m,[0,b_\lambda]}(2+s^m+x^m)(s-x)^2$$

eşitsizliğine ulaşılır. Dolayısıyla

$$\frac{1}{1+x^m}L_\lambda\left(\left|\int_x^s (s-y)f''(y)\,dy\right|,x\right) \le \|f''\|_{m,[0,b_\lambda]}\{L_\lambda((s-x)^2,x)+$$

$$+\frac{1}{1+x^m}L_\lambda\big((1+x^m)(s-x)^2,x\big)\Big\}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.17) eşitsizliğinin her iki tarafından $f(x)$ çıkartılır ve her iki taraf $(1+x^m)$ fonksiyonuna bölünürse önce (3.10) eşitliği ve sonra (3.17) eşitsizliği kullanılarak Lemma 3.2.4 yardımıyla

$$\frac{|L_\lambda(f,x)-f(x)|}{1+x^m} \le \|f'\|_{m,[0,b_\lambda]}|L_\lambda(s-x,x)|+$$

$$+\|f''\|_{m,[0,b_\lambda]}\left\{\frac{1}{1+x^m}L_\lambda((s-x)^2(1+s^m)\,,x)+L_\lambda((s-x)^2\,,x)\right\} \le$$

$$\le \|f'\|_{m,[0,b_\lambda]}\left|\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}-1\right|x+\|f''\|_{m,[0,b_\lambda]}\{H_m(\lambda)(x^2+x+1)+$$

$$+\left|\left(\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}\right)^2\frac{h(\lambda)}{\lambda}-2\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}+1\right|x^2+\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}\frac{1}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}x\right\}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Böylece her iki tarafın supremumu alınarak norma geçilirse

$$\left\|\frac{L_\lambda(f,x)-f(x)}{2+x+x^2}\right\|_{m,[0,b_\lambda]} \le \|f'\|_{m,[0,b_\lambda]}\left|\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}-1\right|+\|f''\|_{m,[0,b_\lambda]}\{H_m(\lambda)+$$

$$+\left|\left(\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}\right)^2\frac{h(\lambda)}{\lambda}-2\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}+1\right|+\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}\frac{1}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise kanıtı tamamlar.■

Şimdi, ağırlıklı uzayda yakınsama hızı için bir hata hesabı verilecektir. Bu amaçla yaklaşımın geçerli olduğu , K_f, f ye bağlı bir sabit olmak üzere,

$$C^K(\mathbb{R}_0) = \left\{ f \in C_m(\mathbb{R}_0) : lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1+x^m} = K_f \right\}$$

biçiminde tanımlanan $C^K(\mathbb{R}_0)$ ağırlıklı uzayı kullanılacaktır.

$\omega(f,\delta)$ birinci süreklilik modülünün genel olarak sonsuz aralıkta $\delta \to 0$ için 0 a yakınsamadığı bilinmektedir. Bu kesimde, sonsuz aralıkta $\delta \to 0$ için 0 a yakınsayan $\Omega_m(f,\delta)$ ve $\Omega_m^2(f,\delta)$ ağırlıklı süreklilik modülleri verilecektir.

Tanım 3.2.3

$f \in C^K(\mathbb{R}_0)$olmak üzere, $\Omega_m(f,\delta)$ ve $\Omega_m^2(f,\delta)$ ağırlıklı süreklilik modülleri olmak üzere,

$$\Omega_m(f,\delta) = \sup_{|h|\le\delta, x\in[0,b_\lambda]} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{(1+x^m)(1+h^m)} \tag{3.18}$$

$$\Omega_m^2(f,\delta) = \sup_{|h|\le\delta, x\in[0,b_\lambda]} \frac{|f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)|}{(1+x^m)(1+h^m)} \tag{3.19}$$

şeklinde tanımlanacaktır (Aral 2003).

Lemma 3.2.5

(3.18) eşitliği ile tanımlı $\Omega_m(f,\delta)$ için $lim_{\delta\to 0}\,\Omega_m(f,\delta) = 0$ dır (Aral 2003).

Kanıt

Yeterince büyük bir x için,

$$\frac{|f(x+h)-f(x)|}{(1+x^m)(1+h^m)} \le 2^m \left| \frac{f(x+h)}{1+(x+h)^m} - K_f \right| + \left| \frac{f(x)}{1+x^m} - K_f \right| + \frac{2^m}{x} K_f$$

eşitsizliği yazılabileceğinden, $C^K(\mathbb{R}_0)$ ın tanımından $\varepsilon > 0$ için $x_0 = x_0(\varepsilon)$ bulunabilir öyle ki $x > x_0$ için,

$$\left| \frac{f(x+h)}{1+(x+h)^m} - K_f \right| < \frac{\varepsilon}{2^m 3}, \quad \left| \frac{f(x)}{1+x^m} - K_f \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \; \frac{1}{x} < \frac{\varepsilon}{2^m K_f 3}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Bu nedenle klasik süreklilik modülü kanıtlarına benzer şekilde,

$$\Omega_m(f,\delta) \leq \sup_{0\leq x\leq x_0, |h|\leq\delta} |f(x+h)-f(x)| + \sup_{x_0\leq x\leq b_\lambda, |h|\leq\delta} \left|\frac{f(x+h)}{1+(x+h)^m} - K_f\right| 2^m$$

$$+ \sup_{x_0\leq x\leq b_\lambda, |h|\leq\delta} \left|\frac{f(x)}{1+x^m} - K_f\right| + \sup_{x_0\leq x\leq b_\lambda, |h|\leq\delta} \frac{2^m}{x} K_f \leq \omega(f,\delta) + \varepsilon$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

Her $\varepsilon > 0$ için $\overline{lim}_{\delta\to 0}\, \Omega_m(f,\delta) < \varepsilon$ olduğundan $f \in C^K(\mathbb{R}_0)$ için

$lim_{\delta\to 0}\, \Omega_m(f,\delta) = 0$

olur. Bu ise kanıtı tamamlar.

Tanım 3.2.4

$f \in C^K(\mathbb{R}_0)$ için,

$$f_h(x) := \frac{4}{h^2} \int_o^{\frac{h}{2}} \int_0^{\frac{h}{2}} \left[2f(x+s+t) - f\big(x+2(s+t)\big)\right] ds\, dt$$

şeklinde tanımlı fonksiyona Stieklov fonksiyonu denir.

Teorem 3.2.2

$f \in C^K(\mathbb{R}_0)$ olsun. C_m bir sabit olmak üzere,

$$\left\|\frac{L_\lambda(f,x) - f(x)}{2+x+x^2}\right\|_{m,[0,b_\lambda]} \leq C_m(1+[H_m(\lambda)]^m) \times \left(\Omega_m\big(f,K_m(\lambda)\big) + \Omega_m^2\big(f,K_m(\lambda)\big)\right)$$

$$+ \left|\left(\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}\right)^2 \frac{h(\lambda)}{\lambda} - 2\frac{\alpha_\lambda}{\lambda} + 1\right| + \frac{\alpha_\lambda}{\lambda}\frac{1}{\lambda^2 \psi_\lambda(0)}$$

dır (Aral 2003).

Kanıt

$f \in C^K(\mathbb{R}_0)$ için,

$$f_h(x) = \frac{4}{h^2}\int_0^{\frac{h}{2}}\int_0^{\frac{h}{2}}\left[2f(x+s+t) - f\big(x+2(s+t)\big)\right] ds\, dt$$

şeklinde tanımlı Stieklov fonksiyonunun her iki tarafından $f(x)$ çıkartılıp $(1+x^m)$ e bölünür ve üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$\frac{|f_h(x) - f(x)|}{1+x^m} \leq \frac{4}{h^2}\int_0^{\frac{h}{2}}\int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\left|2f(x+s+t) - f\big(x+2(s+t)\big) - f(x)\right|}{1+x^m} ds\, dt$$

$$\leq \frac{4}{h^2}\int_0^{\frac{h}{2}}\int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\left|f(x+s+t) - f\big(x+2(s+t)\big)\right|(1+(s+t)^m)}{(1+x^m)(1+(s+t)^m)} ds\, dt +$$

$$+\frac{4}{h^2}\int_0^{\frac{h}{2}}\int_0^{\frac{h}{2}} \frac{|f(x+s+t) - f(x)|(1+(s+t)^m)}{(1+x^m)(1+(s+t)^m)} ds\, dt$$

$$\leq \{\Omega_m(f,h) + \Omega_m(f,h)\}(1+h^m) = 2\Omega_m(f,h)(1+h^m)$$

elde edilir. Her iki tarafın supremumu alınarak norma geçilirse,

$$\|f_h - f\|_{m,[0,b_\lambda]} \leq 2\Omega_m(f,h)(1+h^m) \tag{3.20}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. Ayrıca Stieklov fonksiyonunun her iki tarafının türevi alınarak,

$$f_h'(x) = \frac{1}{h^2}\int_0^{\frac{h}{2}} 8\left\{f\left(s+x+\frac{h}{2}\right) - f(s+x)\right\} - 2\{f(2s+x+h) - f(2s+h)\}\, ds$$

eşitliği yazılabilir. Her iki tarafın $(1+x^m)$ ye bölünmesiyle,

$$\frac{f_h'(x)}{(1+x^m)} = \frac{1}{h^2}\int_0^{\frac{h}{2}} \frac{8\left\{f\left(s+x+\frac{h}{2}\right) - f(s+x)\right\} - 2\{f(2s+x+h) - f(2s+t)\}}{(1+x^m)} ds$$

$$=\frac{1}{h^2}\int_0^{\frac{h}{2}}\frac{8\left\{f\left(s+x+\frac{h}{2}\right)-f(s+x)\right\}(1+(x+s)^m)\left(1+\left(\frac{h}{2}\right)^m\right)}{(1+x^m)(1+(x+s)^m)\left(1+\left(\frac{h}{2}\right)^m\right)}ds+$$

$$+\frac{1}{h^2}\int_0^{\frac{h}{2}}(1+(x+2s)^m)(1+h^m)\frac{2\{f(2s+x+h)-f(2s+t)\}}{(1+x^m)(1+(x+2s)^m)(1+h^m)}ds$$

eşitsizliğine ulaşılır. $x\geq 0$ ve $s\geq 0$ için,

$$\frac{(1+(x+2s)^m)}{(1+x^m)}\leq 2^{m-1}(1+s^m)$$

eşitsizliği kullanılarak,

$$\frac{f_h'(x)}{(1+x^m)}\leq\frac{1}{h^2}\int_0^{\frac{h}{2}}2^{m-1}(1+s^m)\left(1+\left(\frac{h}{2}\right)^m\right)\frac{8\left\{f\left(s+x+\frac{h}{2}\right)-f(s+x)\right\}}{(1+(x+s)^m)\left(1+\left(\frac{h}{2}\right)^m\right)}ds+$$

$$+\frac{1}{h^2}\int_0^{\frac{h}{2}}2^{m-1}(1+s^m)(1+h^m)\frac{2\{f(2s+x+h)-f(2s+t)\}}{(1+(x+2s)^m)(1+h^m)}ds$$

$$\leq 8\frac{2^{m-1}}{h^2}\left(1+\left(\frac{h}{2}\right)^m\right)\int_0^{\frac{h}{2}}(1+s^m)\Omega_m\left(f,\frac{h}{2}\right)ds$$

$$+2\frac{2^m}{h^2}(1+h^m)\int_0^{\frac{h}{2}}(1+s^m)\Omega_m(f,h)ds$$

$$\leq 10\frac{2^m}{h}(1+h^m)\Omega_m(f,h)$$

yazılabilir. Sonuç olarak,

$$\|f_h'(x)\|_{m,[0,b_\lambda]}\leq\frac{2^m}{h}(1+h^m)\Omega_m(f,h)\qquad(3.21)$$

dır. Benzer şekilde,

$$\frac{|f_h''(x)|}{(1+x^m)} \leq h^{-2}\frac{8\left\{f(x+h)-2f\left(\frac{h}{2}+x\right)-f(x)\right\}\left(1+\left(\frac{h}{2}\right)^m\right)}{(1+x^m)\left(1+\left(\frac{h}{2}\right)^m\right)}+$$

$$+h^{-2}\frac{\{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)\}(1+h^m)}{(1+x^m)(1+h^m)} \leq h^{-2}9(1+h^m)\Omega_m^2(f,h)$$

yazılabilir. Böylece,

$$\|f_h''(x)\|_{m,[0,b_\lambda]} \leq h^{-2}\, 9(1+h^m)\Omega_m^2(f,h) \tag{3.22}$$

eşitliği doğrudur.(3.9) eşitliğinden,

$$\left\|\frac{L_\lambda(f,x)-f(x)}{2+x+x^2}\right\|_{m,[0,b_\lambda]} \leq \left\|\frac{L_\lambda(f-f_h,x)}{2+x+x^2}\right\|_{m,[0,b_\lambda]}+\left\|\frac{L_\lambda(f_h,x)-f_h(x)}{2+x+x^2}\right\|_{m,[0,b_\lambda]}+$$

$$+\left\|\frac{f_h(x)-f(x)}{2+x+x^2}\right\|_{m,[0,b_\lambda]} \tag{3.23}$$

yazılabilir. (3.20) eşitliğinden,

$$\left\|\frac{L_\lambda(f-f_h,x)}{2+x+x^2}\right\|_{m,[0,b_\lambda]} \leq \|f_h-f\|_{m,[0,b_\lambda]} \leq 2\Omega_m(f,h)(1+h^m) \tag{3.24}$$

elde edilir.

Ayrıca Teorem 3.2.1, (3.22), (3.23) ve (3.24) eşitsizlikleri kullanılarak,

$$\left\|\frac{L_\lambda(f_h,x)-f_h(x)}{2+x+x^2}\right\|_{m,[0,b_\lambda]} \leq \|f_h'\|_{m,[0,b_\lambda]}\left|\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}-1\right|+\|f_h''\|_{m,[0,b_\lambda]}\{H_m(\lambda)+$$

$$+\left|\left(\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}\right)^2\frac{h(\lambda)}{\lambda}-2\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}+1\right|+\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}\frac{1}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\right\}$$

$$\leq \frac{2^m}{h}(1+h^m)\Omega_m(f,h)\left|\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}-1\right|x+h^{-2}9(1+h^m)\Omega_m^2(f,h)$$

$$\times\left\{H_m(\lambda)+\left|\left(\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}\right)^2\frac{h(\lambda)}{\lambda}-2\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}+1\right|+\frac{\alpha_\lambda}{\lambda}\frac{1}{\lambda^2\psi_\lambda(0)}\right\}$$

elde edilir.

Burada $h = K_m(\lambda) = max\left\{\sqrt{H_m(\lambda)}, \sqrt{\left|\frac{\alpha_\lambda}{\lambda} - 1\right|}\right\}$ olarak seçilirse kanıt tamamlanmış olur.

3.3 GADJİEV-İBRAGİMOV OPERATÖRLERİNİN KANTOROVİCH FORMU

Bu kesimde Aral (2005) tarafından hazırlanan çalışma kullanılarak integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşım yapmak amacıyla aşağıdaki genelleştirme tanımlanarak bu operatör için yaklaşım hızı hesabı yapılacaktır.

Gadjiev and Ibragimov (1970) de Gadjiev-İbragimov ,

$$m_{n,\nu}(f,x) = \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}} \frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\nu}{\nu!}$$

olmak üzere,

$$M_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right) m_{n,\nu}(f,x) \qquad (3.25)$$

olarak tanımlanan doğrusal pozitif operatörlerinin bir genel dizisi verilmiştir. Bu operatörlerin bazı yeni özellikleri ve genellemeleri Aral (2003), Doğru (1997), Radatz and Wood (1978) de incelenmiştir (Aral 2005).

Basitlik için (3.25) eşitliğinde $\alpha_n = n$, $\psi_n(0) = \frac{1}{n}$ seçilebilir ve aşağıdaki şartlar dikkate alınabilir:

Tanım 3.3.1

$K_n(x,t,u)$ üç değişkenli fonksiyon dizisi, $A > 0$ ya da $A = \infty$ olmak üzere ve $u \in]-\infty, \infty[$ olsun.

1°) $x \in I_n$ için $K_n(x,0,1) = 1$ dir.

2°) $\nu = 0,1,2,\ldots$ için $(-1)^\nu \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\ t=0}} \geq 0$ dır.

3°) $x \in I_n, n \in \mathbb{N}, \nu = 0,1,2,\ldots$ olmak üzere $n + m \in N_0 = N \cup \{0\}$ olacak şekilde

$$\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}} = -nx\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}}$$

eşitliği sağlayan bir m sayısı vardır.

$K_n(x,t,u)$ fonksiyonunun $1^\circ) - 3^\circ)$ özelliklerine ek olarak,

4°) $K_n(x,t,u)$, I_n aralığındaki herhangi bir u ve t sabiti için, x e göre sürekli türevlenebilir ve

$\frac{\partial}{\partial x}K_n(x,0,1) = -nK_{n+m}(x,0,1)$ olur.

5°) $\frac{1+\nu m}{1+mx}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}} = n\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}}$

koşulları sağlansın. Bu durumda operatör,

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}}$$

$$:= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right)A_n(x,\nu) \tag{3.26}$$

şeklinde tanımlanır. Bundan sonra kısalık olması bakımından

$\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}}$ yerine $A_n(x,\nu)$ gösterimi kullanılacaktır (Aral 2005).

Aşağıdaki dört lemma, ana teoremin ispatında kullanılacak bazı özelliklerin kanıtlarını içermektedir.

Lemma 3.3.1

4°) koşulu aşağıdaki eşitliğe eşdeğerdir.

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}} = \frac{\nu}{x}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}} - n\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}} \tag{3.27}$$

(Aral 2005).

Kanıt

3°) özelliğinin $\nu -$ kez uygulanmasıyla,

$$\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}} = (-1)^\nu n(n+m)\dots[n+(\nu-1)m]x^\nu K_{n+\nu m}(x,0,1) \tag{3.28}$$

elde edilir. 4°) ve (3.28) eşitliğinin uygulanmasıyla,

$$\frac{d}{dx} K_{n+\nu m}(x,0,1) = -(n+\nu m)K_{n+(\nu+1)m}(x,0,1)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu K_{n+\nu m}(x,0,1)\right) = \nu x^{\nu-1}K_{n+\nu m}(x,0,1) + x^\nu(-1)(n+\nu m)K_{n+(\nu+1)m}(x,0,1)$$

$$(-1)^\nu \frac{d}{dx}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,0,1)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}} = n(n+m)\dots[n+(\nu-1)m]$$

$$\times\left\{\nu x^{\nu-1}K_{n+\nu m}(x,0,1) - x^\nu(n+\nu m)K_{n+(\nu+1)m}(x,0,1)\right\}$$

eşitliği geçerli olur.

(3.28) eşitliği tekrar uygulanılarak istenen sonuç aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\nu}{x}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}} = \frac{\nu}{x}(-1)^\nu n(n+m)\dots[n+(\nu-1)m]x^\nu K_{n+\nu m}(x,0,1)$$

$$= (-1)^\nu \nu n(n+m)\dots[n+(\nu-1)m]x^{\nu-1}K_{n+\nu m}(x,0,1)$$

$$n\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}} = -n(n+m)x\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{n+2m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}}$$

$$= n(n+m)(n+2m)x^2\frac{\partial^{\nu-2}}{\partial u^{\nu-2}} K_{n+3m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}}$$

$$\vdots$$

$$= (-1)^\nu n(n+m)(n+2m)\cdots(n+\nu m)x^\nu K_{n+(\nu+1)m}(x,t,u)\big|_{\substack{u=1\\t=0}}$$

Böylece,

$$\frac{\nu}{x}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}} - n\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}} =$$

$$= (-1)^\nu \nu n(n+m) \dots [n+(\nu-1)m] x^{\nu-1} K_{n+\nu m}(x,0,1)$$

$$-(-1)^\nu n(n+m)(n+2m)\cdots(n+\nu m)x^\nu K_{n+(\nu+1)m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}}$$

$$= (-1)^\nu \nu n(n+m) \dots [n+(\nu-1)m] \times$$

$$\times \left\{\nu x^{\nu-1} K_{n+\nu m}(x,0,1) - (n+\nu m)x^\nu K_{n+(\nu+1)m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}}\right\}$$

olur.

Lemma 3.3.2

$x \in I_n$ ve

$$S_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu A_n(x,\nu) \tag{3.29}$$

için,

$$T_{\tau,n}(x) = S_n((t-nx)^\tau, x), \tau = 0, 1, 2, \dots \tag{3.30}$$

polinomu verilsin. C pozitif bir sabit sayı, n doğal bir sayı ve $\left[\!\left[\frac{\tau}{2}\right]\!\right]$, $\frac{\tau}{2}$ den büyük en küçük tamsayı olmak üzere,

$$\left|T_{\tau,n}(x)\right| \leq C n^{\left[\!\left[\frac{\tau}{2}\right]\!\right]}$$

eşitsizliği geçerlidir (Aral 2005).

Kanıt

$$S_n\big(t(t-1)(t-2)\dots\big(t-(\ell-1)\big),x\big), \ell \geq 0$$

3.29 eşitliği ve 3°) özelliğinden,

$$S_n\big(t(t-1)(t-2)\dots\big(t-(\ell-1)\big),x\big) = \sum_{\nu=\ell}^{\infty} \nu(\nu-1)\dots\big(\nu-(\ell-1)\big)A_n(x,\nu)$$

$$= \sum_{\nu=\ell}^{\infty} \nu(\nu-1)\dots\big(\nu-(\ell-1)\big)\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}}$$

$$=\sum_{\nu=\ell}^{\infty}\nu(\nu-1)\ldots\big(\nu-(\ell-1)\big)\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}(-1)^{\ell}n(n+m)\ldots[n+(\ell-1)m]x^{l}$$

$$\times\frac{\partial^{\nu-\ell}}{\partial u^{\nu-\ell}}K_{n+\ell m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}}$$

$$=\sum_{\nu=\ell}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+\ell}}{(\nu-\ell)!}n(n+m)\ldots[n+(\ell-1)m]x^{\ell}\frac{\partial^{\nu-\ell}}{\partial u^{\nu-\ell}}K_{n+\ell m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}}$$

$$=n(n+m)\ldots[n+(\ell-1)m]x^{\ell}\sum_{\nu=\ell}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+\ell}}{(\nu-\ell)!}\frac{\partial^{\nu-\ell}}{\partial u^{\nu-\ell}}K_{n+\ell m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}}$$

$$=n(n+m)\ldots[n+(\ell-1)m]x^{\ell}\sum_{\nu=\ell}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-\ell}(-1)^{2\ell}}{(\nu-\ell)!}\frac{\partial^{\nu-\ell}}{\partial u^{\nu-\ell}}K_{n+\ell m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}}$$

$$=n(n+m)\ldots[n+(\ell-1)m]x^{\ell}\sum_{\nu=\ell}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-\ell}}{(\nu-\ell)!}\frac{\partial^{\nu-\ell}}{\partial u^{\nu-\ell}}K_{n+\ell m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}}$$

$$=n(n+m)\ldots[n+(\ell-1)m]x^{\ell}\sum_{\nu=\ell}^{\infty}A_{n+\ell m}(x,\nu-1)$$

Burada Tanım 3.3.1 deki 1°) ve 3°) özelliklerinden,

$$\sum_{\nu=\ell}^{\infty}A_{n+\ell m}(x,\nu-1)=1$$

olduğundan,

$$S_n\big(t(t-1)(t-2)\ldots\big(t-(\ell-1)\big),x\big)=n(n+m)\cdots[n+(\ell-1)m]x^{\ell}$$

olur. Bu eşitlikten kolayca görülmektedir ki,

$$S_n(1,x)=1$$

$$S_n(t,x)=nx$$

$$S_n(t^2,x)=nx\{x(n+m)+1\}$$

$$S_n(t^3,x)=nx\{\big(n^2+m(3n+2m)\big)x^2+3x(n+m)+1\}$$

$$S_n(t^4,x) = nx\{(n^3+6n^2m+11nm^2+6m^3)x^3+6(n^2+3nm+2m^2)x^2+7(n+m)x+1\}$$

eşitlikleri geçerlidir. Gerçekten,

$$S_n(1,x) = 1$$

$$S_n(t,x) = nx$$

$$\begin{aligned} S_n(t^2,x) &= S_n(t(t-1)+t,x) \\ &= S_n(t(t-1),x)+S_n(t,x) \\ &= n(n+m)x^2+nx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n(t^3,x) &= S_n(t(t-1)(t-2)+3t^2-2t,x) \\ &= S_n(t(t-1)(t-2),x)+3S_n(t^2,x)-2S_n(t,x) \\ &= n(n+m)(n+2m)x^3+3n(n+m)x^2+3nx-2nx \\ &= nx\{(n^2+3mn+2m^2)x^2+3x(n+m)+1\} \\ &= nx\{\big(n^2+m(3n+2m)\big)x^2+3x(n+m)+1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n(t^4,x) &= S_n(t(t-1)(t-2)(t-3)+6t^3-11t^2+6t,x) \\ &= S_n(t(t-1)(t-2)(t-3),x)+6S_n(t^3,x)-11S_n(t^2,x)+6S_n(t,x) \\ &= n(n+m)(n+2m)(n+3m)x^4+6\big[nx\big(n^2+m(3n+2m)\big)x^2+ \\ &\quad +3x(n+m)+1\big]-11(n(n+m)x^2+nx)+6nx \\ &= nx\{(n^3+6n^2m+11nm^2+6m^3)x^3+6(n^2+3nm+2m^2)x^2\}+7(n+m)x+1 \end{aligned}$$

olur. Bu ifadeler kullanılarak,

$T_{\tau,n}(x) = S_n((t-nx)^\tau,x) \qquad \tau = 0,1,2,3,4$ için,

$$T_{0,n}(x) = 1$$

$$T_{1,n}(x) = 0$$

$$T_{2,n}(x) = nx(1+mx)$$

$T_{3,n}(x) = nx(mx(2mx + 3) + 1)$

$T_{4,n}(x) = n^2(11m^2x^4 + 6mx^3 + 3x^2 - 8m^2x^2) + n(6m^3x^4 + 12m^2x^3 + 7mx^2 + x)$

eşitlikleri elde edilir. Gerçekten,

$T_{0,n}(x) = S_n((t - nx)^0, x) = S_n(1, x) = 1$

$$\begin{aligned}
T_{1,n}(x) &= S_n((t - nx)^1, x) = S_n(t - nx, x) \\
&= S_n(t, x) - S_n(nx, x) \\
&= nx - nxS_n(1, x) \\
&= nx - nx1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{2,n}(x) &= S_n((t - nx)^2, x) \\
&= S_n(t^2 - 2tnx + n^2x^2, x) \\
&= S_n(t^2, x) - 2nxS_n(t, x) + n^2x^2S_n(1, x) \\
&= nx(xn + xm + 1) - 2nxnx + n^2x^2.1 \\
&= n^2x^2 + nmx^2 + nx - 2n^2x^2 + n^2x^2 \\
&= nx(mx + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{3,n}(x) &= S_n((t - nx)^3, x) \\
&= S_n(t^3 - 3t^2nx + 3tn^2x^2 - n^3x^3, x) \\
&= S_n(t^3, x) - 3nxS_n(t^2, x) + 3n^2x^2S_n(t, x) - n^3x^3S_n(1, x) \\
&= nx\{(n^2 + m(3n + 2m))x^2 + 3x(n + m) + 1\} - 3nxnx\{x(n + m) + 1\} + \\
&\quad +3n^2x^2nx - n^3x^31 \\
&= nx(mx(2mx + 3) + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{4,n}(x) &= S_n((t - nx)^4, x) \\
&= S_n(t^4 - 4t^3nx + 6t^2n^2x^2 - 4tn^3x^3 + n^4x^4, x)
\end{aligned}$$

$$= S_n(t^4,x) - 4nxS_n(t^3,x) + 6n^2x^2S_n(t^2,x) - 4n^3x^3S_n(t,x) + n^4x^4S_n(1,x)$$
$$= nx\{(n^3+6n^2m+11nm^2+6m^3)x^3+6(n^2+3nm+2m^2)x^2+7(n+m)x+1\}$$
$$-4nxnx\{(n^2+m(3n+2m))x^2+3x(n+m)+1\}+6n^2x^2nx\{x(n+m)+1\}$$
$$-4n^3x^3nx+n^4x^4$$
$$= n^2(11m^2x^4+6mx^3+3x^2-8m^2x^2)+n(6m^3x^4+12m^2x^3+7mx^2+x)$$

olur.

Yukarıdaki eşitliklerden $T_{0,n}$ ve $T_{1,n}$ polinomları için n nin derecesi sırasıyla $[\![0]\!]$ ve $\left[\!\!\left[\frac{1}{2}\right]\!\!\right]$ dir. Ayrıca $T_{2,n}$ ve $T_{3,n}$ polinomlarında n nin derecesi $[\![1]\!]$ ve $\left[\!\!\left[\frac{3}{2}\right]\!\!\right]$ dir. Sonunda, $T_{4,n}$ polinomunda n nin derecesi $\left[\!\!\left[\frac{4}{2}\right]\!\!\right]$ olduğu görülür. Bu ise lemmanın ispatını tamamlar.

Lemma 3.3.3

C, n den bağımsız bir pozitif sabit ve $A_n(x,\nu)$, (3.26) eşitliğindeki gibi tanımlanmak üzere $x \in I_n$ için,

$$\sum_{\left\{\nu:\left|\frac{\nu}{n}-x\right|\geq n^{1/8}\right\}}^{\infty} A_n(x,\nu) \leq C\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Aral 2005).

Kanıt

$\left(\frac{\nu}{n}-x\right)^4 n^{-1/2} \geq 1$ olduğundan Lemma 3.3.2 den,

$$\sum_{\left\{\nu:\left|\frac{\nu}{n}-x\right|\geq n^{1/8}\right\}}^{\infty} A_n(x,\nu) \leq \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{n}-x\right)^4 n^{-1/2}A_n(x,\nu)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\nu^4-4\nu^3nx+6\nu^2n^2x^2-4\nu n^3x^3+x^4n^4)}{n^4}\frac{1}{\sqrt{n}}A_n(x,\nu)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\nu^4-4\nu^3nx+6\nu^2n^2x^2-4\nu n^3x^3+x^4n^4)}{n^4}\frac{1}{\sqrt{n}}A_n(x,\nu)$$

$$= \frac{1}{n^4\sqrt{n}}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\nu^4 A_n(x,\nu) - 4nx\sum_{\nu=0}^{\infty}\nu^3 A_n(x,\nu) - 6n^2x^2\sum_{\nu=0}^{\infty}\nu^2 A_n(x,\nu)\right.$$

$$\left. -4n^3x^3\sum_{\nu=0}^{\infty}\nu A_n(x,\nu) + x^4n^4\sum_{\nu=0}^{\infty}A_n(x,\nu)\right)$$

$$= \frac{1}{n^4\sqrt{n}}\left(S_n(t^4,x) - 4nxS_n(t^3,x) + 6n^2x^2S_n(t^2,x)\right.$$

$$\left. -4n^3x^3S_n(t,x) + n^4x^4S_n(1,x)\right)$$

$$= \frac{1}{n^4\sqrt{n}}S_n(t^4 - 4t^3nx + 6t^2n^2x^2 - 4tn^3x^3 + n^4x^4, x)$$

$$= \frac{1}{n^4\sqrt{n}}S_n((t-nx)^4, x)$$

$$= \frac{1}{n^4\sqrt{n}}T_{4,n}(x)$$

$$\leq \frac{C}{n\sqrt{n}}$$

olur. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Lemma 3.3.4

$\nu = 0, 1, 2, \ldots$ ve $n + m \in \mathbb{N}, x \in A$ için $lim_{x\to A}\, x^{\nu}\, K_{n+m+1}(x, 0{,}1) = 0$ olsun.

$$\int_0^A x^{\nu} K_{n+(\nu+1)m+1}(x, 0{,}1)dx = \frac{\nu!}{(n+1)(n+m+1)\cdots(n+\nu m+1)}$$

dir (Aral 2005).

Kanıt

Tanım 3.3.1 deki 4°) özelliğinin $(\nu+1)$ kez uygulanmasıyla,

$$K_{n+(\nu+1)m+1}(x, 0{,}1) = -\frac{1}{(n+\nu m+1)}\frac{\partial}{\partial x}K_{n+\nu m+1}(x, 0{,}1)$$

$$= \frac{1}{(n+(\nu-1)m+1)(n+\nu m+1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_{n+(\nu-1)m+1}(x,0,1)$$

$$\vdots$$

$$= \frac{(-1)^{\nu+1}}{(n+1)(n+m+1)\cdots(n+\nu m+1)} \frac{\partial^{\nu+1}}{\partial x^{\nu+1}} K_{n+1}(x,0,1)$$

bu ise istenileni verir.■

Şimdi, $L_n(f,x)$ nin türevinin yaklaşım özellikleri tanıtılacaktır.

Teorem 3.3.1

f, I_n de sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer $f, x \in I_n$ noktasında $f'(x)$ türevi varsa,

$$\lim_{n\to\infty} (L_n f)'(x) = f'(x)$$

dir (Aral 2005).

Kanıt

Öncelikle $x \neq 0$ olsun. (3.27) eşitliği kullanılarak,

$$(L_n f)'(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \left\{ \frac{\nu}{n} \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}} - n \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}} \right\}$$

bulunur. Tanım 3.3.1 deki 5°) özelliğinden,

$$(L_n f)'(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{(\nu - nx)}{x(1+mx)} \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,0,1)\Big|$$

$$= \frac{1}{x(1+mx)} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right) (\nu - nx) A_n(x,\nu)$$

eşitliği geçerlidir. Lagrange teoreminden f' var ve $t \to x$ iken $\alpha(t) \to 0$ olduğundan,

$$f\left(\frac{\nu}{n}\right) = f(x) + \left(f'(x) + \alpha\left(\frac{\nu}{n}\right)\right)\left(\frac{\nu}{n} - x\right)$$

yazılabilir. Açıkça,

$$\tau_n = \frac{1}{nx(1+mx)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha\left(\frac{\nu}{n}\right)(\nu - nx)^2 A_n(x,\nu)$$

olduğundan,

$$(L_n f)'(x) = \frac{1}{x(1+mx)} f(x) T_{1,n}(x) + \frac{1}{nx(1+mx)} f'(x) T_{2,n}(x) + \tau_n$$

dir. Lemma 3.3.2 de kullanılan , $T_{1,n}(x) = 0$ ve $T_{2,n}(x) = nx(1+mx)$ eşitliklerinden,

$$(L_n f)'(x) = f'(x) + \tau_n \tag{3.31}$$

eşitliği geçerlidir.

dir. Şimdi, bir büyük n için τ_n nin bir üst sınırı belirlenmelidir.

$t \to x$ iken $\alpha(t) \to 0$ olduğundan, $\varepsilon > 0$ için bir n sayısı vardır öyle ki $|t - x| \le n^{1/8}$ dir. Böylece,

$$|\alpha_n(t)| < \frac{\varepsilon}{8}$$

dir. τ_n ve $T_{2,n}(x)$ eşitliklerinden,

$$\left| \frac{1}{x(1+mx)} \cdot \sum_{\left\{\nu : \left|\frac{\nu}{n} - x\right| < n^{1/8}\right\}}^{\infty} \alpha\left(\frac{\nu}{n}\right)(\nu - nx)^2 A_n(x,\nu) \right| \le \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{nx(1+mx)} \ T_{2,n}(x)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.32}$$

eşitsizliği geçerli olacaktır.

$\alpha\left(\frac{\nu}{n}\right)(\nu - nx)^2$ fonksiyonu sınırlı olduğundan bir M üst sınır vardır öyle ki Lemma 3.3.3 den,

$$\left| \frac{1}{x(1+mx)} \cdot \sum_{\left\{\nu : \left|\frac{\nu}{n} - x\right| \ge n^{1/8}\right\}}^{\infty} \alpha\left(\frac{\nu}{n}\right)(\nu - nx)^2 A_n(x,\nu) \right| \le nM \cdot \sum_{\left\{\nu : \left|\frac{\nu}{n} - x\right| \ge n^{1/8}\right\}}^{\infty} A_n(x,\nu)$$

$$\le \frac{Mc}{\sqrt{n}}$$

eşitsizlikleri doğrudur. Böylece, $\frac{Mc}{\sqrt{n}} < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde yeterince büyük bir n vardır. Bu eşitsizlikten ve (3.32) eşitsizliklerinden

$$|\tau_n| < \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla, (3.31) eşitliğinden,

$$\lim_{n\to\infty}(L_n f)'(x) = f'(x)$$

eşitliği bulunur. $x = 0$ için eşitsizlik,

$$(L_n f)'(x) = \frac{1}{x(1+mx)} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right)(\nu - nx)\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}}$$

$$= \frac{1}{x(1+mx)}\Bigg\{-f(0)nxK_n(x,0,1) - f\left(\frac{1}{n}\right)(1-nx)\frac{\partial}{\partial u}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}}$$

$$+\sum_{\nu=2}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right)(\nu - nx)\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}}\Bigg\}$$

şeklinde yazılabilir. (3.28) eşitliği ve Tanım 3.3.1 deki 3°) özelliği kullanılarak yukarıdaki eşitlik yeniden yazılabilir.

$$(L_n f)'(x) = \frac{1}{x(1+mx)}\Bigg\{-f(0)nxK_n(x,0,1) - n.f\left(\frac{1}{n}\right)(1-nx)\frac{\partial}{\partial u}K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}}$$

$$+\sum_{\nu=2}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right)n(n+m)\cdots\frac{x^{\nu-1}}{\nu!}K_{n+\nu m}(x,t,u)|_{\substack{u=1\\t=0}}\Bigg\}$$

eşitliğinde $x = 0$ alınarak,

$$(L_n f)'(0) = n\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right)$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}(L_n f)'(0) = f(0)$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.3.1 in ispatı tamamlanır.

Uyarı 3.3.1

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ fonksiyonu için,

$$L_n(F,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\int_0^{\frac{\nu}{n}} f(t)dt\right\}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\bigg|_{\substack{u=1\\t=0}}$$

yazılabilir. Tanım 3.3.1 deki 3°) özelliğinin ν −kez uygulanmasıyla,

$$L_n(F,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\int_0^{\frac{\nu}{n}} f(t)dt\right\}\frac{x^\nu n\cdots(n+(\nu-1)m)}{\nu!}K_{n+\nu m}(x,0,1)$$

bulunur. Bu eşitlikte n yerine $n+1$ yazılırsa,

$$L_{n+1}(F,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\int_0^{\frac{\nu}{n+1}} f(t)dt\right\}\frac{x^\nu (n+1)\cdots(n+(\nu-1)m+1)}{\nu!}K_{n+\nu m+1}(x,0,1)$$

elde edilir. Tanım 3.3.1 deki 4°) özelliğinden,

$$\frac{d}{dx}L_{n+1}(F,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\int_0^{\frac{\nu+1}{n+1}} f(t)dt\right\}K_{n+(\nu+1)m+1}(x,0,1)\frac{x^\nu (n+1)\cdots(n+\nu m+1)}{\nu!}$$

$$-\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\int_0^{\frac{\nu}{n+1}} f(t)dt\right\}x^\nu\frac{\partial}{\partial x}K_{n+\nu m+1}(x,0,1)\frac{(n+1)\cdots(n+(\nu-1)m+1)}{\nu!}$$

olur.

$\frac{d}{dx}L_{n+1}(F,x)$, Gadjiev-İbragimov operatörünün Kantorovich formu olan doğrusal pozitif operatör $A_n(f,x)$ ile gösterilir.

$$A_n(f,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\int_{\frac{\nu}{n+1}}^{\frac{\nu+1}{n+1}} f(t)dt\right\}x^\nu\frac{\partial}{\partial x}K_{n+(\nu+1)m+1}(x,0,1)\frac{(n+1)\cdots(n+(\nu-1)m+1)}{\nu!}$$

denk olarak

$$A_n(f,x) = (n+1)\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\int_{\frac{\nu}{n+1}}^{\frac{\nu+1}{n+1}} f(t)dt\right\}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}\frac{\partial^{\nu}}{\partial x^{\nu}}K_{n+m+1}(x,0,1) \tag{3.33}$$

eşitliği ile ifade edilir (Aral 2005).

Agratini (2001), Aral and Doğru (2004), Campiti and Metafune (1996), Powierska (2002) de farklı operatörler için geliştirilen benzer genellemeler olduğuna dikkat edilmelidir (Aral 2005).

Tanım 3.3.2

I_n de integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı $L[I_n]$ olsun. I_n uzayındaki norm

$\|f\|_L = \int_0^A |f(x)|\, dx\ , (A > 0)$

olarak tanımlanır (Aral 2005).

Teorem 3.3.1 in bir sonucu olarak aşağıdaki teorem kanıtına değinilmeden verilecektir.

Teorem 3.3.2

$f(x)$, belirsiz integralin türevi olmak üzere, herhangi bir $x \in I_n$ ve (3.33) eşitliğiyle verilen A_n operatör dizisi için,

$\lim_{n\to\infty} A_n(f,x) = f(x)$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 3.3.3

Her $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ ve $n + m \in \mathbb{N}$ için ,

$lim_{x\to A}\, x^{\nu} K_{n+m+1}(x,0,1) = 0$ ve $f \in L[I_n]$ oluyorsa bu durumda

$\lim_{n\to\infty} \|A_n f - f\|_L = 0$

eşitliği geçerlidir (Aral 2005).

Kanıt

İlk önce, $A_n,\ n \in \mathbb{N}$ nin $L[I_n]$ den $L[I_n]$ uzayına bir operatör olduğunu gösterilmelidir. Tanım 3.3.1 deki 3°) özelliği ν −kez uygulanılarak Lemma 3.3.4 den,

$$\int_0^A A_n(f,x)dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \int_{\frac{\nu}{n+1}}^{\frac{\nu+1}{n+1}} f(t)dt \right\} \int_0^A \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} K_{n+m+1}(x,0,1)dx$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \int_{\frac{\nu}{n+1}}^{\frac{\nu+1}{n+1}} f(t)dt \right\} = \|f\|_L$$

elde edilir.

$u_n = \frac{r}{n+1}$ ve χ_u, $[0,u_n]$ aralığında karakteristik fonksiyon olmak üzere,

$f_{\nu,n}(x) = [u_n]^{-1}\chi_u$ seçilsin.

Bu teoremi, $L[0,\infty[$ uzayındaki bütün basamak fonksiyonlarının kümesinde kanıtlamak yerine sadece χ_u karakteristik fonksiyon için kanıtlamak yeterlidir. Açıktır ki,

$$\int_0^R A_n(\chi_{u_n},x)dx = \sum_{\nu=0}^{r-1} \int_{\frac{\nu}{n+1}}^{\frac{\nu+1}{n+1}} dx = \frac{r}{n+1} \tag{3.34}$$

eşitliği sağlanır. Yeterince büyük n için, $\overline{\chi_{u_n}} = 1 - \chi_{u_n}(x)$ olmak üzere,

$$\left\|\chi_{u_n} - A_n(\chi_{u_n})\right\|_L = \int_0^R \left[\chi_{u_n}(x) - A_n(\chi_{u_n},x)\right]dx$$

$$= \int_0^{u_n} \left[1 - A_n(\chi_{u_n},x)\right]dx + \int_{u_n}^R A_n(\chi_{u_n},x)dx$$

$$= \int_0^{u_n} \left[A_n(1,x) - A_n\left(\chi_{u_n},x\right)\right]dx + \int_0^R A_n\left(\chi_{u_n},x\right)dx - \int_0^{u_n} A_n\left(\chi_{u_n},x\right)dx$$

$$= \int_0^{u_n}\left[2A_n\left(\overline{\chi_{u_n}},x\right) - A_n(1,x)\right]dx + \int_0^R A_n\left(\chi_{u_n},x\right)dx$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$A_n\left(\overline{\chi_{u_n}},x\right) = \frac{d}{dx}\left(L_{n+1}\left(\int_0^x \overline{\chi_{u_n}}(t)dt\right),x\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\int_0^{\frac{\nu}{n+1}} \overline{\chi_{u_n}}dt\right\}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{n+1} - \frac{r}{n+1}\right)\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}}\right)$$

dır. Böylece,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & ,x < u_n \\ x - u_n, & x > u_n \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{u_n} A_n\left(\overline{\chi_{u_n}},x\right)dx = 0$$

eşitliğinden $n \to \infty$ için

$$\left(L_n(\varphi,u_n) - \varphi(x)\right) \to 0$$

olduğundan,

$$\int_0^{u_n} A_n\left(\overline{\chi_{u_n}},x\right)dx = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{n+1} - \frac{r}{n+1}\right)\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=1\\t=0}}$$

$$= L_n(\varphi,u_n)$$

eşitliği sağlanır. Bu ise

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n f - f\|_L = 0$$

olması anlamına gelir. Bu ise kanıtı tamamlar.

3.4 GENELLEŞTİRİLMİŞ GADJİEV-İBRAGİMOV OPERATÖRLERİNİN KANTOROVİCH FORMU İLE YAKLAŞIM

Bu kesimde Gadjiev and Ispir (1999) tarafından tanımlanan genelleştirilmiş Gadjiev-İbragimov operatörünün Ispir et al. (2008) tarafından hazırlanan çalışmadan yararlanılarak Kantorovich formlu bir genelleştirmesinin yaklaşım özellikleri ve ağırlıklı uzaylarda süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı hesabı yapılacaktır. İkinci türden Stirling sayıları yardımıyla bazı eşitsizlikler elde edilecektir. Bu çalışmada yazarların kullandığı notasyona bağlı kalınacaktır. $L_{p,w}(\mathbb{R})$ ağırlıklı uzayında Korovkin tipli yaklaşım teoremleri kullanılarak $G_n^* f$ operatörleri için direk yaklaşım sonuçları verilecektir. Daha sonra $G_n^* f$ operatörlerinin yaklaşım hızının hesabı için $]0,\infty[$ un her bir sonlu alt aralığında bir sınırlı varyasyon fonksiyonuna denk bir türeve sahip polinomsal büyüyen mutlak sürekli fonksiyonlara yaklaşım yapılacaktır. Sınırsız fonksiyonlar için ağırlıklı yaklaşım özellikleri birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Toplam tipli doğrusal pozitif operatörler için ağırlıklı Korovkin tipi teoremler Gadjiev tarafından da kanıtlanmıştır. Ayrıca reel eksen üzerinde lokal integrallenebilir fonksiyonların uzayında da ağırlıklı Korovkin tipli yaklaşım teoremleri verilmiştir. Daha sonra Gadjiev ve Aral tarafından $L_{p,w}(\mathbb{R})$ ağırlıklı uzayında bir doğrusal pozitif operatörler dizisi için Korovkin tipli yaklaşım sonuçları verilmiştir.

Bazı araştırmacılar için sınırlı varyasyonun türevleri ile fonksiyonlara yaklaşımın hızı daha çekici bir problem olarak görülmektedir. Bu konuda iyi bilinen çalışmalardan biride Bojanic ve Cheng tarafından yapılan çalışmadır. Bu çalışmada farklı metotlar kullanarak Berstein ve Hermite-Fejer polinomları için sınırlı varyasyonun türevleri ile yaklaşım hızını hesap etmişlerdir. Bu konudaki benzer çalışmalardan bazıları Bojanic and Khan (1991) ve Pych - Taberska (1997) dir. Gupta ve diğerleri de toplam-integral tipli operatörler için genelleştirmeler yapmışlardır. Farklı operatörlerle yapılan çalışmalar için Gadjiev and Aral (2007), Gupta et al. (2003), Gupta et al. (2005) e ait çalışmalara bakılabilir (Ispir et al. 2008).

Tanım 3.4.1

$(\varphi_n(t))$ ve $(\psi_n(t))$ fonksiyon dizileri $C(\mathbb{R}_+)$ uzayında tanımlı olsun. Bu diziler için $\varphi_n(0)=0,\ t\in\mathbb{R}_+$ için $\psi_n(t)>0$ ve

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}=0 \tag{3.35}$$

olsun. Ayrıca (α_n) pozitif sayılar dizisi için

$$\frac{\alpha_n}{n}=1+O\left(\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right) \tag{3.36}$$

ve u ya göre tam analitik olan $\left(K_n(x,t,u)\right)$, üç değişkenli fonksiyon dizisi için,

$x,\ t\in\mathbb{R}_+$ ve $u\in\mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki üç koşul sağlasın.

1°) Her $x\in\mathbb{R}_+,\ n\in\mathbb{N}$ ve $\nu\in\mathbb{N}\cup\{0\}=\mathbb{N}_0$ için $K_n(x,0{,}0)=1$ dir.

2°) $\nu\in\mathbb{N}\cup\{0\}=\mathbb{N}_0$ için $\left\{(-1)^\nu\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\geq 0$ dır.

3°) $m+n\in\mathbb{N}_0$ olacak şekilde bir m sayısı için, $\nu=1,2,\cdots$ olmak üzere,

$$\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}=-nx\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right]$$

eşitliği sağlanır.

Bu durumda G_n operatörü; her $x\in\mathbb{R}_+$ ve $\mathbb{R}_+$üzerinde tanımlı her f fonksiyonu için,

$$G_n(f,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!} \tag{3.37}$$

biçiminde tanımlıdır (Ispir et al. 2008).

(3.37) eşitliği ile verilen G_n operatörler dizisinin bir modifikasyonu şekilde tanımlanacaktır.

Tanım 3.4.2

Her $n \in \mathbb{N}$ ve $\nu \in \mathbb{N}_0$ için,

$I_{n,\nu} := \left[\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}, \frac{\nu+1}{n^2\psi_n(0)}\right]$ ve $P_\nu(\alpha_n, \psi_n; K_n) = \left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\} \frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!}$

olmak üzere $\mathbb{R}_+$ nın her kompakt alt aralığı üzerinde sınırlı ve $\mathbb{R}_+$ üzerinde ölçülebilir fonksiyonların sınıfından olan her f için (bu sınıf kısalık olması bakımından $\mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R}_+)$ ile gösterilecektir.)

G_n^* doğrusal pozitif operatörü,

$$G_n^*(f,x) = n^2\psi_n(0) \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n, \psi_n; K_n) \int_{I_{n,\nu}} f(t)\, dt \tag{3.38}$$

biçiminde tanımlanır (Ispir et al. 2008).

Uyarı 3.4.1

Açıkça bu operatör doğrusal ve pozitiftir. Gerçekten,

$$G_n^*(f,x) = n^2\psi_n(0) \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n, \psi_n; K_n) \int_{I_{n,\nu}} f(t)\, dt$$

$$= n^2\psi_n(0) \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right) \frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!} \int_{I_{n,\nu}} f(t)\, dt$$

$$= n^2\psi_n(0) \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \left(\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right) \frac{\left(\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!} \int_{I_{n,\nu}} f(t)\, dt$$

şeklinde yazılabildiğinden Tanım 3.4.1 in 2°) özelliğinden, $\frac{\left(\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!} \geq 0$ ve $\int_{I_{n,\nu}} f(t)\, dt \geq 0$

olduğundan $G_n^*(f,x)$ operatörü pozitiftir.

Diğer yandan keyfi a ve b gerçel sayıları için,

$$G_n^*(af+bg,x)=n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\int_{I_{n,\nu}}(af+bg)(t)\,dt$$

$$=n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\left[a\int_{I_{n,\nu}}f(t)\,dt+b\int_{I_{n,\nu}}g(t)\,dt\right]$$

$$=an^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\int_{I_{n,\nu}}f(t)\,dt+$$

$$+bn^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\int_{I_{n,\nu}}g(t)\,dt$$

$$=aG_n^*(f,x)+bG_n^*(g,x)$$

eşitliği elde edilir ki bu da G_n^* operatörünün doğrusal olduğunu gösterir. Dolayısıyla (3.38) eşitliği ile tanımlı G_n^* operatörü doğrusal pozitif operatördür.

Lemma 3.4.1

(3.38) eşitliği ile tanımlı G_n^* operatörü aşağıdaki seçimler yapılarak bilinen bazı integral tipi operatörlere indirgenebilir.

1°) $n\in\mathbb{N}$ ve $K_n(x,t,u)=\left[1-\frac{ux}{1+t}\right]^n$ alınırsa G_n^* operatörü,

$$(G_n^*f,x)=n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\left(1-x\alpha_n\psi_n(0)\right)^{n-\nu}\left(x\alpha_n\psi_n(0)\right)^{n}\times\int_{\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}}^{\frac{(\nu+1)}{n^2\psi_n(0)}}f(t)\,dt \qquad (3.39)$$

şekline dönüşecektir.

i) $\alpha_n=n$ ve $\psi_n(0)=\frac{1}{n}$ alınırsa (3.39) operatörü,

$$\left(G_n^*f^{(1)},x\right)=n\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}\int_{\frac{\nu}{n}}^{\frac{(\nu+1)}{n}}f(t)\,dt$$

Berstein-Kantrovich operatörüne dönüşür.

ii) $\alpha_n = n$ ve $\psi_n(0) = \frac{1}{nb_n}$ alınırsa $lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, $lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$ olmak üzere operatör,

$$\left(G_n^* f^{(2)}, x\right) = n \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{\nu} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-\nu} \int_{\frac{b_n \nu}{n}}^{\frac{b_n(\nu+1)}{n}} f(t)\, dt$$

Kantrovich tipli Berstein- Cholowsky operatörüne dönüşür.

2°) $K_n(x,t,u) = e^{-n(t+ux)}$ ve $\alpha_n = n, \psi_n(0) = \frac{1}{n}$ operatör aşağıdaki biçimde tanımlı Szasz-Kantorovich operatörüne dönüşür.

$$\left(G_n^* f^{(3)}, x\right) = n \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-nx} \frac{(nx)^{\nu}}{\nu!} \int_{\frac{\nu}{n}}^{\frac{(\nu+1)}{n}} f(t)\, dt; x \in \mathbb{R}_+ .$$

Ayrıca $\left(G_n^* f^{(2)}, x\right)$ ve $\left(G_n^* f^{(3)}, x\right)$ operatörleri için

$$\int_0^{\infty} P_\nu(\alpha_n, \psi_n; K_n) dx \leq \frac{1}{n^2 \psi_n(0)} \tag{3.40}$$

koşulu sağlanır. Gerçekten $\left(G_n^* f^{(2)}, x\right)$ Kantorovich tipli Berstein-Chlodowsky operatörü için,

$$\int_0^{b_n} P_\nu(\alpha_n, \psi_n; K_n) dx = \binom{n}{\nu} \int_0^{b_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{\nu} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-\nu} dx$$

$$= b_n \binom{n}{\nu} \int_0^{b_n} (1-x)^{n-\nu} (x)^{\nu} dx$$

$$= b_n \binom{n}{\nu} \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(n-\nu+1)}{\Gamma(n+2)}$$

$$= \frac{b_n}{n+1}$$

$$\leq \frac{b_n}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2 \psi_n(0)}$$

eşitsizlikleri bulunur.

$\left(G_n^* f^{(3)}, x\right)$ operatörünün de (3.39) koşulunu sağladığı benzer şekilde gösterilebilir.

Uyarı 3.4.2

Bu çalışma boyunca $[0, \infty[$ aralığında $\chi_{n,v}$; $I_{n,v}$ aralığının karakteristik fonksiyonu ve

$$W_n(x,t) = n^2 \psi_n(0) \sum_{v=0}^{\infty} P_v(\alpha_n, \psi_n; K_n)\, \chi_{n,v}(t) \tag{3.41}$$

olmak üzere G_n^* operatörü singüler integral formunda

$$G_n^*(f,x) = \int_0^{\infty} f(t) W_n(x,t)\, dt \tag{3.42}$$

şeklinde kullanılacaktır (Ispir et al. 2008).

Lemma 3.4.2

$t \in \mathbb{R}_+$, $j \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $e_j(t) = t^j$ şeklinde tanımlansın.

(3.37) eşitliği ile verilen $G_n$operatörleri için,

i) $G_n(e_0, x) = e_0$

ii) $G_n(e_1, x) = \frac{\alpha_n}{n} e_1$

iii) $G_n(e_2, x) = \left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2 \frac{n+m}{n} e_2 + \frac{\alpha_n}{n} \frac{1}{n^2 \psi_n(0)} e_1$

eşitlikleri geçerlidir (Ispir et al. 2008).

Kanıt

$\boldsymbol{i})\ e_0(t) = t^0 = 1$

olduğundan,

$$G_n(e_0, x) = G_n(1, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x, t, u) \Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t) \\ t=0}} \right\} \frac{\left(-\alpha_n \psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!}$$

$$= K_n(x, 0,0)$$

$$= 1$$

dir.

$\boldsymbol{ii})\ e_1(t) = t^1 = t$

olduğundan,

$$G_n(\, e_1, x) = G_n(t, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu}{n^2 \psi_n(0)} \left\{ \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x, t, u) \Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t) \\ t=0}} \right\} \frac{\left(-\alpha_n \psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{n^2 \psi_n(0)} \left\{ (-nx) \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{n+m}(x, t, u) \Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t) \\ t=0}} \right\} \frac{\left(-\alpha_n \psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!}$$

$$= \frac{\alpha_n}{n} x \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{n+m}(x, t, u) \Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t) \\ t=0}} \right\} \frac{\left(-\alpha_n \psi_n(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

$$= \frac{\alpha_n}{n} x \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_{n+m}(x, t, u) \Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t) \\ t=0}} \right\} \frac{\left(-\alpha_n \psi_n(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

$$= \frac{\alpha_n}{n} x K_{n+m}(x, 0,0)$$

$$= \frac{\alpha_n}{n} x$$

$$= \frac{\alpha_n}{n} e_1$$

bulunur.

ii) $e_2(t)=t^2$ dir. Buradan,

$$G_n(\,e_2,x)=G_n(t^2,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)^2\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)^2\left\{(-nx)\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!}$$

$$=\frac{\alpha_n}{n^3}x\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu}{\psi_n(0)}\left\{\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

$$=\frac{\alpha_n}{n^3}x\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu-1}{\psi_n(0)}\left\{\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

$$+\frac{\alpha_n}{n^3}x\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\psi_n(0)}\left\{\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

$$=\frac{(\alpha_n)^2}{n^3}x\sum_{\nu=2}^{\infty}(n+m)x\left\{\frac{\partial^{\nu-2}}{\partial u^{\nu-2}}K_{n+2m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu-2}}{(\nu-2)!}$$

$$+\frac{\alpha_n}{n^3\psi_n(0)}x\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu}}{\nu!}$$

$$=\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2\frac{n+m}{n}x^2\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_{n+2m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu}}{\nu!}$$

$$+\frac{\alpha_n}{n}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}xK_{n+m}(x,0,0)$$

$$=\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2\frac{n+m}{n}x^2K_{n+2m}(x,0,0)+\frac{\alpha_n}{n}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}xK_{n+m}(x,0,0)$$

$$=\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2\frac{n+m}{n}x^2+\frac{1}{n^2\psi_n(0)}x$$

$$=\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2\frac{n+m}{n}e_2+\frac{1}{n^2\psi_n(0)}e_1$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 3.4.3

$r \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere, $G_n^* f$ operatörünün r. merkezi momenti

$\mu_{n,r} := G_n^*((e_1 - xe_0)^r, x)$

şeklinde tanımlanır (Ispir et al. 2008).

Lemma 3.4.2 e benzer düşünceyle aşağıdaki Lemma 3.4.3 şu şekilde verilebilir.

Lemma 3.4.3

Her $n \in \mathbb{N}$ için (3.38) eşitliği ile tanımlı G_n^* operatörleri aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$\boldsymbol{i}$) $G_n^*(e_0, x) = e_0$

$\boldsymbol{ii}$) $G_n^*(e_1, x) = \dfrac{\alpha_n}{n} e_1 + \dfrac{1}{2n^2 \psi_n(0)}$

$\boldsymbol{iii}$) $G_n^*(e_2, x) = \left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right)^2 \dfrac{n+m}{n} e_2 + 2 \dfrac{\alpha_n}{n} \dfrac{1}{n^2 \psi_n(0)} e_1 + \dfrac{1}{3\left(n^2 \psi_n(0)\right)^2}$

$\boldsymbol{iv}$) $\mu_{n,1} = \left(\dfrac{\alpha_n}{n} - 1\right) e_1 + \dfrac{1}{2n^2 \psi_n(0)}$

$\boldsymbol{v}$)$\mu_{n,2} = \left(\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right)^2 \dfrac{n+m}{n} - 2 \dfrac{\alpha_n}{n} + 1\right) e_2 + \left(2 \dfrac{\alpha_n}{n} \dfrac{1}{n^2 \psi_n(0)} - \dfrac{1}{n^2 \psi_n(0)}\right) e_1 + \dfrac{1}{3\left(n^2 \psi_n(0)\right)^2}$

(Ispir et al. 2008).

Kanıt

$$\boldsymbol{i})G_n^*(e_0,x) = n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n) \int_{I_{n,\nu}} e_0\, dt$$

$$= n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n) t\Big|_{\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}}^{\frac{\nu+1}{n^2\psi_n(0)}}$$

$$= n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\left[\frac{\nu+1}{n^2\psi_n(0)} - \frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right]$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)$$

$$= 1 = e_0$$

eşitliği geçerlidir.

$\boldsymbol{ii}$) Benzer şekilde,

$$G_n^*(e_1,x) = n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n) \int_{I_{n,\nu}} e_1\, dt$$

$$= n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n) \int_{I_{n,\nu}} t.\, dt$$

$$= n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\frac{t^2}{2}\Big|_{\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}}^{\frac{\nu+1}{n^2\psi_n(0)}}$$

$$= n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\left[\left(\frac{\nu+1}{n^2\psi_n(0)}\right)^2 - \left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)^2\right]$$

$$= n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\frac{1}{2}\left(\frac{2\nu+1}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}\right)$$

$$= n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\frac{\nu}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}$$

$$+n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\frac{1}{2\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}$$

$$= n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!}\frac{\nu}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}$$

$$+n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!}\frac{1}{2\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}$$

$$= \frac{-\alpha_n n^2\psi_n(0)}{n^4\psi_n(0)}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-nx)\left\{\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

$$+\frac{n^2\psi_n(0)}{2\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right)\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!}$$

$$= \frac{\alpha_n}{n^2}nx + \frac{1}{2n^2\psi_n(0)}$$

$$= \frac{\alpha_n}{n}e_1 + \frac{1}{2n^2\psi_n(0)}$$

eşitliği sağlanır.

iii) $G_n^*(e_2,x) = n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\int_{I_{n,\nu}} e_2\,dt$

$$= n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\int_{I_{n,\nu}} t^2\,dt$$

$$= n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\frac{t^3}{3}\Bigg|_{\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}}^{\frac{\nu+1}{n^2\psi_n(0)}}$$

$$= n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\frac{1}{3}\left[\left(\frac{\nu+1}{n^2\psi_n(0)}\right)^3-\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)^3\right]$$

$$= n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\frac{1}{3}\left[\frac{\nu^3+3\nu^2+3\nu+1-\nu^3}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^3}\right]$$

$$= n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\frac{1}{3}\left(\frac{3\nu^2+3\nu+1}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^3}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\nu^2+\frac{1}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\,\nu$$

$$+\frac{1}{3}\frac{1}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)$$

$$= \frac{1}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!}\nu^2$$

$$+\frac{1}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!}\nu\;+\frac{1}{3}\frac{1}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}$$

$$= \frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-nx)\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\nu$$

$$+\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-nx)\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\;+\frac{1}{3}\frac{1}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}$$

$$= \frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)(-nx)}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}(\nu-1+1)$$

$$+\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)(-nx)}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\;+\frac{1}{3}\frac{1}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}$$

$$= \frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)(-nx)}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}(\nu-1)$$

$$+2\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)(-nx)}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_{n+m}(x,t,u)\bigg|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}+\frac{1}{3}\frac{1}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}$$

$$=\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^2(-nx)(-(n+m)x)}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}\sum_{\nu=2}^{\infty}\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_{n+2m}(x,t,u)\bigg|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu-2}}{(\nu-2)!}$$

$$+2\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)(-nx)}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_{n+m}(x,t,u)\bigg|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}+\frac{1}{3}\frac{1}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}$$

$$=\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2\frac{n+m}{n}x^2\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_{n+2m}(x,t,u)\bigg|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu}}{\nu!}$$

$$+2\frac{\alpha_n}{n}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}x\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_{n+m}(x,t,u)\bigg|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu}}{\nu!}+\frac{1}{3}\frac{1}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}$$

$$=\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2\frac{n+m}{n}e_2+2\frac{\alpha_n}{n}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}e_1+\frac{1}{3\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}$$

olup istenen gösterilmiş olur.

iv) $\mu_{n,1}:=G_n^*((t-xt^0)^r,x)=G_n^*(t-x,x)$

$$=n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\int_{I_{n,\nu}}(t-x)dt$$

$$=n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\int_{I_{n,\nu}}t.dt-n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\int_{I_{n,\nu}}x.dt$$

$$=n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\left[\frac{t^2}{2}\bigg|_{\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}}^{\frac{\nu+1}{n^2\psi_n(0)}}\right]$$

$$-n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\left[xt\bigg|_{\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}}^{\frac{\nu+1}{n^2\psi_n(0)}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\left[\left(\frac{\nu+1}{n^2\psi_n(0)}\right)^2-\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)^2\right]$$

$$-n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\left[\frac{\nu+1}{n^2\psi_n(0)}-\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right]$$

$i)$ ve $ii)$ nin kanıtından,

$$=\left(\frac{\alpha_n}{n}-1\right)e_1+\frac{1}{2n^2\psi_n(0)}$$

olur.

$\boldsymbol{v})$ Benzer şekilde,

$$\mu_{n,2}=G_n^*((t-xt^0)^2,x)$$

$$=G_n^*((t-x)^2,x)$$

$$=G_n^*(t^2-2tx+x^2,x)$$

$$=G_n^*(t^2,x)-2xG_n^*(t,x)+x^2G_n^*(1,x)$$

$$=\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2\frac{n+m}{n}e_2+\frac{\alpha_n}{n}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}e_1+\frac{1}{3\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}-2x\frac{\alpha_n}{n}e_1+\frac{1}{2n^2\psi_n(0)}+x^2 1$$

$$=\left(\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2\frac{n+m}{n}-2\frac{\alpha_n}{n}+1\right)e_2+\left(2\frac{\alpha_n}{n}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}-\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)e_1+\frac{1}{3\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}$$

olduğu gösterilebilir.■

Aşağıdaki uyarı kanıtına değinilmeden verilecektir.

Uyarı 3.4.3

$\boldsymbol{i})$ Lemma 3.4.2 ve (3.36) eşitliğinden yeterince büyük n ler için,

$$\mu_{n,1}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)(1+x),\qquad x\in\mathbb{R}_+$$

$$\mu_{n,2}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)(x^2+x+1),\qquad x\in\mathbb{R}_+\tag{3.43}$$

eşitlikleri elde edilir.

$\boldsymbol{ii}$) 3.43 eşitliklerinden açıkça $\lambda > 0, \eta > 0$ ve yeterince büyük n ler için,

$$\mu_{n,1} \leq \frac{\eta}{n^2\psi_n(0)}(x+1), \qquad x \in \mathbb{R}_+ \tag{3.44}$$

$$\mu_{n,2} \leq \lambda\frac{(x+1)^2}{n^2\psi_n(0)}, \qquad x \in \mathbb{R}_+ \tag{3.45}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

$\boldsymbol{iii}$) Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve (3.45) eşitsizliği kullanılarak,

$$G_n^*(|e_1 - xe_0|, x) \leq (G_n^*(e_1 - xe_0)^2, x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mu_{n,2}} \leq \sqrt{\lambda\frac{(x+1)^2}{n^2\psi_n(0)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda}{n^2\psi_n(0)}}(x+1) \tag{3.46}$$

eşitsizliği geçerlidir (Ispir et al. 2008).

Lemma 3.4.4

$x \in]0, \infty[$ ve yeterince büyük n ler için,

$\boldsymbol{i}$) $\beta_n(x,y) = \int_0^y W_n(x,t)dt \leq \frac{\lambda}{n^2\psi_n(0)}\left(\frac{1+x}{x-y}\right)^2$ $, 0 \leq y < x.$

$\boldsymbol{ii}$) $1 - \beta_n(x,z) = \int_z^\infty W_n(x,t)dt \leq \frac{\lambda}{n^2\psi_n(0)}\left(\frac{1+x}{z-x}\right)^2$ $, x < z < \infty.$

eşitsizlikleri geçerlidir (Ispir et al. 2008).

Kanıt

$\boldsymbol{i}$) Lemma 3.4.3, (3.45) eşitsizliğinden, (3.41) eşitliği ve $\left(\frac{x-t}{x-y}\right)^2 \geq 1$ olduğundan,

$$\beta_n(x,y) = \int_0^y W_n(x,t)dt \leq \int_0^y \left(\frac{x-t}{x-y}\right)^2 W_n(x,t)dt,$$

$$= \mu_{n,2}(x)(x-y)^{-2}$$

$$\leq \frac{\lambda}{n^2\psi_n(0)}\left(\frac{1+x}{x-y}\right)^2$$

dir.

$$\boldsymbol{ii)}\ 1-\beta_n(x,z)=\int_z^\infty W_n(x,t)dt \leq \int_z^\infty \left(\frac{1+x}{z-x}\right)^2 W_n(x,t)dt$$

$$\leq \frac{\lambda}{n^2\psi_n(0)}\left(\frac{1+x}{z-x}\right)^2$$

olup kanıt tamamlanır.■

Aşağıdaki teorem yardımıyla $f \in L_{p,m}(\mathbb{R}_+)$ fonksiyonlarına ağırlıklı Korovkin tipli yaklaşım teoremleri verilecektir. Bu yaklaşım için yukarıda verilen G_n^* doğrusal pozitif operatörler dizisi kullanılacaktır. Sabit bir $p \in [1,\infty[$ için ω gerçel eksel üzerinde

$$\int_{\mathbb{R}} t^{2p}\omega(t)\,dt < \infty \tag{3.47}$$

koşulunu sağlayan pozitif sürekli bir fonksiyon olsun.$1 \leq p < \infty$ için $L_{p,\omega}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak değerinin $p.$ kuvveti integrallenebilir fonksiyon uzayını göstersin. Burada ω sembolü ağırlık fonksiyonudur. Kısaca bu uzay,

$$L_{p,\omega}(\mathbb{R})=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \|f\|_{p,\omega} := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p\omega(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}$$

biçiminde gösterilir.

Bu kesim için yararlanılacak aşağıdaki teorem kanıtına değinilmeden verilecektir.

Teorem 3.4.1

$L_n: L_{p,\omega}(\mathbb{R}) \to L_{p,\omega}(\mathbb{R})$ ye tanımlı düzgün sınırlı doğrusal pozitif operatörler dizisi olsun. $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operatörler dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(t^i,x\right)-x^i\right\|_{p,\omega}=0,\qquad i=0,1,2. \tag{3.48}$$

şeklindeki üç koşul sağlanırsa bu durumda her $f\in L_{p,\omega}(\mathbb{R})$ fonksiyonu için,

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n f-f\|_{p,\omega}=0$$

eşitliği geçerlidir (Ispir et al. 2008).

Tanım 3.4.4

$p\geq 1, m\geq 3, m\in\mathbb{N}$ olmak üzere (3.47) eşitsizliğini sağlayan $\omega(x)=\left(\frac{1}{1+x^{2m}}\right)^p$ olarak seçilerek oluşturulan uzay $L_{p,m}(\mathbb{R})$ ile gösterilecektir. $1\leq p<\infty$ ve $m\geq 3$ için bu uzay kısaca,

$$L_{p,m}(\mathbb{R})=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},(1+x^{2m})^{-1}f(x)\in L_p(\mathbb{R})\right\}$$

biçiminde gösterilebilir (Ispir et al. 2008).

Tanım 3.4.5

m ve j pozitif tamsayılar olmak üzere m elemanlı bir kümenin j elemanlı alt kümelerine parçalanışlarının sayısı ikinci tip Stirling sayısı olarak adlandırılır ve $S(m,j)$ ile gösterilir.

$m>0$ ve $S(m,j)$ ikinci türden Stirling sayılar olmak üzere $(x)_0=1$ ve $(x)_j=x(x-1)\cdots(x-j+1)$ şeklinde tanımlı $x^m=\sum_{j=0}^{m}S(m,j)\,(x)_j$ yardımıyla aşağıdaki Lemma kanıtlanacaktır.

Lemma 3.4.5

$f\in L_{p,m}(\mathbb{R}_+)$ ve $\int_0^\infty P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)dx\leq\frac{1}{n^2\psi_n(0)}$ olsun. Bu durumda $1\leq p\leq\infty$ için,

$$\|(G_n^*f)\|_{p,m}\leq\|f\|_{p,m}$$

eşitsizliği vardır (Ispir et al. 2008).

Kanıt

$f \in L_{p,m}(\mathbb{R}_+)$ ve $(G_n^* f)$ in tanımından $\left(1+\left(\frac{\nu+1}{n^2\psi_n(0)}\right)^{2m}\right) \geq 1$ olduğundan,

$$|(G_n^* f, x)| \leq n^2\psi(0)\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\left(1+\left(\frac{\nu+1}{n^2\psi_n(0)}\right)^{2m}\right)$$

$$\times \int\limits_{I_{n,\nu}} |f(t)|(1+t^{2m})^{-1}\,dt$$

$$\leq 2^{2m}n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\left(1+\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)^{2m}\right)$$

$$\times \int\limits_{I_{n,\nu}} |f(t)|(1+t^{2m})^{-1}\,dt$$

eşitsizliği geçerlidir. Stirling sayılarını ve

$$P_\nu^*(\alpha_n,\psi_n;K_n) = \left(\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\bigg|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right)\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu$$

eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılabilir.

$$|(G_n^* f, x)| \leq 2^{2m}n^2\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu^*(\alpha_n,\psi_n;K_n)\frac{1}{\nu!}\int\limits_{I_{n,\nu}} |f(t)|(1+t^{2m})^{-1}\,dt$$

$$+2^{2m}\left(\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)^{2m-1}\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu^*(\alpha_n,\psi_n;K_n)\frac{1}{\nu!}$$

$$\times \sum_{j=0}^{2m} S(2m,j)\,(\nu)_j \int_{I_{n,\nu}} |f(t)|(1+t^{2m})^{-1}\,dt$$

$$\leq 2^{2m}n^2\psi(0)\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu^*(\alpha_n,\psi_n;K_n)\frac{1}{\nu!}\int\limits_{I_{n,\nu}} |f(t)|(1+t^{2m})^{-1}\,dt$$

$$+2^{2m}\left(\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)^{2m-1}\sum_{j=0}^{2m} S(2m,j)$$

$$\times \sum_{\nu=j}^{\infty} P_{\nu}^{*}(\alpha_n, \psi_n; K_n) \frac{1}{(\nu-j)!} \int_{I_{n,\nu}} |f(t)|(1+t^{2m})^{-1}\, dt$$

$$\leq 2^{2m} n^2 \psi_n(0) \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu}(\alpha_n, \psi_n; K_n) \int_{I_{n,\nu}} |f(t)|(1+t^{2m})^{-1}\, dt$$

$$+2^{2m} \left(\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)^{2m-1} \sum_{j=0}^{2m} S(2m,j) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{P_{\nu+j}^{*}(\alpha_n, \psi_n; K_n)}{\nu!}$$

$$\times \int_{I_{n,\nu}} |f(t)|(1+t^{2m})^{-1}\, dt \tag{3.49}$$

eşitsizliği elde edilir.

Burada 3^{o}) özelliği j kez uygulanırsa,

$$P_{\nu+j}^{*}(\alpha_n, \psi_n; K_n) = (-1)^j x^j n(n+m)\cdots(n+(j-1)m)$$

$$\times \left(\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}} K_{n+jm}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right) \left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu+j}$$

elde edilir.(3.49) eşitsizliğine $P_{\nu+j}^{*}(\alpha_n, \psi_n; K_n)$ ve (3.49) eşitsizliğinin her iki tarafının $(1+x^{2m})^{-1}$ ile çarpılması sonucu $j = 0,1,\cdots,2m$ olmak üzere $\frac{x^j}{1+x^{2m}} \leq 1$ olduğundan,

$$(1+x^{2m})^{-1}|(G_n^{*}f)(x)|dx \leq \frac{2^{2m}}{(1+x^{2m})^2} n^2\psi_n(0) \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu}\ (\alpha_n, \psi_n; K_n)$$

$$\times \int_{I_{n,\nu}} |f(t)|(1+t^{2m})^{-1}\, dt$$

$$\times\, 2^{2m} \left(\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)^{2m-1} \int_{I_{n,\nu}} |f(t)|(1+t^{2m})^{-1}\, dt$$

eşitsizliği geçerlidir.

$G_n^{*}f$ ın tanımı, (3.40) eşitsizliği, (3.35) ve (3.36) koşulları dikkate alınarak,

$$\int_0^\infty (1+x^{2m})^{-1}|(G_n^*f)(x)|\,dx \leq \int_0^\infty |f(t)|(1+t^{2m})^{-1}\,dt$$

$$\times\left(1+\sum_{j=0}^{2m} S(2m,j)\left(\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)^{2m-j}\right).$$

yazılabilir. Böylece her $f \in L_{1,m}(\mathbb{R}_+)$ için C pozitif bir sabit olmak üzere

$$\|G_n^*f\|_{1,m} \leq C\|f\|_{1,m}$$

eşitsizliği geçerlidir.

$p=\infty$ durumunda ise (3.49) eşitsizliğinden

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^{2m})^{-1}|(G_n^*f)(x)| \leq 2^{2m}\|f\|_{\infty,m}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)+\left(\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)^{2m-1}\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{j=0}^{2m} S(2m,j)\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\alpha_n,\psi_n;K_n)\right)\right).$$

olur. Son eşitsizlikte Riesz-Thorin teoreminin kullanılması ile $1 \leq p \leq \infty$ ve $f \in L_{p,m}(\mathbb{R}_+)$ için

$$\|G_n^*f\|_{p,m} \leq \|f\|_{p,m}$$

eşitsizliği gösterilmiş olur.■

Bu eşitsizlik yardımıyla G_n^*f doğrusal pozitif operatörünün $L_{p,2m}(\mathbb{R}_+)$ den $L_{p,2m}(\mathbb{R}_+)$ ya bir dönüşüm tanımladığı söylenebilir.

Teorem 3.4.2

$f \in L_{p,m}(\mathbb{R}_+)$ ve K_n için geçerli olan (3.40) koşulu sağlansın. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\|G_n^*f-f\|_{p,m}=0$$

eşitliği sağlanır (Ispir et al. 2008).

Kanıt

Kanıt için $j = 0, 1, 2$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \left\| G_n^* e_j - x^j \right\|_{p,m} = 0 \tag{3.50}$$

şeklindeki üç koşulun sağlandığını göstermek yeterlidir. Lemma 3.4.3 den açıkça

$$\|G_n^* e_0 - 1\|_{p,m} = 0$$

vardır. $j = 0$ için (3.50) eşitliği doğru olduğundan Lemma 3.4.3 ü kullanarak $n \to \infty$ için,

$$\|G_n^* e_1 - x\|_{p,m} \leq \left(\frac{\alpha_n}{n} - 1\right)\left(\int_{\mathbb{R}^+} \frac{x^p}{(1 + x^{2m})^p} dt\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{2n^2\psi_n(0)}\left(\int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{(1 + x^{2m})^p} dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

ifadesinin sağ tarafı 0 a yaklaşır. Benzer şekilde $j = 1$ için (3.50) ifadesi doğrudur. Açıkça Lemma 3.4.3 ü kullanarak $n \to \infty$ için,

$$\|G_n^* e_2 - x^2\|_{p,m} \leq \left(\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2 \frac{n+m}{n} - 1\right)\left(\int_{\mathbb{R}^+} \frac{x^{2p}}{(1 + x^{2m})^p} dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+2\frac{\alpha_n}{n}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\left(\int_{\mathbb{R}^+} \frac{x^p}{(1 + x^{2m})^p} dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{1}{3\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}\left(\int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{(1 + x^{2m})^p} dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

ifadesi 0 a yaklaşır. Bu ise Teorem 3.4.1 den

$$\lim_{n\to\infty} \|G_n^* f - f\|_{p,m} = 0$$

olması demektir. Dolayısıyla kanıt tamamlanmış olur.

Tanım 3.4.6

$\gamma \geq 0$ için; $]0,\infty[$ üzerinde tanımlı mutlak sürekli $f,]0,\infty[$ üzerinde f' türevine sahip $]0,\infty[$ un sonlu her alt aralığında bir sınırlı varyasyon fonksiyonu ile $M > 0$ sabitleri için $t \to \infty$ iken $|f(t)| \leq M.t^{\gamma}$ büyüme şartını sağlayan fonksiyonların sınıfı türevlenebilir sınırlı varyasyon uzayı olarak adlandırılır ve $DBV_{\gamma}\ ]0,\infty[$ ile gösterilir.

$f \in DBV_{\gamma}]0,\infty[$ fonksiyonu; her $a > 0$ için g fonksiyonu $]0,\infty[$ sonlu alt aralığında sınırlı varyasyon fonksiyonu olmak üzere,

$$f(x) = \int_{a}^{x} g(t)\,dt + f(a)$$

eşitliğini sağlar.

$]0,\infty[$ un her bir alt aralığı üzerinde sınırlı varyasyona sahip her f fonksiyonu sabit

$x \in]0,\infty[$ için f_x yardımcı fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$f_x(t) := \begin{cases} f(t) - f(x^-), 0 \leq t < x \\ 0 \qquad\qquad\quad , \qquad t = x \\ f(t) - f(x^+), x < t < \infty \end{cases} \tag{3.51}$$

Aşağıdaki teoremde $V_a^b(f), [a,b]$ üzerinde f fonksiyonunun toplam varyasyonunu gösterecektir.

Teorem 3.4.3

$f \in DBV_{\gamma}\ ]0,\infty[,\ \gamma \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda her $x \in]0,\infty[$ için n yeterince büyük bir sayı, $\lambda\ ve\ \eta$ pozitif sabitler olmak üzere $T_{\gamma,x}(f)$ ve $K_{\gamma,x}$ sabitleri

$$T_{\gamma,x}(f) = 2^{\gamma} \sup_{t \geq 2x} t^{-y} |f(t) - f(x)|$$

ve

$$K_{\gamma,x} = \sup_{x \in \mathbb{N}} \sqrt{\eta^{\gamma} G_n^*((e_1 - xe_0)^{2\gamma}, x)}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere,

$$|(G_n^* f,x)-f(x)| \leq \frac{\eta}{n^2\psi_n(0)}(x+1)|f'(x^+)+f'(x^-)|$$

$$+\sqrt{\frac{\lambda}{n^2\psi_n(0)}}(x+1)\left(\left|\frac{f'(x^+)+f'(x^-)}{2}\right|+x^{-1}|f'(x^+)|\right)$$

$$+\lambda\frac{(x+1)^2}{n^2\psi_n(0)}\left(\sum_{\nu=1}^{[\sqrt{n}]} V_{x-\frac{x}{\nu}}^{x+\frac{x}{\nu}}((f')_x)+x^{-1}|f(2x)-f(x)|+|f'(x^+)|\right)$$

$$+\frac{x}{\sqrt{n}}V_{x-\frac{x}{\nu}}^{x+\frac{x}{\nu}}((f')_x)+T_{\gamma,x}(f)K_{\gamma,x}n^{-\gamma/2}$$

eşitsizliği geçerlidir (Ispir et al. 2008).

Kanıt

Her $x \in]0,\infty[$ için $(G_n^* e_0, x)=e_0$ olduğundan,

$$(G_n^* f,x)-f(x)=\int_0^\infty [f(t)-f(x)]\, W_n(x,t)dt$$

$$=\int_0^\infty W_n(x,t)\int_x^t f'(s)dsdt$$

eşitliği geçerlidir.

Her $f(t) \in DBV_\gamma]0,\infty[$ için (3.51) eşitliği kullanılarak

$$\delta_x(t)=\begin{cases}1, x=t\\ 0, x\neq t\end{cases}$$

olmak üzere

$$f'(t)=(f')_x(t)+\frac{1}{2}\big(f'(x^+)+f'(x^-)\big)+\frac{1}{2}\big(f'(x^+)+f'(x^-)\big)sgn(t-x)+$$

$$+\delta_x(t)\left[f'(x)-\tfrac{1}{2}\big(f'(x^+)+f'(x^-)\big)\right] \tag{3.52}$$

eşitliği yazılabilir.

Açıkça,

$$\int_0^\infty W_n(x,t)\int_x^t \left[f'(x)-\frac{1}{2}\big(f'(x^+)+f'(x^-)\big)\right]\delta_x(t)dsdt=0$$

olacaktır. Lemma 3.4.3 kullanılarak,

$$\int_0^\infty\left(\int_x^t \frac{1}{2}\big(f'(x^+)+f'(x^-)\big)\,du\right)W_n(x,t)\,dt=\frac{1}{2}\big(f'(x^+)+f'(x^-)\big)\int_0^\infty (t-x)W_n(x,t)dt$$

$$=\frac{1}{2}\big(f'(x^+)+f'(x^-)\big)G_n^*\big((e_1-xe_0),x\big)$$

ve

$$\left|\int_0^\infty W_n(x,t)\left(\int_x^t \frac{1}{2}\big(f'(x^+)-f'(x^-)\big)sgn(s-x)ds\right)dt\right|$$

$$\le\frac{1}{2}|f'(x^+)-f'(x^-)|\int_0^\infty |t-x|W_n(x,t)dt$$

$$\le\frac{1}{2}|f'(x^+)-f'(x^-)|G_n^*(|e_1-xe_0|,x)$$

ifadeleri geçerlidir.

(3.44) ve (3.45) eşitlikleri kullanılırsa,

$$A_n(f',x)=\int_0^x K_n(x,t)\int_x^t (f')_x(s)dsdt,$$

$$B_n(f',x)=\int_x^{2x} K_n(x,t)\int_x^t (f')_x(s)dsdt,$$

$$C_n(f',x)=\int_{2x}^\infty K_n(x,t)\int_x^t (f')_x(s)dsdt$$

şeklindeki gösterimler kullanılmak üzere,

$$|G_n^*(f,x)-f(x)| \leq |A_n(f',x)+B_n(f',x)+C_n(f',x)|$$

$$+\frac{1}{2}|f'(x^+)+f'(x^-)|\frac{\eta}{n^2\psi_n(0)}(x+1)$$

$$+\frac{1}{2}|f'(x^+)-f'(x^-)|\sqrt{\frac{\lambda}{n^2\psi_n(0)}}(x+1) \tag{3.53}$$

eşitliği geçerli olur.

$A_n(f',x), B_n(f',x)$ ve $C_n(f',x)$ terimlerinin hata hesaplarının yapılması kanıtı tamamlayacaktır.

Lemma 3.4.3 ün uygulanması ve kısmi integrasyon kullanılarak,

$$|A_n(f',x)| = \left|\int_0^x \int_x^t (f')_x(s)\,ds\,d_t\beta_n(x,t)\right| = \int_0^x \beta_n(x,t)(f')_x(t)dt$$

$$\leq \left(\int_0^{x-\frac{x}{\sqrt{n}}} + \int_{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}^x\right)|\beta_n(x,t)|V_t^x((f')_x)dt$$

$$\leq \ \lambda\frac{(x+1)^2}{n^2\psi_n(0)}\int_0^{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}(x-t)^{-2}\,V_t^x((f')_x)dt+\frac{x}{\sqrt{n}}V_{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}^x((f')_x)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $s=\frac{x}{x-t}$ alınarak,

$$\int_0^{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}(x-t)^{-2}\,V_t^x((f')_x)dt = x^{-1}\int_1^{\sqrt{n}} V_{x-\frac{x}{s}}^x((f')_x)\,ds$$

$$\leq x^{-1}\sum_{\nu=1}^{[\sqrt{n}]}\int_\nu^{\nu+1} V_{x-\frac{x}{s}}^x((f')_x)\,ds$$

$$\leq x^{-1}\sum_{\nu=1}^{[\sqrt{n}]} V_{x-\frac{x}{s}}^x((f')_x)$$

yazılabilir. Böylece,

$$|A_n(f',x)| \leq \lambda \frac{(x+1)^2}{n^2\psi_n(0)} x^{-1} \sum_{\nu=1}^{[\sqrt{n}]} V_{x-\frac{x}{\nu}}^{x}((f')_x) + \frac{x}{\sqrt{n}} V_{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}^{x}((f')_x) \tag{3.54}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$B_n(f',x)$ için Lemma 3.4.4 ve (3.45) eşitsizliği kullanılarak,

$$|B_n(f',x)| = \left| \int_x^{2x} \int_x^t (f')_x(s)ds\,d_t\big(1-\beta_n(x,t)\big) \right| = \int_0^x \beta_n(x,t)(f')_x(t)dt$$

$$\leq \left| \int_x^{2x} (f')_x(s)ds \right| |1-\beta_n(x,2x)| + \int_x^{2x} |(f')_x(t)|\,|1-\beta_n(x,t)|dt$$

$$\leq \lambda \frac{(x+1)^2}{n^2\psi_n(0)} |f(2x)-f(x)-xf'(x^+)| + \int_0^{x-\frac{x}{\sqrt{n}}} V_x^t((f')_x)dt$$

$$\leq \lambda \frac{(x+1)^2}{n^2\psi_n(0)} \int_{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}^{2x} (t-x)^{-2} V_x^t((f')_x)dt$$

elde edilir. Burada $s=\frac{x}{x-t}$ alınması ile,

$$\int_{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}^{2x} (t-x)^{-2} V_x^t((f')_x)dt = x^{-1} \int_1^{\sqrt{n}} V_x^{x+\frac{x}{s}}((f')_x)\,ds$$

$$\leq x^{-1} \sum_{\nu=1}^{[\sqrt{n}]} \int_{\nu}^{\nu+1} V_x^{x+\frac{x}{s}}((f')_x)\,ds$$

$$\leq x^{-1} \sum_{\nu=1}^{[\sqrt{n}]} V_x^{x+\frac{x}{\nu}}((f')_x)$$

olacağından,

$$|B_n(f',x)| \leq \lambda \frac{(x+1)^2}{n^2\psi_n(0)}\, |f(2x) - f(x) - xf'(x^+)|$$

$$+\lambda \frac{(x+1)^2}{n^2\psi_n(0)} x^{-1} \sum_{\nu=1}^{[\sqrt{n}]} V_x^{x+\frac{x}{\nu}}((f')_x) + \frac{x}{\sqrt{n}} V_x^{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}((f')_x) \tag{3.55}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$C_n(f',x)$ i hesaplamak için Hölder eşitsizliği ve Lemma 3.4.3 kullanılarak,

$$|C_n(f',x)| = \left| \int_{2x}^{\infty} W_n(x,t)\big(f(t) - f(x) - (t-x)f'(x^+)\big)\, dt \right|$$

$$\leq 2^{-\gamma} M_{\gamma,x}(f) \int_{2x}^{\infty} t^{\gamma} K_n(x,t)dt + |f'(x^+)| \int_{2x}^{\infty} W_n(x,t)|t-x|dt$$

eşitsizliği elde edilir.

$t \leq 2(t-x)$ ve $t \geq 2x$ için $x \leq t-x$ ile (3.43), (3.45) eşitsizlikleri ve Lemma 3.4.3 kullanılarak

$$|C_n(f',x)| = T_{\gamma,x}(f) \int_{2x}^{\infty} (t-x)^{\gamma} W_n(x,t)dt \ + x^{-1}|f'(x^+)| \int_{2x}^{\infty} W_n(x,t)(t-x)^2 dt$$

$$\leq T_{\gamma,x}(f) K_{\gamma,x} \eta^{-\gamma/2} + |f'(x^+)| \sqrt{\frac{\lambda}{n^2\psi_n(0)}}(x+1) \tag{3.56}$$

olur.

Dolayısıyla $(3.53) - (3.56)$ ifadeleri birlikte düşünülürse teoremin kanıtı tamamlanmış olur.

Uyarı 3.4.4

$T_{\gamma,x}(f) < \infty$ ve $K_{\gamma,x} < \infty$ olup Teorem 3.4.3, G_n^* operatörleri için yaklaşım hızını vermektedir (Ispir et al. 2008).

3.5 AĞIRLIKLI C_{2m} UZAYINDA GADJİEV-İBRAGİMOV OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM

Bu kesimde Coşkun (2012) tarafından tanımlanan C_{2m} uzayının bir alt uzayındaki fonksiyonlara (2.1) eşitliği ile verilen klasik Gadjiev-İbragimov operatörleri ile yapılan yaklaşımın özellikleri, operatörün $n.$ momenti için bazı eşitlikler ve süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı hesabı yapılacaktır.

Tanım 3.5.1

$m \in \mathbb{N}, B_{2m} = B_{2m}]0,\infty[$ uzayı ; $[0,\infty[$ yarı ekseni üzerinde tanımlı ve M_f yalnızca f 'e bağlı bir sabit olmak üzere

$$|f(x)| \leq M_f(1 + x^{2m})$$

eşitsizliğini sağlayan tüm fonksiyonların uzayıdır (Coşkun 2012).

Uyarı 3.5.1

B_{2m} doğrusal bir uzay olup

$$\|f\|_{2m} = \sup_{x \geq 0} \frac{|f(x)|}{1 + x^{2m}}$$

ile normlu bir uzaydır (Coşkun 2012).

Tanım 3.5.2

B_{2m} uzayına ait bütün sürekli fonksiyonların uzayı $C_{2m} := C_{2m}\,[0,\infty[$ olsun.

Bu uzayın bir alt uzayı olan C_{2m}^0;

$$C_{2m}^0 \coloneqq \left\{ f \in C_{2m}\colon \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{1 + x^2} = K_f < \infty \right\}$$

ile gösterilir (Coşkun 2012).

Teorem 3.5.1

(L_n) doğrusal pozitif operatörler dizisi

(L_n): $C_{2m} \rightarrow B_{2m}$ ve $\nu = 0,1,2$ olmak üzere

$\lim_{n\rightarrow\infty} \|L_n(t^{\nu m}, x) - f(x^{\nu m})\|_{2m} = 0$

şeklindeki üç koşul sağlansın. Bu durumda her bir $f \in C_{2m}^0$ fonksiyonu için

$\lim_{n\rightarrow\infty} \|L_n(f, x) - f(x)\|_{2m} = 0$

eşitliği geçerli olur (Coşkun 2012).

Kanıt

$f \in C_{2m}^0$ olsun. Bu durumda C_{2m}^0 uzayının tanımından her $\varepsilon > 0$ için öyle bir x_0' bulunabilir ki

$x > x_0'$ için

$|f(x)| < \varepsilon(1 + x^{2m})$

eşitsizliği geçerli olur. Ayrıca

$\lim_{x\rightarrow\infty} (1 + x^{2m}) = \infty$

olduğundan $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir x_0'' sayısı bulunabilir ki $x > x_0''$ için

$(1 + x^{2m}) > \dfrac{1}{\varepsilon}$

eşitsizliği geçerlidir. Bu durumda

$x_0 \coloneqq max(x_0', x_0'')$

seçilirse tüm $x > x_0$ lar için

$|f(x)| < \varepsilon(1 + x^{2m})$ ve $(1 + x^{2m}) > \frac{1}{\varepsilon}$

bulunur. Şimdi de

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \quad ; & 0 \leq x \leq x_0 \\ doğrusal; & x \in \ ]x_0, x_1] \\ \quad 0; & x > x_1 \end{cases}$$

şeklinde g fonksiyonu tanımlansın. Burada x_0 sayısı $x_1 > x_0$ olan $|g(x)| \leq |f(x_0)|$ eşitsizliğini sağlayan bir gerçel sayısı olsun.

$$\begin{aligned}
\|f-g\|_{2m} &\leq \sup_{x>x_1} \frac{|f(x)-g(x)|}{1+x^{2m}} + \sup_{x\in\,]x_0,x_1]} \frac{|f(x)-g(x)|}{1+x^{2m}} \\
&= \sup_{x>x_1} \frac{|f(x)|}{1+x^{2m}} + \sup_{x\in\,]x_0,x_1]} \frac{|f(x)-g(x)|}{1+x^{2m}} \\
&\leq 2\sup_{x>x_1} \frac{|f(x)|}{1+x^{2m}} + \sup_{x\in\,]x_0,x_1]} \frac{|f(x_0)|}{1+x^{2m}} \\
&\leq 2\varepsilon + |f(x_0)| \frac{1}{1+x_0^{2m}} \\
&\leq 2\varepsilon + \ \varepsilon(1+x_0^{2m}) \frac{1}{1+x_0^{2m}} \\
&\leq 3\varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur.

L_n operatörleri C_{2m} uzayından B_{2m}'e dönüşüm yaptığından teoremin kabulleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
\|L_n\|_{2m} &= \|L_n(1+x^{2m}, x\|_{2m} \\
&= \|L_n(1,x) + L_n(x^{2m}, x)\|_{2m} \\
&= \|L_n(1,x) - (1+x^{2m}) + (1+x^{2m}) + L_n(x^{2m}, x)\|_{2m} \\
&\leq \|L_n(1,x) - 1\|_{2m} + \|L_n(x^{2m}, x) - x^{2m}\|_{2m} + \|1+x^{2m}\|_{2m} \\
&< 3
\end{aligned}$$

olacağından

$$\|L_n\|_{2m} = \|L_n(1+x^{2m}, x\|_{2m} < 3$$

bulunur. Bu eşitsizlikleri kullanarak her $f \in C_{2m}^0$ için

$$\|L_n f - f\|_{2m} = \|L_n(f-g+g, x) + g(x) - g(x) - f(x)\|_{2m}$$

$$\leq \|L_n(f-g,x)\|_{2m} + \|L_n(g,x)-g(x)\|_{2m} + \|f-g\|_{2m}$$

$$\leq \|f-g\|_{2m}\|L_n\|_{2m} + \|L_n(g,x)-g(x)\|_{2m} + \|f-g\|_{2m}$$

$$\leq \|f-g\|_{2m}\,[\|L_n\|_{2m}+1] + \|L_n(g,x)-g(x)\|_{2m}$$

$$\leq 12\varepsilon + \|L_n(g,x)-g(x)\|_{2m} \tag{3.57}$$

olur. Ayrıca

$$\|L_n(g,x)-g(x)\|_{2m} = \sup_{x\geq 0}\frac{|L_n(g,x)-g(x)|}{1+x^{2m}}$$

$$\leq \sup_{x\in[0,x_1]}\frac{|L_n(g,x)-g(x)|}{1+x^{2m}} + \sup_{x>x_1}\frac{|L_n(g,x)-g(x)|}{1+x^{2m}}$$

$$= \sup_{x\in[0,x_1]}\frac{|L_n(g,x)-g(x)|}{1+x^{2m}} + \sup_{x>x_1}\frac{|L_n(g,x)|}{1+x^{2m}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada

$$\mu(x_0) \coloneqq \max_{x\in[0,x_0]}|f(x)|$$

şeklindeki tanımlama yapılırsa

$$\sup_{x>x_1} g(x) \leq \mu(x_0)$$

olur. Böylece

$$\|L_n(g,x)-g(x)\|_{2m} \leq \sup_{x\in[0,x_1]}\frac{|L_n(g,x)-g(x)|}{1+x^{2m}} + \sup_{x>x_1}\frac{|L_n(g,x)-g(x)|}{1+x^{2m}}$$

$$< \sup_{x\in[0,x_1]}|L_n(g,x)-g(x)| + \sup_{x>x_1}|L_n(g,x)|$$

$$\leq \sup_{x\in[0,x_1]}|L_n(g,x)-g(x)| + \sup_{x>x_1}\frac{\mu(x_0)}{1+x^{2m}}$$

olacaktır. g sürekli olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(g,x)-g(x)\|_{2m} = 0 \tag{3.58}$$

olup (3.58) eşitliği (3.57) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f,x)-f(x)\|_{2m} = 0$$

bulunur. Bu ise kanıtı tamamlar.■

Gadjiev'in Gadjiev (1974,1976) kaynaklarındaki Korovkin tipi teoremlere benzer olarak C_{2m} uzayında da Korovkin tipli bir teorem geçerli değildir (Coşkun 2012).

Tanım 3.5.3

$f \in C_{2m}^{0}$ olsun. Bu durumda

$$\omega(f,\delta)_{2m} = \sup_{\substack{x\geq 0\\ |h|\leq\delta}} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{(1+x^{2m})(1+h^{2m})}$$

ifadesine ağırlıklı süreklilik modülü denir (Coşkun 2012).

Bir $f \in C_{2m}$ fonksiyonu için süreklilik modülü Achiser tarafından kanıtlanmıştır. Genelde $\delta \to 0$,için $f \in C_{2m}$ fonksiyonunun süreklilik modülü 0'a yaklaşmaz. Ancak Gadjiev and Ispir (1999) in de kanıtlandığı gibi her $f \in C_2^0$ fonksiyonu için

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(f,\delta)_{2m} = 0$$

dır.

Önerme 3.5.1

$f \in C_{2m}^{0}$ olsun. Bu durumda süreklilik modülü için

i) $\omega(f,\delta)_{2m} \geq 0$

ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f,\delta_1)_{2m} \leq \omega(f,\delta_2)_{2m}$

iii) $\forall\, m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f,m\delta) \leq 2^{2m}(1+\delta^{2m})\, \omega(f,\delta)_{2m}$

iv) $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^{+}$ için $\omega(f,\lambda\delta)_{2m} \leq 2^{2}(\lambda+1)(1+\delta^{2m})\, \omega(f,\delta)_{2m}$

v) $\forall f \in C_{2m}^{0}$ için $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega(f,\delta)_{2m} = 0$

vi) $|f(t)-f(x)| \leq (1+x^{2m})(1+|t-x|^{2m})\, \omega(\mathrm{f}, |t-x|)_{2m}$

vii) $|f(t)-f(x)| \leq 2^{2m}(1+x^{2m})(1+|t-x|^{2m})(1+\frac{|t-x|}{\delta})(1+\delta^{2m})\, \omega(\mathrm{f},\delta)_{2m}$

özellikleri geçerlidir (Coşkun 2012).

Kanıt

$\boldsymbol{i}$) $\omega(f,\delta)_{2m} = \sup_{\substack{x\geq 0 \\ |h|\geq\delta}} \dfrac{|f(x+h)-f(x)|}{(1+x^{2m})(1+h^{2m})}$

ifadesinde

$(1+x^{2m}) \geq 0$, $(1+h^{2m}) \geq 0$ ve $|f(x+h)-f(x)| \geq 0$ olduğundan

$\omega(f,\delta)_{2m} \geq 0$ dır.

$\boldsymbol{ii}$) $\delta_1 \leq \delta_2$ olsun. $|h| \leq \delta_2$ bölgesi, $|h| \leq \delta_1$ bölgesinden daha büyüktür. Bölge büyüdükçe alınan supremum büyüyeceğinden

$$\sup_{\substack{x\geq 0 \\ |h|\geq\delta_1}} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{(1+x^{2m})(1+h^{2m})} \leq \sup_{\substack{x\geq 0 \\ |h|\geq\delta_2}} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{(1+x^{2m})(1+h^{2m})}$$

olacağından

$\omega(f,\delta_1)_{2m} \leq \omega(f,\delta_2)_{2m}$

bulunur.

$\boldsymbol{iii}$) Her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\omega(f,\delta)_{2m} = \sup_{\substack{x\geq 0 \\ |h|\leq\delta}} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{(1+x^{2m})(1+h^{2m})}$$

ifadesinde $x+h=t$ denirse

$$\omega(f,\delta)_{2m} = \sup_{\substack{t,x\geq 0 \\ |t-x|\leq\delta}} \frac{|f(t)-f(x)|}{(1+x^{2m})(1+(t-x)^{2m})}$$

elde edilir. O halde

$$\omega(f,m\delta)_{2m} = \sup_{\substack{t,x\geq 0 \\ |t-x|\leq m\delta}} \frac{|f(t)-f(x)|}{(1+x^{2m})(1+(t-x)^{2m})}$$

olacaktır.

$|t-x| \leq m\delta \Longrightarrow -m\delta \leq t-x \leq m\delta$

$t = x + mh$ seçilirse $|h| \leq \delta$ olup

$$\omega(f,m\delta)_{2m} = \sup_{\substack{x\geq 0\\ |h|\leq\delta}} \frac{|f(x+mh)-f(x)|}{(1+x^{2m})(1+(mh)^{2m})}$$

yazılabilir. Diğer yandan her $f \in C_{2m}^0$ için

$$f(x+mh)-f(x) = f(x+h)-f(x)+f(x+2h)-f(x+h)+f(x+3h)-$$
$$f(x+2h)+\cdots+f(x+mh)-f(x+(m-1)h)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}[f(x+kh)-f(x+(k-1)h]$$

eşitliği geçerlidir. Böylece

$$f(x+mh)-f(x) = \left|\sum_{k=1}^{m}[f(x+kh)-f(x+(k-1)h]\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m}|f(x+kh)-f(x+(k-1)h|$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{|f(x+kh)-f(x+(k-1)h|}{(1+h^{2m})(1+(x+(k-1)h)^{2m})}(1+h^{2m})(1+(x+(k-1)\mathrm{h})^{2m}$$

eşitsizliği sağlanır. Her iki tarafın (1+x^{2m})(1+$(mh)^{2m}$) ifadesine bölünmesiyle

$$\frac{|f\ (x+mh\,)-\ f(x)|}{(1+x^{2m})(1+(mh)^{2m})} \leq \sum_{k=1}^{m}\frac{|f(x+kh)-f(x+(k-1)h|}{(1+h^{2m})(1+(k-1)h)^{2m})}\frac{(1+h^{2m})(1+(x+(k-1)h)^{2m})}{(1+x^{2m})(1+(mh)^{2m})}$$

eşitsizliği elde edilir. $|h| \leq \delta$ üzerinden supremumu alınırsa

$$\omega(f,m\delta)_{2m} \leq\ \omega(f,\delta)_{2m}(1+\delta^{2m})\sum_{k=1}^{m}\frac{1+(x+(k-1)h)^{2m}}{(1+x^{2m})(1+(mh)^{2m})}$$

eşitsizliği geçerli olur. Diğer yandan

$$1+(x+(k-1)h)^{2m} \leq 1+2^{2m}\left(x^{2m}+\left((k-1)h\right)^{2m}\right)$$

$$\leq 2^{2m}+2^{2m}\left(x^{2m}+\left((k-1)h\right)^{2m}\right)$$

$$=2^{2m}\left(1+x^{2m}+\left((k-1)h\right)^{2m}\right)$$

dir. $k-1 \leq m$ olduğundan

$$1+(x+(k-1)h)^{2m} \leq 2^{2m}(1+x^{2m}+(mh)^{2m})$$

$$\leq 2^{2m}(1+x^{2m}+(mh)^{2m}+x^{2m}(mh)^{2m})$$

$$= 2^{2m}(1+x^{2m})(1+(mh)^{2m})$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan

$$\frac{1+(x+(k-1)h)^{2m}}{(1+x^{2m})(1+(mh)^{2m})} < 2^{2m}$$

olur. Böylece

$$\omega(f, m\delta)_{2m} \leq 2^{2m}(1+\delta^{2m})\,\omega(f,\delta)_{2m}$$

bulunur.

iv) Her $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ için $\omega(f,\lambda\delta)_{2m} \leq 2^{2}(\lambda+1)(1+\delta^{2m})\,\omega(f,\delta)_{2m}$

eşitsizliğini göstermek için

$\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ sayısının tam kısmı $[\![\lambda]\!]$ ile gösterilirse

$[\![\lambda]\!] \leq \lambda \leq [\![\lambda]\!]+1$ eşitsizliklerinin geçerliği olduğu açıktır. Bu eşitsizliklerde ii) özelliği gereği

$$\omega(f,\lambda\delta)_{2m} \leq \omega(f,(([\![\lambda]\!]+1)\delta)_{2m}$$

yazılabilir.

$([\![\lambda]\!]+1) \in \mathbb{N}$) olduğundan bu eşitsizliğin sağ tarafına iii) özelliği uygulanırsa

$$\omega(f,\lambda\delta)_{2m} \leq \omega(f,(([\![\lambda]\!]+1)\delta)_{2m}$$

$$\leq 2^{2m}([\![\lambda]\!]+1)(1+\delta^{2m})\,\omega(f,\delta)_{2m}$$

bulunur. Ayrıca her $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ için $[\![\lambda]\!]+1 \leq \lambda+1$ olduğu göz önünde bulundurulursa;

$$\omega(f,\lambda\delta)_{2m} \leq 2^{2m}(1+\lambda)(1+\delta^{2m})\,\omega(f,\delta)_{2m}$$

elde edilir.

$\boldsymbol{v}$) Her $f \in C_{2m}^0$ için $\lim_{\delta \to 0} \omega(f,\delta)_{2m} = 0$ olduğundan C_{2m}^0 ın tanımından verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$\left|\frac{f(x)}{1+x^{2m}} - K_f\right| < \varepsilon \tag{3.59}$$

$$\left|\frac{f(x+h)}{1+(x+h)^{2m}} - K_f\right| < \varepsilon \tag{3.60}$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde her $x > x_0$ için $x_0 > 0$ sayısı bulunabilir.

$$\left|\frac{f(x+h)}{1+(x+h)^{2m}} - K_f\right| = \left|\frac{f(x+h) - K_f - K_f(x+h)^{2m}}{1+(x+h)^{2m}}\right|$$

$$= \left|\frac{f(x+h) - K_f - K_f \sum_{j=1}^{2m} x^{2m-j} h^j \binom{2m}{j}}{1+(x+h)^{2m}}\right|$$

$$= \left|\frac{f(x+h) - K_f}{1+(x+h)^{2m}}\right| + \frac{hK_f \sum_{j=1}^{2m} x^{2m-j} h^{j-1} \binom{2m}{j}}{1+|x+h|^{2m}}$$

$$\leq sup\left|f(x+h) - K_f\right| + \frac{\delta K_f \sum_{j=1}^{2m} x^{2m-j} h^{j-1} \binom{2m}{j}}{1+|x+h|^{2m}}$$

$$< \varepsilon + \delta K_f sup \frac{\sum_{j=1}^{2m} x^{2m-j} h^{j-1} \binom{2m}{j}}{1+|x+h|^{2m}}$$

olur.

Aynı zamanda her $f \in C[0, x_0]$ için

$$\sup_{\substack{0 \leq x \leq x_0 \\ |h| \leq \delta}} |f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$$

sağlayan bir $\delta > 0$ vardır. Böylece (3.59) ve (3.60) eşitsizliklerinden

$$\omega(f,\delta)_{2m} = \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{\left|f(x+h) - f(x) - K_f + K_f\right|}{(1+x^{2m})(1+h^{2m})}$$

$$\leq \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{\left|f(x+h) - K_f\right| + \left|K_f - f(x)\right|}{(1+x^{2m})(1+h^{2m})}$$

$$\leq \varepsilon + \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{\left|K_f - f(x)\right|}{(1+x^{2m})(1+h^{2m})}$$

$$< \varepsilon + \frac{\delta K_f \sup \sum_{j=1}^{2m} \ x^{2m-j} h^{j-1} \binom{2m}{j}}{1+|x+h|^{2m}} + \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{\left|K_f - f(x)\right|}{(1+x^{2m})(1+h^{2m})}$$

$$< 2\varepsilon + \frac{\delta K_f \sup \sum_{j=1}^{2m} \ x^{2m-j} h^{j-1} \binom{2m}{j}}{1+|x+h|^{2m}} + \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{\left|K_f - f(x)\right|}{(1+x^{2m})(1+h^{2m})}$$

$$< 3\varepsilon \ + \frac{(x+h)^{2m}}{(1+x^{2m})(1+h^{2m})} K_f \delta$$

$$< 3\varepsilon + \frac{2^{2m}(x^{2m}+h^{2m})}{(1+x^{2m})(1+h^{2m})} K_f \ \delta$$

$$< 3\varepsilon + 2^{2m}\left(\frac{x^{2m}}{1+x^{2m}} + \frac{h^{2m}}{1+h^{2m}}\right) K_f \delta$$

$$\leq 3\varepsilon + 2^{2m} 2 \ K_f \ \delta$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizlik yardımıyla açıkça

$\lim_{\delta \to 0} \omega(f, \delta)_{2m} = 0$

bulunur.

vi) $|f(t) - f(x)| \leq (1+x^{2m})(1+|t-x|^{2m}) \omega(\, f, \ |t-x|)_{2m}$

eşitsizliğini göstermek için

$\omega(\, f, \delta \,)_{2m}$ ifadesinde $\delta = |t-x|$ seçilirse

$$\omega(\, f, |t-x|)_{2m} = \sup_{x,t \geq 0} \frac{|f(t)-f(x)|}{(1+x^{2m})(1+|t-x|^{2m})}$$

$$\geq \frac{|f(t)-f(x)|}{(1+x^{2m})(1+|t-x|^{2m})}$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{|f(t)-f(x)|}{(1+x^{2m})(1+|t-x|^{2m})} \leq \omega(\, f, |t-x|)_{2m}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Böylece

$$|f(t)-f(x)| \leq (1+x^{2m})(1+|t-x|^{2m}\, \omega(f, |t-x|)_{2m}$$

eşitsizliği elde edilir.

$\boldsymbol{vii}$) vi) özelliği kullanılarak

$$|f(t)-f(x)| \leq (1+x^{2m})(1+|t-x|^{2m}\omega\left(f, \frac{|t-x|}{\delta}\delta\right)_{2m}$$

yazılabilir. Ayrıca $\frac{|t-x|}{\delta} \in \mathbb{R}^{+}$ olup iv) özelliği yardımıyla

$$\omega\left(f, \frac{|t-x|}{\delta}\delta\right)_{2m} \leq 2^{2m}(1+\frac{|t-x|}{\delta})(1+\delta^{2m})\, \omega(f, \delta)_{2m}$$

dır. Dolayısıyla

$$|f(t)-f(x)| \leq 2^{2m}(1+\frac{|t-x|}{\delta})(1+x^{2m})(1+|t-x|^{2m})(1+\delta^{2m})\, \omega(f, \delta)_{2m}$$

bulunur.

Şimdi Lemma 3.5.2 de kullanılacak bir eşitlik kanıtlanacaktır.

Lemma 3.5.1

Her N doğal sayısı için $C_{k,N}$ pozitif sabitler ve $C_{N,N}=1$ olmak üzere ile (2.1) ile tanımlı klasik Gadjiev-İbragimov operatörü için,

$$L_n(t^N, x) = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^k \frac{n(n+m)(n+2m)\dots(n+(k-1)m)}{nk} \frac{C_{k,N}}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{N-k}} x^k \qquad (3.61)$$

eşitliği geçerlidir (Coşkun 2012).

Kanıt

Kanıt tümevarım yoluyla yapılacaktır.

(2.1) ile verilen klasik Gadjiev-İbrahimov operatörünün tanımı nedeniyle

N=1 için

$$L_n(t\,,x)=\sum_{k=1}^{1}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^1\frac{n}{n}\frac{C_{1,1}}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{N-N}}x^k$$

$$=\frac{\alpha_n}{n}x$$

olduğundan $L_n(t\,,x)=\frac{\alpha_n}{n}x$ dir.

Benzer şekilde N=2 için

$$L_n(t^2,x)=\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2\frac{n+m}{n}x^2+\frac{\alpha_n}{n}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}x$$

dir. Gerçekten;

$$L_n(t^2,x)=\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^k\frac{n(n+m)(n+2m)\dots(n+(k-1)m)}{n^k}\frac{C_{k,N}}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{N-k}}x^k$$

$$=\frac{\alpha_n}{n}x\frac{C_{1,2}}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{2-1}}+\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2\frac{n(n+m)}{n^2}\frac{C_{2,2}}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{2-2}}x^2$$

$$=\frac{\alpha_n}{n}\frac{1}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{2-1}}x+\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2\frac{(n+m)}{n}x^2$$

bulunur. (3.61) eşitliğinin her p doğal sayısı için geçerli olsun. Bu durumda $p+1$ için de (3.61) eşitliğinin doğru olduğu gösterilirse ispat biter.

Her v doğal sayısı için a_j bir sabit olmak üzere

$$v^{p+1}=v(v-1)\dots(v-p)+\sum_{j=1}^{p}v^j\,aj$$

eşitliği geçerli olduğundan (3.62) eşitliği doğrudur. Dolayısıyla

$$\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)^{p+1}=\frac{v(v-1)\dots(v-p)}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{p+1}}+\sum_{j=1}^{p}\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)^j\frac{aj}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{p+1-j}}\qquad(3.62)$$

eşitliği yazılabilir.

(2.1) ile verilen klasik Gadjiev-İbragimov operatöründe $f(t) = t^{p+1}$ alınırsa (3.62) eşitliği yardımıyla

$$L_n(t^{p+1},x) = \sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)^{p+1} K_n^{(v)}\big(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\big)\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{v!}$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty}\left[\frac{v(v-1)\dots(v-p)}{\big(n^2\psi_n(0)\big)^{p+1}} + \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)^{j}\frac{a_j}{\big(n^2\psi_n(0)\big)^{p+1-j}}\right]$$

$$K_n^{(v)}\big(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\big)\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{v!}$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty}\frac{v(v-1)\dots(v-p)}{\big(n^2\psi_n(0)\big)^{p+1}} K_n^{(v)}\big(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\big)\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{v!}$$

$$+\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{p}\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)^{v}\frac{a_j}{\big(n^2\psi_n(0)\big)^{p+1-j}} K_n^{(v)}\big(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\big)\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{v!}$$

$$= \frac{1}{\big(n^2\psi_n(0)\big)^{p+1}}\sum_{v=0}^{\infty} K_n^{(v)}\big(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\big)\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{(v-p-1)!} +$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\frac{a_j}{\big(n^2\psi_n(0)\big)^{p+1-j}}\sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)^{v} K_n^{(v)}\big(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\big)\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{v!}$$

olacaktır.

$v < p+1$ için faktöriyel tanımlı olmadığından toplam $(p+1)$ den başlatılırsa;

$$L_n(t^{p+1},x) = \frac{1}{\big(n^2\psi_n(0)\big)^{p+1}}\sum_{v=p+1}^{\infty} K_n^{(v)}\big(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\big)\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{(v-p-1)!} +$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\frac{a_j}{\big(n^2\psi_n(0)\big)^{p+1-j}} L_n\left(t^j,x\right)$$

bulunur. Burada $K_n^{(v)}\big(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\big)$ fonksiyonuna Tanım 2.1.1 deki 4°) özelliği uygulanırsa eşitliğin her $p \in \mathbb{N}$ için doğru olduğu kabulü yardımıyla

$$L_n(t^{p+1},x) = (-1)^{p+1}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^{p+1} \frac{n(n+m)(n+2m)\dots(n+pm)}{n^{p+1}} K_{n+(p+1)m}\,(x,0,0)x^{p+1}$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\frac{a_j}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{p+1-j}}\left[\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^{k}\frac{n(n+m)(n+2m)\dots(n+(k-1)m)}{n^k}\frac{C_{k,N}}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{j-k}}x^k\right]$$

$$=\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^{p+1} \frac{n(n+m)(n+2m)\dots(n+pm)}{n^{p+1}}x^{p+1}$$

$$+\sum_{j=1}^{p}a_j\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^{k}\frac{n(n+m)(n+2m)\dots(n+(k-1)m)}{n^k}\frac{C_{k,N}}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{p+1-k}}x^k$$

$$=\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^{p+1} \frac{n(n+m)(n+2m)\dots(n+pm)}{n^{p+1}}x^{p+1}$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^{k}\frac{n(n+m)(n+2m)\dots(n+(k-1)m)}{n^k}\frac{C_{k,N}}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{p+1-k}}x^k\sum_{j=k}^{p}a_j$$

eşitliğine ulaşılır. Burada

$$C_{k,p+1}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^{k}\frac{n(n+m)(n+2m)\dots(n+(k-1)m)}{n^k}\frac{C_{k,N}}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{p+1-k}}x^k\sum_{j=k}^{p}a_j\,, & eğer\ 1\le k\le p\\ 1, & eğer\ k=p+1\end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa $N=p+1$ için eşitlik kanıtlanmış olur.

Bu ise kanıtı tamamlar.

Tanım 3.5.4

(2.1) ile verilen klasik Gadjiev-İbragimov operatörünün n. Momenti

$$T_{N,n}(x)=\sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{N}K_n^{(v)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^{v}}{v!}$$

eşitliğiyle verilir (Coşkun 2012).

Lemma 3.5.2

Her $x \in [0, \infty[$ ve yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ sayısı için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\left|T_{N,n}(x)\right| = (x + x^2 + \cdots + x^N)O\left(\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)$$

(Coşkun 2012).

Kanıt

$T_{N,n}(x)$ in tanımından

$$T_{N,n}(x) = \sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)} - x\right)^N K_n{}^{(v)}\big(x, 0, \alpha_n\psi_n(0)\big)\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{v!}$$

$$= \sum_{v=0}^{N}\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)^N (-x)^{N-v}\binom{N}{v} K_n{}^{(v)}\big(x, 0, \alpha_n\psi_n(0)\big)\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{v!}$$

$$= \left[\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)^0 (-x)^N\binom{N}{0} + \left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)^1 (-x)^{N-1}\binom{N}{1} + \cdots\right.$$

$$\left. + \left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right)^N (-x)^{N-N}\binom{N}{N}\right] K_n{}^{(v)}\big(x, 0, \alpha_n\psi_n(0)\big)\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{v!}$$

$$T_{N,n}(x) = (-x)^N + \binom{N}{1}L_n(t, x)(-x)^{N-1} + \binom{N}{2}L_n(t^2, x)(-x)^{N-2} + \cdots$$

$$+ \binom{N}{N-1}L_n(t^{N-1}, x)(-x)^{N-1} + \binom{N}{N}L_n(t^N, x) \tag{3.63}$$

eşitliği geçerlidir.

Lemma 3.5.1 de ($j = 1,2, \ldots, (N-1)$ olmak üzere) t^N yerine x^j alınarak $\big(n^2\psi_n(0)\big)^{j-N}$ çarpanı elde edilir.

Böylece $n \to \infty$ için $L_n(f, x)$ operatörleri 0'a yakınsar. (3.63) eşitliğinde x^N parantezine alınırsa

$$x^N\left[(-1)^N + \binom{N}{1}(-1)^{N-1} + \binom{N}{2}(-1)^{N-2} + \cdots + \binom{N}{N-1}(-1) + \binom{N}{N}\right]$$

$$= x^N \sum_{k=0}^{N} (-1)^{N-k} \binom{N}{k} = 0$$

eşitliği geçerlidir. $T_{N,n}(x)$ de bazı ℓ sabitleri için $\left(\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)^{\ell}$ terimleri sabit olmak üzere $n^2\psi_n(0) \to \infty$ olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 3.5.1

$f \in C_{2m}^0$ ve $\omega(f,\delta)_{2m}$ bu fonksiyonların ağırlıklı süreklilik modülü olsun. Bu durumda yeterince büyük n'ler için

$$\sup_{x \geq 0} \frac{|L_n(f,x) - f(x)|}{(1 + x^{2m})(1 + x^{2m+1})} \leq \widetilde{c_m}\omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n^2\psi_n(0)}}\right)_{2m}$$

eşitsizliği geçerlidir (Coşkun 2012).

Kanıt

$$P_{v,n}(x) = K_n^{(v)}\big(x, 0, \alpha_n\psi_n(0)\big)\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{v!}$$

olarak tanımlansın. Operatörün tanımı gereği

$L_n(1,x) = 1$ olduğundan $P_{v,n}(x) \geq 0$ olur. Böylece

$$|L_n(f,x) - f(x)| \leq \sum_{v=0}^{\infty} \left| f\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right) - f(x) \right| P_{v,n}(x) \tag{3.64}$$

eşitsizliği geçerlidir. Gerçekten

$$|L_n(f,x) - f(x)| = |L_n(f,(t) - f(x) + f(x), x) - f(x)|$$

$$= |\, L_n(f(t) - f(x), x) + L_n(f(x), x) - f(x)|$$

$$= |L_n(f(t) - f(x), x) + f(x)(L_n(1,x) - 1|$$

$$\leq |L_n(f(t) - f(x), x) + |f(x)||\,(L_n(1,x) - 1|$$

$$\leq L_n(|(f(t) - f(x)\,|, x) + |f(x)||\,(\,1 - 1|$$

$$= L_n(|(f(t) - f(x)\ |, x)|$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \left| f\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right) - f(x) \right| K_n{}^{(v)}\big(x, 0, \alpha_n\psi_n(0)\big) \frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^v}{v!}$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \left| f\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right) - f(x) \right| P_{v,n}(x)$$

olacaktır. Süreklilik modülünün

$$|f(t) - f(x)| \leq\ 2^{2m}(1 + x^{2m})(1+|t - x|^{2m})(1+\frac{|t-x|}{\delta})(1+\delta^{2m})\ \omega(\mathrm{f}, \delta\ )_{2m}$$

özelliği gereği *t* yerine $\frac{v}{n^2\psi_n(0)}$ alınırsa, δ_n pozitif sayı dizisi olmak üzere

$$\left| f\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}\right) - f(x) \right| \leq\ 2^{2m}(1+x^{2m})(1+\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)} - x\right|^{2m})$$

$$\times(1+\frac{\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)} - x\right|}{\delta_n})(1+\delta_n{}^{2m})\ \omega(\mathrm{f}, \delta_n\ )_{2m} \tag{3.65}$$

eşitsizliği bulunur. (3.65) eşitsizliğine Hölder eşitsizliği uygulanırsa; (3.64) ve (3.65) eşitsizliklerinden

$$|L_n(f, x) - f(x)| \leq \sum_{v=0}^{\infty} 2^{2m}\ (1 +\ x^{2m})\ (1 + \left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)} - x\right|^{2m})(1 + \frac{\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)} - x\right|}{\delta_n})$$

$$\times\ (1 + \delta_n{}^{2m})\ \omega(\mathrm{f}, \delta_n\ )_{2m} P_{v,n}(x)$$

her iki taraf $1 + x^{2m}$ e bölünürse Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\frac{|L_n(f, x) - f(x)|}{1 + x^{2m}} \leq 2^{2m}(1 + \delta_n{}^{2m})\ \omega(\mathrm{f}, \delta_n\ )_{2m} \sum_{v=0}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)} - x\right)^{2m}\right)$$

$$\times \left(1 + \frac{\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)} - x\right|}{\delta_n}\right) P_{v,n}(x)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\sum_{v=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{2m}\right]\left[1+\frac{\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|}{\delta_n}\right]P_{v,n}(x)=$$

$$=\sum_{v=0}^{\infty}\left(1+\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|\frac{1}{\delta_n}+\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{2m}+\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{2m}\frac{\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|}{\delta_n}\right)P_{v,n}(x)$$

$$=\sum_{v=0}^{\infty}P_{v,n}(x)+\sum_{v=0}^{\infty}P_{v,n}(x)\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|\frac{1}{\delta_n}+\sum_{v=0}^{\infty}P_{v,n}(x)\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{2m}$$

$$+\sum_{v=0}^{\infty}P_{v,n}(x)\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{2m}\frac{\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|}{\delta_n}$$

$$=1+\sum_{v=0}^{\infty}P_{v,n}(x)\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|\frac{1}{\delta_n}+T_{2m}(x)+\sum_{v=0}^{\infty}P_{v,n}(x)\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{2m}\frac{\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|}{\delta_n}$$

$$=1+T_{2m}(x)+\sum_{v=0}^{\infty}P_{v,n}(x)\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|\frac{1}{\delta_n}+\sum_{v=0}^{\infty}P_{v,n}(x)\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{m}$$

$$\times\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{m+1}\frac{1}{\delta_n}$$

$$=1+T_{2m}(x)+\left[\sum_{v=0}^{\infty}P_{v,n}{}^{2}(x)\left|\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right|^{2}\right]^{\frac{1}{2}}1\frac{1}{\delta_n}$$

$$+\left[\sum_{v=0}^{\infty}P_{v,n}{}^{2m}(x)\left(\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{m}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{v=0}^{\infty}P_{v,n}{}^{2m}(x)\left(\left(\frac{v}{n^2\psi_n(0)}-x\right)^{m+1}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Dolayısıyla

$$\left[\sum_{v=0}^{\infty}P^{-1-4m}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\delta_n}\leq 1+T_{2m}(x)+T_2^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\delta_n}+T_{2m}^{\frac{1}{2}}T_{2m+2}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\delta_n}$$

bulunur. Lemma 3.5.2 yardımıyla

$$\frac{|L_n(f,x)-f(x)|}{1+x^{2m}} \le$$

$$2^{2m}(1+{\delta_n}^{2m})\ \omega(\mathrm{f},\delta_n)_{2m}\left\{1+(x+\cdots+x^{2m})\frac{1}{n^2\psi_n(0)}+\frac{1}{\delta_n}(x+x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{\frac{1}{2}}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\delta_n}(x+\ldots+x^{2m+2})^{\frac{1}{2}}(x+\cdots+x^{2m})^{\frac{1}{2}}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right\}$$

eşitsizliği geçerli olduğundan

$\delta_n=\sqrt{\frac{1}{n^2\psi_n(0)}}$ seçilirse $n\to\infty$ için $\delta_n\to 0$ olur ve böylece yeterince büyük n'ler için $\delta_n<1$ olacaktır. Dolayısıyla

$$\frac{|L_n(f,x)-f(x)|}{1+x^{2m}} \le 2^{2m}\left(1+\left(\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)^m\right)\omega\left(f,\frac{1}{\sqrt{n^2\psi_n(0)}}\right)_{2m}$$

$$\left\{1+(x+\cdots+x^{2m})\frac{1}{n^2\psi_n(0)}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2\psi_n(0)}})}(x+x^2)\frac{1}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^{\frac{1}{2}}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2\psi_n(0)}})}(x+\ldots+x^{2m+2})^{\frac{1}{2}}(x+\cdots+x^{2m})^{\frac{1}{2}}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right\}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece

$$\frac{|L_n(f,x)-f(x)|}{(1+x^{2m})(1+x^{2m+1})} \le 2^{2m+1}(5+4m)\omega\left(f,\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)_{2m}$$

olup $\widetilde{C_m}:=2^{2m+1}(5+4m)$ seçilirse supremum tanımından ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 3.5.2

Özel olarak $m=1$ durumu göz önüne alınacak olursa Teorem 3.5.1 deki eşitsizlik

$$\begin{matrix} sup \\ x\ge 0\end{matrix}\frac{|L_n(f,x)-f(x)|}{(1+x^2)(1+x^3)} \le \check{c},\ \omega\left(f,\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)_2$$

şekline dönüşür. Burada

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \infty$$

dizisi için

$$(1 + x^2)(1 + x^3) < (1 + x^2)^3$$

sağlandığından

$$\sup_{x \in [0,\gamma_n]} \frac{|L_n(f,x) - f(x)|}{(1 + x^2)(1 + x^3)} \leq \breve{c},\ \omega\left(f, \frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)_2$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlik Gadjiev and Ispir (1999) daki eşitsizlikten daha iyi yaklaşım yapabilecek bir eşitsizliktir (Coşkun 2012).

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Gadjiev-İbragimov sınıfından bazı operatörlerin Korovkin Tipi teoremler yardımıyla yaklaşım özellikleri, yaklaşım hızları ile ilgili literatürde bugüne kadar yapılmış olan bazı çalışmalar incelenmiş ve bu konular hakkında detaylı bir derleme çalışması yapılmıştır.

Bu tezde verilen sonuçlar ve bilgiler ileri araştırmalar için muhtemel açık problemleri ortaya koyacaktır. Gadjiev-İbragimov operatörlerinin kullanılması yardımıyla hazırlanan bu çalışma, yeni araştırmacılar tarafından, başka operatörler kullanarak yapılacak çalışmalara yol gösterici niteliktedir.

KAYNAKLAR

Aral A (2003) Approximation by Ibragimov-Gadjiev Operators in Polynomial Weighted Space. *Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan*, XIX: 35-44.

Aral A (2005) The Kantorovich Form of Ibragimov-Gadjiev Operators. *Proceedings of the 8th WSEAS International Conference on Applied Mathematics*, 16-18 December 2005, Tenerife, Spain, 205-210.

Coşkun E (2002) *Analiz I.* 1.Basım, ISBN: 975-6674-06-7, Alp Yayınevi, Ankara, 349 s.

Coşkun T (1997) Some Properties of Linear Positive Operators in the Weighted Spaces of Unbounded Functions. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series*, 47: 175-191.

Coşkun T (1998) Some Properties of Linear Positive Operators in the Weighted Spaces of Unbounded Functions. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1*, 47: 175-181.

Coşkun T (2003) Weighted Approximation of Unbounded Continuous Functions by Sequences of Linear Positive Operators. *Indian J. pure appl. Math.*, 34 (3): 477-485.

Coşkun T (2012) On the Order of Weighted Approximation of by Sequences of Positive Linear Operators. *Turk J Math.*, 36: 113-120.

Doğru O (1997a) On the Order of Approximation of Unbounded Functions of the Family of Generalized Linear Operators. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1*, 46: 173-181.

Doğru O (1997b) Sürekli Fonksiyonlara Yakınsayan Lineer Pozitif Operatör Aileleri. *Doktora Tezi*, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara, 70 s.

Gadjiev A D and Ibragimov I I (1970) On a Sequence of Linear Positive Operators. *Sov. Math. Dokl.*, 11(4): 1092-1095.

Gadjiev A D (1976) On P. P. Korovkin type theorems. *Mathem. Zametki*, 20 (5): 995-998.

Gadjiev A D and Ispir N (1999) On a Sequence of Linear Positive Operators in Weighted Spaces. *Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan AS*, XI (XIX): 45-56.

Gönül N (2012) Sürekli ve Yerel İntegrallenebilir Fonksiyonlar Uzayında Doğrusal Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. *Doktora Tezi*, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Zonguldak, 116 s.

Gönül N and Coşkun E (2013) Approximation with Modified Gadjiev-Ibragimov Operators in $C[0,A]$. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 15 (5): 868-880.

Hacısalihoğlu H ve Hacıyev A (1995) *Doğrusal Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*. A. Ü. F. F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara, 100 s.

Korovkin P P (1960) Linear Operators and Approximation Theory. *Hindustan Publishing Corp.*, 219: 1-20.

Ispir N, Aral A and Doğru O (2008) On Kantorovich Process of a Sequence of the Generalized Linear Positive Operators. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 29 (5-6): 574-589.

Szasz O (1950) Generalization of Bernstein's Polynomials to the Infinite Interval. *J. Research of the Nat. Bureau of Stand*, 45: 239-245.

BİBLİYOGRAFYA

Agratini O (2001) An Approximation Process of Kantorovich Type. *Mathematical Notes (Miskolc)*, 2 (1): 3- 10.

Aral A and Doğru 0 (2004) Direct Estimates an Lp- Approximation Properties for Generalized Meyer-König and Zeller Operators and Their İntegral Form. *Int. Jour of Compt. Num Anal and Appl.*, 5 (2): 173-187.

Bojanic R and Khan M K (1991) Rate of Convergence of Some Operators of Functions with Derivatives of Bounded Variation. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 39: 495-512.

Campiti M and Metafune M (1996) L_p Convergence of Berstein-Kantorovich Type Operators. *Anal. Polon. Math.*, LXII (3): 273-280.

Doğru O (1997) On a Certain Family Linear Positive Operators. *Tr. J. of Math.*, 21: 337-389.

Gadjiev A D (1974) The Convergence Problem for a Sequence of Positive Linear Operators on Unbounded Sets and Theorems Analogous To That of P. P. Korovkin Engl. Translated. *Sov. Math. Dokl.*, 15: 1433-1436.

Gadjiev A D and Aral A (2007) Weighted Lp-Approximation with Positive Operators on Unbounded Sets. *Appl. Math. Lett*, 20: 1046-1051.

Gupta V, Vasishtha V and Gupta M K (2003) Rate of Convergence of Summation-Integral Type Operators with Derivatives of Bounded Varition. *J. Inequal. Pure. Appl. Math.*, 4: 1-8.

Gupta V, Abel U and Ivan M (2005) Rate of Convergence of Beta Operators of Second Kind for Functions with Derivatives of Bounded Varition. *Int. J. Math. Sci. (IJMMS),* 200: 3827-3833.

Powierska M (2002) On Smoothness and Approximation Properties of Kantorovich Type Operators. *Domenstratio Math.*, XXXV (4).

Pych-Taberska P (1997) Pointwise Approximation of Absolutely Continuous Functions by Certain Linear Operators. *Funct. Approx. Comment. Math.*, 25: 67-76.

Radatz D and Wood B (1978) Approximation Derivatives of Unbounded Functions on Positive Axis with Linear Operators. *Rev. Roun. Math. Pures et Appl.*, XXIII (5): 771-781.

ÖZGEÇMİŞ

Sevda CEBECİK 1979'da Karabük'te doğdu. İlk ve orta öğrenimini Yenice-Karabük'te tamamladı. 1997 yılında Bolu Anadolu Öğretmen Lisesinden mezun oldu. 2001 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi matematik öğretmenliği bölümünü bitirdi. Mezun olduğu yıl Yenice Çok Programlı Lisesine atandı. 2010 yılında atandığı Yenice Anadolu Lisesinde matematik öğretmeni olarak görevine devam etmektedir.

2013 yılında girdiği BEÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programını sürdürmektedir.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Atatürk Mahallesi Cami Sokak No:14
Yenice/KARABÜK
Tel : 0 (370) 7661632
E-posta : sevdacebecik@hotmail.com