BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK VE HİPERHARMONİK FİBONACCİ SAYILARI VE UYGULAMALARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

CAN KIZILATEŞ

HAZİRAN 2016

BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK VE HİPERHARMONİK FİBONACCİ SAYILARI VE UYGULAMALARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Can KIZILATEŞ

DANIŞMAN : **Yrd. Doç. Dr. Seyhun KESİM**

İKİNCİ DANIŞMAN : **Doç. Dr. Naim TUĞLU**

ZONGULDAK

Haziran 2016

KABUL:

Can KIZILATEŞ tarafından hazırlanan "Harmonik ve Hiperharmonik Fibonacci Sayıları ve Uygulamaları" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir.02./06./2016

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Seyhun KESİM ....
Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

İkinci Danışman: Doç. Dr. Naim TUĞLU ....
Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Prof. Dr. Dursun TAŞCI ....
Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. Ayşe NALLI ....
Karabük Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Yrd. Doç. Dr. Melih GÖCEN ....
Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. ..../..../2016

Prof. Dr. Baki HAZER
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Can KIZILATEŞ

ÖZET

Doktora Tezi

HARMONİK VE HİPERHARMONİK FİBONACCİ SAYILARI VE UYGULAMALARI

Can KIZILATEŞ

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Seyhun KESİM
İkinci Danışman: Doç. Dr. Naim TUĞLU
Haziran 2016, 45 sayfa

Bu tezde, harmonik Fibonacci ve hiperharmonik Fibonacci sayıları tanımlanmıştır. Fark operatör yöntemi kullanılarak harmonik Fibonacci sayılarını içeren çeşitli toplam formülleri elde edilmiştir. Hiperharmonik Fibonacci sayıları için toplamsal özdeşlikler verilmiştir. Elemanları harmonik Fibonacci ve hiperharmonik Fibonacci olan circulant ve r-circulant matrislerin Euclidean ve spektral normları hesaplanmış ve bu normlar için bazı nümerik sonuçlar bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Harmonik sayılar, hiperharmonik sayılar, harmonik Fibonacci sayıları, hiperharmonik Fibonacci sayıları, fark operatörü, Euclidean norm, spektral norm

Bilim Kodu: 403.01.01

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

HARMONIC AND HYPERHARMONIC FIBONACCI NUMBERS AND APPLICATIONS

Can KIZILATEŞ

Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Seyhun KESİM
Co-Advisor: Assoc. Prof. Dr. Naim TUĞLU
June 2016, 45 pages

In this thesis, harmonic Fibonacci and hyperharmonic Fibonacci numbers are defined. Several sum formulas for the harmonic Fibonacci numbers are obtained by using the difference operator method. Additive identities of the hyperharmonic Fibonacci numbers are given. Euclidean and spectral norms of circulant and *r*-circulant matrices with the harmonic Fibonacci and hyperharmonic Fibonacci numbers are calculated and some numerical results are found for these matrix norms.

Keywords: Harmonic numbers, hyperharmonic numbers, harmonic Fibonacci numbers, hyperharmonic Fibonacci numbers, difference operator, Euclidean norm, spectral norm.

Science Code: 403.01.01

TEŞEKKÜR

Doktora boyunca yakın ilgi ve desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Seyhun KESİM'e teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım boyunca beni yönlendiren ve her safhasında bilgisine başvurduğum yüksek lisans tez danışmanım aynı zamanda doktora da ikinci danışmanım değerli hocam Sayın Doç. Dr. Naim TUĞLU'ya teşekkürü bir borç bilirim. Görüş ve önerileri ile beni yönlendiren ve desteğini hiç esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Dursun TAŞCI'ya, doktora tez aşaması süresince yardımlarını ve ilgilerini esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Ayşe NALLI'ya teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Çalışma hayatım boyunca bana manevi desteğini hiç esirgemeyen çalışma arkadaşım ve kardeşim Arş. Gör. Emrah POLATLI'ya sevgilerimi ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Beni dünyaya getiren, bugünlere gelmemde büyük emekleri olan, yaşama sebeplerim babam Zakif KIZILATEŞ ve annem Gülay KIZILATEŞ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca daima yanımda olan canım kardeşlerim Canan KIZILATEŞ ve Candan KIZILATEŞ'e teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak bu tezi dedem Sürmeli KIZILATEŞ ve babaannem Pembe KIZILATEŞ'in anısına ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

H_n	: n. Harmonik sayı
$H_n^{(r)}$	: r. mertebeden n. Hiperharmonik sayı
Δ	: Fark operatörü
$\sum$	: Ters fark operatörü
F_n	: n. Fibonacci sayısı
L_n	: n. Lucas sayısı
$F_n^{(r)}$	: r. mertebeden n. Hiper-Fibonacci sayısı
$L_n^{(r)}$	: r. mertebeden n. Hiper-Lucas sayısı
$\mathbb{F}_n$	: n. Harmonik Fibonacci sayısı
$\mathbb{F}_n^{(r)}$	: r. mertebeden n. Hiperharmonik Fibonacci sayısı
$\binom{n}{k}$	: Binomiyel katsayı
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$	: Birinci çeşit Stirling sayısı
$\lVert \cdot \rVert_E$	: Euclidean normu
$\lVert \cdot \rVert_2$	: Spektral normu
A^H	: A matrisinin transpozunun eşleneği

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Harmonik sayılar ve genelleştirilmiş harmonik sayılar bilgisayar biliminde algoritmaların analizinde, temel parçacık fiziğinde ve teorik fizik gibi alanlarda kullanılmaktadır. Harmonik sayılar birçok matematikçi tarafından çalışılan sayılar teorisinin de önemli bir konusudur. Bu sayılar, harmonik seriler ve Riemann Zeta fonksiyonu ile doğrudan ilişkilidir. Ayrıca harmonik sayılar özel tanımlı fonksiyonlarla ilgili birçok yerde karşımıza çıkmaktadır. 1737 yılında Leonhard Euler asal sayıların sonsuz sayıda olduğunun farklı bir ispatı için bu serilerin ıraksaklığını kullanmıştır. 1859 yılında ise Riemann, Euler' in çalışmasını kompleks düzleme genişletmiş ve Riemann hipotezi olarak adlandırılan hipotezin temelini oluşturmuştur [1].

Bu sayıların çeşitli özellikleri ve genelleştirmeleri birçok araştırmacı tarafından çalışılmaktadır. Graham ve arkadaşları, harmonik sayılar içeren birçok toplamı fark operatörü yöntemi ile göstermişlerdir [2]. Spivey de sonlu fark metodu ile bazı özel sayı dizileri için toplamsal eşitlikler elde etmiştir. Dahası harmonik sayıların binomiyel transformu ve alterne binomial transformunu hesaplamıştır [3]. Conway ve Guy ise harmonik sayıların bir genelleştirmesi olan hiperharmonik sayıları tanımlamış ve bu sayıların harmonik sayılar cinsinden yazılabileceğini göstermişlerdir [4]. Benjamin ve arkadaşları hiperharmonik sayılar içeren toplamları, harmonik ve hiperharmonik sayılar cinsinden elde etmişlerdir [5]. Bahsi ve Solak ise elemanları hiperharmonik sayılar olan bir matris tanımlayıp, bu matris ile Pascal matrisi arasındaki ilişkiyi elde etmişlerdir. Ayrıca bu matrisin determinantını hesaplamışlardır [6]. Harmonik sayıların literatürde $q-$genelleştirmesi de mevcuttur. Dilcher, harmonik sayıların iki farklı $q-$benzerini tanımlamıştır [7]. Mansour ve arkadaşları, harmonik sayılar içeren çeşitli toplamların $q-$benzerini vermişlerdir [8]. Mezö, klasik harmonik sayıların üç farklı $q-$benzerini incelemiştir [9]. Mansour ve Shattuck ise hiperharmonik sayıların $q-$benzerini tanımlamış ve bu sayıların bilinen özelliklerinin $q-$benzerini vermişlerdir [10]. Ayrıca Kızılateş ve Tuğlu $q-$fark operatörünü kullanarak, harmonik ve hiperharmonik sayıların $q-$benzerlerinin çeşitli toplamsal özelliklerini elde etmişlerdir [32]. Burada özellikle $q \to 1^-$ iken elde edilen özelliklerin bilinen özelliklere dönüşmesi bu sayıların genişletilmesine katkı sağlamıştır. Hiperharmonik sayıların reküransına benzer olarak Dil ve Mező tarafından Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren hiper-Fibonacci ve hiper-Lucas sayıları tanımlanmıştır [13]. Ayrıca bu sayıların üreteç fonksiyonları, rekürans bağıntıları ve çeşitli kombinatorik özellikleri elde edilmiştir. Diğer taraftan bu tür özel sayıları içeren matrislerin normları üzerinde çok sayıda araştırma yapılmıştır. Solak, elemanları Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan circulant matrislerin spektral normları için sınırlar elde etmiştir [17]. Koçer ve arkadaşları, elemanları Horadam sayıları olan circulant ve semicirculant matrislerin normlarını hesaplamışlardır [18]. Zhou ve arkadaşları da elemanları binomiyel katsayılar ve harmonik sayılar olan circulant matrislerin spektral normlarını elde etmişlerdir [21]. Shen ve Cen ise Fibonacci ve Lucas sayıları için circulant matrislerin genelleştirilmesi olan $r-$circulant matrislerin spektral normlarını incelemişlerdir [23]. Bahsi ve Solak ise elemanları hiper-Fibonacci ve hiper-Lucas olan circulant matrislerin spektral normlarını elde etmiş, ayrıca $r-$circulant matrislerin normları içinde sınırlar elde etmişlerdir [20].

Yukarıda belirtilen çalışmalar ışığında harmonik ve hiperharmonik Fibonacci sayıları tanımlanmıştır. Daha sonra bu sayıları içeren circulant matrislerin normları incelenmiştir. İkinci bölümde tez için gerekli olan tanımlara ve önbilgilere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ise harmonik Fibonacci sayıları tanımlanmış, bu sayıları içeren toplamsal özellikler fark operatörü metodu kullanılarak elde edilmiştir. Dördüncü bölümde harmonik Fibonacci sayısı genelleştirilerek hiperharmonik Fibonacci sayısı tanımlanmış ve bu sayılar için rekürans bağıntısı, toplam formülleri elde edilmiştir. Beşinci bölümde elamanları harmonik Fibonacci ve hiperharmonik Fibonacci sayıları olan circulant matrislerin Euclidean ve spektral normları hesaplanmıştır. Ayrıca elemanları harmonik Fibonacci ve hiperharmonik Fibonacci olan $r-$circulant matrislerin normları için sınırlar elde edilmiştir. Altıncı bölümde de beşinci bölümde elde ettiğimiz normlar için nümerik hesaplamalar yapılmıştır.

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

2.1 FİBONACCİ VE HİPER-FİBONACCİ SAYILARI

Tanım 2.1.1 F_n, *n. Fibonacci sayısı olmak üzere,* $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ *başlangıç koşulları ve her* $n \geq 1$ *doğal sayısı için Fibonacci sayıları*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır.

Çizelge 2.1 Bazı Fibonacci sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Tanım 2.1.2 L_n, *n. Lucas sayısını göstermek üzere,* $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ *başlangıç koşulları ve* $n \geq 1$ *doğal sayısı için Lucas sayıları*

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır.

Çizelge 2.2 Bazı Lucas sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

Fibonacci ve Lucas dizileri için çeşitli genelleştirmeler, birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Bu genelleştirmelerden biri Horadam tarafından, ikinci mertebeden rekürans bağıntısı için keyfi başlangıç koşulları ve keyfi katsayılar alınarak elde edilmiştir [31]. Her $n > 1$ tamsayısı ve a, b, p ve q birer tamsayı olmak üzere, $W_0 = a$ ve $W_1 = b$ başlangıç koşulları ile

$$W_n = pW_{n-1} - qW_{n-2} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Eş. (2.1) ifadesinde a, b, p ve q nun özel değerlerine göre Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas gibi birçok sayı dizisi elde edilebilir.

Tanım 2.1.3 *r pozitif tamsayı ve $F_n^{(0)} = F_n$, $F_0^{(r)} = 0$ ve $F_1^{(r)} = 1$ olmak üzere*

$$F_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} F_k^{(r-1)}$$

reküransı ile tanımlı sayıya hiper-Fibonacci sayısı denir [13].

Çizelge 2.3 Bazı hiper-Fibonacci sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_n^{(1)}$	0	1	2	4	7	12	20	33	54
$F_n^{(2)}$	0	1	3	7	14	26	46	79	133

Tanım 2.1.4 *r pozitif tamsayı ve $L_n^{(0)} = L_n$, $L_0^{(r)} = 2$ ve $L_1^{(r)} = 2r + 1$ olmak üzere*

$$L_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} L_k^{(r-1)} \tag{2.2}$$

reküransı ile tanımlı sayıya hiper-Lucas sayısı denir [13].

Çizelge 2.4 Bazı hiper-Lucas sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$L_n^{(1)}$	2	3	6	10	17	28	46	75	122
$L_n^{(2)}$	2	5	11	21	38	66	112	187	309

2.2 HARMONİK VE HİPERHARMONİK SAYILAR

Tanım 2.2.1 *n bir doğal sayı ve $H_0 = 0$ olmak üzere*

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \tag{2.3}$$

reküransı ile tanımlı H_n sayısına n. harmonik sayı denir [2].

n. harmonik sayı H_n ile birinci çeşit Stirling sayısı arasında

$$H_n = \frac{\left[{n+1 \atop 2}\right]}{n!}$$

biçiminde bir ilişki vardır [2].

Literatürde harmonik sayılar ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Örneğin Graham ve arkadaşları, harmonik sayıları içeren aşağıdaki toplamları elde etmişlerdir:

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n, \tag{2.4}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{m} H_k = \binom{n}{m+1}\left(H_n - \frac{1}{m+1}\right), \tag{2.5}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} kH_k = \frac{n^{\underline{2}}}{2}\left(H_n - \frac{1}{2}\right) \tag{2.6}$$

olup, burada $n^{\underline{2}} = n(n-1)$ ve m negatif olmayan tamsayıdır [2]. Diğer taraftan Spivey

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_k = 2^n \left(H_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}\right), \tag{2.7}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k H_k = -\frac{1}{n} \tag{2.8}$$

eşitliklerini elde etmiştir.

Harmonik sayıların çeşitli genelleştirmeleri mevcut olup, bu genelleştirmelerden biri de Conway ve Guy tarafından tanımlanan hiperharmonik sayılardır.

Tanım 2.2.2 *n ve r pozitif tamsayılar, $H_n^{(0)} = \frac{1}{n}$ ve $H_n^{(1)} = H_n$ olmak üzere*

$$H_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} H_k^{(r-1)} \tag{2.9}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlı $H_n^{(r)}$ sayısına r. mertebeden n. hiperharmonik sayı denir [4].

Benjamin ve arkadaşları, $0 \leq m \leq r-1$ biçimindeki tamsayılar için

$$H_n^{(r)} = \sum_{t=1}^{n} \binom{n+r-t-1}{r-1} \frac{1}{t}, \tag{2.10}$$

$$H_n^{(r)} = \sum_{t=1}^{n} \binom{n+r-m-t-1}{r-m-1} H_t^{(m)} \tag{2.11}$$

eşitliklerini elde etmişlerdir [5].

2.3 FARK OPERATÖR YÖNTEMİ

Tanım 2.3.1 *Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için sonlu fark operatörü*

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

biçiminde tanımlanmıştır [2].

Tanım 2.3.2 *$m \geq 0$ tamsayı olmak üzere x in m azalan kuvveti*

$$x^{\underline{m}} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1)$$

biçimindedir.

Lemma 2.3.3 *Fark operatörü için*

$$\Delta x^{\underline{m}} = m x^{\underline{m-1}}$$

eşitliği sağlanır.

Graham ve arkadaşları [2], Δ operatörünün ters operatörü $\sum$ olmak üzere, $\Delta f(x) = g(x)$

ise

$$\sum_a^b g(x)\delta_x = \sum_{x=a}^{b-1} g(x) = f(b) - f(a) \tag{2.12}$$

olduğunu ispatlamışlardır. Ayrıca ters fark operatörü $\sum$ aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\sum x^{\underline{m}}\delta_x = \begin{cases} \dfrac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}, & m \neq -1 \\ H_x, & m = -1 \end{cases} \tag{2.13}$$

ve

$$\sum_a^b u(x)\Delta v(x)\delta_x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \sum_a^b v(x+1)\Delta u(x)\delta_x. \tag{2.14}$$

Şimdi Eş. (2.14) özelliğini kullanacağımız bir örnek verelim. Eş. (2.14) ifadesinde $u(k) = H_k$ ve $\Delta v(k) = 1$ olarak seçilirse, $\Delta u(k) = \frac{1}{k+1}$ ve $v(k) = k$ olup, böylece

$$\sum_0^n H_k\delta_k = kH_k\Big|_0^n - \sum_0^n \delta_k$$

dir. Sembolik toplam ile sonlu toplam arasındaki Eş. (2.12) özelliği kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n$$

elde edilir [2].

2.4 CİRCULANT MATRİSLER VE MATRİS NORMLARI

Tanım 2.4.1 *$n \times n$ tipinden*

$$C_r = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ rc_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ rc_{n-2} & rc_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-4} & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ rc_1 & rc_2 & rc_3 & \dots & rc_{n-1} & c_0 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlı matrise $r-$*circulant matris denir,* $C_r = Circ\left(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}\right)$ *biçiminde gösterilir [29].*

$r = 1$ durumunda $C = Circ\left(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}\right)$ yani

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \ldots & c_{n-4} & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_{n-1} & c_0 \end{pmatrix}$$

circulant matrisi elde edilir.

Bir $n \times n$ tipinden Circulant matrisin özdeğerleri, birimin n. kuvvetten kökleri w^i olmak üzere $t = 0, 1, \ldots, n-1$ için

$$\lambda_t = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (w^t)^i \tag{2.16}$$

şeklindedir.

Tanım 2.4.2 *F bir cisim,* $M_{mn}(F)$ *de elemanları* F*cisminden alınan* $m \times n$ *matrislerin kümesi ve A,B* $\in M_{mn}(F)$, $\alpha \in F$ *olmak üzere*

$N1)\ \|A\| \geq 0$ *ve* $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

$N2)\ \|\alpha A\| = |\alpha|\, \|A\|$

$N3)\ \|A + B\| = \|A\| + \|B\|$

$N4)\ \|AB\| \leq \|A\|\, \|B\|$

şartlarını sağlayan

$\|.\| : M_{mn}(F) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

şeklindeki dönüşüme matris normu denir ve bir A *matrisinin normu* $\|A\|$ *ile gösterilir [33].*

Şimdi bazı matris normlarını verelim.

Tanım 2.4.3 *$m \times n$ tipinde bir matris A olmak üzere*

$$\|A\|_E = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)}$$

ifadesine A matrisinin Euclidean (Schur veya Frobenius) normu,

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1\leq i\leq n} \lambda_i(A^H A)}$$

ifadesine de A matrisinin spektral normu denir. Burada $\lambda_i(A^H A)$, $A^H A$ (veya AA^H) matrsininin özdeğerleridir [30].

Lemma 2.4.4 *A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ olsun. A matrisi normal matris ise $A^H A$ matrisinin özdeğerleri $|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \ldots, |\lambda_n|^2$ dir [30].*

Tanım 2.4.5 *$m\times n$ tipinden iki matris $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ olsun. Elemanları $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ şeklinde tanımlanan $m \times n$ tipinden $C = [c_{ij}]$ matrisine A ve B matrislerinin Hadamard çarpımı denir ve $C = A \circ B$ ile gösterilir [25].*

Tanım 2.4.6 *A $m \times n$ tipindeki bir matris olsun. A matrisinin satırlarının veya sütunlarının Euclidean uzunluklarının maksimumu sırasıyla $i = 1, 2, \ldots, m$ ve $j = 1, 2, \ldots, n$ için*

$$r_1(A) = \max_{1\leq i\leq m} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}, \tag{2.17}$$

$$c_1(B) = \max_{1\leq j\leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |b_{ij}|^2} \tag{2.18}$$

şeklinde tanımlanır [25].

Lemma 2.4.7 *A ve B matrisleri $m \times n$ mertebeli matrisler olsun.*

$$\|A \circ B\|_2 \leq r_1(A)c_1(B) \tag{2.19}$$

eşitsizliği geçerlidir [25].

Lemma 2.4.8 *A matrisi $m \times n$ tipinde olmak üzere*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_E \,, \tag{2.20}$$

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_E \leq \sqrt{n} \, \|A\|_2 \tag{2.21}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [25].

BÖLÜM 3

HARMONİK FİBONACCİ SAYILARI

Bu bölümde harmonik Fibonacci sayıları tanımlanacaktır. Daha sonra fark operatörü yöntemi kullanarak harmonik Fibonacci sayılarını içeren çeşitli toplamlar ve özellikler elde edilecektir.

Tanım 3.1.1 *n. Fibonacci sayısı F_n olmak üzere*

$$\mathbb{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_k} \tag{3.1}$$

reciprokal Fibonacci sayılarının toplamına n. harmonik Fibonacci sayısı denir.

Çizelge 3.1 Bazı harmonik Fibonacci sayıları

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{F}_n$	1	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{91}{30}$	$\frac{379}{120}$	$\frac{5047}{1560}$	$\frac{35849}{10920}$	$\frac{614893}{185640}$	$\frac{6800951}{2042040}$

Burada hemen belirtelim ki Barriol tarafından 1906 da

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{F_k} = 3,3598856662\ldots$$

olarak bulunmasına rağmen, literatürde bu serinin kismi toplamlar dizisi olan $\mathbb{F}_n$ sayısının kapalı formu bulunmamaktadır. Dolayısıyla kapalı formu bulunmayan $\mathbb{F}_n$ sayısını içeren çeşitli sonuçları elde edeceğiz. Bu sonuçların ispatı için fark operatör yöntemine ait Eş. (2.14) özelliği kullanılacaktır.

Teorem 3.1.2 *n. harmonik Fibonacci sayısı $\mathbb{F}_n$ olmak üzere*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{F}_k = n\mathbb{F}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{F_{k+1}} \tag{3.2}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eş. (2.14) ifadesinde $u(k) = \mathbb{F}_k$ ve $\Delta v(k) = 1$ olarak seçilirse $\Delta u(k) = \dfrac{1}{F_{k+1}}$ ve $v(k) = k$ olup,

$$\sum_0^n \mathbb{F}_k \delta_k = k\mathbb{F}_k\Big|_0^n - \sum_0^n \frac{k+1}{F_{k+1}}\delta_k$$

elde edilir. Sembolik toplam ile sonlu toplam arasındaki Eş. (2.12) özelliği kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{F}_k = n\mathbb{F}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{F_{k+1}}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.3 *n. harmonik Fibonacci $\mathbb{F}_n$ sayısı olmak üzere*

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\mathbb{F}_k)^2 = n\mathbb{F}_n^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{F_{k+1}}\left(2\mathbb{F}_k + \frac{1}{F_{k+1}}\right) \tag{3.3}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eş. (2.14) ifadesinde $u(k) = \mathbb{F}_k^2$ ve $\Delta v(k) = 1$ olarak seçilirse $\Delta u(k) = \frac{1}{F_{k+1}}\left(2\mathbb{F}_k + \frac{1}{F_{k+1}}\right)$ ve $v(k) = k$ olup, böylece

$$\sum_0^n (\mathbb{F}_k)^2 \delta_k = k\mathbb{F}_k^2\Big|_0^n - \sum_0^n \frac{k+1}{F_{k+1}}\left(2\mathbb{F}_k + \frac{1}{F_{k+1}}\right)\delta_k$$

dir. Sembolik toplam ile sonlu toplam arasındaki Eş. (2.12) özelliği kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\mathbb{F}_k)^2 = n\mathbb{F}_n^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{F_{k+1}}\left(2\mathbb{F}_k + \frac{1}{F_{k+1}}\right)$$

bulunur.

Teorem 3.1.4 *n. harmonik Fibonacci sayısı $\mathbb{F}_n$ ve m negatif olmayan tamsayı olmak üzere*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{m}\mathbb{F}_k = \binom{n}{m+1}\mathbb{F}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+1}{m+1}\frac{1}{F_{k+1}} \tag{3.4}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $u(k) = \mathbb{F}_k$ ve $\Delta v(k) = \binom{k}{m}$ olarak alınırsa, $\Delta u(k) = \dfrac{1}{F_{k+1}}$ ve $v(k) = \binom{k}{m+1}$ elde edilir. Buradan Eş. (2.14) ve Eş. (2.12) kullanılırsa

$$\sum_{0}^{n} \binom{k}{m} \mathbb{F}_k \delta_k = \binom{k}{m+1} \mathbb{F}_k \Big|_0^n - \sum_{0}^{n} \binom{k+1}{m+1} \frac{1}{F_{k+1}} \delta_k,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{m} \mathbb{F}_k = \binom{n}{m+1} \mathbb{F}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+1}{m+1} \frac{1}{F_{k+1}}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.5 *n. harmonik Fibonacci sayısı $\mathbb{F}_n$ ve m negatif olmayan tamsayı olmak üzere*

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{m}} \mathbb{F}_k = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1} \mathbb{F}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^{\underline{m+1}}}{m+1} \frac{1}{F_{k+1}} \tag{3.5}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eş. (2.14) ifadesinde $u(k) = \mathbb{F}_k$ ve $\Delta v(k) = k^{\underline{m}}$ olarak alalım. $\Delta u(k) = \dfrac{1}{F_{k+1}}$, $v(k) = \dfrac{k^{\underline{m+1}}}{m+1}$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{m}} \mathbb{F}_k = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1} \mathbb{F}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^{\underline{m+1}}}{m+1} \frac{1}{F_{k+1}}$$

elde edilir.

Eş. (3.5) ifadesinde $m = 0$ seçilirse, Eş. (3.2) elde edilir. Eğer $m = 1$ seçilirse Eş. (3.4) ün bir özel hali elde edilir.

Sonuç 3.1.6 *n. harmonik Fibonacci sayısı $\mathbb{F}_n$ olmak üzere*

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \mathbb{F}_k = \frac{n^{\underline{2}}(2n-1)}{6} \mathbb{F}_n - \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^{\underline{2}}(2k+1)}{F_{k+1}}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eş. (3.5) ifadesinde sırasıyla $m = 2$ ve $m = 1$ alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \mathbb{F}_k = \frac{n^{\underline{2}}(2n-1)}{6} \mathbb{F}_n - \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^{\underline{2}}(2k+1)}{F_{k+1}}$$

bulunur.

Şimdi aşağıdaki teoremde harmonik sayılar ile harmonik Fibonacci sayıları arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

Teorem 3.1.7 *H_n ve $\mathbb{F}_n$ sırasıyla n. harmonik sayısı ve n. harmonik Fibonacci sayısı olmak üzere*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbb{F}_k}{k+1} = H_n \mathbb{F}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_{k+1}}{F_{k+1}} \tag{3.6}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eş. (2.14) ifadesinde $u(k) = \mathbb{F}_k$ ve $\Delta v(k) = \dfrac{1}{k+1}$ seçilirse $\Delta u(k) = \dfrac{1}{F_{k+1}}$, $v(k) = H_k$ elde edilir. Buradan

$$\sum_0^n \frac{\mathbb{F}_k}{k+1} \delta_k = H_k \mathbb{F}_k \Big|_0^n - \sum_0^n \frac{H_{k+1}}{F_{k+1}} \delta_k$$

olup Eş. (2.12) özelliğinden

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbb{F}_k}{k+1} = H_n \mathbb{F}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_{k+1}}{F_{k+1}}$$

bulunur.

Sonuç 3.1.8 *Birinci çeşit Stirling sayısı ile harmonik Fibonacci sayısı arasında*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbb{F}_k}{k+1} = \frac{\left[{n+1 \atop 2}\right]}{n!} \mathbb{F}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left[{k+2 \atop 2}\right]}{(k+1)! F_{k+1}}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eş. (3.6) ifadesinde $H_n = \frac{\left[{n+1 \atop 2}\right]}{n!}$ olarak alınırsa yukarıdaki eşitlik elde edilir.

Fibonacci sayısı ile harmonik Fibonacci sayısı arasındaki ilişkiyi veren toplamsal özellik aşağıdaki teoremde verilecektir.

Teorem 3.1.9 *n. harmonik Fibonacci sayısı $\mathbb{F}_n$ olmak üzere*

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_{k-1}\mathbb{F}_k = F_n\mathbb{F}_n - n \tag{3.7}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eş. (2.14) ifadesinde $u(k) = \mathbb{F}_k$ ve $\Delta v(k) = F_{k-1}$ olarak seçilirse $\Delta u(k) = \dfrac{1}{F_{k+1}}$, $v(k) = F_k$ elde edilir. Buradan

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_{k-1}\mathbb{F}_k\delta_k = F_k\mathbb{F}_k\Big|_0^n - \sum_0^n k^{\underline{0}}\,\delta_k,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_{k-1}\mathbb{F}_k = F_n\mathbb{F}_n - n$$

elde edilir.

Örnek 3.1.10 *$n = 6$ için*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{5} F_{k-1}\mathbb{F}_k &= F_6\,\mathbb{F}_6 - 6\\ &= 8\,\frac{379}{120} - 6\\ &= \frac{289}{15}.\end{aligned}$$

BÖLÜM 4

HİPERHARMONİK FİBONACCİ SAYILARI

Bu bölümde harmonik ve hiperharmonik sayıları arasındaki ilişkiye benzer olarak, harmonik Fibonacci sayıları yardımıyla hiperharmonik Fibonacci sayıları tanımlanacaktır. Daha sonra hiperharmonik Fibonacci sayıları ile ilgili çeşitli sonuçlar elde edilecektir.

Tanım 4.1.1 *n, r pozitif tamsayılar ve n. harmonik Fibonacci sayısı $\mathbb{F}_n$ olsun. $\mathbb{F}_n^{(0)} = \dfrac{1}{F_n}$, $\mathbb{F}_0 = 0$ ve $k \geq 0$ için $\mathbb{F}_0^{(k)} = 0$ olmak üzere*

$$\mathbb{F}_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{F}_k^{(r-1)} \tag{4.1}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlı $\mathbb{F}_n^{(r)}$ sayısına r. mertebeden n. hiperharmonik Fibonacci sayısı denir.

Burada hemen belirtelim ki; $r = 1$ durumunda

$$\mathbb{F}_n^{(1)} = \mathbb{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_k}$$

harmonik Fibonacci sayıları elde edilir.

Çizelge 4.1 Bazı hiperharmonik Fibonacci sayıları

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{F}_n^{(1)}$	1	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{91}{30}$	$\frac{379}{120}$	$\frac{5047}{1560}$	$\frac{35849}{10920}$	$\frac{614893}{185640}$	$\frac{6800951}{2042040}$
$\mathbb{F}_n^{(2)}$	1	3	$\frac{11}{2}$	$\frac{25}{3}$	$\frac{341}{30}$	$\frac{581}{40}$	$\frac{13853}{780}$	$\frac{76597}{3640}$	$\frac{22067}{9282}$	$\frac{56535691}{2042040}$
$\mathbb{F}_n^{(3)}$	1	4	$\frac{19}{2}$	$\frac{107}{6}$	$\frac{146}{5}$	$\frac{1749}{40}$	$\frac{95917}{1560}$	$\frac{90121}{1092}$	$\frac{661397}{6188}$	$\frac{274796701}{2042040}$
$\mathbb{F}_n^{(4)}$	1	5	$\frac{29}{2}$	$\frac{97}{3}$	$\frac{923}{15}$	$\frac{12631}{120}$	$\frac{6503}{39}$	$\frac{90735}{364}$	$\frac{550973}{1547}$	$\frac{1002081061}{2042040}$

Şimdi hiperharmonik Fibonacci sayılarının çeşitli özelliklerinin ispatında kullanacağımız rekürans bağıntısını verelim.

Lemma 4.1.2 *n, r pozitif tamsayıları için hiperharmonik Fibonacci sayılarının rekürans bağıntısı*

$$\mathbb{F}_n^{(r)} = \mathbb{F}_n^{(r-1)} + \mathbb{F}_{n-1}^{(r)} \tag{4.2}$$

şeklindedir.

İspat. Eş. (4.1) ifadesinden

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_n^{(r)} &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{F}_k^{(r-1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{F}_k^{(r-1)} + \mathbb{F}_n^{(r-1)} \\ &= \mathbb{F}_{n-1}^{(r)} + \mathbb{F}_n^{(r-1)}.\end{aligned}$$

elde edilir.

Hiperharmonik sayıların Eş. (2.10) ile belirtilen özelliğe benzer olarak hiperharmonik Fibonacci sayıları için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1.3 *$1 \leq i, j \leq n$ tamsayıları için*

$$\mathbb{F}_{n-i+1}^{(j)} = \sum_{k=i}^{n} \binom{n-k+j-1}{j-1} \frac{1}{F_{k-i+1}} \tag{4.3}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Hiperharmonik Fibonacci sayılarının tanımından

$$\mathbb{F}_{n-i+1}^{(j)} = \sum_{k=1}^{n-i+1} \mathbb{F}_k^{(j-1)}$$

olup, bu eşitliğe Eş. (4.1) ifadesi $(j-1)$ kez uygulandığında

$$\mathbb{F}_{n-i+1}^{(j)} = \sum_{k_j=1}^{n-i+1} \sum_{k_{j-1}=1}^{k_j} \cdots \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{F_{k_1}}$$

elde edilir. İspatı tamamlamak için

$$\sum_{k_j=1}^{n-i+1}\sum_{k_{j-1}=1}^{k_j}\cdots\sum_{k_1=1}^{k_2}\frac{1}{F_{k_1}}=\sum_{k=i}^{n}\binom{n-k+j-1}{j-1}\frac{1}{F_{k-i+1}}$$

eşitliğini göstermek yeterlidir. Bu eşitliği n üzerinden tümevarım ile ispatlayalım. $n=1$ için bu eşitlik doğru olup, n $(n>1)$ için doğruluğunu kabul edelim ve $n+1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\sum_{k_j=1}^{n-i+2}\sum_{k_{j-1}=1}^{k_j}\cdots\sum_{k_1=1}^{k_2}\frac{1}{F_{k_1}} &= \sum_{k_j=1}^{n-i+1}\sum_{k_{j-1}=1}^{k_j}\cdots\sum_{k_1=1}^{k_2}\frac{1}{F_{k_1}}+\sum_{k_{j-1}=1}^{n-i+2}\sum_{k_{j-2}=1}^{k_{j-1}}\cdots\sum_{k_1=1}^{k_2}\frac{1}{F_{k_1}}\\
&= \sum_{k_j=1}^{n-i+1}\sum_{k_{j-1}=1}^{k_j}\cdots\sum_{k_1=1}^{k_2}\frac{1}{F_{k_1}}+\sum_{k_{j-1}=1}^{n-i+1}\sum_{k_{j-2}=1}^{k_{j-1}}\cdots\sum_{k_1=1}^{k_2}\frac{1}{F_{k_1}}\\
&\quad+\sum_{k_{j-2}=1}^{n-i+2}\sum_{k_{j-3}=1}^{k_{j-2}}\cdots\sum_{k_1=1}^{k_2}\frac{1}{F_{k_1}}\\
&= \sum_{k_j=1}^{n-i+1}\sum_{k_{j-1}=1}^{k_j}\cdots\sum_{k_1=1}^{k_2}\frac{1}{F_{k_1}}+\sum_{k_{j-1}=1}^{n-i+1}\sum_{k_{j-2}=1}^{k_{j-1}}\cdots\sum_{k_1=1}^{k_2}\frac{1}{F_{k_1}}+\cdots\\
&\quad+\sum_{k_2=0}^{n-i+1}\sum_{k_1=0}^{k_2}\frac{1}{F_{k_1}}+\sum_{k_1=0}^{n-i+2}\frac{1}{F_{k_1}}\\
&= \sum_{k_j=1}^{n-i+1}\sum_{k_{j-1}=1}^{k_j}\cdots\sum_{k_1=1}^{k_2}\frac{1}{F_{k_1}}+\sum_{k_{j-1}=1}^{n-i+1}\sum_{k_{j-2}=1}^{k_{j-1}}\cdots\sum_{k_1=1}^{k_2}\frac{1}{F_{k_1}}+\cdots\\
&\quad+\sum_{k_2=0}^{n-i+1}\sum_{k_1=0}^{k_2}\frac{1}{F_{k_1}}+\sum_{k_1=0}^{n-i+1}\frac{1}{F_{k_1}}+\frac{1}{F_{n-i+2}}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Binomiyel katsayıların toplam özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{k_j=1}^{n-i+2}\sum_{k_{j-1}=1}^{k_j}\cdots\sum_{k_1=1}^{k_2}\frac{1}{F_{k_1}} &=\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{F_{k-i+1}}\left[\binom{n-k+j-1}{j-1}+\binom{n-k+j-2}{j-2}+\cdots+\binom{n-k}{0}\right]\\
&\quad+\frac{1}{F_{n-i+2}}\\
&=\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{F_{k-i+1}}\binom{n-k+j}{j-1}+\frac{1}{F_{n-i+2}}\\
&=\sum_{k=i}^{n+1}\binom{n-k+j}{j-1}\frac{1}{F_{k-i+1}}
\end{aligned}$$

olup, $n+1$ için iddia doğrudur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.4 *Hiperharmonik Fibonacci sayısı için*

$$\mathbb{F}_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k+r-1}{r-1} \frac{1}{F_k} \tag{4.4}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eş. (4.3) ifadesinde $i=1$ ve $j=r$ seçilirse Eş. (4.4) elde edilir.

Sonuç 4.1.5 *Hiperharmonik Fibonacci sayısı ve Fibonacci sayısı için*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{F_k} = (n+1)\mathbb{F}_n - \mathbb{F}_n^{(2)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eş. (4.4) ifadesinde $r=2$ seçilirse

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_n^{(2)} &= \sum_{k=1}^{n} (n-k+1) \frac{1}{F_k} \\ &= n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{F_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_k} \end{aligned}$$

olup, buradan

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{F_k} = (n+1)\mathbb{F}_n - \mathbb{F}_n^{(2)}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.6 $0 \leq m \leq r-1$ *tamsayıları için*

$$\mathbb{F}_n^{(r)} = \sum_{t=1}^{n} \binom{n+r-m-t-1}{r-m-1} \mathbb{F}_t^{(m)} \tag{4.5}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Teoremin ispatını tümevarım yöntemi ile yapalım. $n = 1$ için eşitliğin doğruluğu açıktır. n $(n > 1)$ için eşitlik doğru olsun. Eş. (4.2) bağıntısından

$$\mathbb{F}_{n+1}^{(r)} = \mathbb{F}_{n+1}^{(r-1)} + \mathbb{F}_{n}^{(r)}$$

olup, bu işlem ard arda uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_{n+1}^{(r)} &= \mathbb{F}_{n+1}^{(r-2)} + \mathbb{F}_{n}^{(r-1)} + \mathbb{F}_{n}^{(r)} \\
&= \mathbb{F}_{n+1}^{(r-3)} + \mathbb{F}_{n}^{(r-2)} + \mathbb{F}_{n}^{(r-1)} + \mathbb{F}_{n}^{(r)} \\
&\vdots \\
&= \mathbb{F}_{n+1}^{(m)} + \mathbb{F}_{n}^{(m+1)} + \mathbb{F}_{n}^{(m+2)} + \cdots + \mathbb{F}_{n}^{(r-2)} + \mathbb{F}_{n}^{(r-1)} + \mathbb{F}_{n}^{(r)} \\
&= \mathbb{F}_{n+1}^{(m)} + \sum_{t=1}^{n} \left[\binom{n-t}{0} + \binom{n-t+1}{1} + \cdots + \binom{n-t+r-m-1}{r-m-1} \right] \mathbb{F}_{t}^{(m)} \\
&= \mathbb{F}_{n+1}^{(m)} + \sum_{t=1}^{n} \binom{n-t+r-m}{r-m-1} \mathbb{F}_{t}^{(m)} \\
&= \sum_{t=1}^{n+1} \binom{n-t+r-m}{r-m-1} \mathbb{F}_{t}^{(m)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $n + 1$ için iddia doğrudur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.7 *r, s birer tamsayı ve $r \geq 1$, $s \geq 0$ olsun. O zaman*

$$\mathbb{F}_{n}^{(r+s)} = \sum_{t=1}^{n} \binom{n-t+r-1}{r-1} \mathbb{F}_{t}^{(s)} \tag{4.6}$$

dır.

İspat. $n \times n$ tipinden $G_n^{(r)}$ matrisini

$$G_n^{(r)} = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_{n}^{(r)} & \mathbb{F}_{n}^{(r+1)} & \ldots & \mathbb{F}_{n}^{(r+n-1)} \\ \mathbb{F}_{n-1}^{(r)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(r+1)} & \ldots & \mathbb{F}_{n-1}^{(r+n-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbb{F}_{1}^{(r)} & \mathbb{F}_{1}^{(r+1)} & \ldots & \mathbb{F}_{1}^{(r+n-1)} \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlayalım. Ayrıca $n \times n$ tipinden üst üçgen A matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

olsun. Bahşi ve Solak, A matrisinin r. kuvveti

$$b_{ij} = \begin{cases} \binom{j-i+r-1}{r-1}, & i \le j \\ 0, & i > j \end{cases}$$

olmak üzere $A^r = (b_{ij})_{n\times n}$ biçiminde olduğunu göstermişlerdir. Matris çarpımından

$$G_n^{(r+s)} = A^r G_n^{(s)} \tag{4.7}$$

olup, $G_n^{(r+s)}$ matrisinin birinci satır birinci sütünündaki eleman $\mathbb{F}_n^{(r+s)}$ dir. Eş. (4.7) ifadesinden

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_n^{(r+s)} &= \sum_{j=1}^{n} b_{1j}\mathbb{F}_{n-j+1}^{(s)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \binom{j+r-2}{r-1}\mathbb{F}_{n-j+1}^{(s)} \\ &= \sum_{t=1}^{n} \binom{n-t+r-1}{r-1}\mathbb{F}_t^{(s)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.8 *Hiperharmonik Fibonacci sayıları için*

$$\sum_{t=1}^{n} t\,\mathbb{F}_t = (n+1)\mathbb{F}_n^{(2)} - \mathbb{F}_n^{(3)}$$

dir.

İspat. Eş. (4.6) ifadesinde $r = 2$ ve $s = 1$ seçilirse

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_n^{(3)} &= \sum_{t=1}^{n} (n - t + 1)\mathbb{F}_t \\
&= n\sum_{t=1}^{n} \mathbb{F}_t - \sum_{t=1}^{n} t\mathbb{F}_t + \sum_{t=1}^{n} \mathbb{F}_t \\
&= (n + 1)\mathbb{F}_n^{(2)} - \sum_{t=1}^{n} t\mathbb{F}_t
\end{aligned}$$

olup

$$\sum_{t=1}^{n} t\mathbb{F}_t = (n + 1)\mathbb{F}_n^{(2)} - \mathbb{F}_n^{(3)}$$

eşitliği elde edilir.

BÖLÜM 5

HARMONİK VE HİPERHARMONİK FİBONACCİ SAYILARININ MATRİSLERDEKİ UYGULAMALARI

Bu bölümde elemanları harmonik ve hiperharmonik Fibonacci sayıları olan circulant matrislerin Euclidean ve spektral normlarını ele alacağız. Bu normlardan faydalanarak harmonik ve hiperharmonik Fibonacci sayılarını içeren eşitsizlikler elde edeceğiz.

Teorem 5.1.1 *$n \times n$ tipinden circulant matris*

$$C_1 = Circ\left(\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \ldots, \mathbb{F}_{n-1}\right) \tag{5.1}$$

olsun. C_1 matrisinin Euclidean normu

$$\|C_1\|_E = \left[n^2\mathbb{F}_n^2 - n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{F_{k+1}}\left(2\mathbb{F}_k + \frac{1}{F_{k+1}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.2}$$

dir.

İspat. Euclidean norm tanımından

$$\|C_1\|_E^2 = n\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{F}_k^2$$

dir. Eş. (3.2) ifadesinden

$$\|C_1\|_E = \left[n^2\mathbb{F}_n^2 - n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{F_{k+1}}\left(2\mathbb{F}_k + \frac{1}{F_{k+1}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 5.1.2 *$n \times n$ tipinden circulant matris*

$$C_1 = Circ\left(\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \ldots, \mathbb{F}_{n-1}\right)$$

olsun. C_1 *matrisinin spektral normu*

$$\|C_1\|_2 = n\mathbb{F}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{F_{k+1}} \tag{5.3}$$

dır.

İspat. C_1 matrisinin özdeğerleri λ_t $(t = 0, 1, \ldots, n-1)$ olmak üzere Eş. (2.16) ifadesinden

$$\lambda_t(C_1) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{F}_i (w^t)^i$$

dir. $t = 0$ için

$$\lambda_0(C_1) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{F}_i$$

olup, Eş. (3.2) ifadesinden

$$\lambda_0(C_1) = n\mathbb{F}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{F_{k+1}} \tag{5.4}$$

dir. $1 \le t \le n-1$ için

$$|\lambda_t| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{F}_i (w^t)^i \right| \le \left| \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{F}_i \right| \left| (w^t)^i \right| \le \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{F}_i \tag{5.5}$$

dir. C_1 matrisi normal matris ve Lemma 2.4.4 den dolayı

$$\|C_1\|_2 = \max_{0 \le t \le n-1} |\lambda_t| = \max(|\lambda_0|, \max_{1 \le t \le n-1} |\lambda_t|) \tag{5.6}$$

dir. Eş. (5.4), Eş. (5.5) ve Eş. (5.6) ifadelerinden

$$\|C_1\|_2 = n\mathbb{F}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{F_{k+1}}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 5.1.3 $n \times n$ *tipinden circulant matris*

$$C_2^{(k)} = Circ\left(\mathbb{F}_0^{(k)}, \mathbb{F}_1^{(k)}, \mathbb{F}_2^{(k)}, \ldots, \mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right) \tag{5.7}$$

olsun. $C_2^{(k)}$ *matrisinin spektral normu*

$$\left\| C_2^{(k)} \right\|_2 = \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \tag{5.8}$$

dir.

İspat. Teorem (5.1.2) nin ispatına benzer olarak

$$\left\| C_2^{(k)} \right\|_2 = \sum_{s=0}^{n-1} \mathbb{F}_s^{(k)}$$

dır. Hiperharmonik Fibonacci sayısının tanımından

$$\left\| C_2^{(k)} \right\|_2 = \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$

elde edilir.

Sonuç 5.1.4 $C_2^{(k)}$ *matrisinin Euclidean normu*

$$\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \leq \left\| C_2^{(k)} \right\|_E \leq \sqrt{n}\, \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. Teorem (5.1.3) ve Eş. (2.21) ifadesinden

$$\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \leq \left\| C_2^{(k)} \right\|_E \leq \sqrt{n}\, \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$

eşitsizliği elde edilir.

Burada hemen belirtelim ki;

$$\sum_{s=0}^{n-1} \left(\mathbb{F}_s^{(k)} \right)^2$$

toplamının kapalı formu elde edilememesine rağmen, Euclidean norm ve spektral norm arasındaki ilişki kullanılarak, bu toplam için alt ve üst sınırlar

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \leq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} \left(\mathbb{F}_s^{(k)} \right)^2} \leq \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \tag{5.9}$$

şeklinde elde edilebilir.

Teorem 5.1.5 *$n \times n$ tipinden circulant matris*

$$C_3 = Circ\left(F_{-1}\mathbb{F}_0, F_0\mathbb{F}_1, \ldots, F_{n-2}\mathbb{F}_{n-1}\right) \tag{5.10}$$

olsun. C_3 matrisinin spektral normu

$$\|C_3\|_2 = F_n\mathbb{F}_n - n \tag{5.11}$$

dir.

İspat. C_3 matrisinin özdeğerleri λ_t $(t = 0, 1, \ldots, n-1)$ olmak üzere Eş. (2.16) ifadesinden

$$\lambda_t(C_3) = \sum_{i=0}^{n-1} F_{i-1}\mathbb{F}_i(w^t)^i$$

eşitliğini yazarız. $t = 0$ için

$$\lambda_0(C_3) = \sum_{i=0}^{n-1} F_{i-1}\mathbb{F}_i$$

olup, Eş. (3.7) ifadesinden

$$\lambda_0(C_3) = F_n\mathbb{F}_n - n \tag{5.12}$$

dir. $1 \le t \le n-1$ için

$$|\lambda_t| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} F_{i-1}\mathbb{F}_i(w^t)^i\right| \le \left|\sum_{i=0}^{n-1} F_{i-1}\mathbb{F}_i\right| \left|(w^t)^i\right| \le \sum_{i=0}^{n-1} F_{i-1}\mathbb{F}_i \tag{5.13}$$

eşitsizliği elde edilir. C_3 matrisi normal matris ve Lemma 2.4.4 den dolayı

$$\|C_3\|_2 = \max_{0 \le t \le n-1} |\lambda_t| = \max\left(|\lambda_0|, \max_{1 \le t \le n-1} |\lambda_t|\right) \tag{5.14}$$

dir. Eş. (5.12), Eş. (5.13) ve Eş. (5.14) ifadelerinden

$$\|C_3\|_2 = F_n\mathbb{F}_n - n$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç 5.1.6 *Fibonacci ve harmonik Fibonacci sayılarını içeren*

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} F_{k-1}^2 \mathbb{F}_n^2} \leq F_n \mathbb{F}_n - n \leq \sqrt{n \sum_{k=0}^{n-1} F_{k-1}^2 \mathbb{F}_n^2}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. C_3 matrisinin spektral normu ve Eş. (2.20) ifadesinden

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} F_{k-1}^2 \mathbb{F}_n^2} \leq F_n \mathbb{F}_n - n \leq \sqrt{n \sum_{k=0}^{n-1} F_{k-1}^2 \mathbb{F}_n^2}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi ise $r-$circulant matrislerin spektral normlarını ele alacağız.

Teorem 5.1.7 *$n \times n$ tipinden $r-$circulant matris*

$$C_r^{(k)} = Circ\left(\mathbb{F}_0^{(k)}, \mathbb{F}_1^{(k)}, \ldots, \mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right) = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \ldots & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \\ r\mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \ldots & \mathbb{F}_{n-3}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ r\mathbb{F}_2^{(k)} & r\mathbb{F}_3^{(k)} & r\mathbb{F}_4^{(k)} & \ldots & \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} \\ r\mathbb{F}_1^{(k)} & r\mathbb{F}_2^{(k)} & r\mathbb{F}_3^{(k)} & \ldots & r\mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

olsun. $C_r^{(k)}$ matrisinin spektral normu için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

i) $|r| \geq 1$ için

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \leq \left\| C_r^{(k)} \right\|_2 \leq |r| \sqrt{n-1}\, \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)},$$

ii) $|r| < 1$ için

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}} \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \leq \left\| C_r^{(k)} \right\|_2 \leq \sqrt{n-1}\, \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}.$$

İspat. $C_r^{(k)}$ matrisinin Euclidean normu

$$\left\|C_r^{(k)}\right\|_E = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}(n-s)\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + \sum_{s=0}^{n-1} s\left|r\right|^2\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2}$$

dır.

$i)$ Eş. (5.9) ve $|r| \geq 1$ den

$$\left\|C_r^{(k)}\right\|_E \geq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}(n-s)\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + \sum_{s=0}^{n-1} s\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2} \geq \sqrt{n\sum_{s=0}^{n-1}\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2} \geq \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$

dir. Eş. (2.20) özelliğinden dolayı

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \leq \left\|C_r^{(k)}\right\|_2 \tag{5.16}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_0^{(k)} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ r & \mathbb{F}_0^{(k)} & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ r & r & r & \dots & \mathbb{F}_0^{(k)} & 1 \\ r & r & r & \dots & r & \mathbb{F}_0^{(k)} \end{pmatrix}$$

ve

$$B = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \dots & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \\ \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \dots & \mathbb{F}_{n-3}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \mathbb{F}_4^{(k)} & \dots & \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} \\ \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \dots & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan A ve B matrisleri için $C_r^{(k)} = A \circ B$ dir. Buradan

$$r_1(A) = \max_{1\leq i\leq n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|a_{nj}\right|^2} = \sqrt{(n-1)\left|r\right|^2}$$

ve

$$c_1(B) = \max_{1\leq j\leq n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|b_{in}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2}$$

eşitlikleri elde edilir. Eş. (5.9) ve Lemma 2.4.7 den

$$\left\|C_r^{(k)}\right\|_2 \leq |r|\sqrt{n-1}\,\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \tag{5.17}$$

eşitsizliğini yazarız. Eş. (5.16) ve Eş. (5.17) ifadelerinden

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \leq \left\|C_r^{(k)}\right\|_2 \leq |r|\sqrt{n-1}\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$

eşitsizliği elde edilir.

ii) Eş. (5.9) ve $|r| < 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\left\|C_r^{(k)}\right\|_E &= \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}(n-s)\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + \sum_{s=0}^{n-1}s\,|r|^2\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2} \\
&\geq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1}(n-s)\,|r|^2\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + \sum_{s=0}^{n-1}s\,|r|^2\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2} \\
&= |r|\sqrt{n\sum_{s=0}^{n-1}\left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2} \\
&\geq |r|\,\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. (2.20) özelliğinden dolayı

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}}\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \leq \left\|C_r^{(k)}\right\|_2 \tag{5.18}$$

dir. Diğer taraftan

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_0^{(k)} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ r & \mathbb{F}_0^{(k)} & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ r & r & r & \dots & \mathbb{F}_0^{(k)} & 1 \\ r & r & r & \dots & r & \mathbb{F}_0^{(k)} \end{pmatrix}$$

ve

$$B = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \dots & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \\ \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \dots & \mathbb{F}_{n-3}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \mathbb{F}_4^{(k)} & \dots & \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} \\ \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \dots & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlı A ve B matrisleri için $C_r^{(k)} = A \circ B$ dir. Buradan

$$r_1(A) = \max_{1 \le i \le n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\left(\mathbb{F}_0^{(k)}\right)^2 + n - 1} = \sqrt{n-1}$$

ve

$$c_1(B) = \max_{1 \le j \le n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} \left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2}$$

eşitlikleri elde edilir. Eş. (5.9) ve Lemma 2.4.7 den

$$\left\|C_r^{(k)}\right\|_2 \le \sqrt{n-1}\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \tag{5.19}$$

eşitsizliği elde edilir. Eş. (5.18) ve Eş. (5.19) ifadelerinden

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}}\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \le \left\|C_r^{(k)}\right\|_2 \le \sqrt{n-1}\,\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.1.8 *$n \times n$ tipinden $r-$circulant matris $C_r = Circ\left(\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_{n-1}\right)$ olmak üzere*

$i)$ $|r| \geq 1$ için

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{F}_{n-1}^{(2)} \leq \|C_r\|_2 \leq |r|\sqrt{n-1}\,\mathbb{F}_{n-1}^{(2)},$$

$ii)$ $|r| < 1$ için

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}}\mathbb{F}_{n-1}^{(2)} \leq \|C_r\|_2 \leq \sqrt{n-1}\,\mathbb{F}_{n-1}^{(2)}$$

dir.

İspat. Teorem 5.1.7 de $k = 1$ alınırsa ispat tamamlanır.

BÖLÜM 6

NÜMERİK SONUÇLAR

Bu bölümde n ve r tamsayılarının bazı değerlerine göre beşinci bölümde elde ettiğimiz bazı matris normları tablolar halinde verilmiştir. Bu değerler Mapple 11 programı kullanılarak elde edilmiştir.

Örnek 6.1.1 *Eş. (5.1) ile tanımlı*

$$C_1 = Circ\left(\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \ldots, \mathbb{F}_{n-1}\right)$$

matrisinin spektral ve Euclidean normlarını içeren tablo aşağıdaki gibidir.

Çizelge 6.1 C_1 matrisinin Euclidean ve spektral normları

n	$\|C_1\|_E$	$\|C_1\|_2$
5	$9,817784319$	$8,333333333$
10	$26,58370935$	$24,35541909$
20	$60,50549854$	$57,87788779$
50	$161,5095215$	$158,6738316$
100	$329,5676099$	$326,6681149$
200	$665,5871491$	$662,6566815$

Örnek 6.1.2 *Eş. (5.7) ile tanımlı*

$$C_2^{(k)} = Circ\left(\mathbb{F}_0^{(k)}, \mathbb{F}_1^{(k)}, \mathbb{F}_2^{(k)}, \ldots, \mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right)$$

matrisinin spektral normlarını içeren tablo aşağıdaki gibidir.

Çizelge 6.2 $C_2^{(k)}$ matrisinin spektral normları

n	k	$C_2^{(k)}$	$\left\Vert C_2^{(k)}\right\Vert_2 = \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$	n	k	$C_2^{(k)}$	$\left\Vert C_2^{(k)}\right\Vert_2 = \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$
5	0	$\mathbb{F}_4^{(1)}$	$2,833333333$	20	0	$\mathbb{F}_{19}^{(1)}$	$3,359498669$
	1	$\mathbb{F}_4^{(2)}$	$8,333333333$		1	$\mathbb{F}_{19}^{(2)}$	$57,87788779$
	2	$\mathbb{F}_4^{(3)}$	$17,83333333$		2	$\mathbb{F}_{19}^{(3)}$	$534,5851672$
	3	$\mathbb{F}_4^{(4)}$	$32,33333333$		3	$\mathbb{F}_{19}^{(4)}$	$3500,527109$
10	0	$\mathbb{F}_9^{(1)}$	$3,312287223$	50	0	$\mathbb{F}_{49}^{(1)}$	$3,359885666$
	1	$\mathbb{F}_9^{(2)}$	$24,35541909$		1	$\mathbb{F}_{49}^{(2)}$	$158,6738316$
	2	$\mathbb{F}_9^{(3)}$	$106,8838074$		2	$\mathbb{F}_{49}^{(3)}$	$3833,250864$
	3	$\mathbb{F}_9^{(4)}$	$356,1557854$		3	$\mathbb{F}_{49}^{(4)}$	$63116,07043$

Örnek 6.1.3 *Eş. (5.10) ile tanımlı*

$$C_3 = Circ\left(F_{-1}\mathbb{F}_0, F_0\mathbb{F}_1, \ldots, F_{n-2}\mathbb{F}_{n-1}\right)$$

matrisinin spektral normlarını içeren tablo aşağıdaki gibidir.

Çizelge 6.3 C_3 matrisinin spektral normları

n	$\Vert C_3\Vert_2$
5	$0.1016666667 \times 10^{2}$
10	$0.1731757972 \times 10^{3}$
50	$0.4228842484 \times 10^{11}$
100	$0.1190154990 \times 10^{22}$
500	$0.4684460937 \times 10^{105}$
1000	$0.1460426641 \times 10^{210}$

Örnek 6.1.4 *Eş. (5.15) ile tanımlı*

$$C_r^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \mathbb{F}_4^{(k)} \\ r\mathbb{F}_4^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} \\ r\mathbb{F}_3^{(k)} & r\mathbb{F}_4^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} \\ r\mathbb{F}_2^{(k)} & r\mathbb{F}_3^{(k)} & r\mathbb{F}_4^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} \\ r\mathbb{F}_1^{(k)} & r\mathbb{F}_2^{(k)} & r\mathbb{F}_3^{(k)} & r\mathbb{F}_4^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} \end{pmatrix}$$

matrisinin $n = 5$ ve $|r| \geq 1$ için spektral normunun alt ve üst sınırları k nın değerlerine göre aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 6.4 $C_r^{(k)}$ matrisinin spektral normları için alt ve üst sınırlar

k	$\|r\| \geq 1$	$\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$	$\left\|C_r^{(k)}\right\|_2$	$\|r\|\sqrt{n-1}\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$
$k=1$	$r=-2$	3.726779962	13.07393997	33.33333333
	$r=1$	3.726779962	8.333333332	16.66666667
	$r=1.1$	3.726779962	6.187213310	18.33333333
$k=2$	$r=-2$	7.975309119	29.94984421	71.33333333
	$r=1$	7.975309119	17.83333333	35.66666667
	$r=1.1$	7.975309119	19.01179206	39.23333333
$k=3$	$r=-2$	14.45990625	56.50736302	129.3333333
	$r=1$	14.45990625	32.33333334	64.66666667
	$r=1.1$	14.45990625	34.60097132	71.13333333
$k=4$	$r=-2$	23.62778496	94.70523788	211.3333333
	$r=1$	23.62778496	52.83333332	105.6666667
	$r=1.1$	23.62778496	56.68238740	116.2333333

Örnek 6.1.5 *Eş. (5.15) ile tanımlı*

$$C_r^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \mathbb{F}_4^{(k)} \\ r\mathbb{F}_4^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} \\ r\mathbb{F}_3^{(k)} & r\mathbb{F}_4^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} \\ r\mathbb{F}_2^{(k)} & r\mathbb{F}_3^{(k)} & r\mathbb{F}_4^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} \\ r\mathbb{F}_1^{(k)} & r\mathbb{F}_2^{(k)} & r\mathbb{F}_3^{(k)} & r\mathbb{F}_4^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} \end{pmatrix}$$

matrisinin $n = 5$ ve $|r| < 1$ için spektral normunun alt ve üst sınırları k nın değerlerine göre aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 6.5 $C_r^{(k)}$ matrisinin spektral normları için alt ve üst sınırlar

k	$\|r\| < 1$	$\frac{\|r\|}{\sqrt{n}}\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$	$\left\|C_r^{(k)}\right\|_2$	$\sqrt{n-1}\mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$
$k = 1$	$r = -0.5$	1.863389981	6.051069352	16.66666667
	$r = 0.1$	0.372677996	5.912862964	16.66666667
	$r = 0.9$	3.354101966	7.874554252	16.66666667
$k = 2$	$r = -0.5$	3.987654558	13.14607243	35.66666667
	$r = 0.1$	0.797530912	12.64953828	35.66666667
	$r = 0.9$	7.177778206	16.74610810	35.66666667
$k = 3$	$r = -0.5$	7.229953125	24.39979647	64.66666667
	$r = 0.1$	1.445990625	23.46328510	64.66666667
	$r = 0.9$	13.01391563	30.26866878	64.66666667
$k = 4$	$r = -0.5$	11.81389248	40.74250279	105.6666667
	$r = 0.1$	2.362778496	39.32798158	105.6666667
	$r = 0.9$	21.26500646	49.37728355	105.6666667

BÖLÜM 7

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışma yedi bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde harmonik ve hiperharmonik sayılar hakkında literatür bilgisi verilmiştir. Ayrıca literatürdeki circulant matrislerin normlarından bahsedilmiştir. İkinci bölümde ise tezde kullanılacak olan tanımlara ve temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, harmonik Fibonacci sayıları tanımlanmış ve bu sayıları içeren toplamsal eşitlikler fark operatörü metodu ile gösterilmiştir. Dördüncü bölümde, harmonik sayıların genelleştirilmesi olan hiperharmonik Fibonacci sayıları tanımlanmış, bu sayılar harmonik Fibonacci veya hiperharmonik Fibonacci sayıları cinsinden elde edilmiştir. Beşinci bölümde, elemanları harmonik Fibonacci ve hiperharmonik Fibonacci sayıları olan circulant ve $r-$circulant matrisler için Euclidean ve spektral normlar hesaplanmıştır. Altıncı bölümde ise, normlar için elde ettiğimiz sonuçlarla ilgili nümerik örnekler verilmiştir.

Harmonik Fibonacci ve hiperharmonik Fibonacci sayılarının tanımına benzer olarak harmonik Lucas, hiperharmonik Lucas, harmonik Horadam ve hiperharmonik Horadam sayıları tanımlanabilir. Kullandığımız yöntem ile bu sayıları içeren birçok toplam formülleri elde edilebilir, elemanları bu sayılardan oluşan circulant veya başka özel tipteki matrislerin normları hesaplanabilir.

KAYNAKLAR

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_number.

[2] **Graham R, Knuth D and Patashnik K** (1989) *Concrete Mathematics.* Addison-Wesley.

[3] **Spivey M Z** (2007) Combinatorial sums and finite differences. *Discrete Math.*, 307: 3130–3146.

[4] **Conway J H and Guy R K** (1996) The Book of Numbers. Springer, New York.

[5] **Benjamin A T, Gaebler D and Gaebler R** (2003) A combinatorial approach to hyperharmonic numbers. *Integers*, 3: 1–9.

[6] **Bahsi M and Solak S** (2013) An application of hyperharmonic numbers in matrices. *Hacet. J. Math. Stat.*, 42: 387-393.

[7] **Dilcher K** (2008) Determinant expressions for $q-$harmonic congruences and degenerate Bernoulli numbers. *Electron. J. Combin.*, 15: R63.

[8] **Mansour T, Stattuck M and Song C** (2012) $q-$Analogs of identities involving harmonic numbers and binomial coefficients. *Appl. Appl. Math.*, 7: 22–36.

[9] **Mezö I** (2011) Some possible $q-$generalizations of harmonic numbers. *Arxiv*:1106.5029.

[10] **Mansour T and Shattuck M** (2014) A $q-$analog of the hyperharmonic numbers. *Afr. Math.*, 25: 147–160.

[11] **Kronenburg M J** (2011) Some generalized harmonic number identities. *Arxiv*:1103.5430.

[12] **Cheon G S and Mikkawy M E A** (2007) Generalized harmonic number identities and a related matrix representation. *J. Korean Math. Soc.*, 44: 487–498.

[13] **Dil A Mezö I** (2008) A symmetric algorithm for hyperharmonic and Fibonacci numbers. *Appl. Math. Comput.*, 206: 942–951.

[14] **Ohtsuka H and Nakamura S** (2008/2009) On the sum of reciprocal Fibonacci numbers. *Fibonacci Quart.*, 46/47: 153–159.

[15] **Holiday S and Komatsu T** (2011) On the sum of reciprocal generalized Fibonacci numbers. *Integers*, 11: 441–455.

[16] **Rabinowitz S** (1999) Algorithmic summation of reciprocals of products of Fibonacci numbers. *Fibonacci Quart.*, 37: 122–127.

[17] **Solak S** (2005) On the norms of circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers. *Appl. Math. Comput.*, 160: 125–132.

[18] **Kocer E G, Mansour T and Tuglu N** (2007) Norms of circulant and semicirculant matrices with Horadam's numbers. *Ars Comb.*, 85: 353–359.

[19] **Bozkurt D** (2013) On the spectral norms of the matrices connected to integer number sequences. *Appl. Math. Comput.*, 219: 6576–6579.

[20] **Bahsi M and Solak S** (2014) On the norms of $r-$circulant matrices with the hyper–Fibonacci and Lucas numbers. *J. Math. Inequal.*, 8: 693–705.

[21] **Zhou J, Chen X and Jiang Z** (2014) The explicit identities for spectral norms of circulant-type matrices involving binomial coefficients and harmonic numbers. *Math. Probl. Eng.*, Article ID 518913.

[22] **Zhou J** (2014) The identical estimates of spectral norms for circulant matrices with binomial coefficients combined with Fibonacci numbers and Lucas numbers entries. *J. Funct. Spaces Appl.*, Article ID 672398.

[23] **Shen S Q and Cen J M** (2010) On the bounds for the norms of $r-$circulant matrices with Fibonacci and Lucas numbers. *Appl. Math. Comput.*, 216: 2891–2897.

[24] **Jiang Z and Zhou J** (2015) A note on spectral norms of even-order $r-$circulant matrices. *Appl. Math. Comput.*, 250: 368–371.

[25] **Horn R A and Johnson C R** (1991) *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.

[26] **Koshy T** (2001) *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. A Wiley-Interscience Publication.

[27] **Vajda S** (1989) *Fibonacci & Lucas numbers, and the Golden Section. Theory and Applications*. Chichester Ellis Horwood.

[28] **Barriol A** (1906) *Intermediaire des Mathematiciens*. France.

[29] **Davis P J** (1979) *Circulant Matrices*. Wiley, New York, Chichester.

[30] **Horn R A and Johnson C R (**1985) *Matrix Analysis*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K.

[31] **Horadam A F** (1965) Basic properties of a certain generalized sequences of numbers. *Fibonacci Quart.*, 3.2: 161–176.

[32] **Kızılateş C and Tuglu N** (2015) Some combinatorial identities of $q-$harmonic and $q-$hyperharmonic numbers. *Commun. Math. Appl.*, 6.2: 33–40.

[33] **Taşcı D (**2005) *Lineer Cebir*. Gazi Kitabevi, Ankara.

[34] **Tuglu N, Kızılateş C and Kesim S** (2015) On the harmonic and hyperharmonic Fibonacci numbers. *Adv. Difference Equ.*, 2015: 297.

[35] **Tuglu N and Kızılateş C** (2015) On the norms of circulant and $r-$circulant matrices with the hyperharmonic Fibonacci numbers. *J. Inequal. Appl.*, 2015: 253.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Ankara da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. Aktepe Lisesi'nden mezun olduktan sonra 2006 yılında Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdi. 2010 yılında lisans öğrenimini tamamladıktan sonra aynı yıl Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Tezli Yüksek Lisansa başladı ve 2012 yılı sonunda Yüksek Lisans eğitimini tamamladı. Daha sonra Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Doktora eğitimine başladı. Hâlen Bülent Ecevit Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görevine devam etmektedir.

ADRES BİLGİLERİ:

Adres: Bülent Ecevit Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 67100 ZONGULDAK

Tel: (+90) 536 361 15 99

E-posta: cankizilates@gmail.com