BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ KUATERNİYONLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

EMRAH POLATLI

HAZİRAN 2016

BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ KUATERNİYONLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Emrah POLATLI

DANIŞMAN : Yrd. Doç. Dr. Seyhun KESİM

ZONGULDAK

Haziran 2016

KABUL:

Emrah POLATLI tarafından hazırlanan "Genelleştirilmiş Fibonacci Kuaterniyonlarının Bazı Özellikleri Üzerine" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 02/06/2016

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Seyhun KESİM
Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Prof. Dr. Dursun TAŞCI ....
Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. Naim TUĞLU ....
Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. Ayşe NALLI ....
Karabük Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Yrd. Doç. Dr. Melih GÖCEN ....
Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. ..../..../2016

Prof. Dr. Baki HAZER
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Emrah POLATLI

ÖZET

Doktora Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ KUATERNİYONLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

Emrah POLATLI

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Seyhun KESİM

Haziran 2016, 45 sayfa

Bu tezde, k-Fibonacci ve k-Lucas kuaterniyonlarını içeren bazı binomiyal toplam formülleri elde edilmiştir. Split k-Fibonacci ve k-Lucas kuaterniyonları tanımlanmış ve bu kuaterniyonların bazı kombinatoriyal özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının bir genelleştirmesi verilmiş ve bu kuaterniyonların çeşitli özellikleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: k-Fibonacci ve k-Lucas kuaterniyonları, split k-Fibonacci ve split k-Lucas kuaterniyonları, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları, üreteç fonksiyon, üstel üreteç fonksiyon, Binet formülü, Cassini özelliği, Catalan özelliği, D’Ocagne özelliği.

Bilim Kodu: 403.01.01

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

ON SOME PROPERTIES OF GENERALIZED FIBONACCI QUATERNIONS

Emrah POLATLI

Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Seyhun KESİM

June 2016, 45 pages

In this thesis, some binomial sum formulas including k-Fibonacci and k-Lucas quaternions are obtained. Split k-Fibonacci and k-Lucas quaternions are defined and some combinatorial properties of these quaternions are investigated. Moreover, a generalization of Fibonacci and Lucas quaternions is given and various properties of these quaternions are obtained.

Keywords: k-Fibonacci and k-Lucas quaternions, split k-Fibonacci and split k-Lucas quaternions, generalized Fibonacci and Lucas quaternions, generating function, exponential generating function, Binet formula, Cassini identity, Catalan identity, D’Ocagne identity.

Science Code: 403.01.01

TEŞEKKÜR

Doktora sürecinde yakın ilgi ve desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Seyhun KESİM'e, doktora tez aşaması süresince yardımlarını ve ilgilerini esirgemeyen değerli hocalarım Sayın Doç. Dr. Naim TUĞLU ve Doç. Dr. Ayşe NALLI'ya teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca çalışma hayatım boyunca bana manevi desteğini hiç esirgemeyen ve tezin sunulmamış taslağını okuyup düzeltilmesine yardımcı olan çalışma arkadaşım ve kardeşim Araş. Gör. Can KIZILATEŞ'e sevgilerimi ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Son olarak, beni dünyaya getiren, bugünlere gelmemde en büyük emekleri olan, yaşama sebeplerim olan anneme, babama, kardeşlerime, eşim Evren EYİCAN POLATLI ve oğlum Kerem POLATLI'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

SİMGELER DİZİNİ

SİMGELER

F_n	: *n*. Fibonacci sayısı
L_n	: *n*. Lucas sayısı
$F_{k,n}$	: *n*. *k*-Fibonacci sayısı
$L_{k,n}$	: *n*. *k*-Lucas sayısı
q_n	: *n*. bi-periyodik Fibonacci sayısı
l_n	: *n*. bi-periyodik Lucas sayısı
$\mathbb{H}$	: Tüm reel kuaterniyonların kümesi
Q_n	: *n*. Fibonacci kuaterniyonu
$Q_n^{'}$	: *n*. Lucas kuaterniyonu
$D_{k,n}$	: *n*. *k*-Fibonacci kuaterniyonu
$P_{k,n}$	: *n*. *k*-Lucas kuaterniyonu
S_n	: *n*. split Fibonacci kuaterniyonu
T_n	: *n*. split Lucas kuaterniyonu
$M_{k,n}$	: *n*. split *k*-Fibonacci kuaterniyonu
$N_{k,n}$	: *n*. split *k*-Lucas kuaterniyonu
U_n	: *n*. genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonu
V_n	: *n*. genelleştirilmiş Lucas kuaterniyonu
$\lfloor n \rfloor$	: *n* ye eşit veya *n* den küçük en büyük tamsayı
$\xi(n)$	: parite fonksiyonu

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Fibonacci ve Lucas dizileri birçok amatör ve profesyonel matematikçi tarafından yüzyıllardır çalışılan iki önemli dizi olup gündelik hayatta sayısız uygulamada karşımıza çıkmaktadır. Leonardo Fibonacci'nin 1202'de yayınlanan Liber Abaci kitabındaki tavşan problemi ile başlayıp günümüze kadar uzanan bu seyirde Fibonacci ve Lucas sayıları bilimin birçok alanında ve ilginç bir şekilde doğada kendini göstermektedir.

Diğer taraftan kuaterniyonlar bilgisayar bilimi, fizik ve matematik gibi birçok uygulamalı bilimde sıkça kullanılır. Fizikte Maxwell denklemlerinin çeşitli yazılış biçimleri, 3D grafiklerin geliştirilmesi, bilgisayar biliminde oyun motoru programcılığı ve matematikte Clifford cebirleri kuaterniyonların uygulama alanlarına birkaç örnektir.

Fibonacci ve Lucas sayılarının temel özellikleri ve tarihsel geçmişi [1-3] de detaylı bir biçimde verilmiştir. Carlitz, Ferns, Hoggatt ve Layman [4-7] bu sayıları içeren binomiyal toplam formüllerini elde etmişlerdir. Kılıç [8] genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin terimlerinin kareleri ile ilgili toplamları matris metotlarıyla incelemiştir.

Falcon ve Plaza [9-12] k-Fibonacci ve k-Lucas sayılarını içeren birçok özellik ve formül elde etmişlerdir. Bu sayılar hakkında daha fazla bilgi ve detay [13-18] deki çalışmalarda verilmiştir. Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları (ya da bi-periyodik Fibonacci sayıları) Edson ve Yayenie tarafından [19] da tanımlanmış ve yine bu yazarlar tarafından bu sayıların birçok kombinatorik özelliği [20-22] de verilmiştir. Şahin [23, 24] genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilgili koşullu dizilerin bazı özelliklerini incelemiştir. Irmak, Alp [25] ve Bilgici [26] genelleştirilmiş Fibonacci sayılarına benzer şekilde genelleştirilmiş Lucas sayılarını (ya da bi-periyodik Lucas sayılarını) tanımlamış ve çeşitli özelliklerini elde etmiştir.

Kuaterniyonların Fizik, mühendislik ve cebirdeki uygulamaları için [27, 28] e bakılabilir.

Fibonacci kuaterniyonları Horadam [29] tarafından tanımlanmıştır. Horadam [30] da kuaterniyon reküranslarını incelemiştir. Iyer [31, 32] de Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları arasında bazı ilişkiler bulmuştur. Swamy [33] de genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonlarının bazı özelliklerini türetmiştir. Iakin [34-36] yüksek mertebeden kuaterniyonları tanıtmış ve kuaterniyon bileşenli genelleştirilmiş kuaterniyonları incelemiştir. Halıcı [37] Fibonacci kuaterniyonlarının bazı özelliklerini araştırmış ve uzun süre saklı kalmış kavramları yeniden hatırlatmıştır. Ramirez [38] k-Fibonacci ve k-Lucas kuaterniyonlarının bazı kombinatoriyal özelliklerini elde etmiştir. Catarino [39] $h(x)$ -Fibonacci kuaterniyon polinomlarını çalışmıştır. Taşçı ve Yalçın, [40] da, Fibonacci-p sayılarını tanıtmış ve çeşitli özelliklerini elde etmişlerdir. Polatlı ve Kesim [41] genelleştirilmiş Fibonacci sayıları bileşenli kuaterniyonların çeşitli özelliklerini türetmişlerdir. Bolat ve İpek [42] Pell kuaterniyonlarını ve Pell-Lucas kuaterniyonlarını tanıtmışlar ve bazı özelliklerini vermişlerdir. Szynal-Liana ve Wloch [43] Pell kuaterniyonlarını ve Pell oktaniyonlarını çalışmışlardır. Akyiğit ve arkadaşları [44] farklı kuaterniyon birimlerini ele alarak Fibonacci genelleştirilmiş kuaterniyonlarını incelemiştir.

Yine Akyiğit ve arkadaşları [45] split Fibonacci kuaterniyonlarını tanıtmışlar ve çeşitli özelliklerini elde etmişlerdir. Polatlı ve arkadaşları, [46] da, split k-Fibonacci ve split k-Lucas kuaterniyonlarının bazı kombinatoriyal özelliklerini vermişlerdir. Yine Polatlı, [47] de, Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının bir genelleştirmesini elde etmiş ve bu kuaterniyonları içeren çeşitli toplam formülleri bulmuştur.

Yukarıdaki çalışmalar göz önüne alınarak bu tezin birinci bölümünde, giriş bilgileri ve literatür özeti verilmektedir. İkinci bölüm, tez ile ilişkili temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır. Üçüncü bölümde, teze temel teşkil edecek Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının bazı özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümün bir kısmı, beşinci bölüm ve altıncı bölüm orijinal bulgular içermektedir. Bu bölümlerde sırasıyla k-Fibonacci ve k-Lucas kuaterniyonlarının üstel üreteç fonksiyonları ve bazı binomiyal toplam formülleri, split k-Fibonacci ve k-Lucas kuaterniyonlarının bazı kombinatoriyal özellikleri, Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının bir genelleştirmesi ve bunların bazı özellikleri verilmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tezin tamamına temel teşkil edecek önbilgiler ve temel kavramlar verilecektir. Şimdi ilk olarak literatürde çok iyi bilinen Fibonacci ve Lucas dizilerini tanıtarak bu bölüme başlayalım.

2.1 FİBONACCİ VE LUCAS DİZİLERİ

Tanım 2.1.1 $\left(\mathbf{[1,2]}\right)$ Fibonacci dizisi, her $n \geq 0$ doğal sayısı için $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{2.1}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada F_n, $n.$ Fibonacci sayısıdır.
İlk birkaç Fibonacci sayısı 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 dür.

Tanım 2.1.2 $\left(\mathbf{[1,2]}\right)$ Lucas dizisi, her $n \geq 0$ doğal sayısı için $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \tag{2.2}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada L_n, $n.$ Lucas sayısıdır.
İlk birkaç Lucas sayısı 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29 dur.
Hemen belirtelim ki, Fibonacci ve Lucas dizileri aynı rekürans bağıntısını sağlamasına rağmen aralarındaki temel fark başlangıç koşullarından kaynaklanmaktadır.
Literatürde Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren sayısız özellik bulunmaktadır. Şimdi biz bu özelliklerden bazı temel ve önemli olanlarını vereceğiz.

Teorem 2.1.3 $\left(\mathbf{[1,2]}\right)$ Fibonacci ve Lucas dizilerinin Binet formülleri, $n \geq 0$, $\gamma = (1+\sqrt{5})/2$ ve $\delta = (1-\sqrt{5})/2$ olmak üzere, sırasıyla

$$F_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$$

ve

$$L_n = \gamma^n + \delta^n$$

dir.

Teorem 2.1.4 $\left(\mathbf{[2]}\right)$ Fibonacci ve Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

dir.

Teorem 2.1.5 (Cassini Özelliği) $\left(\mathbf{[2]}\right)$ $n \geq 1$ için

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

ve

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5.(-1)^{n+1}$$

dir.

Teorem 2.1.6 (Catalan Özelliği) $\left(\mathbf{[2]}\right)$ $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $n \geq k$ için

$$F_{n-k}F_{n+k} - F_n^2 = (-1)^{n+k+1} F_k^2$$

ve

$$L_{n-k}L_{n+k} - L_n^2 = (-1)^{n-k} L_{2k} - 2(-1)^n$$

dir.

Teorem 2.1.7 (d'Ocagne Özelliği) ([2]) $n, m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n \geq m$ için

$$F_{m+1}F_n - F_mF_{n+1} = (-1)^m F_{n-m}$$

ve

$$L_{m+1}L_n - L_mL_{n+1} = 5(-1)^{m+1} F_{n-m}$$

dir.

2.2 *k*-FİBONACCİ VE *k*-LUCAS DİZİLERİ

Fibonacci ve Lucas dizilerinin çeşitli genelleştirmeleri literatürde mevcuttur. Bu genelleştirmelerden bazıları [1, 2] de verilmiştir. Bunlardan özel olan bir tanesi, *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas dizileri olarak adlandırılan genelleştirmedir. Şimdi bu alt bölümde, *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas dizilerinin tanımları ve bazı önemli özellikleri verilecektir. Bu alt bölümdeki bilgiler [9-18] den alıntılanmıştır.

Tanım 2.2.1 *k*-Fibonacci dizisi herhangi *k* pozitif reel sayısı ve $n \geq 0$ için $F_{k,0} = 0$, $F_{k,1} = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$F_{k,n+2} = kF_{k,n+1} + F_{k,n} \tag{2.3}$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanır. Burada $F_{k,n}$, *n*. *k*-Fibonacci sayısıdır.

Tanım 2.2.2 *k*-Lucas dizisi herhangi *k* pozitif reel sayısı ve $n \geq 0$ için $L_{k,0} = 2$, $L_{k,1} = k$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$L_{k,n+2} = kL_{k,n+1} + L_{k,n} \tag{2.4}$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanır. Burada $L_{k,n}$, *n*. *k*-Lucas sayısıdır.

Teorem 2.2.3 *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas dizilerinin Binet formülleri, $n \geq 0$, $\lambda = \left(k + \sqrt{k^2+4}\right)\big/2$ ve $\mu = \left(k - \sqrt{k^2+4}\right)\big/2$ olmak üzere, sırasıyla

$$F_{k,n}=\frac{\lambda^n-\mu^n}{\lambda-\mu}$$

ve

$$L_{k,n}=\lambda^n+\mu^n$$

dir.

Buradan hemen

(i) $\lambda+\mu=k$

(ii) $\lambda-\mu=\sqrt{k^2+4}$

(iii) $\lambda\mu=-1$

olduğu görülür.

Teorem 2.2.4 *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty}F_{k,n}x^n=\frac{x}{1-kx-x^2}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}L_{k,n}x^n=\frac{2-kx}{1-kx-x^2}$$

dir.

2.3 Bİ-PERİYODİK FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI

Bölüm 2.2 de bahsedilen genelleştirmelerden ilginç olan bir tanesi Edson ve Yayenie tarafından [19] da verilen bi-periyodik Fibonacci ve Lucas dizileridir.

Şimdi bi-periyodik Fibonacci ve Lucas dizilerinin tanımlarını ve bazı önemli özelliklerini vereceğiz. Bu alt bölümdeki bilgiler [19-25] den alıntılanmıştır.

Tanım 2.3.1 $\left(\textbf{[19]}\right)$ Sıfırdan farklı herhangi iki a ve b reel sayısı ve $n \geq 2$ için bi-periyodik Fibonacci dizisi $q_0 = 0$, $q_1 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$q_n = \begin{cases} aq_{n-1} + q_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ bq_{n-1} + q_{n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases} \tag{2.5}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır.

Hemen belirtelim ki, bu genelleştirme, a ve b nin her farklı seçilişinde farklı bir dizinin oluşmasını sağlar. Örneğin özel olarak $a = b = 1$ seçilirse Fibonacci dizisi, $a = b = k$ seçilirse *k*-Fibonacci dizisi elde edilir.

Bilgici, [26] da, bi-periyodik Fibonacci dizisine benzer şekilde bi-periyodik Lucas dizisini aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 2.3.2 Sıfırdan farklı herhangi iki a ve b reel sayısı ve $n \geq 2$ için bi-periyodik Lucas dizisi $l_0 = 2$, $l_1 = a$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$l_n = \begin{cases} al_{n-1} + l_{n-2}, & n \text{ tek ise} \\ bl_{n-1} + l_{n-2}, & n \text{ çift ise} \end{cases} \tag{2.6}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır.

Teorem 2.3.3 $\left(\textbf{[19]}\right)$ Bi-periyodik Fibonacci dizisinin Binet formülü, $n \geq 0$ için,

$$q_n = \frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) \tag{2.7}$$

dir. Burada $\alpha = \left(ab + \sqrt{a^2b^2 + 4ab}\right)/2$ ve $\beta = \left(ab - \sqrt{a^2b^2 + 4ab}\right)/2$ dir. $\xi(n) = n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ise parite fonksiyonudur.

Teorem 2.3.4 $\left(\textbf{[26]}\right)$ Bi-periyodik Lucas dizisinin Binet formülü, $n \geq 0$ için,

$$l_n = \frac{a^{\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}} \left(\alpha^n + \beta^n \right) \tag{2.8}$$

dir.

Teorem 2.3.5 $\left(\textbf{[19]}\right)$ Bi-periyodik Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$F(x)=\frac{x\left(1+ax-x^2\right)}{1-\left(ab+2\right)x^2+x^4}$$

tür.

Teorem 2.3.6 $\left(\textbf{[26]}\right)$ Bi-periyodik Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu

$$L(x)=\frac{2+ax-\left(ab+2\right)x^2+ax^3}{1-\left(ab+2\right)x^2+x^4}$$

tür.

2.4 REEL KUATERİYONLAR VE REEL SPLİT KUATERNİYONLAR

Bu bölümde reel kuaterniyonların ve split kuaterniyonların tanımları ve temel özellikleri özetlenecektir. Bu alt bölüm [27, 28] den alıntılanmıştır.

Tanım 2.4.1 Reel bileşenleri a_0, a_1, a_2, a_3 ve taban elemanları $\mathbf{1}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ olan bir p reel kuaterniyonu

$$p=a_0+a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}=\left(a_0,a_1,a_2,a_3\right), \qquad \left(a_0\mathbf{1}=a_0\right)$$

formunda bir hiperkompleks sayı olup $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ aşağıdaki çarpım kurallarını sağlar:

$$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=\boldsymbol{ijk}=-1$$

$$\boldsymbol{ij}=\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{ji}, \boldsymbol{jk}=\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{kj}, \boldsymbol{ki}=\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{ik}. \tag{2.9}$$

Dikkat edilirse $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ taban elemanlarının kendi aralarındaki çarpımları komütatiflik özelliğini sağlamaz.
Yukarıdaki tanımı sağlayan tüm reel kuaterniyonların kümesi, William Rowan Hamilton’un anısına $\mathbb{H}$ sembolü ile gösterilir. $\mathbb{H}$ kümesi birleşmeli fakat komütatif olmayan cebir yapısındadır.

Şimdi reel kuaterniyonların sağladığı bazı basit aritmetik işlemleri özetleyelim.

$p_1 = a_1 + b_1\boldsymbol{i} + c_1\boldsymbol{j} + d_1\boldsymbol{k}$, $p_2 = a_2 + b_2\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + d_2\boldsymbol{k}$ ve λ bir reel sayı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i) $p_1 + p_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\boldsymbol{i} + (c_1 + c_2)\boldsymbol{j} + (d_1 + d_2)\boldsymbol{k}$

(ii) $p_1 - p_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\boldsymbol{i} + (c_1 - c_2)\boldsymbol{j} + (d_1 - d_2)\boldsymbol{k}$

(iii) $\lambda p_1 = \lambda a_1 + (\lambda b_1)\boldsymbol{i} + (\lambda c_1)\boldsymbol{j} + (\lambda d_1)\boldsymbol{k}$

(iv) $p_1 p_2 = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)\boldsymbol{i}$

$$+(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)\boldsymbol{j} + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)\boldsymbol{k}.$$

Yukarıdaki basit aritmetik işlemler göz önüne alınırsa $\forall p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{H}$ için,

(v) $p_1 + p_2 = p_2 + p_1$

(vi) $p_1 + (p_2 + p_3) = (p_1 + p_2) + p_3$

(vii) $p_1(p_2 + p_3) = p_1p_2 + p_1p_3$

(viii) $(p_1p_2)p_3 = p_1(p_2p_3)$

özelliklerinin de reel kuaterniyonlar için geçerli olduğu görülür.

Tanım 2.4.2 Reel bileşenleri b_0, b_1, b_2, b_3 ve taban elemanları $\mathbf{1}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ olan bir q reel split kuaterniyonu

$$q = b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k} = (b_0, b_1, b_2, b_3), \qquad (b_0\mathbf{1} = b_0)$$

formunda bir hiperkompleks sayı olup $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ aşağıdaki çarpım kurallarını sağlar:

$$\boldsymbol{i}^2 = -1, \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = 1$$

$$\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{ji}, \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{kj}, \boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{ik}. \tag{2.10}$$

Split kuaterniyonlar, yukarıda kuaterniyonlar için verdiğimiz sekiz özellikten sadece (iv) özelliğinde farklılık gösterir. Elbette bu farklılık, split kuaterniyonik tabanlardan kaynaklanmaktadır. $q_1 = a_1 + b_1\boldsymbol{i} + c_1\boldsymbol{j} + d_1\boldsymbol{k}$ ve $q_2 = a_2 + b_2\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + d_2\boldsymbol{k}$ herhangi iki reel split kuaterniyon olmak üzere

$$q_1q_2 = \left(a_1a_2 - b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2\right) + \left(a_1b_2 + b_1a_2 - c_1d_2 + d_1c_2\right)\boldsymbol{i}$$

$$+\left(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2\right)\boldsymbol{j} + \left(a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2\right)\boldsymbol{k}$$

dir.

BÖLÜM 3

FİBONACCİ VE LUCAS KUATERNİYONLARI

Bu bölümde sırasıyla Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının tanımları, Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, Cassini özelliği ve bazı toplam formülleri verilecektir.
Horadam, [29] da, Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının tanımını ve bazı özelliklerini vermiştir. Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları ile ilgili daha temel özellikler ve bağıntılar için [30-35] e bakılabilir.
Bu bölümdeki sonuçlar [36, 37] den alıntılanmıştır.

Tanım 3.1 $\left(\textbf{[29]}\right)$ $n \geq 0$ için, *n*. Fibonacci ve *n*. Lucas kuaterniyonu sırasıyla

$$Q_n = F_n + F_{n+1}\boldsymbol{i} + F_{n+2}\boldsymbol{j} + F_{n+3}\boldsymbol{k}$$

ve

$$Q_n^{'} = L_n + L_{n+1}\boldsymbol{i} + L_{n+2}\boldsymbol{j} + L_{n+3}\boldsymbol{k}$$

şeklinde tanımlanır. Burada F_n ve L_n sırasıyla *n*. Fibonacci ve *n*. Lucas sayısıdır. $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ taban elemanları ise (2.9) daki çarpım özelliklerini sağlar.
Tanım 2.1.1, Tanım 2.1.2 ve Tanım 3.1 göz önüne alınırsa kolay bir şekilde

$$Q_{n+2} = Q_{n+1} + Q_n \tag{3.1}$$

ve

$$Q_{n+2}^{'} = Q_{n+1}^{'} + Q_n^{'} \tag{3.2}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.2 $\left(\textbf{[36]}\right)$ $n \geq 0$ için, Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının Binet formülleri

$$Q_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\underline{\gamma}\gamma^n - \underline{\delta}\delta^n\right)$$

ve

$$Q_n^{'} = \underline{\gamma}\gamma^n + \underline{\delta}\delta^n$$

dir. Burada $\underline{\gamma} = 1 + \gamma\boldsymbol{i} + \gamma^2\boldsymbol{j} + \gamma^3\boldsymbol{k}$ ve $\underline{\delta} = 1 + \delta\boldsymbol{i} + \delta^2\boldsymbol{j} + \delta^3\boldsymbol{k}$ dir.

Teorem 3.3 $\left(\textbf{[37]}\right)$ Fibonacci kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonu

$$G(t) = \frac{t + \boldsymbol{i} + (t+1)\boldsymbol{j} + (t+2)\boldsymbol{k}}{1 - t - t^2}$$

dir.

Teorem 3.4 $\left(\textbf{[37]}\right)$ $m, n \in \mathbb{Z}$ için Q_{m+n} nin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{m+n}\, x^n = \frac{Q_m + Q_{m-1}x}{1 - x - x^2}$$

dir.

Teorem 3.5 (Cassini Özelliği) $\left(\textbf{[37]}\right)$ $n \geq 1$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$Q_{n-1}Q_{n+1} - Q_n^2 = (-1)^n\left(2Q_1 - 3\boldsymbol{k}\right).$$

Önerme 3.6 $\left(\textbf{[37]}\right)$ Fibonacci kuaterniyonları için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} Q_i = Q_{n+2} - Q_1$,

(ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} Q_{2i} = Q_{2n+1} - (1,0,1,1)$,

(iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} Q_{2i+1} = Q_{2n} - Q_0$.

Teorem 3.7 $\left(\textbf{[37]}\right)$ $n \geq 0$ için, aşağıdaki toplam formülleri sağlanır:

(i) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} Q_i = Q_{2n}$,

(ii) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i Q_i = (-1)^n Q_{-n}$.

BÖLÜM 4

k-FİBONACCİ VE *k*-LUCAS KUATERNİYONLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümünde sırasıyla *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas kuaterniyonlarının tanımları, Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, üstel üreteç fonksiyonları ve bu kuaterniyonları içeren bazı binomiyal toplam formülleri verilecektir.

Yakın zamanda yayınlanan sonuçlar ve benzer tarzlarda genelleştirmeler için [38-40, 42-44] e bakılabilir.

Tanım 4.1 **([38])** *k*-Fibonacci kuaterniyonu $D_{k,n}$ ve *k*-Lucas kuaterniyonu $P_{k,n}$, $n \geq 0$ için,

$$D_{k,n} = F_{k,n} + F_{k,n+1}\boldsymbol{i} + F_{k,n+2}\boldsymbol{j} + F_{k,n+3}\boldsymbol{k}$$

ve

$$P_{k,n} = L_{k,n} + L_{k,n+1}\boldsymbol{i} + L_{k,n+2}\boldsymbol{j} + L_{k,n+3}\boldsymbol{k}$$

formunda tanımlanır. Burada $F_{k,n}$ ve $L_{k,n}$, sırasıyla *n*. *k*-Fibonacci ve *n*. *k*-Lucas sayısıdır.

Teorem 4.2 **([36])** $n \geq 0$ için, *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas kuaterniyonlarının Binet formülleri sırasıyla

$$D_{k,n} = \frac{\underline{\lambda}\lambda^n - \underline{\mu}\mu^n}{\lambda - \mu}$$

ve

$$P_{k,n} = \underline{\lambda}\lambda^n + \underline{\mu}\mu^n$$

dir. Burada $\underline{\lambda} = 1 + \lambda\boldsymbol{i} + \lambda^2\boldsymbol{j} + \lambda^3\boldsymbol{k}$, $\underline{\mu} = 1 + \mu\boldsymbol{i} + \mu^2\boldsymbol{j} + \mu^3\boldsymbol{k}$ ve $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ (2.9) çarpım kurallarını sağlayan taban elemanlarıdır.

Teorem 4.3 $\left(\textbf{[38]}\right)$ *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$F_k(t)=\frac{D_{k,0}+\left(D_{k,1}-kD_{k,0}\right)t}{1-kt-t^2}$$

ve

$$G_k(t)=\frac{P_{k,0}+\left(P_{k,1}-kP_{k,0}\right)t}{1-kt-t^2}$$

dir.

Teorem 4.4 *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas kuaterniyonlarının üstel üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_{k,n}}{n!}t^n=\frac{\underline{\lambda}e^{\lambda t}-\underline{\mu}e^{\mu t}}{\lambda-\mu}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_{k,n}}{n!}t^n=\underline{\lambda}e^{\lambda t}+\underline{\mu}e^{\mu t}$$

dir.

İspat. *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas kuaterniyonlarının Binet formülünden

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_{k,n}}{n!}t^n&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\underline{\lambda}\lambda^n-\underline{\mu}\mu^n}{\lambda-\mu}\right)\frac{t^n}{n!}\\&=\frac{\underline{\lambda}}{\lambda-\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}-\frac{\underline{\mu}}{\lambda-\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu t)^n}{n!}\\&=\frac{\underline{\lambda}e^{\lambda t}-\underline{\mu}e^{\mu t}}{\lambda-\mu}\end{aligned}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_{k,n}}{n!}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\underline{\lambda}\lambda^n+\underline{\mu}\mu^n\right)\frac{t^n}{n!}$$

$$=\underline{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}+\underline{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu t)^n}{n!}$$

$$=\underline{\lambda}e^{\lambda t}+\underline{\mu}e^{\mu t}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi aşağıda verilecek olan sonuçların sadece ilk formülleri ispatlanacak olup diğerleri benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 4.5 $n,m\geq 0$ için

(i) $$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}D_{k,2i+m}=\begin{cases}\Delta^{\frac{n}{2}}D_{k,n+m},\ n\ çift\ ise\\ \Delta^{\frac{n-1}{2}}P_{k,n+m},\ n\ tek\ ise\end{cases}$$

(ii) $$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}P_{k,2i+m}=\begin{cases}\Delta^{\frac{n}{2}}P_{k,n+m},\ n\ çift\ ise\\ \Delta^{\frac{n+1}{2}}D_{k,n+m},\ n\ tek\ ise\end{cases}$$

(iii) $$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^iD_{k,2i+m}=(-k)^nD_{k,n+m}$$

(iv) $$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^iP_{k,2i+m}=(-k)^nP_{k,n+m}$$

dir.

İspat. Binomiyal teoremi ve Fibonacci kuaterniyonlarının Binet formülü göz önüne alınırsa

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}D_{k,2i+m}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{\underline{\lambda}\lambda^{2i+m}-\underline{\mu}\mu^{2i+m}}{\lambda-\mu}\right)$$

$$=\frac{\underline{\lambda}\lambda^m}{\lambda-\mu}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\lambda^{2i}-\frac{\underline{\mu}\mu^m}{\lambda-\mu}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mu^{2i}$$

$$=\frac{\underline{\lambda}\lambda^m}{\lambda-\mu}\left(1+\lambda^2\right)^n-\frac{\underline{\mu}\mu^m}{\lambda-\mu}\left(1+\mu^2\right)^n$$

$$=\frac{\lambda\lambda^m}{\lambda-\mu}\left(\lambda\sqrt{\Delta}\right)^n-\frac{\mu\mu^m}{\lambda-\mu}\left(-\mu\sqrt{\Delta}\right)^n$$

$$=\begin{cases}\Delta^{\frac{n}{2}}D_{k,n+m}, \, n \text{ çift ise}\\ \Delta^{\frac{n-1}{2}}P_{k,n+m}, \, n \text{ tek ise}\end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 4.6 $\left(\textbf{[38]}\right)$ $n\geq 0$ için

(i) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}k^i D_{k,i}=D_{k,2n}$,

(ii) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}k^i P_{k,i}=P_{k,2n}$

dir.

Teorem 4.7 $n\geq 0$ için

(i) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{2i}D_{k,4i}=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\Delta^{\frac{n}{2}}+k^n\right)D_{k,n}, \, n \text{ çift ise}\\ \frac{1}{2}\left(\Delta^{\frac{n-1}{2}}P_{k,n}-k^nD_{k,n}\right), \, n \text{ tek ise}\end{cases}$

(ii) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{2i}P_{k,4i}=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\Delta^{\frac{n}{2}}+k^n\right)P_{k,n}, \, n \text{ çift ise}\\ \frac{1}{2}\left(\Delta^{\frac{n+1}{2}}D_{k,n}-k^nP_{k,n}\right), \, n \text{ tek ise}\end{cases}$

(iii) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{2i+1}D_{k,4i+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\Delta^{\frac{n}{2}}-k^n\right)D_{k,n}, \, n \text{ çift ise}\\ \frac{1}{2}\left(\Delta^{\frac{n-1}{2}}P_{k,n}+k^nD_{k,n}\right), \, n \text{ tek ise}\end{cases}$

(iv) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{2i+1}P_{k,4i+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\Delta^{\frac{n}{2}}-k^n\right)P_{k,n}, \, n \text{ çift ise}\\ \frac{1}{2}\left(\Delta^{\frac{n+1}{2}}D_{k,n}+k^nP_{k,n}\right), \, n \text{ tek ise}\end{cases}$

dir.

İspat. Teorem 4.5 dikkate alınırsa

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{2i}D_{k,4i}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(1+(-1)^{i}\right)D_{k,2i}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}D_{k,2i}+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{i}D_{k,2i}\right]$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\Delta^{\frac{n}{2}}+k^{n}\right)D_{k,n},\ n\ çift\ ise\\ \frac{1}{2}\left(\Delta^{\frac{n-1}{2}}P_{k,n}-k^{n}D_{k,n}\right),\ n\ tek\ ise\end{cases}$$

olduğu görülür.

Teorem 4.8 $n\geq 0$ için

(i) $$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}D_{k,i}^{2}=\begin{cases}\Delta^{\frac{n-2}{2}}\left(2P_{k,n}-\left(L_{k,5}+k\right)L_{k,n+1}-\left(L_{k,4}+L_{k,0}\right)L_{k,n}\right),n\ çift\ ise\\ \Delta^{\frac{n-1}{2}}\left(2D_{k,n}-\left(L_{k,5}+k\right)F_{k,n+1}-\left(L_{k,4}+L_{k,0}\right)F_{k,n}\right),n\ tek\ ise\end{cases}$$

(ii) $$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}P_{k,i}^{2}=\begin{cases}\Delta^{\frac{n}{2}}\left(2P_{k,n}-\left(L_{k,5}+k\right)L_{k,n+1}-\left(L_{k,4}+L_{k,0}\right)L_{k,n}\right),n\ çift\ ise\\ \Delta^{\frac{n+1}{2}}\left(2D_{k,n}-\left(L_{k,5}+k\right)F_{k,n+1}-\left(L_{k,4}+L_{k,0}\right)F_{k,n}\right),n\ tek\ ise\end{cases}$$

dir.

İspat. Kuaterniyon çarpımından hemen

$$\left(\underline{\lambda}\right)^{2}=2\underline{\lambda}-\left(\left(L_{k,5}+k\right)\lambda+L_{k,4}+L_{k,0}\right)$$

ve

$$\left(\underline{\mu}\right)^{2}=2\underline{\mu}-\left(\left(L_{k,5}+k\right)\mu+L_{k,4}+L_{k,0}\right)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}D_{k,i}^{2}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{\underline{\lambda}\lambda^{i}-\underline{\mu}\mu^{i}}{\lambda-\mu}\right)^{2}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\left(\underline{\lambda}\right)^{2}\lambda^{2i}+\left(\underline{\mu}\right)^{2}\mu^{2i}-\underline{\lambda}\underline{\mu}\left(\lambda\mu\right)^{i}-\underline{\mu}\underline{\lambda}\left(\lambda\mu\right)^{i}\right)$$

$$=\frac{1}{\Delta}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\left(\underline{\lambda}\right)^{2}\lambda^{2i}+\left(\underline{\mu}\right)^{2}\mu^{2i}\right)-\frac{\underline{\lambda}\underline{\mu}}{\Delta}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{i}-\frac{\underline{\mu}\underline{\lambda}}{\Delta}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{i}$$

$$=\frac{\left(\underline{\lambda}\right)^{2}}{\Delta}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\lambda^{2i}+\frac{\left(\underline{\mu}\right)^{2}}{\Delta}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mu^{2i}$$

$$=\frac{\left(\underline{\lambda}\right)^{2}}{\Delta}\left(1+\lambda^{2}\right)^{n}+\frac{\left(\underline{\mu}\right)^{2}}{\Delta}\left(1+\mu^{2}\right)^{n}$$

$$=\frac{\left(\underline{\lambda}\right)^{2}}{\Delta}\left(\lambda\sqrt{\Delta}\right)^{n}+\frac{\left(\underline{\mu}\right)^{2}}{\Delta}\left(-\mu\sqrt{\Delta}\right)^{n}$$

$$=\Delta^{\frac{n-2}{2}}\left(\left(\underline{\lambda}\right)^{2}\lambda^{n}+\left(\underline{\mu}\right)^{2}(-\mu)^{n}\right)$$

$$=\begin{cases}\Delta^{\frac{n-2}{2}}\left(2P_{k,n}-\left(L_{k,5}+k\right)L_{k,n+1}-\left(L_{k,4}+L_{k,0}\right)L_{k,n}\right), n \text{ çift ise}\\ \Delta^{\frac{n-1}{2}}\left(2D_{k,n}-\left(L_{k,5}+k\right)F_{k,n+1}-\left(L_{k,4}+L_{k,0}\right)F_{k,n}\right), n \text{ tek ise}\end{cases}$$

elde edilir.

Not edelim ki, Teorem 4.8 de $k=1$ alınırsa sırasıyla

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}Q_{i}^{2}=\begin{cases}5^{\frac{n-2}{2}}\left(2K_{n}-L_{n}-4L_{n+4}\right), n \text{ çift ise}\\ 5^{\frac{n-1}{2}}\left(2Q_{n}-F_{n}-4F_{n+4}\right), n \text{ tek ise}\end{cases}$$

ve

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}K_{i}^{2}=\begin{cases}5^{\frac{n}{2}}\left(2K_{n}-L_{n}-4L_{n+4}\right), n \text{ çift ise}\\ 5^{\frac{n+1}{2}}\left(2Q_{n}-F_{n}-4F_{n+4}\right), n \text{ tek ise}\end{cases}$$

elde edilir. Burada Q_i ve K_i sırasıyla [37] de tanımlanan *i*. Fibonacci kuaterniyonu ve *i*. Lucas kuaterniyonudur.

BÖLÜM 5

SPLİT *k*-FİBONACCİ VE *k*-LUCAS KUATERNİYONLARI

Bu bölümde ilk olarak split *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas kuaterniyonları tanıtılacaktır. Daha sonra sırasıyla bu kuaterniyonların Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları verilecektir. Ayrıca bu genel kuaterniyonların Catalan, Cassini ve d'Ocagne özellikleri incelenecektir.

Belirtelim ki, bu bölüm, [45] deki bazı sonuçların genelleştirmelerini içermektedir. İlave olarak bazı kombinatoriyal özellikler incelenmiştir.

Şimdi split *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas kuaterniyonlarının tanımlarını vererek başlayalım.

Tanım 5.1 $n \geq 0$ için, split *k*-Fibonacci ve split *k*-Lucas kuaterniyonları sırasıyla

$$M_{k,n} = F_{k,n} + F_{k,n+1}\boldsymbol{i} + F_{k,n+2}\boldsymbol{j} + F_{k,n+3}\boldsymbol{k} \tag{5.1}$$

ve

$$N_{k,n} = L_{k,n} + L_{k,n+1}\boldsymbol{i} + L_{k,n+2}\boldsymbol{j} + L_{k,n+3}\boldsymbol{k} \tag{5.2}$$

formunda tanımlanır. Burada $F_{k,n}$ ve $L_{k,n}$ sırasıyla *n*. *k*-Fibonacci ve *n*. *k*-Lucas sayılarıdır. Yukarıdaki tanımda geçen $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ (2.10) çarpım kurallarını sağlayan taban elemanlarıdır.

Hemen belirtelim ki, Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları ile split Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları arasındaki temel fark kuaterniyonik birimlerden kaynaklanmaktadır.

Yukarıda verilen tanımdan direkt olarak akla hemen bu kuaterniyonların sağladığı rekürans bağıntısı nedir sorusu gelebilir. Aşağıdaki önerme bu sorunun cevabını vermektedir.

Önerme 5.2 $n \geq 0$ için, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i) $M_{k,n+2} = kM_{k,n+1} + M_{k,n}$,

(ii) $N_{k,n+2} = kN_{k,n+1} + N_{k,n}$.

İspat. (i) Eş. (2.3) ve Eş. (5.1) den

$$kM_{k,n+1}+M_{k,n}=k(F_{k,n+1}+F_{k,n+2}\boldsymbol{i}+F_{k,n+3}\boldsymbol{j}+F_{k,n+4}\boldsymbol{k})+F_{k,n}+F_{k,n+1}\boldsymbol{i}+F_{k,n+2}\boldsymbol{j}+F_{k,n+3}\boldsymbol{k}$$

$$=kF_{k,n+1}+F_{k,n}+\left(kF_{k,n+2}+F_{k,n+1}\right)\boldsymbol{i}+\left(kF_{k,n+3}+F_{k,n+2}\right)\boldsymbol{j}+\left(kF_{k,n+4}+F_{k,n+3}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=F_{k,n+2}+F_{k,n+3}\boldsymbol{i}+F_{k,n+4}\boldsymbol{j}+F_{k,n+5}\boldsymbol{k}$$

$$=M_{k,n+2}.$$

elde edilir.

(ii) Eş. (2.4) ve Eş. (5.2) göz önüne alınırsa ispat (i) şıkkına benzer şekilde yapılır.
Aşağıdaki teorem, split *k*-Fibonacci ve split *k*-Lucas kuaterniyonlarının kapalı formlarını veren Binet formüllerini ifade eder.

Teorem 5.3 $n\geq 0$ için,

$$M_{k,n}=\frac{\underline{\lambda}\lambda^n-\underline{\mu}\mu^n}{\lambda-\mu}$$

ve

$$N_{k,n}=\underline{\lambda}\lambda^n+\underline{\mu}\mu^n$$

dir. Burada $\underline{\lambda}=1+\lambda\boldsymbol{i}+\lambda^2\boldsymbol{j}+\lambda^3\boldsymbol{k}$, $\underline{\mu}=1+\mu\boldsymbol{i}+\mu^2\boldsymbol{j}+\mu^3\boldsymbol{k}$ ve $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ (2.10) çarpım kurallarını sağlayan taban elemanlarıdır.

İspat. *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas sayılarının Binet formülleri kullanılarak sırasıyla

$$M_{k,n}=F_{k,n}+F_{k,n+1}\boldsymbol{i}+F_{k,n+2}\boldsymbol{j}+F_{k,n+3}\boldsymbol{k}=\frac{\lambda^n-\mu^n}{\lambda-\mu}+\left(\frac{\lambda^{n+1}-\mu^{n+1}}{\lambda-\mu}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\lambda^{n+2}-\mu^{n+2}}{\lambda-\mu}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\lambda^{n+3}-\mu^{n+3}}{\lambda-\mu}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=\frac{\lambda^n}{\lambda-\mu}\left(1+\lambda\boldsymbol{i}+\lambda^2\boldsymbol{j}+\lambda^3\boldsymbol{k}\right)-\frac{\mu^n}{\lambda-\mu}\left(1+\mu\boldsymbol{i}+\mu^2\boldsymbol{j}+\mu^3\boldsymbol{k}\right)$$

$$=\frac{\underline{\lambda}\lambda^n-\underline{\mu}\mu^n}{\lambda-\mu}$$

ve

$$N_{k,n} = L_{k,n} + L_{k,n+1}\boldsymbol{i} + L_{k,n+2}\boldsymbol{j} + L_{k,n+3}\boldsymbol{k}$$

$$= \lambda^n + \mu^n + \left(\lambda^{n+1} + \mu^{n+1}\right)\boldsymbol{i} + \left(\lambda^{n+2} + \mu^{n+2}\right)\boldsymbol{j} + \left(\lambda^{n+3} + \mu^{n+3}\right)\boldsymbol{k}$$

$$= \lambda^n\left(1 + \lambda\boldsymbol{i} + \lambda^2\boldsymbol{j} + \lambda^3\boldsymbol{k}\right) + \mu^n\left(1 + \mu\boldsymbol{i} + \mu^2\boldsymbol{j} + \mu^3\boldsymbol{k}\right)$$

$$= \underline{\lambda}\lambda^n + \underline{\mu}\mu^n$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.4 Split k-Fibonacci ve k-Lucas kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$F_k(t) = \frac{M_{k,0} + \left(M_{k,1} - kM_{k,0}\right)t}{1 - kt - t^2}$$

ve

$$L_k(t) = \frac{N_{k,0} + \left(N_{k,1} - kN_{k,0}\right)t}{1 - kt - t^2}$$

formundadır.

İspat. $F_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} M_{k,n}t^n$ ve $L_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} N_{k,n}t^n$ olsun. O zaman

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{k,n}t^n - kt\sum_{n=0}^{\infty} M_{k,n}t^n - t^2\sum_{n=0}^{\infty} M_{k,n}t^n = M_{k,0} + \left(M_{k,1} - kM_{k,0}\right)t + \sum_{n=2}^{\infty}\left(M_{k,n} - kM_{k,n-1} - M_{k,n-2}\right)t^n$$

elde edilir. $n \geq 2$ için eşitliğin sağ tarafındaki t^n nin katsayısı sıfır olacağından

$$F_k(t) = \frac{M_{k,0} + \left(M_{k,1} - kM_{k,0}\right)t}{1 - kt - t^2}$$

dir. Benzer şekilde

$$L_k(t) = \frac{N_{k,0} + \left(N_{k,1} - kN_{k,0}\right)t}{1 - kt - t^2}$$

elde edilir.

Şimdi split k-Fibonacci ve k-Lucas kuaterniyonlarının Catalan, Cassini ve d'Ocagne özelliklerini elde edebilmek için gerekli olan bir lemma verilecektir.

Lemma 5.5 $r>0$ ve $m-n>1$ için

$$\frac{\underline{\lambda}\underline{\mu}\mu^r-\underline{\mu}\underline{\lambda}\lambda^r}{\lambda-\mu}=\left(-2F_{k,r},2F_{k,r-1},-2F_{k,r+2},L_{k,r}-L_{k,3}F_{k,r}\right) \tag{5.3}$$

ve

$$\frac{\lambda^{m-n}\underline{\lambda}\underline{\mu}-\mu^{m-n}\underline{\mu}\underline{\lambda}}{\lambda-\mu}=\left(2F_{k,m-n},2F_{k,m-n+1},2F_{k,m-n-2},L_{k,3}F_{k,m-n}+L_{k,m-n}\right) \tag{5.4}$$

dir.

İspat.

$$\underline{\lambda}\underline{\mu}=2+2\lambda\boldsymbol{i}+2\mu^2\boldsymbol{j}+\left(\lambda^3+\mu^3+\lambda-\mu\right)\boldsymbol{k}$$

ve

$$\underline{\mu}\underline{\lambda}=2+2\mu\boldsymbol{i}+2\lambda^2\boldsymbol{j}+\left(\lambda^3+\mu^3+\mu-\lambda\right)\boldsymbol{k}$$

olduğundan

$$\frac{\underline{\lambda}\underline{\mu}\mu^r-\underline{\mu}\underline{\lambda}\lambda^r}{\lambda-\mu}=\left(-2F_{k,r},2F_{k,r-1},-2F_{k,r+2},L_{k,r}-L_{k,3}F_{k,r}\right)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\frac{\lambda^{m-n}\underline{\lambda}\underline{\mu}-\mu^{m-n}\underline{\mu}\underline{\lambda}}{\lambda-\mu}=\left(2F_{k,m-n},2F_{k,m-n+1},2F_{k,m-n-2},L_{k,3}F_{k,m-n}+L_{k,m-n}\right)$$

dir.

Teorem 5.6 (Catalan Özelliği) $n\geq r$ olmak üzere n ve r keyfi pozitif tamsayılar olsun. O zaman

$$M_{k,n-r}M_{k,n+r}-M_{k,n}^2=(-1)^{n-r}F_{k,r}\left(-2F_{k,r},2F_{k,r-1},-2F_{k,r+2},L_{k,r}-L_{k,3}F_{k,r}\right)$$

ve

$$N_{k,n-r}N_{k,n+r}-N_{k,n}^2=(-1)^{n-r+1}(k^2+4)F_{k,r}\left(-2F_{k,r},2F_{k,r-1},-2F_{k,r+2},L_{k,r}-L_{k,3}F_{k,r}\right)$$

dir.

İspat. Split k-Fibonacci kuaterniyonlarının Binet formülü ve Eş. (5.3) birlikte kullanılırsa

$$M_{k,n-r}M_{k,n+r}-M_{k,n}^2=\left(\frac{\underline{\lambda}\lambda^{n-r}-\underline{\mu}\mu^{n-r}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\underline{\lambda}\lambda^{n+r}-\underline{\mu}\mu^{n+r}}{\lambda-\mu}\right)-\left(\frac{\underline{\lambda}\lambda^{n}-\underline{\mu}\mu^{n}}{\lambda-\mu}\right)^2$$

$$=(\lambda\mu)^n\left(\frac{\lambda^r-\mu^r}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\dfrac{\underline{\lambda}\underline{\mu}}{\lambda^r}-\dfrac{\underline{\mu}\underline{\lambda}}{\mu^r}}{\lambda-\mu}\right)$$

$$=(-1)^{n-r}F_{k,r}\left(\frac{\underline{\lambda}\underline{\mu}\mu^r-\underline{\mu}\underline{\lambda}\lambda^r}{\lambda-\mu}\right)$$

$$=(-1)^{n-r}F_{k,r}\left(-2F_{k,r},2F_{k,r-1},-2F_{k,r+2},L_{k,r}-L_{k,3}F_{k,r}\right)$$

elde edilir. İddianın diğer kısmı da benzer şekilde ispatlanır.

Sonuç 5.7 (Cassini Özelliği) $n\geq 1$ için

$$M_{k,n-1}M_{k,n+1}-M_{k,n}^2=(-1)^n\left(2+2F_{k,3}\boldsymbol{j}+kL_{k,2}\boldsymbol{k}\right)$$

ve

$$N_{k,n-1}N_{k,n+1}-N_{k,n}^2=(-1)^{n+1}(k^2+4)\left(2+2F_{k,3}\boldsymbol{j}+kL_{k,2}\boldsymbol{k}\right)$$

dir.

İspat. Cassini özelliği, Catalan özelliğinin $r=1$ özel durumu olduğundan ispat açıktır.

Teorem 5.8 (d'Ocagne Özelliği) *n* negatif olmayan bir tamsayı ve *m* bir doğal sayı olsun. Eğer $m > n+1$ ise o zaman

$$M_{k,m}M_{k,n+1} - M_{k,m+1}M_{k,n} = (-1)^n \left(2F_{k,m-n}, 2F_{k,m-n+1}, 2F_{k,m-n-2}, L_{k,3}F_{k,m-n} + L_{k,m-n}\right)$$

ve

$$N_{k,m}N_{k,n+1} - N_{k,m+1}N_{k,n} = (-1)^{n+1}(k^2+4)\left(2F_{k,m-n}, 2F_{k,m-n+1}, 2F_{k,m-n-2}, L_{k,3}F_{k,m-n} + L_{k,m-n}\right)$$

dir.

İspat. Split *k*-Fibonacci kuaterniyonlarının Binet formülü ve Eş. (5.4) birlikte kullanılırsa

$$M_{k,m}M_{k,n+1} - M_{k,m+1}M_{k,n} = \left(\frac{\underline{\lambda}\lambda^m - \underline{\mu}\mu^m}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\underline{\lambda}\lambda^{n+1} - \underline{\mu}\mu^{n+1}}{\lambda-\mu}\right) - \left(\frac{\underline{\lambda}\lambda^{m+1} - \underline{\mu}\mu^{m+1}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\underline{\lambda}\lambda^n - \underline{\mu}\mu^n}{\lambda-\mu}\right)$$

$$= \frac{(\lambda\mu)^n\left(\lambda^{m-n}\underline{\lambda}\underline{\mu} - \mu^{m-n}\underline{\mu}\underline{\lambda}\right)}{\lambda-\mu}$$

$$= (-1)^n\left(2F_{k,m-n}, 2F_{k,m-n+1}, 2F_{k,m-n-2}, L_{k,3}F_{k,m-n} + L_{k,m-n}\right)$$

elde edilir. İddianın diğer kısmı da benzer şekilde ispatlanır.

BÖLÜM 6

FİBONACCİ VE LUCAS KUATERNİYONLARININ BİR GENELLEŞTİRMESİ

Bu tezin son bölümünde, daha önceki bölümlerde verilen bazı sonuçların bir genelleştirmesi türetilecektir. İlk olarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının tanımları, daha sonra bu kuaterniyonların bazı kombinatoriyal özellikleri verilecektir.

Tanım 6.1 a ve b sıfırdan farklı herhangi iki reel sayı olmak üzere genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyon dizisi $\{U_n\}$, $n \geq 2$ için,

$$U_n = \begin{cases} aU_{n-1} + U_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ bU_{n-1} + U_{n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanır. Burada $U_0 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $U_1 = 1 + \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ ve $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ (2.9) çarpım kurallarını sağlayan taban elemanlarıdır.
Hemen belirtelim ki, bu yeni genelleştirme a ve b nin her farklı seçiminde birbirinden farklı dizilerin türetilmesine olanak sağlayan bir diziler ailesidir. Örneğin, $a = b = 1$ alınırsa bu dizi [37] de verilen Fibonacci kuaterniyon dizisine indirgenir.

Tanım 6.2 a ve b sıfırdan farklı herhangi iki reel sayı olmak üzere genelleştirilmiş Lucas kuaterniyon dizisi $\{V_n\}$, $n \geq 2$ için,

$$V_n = \begin{cases} aV_{n-1} + V_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ bV_{n-1} + V_{n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanır. Burada $V_0 = 2 + \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, $V_1 = 1 + 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$ ve $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ (2.9) çarpım kurallarını sağlayan taban elemanlarıdır.
İlk tanıma benzer şekilde bu yeni genelleştirme de a ve b nin her farklı seçiminde birbirinden farklı dizilerin türetilmesine olanak sağlayan bir diziler ailesidir. Örneğin $a = b = 1$ alınırsa, bu dizi, [37] de verilen Lucas kuaterniyon dizisine indirgenir.

Bu bölümün devamındaki bazı sonuçlara temel teşkil edecek bir lemma ispatsız olarak aşağıda sunulmuştur.

Lemma 6.3 Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas kuaterniyon dizileri aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) $U_{2n} = (ab+2)U_{2n-2} - U_{2n-4}$,

(ii) $U_{2n+1} = (ab+2)U_{2n-1} - U_{2n-3}$,

(iii) $V_{2n} = (ab+2)V_{2n-2} - V_{2n-4}$,

(iv) $V_{2n+1} = (ab+2)V_{2n-1} - V_{2n-3}$.

Aşağıdaki teorem genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonlarını ifade eder.

Teorem 6.4 Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$F(x) = \frac{(bU_0 - U_1)x^3 + (aU_1 - (ab+1)U_0)x^2 + U_1x + U_0}{1-(ab+2)x^2 + x^4}$$

ve

$$G(x) = \frac{(bV_0 - V_1)x^3 + (aV_1 - (ab+1)V_0)x^2 + V_1x + V_0}{1-(ab+2)x^2 + x^4}$$

dir.

İspat. $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n$ ve $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n x^n$ olsun. O zaman

$$F(x) - bxF(x) - x^2F(x) = U_0 + (U_1 - bU_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} (U_n - bU_{n-1} - U_{n-2})x^n$$

eşitliği elde edilir.

$$U_{2m+1} = bU_{2m} + U_{2m-1}$$

olduğundan

$$\left(1-bx-x^2\right)F(x)=U_0+\left(U_1-bU_0\right)x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(U_{2n}-bU_{2n-1}-U_{2n-2}\right)x^{2n}$$

bulunur. Bunun yanında

$U_{2m}=aU_{2m-1}+U_{2m-2}$

olduğundan

$$\left(1-bx-x^2\right)F(x)=U_0+\left(U_1-bU_0\right)x+(a-b)x\sum_{n=1}^{\infty}U_{2n-1}x^{2n-1} \tag{6.1}$$

dir.

Lemma 6.3 teki (ii) den

$$\left(1-(ab+2)x^2+x^4\right)\sum_{n=1}^{\infty}U_{2n-1}x^{2n-1}=U_1x+\left(U_3-\left(ab+2\right)U_1\right)x^3+\sum_{n=3}^{\infty}\left(U_{2n-1}-\left(ab+2\right)U_{2n-3}+U_{2n-5}\right)x^{2n-1}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}U_{2n-1}x^{2n-1}=\frac{U_1x+\left(U_3-\left(ab+2\right)U_1\right)x^3}{1-(ab+2)x^2+x^4} \tag{6.2}$$

olur. Nihayetinde Eş. (6.1) ve Eş. (6.2) göz önüne alınırsa

$$F(x)=\frac{\left(bU_0-U_1\right)x^3+\left(aU_1-(ab+1)U_0\right)x^2+U_1x+U_0}{1-(ab+2)x^2+x^4}$$

elde edilir. Benzer mantıkla

$$G(x)=\frac{\left(bV_0-V_1\right)x^3+\left(aV_1-(ab+1)V_0\right)x^2+V_1x+V_0}{1-(ab+2)x^2+x^4}$$

olduğu görülür.

Eğer Teorem 6.4 de $a=b=1$ alınırsa [37] de verilen Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonları elde edilir.

Aşağıdaki teoremde genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının kapalı formlarını veren Binet formülleri sunulacaktır.

Teorem 6.5 $n \geq 0$ için,

$$U_n = \frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \left(\frac{\alpha^* \alpha^n - \beta^* \beta^n}{\alpha - \beta} \right)$$

ve

$$V_n = \frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \left(\alpha' \alpha^n + \beta' \beta^n \right)$$

dir. Burada $\alpha^* = U_1 + bU_0\alpha^{-1}$, $\beta^* = U_1 + bU_0\beta^{-1}$, $\alpha' = \frac{V_1 + bV_0\alpha^{-1}}{\alpha - \beta}$ ve $\beta' = -\frac{V_1 + bV_0\beta^{-1}}{\alpha - \beta}$ dir.

İspat. Teoremi ispatlamak için [25] de verilen yöntemi kullanacağız. Şimdi [19] da verilen aşağıdaki eşitliği göz önüne alalım:

$$Q_n = Dq_n + C\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)} q_{n-1}.$$

Burada

$$Q_n = \begin{cases} aQ_{n-1} + Q_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ bQ_{n-1} + Q_{n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olmak üzere $Q_0 = C$ ile $Q_1 = D$, $\{Q_n\}$ dizisinin başlangıç koşullarıdır. Eğer $C = U_0$ ve $D = U_1$ alınırsa

$$U_n = U_1\left(\frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}}\right)\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} + U_0\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)}\left(\frac{a^{1-\xi(n-1)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n-1}{2}\right\rfloor}}\right)\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$$

$$= U_1\left(\frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}}\right)\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} + bU_0\left(\frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}}\right)\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$$

$$= \left(\frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}}\right)\left(U_1\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} + bU_0\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)$$

$$= \left(\frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}}\right)\frac{\alpha^n\left(U_1+bU_0\alpha^{-1}\right)-\beta^n\left(U_1+bU_0\beta^{-1}\right)}{\alpha-\beta}$$

$$= \left(\frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}}\right)\frac{\alpha^*\alpha^n-\beta^*\beta^n}{\alpha-\beta}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$V_n = \frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}}\left(\alpha'\alpha^n+\beta'\beta^n\right)$$

olduğu görülür.

Not edelim ki, Teorem 6.5, $a=b=1$ için [36] daki Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının Binet formüllerini verir.

Teorem 6.6 $n \geq 0$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-\xi(n+1)}(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}U_n\frac{x_n}{n!} = \frac{\alpha^* e^{\alpha x}-\beta^* e^{\beta x}}{\alpha-\beta}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-\xi(n+1)} (ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} V_n \frac{x_n}{n!} = \alpha^{'} e^{\alpha x} + \beta^{'} e^{\beta x}$$

dir.

İspat.

$$a^{-\xi(n+1)} (ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} = 1$$

olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-\xi(n+1)} (ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} U_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{n} - \beta^{*}\beta^{n}}{\alpha - \beta} \right) \frac{x^n}{n!}$$

$$= \frac{\alpha^{*}}{\alpha-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n!} - \frac{\beta^{*}}{\alpha-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta x)^n}{n!}$$

$$= \frac{\alpha^{*} e^{\alpha x} - \beta^{*} e^{\beta x}}{\alpha - \beta}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-\xi(n+1)} (ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} V_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha^{'}\alpha^{n} + \beta^{'}\beta^{n} \right) \frac{x^n}{n!}$$

$$= \alpha^{'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n!} + \beta^{'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta x)^n}{n!}$$

$$= \alpha^{'} e^{\alpha x} + \beta^{'} e^{\beta x}$$

sonucuna varılır.

Teorem 6.7 (Cassini Özelliği) $n > 0$ için,

$$a^{1-\xi(n)} b^{\xi(n)} U_{n-1} U_{n+1} - a^{\xi(n)} b^{1-\xi(n)} U_n^2 = a(-1)^n \left(U_1^2 - bU_0U_1 - \frac{b}{a} U_0^2 \right)$$

ve

$$a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}V_{n-1}V_{n+1}-a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}V_n^2=a(-1)^n\left(V_1^2-bV_0V_1-\frac{b}{a}V_0^2\right)$$

dir.

İspat. Genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonlarının Binet formülü ve bazı sadeleştirmelerden sonra

$$a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}U_{n-1}U_{n+1}=a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}\left(\frac{a^{1-\xi(n-1)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}}\right)\left(\frac{a^{1-\xi(n+1)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}}\right)\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n-1}-\beta^*\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n+1}-\beta^*\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)$$

$$=\left(\frac{b^{\xi(n)}a^{2-\xi(n+1)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}}\right)\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n-1}-\beta^*\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^*\alpha^{n+1}-\beta^*\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)$$

$$=\left(\frac{a}{(ab)^{n-1}}\right)\frac{(\alpha*)^2\alpha^{2n}-\alpha^*\beta^*\alpha^{n-1}\beta^{n+1}-\beta^*\alpha^*\alpha^{n+1}\beta^{n-1}+(\beta*)^2\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2}$$

ve

$$a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}U_n^2=a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}\left(\frac{a^{2-2\xi(n)}}{(ab)^{2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}\right)\frac{(\alpha*)^2\alpha^{2n}-\alpha^*\beta^*\alpha^n\beta^n-\beta^*\alpha^*\alpha^n\beta^n+(\beta*)^2\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$=\left(\frac{a}{(ab)^{n-1}}\right)\frac{(\alpha*)^2\alpha^{2n}-\alpha^*\beta^*\alpha^n\beta^n-\beta^*\alpha^*\alpha^n\beta^n+(\beta*)^2\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}U_{n-1}U_{n+1}-a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}U_n^2=\left(\frac{a}{(ab)^{n-1}}\right)(\alpha\beta)^n\frac{\alpha^*\beta^*\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)+\beta^*\alpha^*\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$=\left(\frac{a}{(ab)^{n-1}}\right)(\alpha\beta)^{n-1}\frac{\alpha^*\beta^*\beta-\beta^*\alpha^*\alpha}{\alpha-\beta}$$

$$=a(-1)^{n-1}\frac{\left(U_1+bU_0\alpha^{-1}\right)\left(U_1\beta+bU_0\right)-\left(U_1+bU_0\beta^{-1}\right)\left(U_1\alpha+bU_0\right)}{\alpha-\beta}$$

$$=a(-1)^n\left(U_1^2-bU_0U_1-\frac{b}{a}U_0^2\right)$$

olduğu görülür.

Not edelim ki, Teorem 6.7 de özel olarak $a=b=1$ alınırsa [37] de verilen Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının Cassini özelliği elde edilir.

Teorem 6.8 $n\geq 1$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i) $U_{n+1}q_n-U_nq_{n+1}=(-1)^{n+1}U_0$,

(ii) $V_{n+1}q_n-V_nq_{n+1}=(-1)^{n+1}V_0$,

(iii) $\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)}\left(U_{n-1}U_{n+3}-U_{n+1}^2\right)=(-1)^n\left(abU_1^2+bU_1U_0-b(ab+1)U_0U_1-b^2U_0^2\right)$,

(iv) $\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)}\left(V_{n-1}V_{n+3}-V_{n+1}^2\right)=(-1)^n\left(abV_1^2+bV_1V_0-b(ab+1)V_0V_1-b^2V_0^2\right)$.

İspat. Teorem 6.7 nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 6.9 Herhangi n pozitif tamsayısı için aşağıdaki toplam formülleri sağlanır:

(i) $\sum_{i=1}^{2n+1}U_i=\frac{1}{ab}\left(bU_{2n+2}+aU_{2n+1}-aU_1-bU_0\right)$,

(ii) $\sum_{i=1}^{2n}U_i=\frac{1}{ab}\left(aU_{2n+1}+bU_{2n}-aU_1-bU_0\right)$,

(iii) $\sum_{i=1}^{2n+1} V_i = \frac{1}{ab}\left(bV_{2n+2} + aV_{2n+1} - aV_1 - bV_0\right)$,

(iv) $\sum_{i=1}^{2n} V_i = \frac{1}{ab}\left(aV_{2n+1} + bV_{2n} - aV_1 - bV_0\right)$.

İspat. (i) Genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonlarının tanımından hareketle

$$\sum_{i=1}^{2n+1} U_i = \sum_{i=1}^{n} U_{2i} + \sum_{i=0}^{n} U_{2i+1}$$

$$= \frac{1}{b}\left(U_{2n+1} - U_1\right) + \frac{1}{a}\left(U_{2n+2} - U_0\right)$$

$$= \frac{1}{ab}\left(bU_{2n+2} + aU_{2n+1} - aU_1 - bU_0\right)$$

dir. (ii), (iii) ve (iv) de benzer şekilde ispatlanır.

Şimdi genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarını içeren bazı binomiyal toplam formülleri verelim. Sadece ilk sonuçlar ispatlanacak olup geriye kalan formüller benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 6.10 Herhangi n pozitif tamsayısı için aşağıdaki binomiyal toplam formülleri sağlanır:

(i) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{\xi(k)} (ab)^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} U_k = U_{2n}$,

(ii) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{\xi(k+1)} (ab)^{\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor} U_{k+1} = aU_{2n+1}$,

(iii) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{\xi(k)} (ab)^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} V_k = V_{2n}$,

(iv) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{\xi(k+1)} (ab)^{\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor} V_{k+1} = aV_{2n+1}$.

İspat. Genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonlarının Binet formülünü ve kombinatorikten bildiğimiz binom formülünü göz önüne alırsak

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{\xi(k)}(ab)^{\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor}U_k = a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\alpha^*\alpha^k-\beta^*\beta^k}{\alpha-\beta}\right)$$

$$=\frac{a\alpha^*}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k-\frac{a\beta^*}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta^k$$

$$=\frac{a\alpha^*}{\alpha-\beta}(1+\alpha)^n-\frac{a\beta^*}{\alpha-\beta}(1+\beta)^n$$

$$=\frac{a\alpha^*}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^n-\frac{a\beta^*}{\alpha-\beta}\left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^n$$

$$=\frac{a}{(ab)^n}\left(\frac{\alpha^*\alpha^{2n}-\beta^*\beta^{2n}}{\alpha-\beta}\right)$$

$$=U_{2n}.$$

elde edilir.

Şimdi son olarak Teorem 6.10 un bir genelleştirmesini verelim.

Teorem 6.11 *n* ve *r* herhangi negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{\xi(k+r)}(ab)^{\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor+\xi(k)\xi(r)}U_{k+r}=a^{\xi(r)}U_{2n+r}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{\xi(k+r)}(ab)^{\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor+\xi(k)\xi(r)}V_{k+r}=a^{\xi(r)}V_{2n+r}$$

dir.

İspat. Teorem 6.10 un ispatındaki gibi genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonlarının Binet formülünü ve binom formülünü ele alırsak

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{\xi(k+r)}(ab)^{\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor+\xi(k)\xi(r)}U_{k+r}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{\xi(k+r)}(ab)^{\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor+\xi(k)\xi(r)}\left(\frac{a^{1-\xi(k+r)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{k+r}{2}\right\rfloor}}\right)\frac{\alpha^{*}\alpha^{k+r}-\beta^{*}\beta^{k+r}}{\alpha-\beta}$$

$$=a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(ab)^{\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor+\xi(k)\xi(r)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{k+r}{2}\right\rfloor}}\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{k+r}-\beta^{*}\beta^{k+r}}{\alpha-\beta}\right)$$

$$=a(ab)^{\frac{\xi(r)-r}{2}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{k+r}-\beta^{*}\beta^{k+r}}{\alpha-\beta}\right)$$

$$=\frac{a(ab)^{\frac{\xi(r)-r}{2}}}{\alpha-\beta}\left(\alpha^{*}\alpha^{r}(1+\alpha)^{n}-\beta^{*}\beta^{r}(1+\beta)^{n}\right)$$

$$=a(ab)^{\frac{\xi(r)-r-2n}{2}}\left(\frac{\alpha^{*}\alpha^{2n+r}-\beta^{*}\beta^{2n+r}}{\alpha-\beta}\right)$$

$$=a^{\xi(r)}U_{2n+r}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Vajda S (1989) *Fibonacci and Lucas Numbers and the Golden Section*. ISBN: 0-4864-6276-5, Ellis Horwood, Chichester, 190 pp.

[2] Koshy T (2001) *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. ISBN: 0-4713-9969-8, A Wiley Interscience Publication, 652 pp.

[3] Graham R L, Knuth D E and Patashnik O (1994) *Concrete Mathematics*, 2nd edition, ISBN: 0-2015-5802-5, Addison-Wesley, 656 pp.

[4] Carlitz L (1978) Some classes of Fibonacci sums. *Fibonacci Quarterly*, 16: 411-426.

[5] Carlitz L and Ferns H H (1970) Some Fibonacci and Lucas identities. *Fibonacci Quarterly*, 8: 61-73.

[6] Hoggatt V E (1971) Some special Fibonacci and Lucas generating functions. *Fibonacci Quarterly*, 9: 121-133.

[7] Layman J W (1977) Certain general binomial-Fibonacci sums. *Fibonacci Quarterly*, 15: 362-366.

[8] Kılıç E (2008) Sums of the squares of terms of sequence $\{U_n\}$. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 118: 27-41**.**

[9] Falcon S and Plaza A (2007) On the Fibonacci *k*-numbers. *Chaos Solitons Fractals*, 32: 1615–1624.

[10] Falcon S and Plaza A (2007) The *k*-Fibonacci sequence and the Pascal 2-triangle. *Chaos Solitons Fractals*, 33: 38–49.

[11] Falcon S and Plaza A (2009) On *k*-Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives. *Chaos Solitons Fractals*, 39: 1005–1019.

[12] Falcon S (2011) On the *k*-Lucas numbers**.** *Int. J. Contemp. Math. Sci*., 6: 1039–1050.

[13] Bolat C and Köse H (2010) On the properties of *k*-Fibonacci numbers. *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, 5: 1097–1105.

[14] Borges A, Catarino P, Aires A P, Vasco P, Campos H (2014) Two-by-two matrices involving *k*-Fibonacci and *k*-Lucas sequences. *Appl. Math. Sci*., 8: 1659–1666.

[15] Catarino P (2014) On some identities for *k*-Fibonacci sequence. *Int. J. Contemp. Math. Sci*., 9: 37–42.

[16] Catarino P, Vasco P, Borges A, Campos H, Aires A P (2014) Sums, products and identities involving *k*-Fibonacci and *k*-Lucas sequences. *J. Algebra Number Theory Appl*., 32: 63–77.

[17] Ramirez J (2013) Incomplete *k*-Fibonacci and *k*-Lucas numbers. *Chin. J. Math*., Article ID 107145.

[18] Ramirez J Some properties of convolved *k*-Fibonacci numbers. *ISRN Comb*., Article ID 759641.

[19] Edson M and Yayenie O (2009) A new generalization of Fibonacci sequence and extended Binet's formula. *Integers*, 9: 639–654.

[20] Edson M, Lewis S and Yayenie O (2011) The *k*-periodic Fibonacci sequence and an extended Binet's formula. *Integers*, 11: 739–751.

[21] Yayenie O (2011) A note on generalized Fibonacci sequences. *Appl. Math. Comput*., 217: 5603–5611.

[22] Yayenie O (2012) New identities for generalized Fibonacci sequences and new generalization of Lucas sequences. *Southeast Asian Bull. Math*., 36: 739–752.

[23] Şahin M (2011) The Gelin-Cesaro identity in some conditional sequences. *Hacet. J. Math*., 40: 855–861.

[24] Şahin M (2011) The generating function of a family of the sequences in terms of the continuant. *Appl. Math. Comput*. 217: 5416–5420.

[25] Irmak N and Alp M (2013) Some identities for generalized Fibonacci and Lucas sequences. *Hacet. J. Math*., 42: 331–338.

[26] Bilgici G (2014) Two generalizations of Lucas sequence. *Appl. Math. Comput*., 245: 526–538 (2014).

[27] Gürlebeck K and Sprossig W (1997) *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers*, ISBN: 0-4719-6200-7, Wiley, Chichester, 372 pp.

[28] Ward J P (1997) *Quaternions and Cayley Numbers*. ISBN: 9-4010-6434-2, Kluwer, Dordrecht**,** 237 pp.

[29] Horadam A F (1963) Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions. *Amer. Math. Monthly*, 70: 289-291.

[30] Horadam A F (1993) Quaternion recurrence relations. *Ulam Quarterly*, 2: 23-33.

[31] Iyer M R (1969) A note on Fibonacci quaternions. *Fibonacci Quarterly*, 3: 225-229.

[32] Iyer M R (1969) Some results on Fibonacci quaternions. *Fibonacci Quarterly*, 7: 201–210.

[33] Swamy M N S (1973) On generalized Fibonacci quaternions. *Fibonacci Quarterly*, 5: 547-550.

[34] Iakin A L (1977) Generalized quaternions of higher order. *Fibonacci Quarterly*, 15: 343-346.

[35] Iakin A L (1977) Generalized quaternions with quaternion components. *Fibonacci Quarterly*, 15: 350-352.

[36] Iakin A L (1981) Extended Binet forms for generalized quaternions of higher order. *Fibonacci Quarterly*, 19: 410-413.

[37] Halıcı S (2012) On Fibonacci quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 22: 321–327.

[38] Ramirez J L (2015) Some combinatorial properties of the *k*-Fibonacci and the *k*-Lucas quaternions. *An. St. Univ. Ovidius Constanta*, 23: 201–212.

[39] Catarino P (2015) A note on *h*(*x*)-Fibonacci quaternion polynomials. *Chaos Solitons Fractals*, 77: 1–5.

[40] Taşçı D and Yalçın F (2015) Fibonacci-*p* quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 25: 245–254.

[41] Polatlı E and Kesim S (2015) On quaternions with generalized Fibonacci and Lucas number components. *Advances in Difference Equations*, Article ID: 169, 2015: 1-8.

[42] Bolat C and İpek A (2016) On Pell quaternions and Pell–Lucas quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 26 (1): 39-51.

[43] Szynal-Liana A and Wloch I (2016) The Pell quaternions and the Pell-Octonions. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 26 (1): 435-440.

[44] Akyiğit M, Kösal H H and Tosun M (2014) Fibonacci generalized quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 24: 631–641.

[45] Akyiğit M, Kösal, H H and Tosun M (2013) Split Fibonacci quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 23 (3): 535–545.

[46] Polatlı E, Kızılateş C and Kesim S (2016) On Split *k*-Fibonacci and *k*-Lucas Quaternions**.** *Advances in Applied Clifford Algebras***,** 26 (1): 353-362.

[47] Polatlı E (2016) A Generalization of Fibonacci and Lucas Quaternions, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26 (2): 719-730.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Kırıkkale ilinin merkez ilçesinde doğdu. İlköğretimini ve lise öğrenimini Kırıkkale'de tamamladı. Kırıkkale Anadolu Lisesi'nden mezun olduktan sonra 2004 yılında Konya Selçuk Üniversitesi Matematik Bölümüne girdi. 2008 yılında lisans öğrenimini tamamladıktan sonra 2009 yılında Gazi Üniversitesi Matematik Bölümünde Tezli Yüksek Lisansa başladı. Yüksek Lisans eğitimine devam ederken 2011 yılı şubat ayında Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. 2011 yılı sonunda Gazi Üniversitesi Matematik Bölümünde Yüksek Lisans eğitimini tamamladı. 2012 yılında Bülent Ecevit Üniversitesi Matematik Bölümünde Doktora eğitimine başladı. Hâlen Bülent Ecevit Üniversitesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görevine devam etmektedir.

ADRES BİLGİLERİ:

Adres: Bahçelievler Mah. Yıldız Sk. 51/6 Zonguldak/MERKEZ

Tel: (+90) 537 924 87 53
E-posta: emrahpolatli@gmail.com