BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN SKALASINDA İKİNCİ DERECEDEN DİNAMİK KAPSAMALARIN SALINIMI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YUNUS ONAR

HAZİRAN 2016

BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN SKALASINDA İKİNCİ DERECEDEN DİNAMİK KAPSAMALARIN SALINIMI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yunus ONAR

DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. Can Murat DİKMEN

ZONGULDAK

Haziran 2016

KABUL:

Yunus ONAR tarafından hazırlanan "Zaman Skalasında İkinci Dereceden Dinamik Kapsamaların Salınımı" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 27/06/2016

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Can Murat DİKMEN ....
Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. Yüksel SOYKAN ....
Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ömer KİŞİ ....
Bartın Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. ..../..../2016

Prof. Dr. Baki HAZER
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Yunus ONAR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ZAMAN SKALASINDA İKİNCİ DERECEDEN DİNAMİK KAPSAMALARIN SALINIMI

Yunus ONAR

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Can Murat DİKMEN
Haziran 2016, 65 sayfa

Sürekli ve ayrık analizi birleştirmek için 1990 yılında Hilger tarafından bulunan Zaman Skalası teorisi son zamanlarda pek çok ilgi görmüştür. Salınım problemleri son zamanlarda fark denklemleri ve diferansiyel denklemler alanlarında çok ilgi çekici hale gelmiştir. Bu alanlar, çeşitli yazarlar tarafından daha güçlü ve genelleştirilmiş teoremler ile derinleştirilmeye başlanmış; bu yüzden zaman skalasında dinamik denklemler olarak birleştirilmiştir. Dinamik kapsamalar, dinamik denklemlerin önemli bir genelleştirilmesini temsil eder. Bir dinamik kapsamanın çözümü tek bir eğri yerine ulaşılabilir bir kümedir. Dinamik kapsamalar, optimal kontrol teorisinin bazı kavramları için temel teşkil etmektedir. Dinamik kapsamalar pek çok dinamik değişimsel eşitsizlik durumlarından doğmuştur; dinamik sistemler, dinamik Coulomb sürtünme problemleri ve fuzzy kümeleri aritmetiği gibi.

ÖZET (devam ediyor)

Son yıllarda, zaman skalasında çeşitli dinamik denklemlerin salınımı ve salınımsızlığı konusunda çok fazla araştırma olmuştur. Buna rağmen, zaman skalasında ikinci dereceden dinamik kapsamaların salınımı ve dağılımlı sapma parametreli ikinci dereceden dinamik kapsamalar ile ilgili daha az sonuç vardır. Bu tezin amacı bu tipteki ikinci dereceden dinamik kapsamalar için bazı salınım kriterlerinin incelenmesidir.

Birinci bölümde zaman skalası ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları için zaman skalasında delta ve nabla türevleri açıklanarak bu türevler ile ilgili temel tanımlar ve örnekler ele alınmıştır. Ayrıca zaman skalasında delta ve nabla integral kavramına yer verilerek delta ve nabla integrallerin özellikleri de incelenmiştir.

İkinci bölümde Ravi P. Agarwal, Said Grace ve Donal O'Regan tarafından aynı ikinci dereceden bir diferensiyel kapsama için 2003 ve 2009 yıllarında yapılan iki çalışma üzerinde durulmuştur. Dinamik kapsama formu üçüncü bölümde çalışılacak olan bu çalışmalarda ikinci dereceden bir diferensiyel kapsama için salınım kriterleri ile ilgili temel teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde Elvan Akın-Bohner ve Shurong Sun tarafından 2012 yılında yapılan bir çalışma üzerinde durulmuştur. Bu çalışmada zaman skalasında ikinci dereceden güçlü süperlineer ve güçlü altlineer dinamik kapsamalar için bazı salınım kriterleri incelenmiştir.

Son bölümde Said Grace, Elvan Akın ve Rawi Agarwal tarafından 2015 yılında yapılan yeni bir çalışma üzerinde durulmuştur. Bu çalışmada dağılımlı sapma parametreli lineer olmayan ikinci dereceden sönümlü dinamik kapsamaların tüm çözümlerinin salınımlılığı üzerine bazı teoremler verilmiştir. Son olarak, elde edilen sonuçlar için mümkün olan birkaç genişletme araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Zaman skalası, dinamik kapsamalar, salınım.

Bilim Kodu: 403.03.01

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

OSCILLATION OF SECOND ORDER DYNAMIC INCLUSIONS ON TIME SCALE

Yunus ONAR

Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Can Murat DİKMEN
June 2016, 65 pages

Time scale theory which was found in 1990 by Hilger to connect the continuous and discrete analysis, has received a lot of interest recently. Oscillation problems recently has become very attractive in the area of difference and differential equations. These areas, have been throughly studied by several authors with more generalised and strong theorems; since it was compiled as dynamic equations on time scale. Dynamic inclusions, represents an important generelation of dynamic equations. Solution of a dynamic inclusion instead of a single curve it is a reachable set. Dynamic inclusions are fundamental for some concepts of optimal control theory. Dynamic inclusions arise from several dynamical inequality situations; such as dynamic systems, dynamic Coulomb friction problems and fuzzy sets arithmetic.

In the recent years there is a lot of research on oscillation or non-oscillation of several dynamic equations on time scale. However, there are few results dealing with the oscillation of second order dynamic inclusions on time scale and for second order dynamic inclusions with distributed deviating arguments. The purpose of this thesis is to investigate the some oscillation criteria of this type of second order dynamic inclusions.

ABSTRACT (continued)

In the first chapter, some basic knowledge about time scale is given. Delta and nabla derivatives for the functions $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ on time scale are explained and some basic definitions an examples are given regarding these derivatives. Also, concepts of delta and nabla integral are given and properties of delta and nabla integrals are investigated.

In the second chapter, we look into the two studies of Ravi P. Agarwal, Said Grace and Donal O'Regan in 2003 and 2009, which are on the same second order differential inclusion. In these studies basic theorems on oscillation criteria of a second order differential inclusion, whose dynamic inclusion form will be used in chapter three, are given.

In the third chapter we investigated the study of Elvan Akın-Bohner and Shurong Sun in 2012. In this work they investigated some oscillation criteria of second order strong superlinear and strong sublinear dynamic inclusions on time scale.

In the last chapter we looked into a new study given by Said Grace, Elvan Akın and Rawi Agarwall in 2015. In this study oscillatory theorems for certain second order damped dynamic inclusions with distributed deviating arguments are given. Finally, some possible generalisations are investigated for the found results.

Keywords: Time scale, dynamic inclusions, oscillation.

Science Code: 403.03.01

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım esnasında değerli zamanını bana ayıran ve bütün çalışmalarımı titizlikle takip eden tez danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Can Murat DİKMEN’ e, çalışmalarımı hep destekleyen ve her zaman yanımda olan aileme çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{T}$	: Zaman skalası
C_{rd}	: Sağ yoğun sürekli fonksiyonlar kümesi
C_{ld}	: Sol yoğun sürekli fonksiyonlar kümesi
$2^{\mathbb{R}}$	: Reel sayıların boş kümeden farklı alt kümelerinin bir ailesi
$F(t,x)$	: Küme değerli fonksiyon (multifunction)
C_{rd}^1	: Birinci dereceden türevleri sağ yoğun sürekli fonksiyonlar kümesi
C_{ld}^1	: Birinci dereceden türevleri sol yoğun sürekli fonksiyonlar kümesi
$U(t)$	: t nin δ komşuluğu
$\mathbb{T}^{\kappa}$	: Delta diferensiyellebilirlik bölgesi
$\mathbb{T}_{\kappa}$	: Nabla diferensiyellebilirlik bölgesi
$\mathbb{C}_h$	: Hilger kompleks sayıları
$\mathbb{Z}_h$	: Hilger sonsuz şeridi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu bölümde tez konusunun daha iyi anlaşılabilmesi için ayrık ve sürekli analizi birleştirip bir teori oluşturmak amacıyla Stefan Hilger (Hilger 1990) tarafından başlatılan zaman skalası ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için zaman skalasında delta ve nabla türevleri açıklanarak bu türevler ile ilgili temel tanımlar ve örnekler ele alınmıştır. Ayrıca zaman skalasında delta ve nabla integral kavramına yer verilerek delta ve nabla integrallerin özellikleri de incelenmiştir. Zaman skalasında türev ve integral kavramlarıyla ilgili daha detaylı bilgi için bu bölümde yararlandığımız "Dynamic Equations on Time Scales" başlıklı (M.Bohner and A.Peterson 2001) kaynağa bakılabilir.

Tanım 1.0.1 *Bir zaman skalası keyfi reel sayıların boş kümeden farklı kapalı bir alt kümesidir. Örneğin,*

$\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}_0$

yani, reel sayılar, tam sayılar, doğal sayılar ve negatif olmayan tam sayılar kümeleri ile $[0, 2] \cup [3, 5]\,, [0, 1] \cup \mathbb{N}$ *ve Kantor kümesi zaman skalasına örnek olmalarına rağmen*

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \mathbb{C}, (0, 1)$

yani, rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar, kompleks sayılar, sıfır-bir açık aralığı zaman skalası değillerdir.

Tanım 1.0.2 $\mathbb{T}$ *bir zaman skalası olsun. Her* $t \in \mathbb{T}$, $t < \max \mathbb{T}$ *için*

$\sigma(t) := \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\}$

olarak tanımlanan $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *operatörüne ileriye atlama (forward jump) operatörü denir. Her* $t \in \mathbb{T}$*,*$t > \min \mathbb{T}$ *için*

$\rho(t) := \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}$

olarak tanımlanan $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ operatörüne geriye atlama (backward jump) operatörü denir. Her $t \in \mathbb{T}$ için

$\mu(t) = \sigma(t) - t$

ile tanımlanan $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ fonksiyonuna ileriye graininess (forward graininess) fonksiyonu adı verilir. Her $t \in \mathbb{T}$ için

$\nu(t) = t - \rho(t)$

ile tanımlanan $\nu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ fonksiyonuna geriye graininess (backward graininess) fonksiyonu adı verilir.

Ayrıca $\sigma(\max \mathbb{T}) = \max \mathbb{T}$ ve $\rho(\min \mathbb{T}) = \min \mathbb{T}$ olarak tanımlanır. $\mathbb{T}$, reel sayıların kapalı bir alt kümesi olduğundan her $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) \in \mathbb{T}$ ve $\rho(t) \in \mathbb{T}$ dir.
$\sigma(t) > t$ ise $t \in \mathbb{T}$ ye sağ-yayılmış (right scattered) nokta ve $\rho(t) < t$ ise t ye sol-yayılmış (left scattered) nokta adı verilir. Eğer $\rho(t) < t < \sigma(t)$ ise, yani $t \in \mathbb{T}$ hem sağ-yayılmış hem de sol-yayılmış ise bu noktaya ayrık (isolated) nokta denir.
$\sigma(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ ye sağ yoğun (right dense) nokta ve $\rho(t) = t$ ise sol yoğun (left dense) nokta adı verilir. Eğer $\rho(t) = t = \sigma(t)$ ise, yani $t \in \mathbb{T}$ aynı zamanda sağ ve sol yoğun ise bu noktaya yoğun nokta denir.

Örnek 1.0.3 *Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\sigma(t) = t, \rho(t) = t$ bulunur. Böylece her $t \in \mathbb{T}$ yoğun noktadır. Bu durumda, her $t \in \mathbb{T}$ için $\mu(t) = \nu(t) = 0$ olur.*

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $\sigma(t) = t + 1, \rho(t) = t - 1$ elde edilir. O halde, her $t \in \mathbb{Z}$ noktası ayrık noktadır. Bu durumda, her $t \in \mathbb{Z}$ için $\mu(t) = \nu(t) = 1$ dir.

Tanım 1.0.4 *$\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olsun ve $a, b \in \mathbb{T}, a \leq b$ verilsin. Bu zaman skalasına ait $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığı,*

$[a, b]_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\}$

ile tanımlanır.

Tanım 1.0.5 *Delta diferensiyellebilirlik bölgesi, eğer $\mathbb{T}$ sol yayılmış maksimum M ye sahip ise $\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T} - \{M\}$ ile tanımlanır, aksi halde $\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T}$ olur.*

Tanım 1.0.6 *Nabla diferensiyellebilirlik bölgesi, eğer* $\mathbb{T}$ *sağ yayılmış minimum* m *ye sahip ise* $\mathbb{T}_{\kappa} = \mathbb{T} - \{m\}$ *ile tanımlanır, aksi halde* $\mathbb{T}_{\kappa} = \mathbb{T}$ *olur.*

Tanım 1.0.7 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *ye bir fonksiyon olsun.* $f^{\sigma} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu, her* $t \in \mathbb{T}$ *için*

$$f^{\sigma}(t) = f(\sigma(t)) = f \circ \sigma(t)$$

ve $f^{\rho} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu, her* $t \in \mathbb{T}$ *için*

$$f^{\rho}(t) = f(\rho(t)) = f \circ \rho(t)$$

ile tanımlanır. Yani $f^{\sigma} = f \circ \sigma$ *ve* $f^{\rho} = f \circ \rho$ *olur.*

Tanım 1.0.8 $U \subset \mathbb{T}$ *olsun. Her* $\delta > 0$ *için*

$$U(t) = \{s \in \mathbb{T} : |s - t| < \delta\}$$

ile tanımlanan $U(t)$ *kümesine* t *nin* δ *komşuluğu denir.*

Tanım 1.0.9 $t_0 \in \mathbb{T}$ *olsun. Verilen her* $\varepsilon > 0$ *ve* $t \in U(t_0)$ *için*

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $U(t_0)$ *komşuluğu var ise* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonuna* $t = t_0$ *noktasında süreklidir denir.*

1.1 ZAMAN SKALASINDA TÜREV

Tanım 1.1.1 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon ve* $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ *noktası olsun. Herhangi bir* $\varepsilon > 0$ *için* t *noktasının*

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon\,|\sigma(t) - s|\,, \text{ her } s \in U$$

olacak şekilde bir U *komşuluğu varsa, (yani en az bir* $\delta > 0$ *için* $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ *ise) bu özelliği sağlayan sonlu* $f^{\Delta}(t)$ *reel sayısına* f *fonksiyonunun* t *noktasındaki delta (Hilger) türevi denir.*

Üstelik her $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için $f^{\Delta}(t)$ sayısı mevcut ise f fonksiyonuna $\mathbb{T}^{\kappa}$ üzerinde delta türevlenebilir denir. Başka bir deyişle,

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Tanım 1.1.2 *$f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}_\kappa$ noktası olsun. Herhangi bir $\varepsilon>0$ için t noktasının*

$$\left|f(\rho(t))-f(s)-f^{\nabla}(t)(\rho(t)-s)\right|\leq\varepsilon\left|\rho(t)-s\right|, \; \textit{her } s\in U$$

olacak şekilde bir U komşuluğu varsa, bu özelliği sağlayan sonlu $f^{\nabla}(t)$ reel sayısına f fonksiyonunun t noktasındaki nabla türevi denir

Üstelik her $t\in\mathbb{T}_\kappa$ noktası için $f^{\nabla}(t)$ sayısı mevcut ise f fonksiyonuna $\mathbb{T}_\kappa$ üzerinde nabla türevlenebilir denir. Diğer bir deyişle,

$$f^{\nabla}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f\left(\rho\left(t\right)\right)-f\left(s\right)}{\rho\left(t\right)-s}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Örnek 1.1.3 *$\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olsun. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu $\alpha\in\mathbb{R}$ sabit olmak üzere her $t\in\mathbb{T}$ için $f\left(t\right)=\alpha$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon>0$ için*

$$\left|f(\sigma(t))-f(s)-0(\sigma(t)-s)\right|=\left|\alpha-\alpha\right|=0\leq\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|, \; \textit{her } s\in\mathbb{T}$$

eşitsizliği sağlandığından $f^{\Delta}(t)=0$ olur. Benzer şekilde $f^{\nabla}(t)=0$ elde edilir.

Örnek 1.1.4 *$f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $t\in\mathbb{T}$ için $f\left(t\right)=t$ olarak verilsin. Bu taktirde herhangi bir $\varepsilon>0$ için*

$$\left|f(\sigma(t))-f(s)-1(\sigma(t)-s)\right|=\left|\sigma(t)-s-(\sigma(t)-s)\right|=0\leq\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|, \; \textit{her } s\in\mathbb{T}$$

için gerçekleştiğinden $f^{\Delta}(t)=1$ bulunur. Benzer şekilde $f^{\nabla}(t)=1$ elde edilir.

Örnek 1.1.5 *$\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olsun. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $t\in\mathbb{T}$ için $f\left(t\right)=t^3$ ile tanımlansın.*

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \lim_{s\to t}\frac{f\left(\sigma\left(t\right)\right)-f\left(s\right)}{\sigma\left(t\right)-s}=\lim_{s\to t}\frac{\sigma\left(t\right)^3-s^3}{\sigma\left(t\right)-s}=\left(\sigma\left(t\right)\right)^2+\sigma\left(t\right)t+t^2 \\ &= \begin{cases} 3t^2, \; \mathbb{T}=\mathbb{R} \; \textit{ise} \\ 3t^2+3t+1, \; \mathbb{T}=\mathbb{Z} \; \textit{ise} \\ 2t^2+t\sqrt{t^2+1}+1, \; \mathbb{T}=\{\sqrt{n}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\} \; \textit{ise} \end{cases} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} f^{\nabla}(t) &= \lim_{s\to t}\frac{f(\rho(t))-f(s)}{\rho(t)-s} = \lim_{s\to t}\frac{\rho(t)^3-s^3}{\rho(t)-s} = (\rho(t))^2+\rho(t)t+t^2 \\ &= \begin{cases} 3t^2, \ \mathbb{T}=\mathbb{R} \ ise \\ 3t^2-3t+1, \ \mathbb{T}=\mathbb{Z} \ ise \\ 2t^2+t\sqrt{t^2-1}-1, \ \mathbb{T}=\{\sqrt{n}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\} \ \ ise \end{cases} \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 1.1.6 *Kabul edelim ki $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ olsun.*

i) f fonksiyonu t noktasında Δ-türevlenebilir ise, f fonksiyonu aynı noktada süreklidir.

ii) Eğer f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t sağ yayılmış ise, f fonksiyonu t noktasında Δ-türevlenebilirdir ve Δ-türevi

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}$$

dir.

iii) Eğer t sağ yoğun nokta ise f fonksiyonunun t noktasında Δ-türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

limit değerinin sonlu bir sayı olmasıdır. Bu durumda

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

olur.

iv) f fonksiyonu t noktasında Δ-türevlenebilir ise

$$f(\sigma(t)) = f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t)$$

eşitliği doğrudur.

Teorem 1.1.7 *Kabul edelim ki $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}_{\kappa}$ olsun.*

i) f fonksiyonu t noktasında ∇-türevlenebilir ise, f fonksiyonu aynı noktada süreklidir.

ii) Eğer f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t sol yayılmış ise, f fonksiyonu t noktasında ∇-türevlenebilirdir ve

$$f^{\nabla}(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\nu(t)}$$

dir.

iii) Eğer t sol yoğun nokta ise f fonksiyonunun t noktasında ∇-türevlenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limit değerinin sonlu bir sayı olmasıdır. Bu durumda

$$f^{\nabla}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

dir.

iv) f fonksiyonu t noktasında ∇-türevlenebilir ise

$$f(\rho(t)) = f(t) + \nu(t) f^{\Delta}(t)$$

eşitliği doğrudur.

Örnek 1.1.8 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *ve* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *durumlarını ele alım.*

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise her $t \in \mathbb{R}$ sağ yoğun olduğundan Teorem 1.1.6 daki **iii)** şıkkı sağlanır. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $t \in \mathbb{R}$ de Δ-türevlenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$f'(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limitinin var olmasıdır. Eğer $f'(t)$ türev değeri var ise f, t de türevlenebilirdir. (Bu türev bildiğimiz adi türevdir.) Böylece Teorem 1.1.6 daki **iii)** şıkkından

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ iken her $t \in \mathbb{R}$ sol yoğun olduğundan Teorem 1.1.7 deki **iii)** şıkkı sağlanır. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $t \in \mathbb{R}$ de ∇-türevlenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$f'(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limitinin var olmasıdır. O halde Teorem 1.1.7 deki **iii)** şıkkından

$$f^{\nabla}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

bulunur.

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise her $t \in \mathbb{Z}$ sağ yayılmış olduğundan Teorem 1.1.6 daki **ii)** şıkkı sağlanır. Yani $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{Z}$ de

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

türevi ile Δ-türevlenebilirdir. Buradaki Δ, fark denklemlerinde kullanılan ileri fark operatörüdür. Benzer şekilde $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için her $t \in \mathbb{Z}$ sol yayılmış olduğundan Teorem 1.1.6 daki **ii)** şıkkı sağlanır. Yani $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{Z}$ de

$$f^{\nabla}(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\nu(t)} = \frac{f(t) - f(t-1)}{1} = f(t) - f(t-1) = \nabla f(t)$$

türevi ile ∇-türevlenebilirdir. Buradaki ∇, fark denklemlerinde kullanılan geri fark operatörüdür.

Teorem 1.1.9 *Kabul edelim ki $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında Δ-türevlenebilir olsun. O zaman*

i) $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında Δ-türevlenebilirdir ve

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$$

eşitliği doğrudur.

ii) Herhangi bir α sabiti için αf fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında Δ-türevlenebilirdir ve αf fonksiyonunun Δ-türevi

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t)$$

ile verilir.

iii) $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında Δ-türevlenebilirdir ve fg nin fonksiyonunun Δ-türevi

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))\, g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)\, g(\sigma(t))$$

şeklindedir.

iv) Eğer $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ ise, o halde $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)\,g(t) - f(t)\,g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

ile Δ-türevlenebilirdir.

Teorem 1.1.10 *Kabul edelim ki $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}_{\kappa}$ noktasında ∇-türevlenebilir olsun. O zaman*

i) $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}_{\kappa}$ noktasında ∇-türevlenebilirdir ve

$$(f+g)^{\nabla}(t) = f^{\nabla}(t) + g^{\nabla}(t)$$

eşitliği doğrudur.

ii) Herhangi bir α sabiti için αf fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}_{\kappa}$ noktasında ∇-türevlenebilirdir ve αf fonksiyonunun ∇-türevi

$$(\alpha f)^{\nabla}(t) = \alpha f^{\nabla}(t)$$

ile verilir.

iii) $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}_{\kappa}$ noktasında ∇-türevlenebilirdir ve fg nin fonksiyonunun ∇-türevi

$$(fg)^{\nabla}(t) = f^{\nabla}(t)g(t) + f(\rho(t))\,g^{\nabla}(t) = f(t)g^{\nabla}(t) + f^{\nabla}(t)\,g(\rho(t))$$

şeklindedir.

iv) Eğer $g(t)g(\rho(t)) \neq 0$ ise, o halde $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}_{\kappa}$ noktasında

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\nabla}(t) = \frac{f^{\nabla}(t)\,g(t) - f(t)\,g^{\nabla}(t)}{g(t)g(\rho(t))}$$

ile ∇-türevlenebilirdir.

Örnek 1.1.11 *Zaman skalası olarak $h > 0$ için $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hz : z \in \mathbb{Z}\}$ alalım. Her $t \in \mathbb{T}$ için*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf\{t + nh : n \in \mathbb{N}\} = t + h,$$

$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\} = \sup\{t - nh : n \in \mathbb{N}\} = t - h,$

$\mu(t) = \sigma(t) - t = h$ *ve* $\nu(t) = t - \rho(t) = h$

elde edilir. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu her* $t \in \mathbb{T}$ *için*

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

ve benzer şekilde

$$f^{\nabla}(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\nu(t)} = \frac{f(t) - f(t-h)}{h}$$

türevlerine sahiptir.

1.2 ZAMAN SKALASINDA YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREV

Tanım 1.2.1 *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $f^{\Delta} : \mathbb{T}^{\kappa} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^{\kappa^2} = (\mathbb{T}^{\kappa})^{\kappa}$ da Δ-türevlenebilir ise f fonksiyonu ikinci mertebeden Δ-türevlenebilirdir denir ve*

$$f^{\Delta\Delta} = \left(f^{\Delta}\right)^{\Delta} : \mathbb{T}^{\kappa^2} \to \mathbb{R}$$

dir. Benzer şekilde, f nin n. mertebeden Δ-türevleri $f^{\Delta^n} : \mathbb{T}^{\kappa^n} \to \mathbb{R}$ ile tanımlanır. Her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t))$$

ve buna göre $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma^n(t)$ benzer şekilde tanımlanır. Ayrıca,

$$\sigma^0(t) = t, \ f^{\Delta^0} = f, \ \mathbb{T}^{\kappa^0} = \mathbb{T}$$

olarak tanımlanır. İkinci mertebeden ∇-türev için de benzer argümanlar geçerlidir.

Örnek 1.2.2 *$\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olsun. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t$ alalım; Örnek 1.1.4 ten her $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için $f^{\Delta}(t) = 1$ olduğunu biliyoruz. O halde her $t \in \mathbb{T}^{\kappa^2}$ için*

$$f^{\Delta\Delta}(t) = \left(f^{\Delta}\right)^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f^{\Delta}(\sigma(t)) - f^{\Delta}(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \to t} \frac{1-1}{\sigma(t) - s} = 0$$

olduğu görülür. $f^{\nabla\nabla}(t)$ türevi için de durum benzerdir.

Örnek 1.2.3 *$\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olsun. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t^2$ alalım;*

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \to t} \frac{\sigma^2(t) - s^2}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \to t} (\sigma(t) + s) = \sigma(t) + t$$

olduğu görülür. O halde her $t \in \mathbb{T}^{\kappa^2}$ için

$$f^{\Delta\Delta}(t) = \left(f^{\Delta}\right)^{\Delta}(t) = (\sigma(t) + t)^{\Delta} = \sigma^{\Delta}(t) + t^{\Delta}$$

elde edilir. Özel zaman skalaları için $f^{\Delta\Delta}(t)$ yi inceleyelim.

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\sigma(t) = t$ olduğundan

$$f^{\Delta\Delta}(t) = \sigma^{\Delta}(t) + t^{\Delta} = t^{\Delta} + t^{\Delta} = 1 + 1 = 2$$

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $\sigma(t) = t + 1$ olduğundan

$$f^{\Delta\Delta}(t) = \sigma^{\Delta}(t) + t^{\Delta} = (t+1)^{\Delta} + t^{\Delta} = 1 + 1 = 2$$

bulunur.

Örnek 1.2.4 *Eğer f ve g ikinci mertebeden Δ-türevlenebilir ve f^{σ} Δ-türevlenebilir ise fg fonksiyonu da ikinci mertebeden Δ-türevlenebilirdir ve*

$$(fg)^{\Delta} = f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta}$$

olduğuna göre $f^{\Delta^{\sigma}} := f^{\Delta\sigma}$ ve $f^{\sigma^{\Delta}} := f^{\sigma\Delta}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
(fg)^{\Delta\Delta} &= \left(f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta}\right)^{\Delta} \\
&= f^{\Delta\Delta}g + f^{\Delta^{\sigma}}g^{\Delta} + f^{\sigma^{\Delta}}g^{\Delta} + f^{\sigma^{\sigma}}g^{\Delta\Delta} \\
&= f^{\Delta\Delta}g + f^{\Delta\sigma}g^{\Delta} + f^{\sigma\Delta}g^{\Delta} + f^{\sigma\sigma}g^{\Delta\Delta}
\end{aligned}$$

elde edilir. $(fg)^{\nabla}$ da benzer şekilde bulunabilir.

1.3 ZAMAN SKALASINDA İNTEGRAL

Tanım 1.3.1 *Eğer $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$ deki sağ yoğun noktalarda sağdan limiti ve sol yoğun noktalarda soldan limiti varsa bu fonksiyona düzenli (regular) fonksiyon denir.*

Tanım 1.3.2 *Eğer* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun* $\mathbb{T}$ *deki sağ yoğun noktalarda sürekli ve sol yoğun noktalarda soldan limiti varsa bu fonksiyona sağ yoğun sürekli veya rd-sürekli (rd-continuous) fonksiyon denir.*

Tanım 1.3.3 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *rd-sürekli fonksiyonların kümesi*

$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$

ile gösterilir.

Tanım 1.3.4 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu türevlenebilir ve rd-sürekli ise*

$C^1_{rd} = C^1_{rd}(\mathbb{T}) = C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$

ile gösterilir.

Tanım 1.3.5 *Eğer* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun* $\mathbb{T}$ *deki sol yoğun noktalarda sürekli ve sağ yoğun noktalarda sağdan limiti varsa bu fonksiyona sol yoğun sürekli veya ld-sürekli (ld-continuous) denir.*

Tanım 1.3.6 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *ld-sürekli fonksiyonların kümesi*

$C_{ld} = C_{ld}(\mathbb{T}) = C_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$

ile gösterilir.

Tanım 1.3.7 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu türevlenebilir ve ld-sürekli ise*

$C^1_{ld} = C^1_{ld}(\mathbb{T}) = C^1_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$

ile gösterilir.

Tanım 1.3.8 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon olsun. Eğer* $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* $\mathbb{T}^\kappa$ *da* Δ*-türevlenebilir ve her* $t \in \mathbb{T}^\kappa$ *için* $F^\Delta(t) = f(t)$ *ise,* F *fonksiyonuna* f *nin* Δ*-anti türevi veya ilkeli denir.*

Eğer $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun Δ-anti türevi varsa f ye Δ-integrallenebilir fonksiyon denir ve $a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$$\int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a)$$

ile tanımlanır.

Tanım 1.3.9 *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}_\kappa$ da ∇-türevlenebilir ve her $t \in \mathbb{T}_\kappa$ için $F^{\nabla}(t) = f(t)$ ise F fonksiyonuna f nin ∇-anti türevi veya ilkeli denir.*

Eğer $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ∇-anti türevi varsa f ye ∇-integrallenebilir fonksiyon denir ve $a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$$\int_a^b f(t)\nabla t = F(b) - F(a)$$

ile tanımlanır.

Teorem 1.3.10 *Her rd-sürekli fonksiyonun bir antitürevi vardır.*

Teorem 1.3.11 *Eğer $f \in C_{rd}$ ve $t \in \mathbb{T}^\kappa$ ise bu taktirde*

$$\int_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta s = \mu(t) f(t)$$

formülü doğrudur.

İspat. Teorem 1.3.10 dan f nin bir antitürevi vardır ve

$$\begin{aligned} \int_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta s &= F(\sigma(t)) - F(t) \\ &= \mu(t) F^{\Delta}(t) \\ &= \mu(t) f(t) \end{aligned}$$

bulunur. ■

Teorem 1.3.12 *Her ld-sürekli fonksiyonun bir antitürevi vardır.*

Teorem 1.3.13 *Eğer $f \in C_{ld}$ ve $t \in \mathbb{T}_\kappa$ ise bu taktirde*

$$\int_{\rho(t)}^{t} f(s)\Delta s = \nu(t) f(t)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Teorem 1.3.11 in ispatına benzer şekilde yapılır. ■

Teorem 1.3.14 *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları rd-sürekli ve $a, b, c \in \mathbb{T}$ olduğunu kabul edelim.*

i) $\int_a^b [f(t) + g(t)]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t$ *dir.*

ii) *Her β sabiti için* $\int_a^b \beta f(t)\Delta t = \beta \int_a^b f(t)\Delta t$ *dir.*

iii) *$a \leq c \leq b$ olmak üzere* $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t$ *dir.*

iv) $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t$ *dir.*

v) $\int_a^a f(t)\Delta t = 0$ *dır.*

vi) $\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t = f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t$ *dir.*

vii) $\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t$ *dir.*

viii) *Eğer $[a, b)$ aralığında $|f(t)| \leq g(t)$ ise*

$$\left| \int_a^b f(t)\Delta t \right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t$$

dir.

ix) *Eğer her $t \in [a, b)$ için $f(t) \geq 0$ ise*

$$\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0$$

dır.

Teorem 1.3.14 teki *vi*) ve *vii*) eşitliklerine kısmı integrasyon formülleri denir.

Örnek 1.3.15 *$a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{rd}$ verilsin. Bu durumda*

i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt$ olur. Burada sağ taraftaki integral bildiğimiz Riemann integralidir.

ii) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise bu halde

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{t=a}^{b-1} f(t), & a < b \text{ ise} \\ 0, & a = b \text{ ise} \\ -\sum\limits_{t=b}^{a-1} f(t), & a > b \text{ ise} \end{cases}$$

sağlanır.

iii) Eğer $[a, b]$ aralığı sadece ayrık noktaları içeriyor ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{t\in[a,b)} \mu(t) f(t), & a < b \text{ ise} \\ 0, & a = b \text{ ise} \\ -\sum\limits_{t\in[b,a)} \mu(t) f(t), & a > b \text{ ise} \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 1.3.16 *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları ld-sürekli ve $a, b, c \in \mathbb{T}$ olduğunu kabul edelim.*

i) $\int_a^b [f(t) + g(t)]\nabla t = \int_a^b f(t)\nabla t + \int_a^b g(t)\nabla t$ *dir.*

ii) *Her β sabiti için* $\int_a^b \beta f(t)\nabla t = \beta \int_a^b f(t)\nabla t$ *dir.*

iii) $a \le c \le b$ *olmak üzere* $\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^c f(t)\nabla t + \int_c^b f(t)\nabla t$ *dir.*

iv) $\int_a^b f(t)\nabla t = -\int_b^a f(t)\nabla t$ *dir.*

v) $\int_a^a f(t)\nabla t = 0$ *dır.*

vi) $\int_a^b f(\rho(t))g^\nabla(t)\nabla t = f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b f^\nabla(t)g(t)\nabla t$ *dir.*

vii) $\int_a^b f(t)g^\nabla(t)\nabla t = f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b f^\nabla(t)g(\rho(t))\nabla t$ *dir.*

viii) *Eğer $[a, b)$ aralığında $|f(t)| \le g(t)$ ise*

$$\left|\int_a^b f(t)\nabla t\right| \le \int_a^b g(t)\nabla t$$

dir.

ix) *Eğer her $t \in [a,b)$ için $f(t) \geq 0$ ise*

$$\int_a^b f(t)\nabla t \geq 0$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 1.3.17 *$a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{ld}$ verilsin. Bu durumda*

i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\int\limits_a^b f(t)\nabla t = \int\limits_a^b f(t)dt$ olur.

ii) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int\limits_a^b f(t)\nabla t = \begin{cases} \sum\limits_{t=a+1}^{b} f(t), & a < b \text{ ise} \\ 0, & a = b \text{ ise} \\ -\sum\limits_{t=b+1}^{a} f(t), & a > b \text{ ise} \end{cases}$$

sağlanır.

iii) Eğer $[a,b]$ aralığı sadece ayrık noktaları içeriyor ise

$$\int\limits_a^b f(t)\nabla t = \begin{cases} \sum\limits_{t\in(a,b]} \nu(t) f(t), & a < b \text{ ise} \\ 0, & a = b \text{ ise} \\ -\sum\limits_{t\in(b,a]} \nu(t) f(t), & a > b \text{ ise} \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 1.3.18 *$a < b$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{T}$ ve $f(t)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler doğrudur.*

i) $\int\limits_a^b f(t)\Delta t = \int\limits_a^{\rho(b)} f(t)\Delta t + [b - \rho(b)]\, f(\rho(b))$ dir.

ii) $\int\limits_a^b f(t)\Delta t = [\sigma(a) - a]\, f(a) + \int\limits_{\sigma(a)}^{b} f(t)\Delta t$ dir.

iii) $\int\limits_a^b f(t)\nabla t = \int\limits_a^{\rho(b)} f(t)\nabla t + [b - \rho(b)]\, f(b)$ dir.

iv) $\int\limits_a^b f(t)\nabla t = [\sigma(a) - a] f(\sigma(a)) + \int\limits_{\sigma(a)}^b f(t)\nabla t$ dir.

Teorem 1.3.19 *Aşağıdaki formüllerde $f^{\Delta}(t,s)$ ve $f^{\nabla}(t,s)$ ile s değişkeni sabit tutularak $f(t,s)$ fonksiyonunun t ye göre sırasıyla Δ ve ∇ türevleri belirtilmiştir. Eğer f, f^{Δ} ve f^{∇} iki değişkenli fonksiyonları sürekli ise bu durumda aşağıdaki formüller doğrudur.*

i) $\left(\int_a^t f(t,s)\Delta s\right)^{\Delta} = f(\sigma(t), t) + \int_a^t f^{\Delta}(t,s)\Delta s$ dir.

ii) $\left(\int_a^t f(t,s)\Delta s\right)^{\nabla} = \int_a^t f^{\nabla}(t,s)\Delta s + f(\rho(t), \rho(t))$ dir.

iii) $\left(\int_a^t f(t,s)\nabla s\right)^{\Delta} = f(\sigma(t), \sigma(t)) + \int_a^t f^{\Delta}(t,s)\nabla s$ dir.

iv) $\left(\int_a^t f(t,s)\nabla s\right)^{\nabla} = \int_a^t f^{\nabla}(t,s)\nabla s + f(\rho(t), t)$ dir.

Örnek 1.3.20 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *için* $a \neq 0$ *olmak üzere*

$$\int a^t \Delta t$$

belirsiz integralini ele alalım.

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^{\Delta} = \Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = \frac{a^{t+1} - a^t}{a-1} = a^t$$

olduğu için C integral sabiti olmak üzere

$$\int a^t \Delta t = \frac{a^t}{a-1} + C$$

eşitliği bulunur.

Örnek 1.3.21 $\mathbb{T} = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ *olsun.* $f(t) = \frac{4}{7}s(1-s)$ *için* $\int\limits_0^1 f(s)\nabla s$ *integralinin değerini bulalım.*

$$\int\limits_0^1 f(s)\nabla s = \int\limits_0^{\frac{1}{3}} f(s)\nabla s + \int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(s)\nabla s + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f(s)\nabla s$$

olduğundan integralleri ayrı ayrı hesaplayalım,

$$\int\limits_0^{\frac{1}{3}} f(s)\nabla s = \int\limits_0^{\frac{1}{3}} f(s)ds = \frac{4}{7}\int\limits_0^{\frac{1}{3}} s(1-s)ds = \frac{2}{81}$$

olur. $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$ *aralığını göz önüne alırsak,* $\rho\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$ *ve* $\nu\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ *olduğundan Teorem 1.3.13 iii. yardımıyla,*

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(s)\nabla s = f\left(\frac{1}{2}\right)\nu\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{42}$$

bulunur. $\left[\frac{1}{2},1\right]$ *aralığını hesaplarsak,*

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(s)\nabla s = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(s)ds = \frac{4}{7}\int_{\frac{1}{2}}^{1} s(1-s)ds = \frac{1}{21}$$

elde edilir. Böylece

$$\int_{0}^{1} f(s)\nabla s = \int_{0}^{\frac{1}{3}} f(s)\nabla s + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(s)\nabla s + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(s)\nabla s = \frac{119}{1134}$$

olur.

1.4 ZAMAN SKALASINDA ÜSTEL FONKSİYON

Hilger kompleks sayıları $h>0$ olmak üzere $\mathbb{C}_h := \left\{z\in\mathbb{C} : z\neq -\frac{1}{h}\right\}$ ile tanımlanır. Ayrıca, $h>0$ olmak üzere $\mathbb{Z}_h$ sonsuz şeridi $\mathbb{Z}_h := \left\{z\in\mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} < \operatorname{Im} z \leq \frac{\pi}{h}\right\}$ ile tanımlanır. Eğer $h=0$ ise $\mathbb{Z}_0=\mathbb{C}$ dir.

Tanım 1.4.1 Log,*esas logaritma fonksiyonunu göstermek üzere* $h>0$ *için* $\xi_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$ *silindirik dönüşümü*

$$\xi_h(z) := \frac{1}{h}\operatorname{Log}(1+hz)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $h=0$ *ise her* $z\in\mathbb{C}$ *için* $\xi_h(z)=z$ *olarak tanımlanır.* ξ_h *silindirik dönüşüm olarak isimlendirilir çünkü* $h>0$ *olduğunda* $\mathbb{Z}_h$ *nin grafiği bir silindir gibi gözükür.* $\mathbb{Z}_h$ *nin* $\operatorname{Im}(z)=-\dfrac{\pi}{h}$ *ve* $\operatorname{Im}(z)=\dfrac{\pi}{h}$ *sınır çizgileri birlikte düşünüldüğünde ise bunlar bir silindirik forma dönüşür. Bu durumda* $\mathbb{Z}$ *de* $z,w\in\mathbb{Z}_h$ *için*

$$z+w := z+w\left(\operatorname{mod}\frac{2\pi i}{h}\right)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.4.2 *Bir $p:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna her $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ için*

$$1+\mu(t)\,p(t)\neq 0$$

oluyor ise regresif (regressive) denir. Tüm regresif ve rd-sürekli fonksiyonların kümesi $\mathcal{R}=\mathcal{R}(\mathbb{T})$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.3 *$\xi_h(z)$ silindirik dönüşümü Tanım 1.4.1 deki olmak üzere $p\in\mathcal{R}$ ise $s,t\in\mathbb{T}$ için üstel fonksiyonu*

$$e_p(s,t)=\exp\left(\int_s^t \xi_\mu(\tau)\,(p(\tau))\,\Delta\tau\right)$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 1.4.4 *Eğer $p\in\mathcal{R}$ ise her $r,s,t\in\mathbb{T}$ için*

$$e_p(t,r)\,e_p(r,s)=e_p(t,s)$$

yarıgrup özelliği sağlanır.

İspat. $p\in\mathcal{R}$ ve $r,s,t\in\mathbb{T}$ olsun Tanım 1.4.3 ten

$$\begin{aligned}
e_p(t,r)\,e_p(r,s) &= \exp\left(\int_r^t \xi_\mu(\tau)\,(p(\tau))\,\Delta\tau\right)\exp\left(\int_s^r \xi_\mu(\tau)\,(p(\tau))\,\Delta\tau\right)\\
&= \exp\left(\int_r^t \xi_\mu(\tau)\,(p(\tau))\,\Delta\tau+\int_s^r \xi_\mu(\tau)\,(p(\tau))\,\Delta\tau\right)\\
&= \exp\left(\int_s^t \xi_\mu(\tau)\,(p(\tau))\,\Delta\tau\right)\\
&= e_p(t,s)
\end{aligned}$$

bulunur. ■

BÖLÜM 2

İKİNCİ DERECEDEN SÜPERLİNEER VE ALTLİNEER DİFERENSİYEL KAPSAMALAR İÇİN SALINIM KRİTERLERİ

Bu bölümde Ravi P. Agarwal, Said Grace ve Donal O'Regan tarafından farklı zamanlarda yapılan çalışmalar üzerinde duracağız; bakınız, (Agarwal et al. 2003a, 2009). Bu çalışmalarda ikinci dereceden diferensiyel kapsamalar için salınım kriterleri ile ilgili temel teoremler verilmiştir. Bu diferensiyel içermelerin dinamik formu bir sonraki bölümde ele alınmıştır.

Bu bölümde

$$(\alpha(t)\, y'(t))' \in F(t, y(t)), h.h.h.\ t \geq t_0 \geq 0 \tag{2.1}$$

diferensiyel kapsaması ele alınmıştır. Eğer kapsama (2.1) in trivial olmayan bir çözümü keyfi büyüklükte sıfırlara sahip ise kapsama (2.1) salınımlıdır aksi taktirde salınımsızdır. Kapsama(2.1) in tüm çözümleri salınımlı ise kendisi de salınımlıdır denir. Bu kapsama salınımsız çözümleri üzerine ilk çalışmalar Ravi P. Agarwal, Said Grace ve Donal O'Regan tarafından başlatılmıştır (Agarwal et al. 2003b, 2006). Şimdiki çalışmalarında ise salınımlı olmaları için gerekli koşullar verilmiştir. (2.1) kapsamasının bir çözümü ile $\alpha y' \in C[t_0, \infty)$ ve $(\alpha y')' \in L^1_{loc}[t_0, \infty)$ şartlarını sağlayan bir $y \in C[t_0, \infty)$ fonksiyonu kastedilir. Bu bölüm boyunca kapsama (2.1) in böyle çözümlere sahip olduğu varsayılmıştır.

2.1 DİFERENSİYEL KAPSAMALAR

Bu kısımda yukarıda da bahsi geçen

$$(\alpha(t)\, y'(t))' \in F(t, y(t)), h.h.h.\ t \geq t_0 \geq 0$$

diferensiyel kapsaması için birkaç salınım kriteri verilecektir. Burada α fonksiyonu tek değerli fonksiyon ve $F : [t_0, \infty) \times \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ bir (multifunction) küme-değerli fonksiyondur. (Burada $2^{\mathbb{R}}$ kümesi reel sayıların boştan farklı alt kümelerinin bir ailesini göstermektedir.)

Uyarı 2.1.1 *Bu tez boyunca kapsama teorisinin standart notasyonları kullanılacaktır. Örneğin,*

$|F(t,u)| = \sup\{|v| : v \in F(t,u)\}$ *ve* $F(t,u) > 0$

ifadesi her $w \in F(t,u)$ *için* $w > 0$ *anlamına gelir.*

Bu kısımdaki ilk birkaç sonuç F nin belirli bir işareti olduğu durum için verilmiştir. Süperlineer ve altlineer sonuçların her ikisi de verilmiştir. İlk sonuç süperlineer tipinde bir teorem olacaktır.

Teorem 2.1.2 *Farzedelim ki aşağıdaki koşullar doğru olsun:*

$$\alpha \in C([t_0,\infty), \mathbb{R}^+) \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} (t,x) \in [t_0,x) \times \mathbb{R}^+ \text{ için } F(t,x) < 0 \text{ ve} \\ (t,x) \in [t_0,x) \times \mathbb{R}^- \text{ için } F(t,x) > 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{du}{\alpha(u)} = \infty, \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \text{ için } x\psi(x) > 0 \text{ olacak şekilde azalmayan ve sürekli bir fonksiyon } \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ile} \\ (t,x) \in [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^+ \text{ için } |F(t,x)| \geq q(t)\psi(x) \text{ ve} \\ (t,x) \in [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^- \text{ için } |F(t,x)| \geq -q(t)\psi(x) \text{ ile} \\ q \in L^1_{loc}[t_0,\infty) \text{ olacak şekilde en az bir } q : [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^+ \text{ vardır} \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\int^{\infty} \frac{du}{\psi(u)} < \infty \text{ ve } \int_{-\infty} \frac{du}{[-\psi(u)]} < \infty \tag{2.6}$$

ve

$$\int_{t_0}^{\infty} q(u) \int_{t_0}^{u} \frac{ds}{\alpha(s)} du = \infty. \tag{2.7}$$

Bu durumda kapsama (2.1) *salınımlıdır.*

İspat. y kapsama (2.1) in salınımsız bir çözümü olsun. İlk olarak $t \geq t_0$ için $y(t) > 0$ kabul edelim. Öncelikle

$$t > t_0 \text{ için } y'(t) > 0 \tag{2.8}$$

olduğunu gösterelim. Bunu görmek için $y'(\mu) < 0$ olacak şekilde $\mu > t_0$ var olduğunu kabul edelim.

$$\tau(t) = (\alpha(t)\, y'(t))' \text{ olacak şekilde } \tau(t) \in F(t, y(t)) \text{ ve } \tau \in L^1_{loc}[t_0, \infty) \tag{2.9}$$

olsun. (2.3) şartından $h.h.h.$ $t \geq t_0$ için $(\alpha(t)\, y'(t))' \leq 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece $t > \mu$ için

$$\alpha(t)\, y'(t) \leq \alpha(\mu)\, y'(\mu)$$

dir. Şimdi $t > \mu$ olmak üzere μ den t ye integral alırsak

$$y(t) \leq y(\mu) + \alpha(\mu)\, y'(\mu) \int\limits_{\mu}^{t} \frac{du}{\alpha(u)}$$

elde edilir. (2.4) şartından hemen $t \to \infty$ iken

$$y(\mu) + \alpha(\mu)\, y'(\mu) \int\limits_{\mu}^{t} \frac{du}{\alpha(u)} \to -\infty$$

olduğunu görürüz. Bu bir çelişkidir. Bu yüzden $t > t_0$ için $y'(t) \geq 0$ dır. Şimdi $y'(\mu) = 0$ olacak şekilde bir $\mu > t_0$ var olduğunu kabul ederim. Bu durumda (2.3) ten $h.h.h.$ $t \geq t_0$ için $(\alpha(t)\, y'(t))' < 0$ elde edilir. Bu nedenle $t > \mu$ için $\alpha(t)\, y'(t) < 0$ olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir. Bu yüzden (2.8) ifadesi doğrudur.

$x > t_0$ sabit tutulup (2.9) ifadesinde s $(t_0 < s < x)$ den x e integral alınıp ifade düzenlenirse

$$y'(s) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(s)} y'(x) + \frac{1}{\alpha(s)} \int\limits_{s}^{x} [-\tau(u)]\, du \geq \frac{1}{\alpha(s)} \int\limits_{s}^{x} [-\tau(u)]\, du$$

bulunur. Bu ifade (2.3) ve (2.5) ifadeleriyle beraber $s \in (t_0, x)$ için

$$y'(s) \geq \frac{1}{\alpha(s)} \int\limits_{s}^{x} q(u)\, \psi(y(u))\, du$$

ifadesini verir. Bu ifadeyi $\psi(y(s))$ ile bölüp t_0 dan x e integrali alınırsa

$$\int\limits_{t_0}^{x} \frac{y'(s)}{\psi(y(s))} ds \geq \int\limits_{t_0}^{x} \int\limits_{s}^{x} \frac{q(u)}{\alpha(s)} \frac{\psi(y(u))}{\psi(y(s))} du ds$$

ifadesi elde edilir. Yani,

$$\int\limits_{y(t_0)}^{y(x)} \frac{du}{\psi(u)} \geq \int\limits_{t_0}^{x} \int\limits_{t_0}^{u} \frac{q(u)}{\alpha(s)} \frac{\psi(y(u))}{\psi(y(s))} ds du$$

olur. (2.8) ifadesinden ve ψ nin azalmayan fonksiyon olması gerçeğinden

$$\int_{y(t_0)}^{y(x)} \frac{du}{\psi(u)} \geq \int_{t_0}^{x} q(u) \int_{t_0}^{u} \frac{ds}{\alpha(s)} du$$

ifadesini elde ederiz. Sonuç olarak

$$\infty = \int_{t_0}^{\infty} q(u) \int_{t_0}^{u} \frac{ds}{\alpha(s)} du \leq \int_{y(t_0)}^{\infty} \frac{du}{\psi(u)} < \infty$$

ifadesini buluruz ve bu da bir çelişkidir.

Şimdi $t \geq t_0$ için $y(t) > 0$ olsun. İlk kısımdaki gibi kolayca

$$t > t_0 \text{ için } h.h.h.\ y'(t) < 0 \tag{2.10}$$

olduğu görülür. $x > t_0$ sabit tutulup (2.9) ifadesinin s $(t_0 < s < x)$ den x e integrali alınıp ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} -y'(s) &= \frac{\alpha(x)}{\alpha(s)}\left[-y'(x)\right] + \frac{1}{\alpha(s)} \int_{s}^{x} \tau(u)\, du \geq \frac{1}{\alpha(s)} \int_{s}^{x} \tau(u)\, du \\ &\geq -\frac{1}{\alpha(s)} \int_{s}^{x} q(u)\, \psi(y(u))\, du \end{aligned}$$

elde edilir. Burada eşitsizlik $-\psi(y(s))$ ile bölüp ($x < 0$ için $\psi(x) < 0$ olduğuna dikkat ediniz) t_0 dan x e integrali alınırsa

$$\int_{y(t_0)}^{y(x)} \frac{du}{\psi(u)} \geq \int_{t_0}^{x} \int_{t_0}^{u} \frac{q(u)}{\alpha(s)} \frac{\psi(y(u))}{\psi(y(s))} ds du$$

elde edilir. Şimdi (2.10) ifadesi ile birlikte ψ nin azalmayan olması ve $x < 0$ için $\psi(x) < 0$ olmasından

$$\int_{y(x)}^{y(t_0)} \frac{du}{\left[-\psi(u)\right]} \geq \int_{t_0}^{x} q(u) \int_{t_0}^{u} \frac{ds}{\alpha(s)} du$$

elde edilir ve yine $x \to \infty$ aldığımızda bir çelişki elde ederiz. Bu ise ispatı tamamlar. ∎

Uyarı 2.1.3 *Teorem 2.1.2 de eğer* (2.4) *şartını kabul etmeseydik, o zaman* (2.1) *diferensiyel kapsaması* $t > t_0$ *için* $y(t)\, y'(t) > 0$ *şartlarını sağlayan salınımsız* y *çözümlerine sahip olmazdı.*

Teorem 2.1.4 *(2.2) koşulunun sağlandığını ve aşağıdaki şartların geçerli olduğunu varsayalım:*

$$\begin{cases} (t,x) \in [t_0,\infty) \times (0,\infty) \text{ için } F(t,x) > 0, \\ (t,x) \in [t_0,\infty) \times (-\infty,0) \text{ için } F(t,x) < 0, \end{cases} \tag{2.11}$$

$$\begin{cases} q \in L^1[t_0,\infty) \text{ olacak şekilde } q : [t_0,\infty) \to (0,\infty) \text{ fonksiyonu ve } x \neq 0 \text{ için } x\psi(x) > 0 \\ \text{olacak şekilde } \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ sürekli ve artmayan } \psi \text{ fonksiyonu vardır. Ayrıca} \\ (t,x) \in [t_0,\infty) \times (0,\infty) \text{ için } |F(t,x)| \geq q(t)\psi(x) \\ (t,x) \in [t_0,\infty) \times (-\infty,0) \text{ için } |F(t,x)| \geq -q(t)\psi(x), \end{cases} \tag{2.12}$$

$$\int_0 \frac{du}{\psi(u)} < \infty \text{ ve } \int^0 \frac{du}{[-\psi(u)]} < \infty \tag{2.13}$$

ve

$$\text{her } t_1 \geq t_0 \text{ için } \int_{t_1}^{\infty} q(u) \int_{t_1}^{u} \frac{ds}{\alpha(s)} du = \infty. \tag{2.14}$$

Bu durumda kapsama (2.1), sonunda $y(t)y'(t) < 0$ olacak şekilde salınımsız bir y çözümüne sahip değildir.

İspat. y kapsama (2.1) in salınımsız bir çözümü olsun. İlk olarak $t \geq t_0$ için $y(t) > 0$ olduğunu ve $t \geq t_1 \geq t_0$ için $y'(t) < 0$ olduğunu kabul ederim. Ayrıca

$$\tau(t) \in F(t,y(t)) \text{ ve } \tau \in L^1_{loc}[t_0,\infty) \text{ için } \tau(t) = (\alpha(t)y'(t))' \tag{2.15}$$

olsun. $x > t_1$ sabitlenip (2.15) ifadesi s $(t_1 < s < x)$ den x e integre edilirse

$$-y'(s) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(s)}[-y'(x)] + \frac{1}{\alpha(s)} \int_s^x \tau(u)du \geq \frac{1}{\alpha(s)} \int_s^x \tau(u)du$$

bulunur. Bu ifade (2.12) ifadesiyle beraber $s \in (t_1,x)$ için

$$-y'(s) \geq \frac{1}{\alpha(s)} \int_s^x q(u)\psi(y(u))du$$

ifadesini verir. Bu eşitsizliğin her tarafı $\psi(y(s))$ ile bölünüp t_1 den x e integre edilirse

$$\int_{y(x)}^{y(t_1)} \frac{du}{\psi(u)} \geq \int_{t_1}^{x} \int_{t_1}^{u} \frac{q(u)}{\alpha(s)} \frac{\psi(y(u))}{\psi(y(s))} dsdu$$

elde edilir. Şimdi $t \geq t_1$ için $y'(t) < 0$ ve ψ nin artmayan fonksiyon olması gerçeğinden

$$\int_{y(x)}^{y(t_1)} \frac{du}{\psi(u)} \geq \int_{t_1}^{x} q(u) \int_{t_1}^{u} \frac{ds}{\alpha(s)} du$$

elde edilir. Yani,

$$\int_{t_1}^{x} q(u) \int_{t_1}^{u} \frac{ds}{\alpha(s)} du \leq \int_{0}^{y(t_1)} \frac{du}{\psi(u)}$$

dur. $x \to \infty$ alınırsa

$$\infty = \int_{t_1}^{\infty} q(u) \int_{t_1}^{u} \frac{ds}{\alpha(s)} du \leq \int_{0}^{y(t_1)} \frac{du}{\psi(u)} < \infty$$

çelişkisi elde edilir.

Şimdi de $t \geq t_0$ için $y(t) < 0$ ve $t \geq t_1 \geq t_0$ için $y'(t) > 0$ kabul edelim. $x > t_1$ sabitlenip ve $s \in (t_1, x)$ için

$$y'(s) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(s)} [y'(x)] + \frac{1}{\alpha(s)} \int_{s}^{x} [-\tau(u)]\, du \geq \frac{1}{\alpha(s)} \int_{s}^{x} [-\tau(u)]\, du \geq -\frac{1}{\alpha(s)} \int_{s}^{x} q(u)\psi(y(u))du$$

olduğunu görürüz. Bu eşitsizlik $-\psi(y(s))$ ile bölünüp ($x < 0$ için $\psi(x) < 0$ olduğunu görünüz) t_1 den x e integrali alınırsa

$$\int_{y(x)}^{y(t_1)} \frac{du}{\psi(u)} \geq \int_{t_1}^{x} \int_{t_1}^{u} \frac{q(u)}{\alpha(s)} \frac{\psi(y(u))}{\psi(y(s))} dsdu$$

elde edilir. Şimdi $y' > 0$, ψ artmayan bir fonksiyon ve $x < 0$ için $\psi(x) < 0$ olmak üzere

$$\int_{y(t_1)}^{y(x)} \frac{du}{[-\psi(u)]} \geq \int_{t_1}^{x} q(u) \int_{t_1}^{u} \frac{ds}{\alpha(u)} du$$

elde edilir. Bu yüzden

$$\int_{t_1}^{x} q(u) \int_{t_1}^{u} \frac{ds}{\alpha(s)} du \leq \int_{y(t_1)}^{0} \frac{du}{[-\psi(u)]}$$

olup $x \to \infty$ alınırsa yine bir çelişki elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur. ■

Eğer Teorem(2.1.4) te (2.4) ifadesinin doğruluğunu kabul edersek aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 2.1.5 *(2.2), (2.4) ve (2.11)-(2.14) ifadeleri sağlansın. O zaman kapsama (2.1) in her sınırlı çözümü salınımlıdır.*

İspat. Kapsama (2.1) in sınırlı bir salınımsız çözümü y olsun ve genelliği bozmadan $t \geq t_0$ için $y(t) > 0$ kabul edelim.

$$t > t_0 \text{ için } y'(t) < 0 \tag{2.16}$$

olduğunu iddia ediyoruz. Bunu görmek için $y'(\mu) > 0$ olacak şekilde $\mu > t_0$ olsun. Bu durumda *h.h.h.* $t \geq t_0$ için

$$(\alpha(t)\, y'(t))' \geq 0$$

dır. Böylece $t > \mu$ için

$$y'(t) \geq \frac{\alpha(\mu)}{\alpha(t)} y'(\mu)$$

dür. Bu yüzden $t \to \infty$ için

$$y(t) \geq y(\mu) + \alpha(\mu)\, y'(\mu) \int_{\mu}^{t} \frac{du}{\alpha(u)} \to \infty$$

olur. Bu durum y nin sınırlı olması gerçeği ile çelişir. Sonuç olarak $t > t_0$ için $y'(t) \leq 0$ dır. Şimdi de $y'(\mu) = 0$ olacak şekilde $\mu > t_0$ ın var olduğunu kabul edelim. O zaman $y'(\mu) = 0$ ile beraber *h.h.h.* $t \geq t_0$ için $(\alpha(t)\, y'(t))' > 0$ dan $t > \mu$ için $\alpha(t)\, y'(t) > 0$ elde edilir. Bu da bir çelişkidir. Böylece (2.16) ifadesi sağlanır. Dolayısıyla $t > t_0$ için $y(t)\, y'(t) < 0$ olup bu ifade Teorem 2.1.4 ile çelişir. Böylece teorem ispatlanmış olur. ∎

Şimdi de F fonksiyonu bir işaret değişme özelliğini sağlamadığı durumda iki tane sonuç verilecektir.

Teorem 2.1.6 *Aşağıdaki şartlar ile beraber (2.2) ve (2.4) ifadeleri sağlansın:*

$$\begin{cases} q \in L^1_{loc}[t_0,\infty) \text{ olacak şekilde } q : [t_0,\infty) \to \mathbb{R} \text{ vardır} \\ x \neq 0 \text{ için } x\psi(x) > 0 \text{ olacak şekilde } \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ (t,x) \in [t_0,\infty) \times (0,\infty) \text{ için } F(t,x) \leq -q(t)\psi(x) \text{ ve} \\ (t,x) \in [t_0,\infty) \times (-\infty,0) \text{ için } F(t,x) \geq -q(t)\psi(x), \end{cases} \tag{2.17}$$

$$\int^{\infty} q(x)\, dx = \infty \tag{2.18}$$

ve

$$x \neq 0 \text{ için } \psi'(x) \geq 0. \tag{2.19}$$

Bu durumda kapsama (2.1) salınımlıdır.

İspat. $t \geq t_0$ için $y(t) > 0$ olmak üzere y, kapsama (2.1) in salınımsız bir çözümü olsun.

$$t \geq t_0 \text{ için } w(t) = \frac{\alpha(t)\, y'(t)}{\psi(y(t))} \tag{2.20}$$

olsun. Üstelik

$$\tau(t) \in F(t, y(t)) \text{ ve } \tau \in L^1_{loc}[t_0, \infty) \text{ olmak üzere } \tau(t) = (\alpha(t)\, y'(t))' \tag{2.21}$$

olsun. $t > t_0$ için

$$w'(t) = \frac{(\alpha(t)\, y'(t))'}{\psi(y(t))} - \frac{\psi'(y(t)) w^2(t)}{\alpha(t)} \le \frac{\tau(t)}{\psi(y(t))} \le -q(t) \tag{2.22}$$

olduğuna dikkat ediniz. (2.22) ifadesi t_0 dan t ye $(t \ge t_0)$ integre edilirse

$$w(t) \le w(t_0) - \int_{t_0}^{t} q(s)\, ds \tag{2.23}$$

elde edilir. Şimdi (2.18) ve (2.23) ifadeleri $t \ge t_1$ için $w(t) < 0$ olacak şekilde $t_1 \ge t_0$ ın var olduğunu garanti eder. Yani $t \ge t_1$ için $y'(t) < 0$ dır. Ayrıca (2.18) ifadesinde $t > t_2$ için $\int_{t_1}^{t_2} q(s)ds = 0$ ve $\int_{t_1}^{t} q(s)ds > 0$ olacak şekilde $t_2 \ge t_1$ in var olduğunu garantiler. Şimdi de (2.21) ifadesinde t_2 den t ye $(t > t_2)$ integral alınırsa

$$\begin{aligned}
\alpha(t)\, y'(t) &= \alpha(t_2)\, y'(t_2) + \int_{t_2}^{t} \tau(s)\, ds \le \alpha(t_2)\, y'(t_2) - \int_{t_2}^{t} q(s)\, \psi(y(s))\, ds \\
&= \alpha(t_2)\, y'(t_2) - \psi(y(t)) \int_{t_2}^{t} q(s)\, ds + \int_{t_2}^{t} y'(s)\, \psi'(y(s)) \left(\int_{t_2}^{s} q(u) du \right) ds \\
&\le \alpha(t_2)\, y'(t_2)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $t \ge t_2$ için

$$y'(t) \le \frac{\alpha(t_2)\, y'(t_2)}{\alpha(t)}$$

olur. Bu yüzden $t \to \infty$ için

$$y(t) \le y(t_2) + \alpha(t_2) y'(t_2) \int_{t_2}^{t} \frac{ds}{\alpha(s)} \to -\infty$$

olur ki bu da bir çelişkidir. Sıradaki kabulümüz; $t \ge t_0$ için $y(t) < 0$ olsun. Ayrıca w, (2.20) ifadesindeki gibi ve τ da (2.21) ifadesindeki gibi olsun. Dikkat ediniz ki $x < 0$ için $\psi(x) < 0$ olduğundan, $t > t_0$ için

$$w'(t) \le \frac{\tau(t)}{\psi(y(t))} \le -q(t) \tag{2.24}$$

olur. Yukarıdaki (2.24) ifadesinde t_0 dan t ye $(t \ge t_0)$ integral alınırsa

$$w(t) \le w(t_0) - \int_{t_0}^{t} q(s)\, ds$$

bulunur. Bu durumda $t \geq t_1$ için $w(t) < 0$ olacak şekilde $t_1 \geq t_0$ vardır. Bu nedenle $x < 0$ için $\psi(x) < 0$ olduğunda $t \geq t_1$ için $y'(t) > 0$ olur. $t > t_2$ için $\int_{t_1}^{t} q(s)ds > 0$ olacak şekilde tekrar $t_2 \geq t_1$ seçilip (2.21) ifadesinde t_2 den t ye $(t > t_2)$ integral alınırsa

$$\begin{aligned}
\alpha(t)\, y'(t) &= \alpha(t_2)\, y'(t_2) + \int_{t_2}^{t} \tau(s)\, ds \geq \alpha(t_2)\, y'(t_2) - \int_{t_2}^{t} q(s)\, \psi(y(s))\, ds \\
&= \alpha(t_2)\, y'(t_2) - \psi(y(t)) \int_{t_2}^{t} q(s)\, ds + \int_{t_2}^{t} y'(s)\, \psi'(y(s)) \left(\int_{t_2}^{s} q(u)du \right) ds \\
&\geq \alpha(t_2)\, y'(t_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle $t \to \infty$ için

$$y(t) \geq y(t_2) + \alpha(t_2) y'(t_2) \int_{t_2}^{t} \frac{ds}{\alpha(s)} \to \infty$$

çelişkisi elde edilir. Bu da teoremi ispatlar. ■

Uyarı 2.1.7 *Eğer (2.13) ve*

$$\int^{\infty} \frac{1}{\alpha(s)} \int_{t_0}^{s} q(u)duds = \infty \tag{2.25}$$

ifadelerini kabul edersek, Teorem 2.1.6 daki (2.4) şartını kaldırabiliriz. Bunu görmek için y, kapsama (2.1) in salınımsız bir çözümü olsun ve genelliği bozmadan $t \geq t_0$ için $y(t) > 0$ seçebiliriz. O halde (2.23) ifadesi sağlanır ve $t \geq t_1$ için $y'(t) < 0$ olmak üzere $t_1 \geq t_0$ seçebiliriz ve hatta $t \geq t_2$ için $\int_{t_0}^{t} q(s)ds \geq 2w(t_0)$ olacak şekilde $t_2 \geq t_1$ de seçebiliriz. Böylece $t \geq t_2$ için

$$w(t) \leq -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} q(s)ds$$

olur. Yani $t \geq t_2$ için

$$\frac{y'(t)}{\psi(y(t))} \leq -\frac{1}{2\alpha(t)} \int_{t_0}^{t} q(s)ds$$

olup t_2 den t ye $(t \geq t_2)$ integral alınırsa

$$\int_{y(t_2)}^{y(t)} \frac{du}{\psi(u)} \leq -\int_{t_2}^{t} \frac{1}{2\alpha(s)} \int_{t_0}^{s} q(u)\, duds$$

elde edilir. Böylelikle $t \geq t_2$ için

$$\frac{1}{2} \int_{t_2}^{t} \frac{1}{\alpha(s)} \int_{t_0}^{s} q(u)\, duds \leq \int_{y(t)}^{y(t_2)} \frac{du}{\psi(u)} \leq \int_{0}^{y(t_2)} \frac{du}{\psi(u)}$$

elde ederdik ve $t \to \infty$ ile bir çelişki elde ederiz.

Yukarıda olduğu gibi ekstra şartlar eklememiz durumunda (2.18) şartını da kaldırabilmemiz mümkündür. Şimdi bunu aşağıda göreceğiz.

Teorem 2.1.8 *(2.2), (2.4), (2.17) ve (2.19) ifadeleri sağlansın. Buna ek olarak*

$$\int_{t_0}^{\infty} q(s)\,ds < \infty, \tag{2.26}$$

$$\text{Yeterince büyük } T \text{ için } \liminf_{t\to\infty} \int_{T}^{t} q(s)\,ds > 0, \tag{2.27}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{\alpha(s)} \int_{s}^{\infty} q(u)du ds = \infty \tag{2.28}$$

ve

$$\int^{\infty} \frac{du}{\psi(u)} < \infty \text{ ve } \int_{-\infty} \frac{du}{[-\psi(u)]} \tag{2.29}$$

koşulları sağlansın. Bu durumda kapsama (2.1) salınımlıdır.

İspat. y, kapsama (2.1) in $t \geq t_0$ için $y(t) > 0$ şartını sağlayan salınımsız bir çözümü olsun. w, (2.20) ifadesindeki gibi olsun. Bu durumda Teorem 2.1.6 daki gibi

$$t \geq t_0 \text{ için } w(t) \leq -q(t) \tag{2.30}$$

ifadesini buluruz. Bir de

$$\tau(t) \in F(t, y(t)) \text{ ve } \tau \in L^1_{loc}[t_0, \infty) \text{ olmak üzere } \tau(t) = (\alpha(t)\, y'(t))' \tag{2.31}$$

olsun. Göz önüne almamız gereken üç durum vardır: Ya $t \geq t_0$ için $y'(t) \geq 0$, $t \geq t_0$ için $y'(t) \leq 0$ ya da y' nün salınımlı olması.

Durum (i) $t \geq t_0$ için $y'(t) \leq 0$ olsun.

(2.27) ifadesinden $t \geq t_2$ için $\int_{t_1}^{t} q(x)dx > 0$ olmak üzere $t_1 \geq t_0$ ve $t_2 \geq t_1$ vardır. Ayrıca (2.30) ifadesinden $t \geq t_2$ için

$$\int_{t_1}^{t} q(x)dx \leq w(t_1) - w(t)$$

buluruz. Eğer $y'(\mu) = 0$ olacak şekilde $\mu > t_2$ var ise

$$0 < \int_{t_1}^{\mu} q(x)dx \leq w(t_1) \leq 0$$

çelişkisi elde edilir. Böylece $t > t_2$ için $y'(t) < 0$ dır. (2.31) ifadesinde t_2 den t ye ($t > t_2$) integral alınırsa (Teorem 2.1.6 daki gibi)

$$y'(t) \leq \frac{\alpha(t_2)y'(t_2)}{\alpha(t)}$$

elde edilir ve böylece $t \to \infty$ için

$$y(t) \leq y(t_2) + \alpha\,(t_2)\, y'(t_2) \int_{t_2}^{t} \frac{ds}{\alpha\,(s)} \to -\infty$$

çelişkisi elde edilir.

Durum (ii) $t \geq t_0$ için $y'(t) \geq 0$ olsun.

Şimdi $s \geq t \geq t_0$ için (2.30) ifadesinden

$$\int_t^s q(x)dx \leq w(t) - w(s) \leq w(t)$$

ifadesini elde ederiz. Bir sonuç olarak ($s \to \infty$ alınırsa) $t \geq t_0$ için

$$\int_t^{\infty} q(x)dx \leq \frac{\alpha\,(t)\, y'(t)}{\psi\,(y(t))}$$

elde ederiz. Burada ifadenin her tarafını α ile bölüp t_0 dan t ye ($t < t_0$) integral alırsak

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\alpha\,(s)} \int_s^{\infty} q(x)dxds \leq \int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{du}{\psi\,(u)} \leq \int_{y(t_0)}^{\infty} \frac{du}{\psi\,(u)}$$

buluruz. Böylece

$$\infty = \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{\alpha\,(s)} \int_s^{\infty} q(x)dxds \leq \int_{y(t_0)}^{\infty} \frac{du}{\psi\,(u)} < \infty$$

çelişkisi elde edilir.

Durum (iii) y' salınımlı olsun.

O halde $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ ve $y'(T_n) < 0$ olacak şekilde bir $\{T_n\}_1^{\infty}$ dizisi vardır.

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{T_n}^{t} q(s)ds > 0$$

olacak şekilde N yi yeterince büyük olsun. Şimdi (2.30) ifadesini T_n den t ye ($t > T_n$) integre edersek

$$\frac{\alpha\,(t)\, y'(t)}{\psi\,(y\,(t))} \leq \frac{\alpha\,(T_n)\, y'(T_n)}{\psi\,(y\,(T_n))} - \int_{T_n}^{t} q(s)ds$$

buluruz. Bu yüzden

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\alpha\,(t)\, y'(t)}{\psi\,(y\,(t))} \leq \frac{\alpha\,(T_n)\, y'(T_n)}{\psi\,(y\,(T_n))} + \limsup_{t\to\infty} \left(- \int_{T_n}^{t} q(s)ds \right) < 0$$

olur ki bu da y' nün salınımlı olması gerçeği ile çelişir.

Şimdi, $t \geq t_0$ için $y(t) < 0$ ve w (2.20) ifadesindeki gibi olsun. (Bu yüzden (2.30) ifadesi sağlanır. Bakınız Teorem 2.1.6) ve τ, (2.31) ifadesindeki gibi olsun. Burada da benzer üç durumu göz önüne almamız gereklidir.

Durum (i) $t \geq t_0$ için $y'(t) \leq 0$ durumu;

Şimdi $s \geq t \geq t_0$ için (2.30) ifadesinden

$$\int_t^s q(x)dx \leq w(t) - w(s) \leq w(t)$$

elde ederiz. Çünkü $x > 0$ için $\psi(x) < 0$ olmak üzere $y' \leq 0$ dır. Bu nedenle $t \geq t_0$ için

$$\int_t^\infty q(x)dx \leq \frac{\alpha(t)\, y'(t)}{\psi(y(t))}$$

olur. O halde, her iki tarafı α ile bölüp t_0 dan t ye $(t < t_0)$ integrale geçilir ve $t \to \infty$ alınır ise

$$\infty = \int_{t_0}^\infty \frac{1}{\alpha(s)} \int_s^\infty q(x)dxds \leq \int_{-\infty}^{y(t_0)} \frac{du}{\psi(u)} < \infty$$

çelişkisi elde ederiz.

Durum (ii) $t \geq t_0$ için $y'(t) \geq 0$ durumu;

Şimdi $t \geq t_2$ için $\int_{t_1}^t q(x)dx > 0$ olacak şekilde $t_1 \geq t_0$ ve $t_2 \geq t_1$ vardır. Bir de (2.30) ifadesinden $t \geq t_2$ için

$$\int_{t_1}^t q(x)dx \leq w(t_1) - w(t)$$

elde ederiz. Eğer $y'(\mu) = 0$ olacak şekilde $\mu > t_2$ varsa

$$0 < \int_{t_1}^\mu q(x)dx \leq w(t_1) \leq 0$$

buluruz. Çünkü $y' \geq 0$ ve $x < 0$ için $\psi(x) < 0$ dır. Bu yüzden $t > t_2$ için $y'(t) > 0$ olur. (2.31) ifadesinde t_2 den t ye $(t > t_2)$ integral alırsak

$$y'(t) \geq \frac{\alpha(t_2)\, y'(t_2)}{\alpha(t)}$$

olur. Bu nedenle $t \to \infty$ için

$$y(t) \geq y(t_2) + \alpha(t_2)\, y'(t_2) + \int_{t_2}^t \frac{ds}{\alpha(s)} \to \infty$$

çelişkisini elde ederiz.

Durum (iii) y' nün salınımlı olma durumu;

O halde $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ ve $y'(T_n) > 0$ olacak şekilde bir $\{T_n\}_1^\infty$ dizisi vardır. N yeterince büyük seçilir ise

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{T_n}^t q(s)ds > 0$$

olur. Şimdi (2.30) ifadesi T_n den t ye ($t > T_n$) integre edilir ve ifadenin $\limsup$ u alınırsa

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\alpha(t)\, y'(t)}{\psi(y(t))} \leq \frac{\alpha(T_n)\, y'(T_n)}{\psi(y(T_n))} + \limsup_{t\to\infty} \left(-\int_{T_n}^{t} q(s)ds \right) < 0$$

çelişkisi elde edillir. Böylece teorem ispatlanmış olur. ■

Uyarı 2.1.9 *Kolay görülebildiği gibi Teorem 2.1.8 içindeki (2.27) ifadesi yeterince büyük T için*

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{T}^{t} q(s)ds \geq 0$$

ifadesi ile yerdeğiştirilebilir.

2.2 İKİNCİ ÇALIŞMA

R.P.Agarwal, S.R.Grace ve D.O'Regan, 2009 yılında yaptıkları aşağıdaki çalışmada 2003 yılında yapmış oldukları çalışmayı, Agarwal et al.(2003a),devam ettirerek aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

İlk sonuç, F süperlineer (yani (2.34) koşulunu sağlayan) bir fonksiyon iken kapsama (2.1) in salınım davranışı ile ilgilenmektedir.

Teorem 2.2.1 *Aşağıdaki şartlar sağlansın*

$$\alpha \in C\left([t_0,\infty), \mathbb{R}^+ = (0,\infty)\right) \ \textit{ve} \int^{\infty} \frac{ds}{\alpha(s)} = \infty \tag{2.32}$$

$\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$ *olmak üzere*

$$\begin{cases} F(t,x) < 0, (t,x) \in [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^+ \ \textit{ise} \\ F(t,x) > 0, (t,x) \in [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^- \ \textit{ise} \end{cases} \tag{2.33}$$

Varsayalımki aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\lambda > 1$ sabiti vardır:

$$\begin{cases} h.h.h.\ t \geq t_0 \ \textit{ve}\ x \neq 0 \ \textit{için}\ xf(t,x) > 0 \ \textit{ve} \\ h.h.h.\ t \geq t_0 \ \textit{için}\ |x| \ \textit{e göre}\ \dfrac{|f(t,x)|}{|x|^{\lambda}} \ \textit{artmayan ve} \\ (t,x) \in [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^+ \ \textit{için}\ |F(t,x)| \geq f(t,x), \\ (t,x) \in [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^- \ \textit{için}\ |F(t,x)| \geq -f(t,x) \\ \textit{olacak şekilde bir}\ f : [t_0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \textit{fonksiyonu vardır.} \end{cases} \tag{2.34}$$

Eğer sıfırdan farklı her c sabiti için $A[t,T] = \int\limits_T^t \frac{ds}{\alpha(s)}, t \geq T \geq t_0$ *ve* $A(t) = A[t, t_0]$ *olmak üzere*

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} A(s) |F(s,c)| \, ds = \infty \tag{2.35}$$

ise kapsama (2.1) salınımlıdır.

İspat. y kapsama (2.1) in salınımsız bir çözümü olsun. Varsayalım $t \geq t_0$ için $y(t) > 0$ olsun. İlk olarak

$$t \geq t_0 \text{ için } y'(t) > 0 \tag{2.36}$$

olduğunu göstereceğiz. Bunu görmek için $y'(t_1) < 0$ olacak şekilde $t_1 > t_0$ ın var olduğunu kabul edelim.

$$\tau(t) := (\alpha(t) y'(t))' \text{ olmak üzere } \tau(t) \in F(t, y(t)) \text{ ve } \tau \in L^1_{loc}[t_0, \infty) \tag{2.37}$$

olsun. (2.33) koşulundan *h.h.h.* $t \geq t_0$ için

$$(\alpha(t)y'(t))' \leq 0$$

elde ederiz. Bu yüzden $t \geq t_0$ için

$$\alpha(t)y'(t) \leq \alpha(t_1) y'(t_1)$$

dir. Şimdi t_1 den t ye $(t \geq t_1)$ integral alırsak

$$t \to \infty \text{ için } y(t) \leq y(t_1) + \alpha(t_1) y'(t_1) \int\limits_{t_1}^{t} \frac{ds}{\alpha(s)} \to -\infty$$

ifadesine ulaşırız ki bu da bir çelişkidir. Bu nedenle $t \geq t_0$ için $y'(t) \geq 0$ olmalıdır. Şimdi de $y'(t) = 0$ olacak şekilde $t_1 > t_0$ ın var oldunuğunu kabul edelim. Koşul (2.33) ten *h.h.h.* $t \geq t_0$ için $(\alpha(t)y'(t))' < 0$ dır. Bu yüzden $t > t_1$ için $\alpha(t) y'(t) < 0$ olur ki bu da bir çelişkidir. Bu sebepten dolayı (2.36) ifadesi doğrudur.

$t_1 \geq t_0$ sabitlensin. Bir pozitif c_1 sabiti vardır öyleki

$$h.h.h. \; t \geq t_1 \text{ için } y(t) \geq c_1 \tag{2.38}$$

dir. (2.37) ifadesinde t den $u \geq t$ ye integrale geçilir ve $u \to \infty$ alınır ise $h.h.h.$ $t \geq t_1$ için

$$y'(t) \geq \frac{1}{\alpha(t)} \int_t^{\infty} [-\tau(s)]\, ds \geq \frac{1}{\alpha(t)} \int_t^{\infty} f(s, y(s)) ds \tag{2.39}$$

elde ederiz. (2.34) ve (2.38) ifadelerinden $h.h.h.$ $t \geq t_1$ için

$$f(t, y(t)) = \frac{f(t, y(t))}{y^{\lambda}(t)} y^{\lambda}(t) \geq \frac{f(t, c_1)}{c_1^{\lambda}} y^{\lambda}(t) \tag{2.40}$$

elde ederiz. (2.40) ifadesini (2.39) ifadesinin içinde kullanıp, $y(t)$ nin artanlığını da dikkate alırsak $h.h.h.$ $t \geq t_1$ için

$$\begin{aligned} y'(t) &\geq \frac{1}{c_1^{\lambda}\alpha(t)} \int_t^{\infty} f(s, c_1)\, y^{\lambda}(s) ds \\ &\geq \left(\frac{1}{c_1^{\lambda}\alpha(t)} \int_{t_1}^{\infty} f(s, c_1)\, ds \right) y^{\lambda}(t) \end{aligned}$$

elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizliği $(y(t))^{\lambda}$ ile bölüp t_1 den t ye integrale geçilir ve $t \to \infty$ alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_1^{\lambda}} \int_{t_1}^{\infty} \frac{1}{\alpha(u)} \int_u^{\infty} f(s, c_1)\, ds du &= \frac{1}{c_1^{\lambda}} \int_{t_1}^{\infty} A[s, t_1]\, f(s, c_1)\, ds \\ &\leq \frac{y(t_1)^{1-\lambda}}{\lambda - 1} < \infty \end{aligned}$$

ifadesini buluruz ve bu da (2.35) koşulu ile çelişir.

$y(t)$ nin negatif olduğu durumda paralel bir argümanın sağlandığı kolayca görülebilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 2.2.2 *(2.32)ve (2.33) koşulları sağlansın ve aşağıdaki koşulları sağlayan*

$0 < \alpha < 1$ olan bir α sabiti var olsun.

$$\begin{cases} h.h.h.\ t \geq t_0 \text{ ve } x \neq 0 \text{ için } xf(t, x) > 0 \text{ ve} \\ h.h.h.\ t \geq t_0 \text{ için } |x| \text{ e göre } \dfrac{|f(t, x)|}{|x|^{\alpha}} \text{ artmayan ve} \\ (t, x) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^{+} \text{ için } |F(t, x)| \geq f(t, x), \\ (t, x) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^{-} \text{ için } |F(t, x)| \geq -f(t, x) \\ \text{olacak şekilde bir } f : [t_0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ fonksiyonu vardır.} \end{cases} \tag{2.41}$$

Eğer sıfırdan farklı her c sabiti için ve $A(t)$ Teorem 2.2.1 daki gibi olmak üzere

$$\int_{t_0}^{\infty} |f(s, cA(s))|\, ds = \infty \tag{2.42}$$

ise kapsama (2.1) salınımlıdır.

İspat. y kapsama (2.1) ın salınımsız bir çözümü olsun. $y(t) < 0$ olduğunda da benzer argümanler geçerli olduğu için $t \geq t_0$ için $y(t) > 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Teorem 2.2.1 in ispatındaki gibi (2.36) ve (2.39) ifadelerini buluruz. $\tau(t)$, (2.37) ifadesindeki gibi olsun. $t_2 > t_1$ olacak şekilde t_2 sabit tutulup (2.39) ifadesinde gerekli düzeltmeler yapılıp t_1 den t ye ($\geq t_2$) integral alınırsa $h.h.h.$ $t \geq t_2$ için

$$y(t) \geq A(t) \int_t^{\infty} f(s, y(s)) ds \tag{2.43}$$

elde edilir. Dikkat edilirse $h.h.h.$ $t \geq t_2$ için

$$y(t) \leq c_2 A(t) \tag{2.44}$$

olacak şekilde bir $c_2 > 0$ sabiti vardır. (2.41) ve (2.44) ifadesinden $h.h.h.$ $t \geq t_2$ için

$$f(t, y(t)) = \frac{f(t, y(t))}{y^{\alpha}(t)} y^{\alpha}(t) \geq \frac{f(t, c_2 A(t))}{c_2^{\alpha}} \left(\frac{y(t)}{A(t)} \right)^{\alpha} \tag{2.45}$$

buluruz. (2.43) ve (2.45) ifadesini birleştirerek $t \geq t_2$ için

$$\frac{y(t)}{A(t)} \geq \frac{1}{c_2^{\alpha}} \int_t^{\infty} f(s, c_2 A(s)) \left(\frac{y(t)}{A(s)} \right)^{\alpha} ds$$

elde ederiz. $t \geq t_2$ olmak üzere $w(t) = \int_t^{\infty} f(s, c_2 A(s)) \left(\frac{y(s)}{A(s)} \right)^{\alpha} ds$ olarak alınırsa aşağıdakiler elde edilir.

$$-w'(t) = f(t, c_2 A(t)) \left(\frac{y(t)}{A(t)} \right)^{\alpha} \geq f(t, c_2 A(t))(c_2^{\alpha} w(t))^{\alpha}$$

veya $t \geq t_2$ için

$$-\frac{w'(t)}{w^{\alpha}(t)} \geq (c_2^{\alpha})^{\alpha} f(t, c_2 A(t))$$

olur. Bu eşitsizliğin integralini alırsak

$$\int_{t_2}^{\infty} f(s, c_2 A(s)) ds < \infty$$

olur ki bu da (2.42) koşulu ile çelişir. Böylece ispat tamamlanmıştır. ■

Daha sonra aşağıdaki sonuç verilmiştir.

Teorem 2.2.3 *(2.32) ve (2.33)şartları sağlansın ve*

$$\begin{cases} \textit{h.h.h. } t \geq t_0 \textit{ ve } x \neq 0, \\ \textit{h.h.h. } t \geq t_0 \textit{ için } f(t,x) \textit{ fonksiyonu } x \textit{ e göre azalmayan ve} \\ (t,x) \in [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^+ \textit{ için } |F(t,x)| \geq f(t,x), \\ (t,x) \in [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^- \textit{ için } |F(t,x)| \geq -f(t,x) \\ \textit{şartlarını sağlayan } f : [t_0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ fonksiyonu var olsun.} \end{cases} \tag{2.46}$$

Eğer sıfırdan farklı her c sabiti için

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{\alpha(u)} \int_{t_0}^{\infty} |f(s,c)|\, dsdu = \infty \tag{2.47}$$

ise (2.1) kapsaması salınmalıdır.

İspat. y, kapsama (2.1) in salınımız bir çözümü olsun. Her $t \geq t_0$ için $y(t) > 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Çünkü $y(t) < 0$ durumunda da paralel bir argüman geçerlidir. Teorem 2.2.1 in ispatındaki gibi (2.36) ve (2.38) ifadeleri elde edilir. Şimdi de $\tau(t)$ (2.37) ifadesindeki gibi olsun. $t_1 \geq t_0$ olmak üzere t_1 den t ye (2.37) ifadesinde integral alınırsa

$$\alpha(t)y'(t) \leq \alpha(t_1)y'(t_1) - \int_{t_1}^{t} f(s,y(s))ds \tag{2.48}$$

bulunur. (2.38) ifadesini (2.48) de kullanırsak

$$y'(t) \leq \frac{-1}{\alpha(t)} \int_{t_1}^{t} f(s,c_1)ds$$

elde ederiz. Burada t_1 den t ye integral alınırsa $t \to \infty$ için

$$y(t) \leq y(t_1) - \int_{t_1}^{t} \frac{1}{\alpha(u)} \int_{t_1}^{t} f(s,c_1)dsdu \to -\infty$$

buluruz. Bu ifade $t \geq t_0$ için $y(t) > 0$ gereceği ile çelişir. Bu da teoremin ispatını tamamlar. ■

Şimdi de aşağıdaki ilginç sonuç verilmiştir.

Teorem 2.2.4 *(2.32) ve (2.33) şartları sağlansın $q \in L^1_{loc}[t_0,\infty)$ olacak şekilde*

$q : [t_0,\infty) \to (0,\infty)$ bir q fonksiyonu, $\rho \in C([t_0,\infty),\mathbb{R}^+)$ şeklinde azalmayan bir ρ fonksiyonu ve

$$\begin{cases} (t,x) \in [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^+ \text{için } F(t,x) \leq -q(t)x^\lambda \\ \text{ve} \\ (t,x) \in [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^- \text{ için } F(t,x) \geq -q(t)x^\lambda \end{cases} \tag{2.49}$$

olacak şekilde bir λ sabitinin $0 \leq \lambda \leq 1$ (λ, pozitif tek tamsayıların oranı) var olduğunu kabul edelim. Eğer $A(t)$, Teorem 2.2.1 daki gibi olmak üzere sıfırdan farklı her pozitif c sabiti için

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \left[\rho(s)\, q(s) - c\frac{\rho'(s)}{A^{\lambda}(s)}\right] ds = \infty \tag{2.50}$$

ise kapsama (2.1) salınımlıdır.

İspat. y, kapsama (2.1) in salınımsız bir çözümü olsun. $t \geq t_0$ için $y(t) > 0$ kabul edebiliriz. Çünkü $y(t) < 0$ durumunda da paralel bir argüman geçerlidir. Teorem 2.2.1 ve Teorem 2.2.2 in ispatlarında olduğu gibi (2.36) ve (2.44) ifadeleri bulunur. $t \geq t_0$ için

$$w(t) = \rho(t)\frac{\alpha(t)y'(t)}{y^{\lambda}(t)} \tag{2.51}$$

olsun. Ayrıca $\tau(t)$ de (2.37) ifadesindeki gibi olsun. $t > t_0$ olduğunu dikate alırsak

$$w'(t) = \rho'(t)\frac{\alpha(t)y'(t)}{y^{\lambda}(t)} + \rho(t)\frac{(\alpha(t)y'(t))'}{y^{\lambda}(t)} - \lambda\rho(t)\alpha(t)\frac{(y'(t))^2}{y^{\lambda+1}(t)}$$

veya

$$w'(t) \leq -\rho(t)q(t) + \rho'(t)\left(\frac{\alpha(t)y'(t)}{y(t)}\right)(y^{1-\lambda}(t)) \tag{2.52}$$

ifadelerini elde edilir. Şimdi $t \geq t_0$ için

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} y'(s)ds = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\alpha(s)}(\alpha(s)y'(s))\, ds \geq A(t)\,(\alpha(t)y'(t)) \tag{2.53}$$

dir. (2.44) ve (2.53) ifadelerini (2.52) ifadesinin içinde kullanırsak $t \geq t_1 \geq t_0$ için

$$\begin{aligned} w'(t) &\leq -\rho(t)q(t) + \frac{\rho'(t)}{A(t)}(c_2A(t))^{1-\lambda} \\ &= -\rho(t)q(t) + c_2^{1-\lambda}\frac{\rho'(t)}{A^{\lambda}(t)} \end{aligned} \tag{2.54}$$

elde ederiz. t_1 den t ye (2.54) ifadesinin integralini alıp sonra sonuç eşitsizliğinin $t \to \infty$ için lim sup unu alırsak

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_1}^{t} \left[\rho(s)q(s) - c_2^{1-\lambda}\frac{\rho'(s)}{A^{\lambda}(s)}\right] ds \leq -w(t) + w(t_1) \leq w(t_1) < \infty$$

elde edilir. Bu da (2.50) koşulu ile çelişir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 2.2.5 *(2.32), (2.33) ve (2.49) koşulları sağlansın dahası kabul edelim ki diferensiyellebilir bir* $H : \mathfrak{D} = \{(t,s) : t \geq s \geq t_0\} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu vardır öyleki*

$$t \geq t_0 \text{ için } H(t,t) = 0,\; H(t,s) > 0 \text{ ve } (t,s) \in \mathfrak{D} \text{ için } \frac{\partial H(t,s)}{\partial(s)} \geq 0 \tag{2.55}$$

olsun. Eğer $A(t)$ Teorem 2.2.1 daki gibi olmak üzere herhangi bir $c > 0$ sabiti için

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[H(t,s)\rho(s)q(s) - c\frac{\left(H(t,s)\rho'(s) + \rho(s)\frac{\partial}{\partial s}H(t,s)\right)}{A^{\lambda}(s)} \right] ds = \infty \tag{2.56}$$

oluyor ise kapsama (2.1) salınımlıdır.

İspat. y, kapsama (2.1) in salınımsız bir çözüm olsun. $t \geq t_0$ için $y(t) > 0$ kabul edebiliriz, çünkü $y(t) < 0$ olması durumunda da paralel bir argüman sağlanır. Teorem 2.2.4 ün ispatında olduğu gibi (2.36) ve (2.52) ifadeleri bulunur. Üstelik dikkat edilirse $t \geq t_0$ için

$$\frac{\alpha(t)y'(t)}{y^{\lambda}(t)} \leq c_2^{1-\lambda} A^{-\lambda}(t) \tag{2.57}$$

dir. (2.52) eşitsizliğinin her iki tarafını $H(t,s)$ ile çarpıp elde edilen eşitsizliğin $t_1 \geq t_0$ dan t ye integrali alınırsa

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t} H(t,s)w'(s)ds &= H(t,s)w(s)|_{t_1}^{t} - \int_{t_1}^{t} \frac{\partial H(t,s)}{\partial s} w(s)ds \\ &\leq -\int_{t_1}^{t} H(t,s)\rho(s)q(s)ds + \int_{t_1}^{t} H(t,s)\rho'(s)\left(\frac{\alpha(s)y'(s)}{y^{\lambda}(s)}\right) ds\end{aligned}$$

veya

$$-H(t,t_1)w(t_1) \leq -\int_{t_1}^{t} H(t,s)\rho(s)q(s)ds + \int_{t_1}^{t} \left[H(t,s)\rho(s) + p'(s)\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} \right] \left(\frac{\alpha(s)y'(s)}{y^{\lambda}(s)}\right) ds \tag{2.58}$$

(2.58) ifadesi (2.57) de kulanılırsa

$$\infty > w(t_1) \geq \frac{1}{H(t,t_1)} \int_{t_1}^{t} \left[H(t,s)\rho(s)q(s) - c_2^{1-\lambda}\frac{\left(H(t,s)\rho'(s) + \rho(s)\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}\right)}{A^{\lambda}(s)} \right] ds$$

elde ederiz. üstteki eşitsizliğin her iki tarafın lim sup una geçilir ve $t \to \infty$ alınırsa (2.56) şartı ile çelişen bir ifade bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur. ∎

Uyarı 2.2.6

- Teorem 2.2.5 te $t \geq t_0$ için $\rho'(t) \geq 0$ ve $(t,s) \in \mathfrak{D}$ için $\dfrac{\partial H(t,s)}{\partial s} \geq 0$ koşulları, $t \geq t_0$ ve $(t,s) \in \mathfrak{D}$ için

  $$h(t,s) = H(t,s)\rho'(s) + \rho(s)\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} \geq 0 \tag{2.59}$$

  ile değiştirilebilir.

- $h(t,s)$ (2.59) ifadesindeki gibi olmak üzere (2.56) şartı

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H(t,s)\rho(s)q\,(s)\,ds = \infty \tag{2.60}$$

ve

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} h(t,s)A^{-\lambda}(s)ds < \infty \tag{2.61}$$

şeklinde değiştirilebilir.

BÖLÜM 3

İKİNCİ DERECEDEN GÜÇLÜ SÜPERLİNEER VE GÜÇLÜ ALTLİNEER DİNAMİK KAPSAMALAR İÇİN SALINIM KRİTERLERİ

Bu bölümde Elvan Akın-Bohner ve Shurong Sun tarafından yapılan bir çalışma üzerinde duracağız; bakınız, (E. Akın-Bohner and S.Sun 2012). Bu çalışmada zaman skalasında ikinci dereceden güçlü süperlineer ve güçlü altlineer dinamik kapsamalar için bazı salınım kriterleri incelenmiştir. Salınım problemleri son zamanlarda fark denklemleri ve diferensiyel denklemler alanlarında çok ilgi çekici hale gelmiştir. Bu alanlar, zaman skalasında dinamik denklemler adı verilen daha güçlü ve daha genel teoremler ile birleştirilmeye başlanmıştır. Bu bölümdeki dinamik kapsama için elde edilen sonuçlar,önceki bölümde verilen diferensiyel kapsama için elde edilen sonuçlara göre de yenidir. Önceki bölümde verilen diferensiyel kapsamanın salınımı için gösterilen ispatlar ile bu bölümde aynı kapsamanın dinamik versiyonunun salınımı için verilecek olan ispatlar kıyaslanabilirlik açısından önemlidir. Son zamanlarda bu tür çalışmalar çok revaçtadır.
Bu bölümde aşağıdaki [**H1**], [**H2**] ve [**H3**] hipotezleri altında

$$\left(p(t)x^{\Delta}(t)\right)^{\Delta} \in F(t, x^{\sigma}(t)), h.h.h. \quad t \geq t_0 \tag{3.1}$$

şeklindeki ikinci dereceden lineer olmayan dinamik kapsamanın çözümlerinin salınım davranışı üzerinde durulacaktır.

[**H1**] $p \in C_{rd}\left([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^{+}\right)$ öyleki

$$A(t) := \int_t^{\infty} \frac{\Delta s}{p(s)} < \infty, \quad t \geq t_0.$$

[**H2**] $F : [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}} \backslash \emptyset$ konveks ve kompakt küme-değerli fonksiyon öyleki

$|F(., u)| = \sup\{|y| : y \in F(t, u)\}$ ve $F(t, u) > 0$ yani, her $y \in F(t, u)$ için $y > 0$.

[**H3**]

$$
\begin{aligned}
(t,u) &\in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^+ \text{ için } F(t,u) < 0,\\
(t,u) &\in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^- \text{ için } F(t,u) > 0.
\end{aligned}
$$

Dinamik kapsamalar, dinamik denklemlerin önemli bir genelleştirilmesini temsil eder. Bir dinamik kapsamanın çözümü tek bir eğri yerine ulaşılabilir bir kümedir. Dinamik kapsamalar için çözüm metodu, dinamik denklemler için kullanılan nümerik metodlar ile kıyaslandığında oldukça karmaşıktır. Algoritmalar, optimal kontrol teorisinin bazı kavramlarını temel almaktadır. Dinamik kapsamalar ile pek çok durumda karşılaşılabilmektedir; örneğin, dinamik varyasyonel eşitsizlikler,ileri dinamik sistemler, dinamik Coulomb sürtünme problemleri ve fuzzy kümeleri aritmetiği gibi. Örneğin: Coulomb sürtünme için temel kural kayma yönünün ters yönünde μN büyüklüğüne sahiptir, burada N dik (normal) kuvvet ve μ (sürtünme katsayısı) bir sabittir. Fakat, eğer kayma sıfır ise, sürtünme kuvveti doğru düzlemde büyüklüğü μN ya da daha küçük olan herhangi bir kuvvet olabilir. Bu yüzden, sürtünme kuvvetini durum ve hızın bir fonksiyonu olarak yazmak için bir küme fonksiyonuna ihtiyaç duyarız.

Son zamanlarda ayrık ve sürekli analizde salınım problemleri çok popüler hale gelmiştir. Bu yüzden bu iki alan çok daha kuvvetli bir genel teori ile birleştirilmeye ve genişletilmeye başlanmıştır. Bu teori reel sayıların boştan farklı alt kümeleri olan $\mathbb{T}$ zaman skalası olarak adlandırılmıştır. İlk bölümde biraz özetlediğimiz bu teori Hilger tarafından 1988 de başlatılmıştır.

Bu bölümün temel amacı (3.1) ile verilen dinamik kapsama için E. Akın ve S. Sun tarafından verilen salınım kriterlerinin incelenmesidir. Said Grace, R.P.Agarwal ve D.O'Regan sadece $A(t) = \infty$ iken

$$(p(t)x'(t))' \in F(t, x(t)), h.h.h.\ t \geq t_0$$

ikinci dereceden diferensiyel kapsamasının salınımı için yeterli şartlar vermişlerdir.(Grace et al. 2009). (3.1) için salınım kriterlerini $A(t) = \infty$ iken yine E. Akın ve S. Sun tarafından 2009 yılında çalışılmıştır (bakınız, E. Akın and S.Sun 2009). Bu bölümdeki ispatlar Grace, Agarwal, Bohner ve O'Regan tarafından yapılan çalışma (bakınız, Grace et al. 2009), Bohner ve Tisdel tarafından yapılan çalışma (bakınız, Bohner and Tisdel 2005) ve E. Akın ve S. Sun tarafından yapılan çalışma (bakınız, E. Akın and S.Sun 2011) ile bağlantılıdır. Bu bölüm boyunca $\mathbb{T}$ zaman skalası üstten sınırsız kabul edilmiştir. Tüm reel değerli yerel Δ-integrallenebilir fonksiyonların kümesi; yani, her bir $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ kompakt aralığı üzerinde Δ-integrallenebilir fonksiyonların kümesi $L^1_{loc}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ olsun. Eğer $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde h.h.h. $\left(p(t)x^{\Delta}(t)\right)^{\Delta} = y(t)$ ve $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde h.h.h. $y(t) \in F(t, x^{\sigma}(t))$ olacak şekilde bir $y \in L^1_{loc}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ fonksiyonu var ise (3.1) in bir çözümü x tir denir. Eğer (3.1) in bir çözümü x belli bir noktadan sonra pozitif ya da negatif değil ise salınımlıdır denir.

3.1 TEMEL SONUÇLAR

Bu kısımda dinamik kapsama (3.1) in salınım davranışları üzerinde durulacaktır. Sırasıyla ikinci dereceden güçlü süperlineer ve güçlü altlineer dinamik kapsamalar için salınım kriterleri incelenecektir.

Tanım 3.1.1 *Eğer*

$$\begin{aligned}(t,u) &\in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^+ \ \textit{için}\ |F(t,u)| \geq f(t,u)\\ (t,u) &\in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^- \ \textit{için}\ |F(t,u)| \geq -f(t,u)\end{aligned}$$

ve h.h.h. $t \geq t_0$, $xy > 0$ *ve* $|x| \leq |y|$ *için*

$$\frac{|f(t,x)|}{|x|^{\beta}} \leq \frac{|f(t,y)|}{|y|^{\beta}} \tag{3.2}$$

şartlarını sağlayan *h.h.h.* $t \geq t_0, u \neq 0$ için $uf(t,u) > 0$ olacak şekilde bir $f : [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve bir $\beta > 1$ sabiti var ise (3.1) kapsaması (veya F) **güçlü süperlineerdir** denir. Ayrıca eğer

$$\begin{aligned}(t,u) &\in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^+ \ \text{için}\ |F(t,u)| \geq f(t,u)\\ (t,u) &\in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^- \ \text{için}\ |F(t,u)| \geq -f(t,u)\end{aligned}$$

ve *h.h.h.* $t \geq t_0, xy > 0$ ve $|x| \leq |y|$ için

$$\frac{|f(t,x)|}{|x|^{\gamma}} \geq \frac{|f(t,y)|}{|y|^{\gamma}} \tag{3.3}$$

şartlarını sağlayan *h.h.h.* $t \geq t_0, u \neq 0$ için $uf(t,u) > 0$ olacak şekilde bir $f : [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve bir $0 < \gamma < 1$ sabiti var ise (3.1) kapsaması **güçlü altlineerdir** denir.

Eğer $\beta = 1$ iken (3.2) sağlanır ise (3.1) kapsamasına süperlineer; eğer $\gamma = 1$ iken (3.3) sağlanır ise (3.1) kapsamasına altlineer denir. Aşağıdaki lemmalar çok kullanışlıdır ve bir çok yerde kullanılmıştır.

Lemma 3.1.2 *$[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $|x|^{\Delta}$ tek işaretli ve $\lambda > 0$ verilsin. O halde $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde*

$$\frac{|x|^{\Delta}}{(|x|^{\sigma})^{\lambda}} \le \frac{\left(|x|^{1-\lambda}\right)^{\Delta}}{1-\lambda} \le \frac{|x|^{\Delta}}{|x|^{\lambda}}$$

dır.

Lemma 3.1.3 *Farzedelimki (3.1) kapsamasının $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında bir çözümü x tek işaretli olsun. O zaman $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde ya*

$$xx^{\Delta} \ge 0 \tag{3.4}$$

ya da $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde

$$xx^{\Delta} \le 0 \tag{3.5}$$

olacak şekilde $t_1 \ge t_0, t_1 \in \mathbb{T}$ vardır.
Dahası varsayalımki bir $f : [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır öyleki h.h.h. $t \ge t_0$ için $uf(t, u) > 0$ ve

$$\overline{c} = \left\{|x(t_0)| + p(t_0)\left|x^{\Delta}(t_0)\right| A(t_0)\right\} sgnx(t_0)$$

ve

$$\widehat{c} = \begin{cases} \dfrac{x(t_0)}{A(t_0)}, & \text{eğer (3.4) sağlanır ise} \\ p(t_1)x^{\Delta}(t_1)sgnx(t_0), & \text{eğer (3.5) sağlanır ise} \end{cases}$$

olsun. O zaman

$$\overline{c}x > 0 \text{ olmak üzere } [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \text{ üzerinde } |x| \le |\overline{c}| \tag{3.6}$$

ve

$$\widehat{c}Ax > 0 \text{ olmak üzere } [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \text{ üzerinde } |x| \ge |\widehat{c}A| \tag{3.7}$$

dir.

İspat. Kabul edelim ki x kapsama (3.1) in bir çözümü ve $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $x>0$ olsun. $x<0$ durumu da benzer şekilde gösterilebilir. Eğer (3.4) şartı sağlanmaz ise $t_1>t_0$ olacak şekilde $t_1\in\mathbb{T}$ vardır öyleki $x^{\Delta}(t_1)<0$ dır. [**H2**] hipotezinden $t\geq t_0$ için

$$(p(t)x^{\Delta}(t))^{\Delta}<0 \tag{3.8}$$

dır ve böylece $t\geq t_1$ için

$$p(t)x^{\Delta}(t)\leq p(t)x^{\Delta}(t_1)<0$$

dır. Bu yüzden $t\geq t_1$ için $x^{\Delta}(t)<0$ olur. Bu (3.5) koşulunu ispatlar.
Üstelik, (3.8) koşulundan

$$p(t)x^{\Delta}(t)\leq p(t_0)x^{\Delta}(t_0), t\geq t_0$$

veya

$$x^{\Delta}(t)\leq \frac{p(t_0)x^{\Delta}(t_0)}{p(t)}, t\geq t_0$$

elde edilir. Üstteki eşitsizlikte $t\geq t_0$ olmak üzere t_0 dan t ye integral alırsak

$$x(t)\leq x(t_0)+p(t_0)x^{\Delta}(t_0)\int_{t_0}^{t}\frac{\Delta s}{p(s)}$$

olur. Bu nedenle

$$\begin{aligned}|x(t)| &\leq |x(t_0)|+p(t_0)\left|x^{\Delta}(t_0)\right|\int_{t_0}^{t}\frac{\Delta s}{p(s)}\\ &\leq |x(t_0)|+p(t_0)\left|x^{\Delta}(t_0)\right|A(t_0) \end{aligned}\tag{3.9}$$

bulunur.

$$\bar{c}:=x(t_0)+p(t_0)\left|x^{\Delta}(t_0)\right|A(t_0) \tag{3.10}$$

ile gösterelim. Bu durumda (3.6) koşulu ispatlanmış olur.
(3.7) koşulunu göstermek için iki farklı durumu dikkate alıyoruz. Eğer (3.4) sağlanır ise her $t\geq t_0$ için

$$x(t)\geq x(t_0)=\widehat{c}A(t_0)\geq\widehat{c}A(t)$$

dir. Eğer (3.5) sağlanır ise, bu durumda

$$y(t)=(p(t)x^{\Delta}(t))^{\Delta} \tag{3.11}$$

ve $y(t) \in F(t, x^\sigma(t)), y \in L^1_{loc}\left([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}\right)$ olsun. $v, s \geq t_0, v, s \in \mathbb{T}$ olmak üzere (3.11) ifadesi v den s ye integre edilir ise

$$p(s)x^\Delta(s) = p(v)x^\Delta(v) + \int_v^s y(\tau)\,\Delta\tau$$

elde ederiz. Bu nedenle

$$x^\Delta(s) = \frac{p(v)x^\Delta(v)}{p(s)} + \frac{1}{p(s)}\int_v^s y(\tau)\Delta\tau \tag{3.12}$$

elde edilir.

$$(t, x) \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^+ \text{ için } -y(t) \geq f(t, x^\sigma(t)) \tag{3.13}$$

olduğunu görünüz. (3.13) ifadesini (3.12) ifadesinde göz önüne alınır ve (3.12) için $u \geq t_0$ olmak üzere t den $u \in \mathbb{T}$ ye integrale geçilir ise

$$x(u) - x(t) \leq p(v)x^\Delta(v)\int_t^u \frac{\Delta s}{p(s)} - \int_t^u \frac{1}{p(s)}\int_v^s f(\tau, x^\sigma(\tau))\Delta\tau\Delta s \tag{3.14}$$

veya

$$x(t) \geq -p(v)x^\Delta(v)\int_t^u \frac{\Delta s}{p(s)} + \int_t^u \frac{1}{p(s)}\int_v^s f(\tau, x^\sigma(\tau))\Delta\tau\Delta s$$

elde edilir. Son ifadede $v = t_1$ ve $u \to \infty$ alınırsa

$$\begin{aligned} x(t) &\geq -p(t_1)x^\Delta(t_1)\int_t^\infty \frac{\Delta s}{p(s)} + \int_t^\infty \frac{1}{p(s)}\int_{t_1}^s f(\tau, x^\sigma(\tau))\Delta\tau\Delta s \\ &\geq -p(t_1)x^\Delta(t_1)A(t) \\ &:= \widehat{c}A(t) \end{aligned}$$

elde edilir ve bu da ispatı tamamlar. ∎

Sıradaki teoremde kapsama (3.1) in güçlü süperlineer veya güçlü altlineer olmasına ihtiyaç yoktur.

Teorem 3.1.4 [**H1**]-[**H3**] *şartlarına ek olarak*

[**H4**]

$f(t, x) \leq f(t, y), x \leq y, t \geq t_0$

koşulunu sağlayan bir $f : [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu var olsun. Şeklinde bir [**H4**] şartı da kabul edilsin.Eğer sıfırdan farklı her c sabiti için

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{p(s)} \int_{t_0}^{s} |f(\tau, cA^{\sigma}(\tau))| \Delta\tau\Delta s = \infty \tag{3.15}$$

olur ise kapsama (3.1) salınımlıdır.

İspat. x kapsama (3.1) in salınımsız bir çözümü olsun öyleki $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $x > 0$ olsun. $x < 0$ durumu da benzer şekilde gösterilebilir.(3.7) ifadesi ve [**H4**] şartından her $t \geq t_0$ için

$$f(\tau, x^{\sigma}(\tau)) \geq f(\tau, \widehat{c}A^{\sigma}(\tau)) \tag{3.16}$$

buluruz. $u = v = t_1 \leq t$ şartı ile (3.14) ve (3.16) ifadelerini kullanırsak

$$\begin{aligned} x(t) &\leq x(t_1) + p(t_1)x^{\Delta}(t_1) \int_{t_1}^{t} \frac{\Delta s}{p(s)} - \int_{t_1}^{t} \frac{1}{p(s)} \int_{t_1}^{s} f(\tau, x^{\sigma}(\tau))\Delta\tau\Delta s & (3.17) \\ &\leq x(t_1) + p(t_1)x^{\Delta}(t_1) \int_{t_1}^{t} \frac{\Delta s}{p(s)} - \int_{t_1}^{t} \frac{1}{p(s)} \int_{t_1}^{s} f(\tau, \widehat{c}A^{\sigma}(\tau))\Delta\tau\Delta s & (3.18) \end{aligned}$$

ifadelerini elde ederiz. Bu ifadede x in pozitif durumu $t \to \infty$ için (3.15) ifadesiyle çekişir. Bu da teoremin ispatını tamamlar. ■

Sıradaki sonuç kapsama (3.1) güçlü süperlineer iken bu kapsamanın salınım davranışı ile ilgilidir. (E. Akın-Bohner ve S. Sun,2009).

Teorem 3.1.5 [**H1**]-[**H3**] *şartlarına ilave olarak kapsama (3.1) güçlü süperlineer olsun. Eğer sıfırdan farklı her c sabiti için*

$$\int_{t_0}^{\infty} |f(\tau, \widehat{c}A^{\sigma}(\tau))| \Delta\tau = \infty \tag{3.19}$$

ifadesi sağlanıyor ise kapsama (3.1) salınımlıdır.

İspat. Kapsama (3.1) in salınımsız bir çözümü x olsun öyleki $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $x > 0$ olsun. $x < 0$ olma durumu da benzer şekilde gösterilebilir. Kapsama (3.1) süperlineer ve (3.7) ifadesi sağlandığından bir $f : [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve bir $\beta > 1$ sabiti vardır öyleki her $t \geq t_1 \geq t_0$ için

$$\frac{f(\tau, x^{\sigma}(\tau))}{(x^{\sigma}(\tau))^{\beta}} \geq \frac{f(\tau, \widehat{c}A^{\sigma}(\tau))}{(\widehat{c}A^{\sigma}(\tau))^{\beta}} \tag{3.20}$$

olsun. $t \geq u \geq t_1 = v$ ile (3.14) ifadesini kullanırsak

$$\begin{aligned} x(u) &\geq -p(t_1)x^{\Delta}(t_1)\int_u^t \frac{\Delta s}{p(s)} + \int_u^t \frac{1}{p(s)} \int_{t_1}^u f(\tau, x^{\sigma}(\tau))\Delta\tau\Delta s && (3.21) \\ &\geq bA(u) + A(u)\int_{t_1}^u f(\tau, x^{\sigma}(\tau))\Delta\tau && (3.22) \\ &\geq bA(u) + A(u)\int_{t_1}^u \frac{f(\tau, \widehat{c}A^{\sigma}(\tau))}{(\widehat{c}A^{\sigma}(\tau))^{\beta}}(x^{\sigma}(\tau))^{\beta}\Delta\tau && (3.23) \end{aligned}$$

elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizliklerde $b := p(t_1)\left|x^{\Delta}(t_1)\right|$ şeklinde tanımlanmıştır. Böylece (3.20) yi kullanırsak

$$\frac{x(u)}{A(u)} \geq b + (\widehat{c})^{-\beta}\int_{t_1}^u f(\tau, \widehat{c}A^{\sigma}(\tau))\left(\frac{x^{\sigma}(\tau)}{A^{\sigma}(\tau)}\right)^{\beta}\Delta\tau := w(u)$$

elde ederiz. Lemma 3.1.3 ten

$$w^{\Delta}(\tau) = (\widehat{c})^{-\beta} f(\tau, \widehat{c}A^{\sigma}(\tau))\left(\frac{x^{\sigma}(\tau)}{A^{\sigma}(\tau)}\right)^{\beta} \geq (\widehat{c})^{-\beta} f(\tau, \widehat{c}A^{\sigma}(\tau))(w^{\sigma}(\tau))^{\beta}$$

dir. Bu yüzden

$$-\left(w^{1-\beta}\right)^{\Delta}(\tau) \geq \frac{\beta-1}{(\widehat{c})^{\beta}} f(\tau, \widehat{c}A^{\sigma}(\tau))$$

buluruz. Yukarıdaki eşitsizlikte $t \geq t_1$ olmak üzere t_1 den t ye integral alınırsa

$$\left(w^{1-\beta}\right)(t_1) \geq \frac{\beta-1}{(\widehat{c})^{\beta}}\int_{t_1}^t f(\tau, \widehat{c}A^{\sigma}(\tau))\Delta\tau$$

elde ederiz. Bu ifade $t \to \infty$ için b nin seçimi ile çelişir. Böylece teorem ispatlanmış olur.
■

Sıradaki sonuç (3.3) koşulunu sağlar, yani F güçlü altlineer iken (3.1) kapsamasının salınım davranışı ile ilgilidir.

Teorem 3.1.6 [**H1**]-[**H4**] *koşullarına ek olarak kapsama (3.1) güçlü altlineer olsun. Eğer sıfırdan farklı her c sabiti için*

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{p(s)}\int_{t_0}^{s} |f(\tau, c)|\Delta\tau\Delta s = \infty \qquad (3.24)$$

ifadesi sağlanıyor ise kapsama (3.1) salınımlıdır.

İspat. x kapsama (3.1) in salınımsız bir çözümü olsun öyleki $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $x>0$ olsun. $x<0$ durumu da benzer şekilde gösterilebilir. Lemma 3.1.3 ten (3.4) veya (3.5) ifadelerinden herhangi biri sağlansın. Eğer (3.4) sağlanır ise her $t\geq t_0$ için

$$x^{\sigma}(t)\geq x(t)\geq x(t_0)$$

ve böylece $u=v=t_0\leq t$ olmak üzere (3.14) ifadesinden ve [**H4**] koşulundan

$$x(t)\leq x(t_0)+p(t_0)x^{\Delta}(t_0)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{p(s)}-\int_{t_0}^{t}\frac{1}{p(s)}\int_{t_0}^{s}f(\tau,x(t_0))\Delta\tau\Delta s$$

elde ederiz. Bu ifade $t\to\infty$ alındığında x in pozitifliği ile çelişir. Eğer (3.5) sağlanırsa $0<\gamma<1$ olmak üzere (3.6) ve (3.3) ifadeleri yardımıyla her $t\geq t_1$ için

$$\frac{f(\tau,x^{\sigma}(\tau))}{(x^{\sigma}(\tau))^{\gamma}}\geq\frac{f(\tau,\overline{c})}{(\overline{c})^{\gamma}} \tag{3.25}$$

olduğunu buluruz. $u=t_1\leq t$ olmak üzere (3.12), (3.13) ve (3.25) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
x^{\Delta}(t) &= \frac{p(t_1)x^{\Delta}(t_1)}{p(t)}+\frac{1}{p(t)}\int_{t_1}^{t}y(\tau)\Delta\tau\\
&\leq -\frac{1}{p(t)}\int_{t_1}^{t}f(\tau,x^{\sigma}(\tau))\Delta\tau\\
&\leq -\frac{1}{p(t)}\int_{t_1}^{t}\frac{(x^{\sigma}(\tau))^{\gamma}f(\tau,\overline{c})}{(\overline{c})^{\gamma}}\Delta\tau\\
&\leq -\frac{(\overline{c})^{-\gamma}}{p(t)}x^{\gamma}(t)\int_{t_1}^{t}f(\tau,\overline{c})\Delta\tau
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de Lemma 3.1.2 den

$$\frac{(\overline{c})^{-\gamma}}{p(t)}\int_{t_1}^{t}f(\tau,\overline{c})\Delta\tau\leq-\frac{x^{\Delta}(t)}{x^{\gamma}(t)}\leq-\frac{(x^{1-\gamma})^{\Delta}(t)}{1-\gamma}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $t\geq t_1$ olmak üzere t_1 den t ye integral alınırsa

$$\begin{aligned}
x^{1-\gamma}(t) &\geq x^{1-\gamma}(t)+\frac{1-\gamma}{(\overline{c})^{\gamma}}\int_{t_1}^{t}\frac{1}{p(s)}\int_{t_1}^{s}f(\tau,\overline{c})\Delta\tau\Delta s\\
&\geq \frac{1-\gamma}{(\overline{c})^{\gamma}}\int_{t_1}^{t}\frac{1}{p(s)}\int_{t_1}^{s}f(\tau,\overline{c})\Delta\tau\Delta s
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da $t \to \infty$ için (3.24) ile çelişir. Böylece teorem ispatlanmış olur. Yukarıda verilen teoremlerin ispatları ile ikinci bölümdeki ispatlar arasındaki benzerliklere dikkat ediniz. Yalnız, bu bölümdeki ispatların daha genel oldukları tabii ki unutulmamalıdır. Şimdi ikinci ve üçüncü bölümlerde ele alınan diferensiyel ve dinamik kapsamayı biraz daha genel olan ikinci dereceden bir dinamik kapsama ile değiştirerek bu kapsama için salınım kriterlerinin elde edilişini bir sonraki bölümde göstereceğiz. ■

BÖLÜM 4

İKİNCİ DERECEDEN, DAĞILIMLI SAPMA PARAMETRELİ, SÖNÜMLÜ DİNAMİK KAPSAMALARIN SALINIMI

Bu bölümde Said Grace, Elvan Akın ve Rawi Agarwall tarafından yapılan yeni bir çalışma üzerinde duracağız; bakınız (Grace et al. 2015). Bu çalışmada dağılımlı sapma parametreli lineer olmayan ikinci dereceden sönümlü dinamik kapsamaların tüm çözümlerinin salınımı üzerine bazı teoremler verilmiştir. Bu kapsamanın denklem formunun salınımı üzerine olan çalışmayı Said Grace, Elvan Akın ve Can Murat Dikmen 2014 yılında yapmışlardır; bakınız (Grace et al. 2014).

$\mathbb{T}$ keyfi bir zaman skalası, $\sup \mathbb{T} = \infty$ ve $0 < a < b$, $a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere $h.h.h.$ $t \geq t_0 \in \mathbb{T}$ için

$$\left(r\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}(t) + p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}(t) \in \int_a^b q(t,\tau)\, F(t, x(g(t,\tau)))\, \Delta\tau, \tag{4.1}$$

dağılımlı sapma parametreli lineer olmayan ikinci dereceden sönümlü dinamik kapsamanın tüm çözümlerinin salınımı üzerinde duracağız.

Burada $t \geq t_1$ yazmakla $t \in [t_1, \infty) \cap \mathbb{T} := [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ demek istiyoruz.

Aşağıdaki şartları kabul ediyoruz;

(1) α pozitif tek tamsayıların oranı;

(2) $p, r : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$ tek-değerli sağ yoğun sürekli fonksiyonlar öyleki $t \in \mathbb{T}$, $r^{\Delta}(t) \geq 0$ için

$$\int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{1}{r(s)} e_{-\frac{p}{r}}(s, t_0)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Delta s = \infty; \tag{4.2}$$

burada $e_p(t, t_0)$ üstel fonksiyonu $e_p(a,b)\, e_p(b,c) = e_p(a,c)$ alt grup özelliğini sağlar.

(3) $q : \mathbb{T}\times [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^{+}$ sağ yoğun sürekli bir fonksiyon;

(4) $g : \mathbb{T}\times [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{T}$ ikinci değişkene göre azalan bir fonksiyon, $g(t,\tau) \leq t$ ve $t \to \infty$ iken $g(t,\tau) \to \infty, \tau \in [a,b]_{\mathbb{T}}$;

(5) $F : [t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ küme-değerli fonksiyon (burada $2^{\mathbb{R}}$ reel sayıların boştan farklı alt kümelerinin bir ailesini göstermektedir).

Kapsama (4.1) in bir çözümü ile, $r\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}$ ve $p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha} \in C_{rd}$ ve $\left(r\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta} + p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha} \in L^{1}_{loc}[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ olacak şekilde bir $x \in C_{rd}$ fonksiyonu kastedilir.
Kapsama (4.1) in böyle çözümlere sahip olduğunu varsayıyoruz. Eğer her $t \in [t_1,\infty)$ için $x(t)\,x^{\sigma}(t) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \in \mathbb{T}$ var ise (4.1) kapsamasının bir çözümü salınımsızdır. Aksi taktirde ise salınımlı olduğunu belirtelim. Eğer tüm çözümleri salınımlı ise kapsama (4.1) in kendisi de salınımlıdır.
Sürekli ve ayrık analizi birleştirmek için Hilger tarafından bulunan zaman skalası teorisi son zamanlarda pek çok ilgi görmüştür (Hilger 1990).
Son yıllarda, zaman skalasında çeşitli dinamik denklemlerin salınımı ve salınımsızlığı konusunda çok fazla araştırma olmuştur (Erbe et al. 2009, Grace et al. 2014). Buna rağmen, zaman skalasında ikinci dereceden dinamik kapsamaların salınımı (Grace et al. 2015) ve dağılımlı sapma parametreli ikinci dereceden dinamik denklemler (Grace et al. 2014) ile ilgili daha az sonuç vardır.
Bu bölümde, kapsama (4.1) in tüm çözümlerinin salınım davranışı üzerine yapılan çalışma üzerinde durulmuştur (Grace et al. 2015). Bu çalışmada (4.1) kapsaması için bir salınım sonucu, salınım karakterini bildiğimiz ikinci dereceden dinamik denklemler ile karşılaştırma yoluyla elde edilmiştir. Ayrıca, (4.2) koşulu yanlış olduğunda, kapsama (4.1) için benzer salınım sonuçları da elde edilmiştir. Son olarak, elde edilen sonuçlar için mümkün olan birkaç genişletme araştırılmıştır. Bu çalışmadaki sonuçlar $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ durumları için de yeni olmasından dolayı önemlidir.

4.1 TEMEL SONUÇLAR

Bu kısımda

$$\begin{cases} (t,x) \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^{+} \text{ için } F(t,x) < 0 \\ (t,x) \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^{-} \text{ için } F(t,x) > 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

olmak üzere (4.3) ifadesinin doğru olduğu varsayılıp aşağıdaki sonuçlar verilmiştir.

Lemma 4.1.1 $(1)-(5),(4.2)$ *ve* (4.3) *şartları sağlansın* $x(t),(4.1)$ *kapsamasının pozitif bir çözümü olsun o halde bir* $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ *vardır öyleki*

$$x(t)>0, x^{\Delta}(t)>0 \text{ ve } x^{\Delta\Delta}(t)\leq 0 \tag{4.4}$$

dır.

İspat. Kapsama (4.1) in pozitif bir çözümü olsun. O halde $t\geq t_1$ ve $\tau\in[a,b]_{\mathbb{T}}$ için bir $t_1\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ vardır öyleki $x(t)>0$ ve $x(g(t,\tau))>0$ dır.

$$\begin{cases} y(t):=\left(r\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}(t)+p\left(x^{\Delta}\right)(t) \text{ ile } y(t)\in\int_a^b q(t,\tau)F(t,x(g(t,\tau)))\Delta\tau \\ \text{ve} \\ y\in L^1_{loc}[t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \end{cases} \tag{4.5}$$

olsun. (4.3) kabulünden $w(t)=r\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}(t), t\geq t_1$ olmak üzere

$$\left(r\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}(t)+p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}(t)\leq 0 \quad h.h.h.t\geq t_1 \text{ için}$$

veya

$$w^{\Delta}(t)+\frac{p(t)}{r(t)}w(t)\leq 0 \quad h.h.h.t\geq t_1 \text{ için}$$

elde edilir. $t\geq t_1$ için $\dfrac{w(t)}{e_{-\frac{p}{r}}(t,t_0)}$ ifadesinin azalan olduğunu iddia ediyoruz. Açıkça,

$$\begin{aligned}\left(\frac{w(t)}{e_{-\frac{p}{r}}(t,t_0)}\right)^{\Delta} &= \frac{w^{\Delta}(t)e_{-\frac{p}{r}}(t,t_0)-\left(-\frac{p(t)}{r(t)}\right)e_{-\frac{p}{r}}(t,t_0)w(t)}{e_{-\frac{p}{r}}(t,t_0)e^{\sigma}_{-\frac{p}{r}}(t,t_0)} \\ &= \frac{w^{\Delta}(t)+\frac{p(t)}{r(t)}w(t)}{e^{\sigma}_{-\frac{p}{r}}(t,t_0)}\end{aligned}$$

dir ve iddia ispatlanmış olur. Şimdi de $t\geq t_1$ için $x^{\Delta}(t)>0$ olduğunu iddia ediyoruz. Bu amaçla, belli bir noktadan sonra $x^{\Delta}(t)<0$ kabul edelim. Bu yüzden bir $t_2\in[t_1,\infty)$ vardır öyleki $t\geq t_2$ için $x^{\Delta}(t)<0$ dır. $\dfrac{w(t)}{e_{-\frac{p}{r}}(t,t_0)}$ ın azalanlık gerçeğini kullanarak $t\in[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\frac{r(t)(x^{\Delta}(t))^{\alpha}}{e_{-\frac{p}{r}}(t,t_0)}\leq\frac{r(t_2)(x^{\Delta}(t_2))^{\alpha}}{e_{-\frac{p}{r}}(t_2,t_0)}:=b<0$$

buluruz. Böylece $t\in[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$x^{\Delta}(t)\leq -b^{\frac{1}{\alpha}}\left[\frac{e_{-\frac{p}{r}}(t,t_0)}{r(t)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

t_2 den $t \geq t_0$ a bu eşitsizlik integre edilirse

$$x(t) \leq x(t_2) - b^{\frac{1}{\alpha}} \int_{t_2}^{t} \left(\frac{e_{-\frac{p}{r}}(s, t_0)}{r(s)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \Delta s$$

ifadesini buluruz. $t \to \infty$ iken $x(t), -\infty$ a yaklaşır bu da $x(t)$ in pozitif olmasıyla çelişir. Bu yüzden $x^{\Delta}(t) > 0$ olmalıdır. Son olarak $x^{\Delta\Delta}(t) \leq 0$ olduğunu göterelim. Agarwal et al. (2002) makalesindeki Teorem 1.90 dan

$$(x^{\alpha}(t))^{\Delta} \geq \alpha \int_0^1 [hx + (1-h)x]^{\alpha-1} x^{\Delta}(t) dh = \alpha x^{\alpha-1}(t) x^{\Delta}(t)$$

olduğunu buluruz daha sonra bu eşitsizlikte x yerine x^{Δ} yazılır ise

$$\left(x^{\Delta}(t)^{\alpha}\right)^{\Delta} \geq \alpha \left(x^{\Delta}(t)\right)^{\alpha-1} x^{\Delta\Delta}(t) \tag{4.6}$$

elde edilir. (Agarwal et al. 2002). Bu yüzden

$$\begin{aligned} r(t)(x^{\Delta}(t)^{\alpha})^{\Delta} &= x^{\Delta}(t)(x^{\Delta}(t))^{\alpha} + r^{\sigma}(t) \left(\left(x^{\Delta}(t) \right)^{\alpha} \right)^{\Delta} \\ &\geq qr^{\Delta}(t)(x^{\Delta}(t))^{\alpha} + \alpha r^{\sigma}(t)(x^{\Delta}(t))^{\alpha-1} x^{\Delta\Delta}(t) \end{aligned}$$

olur. Burada $x^{\Delta}(t) > 0$ ve $r^{\Delta}(t) \geq 0$ gerçeğinden $x^{\Delta\Delta}(t) \leq 0$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Lemma 4.1.2 *Lemma 4.1.1 in hipotezleri sağlansın. O halde $\bar{c} \in (0,1)$ olacak şekilde bir c sabiti ve $\bar{t} > t_0$ olacak şekilde bir $\bar{t} \in \mathbb{T}$ vardır öyleki her $t \geq \bar{t}$ için*

$$\frac{x(g(t))}{g(t)} \geq \bar{c} \frac{x^{\alpha}(t)}{\sigma(t)} \tag{4.7}$$

burada g, (4) teki gibi bir fonksiyondur.

Ayrıca

$$Q(t) = \int_a^b q(t, \tau) \Delta\tau \text{ ve } g(t) = g(t, b)$$

şeklinde alıyoruz.

Şimdi de (4.1) kapsaması için salınım sonuçlarını verelim.

Teorem 4.1.3 *$(1)-(5), (4.2)$ ve (4.3) şartları sağlansın,*

$$\begin{cases} h.h.h.\ t \geq t_0 \text{ ve } x \neq 0 \text{ için } xf(t,x) > 0 \text{ ve} \\ \text{ve } x \neq 0, h.h.h.\ t \geq t_0 \text{ için } \left|\dfrac{f(t,x)}{x^{\alpha}}\right| \geq c > 0 \text{ ve} \\ (t,x) \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^{+} \text{ için } |F(t,x)| \geq f(t,x), \\ (t,x) \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^{-} \text{ için } |F(t,x)| \leq -f(t,x) \\ \text{olacak şekilde bir } f : [t_0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ vardır} \end{cases} \tag{4.8}$$

ifadesi doğru olsun. Eğer

$$p(t) \geq \frac{r^{\sigma}(t)\xi^{\sigma}(t)}{\xi^{2}(t)}\xi^{\Delta}(t), t \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \text{ için} \tag{4.9}$$

ve

$$\int^{\infty} \xi(s)Q(s)\left(\frac{g(s)}{\sigma(s)}\right)^{\alpha}\Delta s = \infty \tag{4.10}$$

şartlarını sağlayan bir $\xi(t) \in C^1_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R}^+)$ fonksiyonu var ise kapsama (4.1) salınımlıdır.

İspat. $x(t), [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde kapsama (4.1) için salınımsız bir çözüm olsun. Farzedelim ki $t \geq t_0$ ve $a \leq \tau \leq b$ için $x(t) > 0$ ve $x(g(t,\tau)) > 0$ olsun. Ayrıca

$$\begin{cases} y(t) := \left(r(x^{\Delta})^{\alpha}\right)^{\Delta}(t) + p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}(t) \text{ ile } y(t) \in \int_a^b q(t,\tau)\,F(t,x(g(t,\tau)))\Delta\tau \\ \text{ve} \\ y \in L^1_{loc}[t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \end{cases}$$

olsun. (4.3) ve (4.8) dan

$$\left(r(x^{\Delta})^{\alpha}\right)^{\Delta}(t) + p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}(t) \leq 0$$

ve

$$\left(r(x^{\Delta})^{\alpha}\right)^{\Delta}(t) + p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}(t) + \int_a^b q(t,\tau)\,f(t,x(g(t,\tau)))\Delta\tau \leq 0$$

veya

$$\left(r(x^{\Delta})^{\alpha}\right)^{\Delta}(t) + p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}(t) + \int_a^b cq(t,\tau)\,x^{\alpha}(g(t,\tau))\Delta\tau \leq 0,\ h.h.h.\ \ t \geq t_0 \tag{4.11}$$

elde edilir.

Şimdi Lemma 4.1.1 den $x, [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde artan bir fonksiyon olmak üzere (4) koşulu yardımıyla (4.11) ifadesi

$$\left(r(x^{\Delta})^{\alpha}\right)^{\Delta}(t)+p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}(t)+cQ(t)x^{\alpha}(g(t))\leq 0,\quad h.h.h.\ \ t\geq t_0 \tag{4.12}$$

elde edilir. Lemma 4.1.2 den bir $\bar{c}\in(0,1)$ sabiti ve $t_1\geq t_0$ vardır öyleki (4.7) şartı sağlanır. (4.12) de (4.7) yi kullanarak

$$\left(r(x^{\Delta})^{\alpha}\right)^{\Delta}(t)+p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}(t)+c\left(\bar{c}\right)^{\alpha}Q(t)\left(\frac{g\left(t\right)}{\sigma\left(t\right)}\right)x^{\alpha}\left(\sigma\left(t\right)\right)\leq 0, h.h.h.\ t\geq t_1 \tag{4.13}$$

elde edilir. $[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde

$$w\left(t\right)=\xi\left(t\right)\frac{r\left(t\right)\left(x^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\alpha}}{x^{\alpha}\left(t\right)} \tag{4.14}$$

şeklinde $w(t)$ fonksiyonu tanımlansın. O zaman $w(t)>0$ ve

$$w^{\Delta}\left(t\right)=\xi^{\Delta}(t)\frac{r^{\alpha}\left(t\right)\left(x^{\Delta}\left(\sigma\left(t\right)\right)\right)^{\alpha}}{x^{\alpha}\left(\sigma\left(t\right)\right)}+\xi\left(t\right)\frac{\left(r\left(t\right)\left(x^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}}{x^{\alpha}\left(\sigma\left(t\right)\right)}-\xi\left(t\right)\frac{r\left(t\right)\left(x^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\alpha}\left(x^{\alpha}(t)\right)^{\Delta}}{x^{\alpha}\left(t\right)x^{\alpha}\left(\sigma\left(t\right)\right)} \tag{4.15}$$

dir. (4.15) te (4.6) ve (4.13) ü kullanarak

$$\begin{aligned}w^{\Delta}\left(t\right)\leq{}&\frac{\xi^{\Delta}(t)}{\xi(t)}w\left(\sigma\left(t\right)\right)-\frac{\xi\left(t\right)}{x^{\alpha}\left(\sigma\left(t\right)\right)}\left[p(t)\left(x^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\alpha}+c\left(\bar{c}\right)^{\alpha}Q(t)\left(\frac{g(t)}{\sigma\left(t\right)}\right)^{\alpha}x^{\alpha}\left(\sigma\left(t\right)\right)\right]\\&-\alpha\xi\left(t\right)\frac{r\left(t\right)\left(x^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\alpha+1}}{x\left(t\right)x^{\alpha}\left(\sigma\left(t\right)\right)}\end{aligned}$$

veya $h.h.h.\ t\geq t_1$için

$$\begin{aligned}w^{\Delta}\left(t\right)\leq{}&-c\left(\bar{c}\right)^{\alpha}\xi\left(t\right)Q(t)\left(\frac{g(t)}{\sigma\left(t\right)}\right)^{\alpha}+\frac{\xi^{\Delta}(t)}{\xi^{\alpha}(t)}w\left(\sigma\left(t\right)\right)\\&-\frac{\xi\left(t\right)\left(x^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\alpha}}{x^{\alpha}\left(\sigma\left(t\right)\right)}p(t)-\alpha\xi\left(t\right)\frac{r\left(t\right)\left(x^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\alpha+1}}{x\left(t\right)x^{\alpha}\left(\sigma\left(t\right)\right)}\end{aligned} \tag{4.16}$$

elde ederiz. Lemma 4.1.1 den $x^{\Delta\Delta}(t)\leq 0$ ve $x^{\Delta}(t)>0$ olduğundan

$$x^{\Delta}\left(t\right)\geq x^{\Delta}\left(\sigma\left(t\right)\right)\ \text{ ve } x\left(t\right)\leq x\left(\sigma\left(t\right)\right),\quad t\geq t_1 \tag{4.17}$$

elde edilir. (4.17) ifadesini (4.16) da kullanırsak $h.h.h.\ t\geq t_1$için

$$\begin{aligned}w^{\Delta}\left(t\right)\leq{}&-c\left(\bar{c}\right)^{\alpha}\xi\left(t\right)Q(t)\left(\frac{g(t)}{\sigma\left(t\right)}\right)^{\alpha}+\left[\frac{\xi^{\Delta}(t)}{\xi(\sigma\left(t\right))}-\frac{\xi\left(t\right)p(x)}{r\left(\sigma\left(t\right)\right)\xi\left(\sigma\left(t\right)\right)}\right]w\left(\sigma\left(t\right)\right)\\&-\alpha\frac{\xi\left(t\right)r(t)}{\left(r(\sigma\left(t\right))\xi\left(\sigma\left(t\right)\right)\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}\left(w\left(\sigma\left(t\right)\right)\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\end{aligned} \tag{4.18}$$

ifadesini kolayca bulabiliriz. (4.18) ifadesinde (4.9) şartını kullanarak $h.h.h.$ $t \geq t_1$için

$$w^{\Delta}(t) \leq -c(\overline{c})^{\alpha} \xi(t) Q(t) \left(\frac{g(t)}{\sigma(t)} \right)^{\alpha}$$

buluruz. Bu eşitsizliğin her iki tarafının t_1 den t ye integrali alınırsa $t \to \infty$ için

$$0 < w(t) \leq w(t_1) - c(\overline{c})^{\alpha} \int_{t_1}^{t} \xi(s) Q(s) \left(\frac{g(s)}{\sigma(s)} \right)^{\alpha} \Delta s \to -\infty$$

çelişkisini elde ederiz. Bu ispatı tamamlar. ■

Sıradaki sonuç (4.9) şartı sağlanmaz iken kapsama (4.1) in salınımı ile ilgilidir.

Teorem 4.1.4 $(1)-(5), (4.2), (4.3)$ *ve* (4.8) *şartları sağlansın. Eğer bir* $\xi(t) \in C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^+)$ *varsa öyleki*

$$p(t) \leq \frac{r(\sigma(t))\,\xi(\sigma(t))}{\xi^2(t)} \xi^{\Delta}(t) \quad t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}} \quad \textit{için} \tag{4.19}$$

ve $t \geq t_1$ *ve her* $\overline{c} \in (0,1)$ *sabiti için,*

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_1}^{t} \left[\xi(s) Q(s) \left(\frac{g(s)}{\sigma(s)} \right)^{\alpha} - \frac{1}{c(\overline{c})^{2\alpha}} \left(\frac{\xi^{\Delta}(t)}{\xi(\sigma(t))} - \frac{\xi(s)\,p(s)}{r(\sigma(s))\,\xi(\sigma(s))} \right) \left(\frac{r(\sigma(s))\xi(\sigma(s))}{\sigma^{\alpha}(s)} \right) \right] \Delta s = \infty \tag{4.20}$$

ise o zaman (4.1) *kapsaması salınımlıdır.*

İspat. $x(t)$, kapsama (4.1) için salınımsız bir çözüm olsun, $t \geq t_0$ ve $a \leq \tau \leq b$ için $x(t) > 0$ ve $x(g(t,\tau)) > 0$ olduğunu kabul edelim. Teorem 4.1.3 ün ispatındaki gibi ilerleyerek $h.h.h.$ $t \geq t_1$ için

$$w^{\Delta}(t) \leq -c(\overline{c})^{\alpha} \xi(t) Q(t) \left(\frac{g(t)}{\sigma(t)} \right)^{\alpha} + \left[\frac{\xi^{\Delta}(t)}{\xi(\sigma(t))} - \frac{\xi(t)\,p(t)}{r(\sigma(t))\,\xi(\sigma(t))} \right] w(\sigma(t)) \tag{4.21}$$

formundaki (4.18) ifadesini elde ederiz. (4.7) den her $t \geq t_1$ için

$$\left(\frac{x^{\Delta}(t)}{x(t)} \right)^{\alpha} \leq \left(\frac{1}{\overline{c}t} \right)^{\alpha} \tag{4.22}$$

olduğunu görürüz. Bu nedenle $t \geq t_1$ için

$$w(t) = \xi(t)\, r(t) \left(\frac{x^{\Delta}(t)}{x(t)} \right)^{\alpha} \leq (\overline{c})^{-\alpha} \frac{\xi(t)\, r(t)}{t^{\alpha}} \tag{4.23}$$

olur. (4.21) ifadesinde (4.23) ifadesini kullanırsak $t \geq t_1$ için

$$\frac{1}{c\left(\overline{c}\right)^{\alpha}} w^{\Delta}(t) \leq -\xi(t)\, Q(t) \left(\frac{g(t)}{\sigma(t)}\right)^{\alpha} + \frac{1}{c\left(\overline{c}\right)^{2\alpha}} \left(\frac{\xi^{\Delta}(t)}{\xi(\sigma(t))} - \frac{\xi(t)\, p(t)}{r(\sigma(t))\, \xi(\sigma(t))}\right) \frac{r(\sigma(t))\, \xi(\sigma(t))}{\sigma^{\alpha}(t)} \tag{4.24}$$

buluruz. Bu eşitsizliğin t_1 den t ye integralini daha sonra da sonucun her iki tarafının $t \to \infty$ için $\limsup$ unu alırsak istenen çelişkiye varırız. Bu da ispatı tamamlar. ■

Şimdi aşağıdaki sonucu verelim.

Sonuç 4.1.5 *Teorem 4.1.4 ün hipotezi sağlansın.* (4.20) *koşulu* (4.10) *koşulu ile değiştirilir ve*

$$\int^{\infty} \left[\frac{\xi^{\Delta}(s)}{\xi(\sigma(s))} - \frac{\xi(s)\, p(s)}{r(\sigma(s))\, \xi(\sigma(s))}\right] \left(\frac{r(\sigma(s))\, \xi(\sigma(s))}{\sigma^{\alpha}(s)}\right) \Delta s < \infty$$

ise o zaman Teorem 4.1.4 ün yargısı sağlar.

Şimdi de kapsama (4.1) için aşağıdaki salınım sonucunu elde edeceğiz.

Teorem 4.1.6 $(1)-(5), (4.2), (4.3)$ *ve* (4.8) *şartları sağlansın. Eğer*

$$\limsup \frac{t^{\alpha}}{r(t)} \int_{t}^{\infty} \frac{Q(s)}{e_{-\frac{p}{r}}(\sigma(s), t)} \left(\frac{g(s)}{\sigma(s)}\right)^{\alpha} \Delta s = \infty, \tag{4.25}$$

ise kapsama (4.1) *salınımlıdır.*

İspat. $x(t)$, kapsama (4.1) için salınımsız bir çözüm olsun. $t \geq t_0$ ve $a \leq \tau \leq b$ için $x(t) > 0$ ve $x(g(t,\tau)) > 0$ kabul edelim. Lemma 4.1.1 in ispatında olduğu gibi ilerlenir ise, her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$, $t_1 \geq t_0$ için

$$\left(\frac{r(t)(x^{\Delta}(t))^{\alpha}}{e_{-\frac{p}{r}}(t, t_0)}\right)^{\Delta} \leq \frac{\left(r(t)(x^{\Delta}(t))^{\alpha}\right)^{\Delta} + p(t)(x^{\Delta}(t))^{\alpha}}{e^{\sigma}_{-\frac{p}{r}}(s, t_0)} \leq 0$$

elde ederiz. Şimdi her $u \geq t$, $u, t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned}
\frac{r(u)(x^{\Delta}(u))^{\alpha}}{e_{-\frac{p}{r}}(u, t_0)} &= \frac{r(t)(x^{\Delta}(t))^{\alpha}}{e_{-\frac{p}{r}}(t, t_0)} + \int_{t}^{u} \left(\frac{r(s)(x^{\Delta}(s))^{\alpha}}{e_{-\frac{p}{r}}(s, t_0)}\right)^{\Delta} \Delta s \\
&\leq \frac{r(t)(x^{\Delta}(t))^{\alpha}}{e_{-\frac{p}{r}}(t, t_0)} - c\left(\overline{c}\right)^{\alpha} \int_{t}^{u} \frac{Q(s)}{e_{-\frac{p}{r}}(\sigma(s), t_0)} \left(\frac{g(s)}{\sigma(s)}\right)^{\alpha} x^{\alpha}(s)\, \Delta s
\end{aligned}$$

dir. $u \to \infty$ alırsak

$$\begin{aligned}\frac{r(t)(x^{\Delta}(t))^{\alpha}}{e_{-\frac{p}{r}}(t,t_0)} &\geq c\left(\overline{c}\right)^{\alpha}\int\limits_{t}^{\infty}\frac{Q(s)}{e_{-\frac{p}{r}}(\sigma(s),t_0)}\left(\frac{g(s)}{\sigma(s)}\right)^{\alpha}x^{\alpha}(s)\,\Delta s \\ &\geq qc\left(\overline{c}\right)^{\alpha}x^{\alpha}(t)\int\limits_{t}^{\infty}\frac{Q(s)}{e_{-\frac{p}{r}}(\sigma(s),t_0)}\left(\frac{g(s)}{\sigma(s)}\right)^{\alpha}\Delta s\end{aligned}$$

veya *h.h.h.* $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\left(\frac{x^{\Delta}(t)}{x(t)}\right)^{\alpha} \geq \frac{c\left(\overline{c}\right)^{\alpha}}{r(t)}\int\limits_{t}^{\infty}\frac{Q(s)}{e_{-\frac{p}{r}}(\sigma(s),t)}\left(\frac{g(s)}{\sigma(s)}\right)^{\alpha}\Delta s \tag{4.26}$$

elde edilir. (4.22) ifadesini (4.26) ifadesinde kullanırsak

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\overline{c}t}\right)^{\alpha} &\geq \frac{c\left(\overline{c}\right)^{\alpha}}{x(t)}\int\limits_{t}^{\infty}\frac{Q(s)}{e_{-\frac{p}{r}}(\sigma(s),t)}\left(\frac{g(s)}{\sigma(s)}\right)^{\alpha}\Delta s \\ \frac{1}{c(\overline{c})^{2\alpha}} &\geq \frac{t^{\alpha}}{r(t)}\int\limits_{t}^{\infty}\frac{Q(s)}{e_{-\frac{p}{r}}(\sigma(s),t)}\left(\frac{g(s)}{\sigma(s)}\right)^{\alpha}\Delta s\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $t \to \infty$ için $\limsup$ u alınırsa (4.25) koşulu için bir çelişki elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.1.7 $(1)-(5), (4.2), (4.3)$ *ve* (4.8) *şartları sağlansın ve* $\alpha \geq 1$ *olsun. Eğer bir* $\xi(t) \in C^1_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R}^+)$ *fonksiyonu vardır öyleki* $(\overline{c}) \in (0,1)$ *olmak üzere*

$$\limsup_{t\to\infty}\int\limits_{t_0}^{t}\left\{c\left(\overline{c}\right)^{\alpha}\xi(s)\,Q(s)\left(\frac{g(s)}{\sigma(s)}\right)^{\alpha} - \frac{r(\sigma(s))^2}{c\left(\overline{c}\right)^{\alpha-1}\sigma(s)^{\alpha-1}r(t)\xi(t)}\left[\xi^{\Delta}(s)-\frac{p(s)\xi(s)}{r(\sigma(s))}\right]^2\right\}\Delta s = \infty \tag{4.27}$$

ise $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ *da kapsama* (4.1) *salınımlıdır.*

İspat. $x(t)$, kapsama (4.1) için salınımsız bir çözüm olsun.Farzedelim ki $t \geq t_0$ ve $a \leq \tau \leq b$ için $x(t) > 0$ ve $x(g(t,\tau)) > 0$ olsun. Teorem 4.1.3 ve Teorem 4.1.4 ün ispatlarındaki gibi ilerleyerek (4.18) ve (4.23) ifadeleri bulunur. Şimdi (4.18) ifadesinden $t \geq t_1$ için

$$w^{\Delta}(t) \leq -c\left(\overline{c}\right)^{\alpha}\xi(t)\,Q(t)\left(\frac{g(t)}{\sigma(t)}\right)^{\alpha} + \left[\frac{\xi^{\Delta}(t)}{\xi^{\sigma}(t)} - \frac{\xi(t)\,p(t)}{r^{\sigma}(t)\,\xi^{\sigma}(t)}\right]w^{\sigma}(t) - \alpha\frac{\xi(t)\,r(t)}{\left(\xi^{\sigma}(t)\,r^{\sigma}(t)\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}w^2(\sigma(t))\,w^{\frac{1}{\alpha}-1}(\sigma(t)) \tag{4.28}$$

ifadesini buluruz. $\alpha \geq 1$ oluğunu kaydederek (4.23) ifadesini (4.28) ifadesinde kullanarak $t \geq t_1$ için

$$w^{\Delta}(t) \leq -c(\overline{c})^{\alpha}\xi(t)Q(t)\left(\frac{g(t)}{\sigma(t)}\right)^{\alpha} + \left[\frac{\xi^{\Delta}(t)}{\xi^{\sigma}(t)} - \frac{\xi(t)p(t)}{r^{\sigma}(t)\xi^{\sigma}(t)}\right]w^{\sigma}(t)$$
$$- \alpha(\overline{c})^{\alpha-1}\sigma^{\alpha-1}(t)\frac{\xi(t)r(t)}{(\xi^{\sigma}(t)r^{\sigma}(t))^{2}}w^{2}(\sigma(t)) \quad (4.29)$$

ifadesini elde ederiz. Bu nedenle

$$P(t) = \frac{\xi^{\Delta}(t)}{\xi(\sigma(t))} - \frac{\xi(t)p(t)}{r(\sigma(t))\xi(\sigma(t))}$$

ve

$$R(t) = \alpha(\overline{c})^{\alpha-1}\sigma^{\alpha-1}(t)\frac{\xi(t)r(t)}{(\xi^{\sigma}(t)r^{\sigma}(t))^{2}}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} w^{\Delta}(t) &\leq -c(\overline{c})^{\alpha}\xi(t)Q(t)\left(\frac{g(t)}{\sigma(t)}\right)^{\alpha} - \frac{r(\sigma(t))^{2}}{\alpha(\overline{c})^{\alpha-1}\sigma^{\alpha-1}(t)\xi(t)r(t)}\left[\xi^{\Delta}(t) - \frac{\xi(t)p(t)}{r(\sigma(t))}\right]^{2} \\ &= \left(\sqrt{R(t)}w(\sigma(t)) - \frac{P(t)}{2\sqrt{R(t)}}\right)^{2}, \end{aligned}$$

Böylece, $t \geq t_1$ için

$$w^{\Delta}(t) \leq -c(\overline{c})^{\alpha}\xi(t)Q(t)\left(\frac{g(t)}{\sigma(t)}\right)^{\alpha} - \frac{r(\sigma(t))^{2}}{\alpha(\overline{c})^{\alpha-1}\sigma^{\alpha-1}(t)\xi(t)r(t)}\left[\xi^{\Delta}(t) - \frac{\xi(t)p(t)}{r(\sigma(t))}\right]^{2}$$

elde edilir. Bu eşitsizliği t_0 dan t ye integre edip çıkacak olan eşitsizliğin $t \to \infty$ için her iki tarafın $\limsup$ u alınır ise istenen sonucu elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar. ■

Şimdi işlemlerimizde kolaylık sağlaması açısından

$$\mathfrak{D} = \{(t,s) : t \geq s \geq t_0,\ t,s \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}\}$$

kümesini göz önüne alalım. Eğer

[H] $t \geq t_0$ için $H(t,t) = 0$, $t,s \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$, $t \geq s \geq t_0$ için $H(t,s) > 0$ ve ikinci değişkene göre $H_s^{\Delta}(t,s)$ pozitif olmayan Δ- kısmi türevine sahip; yani

$$H_s^{\Delta}(t,s) \in C_{rd} \text{ ve } H_s^{\Delta}(t,s) \leq 0.$$

Oluyor ise bir $H(t,s) \in C_{rd}(\mathfrak{D},\mathbb{R})$ fonksiyonu **[H]** koşulunu sağlar denir,

Teorem 4.1.8 $(1)-(5),(4.2),(4.3)$ *ve* (4.8) *şartları sağlansın ve* H *fonksiyonu,* $[\mathbf{H}]$ *koşulunu sağlasın.* $c,\bar{c}$ *sabitleri Teorem 4.1.3 deki gibi ve*

$$h(t,s)=(H(t,s)\eta(s))_s^{\Delta}+H(t,s)\eta(t,s)\left[\frac{\xi^{\Delta}(t)}{\xi(\sigma(s))}-\frac{\xi(s)\,p(s)}{r(\sigma(s))\,\xi(\sigma(s))}\right] \tag{4.30}$$

olmak üzere, eğer bazı $t_1\geq t_0$ *için*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_1)}\int_{t_1}^{t}\left[c(\bar{c})^{\alpha}H(t,s)\xi(s)\,\eta(s)Q(s)\left(\frac{g(s)}{\sigma(s)}\right)^{\alpha}\Delta s\right.$$
$$\left.-\frac{(r(\sigma(s))\eta(\sigma(s))\,h(t,s))^2}{4\alpha(\bar{c})^{\alpha-1}H(t,s)\eta(s)\,\sigma^{\alpha-1}(s)\,r(s)\xi(s)}\right]\Delta s=\infty$$

olacak şekilde $\xi,\eta:\mathbb{T}\to\mathbb{R}^{+}$ Δ*-diferensiyellenebilir fonksiyonları var ise kapsama* (4.1) *salınımlıdır.*

İspat. $x(t)$, kapsama (4.1) için salınımsız bir çözüm olsun. Farzedelim ki $t\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ ve $a\leq\tau\leq b$ için $x(t)>0$ ve $x(g(t,\tau))>0$ olsun. Teorem 4.1.7 nin ispatındaki gibi ilerleyerek (4.29) ifadesini buluruz. Şimdi (4.29) ifadesinin her iki tarafını $\eta(s)\,H(t,s)$ ile çarpıp $t_1\geq t_0$ dan t ye integralini alırsak;

$$c(\bar{c})^{\alpha}\int_{t_1}^{t}H(t,s)\xi(s)\,\eta(s)Q(s)\left(\frac{g(s)}{\sigma(s)}\right)^{\alpha}\Delta s\leq-\int_{t_1}^{t}H(t,s)\eta(s)w^{\Delta}(s)\,\Delta s$$
$$+\int_{t_1}^{t}H(t,s)\eta(s)\left[\frac{\xi^{\Delta}(s)}{\xi^{\sigma}(s)}-\frac{\xi(s)\,p(s)}{r^{\sigma}(s)\,\xi^{\sigma}(s)}\right]w^{\sigma}(s)\,\Delta s$$
$$-\alpha(\bar{c})^{\alpha-1}\int_{t_1}^{t}H(t,s)\eta(s)\sigma^{\alpha-1}(s)\,\frac{\xi(s)\,p(s)}{(r^{\sigma}(s)\,\xi^{\sigma}(s))^2}w^2(\sigma(s))\,\Delta s$$

$$=[H(t,s)\eta(s)w(s)]_{t_1}^{t}+\int_{t_1}^{t}(H(t,s)\eta(s))_s^{\Delta}\,w^{\sigma}(s)\,\Delta s$$
$$+\int_{t_1}^{t}H(t,s)\eta(s)\left[\frac{\xi^{\Delta}(s)}{\xi(s)}-\frac{\xi(s)\,p(s)}{r^{\sigma}(s)\,\xi^{\sigma}(s)}\right]w^{\sigma}(s)\,\Delta s$$
$$-\alpha(\bar{c})^{\alpha-1}\int_{t_1}^{t}H(t,s)\eta(s)\sigma^{\alpha-1}(s)\,\frac{\xi(s)\,r(s)}{(r^{\sigma}(s)\,\xi^{\sigma}(s))^2}w^2(\sigma(s))\,\Delta s$$

$$\leq H(t,t_1)\eta(t_1)w(t_1)$$

$$+\int_{t_1}^{t}\left\{(H(t,s)\eta(s))_s^{\Delta}+H(t,s)\eta(s)\left[\frac{\xi^{\Delta}(s)}{\xi^{\sigma}(s)}-\frac{\xi(s)\,p(s)}{r^{\sigma}(s)\,\xi^{\sigma}(s)}\right]\right\}w^{\sigma}(s)\,\Delta s$$

$$-\alpha(\overline{c})^{\alpha-1}\int_{t_1}^{t}H(t,s)\eta(s)\sigma^{\alpha-1}(s)\,\frac{\xi(s)\,r(s)}{(r^{\sigma}(s)\,\xi^{\sigma}(s))^2}w^2(\sigma(s))\,\Delta s$$

$$=: H(t,t_1)\eta(t_1)w(t_1)+\int_{t_1}^{t}h(t,s)w^{\sigma}(s)\Delta s$$

$$-\alpha(\overline{c})^{\alpha-1}\int_{t_1}^{t}H(t,s)\eta(s)\sigma^{\alpha-1}(s)\,\frac{\xi(s)\,r(s)}{(r^{\sigma}(s)\,\xi^{\sigma}(s))^2}w^2(\sigma(s))\,\Delta s$$

$$R(t,s)=\alpha(\overline{c})^{\alpha-1}H(t,s)\eta(s)\,\sigma^{\alpha-1}(s)\frac{\xi(s)\,r(s)}{(r(\sigma(s))\,\xi(\sigma(s)))^2}$$

olmak üzere

$$=H(t,t_1)\eta(t_1)w(t_1)-\int_{t_1}^{t}\left[\frac{h^2(t,s)\,(r^{\sigma}(s)\,\xi^{\sigma}(s))^2}{4\alpha(\overline{c})^{\alpha-1}H(t,s)\eta(s)\,\sigma^{\alpha-1}(s)\,r(s)\xi(s)}\right]\Delta s$$

$$-\int_{t_1}^{t}\left(\sqrt{R(t,s)}w^{\sigma}(s)-\frac{h(t,s)}{2\sqrt{R(t,s)}}\right)^2\Delta s$$

ve böylece

$$c(\overline{c})^{\alpha}\int_{t_1}^{t}H(t,s)\xi(s)\,\eta(s)Q(s)\left(\tfrac{g(s)}{\sigma(s)}\right)^{\alpha}\Delta s \;\leq\; H(t,t_1)\eta(t_1)w(t_1)$$

$$-\int_{t_1}^{t}\frac{(h(t,s)r^{\sigma}(s)\,\xi^{\sigma}(s))^2}{4\alpha(\overline{c})^{\alpha-1}H(t,s)\eta(s)\,\sigma^{\alpha-1}(s)\,r(s)\xi(s)}\Delta s$$

elde ederiz. Şimdi

$$\frac{1}{H(t,t_1)}\int_{t_1}^{t}\left[c(\overline{c})^{\alpha}H(t,s)\eta(s)Q(s)\left(\frac{g(s)}{\sigma(s)}\right)^{\alpha}\right.$$

$$\left.-\frac{(r^{\sigma}(s)\eta^{\sigma}(s)\,h(t,s))^2}{4\alpha(\overline{c})^{\alpha-1}H(t,s)\eta(s)\,\sigma^{\alpha-1}(s)\,r(s)\xi(s)}\right]\Delta s\leq\eta(t_1)w(t_1)$$

olduğunu elde ederiz. Eğer bu eşitsizliğin her iki tarafının $\limsup$ u alınırsa $t\to\infty$ için bir çelişki elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Aşağıdaki teorem hemen elde edilir.

Teorem 4.1.9 $(1)-(5)$ *şartları,* $(4.2),(4.3)$ *ve* (4.8) *ifadeleri sağlansın ve* $H,[\mathbf{H}]$ *koşulunu sağlasın. Bazı* $t_1 \in [t_0,\infty)$ *için* h (4.30) *deki gibi tanımlı ve* $\overline{c} \in (0,1)$ *olmak üzere*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_1)} \int_{t_1}^{t} \left[H(t,s)\xi\left(s\right)\eta(s)Q(s)\left(\frac{g(s)}{\sigma\left(s\right)}\right)^{\alpha} - \frac{h(t,s)r(\sigma\left(s\right))\eta\left(\sigma\left(s\right)\right)}{c\left(\overline{c}\right)^{\alpha}\sigma^{\alpha}\left(s\right)}\right]\Delta s = \infty \tag{4.31}$$

olacak şekilde $\xi,\eta:\mathbb{T}\to\mathbb{R}^{+}$ Δ*-diferensiyellenebilir fonksiyonları var ise, kapsama* (4.1) *salınımlıdır.*

Uyarı 4.1.10

- *Koşul* (4) *te,* $g\left(t,\tau\right)$ *yu ikinci değişken* τ *ya göre azalmayan bir fonksiyon alınabilirdi. Bu durumda* $g\left(t\right)=g\left(t,a\right)$ *kabul edilir ve bulunan sonuçlar yine aynen geçerli olurdu.*

- *Teorem 4.1.8 ve 4.1.9 da H fonksiyonu*

  $$H(t,s)=(t-s)^{m},\ t\geq s\geq t_0,\ t,s\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \text{ ve } m\geq 1$$

  $$H(t,s)=\left(\ln\frac{t+1}{s+1}\right)^{m},\ t\geq s\geq t_0,\ t,s\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \text{ ve } m\geq 1$$

  ve benzeri şekillerde de alınabilirdi.

Bu tezde biz sadece ikinci dereceden diferensiyel ve dinamik kapsamaların salınım kriterini inceledik. Bu konuda daha yüksek mertebeden kapsamalar için yeterince çalışma bulunmamaktadır. Bu yüzden araştırmacıların bu yeni konuya yönelmesinin çok faydalı olacağı kanaatindeyiz.

KAYNAKLAR

Agarwal R P, Grace S R and O'Regan (2002) *Oscillation Theory for Second Order Linear, Half-Linear, Superlinear and Sublinear Dynamic Equations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Agarwal R P, Grace S R and O'Regan D (2003a) Oscillations criteria for sublinear and superlinear second order differential inclusions. *Mem. Diff. Eqns. Math. Physic*. 28: 1-12.

Agarwal R P, Grace S R and O'Regan (2003b) On nonoscillatory solutions of differential inclusions. *Proc. Amer. Math. Soc*. 131: 129-140.

Agarwal R P, Grace S R and O'Regan (2006) Some nonoscillation criteria for inclusions. *Jaust. Math. Soc*. 80: 1-12.

Agarwal R P, Grace S R and O'Regan D (2009) A selection of oscillation criteria for second order differential inclusions. *Appl. Math Letters*. 22: 153-158.

Akın E and Sun S (2009) Oscillation criteria for a class of second-order dynamic inclusions. Submitted.

Akın-Bohner E and Sun S (2011) Existence of solutions for second-order dynamic inclusions. *Int. J.Dynamical Systems and Differential Equations*. 3: 1-2.

Akın-Bohner E and Sun S (2012) Oscillation Criteria for second order strongly superlinear and sublinear dynamic inclusions. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal*. 19: 285-294.

Aubin J P and Cellina A (1984) *Differential Inclusions*. Springer-Verlag, Berlin.

Bohner M and Peterson A (2001) *Dynamic Equations on Time Scales*. An Introduction with Appcations, Birkhauser, Boston.

Bohner M and Tisdell C (2005) Second order dynamic inclusions. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*. 12: 6-45.

Erbe L, Hassan T and Peterson A (2009) Oscillations criteria for nonlinear functional neutral dynamic equations on time scales. *J. Diff. Eqn. Appl*. 15: 1097-116.

Grace S R, Agarwal R P, Bohner M and O'Regan D (2009) Oscillation of second order strongly superlinear and strongly sublinear dynamic inclusions. *Comum. Nonlinear Sci. Numer. Stimul*. 14: 3463-3471.

Grace S R, Akın E and Dikmen C M (2014) On the oscillations of second order nonlinear neutral dynamic equations with distributed deviating arguments on time scales. *Dynamic Systems and Applications*. 23: 735-748.

Grace S, Akın E and Agarwal R (2015) Oscillatory theorems for certain second order damped dynamic inclusions with distributed deviating arguments. *Communications in Applied Analysis.* 19: 3-14.

Hilger S (1990) Analysis on measure chains-a unified approach to continuous and discrete calculus. *Results Math*. 19: 18-56.

ÖZGEÇMİŞ

Yunus ONAR 1987 Patnos / AĞRI doğumludur. İlk, orta ve lise öğrenimini Patnos'ta tamamladı. 2012 yılında Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Aynı yıl Bülent Ecevit Üniversitesi Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı. 2015 yılında Milli Eğitim Bakanlığına Matematik Öğretmeni olarak atandı. Halen Patnos Alparslan Anadolu Lisesi'nde çalışmaktadır.

<u>ADRES BİLGİLERİ</u>

Adres: Çay Mahallesi. 1076. Sokak no:11 Patnos /AĞRI

Tel: 0 537 958 50 26

E-posta: yunusonar04@gmail.com