BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ BİR DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BİR CARLEMAN DEĞERLENDİRMESİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖZGE ARIBAŞ

HAZİRAN 2017

BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ BİR DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BİR CARLEMAN DEĞERLENDİRMESİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özge ARIBAŞ

DANIŞMAN: Yrd. Doç Dr. Mustafa YILDIZ

ZONGULDAK

Haziran 2017

KABUL:

Özge ARIBAŞ tarafından hazırlanan "Kesirli Bir Difüzyon Denklemi İçin Bir Carleman Değerlendirmesi" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 22/06/2017

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIZ ....
Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU ....
Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN ....
Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. ..../..../2017

Doç. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Özge

Özge ARIBAŞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ BİR DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BİR CARLEMAN DEĞERLENDİRMESİ

Özge ARIBAŞ

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIZ
Haziran 2017, 87 sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezin diğer bölümleri için gerekli olan bazı tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde, Riemann-Liouville kesirli integralleri ve türevleri ile Caputo kesirli türevleri üzerinde durulmuştur. Son bölümde ise, kesirli mertebeden türev içeren bir denklem için bir Carleman değerlendirmesi ispat edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kesirli türev, Carleman değerlendirmesi, difüzyon denklemi.

Bilim Kodu: 403.06.00.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

A CARLEMAN ESTIMATE FOR A FRACTIONAL DIFUSSION EQUATION

Özge ARIBAŞ

Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assist. Prof. Mustafa YILDIZ
June 2017, 87 pages

This thesis consists of three chapters. In the first chapter, some necessary definitions and theorems which will be used in the other chapters are given. In the second chapter, Riemann-Liouville fractional integrals and derivatives and Caputo fractional derivatives are considered. Finally, in the last chapter, a Carleman estimate for an equation which contains fractional derivative is proved.

Keywords: Fractional derivative, Carleman estimate, diffusion equation.

Science Code: 403.06.00.

TEŞEKKÜR

Tezin tüm aşamalarında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIZ'a, değerli vaktini esirgemeden bana ayırıp sorularımı cevaplayan saygıdeğer hocam Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN'e, her zaman yanımda olan aileme ve bana çok destek olan sevgili arkadaşlarım Arş. Gör. Özlem KAYTMAZ ile Merve ULUTÜRK'e teşekkürlerimi bir borç bilirim

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

α	: Verilen bir sayı
$[\alpha]$	: α sayısının supremumu
$\{\alpha\}$	: α sayısı ile $[\alpha]$ arasındaki fark
φ	: Verilen bir fonksiyon
Ω	: Verilen bir bölge
$\overline{\Omega}$	: Ω bölgesinin kapanışı
$\partial\Omega$	: Ω bölgesinin sınırı
$\mathbb{N}$	: $\{1,2,3,\dots\}$
$\mathbb{N}_{\mathbf{0}}$	: $\{0,1,2,\dots\}$
$C^k(\Omega)$	: Ω bölgesinde tanımlı *k*. mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar uzayı
$C_0^\infty(\Omega)$	: Ω bölgesinde tanımlı sonsuz defa diferensiyellenebilir ve supportu Ω nın kompakt alt kümesi olan fonksiyonlar uzayı
$L^1(\Omega)$	: Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L^2(\Omega)$	: Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$(.,.)_{L^2(\Omega)}$	: $L^2(\Omega)$ da iç çarpım
$H^k(\Omega)$	: Kendisi ve *k*. mertebeye kadar tüm genelleştirilmiş türevleri $L^2(\Omega)$ ya ait olan fonksiyonlar uzayı
$I_{a+}^\alpha\varphi$	: α. mertebeden Riemann-Liouville sol-taraflı kesirli integral
$I_{b-}^\alpha\varphi$	: α. mertebeden Riemann-Liouville sağ-taraflı kesirli integral
$D_{a+}^\alpha\varphi$	: α. mertebeden Riemann-Liouville sol-taraflı kesirli türevi
$D_{b-}^\alpha\varphi$	: α. mertebeden Riemann-Liouville sağ-taraflı kesirli türevi
${}^C D_{a+}^\alpha\varphi$	: α. mertebeden Caputo sol-taraflı kesirli türevi
${}^C D_{b-}^\alpha\varphi$	: α. mertebeden Caputo sağ-taraflı kesirli türevi

BÖLÜM 1

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tezde gerekli olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir:

Tanım 1.1 (Gamma Fonksiyonu) $\operatorname{Re} z > 0$ *için*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx \tag{1.1}$$

ile tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir (Samko et al. 1993).

Teorem 1.1

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{1.2}$$

dır (Samko et al. 1993).

Tanım 1.2 (Beta Fonksiyonu) $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} w > 0$ *için*

$$B(z,w) = \int_0^1 x^z (1-x)^{w-1} dx \tag{1.3}$$

ile tanımlanan fonksiyona Beta fonksiyonu denir (Samko et al. 1993).

Teorem 1.2 *Beta fonksiyonu, Gamma fonksiyonlarının cinsinden,*

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \tag{1.4}$$

şeklinde ifade edilir (Samko et al. 1993).

Tanım 1.3 (Landau Sembolleri) f *ve* g, S *kümesi üzerinde tanımlı iki fonksiyon olsun. Her* $x \in S$ *için* $|f(x)/g(x)|$ *oranı sınırlı ise,* $f(x)$ *ile* $g(x)$ *arasındaki bağıntı* $f(x) = O(g(x))$ *şeklinde yazılır. Eğer* x *bir* x_0 *değerine (söz konusu değer sonsuz olabilir) yaklaşırken* $f(x)/g(x)$ *oranı sıfıra yaklaşıyorsa, o takdirde* $f(x) = o(g(x))$ *olarak yazılabilir (Narkiewicz 2000).*

Tanım 1.4 (Mutlak Yakınsaklık)

$$\int_a^\infty |f(x)|\, dx$$

integrali yakınsak ise, bu takdirde

$$\int_a^\infty f(x)\, dx$$

integrali mutlak yakınsaktır denir (Balcı 1997).

Tanım 1.5 (Metrik, Metrik Uzay) *Boş olmayan bir X kümesi ve bir*

$d : X \times X \to \mathbb{R}^+, (x, y) \to d(x, y)$

dönüşümü verilsin. Eğer, her $x, y, z \in X$ için

1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

2) $d(x, y) = d(y, x),$

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(Üçgen Eşitsizliği)*

özellikleri sağlanıyorsa o takdirde d dönüşümüne X üzerinde uzaklık fonksiyonu ya da metrik adı verilir ve (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 1.6 (Kompaktlık) *Bir X metrik uzayı verilmiş olsun. Eğer X' deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahip ise X uzayına kompakttır denir (Kreyszig 1989).*

Tanım 1.7 (Operatör) *X ve Y boş olmayan iki küme ve $D \subset X$ olsun. D' nin her elemanına Y' nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala D' den Y' ye bir operatör veya dönüşüm denir (Musayev ve Alp 2000).*

Tanım 1.8 (Diferensiyel Denklem) *Bazı bilim dallarında bir problemin çözümü, problemin özelliklerini taşıyan matematiksel bağıntı (veya matematiksel model) kurulmasını gerektirir. Böyle bir bağıntı, genellikle bilinmeyen fonksiyon ile bu fonksiyonun bağımsız değişkenlerine göre türevlerini içeren bir denklem olarak karşımıza çıkar. Böyle bir denkleme diferensiyel denklem denir. Eğer bilinmeyen fonksiyon bir tek bağımsız değişkene bağımlı ise, diferensiyel denkleme adi diferensiyel denklem; bilinmeyen fonksiyon iki ya da daha çok bağımsız değişkene bağımlı ise, diferensiyel denkleme kısmi diferensiyel denklem denir (Çağlıyan ve Çelebi 2010).*

Tanım 1.9 *İkinci mertebeden n bağımsız değişkenli, lineer bir kısmi diferensiyel denklem*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = d \tag{1.5}$$

biçiminde yazılır. Burada a_{ij},b_i,c ve d; $x_1, x_2, ..., x_n$ bağımsız değişkenlerinin fonksiyonlarıdır.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$$

olduğundan $[a_{ij}]$ katsayılar matrisi simetriktir, yani $i, j = 1, 2, ..., n$ için $a_{ij} = a_{ji}$ dir. $[a_{ij}]$ matrisinin öz (eigen) değerleri, $\det(a_{ij} - \lambda I) = 0$ denkleminin kökleridir, burada I, n-boyutlu birim matris belirtir. Lineer cebirden bilindiği üzere, $[a_{ij}]$ matrisi simetrik olduğundan, bu matrisin öz değerleri reeldir. (1.5) denkleminin esas kısmının katsayılar matrisi $[a_{ij}]$ nin öz değerleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ olsun.

1) *$\lambda_1, ..., \lambda_n$ öz değerleri, bir x_0 noktasında sıfırdan farklı ve x_0 da hepsi aynı işaretli ise, (1.5) denklemine x_0 da eliptik tiptendir,*

2) *$\lambda_1, ..., \lambda_n$ öz değerleri, bir x_0 noktasında sıfırdan farklı ve x_0 da biri hariç hepsi aynı işaretli ise, (1.5) denklemine x_0 da hiperbolik tiptendir,*

3) *$\lambda_1, ..., \lambda_n$ öz değerlerinden herhangi biri, x_0 noktasında sıfır ise, (1.5) denklemine x_0 da parabolik tiptendir denir.*

(1.5) denklemi bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinin tüm noktalarında hiperbolik, parabolik veya eliptik ise, (1.5) denklemine Ω da, sırasıyla, hiperbolik, parabolik veya eliptik tiptendir denir. Diferensiyel denklemin katsayıları sabit iken, denklem tipi bir noktada hangi tipten ise tüm bölgede aynı tiptendir. Diferensiyel denklem fonksiyon katsayılı ise, denklem, Ω bölgesinin bir noktasında belli bir tipten iken, başka bir noktasında farklı tipten olabilir (Anar 2005).

Tanım 1.10 (Multiindeks) *Eğer $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, negatif olmayan α_j sayılarından oluşan bir sıralı $n-$li ise, α ya bir multiindeks denir, ve $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ dereceden $x^{\alpha_1}x^{\alpha_2}...x^{\alpha_n}$ çarpımı x^α ile gösterilir. Benzer şekilde, eğer $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ ise,*

$$D^\alpha = D^{\alpha_1}D^{\alpha_2}...D^{\alpha_n}$$

$|\alpha|'$ ıncı mertebeden diferensiyel operatör belirtir. $D^{(0,0,...,0)}u = u$ olduğu açıktır (Adams and Fournier 2003).

Tanım 1.11 (Genelleştirilmiş Türev) *$f_\alpha(x)$ ve $v(x)$, Ω da integrallenebilir fonksiyonlar olsun. Herhangi bir $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ olmak üzere,*

$$\int\limits_\Omega f_\alpha(x)\,\varphi d\Omega = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega v(x)\, D_\varphi^\alpha d\Omega$$

ise, $f_\alpha(x)$ ya Ω bölgesinde $v(x)$ in α' ıncı mertebeden genelleştirilmiş türevi denir. Burada,

$$f_\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+...\alpha_n} v}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}...\partial_{x_n}^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}...\partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

olarak tanımlanmıştır (Mikhailov 1978).

Tanım 1.12 (Cauchy Dizisi) *(X, d) bir metrik uzay ve X in içinde bir dizi (x_n) olsun. Bu durumda $\forall\ \varepsilon > 0$ için $m, n > n_\varepsilon$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa, (x_n) dizisine X içinde bir Cauchy dizisi adı verilir.*
Bu tanım daha kısa olarak şöyle yazılabilir:

$\forall \varepsilon > 0$ *için* $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni \forall m, n > n_\varepsilon$ *için*

$d(x_n, x_m) < \varepsilon \Leftrightarrow (x_n)$ *dizisi* X *içinde bir Cauchy dizisidir (Musayev ve Alp 2000).*

Tanım 1.13 (Kompakt Support) *Eğer u, G üzerinde tanımlı bir fonksiyon ise, u nun supportu*

$$supp(u) = \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $supp(u) \Subset \Omega$ ise, Ω da u nun kompakt supportu vardır denir. Burada $G \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı ise, G nin $\mathbb{R}^n$ de kapanışı $\overline{G}$ şeklinde gösterilir. Eğer $\overline{G} \subset \Omega$ ve $\overline{G}$, $\mathbb{R}^n$ in kompakt altkümesi (kapalı ve sınırlı) ise, $G \Subset \Omega$ olarak yazılır (Adams and Fournier 2003).

Tanım 1.14 (Ölçülebilir Fonksiyon) *A ölçülebilir bir küme olmak üzere, $f : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ bir fonksiyon olsun.*

$$\{x : f(x) > a\}$$

kümesi her $a \in \mathbb{R}$ için ölçülebilir ise, f fonksiyonuna ölçülebilirdir denir (Adams and Fournier 2003).

Teorem 1.3 (Fubini Teoremi) $\Omega_1 = [a,b]\,, \Omega_2 = [c,d]\,, -\infty \leq a < b \leq \infty, -\infty \leq c < d \leq \infty$ *ve* $f(x,y)$ $\Omega_1 \times \Omega_2$ *üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer*

$$\int\limits_{\Omega_1} dx \int\limits_{\Omega_2} f\left(x,y\right) dy, \int\limits_{\Omega_2} dx \int\limits_{\Omega_1} f\left(x,y\right) dy, \int\limits_{\Omega_1 \times} \int\limits_{\Omega_2} f\left(x,y\right) dxdy$$

integrallerinden en azından biri mutlak yakınsak ise, integraller birbirine eşittir (Samko et al. 1993).

Teorem 1.4 (Dirichlet Formülü)

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_a^x f\left(x,y\right) dy = \int\limits_a^b dy \int\limits_y^b f\left(x,y\right) dx \tag{1.6}$$

eşitliği, bu integrallerin herhangi birinin mutlak yakınsak olması kabulü altında sağlanır. Bu bağıntı Fubini Teoremi'nin özel bir halidir ve (1.6) bağıntısına Dirichlet formülü denir (Samko et al. 1993).

Tanım 1.15 (Riemann İntegrallenebilirlik) $M\left[a,b\right]$ *basamak fonksiyonu;* $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu sınırlı olsun. Üst ve Alt Darboux İntegralleri, sırasıyla,*

$$\begin{aligned} \int\limits_a^{\bar{b}} s(x)dx &= \inf_{s \geq f} \left\{ \int\limits_a^b s(x)dx : s \in M\left[a,b\right] \right\} \\ \int\limits_{\bar{a}}^b t(x)dx &= \sup_{t \leq f} \left\{ \int\limits_a^b t(x)dx : t \in M\left[a,b\right] \right\} \end{aligned}$$

şeklindedir. Eğer,

$$\int\limits_a^{\bar{b}} f(x)dx = \int\limits_{\bar{a}}^b f(x)dx = I$$

ise, f *fonksiyonu* $[a,b]$ *aralığında Riemann anlamında integrallenebilirdir denir ve*

$$I = \int\limits_a^b f\left(x\right) dx$$

yazılır (Balcı 1999).

Tanım 1.16 (Lebesgue İntegrallenebilirlik) *Eğer,* $C(\overline{\Omega})$ *da* $k = 1, 2, ...$*için, monoton azalmayan fonksiyonların bir* $f_k(x)$ *dizisi,* $f(x)$ *fonksiyonuna* Ω *bölgesinde yakınsıyorsa ve* $\int\limits_{\Omega} f_k(x)dx$ *Riemann integrallerinin dizisi* $\int\limits_{\Omega} f_k(x)dx \leq C$ *şeklinde üstten sınırlı ise, o takdirde,* Ω *da hemen hemen her yerde negatif olmayan* $f(x)$ *fonksiyonuna* Ω *üzerinde Lebesgue integrallenebilirdir denir (Mikhailov 1978).*

Teorem 1.5 *f, $[a,b]$ de integrallenebilen bir fonksiyon olsun. O halde $|f|$ integrallenebilir ve*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_y^b |f(x)|\, dx \tag{1.7}$$

dir (Balcı 1999).

1.1 UZAYLAR

Tanım 1.17 (Norm, Normlu Uzay) *Bir X vektör uzayı üzerindeki norm, X üzerinde tanımlı olup bir $x \in X$ noktasındaki değeri $\|x\|$ ile gösterilen ve $x, y \in X$ de keyfi vektörler ve c bir skaler olmak üzere aşağıdaki özellikleri gerçekleyen reel değerli bir fonksiyondur:*

1) $\|x\| \geq 0$,

2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

3) $\|cx\| = |c|\, \|x\|$,

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Üçgen Eşitsizliği).*

Üzerinde bir norm tanımlanmış bir X vektör uzayına bir normlu uzay adı verilir. Normlu uzaylar $(X, \|\cdot\|)$ ya da kısaca X ile gösterilir (Kreyszig 1989).

Tanım 1.18 (Tam Uzay) *X bir normlu lineer uzay olmak üzere X'in elemanlarından oluşan her bir Cauchy dizisi X in bir elemanına yakınsıyor ise, o taktirde X'e tam uzay denir (Mikhailov 1978).*

Tanım 1.19 (Banach Uzayı) *Tam ve normlu bir lineer uzaya Banach uzayı denir (Mikhailov 1978).*

Tanım 1.20 (İç Çarpım Uzayı) *Bir iç çarpım uzayı, üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış vektör uzayıdır. Burada sözü edilen iç çarpım $X \times X$ den X in bir K skaler cismi içine yapılan bir dönüşümdür, yani X in her x ve y vektör çifti, (x, y) ile gösterilen ve aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir skalerle eşlenmiştir:*

1) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,

2) $(cx, y) = c\,(x, y)\,,$

3) $(x, y) = (y, x)\,,$

4) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(Kreyszig 1989).*

Tanım 1.21 (Hilbert Uzayı) *Bir Hilbert uzayı, üzerindeki iç çarpımla tanımlı metriğe göre tam olan bir iç çarpım uzayıdır (Kreyszig 1989).*

Tanım 1.22 ($AC(\Omega)$, $AC^n(\Omega)$ **Uzayları)** Ω, *herhangi bir çifti kesişmeyen* $[a_k, b_k] \subset \Omega$ $(k = 1, 2, ..., n)$ *aralıklarından oluşan sonlu bir küme olsun. Eğer her* $\varepsilon > 0$ *için,* $\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$ *olduğunda* $\sum\limits_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$ *kalacak bir* $\delta > 0$ *bulunabiliyorsa, o takdirde* $f(x)$ *fonksiyonuna,* Ω *bölgesinde mutlak süreklidir denir. Bu fonksiyonların uzayı* $AC(\Omega)$ *ile gösterilir.*

$n \in \mathbb{N}$ *ve* Ω *bir bölge olsun.* Ω *bölgesinde* $(n-1)$ *mertebeye kadar kadar sürekli türevlere sahip ve* $f^{(n-1)}(x) \in AC(\Omega)$ *şartını sağlayan* f *fonksiyonlarının uzayı* $AC^n(\Omega)$ *ile gösterilir (Samko et al. 1993).*

Teorem 1.6 $[a, b]$ *aralığında bir* F *fonksiyonunun mutlak sürekli olması için gerek ve yeter şart, her* $x \in [a, b]$ *için*

$$F(x) = F(a) + \int\limits_a^x F'(t)dt \tag{1.8}$$

olmasıdır. Başka bir deyişle, bir $F(x)$ *fonksiyonunun türevi yardımıyla elde edilebilmesi için asgari şart, o fonksiyonun mutlak sürekli olmasıdır (Kolmogorov and Fomin 1975).*

Tanım 1.23 ($C^0(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$ **Uzayları)** Ω, $\mathbb{R}^n$ *uzayında bir bölge,* m *negatif olmayan bir tamsayı,* $|\alpha| \leq m$ *olsun. Her* m *için,* $D^\alpha\varphi$ *kısmi türevleri* Ω *da sürekli olacak biçimdeki tüm* φ *fonksiyonlarının oluşturduğu vektör uzayı* $C^m(\Omega)$ *şeklinde gösterilir ve* $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ *biçiminde yazılır.* $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$ *şeklinde tanımlanır (Adams and Fournier 2003).*

Tanım 1.24 ($C_0(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ **Uzayları)** $C_0(\Omega)$ *ve* $C_0^\infty(\Omega)$ *uzayları, sırasıyla,* $C(\Omega)$ *ve* $C^\infty(\Omega)$ *da* Ω *bölgesinde kompakt supporta sahip tüm fonksiyonların kümesidir (Adams and Fournier 2003).*

Tanım 1.25 ($L^p(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ Uzayları) *Ω, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir bölge, p bir pozitif reel sayı olsun. Ω bölgesinde*

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty$$

şartını sağlayan tüm ölçülebilir u fonksiyonlarının uzayı $L^p(\Omega)$ ile gösterilir. $1 \leq p < \infty$ olması durumunda

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlanan $\|\cdot\|_p$ fonksiyoneli $L^p(\Omega)$ üzerinde bir normdur. ($0 < p < 1$ olması durumunda bir norm değildir.)

u, Ω bölgesinde bir ölçülebilir fonksiyon olsun. Eğer Ω da $|u(x)| \leq K$ olacak biçimde bir K sabiti varsa, o takdirde u fonksiyonu Ω da esas sınırlıdır denir. Burada, K sabitlerinin en büyük alt sınırına Ω da $|u|$ nun esas supremumu denir ve $ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$ ile gösterilir. Ω bölgesinde esas sınırlı tüm u fonksiyonlarının vektör uzayı $L^\infty(\Omega)$ şeklinde tanımlanır.

$$\|u\|_\infty = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$

ile tanımlanan $\|\cdot\|_\infty$ fonksiyoneli $L^\infty(\Omega)$ üzerinde bir normdur (Adams and Fournier 2003).

Tanım 1.26 (Sobolev Uzayı) *m bir pozitif tam sayı, $1 \leq p \leq \infty$ ve $\|\cdot\|_p$ de $L^p(\Omega)$ uzayında bir norm olmak üzere, uygun her u için*

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, \qquad 1 \leq p < \infty, \tag{1.9}$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty \tag{1.10}$$

şeklinde bir $\|\cdot\|_{m,p}$ fonksiyoneli tanımlansın. Bazı durumlarda bölgeler ile ilgili çıkabilecek karışıklığı önlemek için $\|u\|_{m,p}$ sembolü yerine $\|u\|_{m,p,\Omega}$ de kullanılmıştır. (1.9) veya (1.10) normu ile verilen aşağıdaki uzaylar Sobolev uzayı olarak adlandırılır:

1) $H^{m,p}(\Omega) : \left\{ u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty \right\}$ *kümesinin $\|\cdot\|_{m,p}$ normuna göre tamlanışı,*

2) $W^{m,p}(\Omega) \equiv \{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m \}$,

3) $W_o^{m,p}(\Omega) : W^{m,p}(\Omega)$ *uzayında $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı, (Adams and Fournier 2003).*

Tanım 1.27 (Genelleştirilmiş Fonksiyon) *$C_0^\infty(\Omega)$ üzerinde aşağıdaki yakınsaklık yardımı ile verilen topoloji ile elde edilen uzaya test fonksiyonlar uzayı denir. Bu uzay, $D(\Omega)$ ile gösterilir. Eğer,*

1) *Öyle bir $K \subset \Omega$ kompakt cümlesi vardır;*

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \text{için} \quad supp\varphi_k \in K,$$

2) *Her $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ve $k \to \infty$ iken*

$$D^\alpha_{\varphi_k(x)} \to D^\alpha_{\varphi(x)}$$

Ω bölgesinde düzgün yakınsak ise, $k \to \infty$ için $\varphi_k \overset{D(\Omega)}{\to} \varphi$ yakınsaktır denir.

$D(\Omega)$ topolojik uzayında tanımlı sürekli, lineer fonksiyonellere, genelleştirilmiş fonksiyon denir. Genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfı $D'(\Omega)$ ile gösterilir (Vladimirov 1984).

Tanım 1.28 ($H^k(\Omega)$ Uzayı) *$H^k(\Omega)$, kendisi ve k. mertebeye kadar tüm genelleştirilmiş türevleri $L^2(\Omega)$ ya ait olan tüm fonksiyonların oluşturduğu cümledir. $H^k(\Omega)$, üzerinde tanımlanan*

$$(f_1, f_2)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha f_1 D^\alpha \overline{f_2} dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır, bu iç çarpım ile tanımlanan norm

$$\|f\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega |D^\alpha f|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

biçimindedir (Mikhailov 1978).

Tanım 1.29 ($\mathring{H}^k(\Omega)$ Uzayı) *$\mathring{H}^k(\Omega)$, $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayına ait ve Ω bölgesi ile $\partial\Omega$ yüzeyinin bir komşuluğunun arakesitinde sıfır olan tüm fonksiyonların oluşturduğu cümlenin kapanışı olarak tanımlanır (Mikhailov 1978).*

Tanım 1.30 ($L^r(0,T;E)$ Uzayı) *T bir sabit, $0 < T < \infty$ olsun. Her E Banach uzayı için $1 \le r < \infty$ olmak üzere*

$$\|u\|_{L^r(0,T;E)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_E^r \, dt \right)^{\frac{1}{r}}$$

sonlu normuna sahip $[0,T]$ *üzerinde tüm* $E-$*değerli ölçülebilir fonksiyonların sınıfı* $L^r(0,T;E)$ *ile gösterilir.* $r=\infty$ *olduğu durumda norm*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;E)} = ess \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_E$$

biçiminde tanımlanır (Pankov 2013).

Tanım 1.31 **($C([0,\tau];B)$ Uzayı)** *B, $\|\cdot\|$ normu ile verilen bir Banach uzayı olsun.* $C([0,\tau];B)$ *uzayı*

$$\|u\|_{C([0,\tau];B)} = \max_{0\leq t\leq \tau} \|u(t)\| < \infty$$

normuna sahip tüm $u:[0,\tau]\to B$ *sürekli fonksiyonların cümlesidir (Carl et al. 2007).*

1.2 DİREKT VE TERS PROBLEMLER

Tanım 1.32 (Problem) *Bir bölgede verilen denklemin, verilen koşullar altında, çözümünün bulunmasına problem denir (Yıldız 1995).*

Matematiksel fizikte, problemler, direkt ve ters problemler olarak iki türde değerlendirilir. Direkt problem; var olan bir sebepten ortaya çıkabilecek sonuçların bulunması problemi iken, ters problem mevcut sonuçlardan sebebin belirlenmesi problemi olarak ifade edilebilir, (Gölgeleyen ve Kaytmaz 2016). Matematiksel fizikteki tanımları ise, aşağıda verilmiştir:

Tanım 1.33 (Direkt Problem) *Matematiksel fizikte, bir bölgede denklem ve koşullar verilerek problemin çözümünün bulunmasına direkt problem denir (Yıldız 1995).*

Burada amaç, belli bir anda bölgenin belli bir noktasındaki fiziksel alanı veya süreci tanımlayan bir fonksiyonun bulunmasıdır. Ayrıca bu problemlerde ortamın özelliklerinin, fiziksel sürecin başlangıç anındaki durumunun ve/veya sınırda sağlanan özelliklerin bilindiği kabul edilir. Diğer yandan sıklıkla ortamın özelliklerinin bilinmediği durumlarla da karşılaşılmaktadır.

Tanım 1.34 (Ters Problem) *Pratikte karşılaşılan öyle problemler vardır ki, bu problemlerin çözümleri için ayrıca ek bilgiye ihtiyaç duyulur. Aynı ek bilgiye göre problemdeki denklemi ve koşulları, yani denklemin bir ya da birkaç katsayısını, denklemin sağ tarafını* *ya da koşullardan biri ya da birkaçını çözümle birlikte bulmak gerekir. Böyle problemlere ters problem denir. Bu problemlerin karakteristik özelliği, genellikle Hadamard anlamında kötü konulmuş olmalarıdır (Yıldız 1995).*

Ters problemler teorisi, 20. yüzyılın ortalarından başlayarak her geçen gün bilim ve teknolojide daha önemli hale gelmiştir. Bu teorinin; fizik, jeofizik, tıp ve astronomi gibi matematiğin kullanıldığı pek çok sahada önemli uygulamaları vardır. Bir örnek olarak demir-çelik endüstrisi verilebilir. Demir-çelik üretim sürecinde entegre tesislerin ana ünitesi olan yüksek fırınlarda, demir cevherinin içeriğinde bulunan demir oksit, kok kömürü ile indirgenerek, sıcak maden ya da sıvı ham demire dönüştürülür. Yüksek fırının içindeki sıcaklık dağılımı, homojen olmamakla birlikte yaklaşık 1500 ^{o}C'dir. Yüksek fırınların boyutu, yapısı ve içerideki yüksek sıcaklık nedeniyle ısı akışının direkt olarak gözlemlenmesi mümkün değildir. Dolayısıyla fırının tabanına yakın dış bölgeye yerleştirilmiş ısıl çift adı verilen aygıtlar kullanılarak elde edilen sıcaklık verilerinden fırındaki ısı akışının davranışının belirlenmesi problemi karşımıza çıkar (Gölgeleyen ve Kaytmaz 2016).

Tanım 1.35

$$Au = f \tag{1.11}$$

denklemi için U ve F metrik uzaylar olmak üzere

$$A : U \longrightarrow F$$

operatörü tanımlansın. (1.11) *denkleminin aşağıda verilen özellikleri sağlayan çözümünün bulunması problemine* (U, F) *uzay çifti için Hadamard anlamında iyi konulmuş (iyi şartlı) problem, şartlardan en az biri gerçeklenmez ise, probleme* (U, F) *uzay çifti için Hadamard anlamında kötü konulmuş (iyi konulmamış) problem denir.*

1) Her $f \in F$ için U uzayında problemin çözümü vardır,

2) Problemin çözümü U uzayında tektir,

3) Problemin koşulları F uzayında az değiştiğinde problemin çözümü de U uzayında az değişir (kararlılık koşulu) Bu şartlardan herhangi birinin sağlanmaması durumunda problem, (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında kötü konulmuş problem olarak adlandırılır. Bir (U_1, F_1) uzay çifti için iyi, başka bir (U_2, F_2) uzay çifti için kötü konulmuş probleme (U_2, F_2) uzay çifti için zayıf kötü konulmuş problem denir. Tüm uzay çiftlerinde kötü konulmuş probleme kuvvetli kötü konulmuş problem denir (Yıldız 1995).

Hadamard'a göre kötü konulmuş problemler, reel fiziksel anlamı olan pratik olayları tanımlamaz. Çünkü pratikte koşullar her zaman belirli bir hata payı ile verilir. Bu hatalı koşullar kullanılarak bulunan çözüm, kesin çözümden çok farklı olabilir ve bu da pratikte yanlış sonuçların elde edilmesine sebep olur. Bu nedenle başlangıçta birçok matematikçi sadece Hadamard anlamında iyi konulmuş problemlerle ilgilenmiştir. Daha sonraları ise bilim ve teknolojide ortaya çıkan birçok problemin kötü konulmuş problem olduğunun görülmesi matematikçilerin dikkatini çekmiştir. 1943 yılında Rus Matematikçi A. N. Tikhonov, kötü konulmuş problemlerin pratikteki önemine işaret ederek bu problemlerin kararlı çözümlerinin bulunabileceği ihtimali üzerinde durmuştur. Tikhonov'un yaklaşımı, çözüm uzayının sınırlandırılması fikrine dayanmaktadır.

Tanım 1.36 *Eğer* (1.11) *denklemi, aşağıdaki üç koşulu sağlıyorsa problem, Tikhonov anlamında iyi konulmuş problem olarak adlandırılır:*

1) U bir metrik uzay olmak üzere, problemin çözümü var ve belirli bir $M \subset U$ cümlesine aittir,

2) Problemin çözümü M de tektir,

3) Problemin çözümü M de koşullara sürekli bağımlıdır, yani çözümü M cümlesinin dışına çıkarmayan koşullar F metrik uzayında sonsuz küçük bir değişikliğe uğradıklarında problemin çözümü de U metrik uzayında sonsuz küçük değişir.

M cümlesine problemin doğruluk cümlesi denir ve M genellikle kompakt bir cümle olarak seçilir (Yıldız 1995).

Günlük yaşantımızda sürekli olarak ters ve kötü konulmuş problemlerle karşılaşırız. Örneğin, görsel algımızı ele alalım. Gözlerimizin belli bir anda çevremizdeki sonlu sayıda noktadan görsel bilgi alabildiği bilinmesine rağmen, etrafımızdaki her şeyi tam olarak görebildiğimiz hissine kapılırız. Bunun nedeni, beynimizin bir bilgisayar gibi çalışarak belirli noktalardan alınan verileri interpolasyon ve kestirim yaparak görüntüyü tamamlamasıdır. Bir nesnenin ve çevresinin görüntüsünün oluşturulması problemi kötü konulmuş bir problemdir. Çünkü çözüm tek değildir veya verilerdeki küçük değişiklikler, çözümde büyük değişikliklere sebep olabilir (Gölgeleyen ve Kaytmaz 2016).

BÖLÜM 2

RIEMANN-LIOUVILLE VE CAPUTO KESİRLİ TÜREVLERİ

Riemann-Liouville kesirli türevlerinin tanımlarını verebilmek için, öncelikle Riemann-Liouville kesirli integralleri hakkında bilgiye ihtiyaç vardır. Bu sebeple, ilk olarak Riemann-Liouville kesirli integralleri tanıtılarak bazı temel özellikleri üzerinde durulmuştur. Daha sonra, bu özellikler yardımıyla, Riemann-Liouville kesirli türevlerinin tanımı ve diğer bölümlerde kullanılmış olan bazı özellikleri verilmiştir. Ayrıca, Riemann-Liouville kesirli türevleri yardımıyla Caputo kesirli türevleri tanımlanmıştır.

2.1 RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİ

Bu bölüm Samko et al. (1993) ve Kilbas et al. (2006) esas alınarak hazırlanmıştır. Kesirli integrasyon kavramı, Abel integral denklemi ile yakından ilişkili olduğundan, Abel integral denkleminin çözümü ele alınmıştır.

2.1.1 Abel İntegral Denklemi

İlk olarak, Abel integral denkleminin formal çözümü verilmiş olup bu çözüm yardımı ile kesirli türevin, kesirli integralin ters operatörü olarak tanımlanabileceği gösterilmiştir.

Tanım 2.1 (Abel İntegral Denklemi) $0 < \alpha < 1$ *olmak üzere,*

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, 0 < x, \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan denkleme Abel integral denklemi adı verilir. Burada $a > -\infty$ *olduğu ve* (2.1) *eşitliğinin* $[a, b]$ *sonlu aralığı üzerinde verildiği kabul edilmiştir (Samko et al. 1993).*

(2.1) denklemini çözmek için, sırasıyla, t yerine s, x yerine de t alınarak elde edilen eşitlik, her iki taraftan $\Gamma(\alpha)\,(x-t)^{-\alpha}$ ile genişletilir ve $[a, x]$ aralığı üzerinde t değişkenine göre integrali alınırsa

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}} \int_a^t \frac{\varphi(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}} \tag{2.2}$$

elde edilir.

(1.6) ile verilen Dirichlet formülü kullanılarak (2.2) eşitliğinin sol tarafındaki integrallerin sırası değiştirilirse

$$\int_a^x \varphi(s)ds \int_s^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}(t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}} \tag{2.3}$$

elde edilir. İç taraftaki integral, $t = s + \tau(x-s)$ değişken dönüşümünden ve (1.3),(1.4) gereği

$$\begin{aligned} \int_s^x (x-t)^{-\alpha}(t-s)^{\alpha-1}\,dt &= \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha}\,dt \\ &= B(\alpha, 1-\alpha) \\ &= \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Dolayısıyla (2.3) eşitliği

$$\int_a^x \varphi(s)ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}} \tag{2.4}$$

şeklinde ifade edilir. (2.4) eşitliğinin her iki taraftan diferensiyeli alınarak

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}} \tag{2.5}$$

bulunur.

Eğer (2.1) denkleminin bir çözümü varsa, bu çözüm (2.5) ile verilir ve dolayısıyla tektir. (2.1) eşitliğinde $\alpha = 1$ durumu aşikardır, $\alpha > 1$ durumu ise (2.1) ifadesinin her iki taraftan diferensiyeli alınarak $0 < \alpha < 1$ durumuna indirgenebileceğinden, (2.1) ifadesinde $0 < \alpha < 1$ durumu göz önüne alınmıştır.

Benzer olarak

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f(x), \qquad x \le b \tag{2.6}$$

biçimindeki Abel denklemi ele alınmış ve $0 < \alpha < 1$ durumu için (2.4) yerine aşağıdaki formül bulunmuştur:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)\, dt}{(t-x)^{\alpha}} \tag{2.7}$$

2.1.2 İntegrallenebilir Fonksiyonlar Uzayında Abel İntegral Denkleminin Çözülebilirliği

Bu kısımda (2.11) ile verilen $f(x)$ Abel integral denkleminin hangi koşullar altında çözülebilir olduğunu açıklanmıştır. Bu alt bölümün ana sonucu olan Teorem 2.1'i ifade etmek için

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)\, dt}{(x-t)^{\alpha}} \tag{2.8}$$

notasyonu verilmiştir. Ayrıca,

$$\int_a^b |f_{1-\alpha}(x)|\, dx \leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^b |f(t)|\, (b-t)^{1-\alpha}\, dt \tag{2.9}$$

olduğu açıktır, yani $f(x) \in L^1(a,b)$ ise, $f_{1-\alpha}(x) \in L^1(a,b)$ dır.

Teorem 2.1 *$L^1(a,b)$ de (2.1) Abel integral denkleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart, $0 < \alpha < 1$ için,*

$$f_{1-\alpha}(x) \in AC([a,b]) \;\; \text{ve} \;\; f_{1-\alpha}(x) = 0 \tag{2.10}$$

koşullarını sağlamasıdır. (2.1) *koşullarını sağlayan denklemin tek çözümü vardır ve* (2.5) *ile verilmiştir (Samko et al. 1993).*

Abel integral denkleminin çözülebilirlik kriteri, Teorem 2.1'de $f_{1-\alpha}(x)$ yardımcı fonksiyonu cinsinden ifade edilmiştir. Aşağıda verilen Lemma 2.2 ve Sonuç 2.1 ise, çözülebilirlik için basit bir yeter koşulu, $f(x)$ fonksiyonu cinsinden ifade etmektedir.

Lemma 2.2 *Eğer $f(x) \in AC([a,b])$ ise, $f_{1-\alpha}(x) \in AC([a,b])$ dir, ve*

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[f(a)\,(x-a)^{1-\alpha} + \int_a^x f'(t)\,(x-t)^{1-\alpha}\, dt \right] \tag{2.11}$$

şeklindedir (Samko et al. 1993).

İspat. (1.8) göz önüne alınır ve (2.8) eşitliğinde $f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)\,ds$ yazılırsa, Gamma fonksiyonunun (1.1) ve (1.2) özellikleri gereği

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(2-\alpha)}(x-t)^{1-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}}\int_a^t f'(s)\,ds \tag{2.12}$$

elde edilir. (2.12) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terim mutlak sürekli fonksiyondur, çünkü $(x-a)^{1-\alpha} = (1-\alpha)\int_a^x (x-a)^{-\alpha}\,dt$ dır. İkinci terim için ise,

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}}\int_a^t f'(s)\,ds = \int_a^x \left(\int_a^t \frac{f'(s)\,ds}{(x-t)^{\alpha}}\right)dt \tag{2.13}$$

eşitliği sağlanır ve bir toplanabilir fonksiyonun ilkeli olduğundan mutlak süreklidir. (2.13) eşitliğinin sağ tarafı göz önüne alınırsa

$$\int_a^x \left(\int_a^t \frac{f'(s)\,ds}{(x-t)^{\alpha}}\right)dt = \int_a^x \left(\frac{f(t)-f(a)}{(x-t)^{\alpha}}\right)dt$$

bulunur. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafında $u = f(t) - f(a)\,,\ dv = (x-t)^{-\alpha}\,dt$ alınarak kısmi integrasyon yapılarak (2.12) de yerine yazıldığında (2.11) elde edilir, ki bu da ispatı tamamlar. ■

Sonuç 2.1 *Eğer* $f(x) \in AC([a,b])$ *ise,* $0 < \alpha < 1$ *için,* (2.1) *Abel eşitliği* $L^1(a,b)$ *de çözülebilirdir ve bu çözüm* (2.5) *ile verilir. Ayrıca* (2.5) *çözümü*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(s)\,ds}{(x-s)^{\alpha}}\right] \tag{2.14}$$

şeklinde ifade edilir (Samko et al. 1993).

Gerçekten, Lemma 2.2, (2.12) ve (2.13) göz önüne alınarak (2.10) çözülebilirlik koşulları sağlanır. $\varphi(x) = \frac{d}{dx}f_{1-\alpha}(x)$ olduğundan (2.11) eşitliğinin her iki taraftan diferensiyeli alınarak (2.14) bulunur, integral işareti altındaki diferensiyel (2.13) yardımıyla kolayca ispatlanır.

Ayrıca, Abel integral denkleminin (2.7) eşitliğinden, (2.14) elde edilir, bu da mutlak sürekli $f(x)$ fonksiyonlarının sağ tarafına uygulanabilir.

Teorem 2.1'e benzer biçimde, (2.6) denkleminin $L^1(a,b)$ de çözülebilir olması için gerek ve yeter şart, $0 < \alpha < 1$ iken $\widetilde{f}_{1-\alpha}(x) \in AC([a,b])$, $\widetilde{f}_{1-\alpha}(x) = 0$ ve

$$\widetilde{f}_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}}$$

olmasıdır.

$f(x) \in AC([a,b])$ iken (2.6) denkleminin (2.7) çözümü, (2.14) eşitliğine benzer şekilde

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(b)}{(b-t)^{\alpha}} - \int_a^x \frac{f'(s)\,ds}{(s-t)^{\alpha}}\right] \tag{2.15}$$

olarak yazılır.

2.1.3 Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri ve Temel Özellikleri

Bir $n-$katlı integral için

$$\int_a^x dx \int_a^x dx ... \int_a^x \varphi(x)dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt \tag{2.16}$$

ifadesi tümevarım yardımıyla kolaylıkla ispatlanabilir. Gamma fonksiyonunun (1.2) özelliği gereği, (2.16) eşitliğinin sağ tarafının $n \notin \mathbb{Z}$ değerleri için bir anlam ifade edebileceği görülür. Böylece integrasyon, tamsayı olmayan n değerleri için, aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 2.2 $\varphi(x) \in L^1(a,b)$ *ve* $\alpha > 0$ *olmak üzere*

$$\left(I_{a+}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \;\; x > a, \tag{2.17}$$

$$\left(I_{b-}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt, \;\; x < b \tag{2.18}$$

α. *mertebeden kesirli integraller olarak tanımlanır. Bazen bu integrallere, sırasıyla, sol-taraflı ve sağ-taraflı kesirli integraller de denir.* (2.17) *ve* (2.18) *integrallerinin için kabul edilen isim Riemann-Liouville kesirli integralleridir (Samko et al. 1993).*

Kesirli integral, Abel integral denklemi göz önüne alınarak inşa edilmiştir. Genellikle, sol-taraflı kesirli integrasyon daha fazla kullanılmaktadır. (2.8) ifadesinden görülebileceği üzere, $f_{\alpha}(x) = \left(I_{a+}^{\alpha}f\right)(x)$ sağlanır.

(2.17) ve (2.18) kesirli integralleri, $L^1(a,b)$ uzayında, hemen hemen her yerde mevcut $\varphi(x)$ fonksiyonları için tanımlanmıştır.

Q operatörünün tanımı, $(Q\varphi)(x) = \varphi(a+b-x)$ şeklinde verilsin. I_{a+}^{α} ve I_{b-}^{α} operatörleri arasında

$$QI_{a+}^{\alpha} = I_{b-}^{\alpha}Q, \;\; QI_{b-}^{\alpha} = I_{a+}^{\alpha}Q \tag{2.19}$$

şeklinde basit bir bağıntı vardır.

Teorem 2.3 *Eğer* $p \neq 1, q \neq 1$ *ve* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \alpha$ *için*

$$\varphi(x) \in L^p, \quad \psi(x) \in L^q, \quad \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} \leq 1 + \alpha, \quad p \geq 1, \quad q \geq 1$$

ise,

$$\int_a^b \varphi(x) \left(I_{a+}^{\alpha} \psi \right)(x)\, dx = \int_a^b \psi(x) \left(I_{b-}^{\alpha} \varphi \right)(x)\, dx \tag{2.20}$$

bağıntısı gerçeklenir. Bu bağıntıya kesirli integral için kısmi integrasyon formülü denir (Samko et al. 1993).

Teorem 2.4 *Kesirli integral*

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} \varphi = I_{a+}^{\alpha+\beta} \varphi, \quad I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} \varphi = I_{b-}^{\alpha+\beta} \varphi, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \tag{2.21}$$

özelliğini sağlar.

İspat. (2.21) ile verilen eşitlikler, $\varphi(t) \in C([a,b])$ ve $\varphi(t) \in L^1(a,b)$ olacak şekilde her t noktası için gerçeklenir. Eğer $\alpha + \beta \geq 1$ ise, $\varphi(t) \in L^1(a,b)$ şartını sağlayan her nokta için (2.21) ile verilen eşitlikler sağlanır. (2.21) ifadesindeki ilk eşitliğin sağlandığını gösterelim.

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \int_a^x \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}}$$

olup Fubini Teoremi kullanılarak integrasyon sınırları değiştirilirse ve $t = \tau + s(x - \tau)$ seçilirse

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} \varphi = \frac{\beta(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{(x-t)^{1-\alpha-\beta}}$$

bulunur. Bu da (2.21) ile verilen ilk eşitliğin sağ tarafına denktir. İkinci eşitlik de, benzer biçimde gösterilebilir. ■

(2.21) sonucuna kesirli integrasyonun yarıgrup özelliği denir. Benzer bir özellik, sonraki kısımlarda kesirli türev için de göz önüne alınmıştır.

2.2 RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ TÜREVLERİ

Kesirli türev, kesirli integrasyonun ters operatörü olarak tanımlanır. (2.1) Abel integral denklemi ve (2.6) göz önüne alınarak aşağıdaki tanım verilmiştir.

Tanım 2.3 *$[a,b]$ aralığında tanımlı $f(x)$ fonksiyonları için, $0<\alpha<1$ olmak üzere*

$$\left(D_{a+}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_{a}^{x}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}, \tag{2.22}$$

$$\left(D_{b-}^{\alpha}f\right)(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{b}\frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}} \tag{2.23}$$

sırasıyla sol-taraflı ve sağ-taraflı α. mertebeden kesirli türev olarak adlandırılır. (2.22) *ve* (2.23) *kesirli türevlerine genellikle Riemann-Liouville türevleri denir (Samko et al. 1993).*

Dikkat edilmesi gerekir ki, kesirli integraller her $\alpha>0$ sayısı için tanımlanırken, kesirli türevler $0<\alpha<1$ için tanımlanmıştır. $\alpha\geq 1$ durumuna geçmeden önce, Lemma 2.5 ile, kesirli türevlerin varlığı için bir gerek koşul ifadesi verilmiştir.

Lemma 2.5 *$f(x)\in AC([a,b])$ ve $0<\alpha<1$ olmak üzere, $D_{a+}^{\alpha}f$ ile $D_{b-}^{\alpha}f$ kesirli türevleri hemen hemen her yerde mevcuttur. Ayrıca $1\leq r<\frac{1}{\alpha}$ için, $D_{a+}^{\alpha}f, D_{b-}^{\alpha}f\in L^{r}(a,b)$ dir ve*

$$D_{a+}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}}+\int\limits_{a}^{x}\frac{f'(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}\right], \tag{2.24}$$

$$D_{b-}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(b)}{(b-x)^{\alpha}}-\int\limits_{x}^{b}\frac{f'(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}}\right] \tag{2.25}$$

dır (Samko et al. 1993).

İspat. Bu lemmada öne sürülen ifade Lemma 2.2'nin sonucu gereğidir, $1\leq r<\frac{1}{\alpha}$ için $D_{a+}^{\alpha}f, D_{b-}^{\alpha}f\in L^{r}(a,b)$ koşulu ise, (2.24) ve (2.25) eşitliklerinden elde edilir. ■

Uyarı 2.1 *Klasik anlamda türev için bir sabitin rolü ne ise, $D_{a+}^{\alpha}f$ kesirli türevi için, $(x-a)^{\alpha-1}$ fonksiyonunun rolü aynıdır.*

Aşağıda, $\alpha\geq 1$ mertebeden kesirli türevler incelenmiştir. α sayısının tamsayı kısmı $[\alpha]$ ile ve kesirli kısmı $\{\alpha\}$ ile gösterilmiştir, öyle ki bu gösterimde $0\leq\{\alpha\}<1$ ve

$$\alpha=[\alpha]+\{\alpha\} \tag{2.26}$$

şeklindedir. Eğer α bir tamsayı ise, α. mertebeden Riemann-Liouville türevi, klasik anlamda türev biçiminde göz önüne alınmıştır:

$$D_{a+}^{\alpha}=\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, D_{b-}^{\alpha}=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \quad \alpha=1,2,3,... \tag{2.27}$$

Eğer α bir tamsayı değil ise, $D^{\alpha}_{a+}f, D^{\alpha}_{b-}f$ aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$D^{\alpha}_{a+}f = \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D^{\{\alpha\}}_{a+} f = \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I^{1-\{\alpha\}}_{a+} f, \tag{2.28}$$

$$D^{\alpha}_{b-}f = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D^{\{\alpha\}}_{b-} f = \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I^{1-\{\alpha\}}_{b-} f. \tag{2.29}$$

Yani, $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$ ve $n = [\alpha] + 1$ için, (2.28) ve (2.29) eşitlikleri, sırasıyla,

$$D^{\alpha}_{a+}f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \int_{a}^{x} \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \tag{2.30}$$

$$D^{\alpha}_{b-}f = \frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \int_{x}^{b} \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \tag{2.31}$$

biçiminde ifade edilir. Ayrıca (2.7), (2.22), (2.30) tanımları göz önüne alınarak

$$D^{\alpha}_{a+}f = I^{-\alpha}_{a+}f = \left(I^{\alpha}_{a+}\right)^{-1} f, \ \ \alpha \geq 0 \tag{2.32}$$

gösterimleri kullanılmıştır, benzer yorum $D^{\alpha}_{b-}f = I^{-\alpha}_{b-}f$ eşitliği için de yapılabilir.
(2.22) ve (2.23) türevlerinin varlığı için bir gerek koşul,

$$\int_{a}^{x} \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\{\alpha\}}} \in AC^{[\alpha]}([a,b])$$

şeklindedir. Bu koşul ancak $f(x) \in AC^{[\alpha]}([a,b])$ olduğu durumda sağlanır.
α kompleks sayı olarak verildiğinde kesirli integral ve kesirli türev tanımları aşağıdaki gibidir:

Tanım 2.4 *$-\infty < a < b < \infty$ için, $[a,b]$ $\mathbb{R}$ ekseni üzerinde sonlu bir aralık, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) \geqq 0$ olsun. α. mertebeden $I^{\alpha}_{a+}f$, $I^{\alpha}_{b-}f$ Riemann-Liouville kesirli türevleri, sırasıyla,*

$$\left(I^{\alpha}_{a+}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \ \ x > a, \tag{2.33}$$

$$\left(I^{\alpha}_{b-}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{b} \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \ \ x < b \tag{2.34}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.5 $\operatorname{Re}(\alpha) \geqq 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$ *olmak üzere,* $D_{a+}^{\alpha} y$ *ve* $D_{b-}^{\alpha} y$, α. *mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevleri, sırasıyla,*

$$\begin{aligned} \left(D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \left(I_{a+}^{n-\alpha} y\right)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \int_{a}^{x} \frac{y(t)\, dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad x > a \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} \left(D_{b-}^{\alpha} y\right)(x) &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^{n} \left(I_{b-}^{n-\alpha} y\right)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{n} \int_{x}^{b} \frac{y(t)\, dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad x < b \end{aligned} \tag{2.36}$$

şeklindedir, burada $[\operatorname{Re}(\alpha)]$, $\operatorname{Re}(\alpha)$ *nın tamsayı kısmını belirtir ve* $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ *şeklindedir. (Bu iki eşitlik,* (2.30) *ve* (2.31) *e denktir.)*

Özel olarak, $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\left(D_{a+}^{0} y\right)(x) = \left(D_{b-}^{0} y\right)(x) = y(x); \tag{2.37}$$

$$\left(D_{a+}^{n} y\right)(x) = y^{(n)}(x), \tag{2.38}$$

ve

$$\left(D_{b-}^{n} y\right)(x) = (-1)^{n} y^{(n)}(x) \tag{2.39}$$

dir, burada $y^{(n)}(x)$ n. mertebeden klasik anlamda türevdir.

Eğer $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$ ise,

$$\left(D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{a}^{x} \frac{y(t)\, dt}{(x-t)^{\alpha-[\operatorname{Re}(\alpha)]}}, \quad x > a, \tag{2.40}$$

ve

$$\left(D_{b-}^{\alpha} y\right)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{x}^{b} \frac{y(t)\, dt}{(t-x)^{\alpha-[\operatorname{Re}(\alpha)]}}, \quad x < b. \tag{2.41}$$

yazılır.

2.3 CAPUTO KESİRLİ TÜREVLERİ

Tanım 2.6 *$[a,b]$, $\mathbb{R}$ üzerinde sonlu bir aralık, $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\operatorname{Re}(\alpha) \geqq 0)$ olsun. $[a,b]$ aralığında α. mertebeden $\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)$ ve $\left({}^{C}D_{b-}^{\alpha}y\right)(x)$ kesirli türevleri, sırasıyla,*

$$\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) := \left(D_{a+}^{\alpha}\left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^{k}\right]\right)(x) \tag{2.42}$$

ve

$$\left({}^{C}D_{b-}^{\alpha}y\right)(x) := \left(D_{b-}^{\alpha}\left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^{k}\right]\right)(x) \tag{2.43}$$

olarak tanımlanır, burada $\left(D_{a+}^{\alpha}[y(t)]\right)(x) \equiv \left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)$ ve $\left(D_{b-}^{\alpha}[y(t)]\right)(x) \equiv \left(D_{b-}^{\alpha}y\right)(x)$, sırasıyla, (2.35) *ve* (2.36) *ile verilen α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevleridir. Ayrıca*

$$\alpha \notin \mathbb{N}_0 \text{ için } n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1, \text{ ve } \alpha \in \mathbb{N}_0 \text{ için } n = \alpha \tag{2.44}$$

dır. (2.42) *ve* (2.43) *türevlerine, sırasıyla, sol-taraflı ve sağ-taraflı α. mertebeden Caputo kesirli türevleri denir.*

Özel olarak, $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$ durumunda, (2.42) ve (2.43) bağıntıları, sırasıyla, aşağıdaki biçimdedir:

$$\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha}[y(t) - y(a)]\right)(x), \tag{2.45}$$

$$\left({}^{C}D_{b-}^{\alpha}y\right)(x) = \left(D_{b-}^{\alpha}[y(t) - y(a)]\right)(x). \tag{2.46}$$

$\alpha \notin \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) \geqq 0$ olmak üzere, $y(x)$ fonksiyonu için eğer $\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)$ ve $\left({}^{C}D_{b-}^{\alpha}y\right)(x)$ α. mertebeden Caputo kesirli türevleri ile $\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)$ ve $\left(D_{b-}^{\alpha}y\right)(x)$ Riemann-Liouville kesirli türevleri mevcut ise, (2.37) – (2.39) gereği bu türevler arasında aşağıdaki bağıntılar sağlanır:

$$\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}, \quad n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1, \tag{2.47}$$

$$\left({}^{C}D_{b-}^{\alpha}y\right)(x) = \left(D_{b-}^{\alpha}y\right)(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(b-x)^{k-\alpha}, \quad n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1. \tag{2.48}$$

Özel olarak, $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$ durumunda ise,

$$\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) - \frac{y(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} \tag{2.49}$$

$$\left({}^{C}D_{b-}^{\alpha}y\right)(x)=\left(D_{b-}^{\alpha}y\right)(x)-\frac{y(b)}{\Gamma(1-\alpha)}(b-t)^{-\alpha} \tag{2.50}$$

elde edilir.

Aşağıda, $\alpha\notin\mathbb{N}_0$ için, (2.42) ve (2.43) Caputo kesirli türevleri ile; (2.35) ve (2.36) Riemann-Liouville kesirli türevlerinin birbirine eşit olduğu durumlar verilmiştir:

1) Eğer $y(a)=y'(a)=...=y^{(n-1)}(a)=0$ ve $n=[\mathrm{Re}(\alpha)]+1$ ise,

$$\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x), \tag{2.51}$$

2) Eğer $y(b)=y'(b)=...=y^{(n-1)}(b)=0$ ve $n=[\mathrm{Re}(\alpha)]+1$ ise,

$$\left({}^{C}D_{b-}^{\alpha}y\right)(x)=\left(D_{b-}^{\alpha}y\right)(x), \tag{2.52}$$

3) $0<\mathrm{Re}(\alpha)<1$ durumunda iken,

i) $y(a)=0$ ise,

$$\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x), \tag{2.53}$$

ii) $y(b)=0$ ise,

$$\left({}^{C}D_{b-}^{\alpha}y\right)(x)=\left(D_{b-}^{\alpha}y\right)(x), \tag{2.54}$$

4) Eğer $\alpha=n\in\mathbb{N}_0$ ise, $y^{(n)}(x)$ n. mertebeden klasik anlamda türev belirtmek üzere,

$$\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=y^{(n)}(x) \text{ ve } \left({}^{C}D_{b-}^{\alpha}y\right)(x)=(-1)^{n}y^{(n)}(x). \tag{2.55}$$

$\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)$ ve $\left({}^{C}D_{b-}^{\alpha}y\right)(x)$ Caputo kesirli türevleri, (2.42) ve (2.43) eşitliklerinden görülebileceği gibi, Riemann-Liouville kesirli türevleri kullanılarak tanımlanmıştır. Yani, $y(x)$ fonksiyonunun Caputo kesirli türevinin tanımlanabilmesi için Riemann-Liouville kesirli türevinin mevcut olması gerekmektedir. Bu sebeple, özel olarak $y(x)$ fonksiyonları, $AC^{n}[a,b]$ mutlak sürekli fonksiyonlar uzayından olup aşağıdaki teorem verilmiştir:

Teorem 2.6 $\mathrm{Re}(\alpha)\geqq 0$ *ve* n *sayısının* (2.44) *ifadesini sağlayacak biçimde seçildiğini kabul edelim. Eğer* $y(x)\in AC^{n}[a,b]$ *ise, o takdirde* $\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)$ *ve* $\left({}^{C}D_{b-}^{\alpha}y\right)(x)$ *Caputo kesirli türevleri,* $[a,b]$ *aralığında hemen hemen her yerde mevcuttur.*

1) Eğer $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ ise, $\left({}^C D_{a+}^{\alpha} y\right)(x)$ ve $\left({}^C D_{b-}^{\alpha} y\right)(x)$ türevleri, sırasıyla,

$$\left({}^C D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{y^{(n)}(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} =: \left(I_{a+}^{n-\alpha} D^n y\right)(x) \tag{2.56}$$

ve

$$\left({}^C D_{b-}^{\alpha} y\right)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_x^b \frac{y^{(n)}(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} =: \left(I_{b-}^{n-\alpha} D^n y\right)(x) \tag{2.57}$$

olup burada $D = \frac{d}{dx}$ ve $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$ dir,

2) $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$ ve $y(x) \in AC[a,b]$ iken, sırasıyla, aşağıda verildiği gibidir:

$$\left({}^C D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{y'(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}} =: \left(I_{a+}^{1-\alpha} D y\right)(x), \tag{2.58}$$

$$\left({}^C D_{b-}^{\alpha} y\right)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_x^b \frac{y'(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}} =: -\left(I_{b-}^{1-\alpha} D y\right)(x), \tag{2.59}$$

3) Eğer $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ ise, $\left({}^C D_{a+}^{\alpha} y\right)(x)$ ve $\left({}^C D_{b-}^{\alpha} y\right)(x)$ türevleri, sırasıyla, (2.3.14) ile verildiği gibidir. $n = 0$ durumunda ise,

$$\left({}^C D_{a+}^{0} y\right)(x) = \left({}^C D_{b-}^{0} y\right)(x) = y(x) \tag{2.60}$$

şeklindedir (Kilbas et al. 2006).

BÖLÜM 3

KESİRLİ DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BİR CARLEMAN DEĞERLENDİRMESİ

Eğer bir ters problem, kötü konulmuş olmasına rağmen, problemin çözümler sınıfı, bir sınırlı küme içine kısıtlanabiliyorsa; söz konusu problemin koşullu kararlılık değerlendirmesi ispat edilebilir. Bu da kararlılığın elde edilebilmesini garantiler. Carleman değerlendirmesi, koşullu kararlılığın ispatı için kullanılan bir yöntemdir ve kısmi diferensiyel denklemin çözümü için büyük parametre içeren bir L^2-ağırlıklı değerlendirmedir (Yamamoto 2009). Bu tür bir değerlendirme, ilk olarak Torsten Carleman (1939) tarafından, iki boyutlu bir eliptik denklem için Cauchy probleminin tekliğini ispat etmek için kullanılmıştır. O zamandan beri Carleman değerlendirmesine ve uygulamalarına oldukça büyük bir ilgi duyulmuştur. Daha sonra Hörmander (1963, 1985) tarafından keyfi boyutta diferensiyel operatörler sınıfına genişletilmiş ve sistematikleştirilmiştir. Bu konuda yapılan önemli çalışmalar, Egerov (1986), Isakov (1990, 1993, 1998), Tataru (1996) şeklindedir. Özellikle son yirmi yılda, farklı yazarlar tarafından tarafından çok çeşitli Carleman değerlendirmeleri elde edilmiştir. Bu metodun ters problemlere uygulanması ise, Bukhgeim and Klibanov (1981) tarafından gerçekleştirilmiştir. Kesirli difüzyon denklemleri göz önüne alınırken genellikle düzensiz difüzyon incelenir. Hatano and Hatano (1998) yaptığı çalışma, sürekli zamanda yapılan rastgele yürüyüş sırasında, bekleme zamanı fonksiyonunun bir kuvvet yasası davranışını göstermesiyle kesirli difüzyon denklemine olan ilgiyi arttırmıştır. Son on yılda, zamana bağlı Caputo kesirli türevi içeren kesirli difüzyon denklemi yoğun olarak çalışılmıştır. Cheng *et al* (2009), Caputo türevinin mertebesi olan α nın ve difüzyon katsayısının belirlenmesini incelemiştir. Xu et al. (2011), $\alpha = 1/2$ iken zamana bağlı kesirli difüzyon denklemi için bir Carleman değerlendirmesi elde etmiştir. Yamamoto and Zhang (2012) Carleman değerlendirmesini kullanarak $\alpha = 1/2$ iken, sıfırıncı mertebeden türevli terimin katsayısı belirlenmesi probleminin koşullu kararlılığını ispatlamıştır (Yamamoto and Zhang 2012). Jin and Rundell (2012), emilim katsayısının elde edilmesi göz önüne alınmıştır.

Bu bölüm Xu et al. (2011) esas alınarak hazırlanmıştır. Kesirli difüzyon denklemi içeren problem için bir Carleman değerlendirmesi ve ispatı verilmiştir. Bu kısımdan itibaren, kesirli mertebeden türev olarak sadece Caputo kesirli türevi kullanılmıştır. Türevi alınacak fonksiyon çok değişkenli olup, hangi bağımsız değişkene göre türev alındığının karışıklık yaratmaması için, $\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)$ türevi ∂_x^{α} şeklinde gösterilmiştir.

3.1 PROBLEMİN İFADESİ

Tanım 3.1 Ω, $\mathbb{R}^d$ *içinde sınırlı bir bölge ve yeterince düzgün* $\partial\Omega$ *sınırına sahip olsun. L düzgün simetrik eliptik operatör; F, $\Omega \times (0,T)$ üzerinde bilinen bir fonksiyon ve T sabitlenmiş değer olmak üzere,*

$$\partial_t^{\alpha} u(x,t) = (Lu)(x,t) + F(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T), \quad 0 < \alpha \leq 2 \tag{3.1}$$

denklemi $0 < \alpha < 1$ durumunda kesirli difüzyon denklemi, $1 < \alpha < 2$ durumunda ise kesirli difüzyon-dalga ya da kesirli dalga denklemi adını alır. $\alpha = 1$ iken (3.1) denklemi parabolik, $\alpha = 2$ iken ise hiperbolik denklem belirtir, (Sakamoto and Yamamoto 2011).

Problemin tanım bölgesi,

$$Q = \{(x,t); 0 < x < l, \delta_0 < t < T\}, \quad \Omega = (0,l)$$

şeklindedir. Burada $\delta_0 > 0$ dır.

$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, f \in C^1\left([0,T]; L^2(0,l)\right)$ olsun. Kesirli difüzyon denklemi içeren başlangıç-sınır değer problemi aşağıda verilmiştir:

$$\left(\partial_t^{\frac{1}{2}} - \partial_x^2\right) u = f(x,t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T) \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in (0,l) \tag{3.3}$$

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t), \quad t \in (0,T) \tag{3.4}$$

$(3.2)-(3.4)$ probleminin Carleman değerlendirmesi, Caputo kesirli türevi içeren esas terim için değil, tamsayı mertebeden klasik türev içeren bir esas terim için ifade edilmiştir. Bu amaçla, Caputo kesirli türevden klasik türeve geçiş yapmayı sağlayan iki adet lemma verilmiştir:

Lemma 3.1 $0 < \alpha < 1$ *için* $\varphi(0) = 0$ *şartını sağlayan* $\varphi \in AC([0,T])$ *olsun. Bu durumda* $\partial_t^\alpha \varphi(t)$, $[0,T]$ *aralığında hemen hemen hemen her yerde mevcuttur. Ayrıca,* $1 \leq r < \dfrac{1}{\alpha}$ *için* $\partial_t^\alpha \varphi \in L^r(a,b)$ *ve*

$$\partial_t^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\varphi(\eta)}{(t-\eta)^\alpha} d\eta \tag{3.5}$$

dır (Xu et al. 2011).

İspat. Lemma 2.5'te, özel olarak $a = 0, b = T$ ve $\varphi(a) = 0$ seçilirse, (2.24) eşitliği gereği ispat tamamlanır. ■

Lemma 3.2 *Eğer* $\varphi \in AC([0,T])$ *ve* $\varphi(0) = \partial_t^\beta \varphi(0) = 0$ *ise, o takdirde* $(0,T)$ *aralığında*

$$\partial_t^\alpha \partial_t^\beta \varphi = \partial_t^{\alpha+\beta} \varphi, \quad 0 < \alpha + \beta \leq 1, \quad \alpha, \beta > 0 \tag{3.6}$$

dır (Xu et al. 2011).

İspat. Caputo kesirli türev tanımından ve Lemma 3.1'den

$$\begin{aligned}
\partial_t^\alpha \partial_t^\beta \varphi(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\partial_t^\beta \varphi(\eta)}{(t-\eta)^\alpha} d\eta \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \left[\int_0^\eta \frac{\varphi'(\tau)}{(\eta-\tau)^\beta} d\tau \right] \frac{1}{(t-\eta)^\alpha} d\eta \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \left[\int_0^\eta \frac{\varphi'(\tau)}{(\eta-\tau)^\beta} d\tau \right] (t-\eta)^{-\alpha} d\eta \\
&\equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial I}{\partial t}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. Beta fonksiyonunun (1.4) özelliğinden, I eşitliğinde integrallerin sırası değiştirilirse

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^t \left[\int_0^\eta \frac{\varphi'(\tau)}{(\eta-\tau)^\beta} d\tau \right] (t-\eta)^{-\alpha} d\eta \\
&= \int_0^t \int_0^\eta \frac{\varphi'(\tau)}{(\eta-\tau)^\beta} (t-\eta)^{-\alpha} d\tau d\eta \\
&= \int_0^t \int_0^\eta \varphi'(\tau) (t-\eta)^{-\alpha} (\eta-\tau)^{-\beta} d\tau d\eta \\
&= B(1-\alpha, 1-\beta) \int_0^t \varphi'(\tau) (t-\tau)^{1-(\alpha+\beta)} d\tau
\end{aligned} \tag{3.8}$$

bulunur. Beta fonksiyonunun (1.3) ile verilen tanımı gereği

$$
\begin{aligned}
B(1-\alpha,1-\beta) &= \int\limits_0^1 (1-u)^{-\alpha}\, u^{-\beta} du \\
&= \int\limits_0^1 u^{-\alpha}\,(1-u)^{-\beta}\, du
\end{aligned}
$$

olduğundan, (3.8) ifadesi (3.7) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\alpha+\beta<1$ durumunda, Gamma fonksiyonu (1.2) özelliği ve Lemma 3.1 gereği aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$
\begin{aligned}
\partial_t^{\alpha}\partial_t^{\beta}\varphi(t) &= \frac{B(1-\alpha,1-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int\limits_0^t \varphi'(\tau)\,(t-\tau)^{1-(\alpha+\beta)}\, d\tau\right] \\
&= \frac{\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int\limits_0^t \varphi'(\tau)\,(t-\tau)^{1-(\alpha+\beta)}\, d\tau\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha-\beta)}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int\limits_0^t \frac{\varphi'(\tau)\,(t-\tau)}{(t-\tau)^{(\alpha+\beta)}} d\tau\right] \\
&= \frac{1}{(1-\alpha-\beta)\Gamma(1-\alpha-\beta)}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int\limits_0^t \frac{(1-\alpha-\beta)\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{(\alpha+\beta)}} d\tau\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha-\beta)}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int\limits_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{(\alpha+\beta)}} d\tau\right] \\
&= \partial_t^{\alpha+\beta}\varphi(t).
\end{aligned}
$$

Eğer $\alpha+\beta=1$ ise, hipotez gereği $\varphi(0)=0$ olduğundan, (3.8) eşitliği

$$
\begin{aligned}
I &= B(1-\alpha,1-\beta)\int\limits_0^t \varphi'(\tau)\,(t-\tau)^{1-1}\, d\tau \\
&= B(1-\alpha,1-\beta)\int\limits_0^t \varphi'(\tau) d\tau \\
&= B(1-\alpha,1-\beta)\,(\varphi(t)-\varphi(0)) \\
&= B(1-\alpha,1-\beta)\varphi(t)
\end{aligned}
$$

halini alır. Böylece (3.7) ise,

$$
\begin{aligned}
\partial_t^{\alpha}\partial_t^{\beta}\varphi(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial I}{\partial t} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial}{\partial t}(B(1-\alpha,1-\beta)\varphi(t)) \\
&= \frac{B(1-\alpha,1-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\varphi'(t) \\
&= \frac{\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\varphi'(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha-\beta)}\varphi'(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1)}\varphi'(t) \\
&= \varphi'(t)
\end{aligned}
$$

biçiminde yazılır. Böylelikle ispat tamamlanır. ■

Şimdi ise, Lemma 3.1 ve Lemma 3.2 ile verilen koşulların $u(x,t)$ için sağlanıp sağlanmadığını araştırılmıştır:

(3.3) başlangıç koşulu ile $u(x,0)=0$ olduğu bilinmektedir. $\partial_t^{\frac{1}{2}}u(x,0)=0$ olması, Lemma 3.5'te uzay seçimi ile sağlanmıştır. Yani, $\partial_t^{\frac{1}{2}}\partial_t^{\frac{1}{2}}u=\partial_t u$ yazılabilir.

(3.2) denklemi dikkate alınırsa

$$
\begin{aligned}
\partial_t^{\frac{1}{2}}\left(\partial_t^{\frac{1}{2}}u(x,t)\right) &= \partial_t^{\frac{1}{2}}\left(\partial_x^2 u(x,t)+f(x,t)\right) \\
&= \partial_x^2\left(\partial_t^{\frac{1}{2}}u(x,t)\right)+\partial_t^{\frac{1}{2}}f(x,t) \\
&= \partial_x^2\left(\partial_x^2 u(x,t)+f(x,t)\right)+\partial_t^{\frac{1}{2}}f(x,t) \\
&= \partial_x^4 u(x,t)+\partial_x^2 f(x,t)+\partial_t^{\frac{1}{2}}f(x,t) \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

bulunur.

Elde edilen (3.9) sonucu, Lemma 3.2 gereği $\partial_t u$ türevine eşit olduğundan

$$\left(\partial_t-\partial_x^4\right)u(x,t)=\left(\partial_t^{\frac{1}{2}}+\partial_x^2\right)f(x,t) \qquad (3.10)$$

bulunur. Artık denklemin esas terimi $\left(\partial_t-\partial_x^4\right)u$ şeklinde olup Carleman değerlendirmesi bu esas terim için verilmiştir.

3.2 CARLEMAN DEĞERLENDİRMESİ

$$Q = \{(x,t); 0 < x < l, \delta_0 < t < T\}, \quad \Omega = (0,l)$$

bölgelerini göz önüne alalım, burada $\delta_0, \beta > 0$, $0 < t_0 < T$ dır. φ ağırlık fonksiyonu ve diğer yardımcı fonksiyonlar

$$\psi(x,t) = d(x) - \beta(t-t_0)^2, \quad \varphi(x,t) = e^{\lambda\psi}, \quad \mu(x) = \partial_x d$$

biçiminde tanımlanmıştır. $0 \leq x \leq l, 0 < t < T$ için

$$\partial_x d \neq 0, \quad \psi(x,t) > 0$$

olduğu kabul edilmiştir ve bu kabuller altında

$$\mu \neq 0, \quad \varphi > 1$$

olduğu garantilenmiştir.
Carleman değerlendirmesine geçmeden önce, ispat sırasında sıkça kullanılacak iki adet lemmaya ihtiyaç vardır.

Lemma 3.3 *Her $A, B \in \mathbb{R}$ için,*

$$(A-B)^2 \leq 2A^2 + 2B^2. \tag{3.11}$$

İspat. Her $A, B \in \mathbb{R}$ için $A^2 \geq 0$, $B^2 \geq 0$ ve her $A, B \in \mathbb{R}$ için, $A^2 + B^2 \in \mathbb{R}$ dir. Bu durumda, Binom açılımından yararlanarak,

$$\begin{aligned}
0 \leq (A+B)^2 \quad &\Rightarrow 0 \leq A^2 + 2AB + B^2 \\
&\Rightarrow 0 - 2AB \leq A^2 + 2AB + B^2 - 2AB \\
&\Rightarrow -2AB \leq A^2 + B^2 \\
&\Rightarrow -2AB + (A^2 + B^2) \leq A^2 + B^2 + (A^2 + B^2) \\
&\Rightarrow (A-B)^2 \leq 2A^2 + 2B^2
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Lemma 3.4 *Her $A, B \in \mathbb{R}$ için,*

$$(A+B)^2 \leq 2A^2 + 2B^2. \tag{3.12}$$

İspat. Her $A, B \in \mathbb{R}$ için $A^2 \geq 0,\ B^2 \geq 0$ ve her $A, B \in \mathbb{R}$ için, $A^2 - B^2 \in \mathbb{R}$ dir. Bu durumda, Binom açılımından

$$\begin{aligned}0 \leq (A-B)^2 \ &\Rightarrow 0 \leq A^2 - 2AB + B^2\\ &\Rightarrow 0 + 2AB \leq A^2 - 2AB + B^2 + 2AB\\ &\Rightarrow 2AB \leq A^2 + B^2\\ &\Rightarrow 2AB + (A^2 + B^2) \leq A^2 + B^2 + (A^2 + B^2)\\ &\Rightarrow (A+B)^2 \leq 2A^2 + 2B^2\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. ∎

Lemma 3.5 *Öyle bir $\lambda_0 > 0$ ve bir $s_0 > 0$ sayısı vardır ki, her $\lambda \geq \lambda_0$, $s \geq s_0$ ve $u \in C_0^\infty(Q)$ için,*

$$\begin{aligned}&\int_Q \left(\frac{1}{s\varphi}\left|\partial_t u\right|^2 + s\lambda^2\mu^2\varphi\left|\partial_x^3 u\right|^2 + s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 u\right|^2\right.\\ &\left. + s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left|\partial_x u\right|^2 + s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 u^2\right) e^{2s\varphi}dxdt\\ \leq\ & C\int_Q \left|\left(\partial_t - \partial_x^4\right)u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt \qquad (3.13)\end{aligned}$$

sağlanacak biçimde $C > 0$ sayısı vardır.

3.2.1 Carleman Değerlendirmesinin İspatı

Carleman değerlendirmesi ağırlıklı L^2-normu için yapılmıştır. İspat sırasında kısmi integrasyondan yararlanılmış olup burada s ile λ büyük parametredir.

$$\begin{aligned}F &= \left(\partial_t - \partial_x^4\right)u,\\ w &= e^{s\varphi}u, \qquad (3.14)\\ Pw &= e^{s\varphi}F = e^{s\varphi}\left(\partial_t - \partial_x^4\right)\left(e^{-s\varphi}w\right) \qquad (3.15)\end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. İlk olarak, Pw ifadesi hesaplamak gerekir. Bunun için, $e^{-s\varphi}w$ teriminin $t-ye$ göre birinci ve $x-e$ göre dördüncü mertebeden türevleri hesaplanmıştır. Bu hesaplama sırasında kullanılan bazı türevler aşağıdadır:

$$\begin{aligned}\partial_x\varphi &= \lambda\mu\varphi,\\ \partial_t\varphi &= -2\beta(t-t_0)\lambda\varphi,\\ \partial_t\mu &= 0.\end{aligned}$$

$e^{-s\varphi}w$ çarpımının $t-ye$ göre türevi aşağıdaki gibi hesaplanmış ve $e^{s\varphi}$ ile genişletilmiştir:

$$\begin{aligned}
\partial_t(e^{-s\varphi}w) &= -s\,(\partial_t\varphi)\,e^{-s\varphi}w + e^{-s\varphi}\partial_t w \\
&= -s\,(-2\beta(t-t_0)\lambda\varphi)\,e^{-s\varphi}w + e^{-s\varphi}\partial_t w \\
&= 2\lambda s\beta\,(t-t_0)\,\varphi e^{-s\varphi}w + e^{-s\varphi}\partial_t w,
\end{aligned}$$

$$e^{s\varphi}\partial_t(e^{-s\varphi}w) = 2\lambda s\beta\,(t-t_0)\,\varphi w + \partial_t w. \tag{3.16}$$

$e^{-s\varphi}w$ ifadesinin $x-e$ göre dördüncü mertebeden türevi ise,

$$\begin{aligned}
\partial_x^4(e^{-s\varphi}w) &= \partial_x^3(\partial_x(e^{-s\varphi}w)) \\
&= \partial_x^3(\partial_x(e^{-s\varphi})w + e^{-s\varphi}\partial_x w) \\
&= \partial_x^2\left(\partial_x^2(e^{-s\varphi})w + \partial_x(e^{-s\varphi})\partial_x w + \partial_x(e^{-s\varphi})\partial_x w + e^{-s\varphi}\partial_x^2 w\right) \\
&= \partial_x^2(\partial_x^2(e^{-s\varphi})w + 2\partial_x(e^{-s\varphi})\partial_x w + e^{-s\varphi}\partial_x^2 w) \\
&= \partial_x(\partial_x^3(e^{-s\varphi})w + \partial_x^2(e^{-s\varphi})\partial_x w + 2\partial_x^2(e^{-s\varphi})\partial_x w \\
&\quad +2\partial_x(e^{-s\varphi})\partial_x^2 w + \partial_x(e^{-s\varphi})\partial_x^2 w + e^{-s\varphi}\partial_x^3 w) \\
&= \partial_x\left(\partial_x^3(e^{-s\varphi})w + 3\partial_x^2(e^{-s\varphi})\partial_x w + 3\partial_x(e^{-s\varphi})\partial_x^2 w + e^{-s\varphi}\partial_x^3 w\right) \\
&= \partial_x^4(e^{-s\varphi})w + \partial_x^3(e^{-s\varphi})\partial_x w + 3\partial_x^3(e^{-s\varphi})\partial_x w + 3\partial_x^2(e^{-s\varphi})\partial_x^2 w \\
&\quad +3\partial_x^2(e^{-s\varphi})\partial_x^2 w + 3\partial_x(e^{-s\varphi})\partial_x^3 w + \partial_x(e^{-s\varphi})\partial_x^3 w + e^{-s\varphi}\partial_x^4 w \\
&= \partial_x^4(e^{-s\varphi})w + 4\partial_x^3(e^{-s\varphi})\partial_x w + 6\partial_x^2(e^{-s\varphi})\partial_x^2 w + 4\partial_x(e^{-s\varphi})\partial_x^3 w \\
&\quad +e^{-s\varphi}\partial_x^4 w
\end{aligned} \tag{3.17}$$

şeklinde bulunur. $e^{-s\varphi}$ fonksiyonunun, (3.17) ifadesinde mevcut türevleri hesaplanarak aşağıda verilen $(3.18)-(3.21)$ eşitlikleri elde edilmiştir:

$$\partial_x(e^{-s\varphi}) = -s\,(\partial_x\varphi)\,e^{-s\varphi} = -s(\lambda\mu\varphi)e^{-s\varphi}, \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x^2(e^{-s\varphi}) &= \partial_x(-s\lambda\mu\varphi e^{-s\varphi}) \\
&= -s\lambda(\mu_x\varphi e^{-s\varphi} + \mu\varphi_x e^{-s\varphi} + \mu\varphi(-s)\varphi_x e^{-s\varphi}) \\
&= -s\lambda(\mu_x\varphi e^{-s\varphi} + \mu(\lambda\mu\varphi)e^{-s\varphi} - s\mu\varphi(\lambda\mu\varphi)e^{-s\varphi}) \\
&= -s\lambda e^{-s\varphi}(\mu_x\varphi + \lambda\mu^2\varphi - s\lambda\mu^2\varphi^2) \\
&= s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 e^{-s\varphi} - s\lambda^2\mu^2\varphi e^{-s\varphi} - s\lambda\mu_x\varphi e^{-s\varphi} \\
&\equiv s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 e^{-s\varphi} + O(s\lambda^2\mu^2\varphi)e^{-s\varphi}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

(3.19) ifadesinde $O(s\lambda^2\mu^2\varphi) = -s\lambda^2\mu^2\varphi - s\lambda\mu_x\varphi$ dir, çünkü

$$\left|\frac{-s\lambda^2\mu^2\varphi - s\lambda\mu_x\varphi}{s\lambda^2\mu^2\varphi}\right| = \left|1 + \frac{\mu_x}{\lambda\mu^2}\right|$$

eşitliği, λ büyük parametre olduğundan sınırlıdır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\partial_x^3(e^{-s\varphi}) &= \partial_x(s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2e^{-s\varphi} - s\lambda^2\mu^2\varphi e^{-s\varphi} - s\lambda\mu_x\varphi e^{-s\varphi}) \\
&= s^2\lambda^2 2\mu\mu_x\varphi^2e^{-s\varphi} + s^2\lambda^2\mu^2 2\varphi\varphi_x e^{-s\varphi} + s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2(-s)\varphi_x e^{-s\varphi} \\
&\quad -s\lambda^2 2\mu\mu_x\varphi e^{-s\varphi} - s\lambda^2\mu^2\varphi_x e^{-s\varphi} - s\lambda^2\mu^2\varphi(-s)\varphi_x e^{-s\varphi} \\
&\quad -s\lambda\mu_{xx}\varphi e^{-s\varphi} - s\lambda\mu_x\varphi_x e^{-s\varphi} - s\lambda\mu_x\varphi(-s)\varphi_x e^{-s\varphi} \\
&= 2s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2e^{-s\varphi} + 2s^2\lambda^2\mu^2\varphi(\lambda\mu\varphi)e^{-s\varphi} - s^3\lambda^2\mu^2\varphi^2(\lambda\mu\varphi)e^{-s\varphi} \\
&\quad -2s\lambda^2\mu\mu_x\varphi e^{-s\varphi} - s\lambda^2\mu^2(\lambda\mu\varphi)e^{-s\varphi} + s^2\lambda^2\mu^2\varphi(\lambda\mu\varphi)e^{-s\varphi} \\
&\quad -s\lambda\mu_{xx}\varphi e^{-s\varphi} - s\lambda\mu_x(\lambda\mu\varphi)e^{-s\varphi} + s^2\lambda\mu_x\varphi(\lambda\mu\varphi)e^{-s\varphi} \\
&= 2s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2e^{-s\varphi} + 2s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2e^{-s\varphi} - s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3e^{-s\varphi} \\
&\quad -2s\lambda^2\mu\mu_x\varphi e^{-s\varphi} - s\lambda^3\mu^3\varphi e^{-s\varphi} + s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2e^{-s\varphi} \\
&\quad -s\lambda\mu_{xx}\varphi e^{-s\varphi} - s\lambda^2\mu_x\mu\varphi e^{-s\varphi} + s^2\lambda^2\mu_x\mu\varphi^2e^{-s\varphi} \\
&\equiv -s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3e^{-s\varphi} + O(s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2)e^{-s\varphi},
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x^4(e^{-s\varphi}) &= \partial_x(2s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2e^{-s\varphi} + 2s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2e^{-s\varphi} - s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3e^{-s\varphi} - 2s\lambda^2\mu\mu_x\varphi e^{-s\varphi} \\
&\qquad - s\lambda^3\mu^3\varphi e^{-s\varphi} + s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2e^{-s\varphi} - s\lambda\mu_{xx}\varphi e^{-s\varphi} - s\lambda^2\mu_x\mu\varphi e^{-s\varphi} \\
&\qquad + s^2\lambda^2\mu_x\mu\varphi^2e^{-s\varphi}) \\
&= 2s^2\lambda^2\mu_x\mu_x\varphi^2e^{-s\varphi} + 2s^2\lambda^2\mu\mu_{xx}\varphi^2e^{-s\varphi} + 2s^2\lambda^2\mu\mu_x 2\varphi\varphi_x e^{-s\varphi} \\
&\quad +2s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2(-s)(\lambda\mu\varphi)e^{-s\varphi} + 2s^2\lambda^3 3\mu^2\mu_x\varphi^2e^{-s\varphi} + 2s^2\lambda^3\mu^3 2\varphi\varphi_x e^{-s\varphi} \\
&\quad +2s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2(-s)(\lambda\mu\varphi)e^{-s\varphi} - s^3\lambda^3 3\mu^2\mu_x\varphi^3e^{-s\varphi} - s^3\lambda^3\mu^3 3\varphi^2\varphi_x e^{-s\varphi} \\
&\quad -s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3(-s)(\lambda\mu\varphi)e^{-s\varphi} - 2s\lambda^2\mu_x\mu_x\varphi e^{-s\varphi} - 2s\lambda^2\mu\mu_{xx}\varphi e^{-s\varphi} \\
&\quad -2s\lambda^2\mu\mu_x\varphi_x e^{-s\varphi} - 2s\lambda^2\mu\mu_x\varphi(-s)(\lambda\mu\varphi)e^{-s\varphi} - s\lambda^3 3\mu^2\mu_x\varphi e^{-s\varphi} \\
&\quad -s\lambda^3\mu^3\varphi_x e^{-s\varphi} - s\lambda^3\mu^3\varphi(-s)(\lambda\mu\varphi)e^{-s\varphi} + s^2\lambda^3 3\mu^2\mu_x\varphi^2e^{-s\varphi} \\
&\quad +s^2\lambda^3\mu^3 2\varphi\varphi_x e^{-s\varphi} + s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2(-s)(\lambda\mu\varphi)e^{-s\varphi} - s\lambda\mu_{xxx}\varphi e^{-s\varphi} \\
&\quad -s\lambda\mu_{xx}\varphi_x e^{-s\varphi} - s\lambda\mu_{xx}\varphi(-s)(\lambda\mu\varphi)e^{-s\varphi} - s\lambda^2\mu_{xx}\mu\varphi e^{-s\varphi} - s\lambda^2\mu_x\mu_x\varphi e^{-s\varphi} \\
&\quad -s\lambda^2\mu_x\mu\varphi_x e^{-s\varphi} - s\lambda^2\mu_x\mu\varphi(-s)(\lambda\mu\varphi)e^{-s\varphi} + s^2\lambda^2\mu_{xx}\mu\varphi^2e^{-s\varphi} \\
&\quad +s^2\lambda^2\mu_x\mu_x\varphi^2e^{-s\varphi} + s^2\lambda^2\mu_x\mu 2\varphi\varphi_x e^{-s\varphi} + s^2\lambda^2\mu_x\mu\varphi^2(-s)(\lambda\mu\varphi)e^{-s\varphi}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2s^2\lambda^2\mu_x^2\varphi^2e^{-s\varphi} + 2s^2\lambda^2\mu\mu_{xx}\varphi^2e^{-s\varphi} + 4s^2\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^2e^{-s\varphi} - 2s^3\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^3e^{-s\varphi} \\
&\quad +6s^2\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^2e^{-s\varphi} + 4s^2\lambda^4\mu^4\varphi^2e^{-s\varphi} - 2s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3e^{-s\varphi} - 3s^3\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^3e^{-s\varphi} \\
&\quad -3s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3e^{-s\varphi} + s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4e^{-s\varphi} - 2s\lambda^2\mu_x^2\varphi e^{-s\varphi} - 2s\lambda^2\mu\mu_{xx}\varphi e^{-s\varphi} \\
&\quad -2s\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi e^{-s\varphi} + 2s^2\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^2e^{-s\varphi} - 3s\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi e^{-s\varphi} - s\lambda^4\mu^4\varphi e^{-s\varphi} \\
&\quad +s^2\lambda^4\mu^4\varphi^2e^{-s\varphi} + 3s^2\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^2e^{-s\varphi} + 2s^2\lambda^4\mu^4\varphi^2e^{-s\varphi} - s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3e^{-s\varphi} \\
&\quad -s\lambda\mu_{xxx}\varphi e^{-s\varphi} - s\lambda^2\mu_{xx}\mu\varphi e^{-s\varphi} + s^2\lambda^2\mu_{xx}\mu\varphi^2e^{-s\varphi} - s\lambda^2\mu_{xx}\mu\varphi e^{-s\varphi} \\
&\quad -s\lambda^2\mu_x^2\varphi e^{-s\varphi} - s\lambda^3\mu_x\mu^2\varphi e^{-s\varphi} + s^2\lambda^3\mu_x\mu^2\varphi^2e^{-s\varphi} + s^2\lambda^2\mu_{xx}\mu\varphi^2e^{-s\varphi} \\
&\quad +s^2\lambda^2\mu_x^2\varphi^2e^{-s\varphi} + 2s^2\lambda^3\mu_x\mu^2\varphi^2e^{-s\varphi} - s^3\lambda^3\mu_x\mu^2\varphi^3e^{-s\varphi} \\
&\equiv s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4e^{-s\varphi} + O(s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3)e^{-s\varphi}. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

dır. Bulunan (3.18)−(3.21) türevleri (3.17) ifadesinde yerine yazılır ve $e^{s\varphi}$ ile genişletilirse

$$
\begin{aligned}
e^{s\varphi}\partial_x^4(e^{-s\varphi}w) &= e^{s\varphi}\partial_x^4(e^{-s\varphi})w + 4e^{s\varphi}\partial_x^3(e^{-s\varphi})\partial_x w + 6e^{s\varphi}\partial_x^2(e^{-s\varphi})\partial_x^2 w \\
&\quad +4e^{s\varphi}\partial_x(e^{-s\varphi})\partial_x^3 w + e^{s\varphi}e^{-s\varphi}\partial_x^4 w \\
&= e^{s\varphi}(2s^2\lambda^2\mu_x^2\varphi^2e^{-s\varphi} + 2s^2\lambda^2\mu\mu_{xx}\varphi^2e^{-s\varphi} + 4s^2\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^2e^{-s\varphi} \\
&\quad -2s^3\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^3e^{-s\varphi} + 6s^2\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^2e^{-s\varphi} + 4s^2\lambda^4\mu^4\varphi^2e^{-s\varphi} \\
&\quad -2s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3e^{-s\varphi} - 3s^3\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^3e^{-s\varphi} - 3s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3e^{-s\varphi} \\
&\quad +s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4e^{-s\varphi} - 2s\lambda^2\mu_x^2\varphi e^{-s\varphi} - 2s\lambda^2\mu\mu_{xx}\varphi e^{-s\varphi} - 2s\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi e^{-s\varphi} \\
&\quad +2s^2\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^2e^{-s\varphi} - 3s\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi e^{-s\varphi} - s\lambda^4\mu^4\varphi e^{-s\varphi} + s^2\lambda^4\mu^4\varphi^2e^{-s\varphi} \\
&\quad +3s^2\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^2e^{-s\varphi} + 2s^2\lambda^4\mu^4\varphi^2e^{-s\varphi} - s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3e^{-s\varphi} - s\lambda\mu_{xxx}\varphi e^{-s\varphi} \\
&\quad -s\lambda^2\mu_{xx}\mu\varphi e^{-s\varphi} + s^2\lambda^2\mu_{xx}\mu\varphi^2e^{-s\varphi} - s\lambda^2\mu_{xx}\mu\varphi e^{-s\varphi} - s\lambda^2\mu_x^2\varphi e^{-s\varphi} \\
&\quad -s\lambda^3\mu_x\mu^2\varphi e^{-s\varphi} + s^2\lambda^3\mu_x\mu^2\varphi^2e^{-s\varphi} + s^2\lambda^2\mu_{xx}\mu\varphi^2e^{-s\varphi} + s^2\lambda^2\mu_x^2\varphi^2e^{-s\varphi} \\
&\quad +2s^2\lambda^3\mu_x\mu^2\varphi^2e^{-s\varphi} - s^3\lambda^3\mu_x\mu^2\varphi^3e^{-s\varphi})w + 4e^{s\varphi}(2s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2e^{-s\varphi} \\
&\quad +2s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2e^{-s\varphi} - s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3e^{-s\varphi} - 2s\lambda^2\mu\mu_x\varphi e^{-s\varphi} - s\lambda^3\mu^3\varphi e^{-s\varphi} \\
&\quad +s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2e^{-s\varphi} - s\lambda\mu_{xx}\varphi e^{-s\varphi} - s\lambda^2\mu_x\mu\varphi e^{-s\varphi} + s^2\lambda^2\mu_x\mu\varphi^2e^{-s\varphi})\partial_x w \\
&\quad +6e^{s\varphi}(s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2e^{-s\varphi} - s\lambda^2\mu^2\varphi e^{-s\varphi} - s\lambda\mu_x\varphi e^{-s\varphi})\partial_x^2 w \\
&\quad +4e^{s\varphi}(-s(\lambda\mu\varphi)e^{-s\varphi})\partial_x^3 w + \partial_x^4 w
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4 + 2s^2\lambda^2\mu_x^2\varphi^2 + 2s^2\lambda^2\mu\mu_{xx}\varphi^2 + 4s^2\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^2 \\
&\quad -2s^3\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^3 + 6s^2\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^2 + 4s^2\lambda^4\mu^4\varphi^2 - 2s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 \\
&\quad -3s^3\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^3 - 3s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 + s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4 - 2s\lambda^2\mu_x^2\varphi - 2s\lambda^2\mu\mu_{xx}\varphi \\
&\quad -2s\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi + 2s^2\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^2 - 3s\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi - s\lambda^4\mu^4\varphi + s^2\lambda^4\mu^4\varphi^2 \\
&\quad +3s^2\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^2 + 2s^2\lambda^4\mu^4\varphi^2 - s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 - s\lambda\mu_{xxx}\varphi - s\lambda^2\mu_{xx}\mu\varphi \\
&\quad +s^2\lambda^2\mu_{xx}\mu\varphi^2 - s\lambda^2\mu_{xx}\mu\varphi + s^2\lambda^2\mu_{xx}\mu\varphi^2 + s^2\lambda^2\mu_x^2\varphi^2 + 2s^2\lambda^3\mu_x\mu^2\varphi^2 \\
&\quad -s^3\lambda^3\mu_x\mu^2\varphi^3)w + (8s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2 + 8s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 - 4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 \\
&\quad -8s\lambda^2\mu\mu_x\varphi - 4s\lambda^3\mu^3\varphi + 4s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 - 4s\lambda\mu_{xx}\varphi - 4s\lambda^2\mu_x\mu\varphi \\
&\quad +4s^2\lambda^2\mu_x\mu\varphi^2)\partial_x w + (6s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 - 6s\lambda^2\mu^2\varphi - 6s\lambda\mu_x\varphi)\partial_x^2 w \\
&\quad -4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w + \partial_x^4 w \\
&\equiv (s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4 + O(s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3))w - (4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 + O(s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2))\partial_x w \\
&\quad +(6s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 + O(s\lambda^2\mu^2\varphi))\partial_x^2 w - 4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w + \partial_x^4 w \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece (3.16) ve (3.22), (3.15) eşitliğinde yerine konulursa

$$
\begin{aligned}
Pw &= e^{s\varphi}\partial_t(e^{-s\varphi}w) - e^{s\varphi}\partial_x^4(e^{-s\varphi}w) \\
&= \partial_t w + 2\lambda s\beta\,(t-t_0)\,\varphi w - (s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4 + 2s^2\lambda^2\mu_x^2\varphi^2 + 2s^2\lambda^2\mu\mu_{xx}\varphi^2 \\
&\quad +4s^2\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^2 - 2s^3\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^3 + 6s^2\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^2 + 4s^2\lambda^4\mu^4\varphi^2 \\
&\quad -2s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 - 3s^3\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^3 - 3s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 + s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4 - 2s\lambda^2\mu_x^2\varphi \\
&\quad -2s\lambda^2\mu\mu_{xx}\varphi - 2s\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi + 2s^2\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^2 - 3s\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi - s\lambda^4\mu^4\varphi \\
&\quad +s^2\lambda^4\mu^4\varphi^2 e + 3s^2\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^2 + 2s^2\lambda^4\mu^4\varphi - s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 - s\lambda\mu_{xxx}\varphi \\
&\quad -s\lambda^2\mu_{xx}\mu\varphi + s^2\lambda^2\mu_{xx}\mu\varphi^2 - s\lambda^2\mu_{xx}\mu\varphi + s^2\lambda^2\mu_{xx}\mu\varphi^2 + s^2\lambda^2\mu_x^2\varphi^2 \\
&\quad +2s^2\lambda^3\mu_x\mu^2\varphi^2 - s^3\lambda^3\mu_x\mu^2\varphi^3)w - (8s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2 + 8s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 \\
&\quad -4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 - 8s\lambda^2\mu\mu_x\varphi - 4s\lambda^3\mu^3\varphi + 4s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 - 4s\lambda\mu_{xx}\varphi \\
&\quad -4s\lambda^2\mu_x\mu\varphi + 4s^2\lambda^2\mu_x\mu\varphi^2)\partial_x w - (6s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 - 6s\lambda^2\mu^2\varphi - 6s\lambda\mu_x\varphi)\partial_x^2 w \\
&\quad +4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w - \partial_x^4 w \\
&\equiv \partial_t w - (s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4 + O(s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3))w + (4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 + O(s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2))\partial_x w \\
&\quad -(6s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 + O(s\lambda^2\mu^2\varphi))\partial_x^2 w + 4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w - \partial_x^4 w \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

ifadesi bulunur.

Burada Pw, P_1w ve P_2w şeklinde iki parçaya ayrılmıştır. P_1w, mertebesi çift; P_2w ise, mertebesi tek olan türevleri içeren terimlerden oluşacak biçimde seçilmiştir.

$$\begin{aligned}
P_1w &= -\partial_x^4 w - (6s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 - 6s\lambda^2\mu^2\varphi - 6s\lambda\mu_x\varphi)\partial_x^2 w - (s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4 + 2s^2\lambda^2\mu_x^2\varphi^2 \\
&\quad +2s^2\lambda^2\mu\mu_{xx}\varphi^2 + 4s^2\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^2 - 2s^3\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^3 + 6s^2\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^2 + 4s^2\lambda^4\mu^4\varphi^2 \\
&\quad -2s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 - 3s^3\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^3 - 3s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 + s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4 - 2s\lambda^2\mu_x^2\varphi - 2s\lambda^2\mu\mu_{xx}\varphi \\
&\quad -2s\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi + 2s^2\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^2 - 3s\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi - s\lambda^4\mu^4\varphi + s^2\lambda^4\mu^4\varphi^2 + 3s^2\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^2 \\
&\quad +2s^2\lambda^4\mu^4\varphi^2 - s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 - s\lambda\mu_{xxx}\varphi - s\lambda^2\mu_{xx}\mu\varphi + s^2\lambda^2\mu_{xx}\mu\varphi^2 - s\lambda^2\mu_{xx}\mu\varphi \\
&\quad +s^2\lambda^2\mu_{xx}\mu\varphi^2 + s^2\lambda^2\mu_x^2\varphi^2 + 2s^2\lambda^3\mu_x\mu^2\varphi^2 - s^3\lambda^3\mu_x\mu^2\varphi^3 - 2\lambda s\beta\,(t-t_0)\,\varphi)w \\
&\equiv -\partial_x^4 w - (6s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 + O(s\lambda^2\mu^2\varphi))\partial_x^2 w \\
&\quad -(s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4 + O(s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3))w, \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2w &= \partial_t w + 4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w + (-8s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2 - 8s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 + 4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 \\
&\quad +8s\lambda^2\mu\mu_x\varphi + 4s\lambda^3\mu^3\varphi - 4s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 + 4s\lambda\mu_{xx}\varphi + 4s\lambda^2\mu_x\mu\varphi \\
&\quad -4s^2\lambda^2\mu_x\mu\varphi^2)\partial_x w \\
&\equiv \partial_t w + 4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w + (4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 + O(s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2))\partial_x w. \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

L^2 uzayında iç çarpım ve norm tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
(P_1w, P_2w)_{L^2(Q)} &\equiv (-\partial_x^4 w, \partial_t w)_{L^2(Q)} + (-\partial_x^4 w, 4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w)_{L^2(Q)} \\
&\quad +(-\partial_x^4 w, (4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 + O(s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2))\partial_x w)_{L^2(Q)} \\
&\quad +(-(6s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 + O(s\lambda^2\mu^2\varphi))\partial_x^2 w, \partial_t w)_{L^2(Q)} \\
&\quad +(-(6s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 + O(s\lambda^2\mu^2\varphi))\partial_x^2 w, 4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w)_{L^2(Q)} \\
&\quad +(-(6s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 + O(s\lambda^2\mu^2\varphi))\partial_x^2 w, \\
&\qquad (4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 + O(s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2))\partial_x w)_{L^2(Q)} \\
&\quad +(-(s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4 + O(s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3))w, \partial_t w)_{L^2(Q)} \\
&\quad +(-(s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4 + O(s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3))w, 4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w)_{L^2(Q)} \\
&\quad +(-(s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4 + O(s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3))w, (4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 + O(s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2))\partial_x w)_{L^2(Q)} \\
&= \sum_{k=1}^{9} J_k \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

(3.26) eşitliği ile verilen J_k terimleri, $1 \leq k \leq 9$ için hesaplanmıştır. İşlemler sırasında $j \in \mathbb{N}$ için $a_j(x,t), b_j(x,t)$ yeterince büyük s, λ için sınırlı fonksiyonları belirtmiştir. Ayrıca,

$u \in C_0^\infty(Q)$ olup $e^{s\varphi}u = w \in C_0^\infty(Q)$ dır ve bu eşitlik, bütün terimler elde edilirken dikkate alınmıştır.

(3.26) eşitliğindeki ilk iki terim olan J_1 ve J_2, aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$\begin{aligned}
J_1 &= (-\partial_x^4 w, \partial_t w)_{L^2(Q)} \\
&= -\int_Q (\partial_x^4 w)\partial_t w dxdt \\
&= -\int_0^T (\partial_t w)(\partial_x^3 w)\Big|_0^l dt + \int_Q (\partial_x^3 w)\left(\partial_x(\partial_t w)\right) dxdt \\
&= \int_Q (\partial_x^3 w)\left(\partial_x(\partial_t w)\right) dxdt \\
&= \int_0^T \partial_x(\partial_t w)(\partial_x^2 w)\Big|_0^l dt - \int_Q (\partial_x^2 w)\left(\partial_x^2(\partial_t w)\right) dxdt \\
&= -\int_Q (\partial_x^2 w)\left(\partial_t(\partial_x^2 w)\right) dxdt \\
&= -\frac{1}{2}\int_Q \partial_t(\left|\partial_x^2 w\right|^2) dxdt = -\frac{1}{2}\int_0^l \left|\partial_x^2 w\right|^2\Big|_0^T dx = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_2 &= (-\partial_x^4 w, 4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w)_{L^2(Q)} \\
&= -4\int_Q s\lambda(\partial_x^4 w)\mu\varphi\left(\partial_x^3 w\right) dxdt \\
&= -2\int_Q s\lambda\mu\varphi\left(\partial_x(\left|\partial_x^3 w\right|^2)\right) dxdt \\
&= -2\int_0^T s\lambda\,\mu\varphi\left|\partial_x^3 w\right|^2\Big|_0^l dt + 2\int_Q s\lambda\left(\mu_x\varphi + \mu\varphi_x\right)\left|\partial_x^3 w\right|^2 dxdt \\
&= 2\int_Q s\lambda\left(\mu_x\varphi + \mu(\lambda\mu\varphi)\right)\left|\partial_x^3 w\right|^2 dxdt \\
&= \int_Q 2s\lambda\mu_x\varphi\left|\partial_x^3 w\right|^2 dxdt + \int_Q 2s\lambda^2\mu^2\varphi\left|\partial_x^3 w\right|^2 dxdt \\
&= \int_Q 2s\lambda^2\mu^2\varphi\left(1 + \frac{a_1}{\lambda}\right)\left|\partial_x^3 w\right|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

J_3 teriminin hesabı sırasında, işlemlerde kolaylık sağlanması için, J_{31} terimi tanımlanmıştır.

$$
\begin{aligned}
J_3 &= (-\partial_x^4 w, (4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 + O(s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2))\partial_x w)_{L^2(Q)} \\
&= \int\limits_Q (-\partial_x^4 w)(4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 + a_1 s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2)\,(\partial_x w)\,dxdt \\
&= -4\int\limits_Q s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3\left(1+\frac{a_1}{s}\right)(\partial_x w)\left(\partial_x^4 w\right)dxdt \\
&= -4\int\limits_0^T s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3\left(1+\frac{a_1}{s}\right)(\partial_x w)\left(\partial_x^3 w\right)\Big|_0^l\,dt \\
&\quad +4\int\limits_Q s^3\lambda^3(3\mu^2\mu_x\varphi^3 + 3\mu^3\varphi^2\varphi_x)\left(1+\frac{a_1}{s}\right)(\partial_x w)\left(\partial_x^3 w\right)dxdt \\
&\quad +4\int\limits_Q s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3\left(1+\frac{a_1}{s}\right)(\partial_x^2 w)\left(\partial_x^3 w\right)dxdt + 4\int\limits_Q (\partial_x(a_1))\,s^2\lambda^3\mu^3\varphi^3(\partial_x w)\left(\partial_x^3 w\right)dxdt \\
&= 4\int\limits_Q s^3\lambda^3(3\mu^2\mu_x\varphi^3 + 3\mu^3\varphi^2(\lambda\mu\varphi))\left(1+\frac{a_1}{s}\right)(\partial_x w)\left(\partial_x^3 w\right)dxdt \\
&\quad +4\int\limits_Q s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3\left(1+\frac{a_1}{s}\right)(\partial_x^2 w)\left(\partial_x^3 w\right)dxdt + 4\int\limits_Q a_2 s^2\lambda^3\mu^3\varphi^3(\partial_x w)\left(\partial_x^3 w\right)dxdt \\
&= 12\int\limits_Q s^3\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^3\left(1+\frac{a_1}{s}\right)(\partial_x w)\partial_x^3 w\,dxdt + 12\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{a_1}{s}\right)(\partial_x w)\partial_x^3 w\,dxdt \\
&\quad +4\int\limits_Q s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3\left(1+\frac{a_1}{s}\right)(\partial_x^2 w)\left(\partial_x^3 w\right)dxdt + 4\int\limits_Q (\partial_x(a_1))\,s^2\lambda^3\mu^3\varphi^3(\partial_x w)\left(\partial_x^3 w\right)dxdt \\
&= 12\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)(\partial_x w)\left(\partial_x^3 w\right)dxdt \\
&\quad +4\int\limits_Q s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3\left(1+\frac{a_1}{s}\right)(\partial_x^2 w)\left(\partial_x^3 w\right)dxdt
\end{aligned}
$$

Son eşitlikte $J_{31} = 12\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)(\partial_x w)\left(\partial_x^3 w\right)dxdt$ olarak alınırsa

$$
\begin{aligned}
J_3 &\equiv J_{31} + 4\int\limits_Q s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3\left(1+\frac{a_1}{s}\right)(\partial_x^2 w)\left(\partial_x^3 w\right)dxdt \\
&= J_{31} + 2\int\limits_Q s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3\left(1+\frac{a_1}{s}\right)\left(\partial_x(\left|\partial_x^2 w\right|^2)\right)dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= J_{31} + 2\int_0^T s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3\left(1+\frac{a_1}{s}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2\Big|_0^l dt - 2\int_Q \left(\partial_x(a_1)\right) s^2\lambda^3\mu^3\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
&\quad -2\int_Q s^3\lambda^3(3\mu^2\mu_x\varphi^3 + 3\mu^3\varphi^2\varphi_x)\left(1+\frac{a_1}{s}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
&= J_{31} - 6\int_Q s^3\lambda^3(\mu^2\mu_x\varphi^3 + \mu^3\varphi^2\varphi_x)\left(1+\frac{a_1}{s}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
&\quad -2\int_Q \left(\partial_x(a_1)\right) s^2\lambda^3\mu^3\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
&= J_{31} - 6\int_Q s^3\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^3\left(1+\frac{a_1}{s}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt - 6\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{a_1}{s}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
&\quad -2\int_Q \left(\partial_x(a_1)\right) s^2\lambda^3\mu^3\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
&= J_{31} - 6\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt,
\end{aligned}
$$

yazılır. J_{31} terimi değerlendirilirse,

$$
\begin{aligned}
J_{31} &= \int_Q 12 s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)(\partial_x w)\left(\partial_x^3 w\right) dxdt \\
&= \int_0^T 12 s^3\lambda^4\left(\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)(\partial_x w)\right)\left(\partial_x^2 w\right)\Big|_0^l dt \\
&\quad -\int_Q 12 s^3\lambda^4\left(4\mu^3\mu_x\varphi^3(\partial_x w) + 3\mu^4\varphi^2\varphi_x(\partial_x w) + \mu^4\varphi^3(\partial_x^2 w)\right)\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)\left(\partial_x^2 w\right) dxdt \\
&\quad -\int_Q 12 s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(\frac{\partial_x(a_2)}{s}+\frac{\partial_x(a_3)}{\lambda}\right)(\partial_x w)\left(\partial_x^2 w\right) dxdt \\
&= -48\int_Q s^3\lambda^4\mu^3\mu_x\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)(\partial_x w)\left(\partial_x^2 w\right) dxdt \\
&\quad -36\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^2(\lambda\mu\varphi)\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)(\partial_x w)\left(\partial_x^2 w\right) dxdt \\
&\quad -12\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
&\quad -12\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(\frac{\partial_x(a_2)}{s}+\frac{\partial_x(a_3)}{\lambda}\right)(\partial_x w)\left(\partial_x^2 w\right) dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & -24\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^3\mu_x\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)\left(\partial_x(|\partial_x w|^2)\right)dxdt \\
& -18\int\limits_Q s^3\lambda^5\mu^5\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)\left(\partial_x(|\partial_x w|^2)\right)dxdt \\
& -12\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
& -6\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(\frac{\partial_x(a_2)}{s}+\frac{\partial_x(a_3)}{\lambda}\right)\left(\partial_x(|\partial_x w|^2)\right)dxdt \\
= & -18\int\limits_Q s^3\lambda^5\mu^5\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)\left(\partial_x(|\partial_x w|^2)\right)dxdt \\
& -12\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
= & -18\int\limits_0^T s^3\lambda^5\mu^5\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\Big|_0^l dt \\
& +18\int\limits_Q s^3\lambda^5\left((5\mu^4\mu_x\varphi^3+3\mu^5\varphi^2\varphi_x)\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)\right)|\partial_x w|^2 dxdt \\
& +18\int\limits_Q s^3\lambda^5\mu^5\varphi^3\left(\frac{\partial_x(a_2)}{s}+\frac{\partial_x(a_3)}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2 dxdt \\
& -12\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
= & \ 90\int\limits_Q s^3\lambda^5\mu^4\mu_x\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2 dxdt \\
& +54\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2 dxdt \\
& +18\int\limits_Q s^3\lambda^5\mu^5\varphi^3\left(\frac{\partial_x(a_2)}{s}+\frac{\partial_x(a_3)}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2 dxdt \\
& -12\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
= & \ 54\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2 dxdt \\
& -12\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir ve bu değerlendirme J_3 ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
J_3 &= 54\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
&\quad -12\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
&\quad -6\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt,
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer olarak, J_4 , J_{41} ve J_{42} şeklinde iki terimin toplamı halinde yazılmıştır.

$$\begin{aligned}
J_4 &= (-(6s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2+O(s\lambda^2\mu^2\varphi))\partial_x^2 w,\partial_t w)_{L^2(Q)} \\
&= -6\int\limits_Q (s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2+b_1 s\lambda^2\mu^2\varphi)(\partial_x^2 w)(\partial_t w)dxdt \\
&= -6\int\limits_Q s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_x^2 w)(\partial_t w)dxdt \\
&= -6\int\limits_0^T s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_t w)(\partial_x w)\Big|_0^l dt+6\int\limits_Q(\partial_x(b_1))s\lambda^2\mu^2\varphi^2(\partial_x w)(\partial_t w)dxdt \\
&\quad +6\int\limits_Q s^2\lambda^2(2\mu\mu_x\varphi^2(\partial_t w)+2\mu^2\varphi\varphi_x(\partial_t w)+\mu^2\varphi^2\partial_x(\partial_t w))\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_x w)dxdt \\
&= 12\int\limits_Q s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2(\partial_t w)\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_x w)dxdt+12\int\limits_Q s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2(\partial_t w)\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_x w)dxdt \\
&\quad +6\int\limits_Q s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\partial_x(\partial_t w)\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_x w)dxdt+6\int\limits_Q(\partial_x(b_1))s\lambda^2\mu^2\varphi^2(\partial_x w)(\partial_t w)dxdt \\
&= 12\int\limits_Q s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2(\partial_t w)\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x w)dxdt \\
&\quad +6\int\limits_Q s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2(\partial_x(\partial_t w))\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_x w)dxdt \\
&\equiv J_{41}+J_{42}.
\end{aligned}$$

(3.25) gereği $\partial_t w = P_2 w - 4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w-(4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3+O(s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2))\partial_x w$ dır ve bu eşitlik, J_{41} terimini hesaplarken dikkate alınıp $J_{41}^{(1)}, J_{41}^{(2)}, J_{41}^{(3)}$ şeklinde üç terim tanımlarsak,

$$J_{41}=12\int\limits_Q s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2(\partial_t w)\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x w)dxdt$$

$$
\begin{aligned}
&= 12\int\limits_Q (P_2 w - 4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w - (4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 + O(s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2)))s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2(\partial_x w) \\
&\quad \left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x w)\,dxdt \\
&= 12\int\limits_Q s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2(P_2 w)\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x w)dxdt \\
&\quad +12\int\limits_Q s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2(-4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w)\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x w)dxdt \\
&\quad +12\int\limits_Q s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2((-4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 + O(s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2))\partial_x w)\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x w)dxdt \\
&\equiv J_{41}^{(1)} + J_{41}^{(2)} + J_{41}^{(3)}
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılır. Her $A, B > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için,

$$
\left(\sqrt{\varepsilon}A - \frac{B}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow AB \leq \varepsilon A^2 + \frac{B^2}{4\varepsilon}
$$

olduğundan, yukarıdaki eşitsizlikte $A = P_2 w, B = 12s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x w)$ seçilip (1.7) göz önünde bulundurulursa, $J_{41}^{(1)}$ terimi için yapılan inceleme aşağıdadır:

$$
\begin{aligned}
\left|J_{41}^{(1)}\right| &= \left|12\int\limits_Q s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2(P_2 w)\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x w)dxdt\right| \\
&\leq 12\int\limits_Q \left|s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2(P_2 w)\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x w)\right| dxdt \\
&\leq \varepsilon\int\limits_Q |P_2 w|^2\, dxdt + C(\varepsilon)\int\limits_Q \left|s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2(\partial_x w)\right|^2 dxdt \\
&= \varepsilon\int\limits_Q |P_2 w|^2\, dxdt + C(\varepsilon)\int\limits_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\, |\partial_x w|^2\, dxdt.
\end{aligned}
$$

$J_{41}^{(2)}$ ve $J_{41}^{(3)}$ terimleri hesaplanarak aşağıdaki şekilde yazılır.

$$
J_{41}^{(2)} = -48\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x w)(\partial_x^3 w)dxdt
$$

$$
\begin{aligned}
= \; & -48\int_0^T s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x w)(\partial_x^2 w)\Big|_0^l dt \\
& +48\int_Q s^3\lambda^4\left(4\mu^3\mu_x\varphi^3(\partial_x w)+3\mu^4\varphi^2\varphi_x(\partial_x w)+\mu^4\varphi^3(\partial_x^2 w)\right)\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right) \\
& (\partial_x^2 w)dxdt+48\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(\frac{\partial_x(b_1)}{s}+\frac{\partial_x(b_2)}{\lambda}\right)(\partial_x w)(\partial_x^2 w)dxdt \\
= \; & 192\int_Q s^3\lambda^4\mu^3\mu_x\varphi^3(\partial_x w)\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x^2 w)dxdt \\
& +144\int_Q s^3\lambda^5\mu^5\varphi^3(\partial_x w)\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x^2 w)dxdt \\
& +48\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
& +48\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(\frac{\partial_x(b_1)}{s}+\frac{\partial_x(b_2)}{\lambda}\right)(\partial_x w)(\partial_x^2 w)dxdt \\
= \; & 144\int_Q s^3\lambda^5\mu^5\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x w)(\partial_x^2 w)dxdt \\
& +48\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
= \; & 72\int_Q s^3\lambda^5\mu^5\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x\left|\partial_x w\right|^2)dxdt \\
& +48\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
= \; & 72\int_0^T s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\Big|_0^l dt \\
& -72\int_Q s^3\lambda^5\left((5\mu^4\mu_x\varphi^3+3\mu^5\varphi^2\varphi_x)\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\right)|\partial_x w|^2 dxdt \\
& -72\int_Q s^3\lambda^5\mu^5\varphi^3\left(\frac{\partial_x(b_1)}{s}+\frac{\partial_x(b_2)}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2 dxdt \\
& +48\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -360\int\limits_Q s^3\lambda^5\mu^4\mu_x\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
&\quad -216\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
&\quad -72\int\limits_Q s^3\lambda^5\mu^5\varphi^3\left(\frac{\partial_x(b_1)}{s}+\frac{\partial_x(b_2)}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
&\quad +48\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2\,dxdt \\
&= -216\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
&\quad +48\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2\,dxdt,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{41}^{(3)} &= 12\int\limits_Q s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2(-\left(4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3+O(s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2)\right))\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
&= -48\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
&\quad +12\int\limits_Q b_3 s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt.
\end{aligned}
$$

Hesaplanan $J_{41}^{(1)}$, $J_{41}^{(2)}$, $J_{41}^{(3)}$ terimleri J_{41} ifadesinde göz önüne alınarak, aşağıdaki eşitsizlik yazılır. J_{41} incelenirken, J_0 terimi tanımlanmıştır.

$$
\begin{aligned}
J_{41} &\geq -\left|J_{41}^{(1)}\right| + J_{41}^{(2)} + J_{41}^{(3)} \\
&= -\varepsilon\int\limits_Q |P_2 w|^2\,dxdt - C(\varepsilon)\int\limits_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4|\partial_x w|^2\,dxdt \\
&\quad -216\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
&\quad +48\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2\,dxdt \\
&\quad -48\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +12\int_Q b_3 s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
\geq\ & -\varepsilon\int_Q |P_2 w|^2\,dxdt - C(\varepsilon)\int_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\,|\partial_x w|^2\,dxdt \\
& +48\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
& -(48+\delta)\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\,|\partial_x w|^2\,dxdt - C\int_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\,|\partial_x w|^2\,dxdt \\
\equiv\ & J_0.
\end{aligned}
$$

J_{42} terimi hesaplanırken, $\dfrac{\partial_x(b_1)}{s}=b_3$ olarak ele alınmıştır.

$$
\begin{aligned}
J_{42} &= 6\int_Q s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_x w)(\partial_x(\partial_t w))dxdt \\
&= 6\int_Q s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_x w)(\partial_t(\partial_x w))dxdt \\
&= 3\int_Q s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\partial_t(|\partial_x w|^2)dxdt \\
&= 3\int_0^l s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2\Big|_0^T dx - 3\int_Q b_3 s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\,|\partial_x w|^2\,dxdt \\
&\quad -3\int_Q s^2\lambda^2(2\mu\mu_t\varphi^2+2\mu^2\varphi\varphi_t)\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
&= -6\int_Q s^2\lambda^2\mu\mu_t\varphi^2\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt - 6\int_Q s^2\lambda^2\mu^2\varphi\varphi_t\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
&\quad -3\int_Q \partial_t(b_3)s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\,|\partial_x w|^2\,dxdt \\
&= 12\int_Q s^2\lambda^3\mu^2\varphi^2\beta(t-t_0)\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt - 6\int_Q s^2\lambda^2\mu\mu_t\varphi^2\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
&\quad -3\int_Q (\partial_t(b_3))s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\,|\partial_x w|^2\,dxdt.
\end{aligned}
$$

J_{41} ve J_{42} terimleri, J_4 ifadesinde yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
J_4 &\geq J_0 + 12\int_Q s^2\lambda^3\mu^2\varphi^2\beta(t-t_0)\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
&\quad -6\int_Q s^2\lambda^2\mu\mu_t\varphi^2\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt - 3\int_Q(\partial_t(b_3))s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\,|\partial_x w|^2\,dxdt
\end{aligned}$$

bulunur. $J_5 - J_9$ terimleri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned}
J_5 &= (-(6s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 + O(s\lambda^2\mu^2\varphi))\partial_x^2 w, 4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w)_{L^2(Q)} \\
&= -\int_Q (6s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 + b_1 s\lambda^2\mu^2\varphi)(\partial_x^2 w)4s\lambda\mu\varphi(\partial_x^3 w)dxdt \\
&= -\int_Q 6s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\left(1+\frac{b_1}{s}\right)4s\lambda\mu\varphi(\partial_x^2 w)(\partial_x^3 w)dxdt \\
&= -12\int_Q s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\partial_x(\left|\partial_x^2 w\right|^2)dxdt \\
&= -12\int_0^T s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2\Big|_0^l dt + 12\int_Q(\partial_x(b_1))s^2\lambda^3\mu^3\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
&\quad +12\int_Q s^3\lambda^3(3\mu^2\mu_x\varphi^3 + 3\mu^3\varphi^2\varphi_x)\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
&= 36\int_Q s^3\lambda^3\mu^2\mu_x\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt + 36\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
&\quad +12\int_Q(\partial_x(b_1))s^2\lambda^3\mu^3\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
&= 36\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_6 &= (-(6s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 + O(s\lambda^2\mu^2\varphi))\partial_x^2 w, (4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 + O(s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2))\partial_x w)_{L^2(Q)} \\
&= \int_Q -\left(6s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 + a_1 s\lambda^2\mu^2\varphi\right)\left(4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 + a_2 s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2\right)(\partial_x^2 w)(\partial_x w)dxdt \\
&= -24\int_Q s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\left(1+\frac{a_1}{s}\right)s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}\right)(\partial_x^2 w)(\partial_x w)dxdt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -24\int_Q s^5\lambda^5\mu^5\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_x^2 w)(\partial_x w)dxdt \\
&= -12\int_Q s^5\lambda^5\mu^5\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_x(|\partial_x w|^2))dxdt \\
&= -12\int_0^l s^5\lambda^5\mu^5\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2\Big|_0^T dt + 12\int_Q(\partial_x(b_1))s^4\lambda^5\mu^5\varphi^5|\partial_x w|^2 dxdt \\
&\quad +12\int_Q s^5\lambda^5(5\mu^4\mu_x\varphi^5+5\mu^5\varphi^4\varphi_x)\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2 dxdt \\
&= 60\int_Q s^5\lambda^5\mu^4\mu_x\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2 dxdt + 60\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2 dxdt \\
&\quad +12\int_Q(\partial_x(b_1))s^4\lambda^5\mu^5\varphi^5|\partial_x w|^2 dxdt,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_7 &= (-(s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4+O(s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3))w,\partial_t w)_{L^2(Q)} \\
&= -\int_Q(s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4+b_1 s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3)w(\partial_t w)dxdt \\
&= -\frac{1}{2}\int_Q s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_t(w^2))dxdt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^l s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2\Big|_0^T dx + \frac{1}{2}\int_Q(\partial_x(b_1))s^3\lambda^4\mu^4\varphi^4 w^2 dxdt \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_Q s^4\lambda^4(4\mu^3\mu_t\varphi^4+4\mu^4\varphi^3\varphi_t)\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2 dxdt \\
&= 2\int_Q s^4\lambda^4\mu^3\mu_t\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_Q(\partial_x(b_1))s^3\lambda^4\mu^4\varphi^4 w^2 dxdt \\
&\quad -4\int_Q\beta s^4\lambda^5\mu^4\varphi^4(t-t_0)\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2 dxdt \\
&\le C\int_Q s^4\lambda^5\mu^4\varphi^4 w^2 dxdt,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_8 &= (-(s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4+O(s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3))w, 4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w)_{L^2(Q)} \\
&= -4\int_Q(s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4+b_1 s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3)ws\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -4\int_Q s^5\lambda^5\mu^5\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w(\partial_x^3 w)dxdt \\
&= -4\int_0^T s^5\lambda^5\mu^5\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w(\partial_x^2 w)\Big|_0^l dt \\
&\quad +4\int_Q s^5\lambda^5(5\mu^4\mu_x\varphi^5+5\mu^5\varphi^4\varphi_x)\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w(\partial_x^2 w)dxdt \\
&\quad +4\int_Q s^5\lambda^5\mu^5\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_x w)(\partial_x^2 w)dxdt+4\int_Q(\partial_x(b_1))s^4\lambda^5\mu^5\varphi^5 w(\partial_x^2 w)dxdt \\
&= 20\int_Q s^5\lambda^5\mu^4\mu_x\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w(\partial_x^2 w)dxdt+20\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w(\partial_x^2 w)dxdt \\
&\quad +4\int_Q s^5\lambda^5\mu^5\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_x w)(\partial_x^2 w)dxdt+4\int_Q(\partial_x(b_1))s^4\lambda^5\mu^5\varphi^5 w(\partial_x^2 w)dxdt \\
&= 20\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)w(\partial_x^2 w)dxdt+4\int_Q s^5\lambda^5\mu^5\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_x w)(\partial_x^2 w)dxdt \\
&= 20\int_0^T s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)w(\partial_x w)\Big|_0^l dt \\
&\quad -20\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x w)(\partial_x w)dxdt \\
&\quad -20\int_Q s^5\lambda^6(6\mu^5\mu_x\varphi^5+5\mu^6\varphi^4\varphi_x)\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)w(\partial_x w)dxdt \\
&\quad -20\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(\frac{\partial_x(b_1)}{s}+\frac{\partial_x(b_2)}{\lambda}\right)w(\partial_x w)dxdt \\
&\quad +2\int_Q s^5\lambda^5\mu^5\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_x|\partial_x w|^2)dxdt \\
&= -10\int_Q s^5\lambda^6(6\mu^5\mu_x\varphi^5+5\mu^6\varphi^4\varphi_x)\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x(w^2))dxdt \\
&\quad -20\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2 dxdt+2\int_Q s^5\lambda^5\mu^5\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_x(|\partial_x w|^2))dxdt \\
&\quad -10\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(\frac{\partial_x(b_1)}{s}+\frac{\partial_x(b_2)}{\lambda}\right)(\partial_x(w^2))dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & -60\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^5\mu_x\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x\left(w^2\right))dxdt \\
& -50\int\limits_Q s^5\lambda^7\mu^7\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x\left(w^2\right))dxdt \\
& -20\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x w\right|^2dxdt+2\int\limits_Q s^5\lambda^5\mu^5\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_x\left|\partial_x w\right|^2)dxdt \\
& -10\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(\frac{\partial_x\left(b_1\right)}{s}+\frac{\partial_x\left(b_2\right)}{\lambda}\right)(\partial_x\left(w^2\right))dxdt \\
= & -50\int\limits_Q s^5\lambda^7\mu^7\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x\left(w^2\right))dxdt-20\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x w\right|^2dxdt \\
& +2\int\limits_Q s^5\lambda^5\mu^5\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_x\left|\partial_x w\right|^2)dxdt+2\int\limits_Q s^5\lambda^5\mu^5\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_x\left|\partial_x w\right|^2)dxdt \\
= & -50\int\limits_Q s^5\lambda^7\mu^7\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x\left(w^2\right))dxdt-20\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x w\right|^2dxdt \\
= & -50\int\limits_0^T s^5\lambda^7\mu^7\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2\Big|_0^l dt \\
& +50\int\limits_Q s^5\lambda^7(7\mu^6\mu_x\varphi^5+5\mu^7\varphi^4\varphi_x)\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2dxdt \\
& +50\int\limits_Q s^5\lambda^7\mu^7\varphi^5\left(\frac{\partial_x\left(b_1\right)}{s}+\frac{\partial_x\left(b_2\right)}{\lambda}\right)w^2dxdt-20\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x w\right|^2dxdt \\
& +2\int\limits_0^T s^5\lambda^5\mu^5\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x w\right|^2\Big|_0^l dt-2\int\limits_Q\left(\partial_x\left(b_1\right)\right)s^4\lambda^5\mu^5\varphi^5\left|\partial_x w\right|^2dxdt \\
& -2\int\limits_Q s^5\lambda^5(5\mu^4\mu_x\varphi^5+5\mu^5\varphi^4\varphi_x)\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x w\right|^2dxdt \\
= & \ 350\int\limits_Q s^5\lambda^7\mu^6\mu_x\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2dxdt+250\int\limits_Q s^5\lambda^8\mu^8\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2dxdt \\
& +50\int\limits_Q s^5\lambda^7\mu^7\varphi^5\left(\frac{\partial_x\left(b_1\right)}{s}+\frac{\partial_x\left(b_2\right)}{\lambda}\right)w^2dxdt-2\int\limits_Q(\partial_x\left(b_1\right))s^4\lambda^5\mu^5\varphi^5\left|\partial_x w\right|^2dxdt \\
& -10\int\limits_Q s^5\lambda^5\mu^4\mu_x\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x w\right|^2dxdt-10\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x w\right|^2dxdt
\end{aligned}
$$

$$-20\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt$$

$$= 250\int\limits_Q s^5\lambda^8\mu^8\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2dxdt - 20\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt$$

$$-10\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt,$$

$$\begin{aligned}
J_9 &= (-(s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4+O(s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3))w,(4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3+O(s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2))\partial_x w)_{L^2(Q)}\\
&= \int\limits_Q -(s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4+a_1s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3)(4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3+a_2s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2)w(\partial_x w)dxdt\\
&= -4\int\limits_Q s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4\left(1+\frac{a_1}{s}\right)s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}\right)w(\partial_x w)dxdt\\
&= -2\int\limits_Q s^7\lambda^7\mu^7\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_x(w^2))dxdt\\
&= -2\int\limits_0^T s^7\lambda^7\mu^7\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2\Big|_0^l dt+2\int\limits_Q(\partial_x(b_1))\,s^6\lambda^7\mu^7\varphi^7w^2dxdt\\
&\quad +2\int\limits_Q s^7\lambda^7(7\mu^6\mu_x\varphi^7+7\mu^7\varphi^6\varphi_x)\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2dxdt\\
&= 14\int\limits_Q s^7\lambda^7\mu^6\mu_x\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2dxdt+14\int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2dxdt\\
&\quad +2\int\limits_Q(\partial_x(b_1))\,s^6\lambda^7\mu^7\varphi^7w^2dxdt\\
&= 14\int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2dxdt.
\end{aligned}$$

$(P_1w,P_2w)_{L^2(Q)}=\sum\limits_{k=1}^{9}J_k$ şeklinde tanımlanan (3.26) eşitliğinde, yukarıda incelenen J_1-J_9 terimleri yerine yazılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilmiştir.

$$(P_1w,P_2w)_{L^2(Q)}\geq\left(\sum_{k=1}^{9}J_k\right)-2J_7$$

$$
\begin{aligned}
\geq\ & \int\limits_Q 2s\lambda^2\mu^2\varphi\left|\partial_x^3 w\right|^2 dxdt + 54\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
& -12\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
& -6\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt + J_0 \\
& +12\int\limits_Q s^2\lambda^3\mu^2\varphi^2\beta(t-t_0)\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
& -6\int\limits_Q s^2\lambda^2\mu\mu_t\varphi^2\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt - 3\int\limits_Q \partial_t(b_3)s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
& +36\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
& +60\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
& -C\int\limits_Q s^4\lambda^5\mu^4\varphi^4 w^2 dxdt + 250\int\limits_Q s^5\lambda^8\mu^8\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2 dxdt \\
& -20\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
& -10\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt + 14\int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2 dxdt \\
=\ & 2\int\limits_Q s\lambda^2\mu^2\varphi\left|\partial_x^3 w\right|^2 dxdt + 54\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{a_2}{s}+\frac{a_3}{\lambda}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
& +18\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt + J_0 \\
& +12\int\limits_Q s^2\lambda^3\mu^2\varphi^2\beta(t-t_0)\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
& -6\int\limits_Q s^2\lambda^2\mu\mu_t\varphi^2\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt - 3\int\limits_Q \partial_t(b_3)s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
& +30\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt + 14\int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2 dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -C\int\limits_Q s^4\lambda^5\mu^4\varphi^4 w^2 dxdt + 250\int\limits_Q s^5\lambda^8\mu^8\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2 dxdt \\
= \ & 2\int\limits_Q s\lambda^2\mu^2\varphi\left|\partial_x^3 w\right|^2 dxdt + 18\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt + J_0 \\
& +\int\limits_Q \left\{(54s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3+30s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5)\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\right. \\
& \left. +12\beta(t-t_0)s^2\lambda^3\mu^2\varphi^2\left(1+\frac{b_1}{s}\right)-3\left(\partial_t(b_3)\right)s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\right\}\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
& +\int\limits_Q \left\{\left(14s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7+250s^5\lambda^8\mu^8\varphi^5\right)\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)-Cs^4\lambda^5\mu^4\varphi^4\right\}w^2 dxdt \\
\geq \ & 2\int\limits_Q s\lambda^2\mu^2\varphi\left|\partial_x^3 w\right|^2 dxdt + 17\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
& +29\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left|\partial_x w\right|^2 dxdt + 13\int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 w^2 dxdt + J_0.
\end{aligned}
$$

Yukarıdaki eşitsizlik düzenlenerek

$$
\begin{aligned}
(P_1 w, P_2 w)_{L^2(Q)} \ \geq \ & 2\int\limits_Q s\lambda^2\mu^2\varphi\left|\partial_x^3 w\right|^2 dxdt - C\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
& +17\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
& +29\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left|\partial_x w\right|^2 dxdt + 13\int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 w^2 dxdt \\
& -\varepsilon\int\limits_Q \left|P_2 w\right|^2 dxdt - C(\varepsilon)\int\limits_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
& +48\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
& -(48+\delta)\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left|\partial_x w\right|^2 dxdt
\end{aligned}
$$

biçiminde yazılır. Burada, s ve λ yeterince büyük olmak üzere, $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ yeterince küçük seçilebilen sabit değerlerdir. J_0 tanımı gereği, değerlendirmenin sonucu aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$
\begin{aligned}
& (P_1 w, P_2 w)_{L^2(Q)} + \varepsilon \int\limits_Q |P_2 w|^2 \, dxdt \\
\geq \; & 2 \int\limits_Q s\lambda^2\mu^2\varphi \left|\partial_x^3 w\right|^2 dxdt + 13 \int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 w^2 dxdt \\
& + 65 \int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 \left(1 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{\lambda}\right) \left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
& - (19 + \delta) \int\limits_Q \left(s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5 + Cs^4\lambda^6\mu^6\varphi^4 + Cs^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\right) |\partial_x w|^2 \, dxdt. \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

(3.27) eşitsizliği, negatif işaretli integral içerdiğinden, pozitif kuadratik form elde edilememiştir. O halde, yeni bir değerlendirmeye ihtiyaç vardır. Bu amaçla, $\int\limits_Q (Pw) \times s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w dxdt$ terimi göz önüne alınmıştır.

$$
\begin{aligned}
\left(Pw, s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w\right)_{L^2(Q)} &= \left(\partial_t w, s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w\right)_{L^2(Q)} + \left(-\partial_x^4 w, s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w\right)_{L^2(Q)} \\
&\quad + \left(4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w, s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w\right)_{L^2(Q)} \\
&\quad + \left(-(6s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 + O(s\lambda^2\mu^2\varphi))\partial_x^2 w, s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w\right)_{L^2(Q)} \\
&\quad + \left((4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 + O(s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2))\partial_x w, s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w\right)_{L^2(Q)} \\
&\quad + \left(-(s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4 + O(s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3))w, s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w\right)_{L^2(Q)} \\
&= \sum_{k=1}^{6} I_k. \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

Burada, (3.28) eşitliğinde tanımlanan I_k terimleri hesaplanmıştır. I_1 terimi aşağıda verildiği gibidir:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \left(\partial_t w, s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w\right)_{L^2(Q)} \\
&= \int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w \left(\partial_t w\right) dxdt \\
&= \frac{1}{2} \int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 \left(\partial_t \left(w^2\right)\right) dxdt \\
&= \frac{1}{2} \int\limits_0^l s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w^2 \Big|_0^T dx - \frac{1}{2} \int\limits_Q s^3\lambda^4 \left(4\mu^3\mu_t\varphi^3 + 3\mu^4\varphi^2\varphi_t\right) w^2 dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^3\mu_t\varphi^3 w^2 dxdt + 3\int\limits_Q \beta s^3\lambda^5\mu^4\varphi^3(t-t_0)w^2 dxdt \\
&= 3\int\limits_Q \beta s^3\lambda^5\mu^4\varphi^3(t-t_0)w^2 dxdt.
\end{aligned}
$$

I_2 teriminin hesabı yapılırken işlem kolaylığı için I_{21} ve I_{22} terimleri tanımlanmıştır.

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \left(-\partial_x^4 w, s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w\right)_{L^2(Q)} \\
&= -\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w(\partial_x^4 w)dxdt \\
&= -\int\limits_0^T s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w(\partial_x^3 w)\Big|_0^l dt + \int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(\partial_x w\right)(\partial_x^3 w)dxdt \\
&\quad + \int\limits_Q s^3\lambda^4\left(4\mu^3\mu_x\varphi^3 + 3\mu^4\varphi^2\varphi_x\right) w(\partial_x^3 w)dxdt \\
&= 4\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^3\mu_x\varphi^3 w(\partial_x^3 w)dxdt + 3\int\limits_Q s^3\lambda^5\mu^5\varphi^3 w(\partial_x^3 w)dxdt \\
&\quad + \int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(\partial_x w\right)(\partial_x^3 w)dxdt \\
&= 3\int\limits_Q s^3\lambda^5\mu^5\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right) w(\partial_x^3 w)dxdt + \int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(\partial_x w\right)(\partial_x^3 w)dxdt \\
&\equiv I_{21} + I_{22}.
\end{aligned}
$$

I_{21} ve I_{22} terimlerinin incelenmesi sonucu, aşağıdaki ifadeler elde edilmiştir.

$$
\begin{aligned}
I_{21} &= 3\int\limits_Q s^3\lambda^5\mu^5\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right) w(\partial_x^2 w)dxdt \\
&= 3\int\limits_0^T s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w(\partial_x^2 w)\Big|_0^l dt - 3\int\limits_Q \partial_x(b_2)s^3\lambda^4\mu^5\varphi^3 w(\partial_x^2 w)dxdt \\
&\quad -3\int\limits_Q s^3\lambda^5(5\mu^4\mu_x\varphi^3 + 3\mu^5\varphi^2\varphi_x)\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right) w(\partial_x^2 w)dxdt \\
&\quad -3\int\limits_Q s^3\lambda^5\mu^5\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x w)(\partial_x^2 w)dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \;& -15\int\limits_Q s^3\lambda^5\mu^4\mu_x\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)w(\partial_x^2 w)dxdt - 9\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)w(\partial_x^2 w)dxdt \\
& -3\int\limits_Q \partial_x(b_2)s^3\lambda^4\mu^5\varphi^3 w(\partial_x^2 w)dxdt - \frac{3}{2}\int\limits_Q s^3\lambda^5\mu^5\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)\partial_x\left(|\partial_x w|^2\right)dxdt \\
= \;& -9\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)w(\partial_x^2 w)dxdt - \frac{3}{2}\int\limits_Q s^3\lambda^5\mu^5\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)\partial_x\left(|\partial_x w|^2\right)dxdt \\
= \;& -9\int\limits_0^T s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)w(\partial_x w)\Big|_0^l dt \\
& +9\int\limits_Q s^3\lambda^6(6\mu^5\mu_x\varphi^3+3\mu^6\varphi^2\varphi_x)\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)w(\partial_x w)dxdt \\
& +9\int\limits_Q \partial_x(b_2)s^3\lambda^5\mu^6\varphi^3 w(\partial_x w)dxdt + 9\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)(\partial_x w)(\partial_x w)dxdt \\
& -\frac{3}{2}\int\limits_0^T s^3\lambda^5\mu^5\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\Big|_0^l dt + \frac{3}{2}\int\limits_Q \partial_x(b_2)s^3\lambda^4\mu^5\varphi^3|\partial_x w|^2 dxdt \\
& +\frac{3}{2}\int\limits_Q s^3\lambda^5(5\mu^4\mu_x\varphi^3+3\mu^5\varphi^2\varphi_x)\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2 dxdt \\
= \;& 54\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^5\mu_x\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)w(\partial_x w)dxdt + 27\int\limits_Q s^3\lambda^7\mu^7\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)w(\partial_x w)dxdt \\
& +9\int\limits_Q \partial_x(b_2)s^3\lambda^5\mu^6\varphi^3 w(\partial_x w)dxdt + 9\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2 dxdt \\
& +\frac{15}{2}\int\limits_Q s^3\lambda^5\mu^4\mu_x\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2 dxdt + \frac{9}{2}\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2 dxdt \\
& +\frac{3}{2}\int\limits_Q \partial_x(b_2)s^3\lambda^4\mu^5\varphi^3|\partial_x w|^2 dxdt \\
= \;& 27\int\limits_Q s^3\lambda^7\mu^7\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)w(\partial_x w)dxdt + 9\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2 dxdt \\
& +\frac{9}{2}\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2 dxdt \\
= \;& \frac{27}{2}\int\limits_Q s^3\lambda^7\mu^7\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)\partial_x(w^2)dxdt + \frac{27}{2}\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2 dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{27}{2}\int\limits_0^T s^3\lambda^7\mu^7\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2\bigg|_0^l dt - \frac{27}{2}\int\limits_Q \partial_x\left(b_2\right)s^3\lambda^6\mu^7\varphi^3 w^2 dxdt \\
&\quad -\frac{27}{2}\int\limits_Q s^3\lambda^7(7\mu^6\mu_x\varphi^3+3\mu^7\varphi^2\varphi_x)\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2dxdt \\
&\quad +\frac{27}{2}\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
&= -\frac{189}{2}\int\limits_Q s^3\lambda^7\mu^6\mu_x\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2dxdt - \frac{81}{2}\int\limits_Q s^3\lambda^8\mu^8\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2dxdt \\
&\quad -\frac{27}{2}\int\limits_Q \partial_x(b_2)s^3\lambda^6\mu^7\varphi^3w^2dxdt + \frac{27}{2}\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
&= -\frac{81}{2}\int\limits_Q s^3\lambda^8\mu^8\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2dxdt + \frac{27}{2}\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{22} &= \int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(\partial_x w\right)(\partial_x^3 w)dxdt \\
&= \int\limits_0^T s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(\partial_x w\right)\left(\partial_x^2 w\right)\big|_0^l dt - \int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3(\partial_x^2 w)(\partial_x^2 w)dxdt \\
&\quad -\int\limits_Q s^3\lambda^4(4\mu^3\mu_x\varphi^3+3\mu^4\varphi^2\varphi_x)\left(\partial_x w\right)(\partial_x^2 w)dxdt \\
&= -4\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^3\mu_x\varphi^3\left(\partial_x w\right)(\partial_x^2 w)dxdt - 3\int\limits_Q s^3\lambda^5\mu^5\varphi^3\left(\partial_x w\right)(\partial_x^2 w)dxdt \\
&\quad -\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
&= -3\int\limits_Q s^3\lambda^5\mu^5\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left(\partial_x w\right)(\partial_x^2 w)dxdt - \int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
&= -\frac{3}{2}\int\limits_Q s^3\lambda^5\mu^5\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)\partial_x\left(\left|\partial_x w\right|^2\right)dxdt - \int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & -\frac{3}{2}\int_0^T s^3\lambda^5\mu^5\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\Big|_0^l dt \\
& +\frac{3}{2}\int_Q s^3\lambda^5(5\mu^4\mu_x\varphi^3+3\mu^5\varphi^2\varphi_x)\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
& +\frac{3}{2}\int_Q \partial_x(b_2)s^3\lambda^4\mu^5\varphi^3\,|\partial_x w|^2\,dxdt-\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
= & \ \frac{15}{2}\int_Q s^3\lambda^5\mu^4\mu_x\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
& +\frac{9}{2}\int_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
& +\frac{3}{2}\int_Q \partial_x(b_2)s^3\lambda^4\mu^5\varphi^3\,|\partial_x w|^2\,dxdt-\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
= & \ \frac{9}{2}\int_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt-\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt.
\end{aligned}
$$

Bulunan I_{21} ve I_{22} terimleri, I_2 ifadesinde yerine yazıldığında

$$
\begin{aligned}
I_2 = & \ I_{21}+I_{22} \\
= & -\frac{81}{2}\int_Q s^3\lambda^8\mu^8\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2 dxdt \\
& +\frac{27}{2}\int_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
& +\frac{9}{2}\int_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt-\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
= & -\frac{81}{2}\int_Q s^3\lambda^8\mu^8\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2 dxdt \\
& +18\int_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt-\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt.
\end{aligned}
$$

elde edilir. I_3-I_6 terimleri aşağıdaki gibi hesap edilmiştir.

$$
I_3=\left(4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w,\, s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w\right)_{L^2(Q)}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\int\limits_Q s^4\lambda^5\mu^5\varphi^4 w\left(\partial_x^3 w\right)dxdt\\
&= 4\int\limits_0^T s^4\lambda^5\mu^5\varphi^4 w\left(\partial_x^2 w\right)\Big|_0^l dt - 4\int\limits_Q s^4\lambda^5\mu^5\varphi^4\left(\partial_x w\right)\left(\partial_x^2 w\right)dxdt\\
&\quad -4\int\limits_Q s^4\lambda^5\left(5\mu^4\mu_x\varphi^4 + 4\mu^5\varphi^3\varphi_x\right)w\left(\partial_x^2 w\right)dxdt\\
&= -20\int\limits_Q s^4\lambda^5\mu^4\mu_x\varphi^4 w\left(\partial_x^2 w\right)dxdt - 16\int\limits_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4 w\left(\partial_x^2 w\right)dxdt\\
&\quad -4\int\limits_Q s^4\lambda^5\mu^5\varphi^4\left(\partial_x w\right)\left(\partial_x^2 w\right)dxdt\\
&= -16\int\limits_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)w\left(\partial_x^2 w\right)dxdt - 4\int\limits_Q s^4\lambda^5\mu^5\varphi^4\left(\partial_x w\right)\left(\partial_x^2 w\right)dxdt\\
&= -16\int\limits_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)w\left(\partial_x^2 w\right)dxdt - 2\int\limits_Q s^4\lambda^5\mu^5\varphi^4\left(\partial_x\left(\left|\partial_x w\right|^2\right)\right)dxdt\\
&= -16\int\limits_0^T s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)w\left(\partial_x w\right)\Bigg|_0^l dt\\
&\quad +16\int\limits_Q s^4\lambda^6\left(\partial_x\left(\mu^6\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)\right)\right)w\left(\partial_x w\right)dxdt\\
&\quad +16\int\limits_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)\left(\partial_x w\right)\left(\partial_x w\right)dxdt - 2\int\limits_0^T s^4\lambda^5\mu^5\varphi^4\left|\partial_x w\right|^2\Big|_0^l dt\\
&\quad +2\int\limits_Q s^4\lambda^5(5\mu^4\mu_x\varphi^4 + 4\mu^5\varphi^3\varphi_x)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt\\
&= 8\int\limits_Q s^4\lambda^6\left(\partial_x\left(\mu^6\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)\right)\right)\left(\partial_x\left(w^2\right)\right)dxdt + 8\int\limits_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left|\partial_x w\right|^2 dxdt\\
&\quad +16\int\limits_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt + 10\int\limits_Q s^4\lambda^5\mu^4\mu_x\varphi^4\left|\partial_x w\right|^2 dxdt\\
&= 8\int\limits_Q s^4\lambda^6(6\mu^5\mu_x\varphi^4 + 4\mu^6\varphi^3\varphi_x)\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)\left(\partial_x\left(w^2\right)\right)dxdt\\
&\quad +16\int\limits_Q \partial_x(b_1)s^4\lambda^5\mu^6\varphi^4\left(\partial_x\left(w^2\right)\right)dxdt + 16\int\limits_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt\\
&\quad +8\int\limits_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left|\partial_x w\right|^2 dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 48\int_Q s^4\lambda^6\mu^5\mu_x\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)\left(\partial_x\left(w^2\right)\right)dxdt + 8\int_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
&\quad +32\int_Q s^4\lambda^7\mu^7\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)\left(\partial_x\left(w^2\right)\right)dxdt + 16\int_Q \partial_x(b_1)s^4\lambda^5\mu^6\varphi^4\left(\partial_x\left(w^2\right)\right)dxdt \\
&\quad +16\int_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
&= 32\int_Q s^4\lambda^7\mu^7\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)\left(\partial_x\left(w^2\right)\right)dxdt + 16\int_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
&\quad +8\int_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
&= 32\int_0^T s^4\lambda^7\mu^7\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)w^2\Big|_0^l dt - 32\int_Q \partial_x(b_1)s^4\lambda^6\mu^7\varphi^4 w^2 dxdt \\
&\quad -32\int_Q s^4\lambda^7(7\mu^6\mu_x\varphi^4+4\mu^7\varphi^3\varphi_x)\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)w^2 dxdt \\
&\quad +16\int_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt + 8\int_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
&= -224\int_Q s^4\lambda^7\mu^6\mu_x\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)w^2 dxdt - 128\int_Q s^4\lambda^8\mu^8\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)w^2 dxdt \\
&\quad +16\int_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt + 8\int_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
&\quad -32\int_Q \partial_x(b_1)s^4\lambda^6\mu^7\varphi^4 w^2 dxdt \\
&= -128\int_Q s^4\lambda^8\mu^8\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)w^2 dxdt + 24\int_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \left(-(6s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2+O(s\lambda^2\mu^2\varphi))\partial_x^2 w, s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w\right)_{L^2(Q)} \\
&= -6\int_Q s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left(\partial_x^2 w\right)\left(s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w\right)dxdt \\
&= -6\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w\left(\partial_x^2 w\right)dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & -6\int_0^T s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w\left(\partial_x w\right)\Big|_0^l dt \\
& +6\int_Q s^5\lambda^6\left(6\mu^5\mu_x\varphi^5+5\mu^6\varphi^4\varphi_x\right)\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w\left(\partial_x w\right)dxdt \\
& +6\int_Q \left(\partial_x(b_1)\right)s^4\lambda^6\mu^6\varphi^5 w\left(\partial_x w\right)dxdt \\
& +6\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left(\partial_x w\right)\left(\partial_x w\right)dxdt \\
= \quad & 3\int_Q s^5\lambda^6\left(6\mu^5\mu_x\varphi^5+5\mu^6\varphi^4\varphi_x\right)\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left(\partial_x\left(w^2\right)\right)dxdt \\
& +3\int_Q \left(\partial_x(b_1)\right)s^4\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(\partial_x\left(w^2\right)\right)dxdt+6\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
= \quad & 18\int_Q s^5\lambda^6\mu^5\mu_x\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left(\partial_x\left(w^2\right)\right)dxdt \\
& +15\int_Q s^5\lambda^7\mu^7\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left(\partial_x\left(w^2\right)\right)dxdt \\
& +3\int_Q \left(\partial_x(b_1)\right)s^4\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(\partial_x\left(w^2\right)\right)dxdt+6\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
= \quad & 15\int_Q s^5\lambda^7\mu^7\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left(\partial_x\left(w^2\right)\right)dxdt \\
& +6\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
= \quad & 15\int_0^T s^5\lambda^7\mu^7\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2\Big|_0^l dt \\
& -15\int_Q s^5\lambda^7\left(7\mu^6\mu_x\varphi^5+5\mu^7\varphi^4\varphi_x\right)\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2 dxdt \\
& -15\int_Q s^5\lambda^7\mu^7\varphi^5\left(\frac{\partial_x(b_1)}{s}+\frac{\partial_x(b_2)}{\lambda}\right)w^2 dxdt \\
& +6\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -105\int_Q s^5\lambda^7\mu^6\mu_x\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2dxdt - 75\int_Q s^5\lambda^8\mu^8\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2dxdt \\
&\quad -15\int_Q s^5\lambda^7\mu^7\varphi^5\left(\frac{\partial_x(b_1)}{s}+\frac{\partial_x(b_2)}{\lambda}\right)w^2dxdt + 6\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
&= -75\int_Q s^5\lambda^8\mu^8\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2dxdt + 6\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_5 &= \left((4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 + O(s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2))\partial_x w, s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w\right)_{L^2(Q)} \\
&= 4\int_Q s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_x w)\left(s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w\right)dxdt \\
&= 4\int_Q s^6\lambda^7\mu^7\varphi^6\left(1+\frac{b_1}{s}\right)(\partial_x w)\,w dxdt \\
&= 2\int_Q s^6\lambda^7\mu^7\varphi^6\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\partial_x\left(w^2\right)dxdt \\
&= 2\int_0^T s^6\lambda^7\mu^7\varphi^6\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2\Big|_0^l\,dt \\
&\quad -2\int_Q s^6\lambda^7\left(7\mu^6\mu_x\varphi^6 + 6\mu^7\varphi^5\varphi_x\right)\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2dxdt \\
&= -14\int_Q s^6\lambda^7\mu^6\mu_x\varphi^6\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2dxdt - 12\int_Q s^6\lambda^8\mu^8\varphi^6\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2dxdt \\
&= -12\int_Q s^6\lambda^8\mu^8\varphi^6\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2dxdt,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_6 &= \left(-(s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4 + O(s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3))w, s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w\right)_{L^2(Q)} \\
&= -\int_Q s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w(s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w)dxdt \\
&= -\int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2dxdt.
\end{aligned}
$$

$I_1 - I_6$ terimleri (3.28) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{6} I_k &= 3\int_Q \beta s^3\lambda^5\mu^4\varphi^3(t-t_0)w^2dxdt - \frac{81}{2}\int_Q s^3\lambda^8\mu^8\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2dxdt \\
&+18\int_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left(1+\frac{b_2}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt - \int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
&-128\int_Q s^4\lambda^8\mu^8\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)w^2dxdt + 24\int_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
&-75\int_Q s^5\lambda^8\mu^8\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2dxdt - \int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2dxdt \\
&+6\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
&-12\int_Q s^6\lambda^8\mu^8\varphi^6\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)w^2dxdt \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

bulunur. (3.29) ifadesinin sağ tarafını daha da küçültmek için, $\frac{b_j}{\lambda}$ çarpanını içeren integraller için bir inceleme yapılması gerekmektedir. Bunun için, ilk olarak katsayısı negatif integraller göz önüne alınmıştır. Burada b_2 nin işareti ne olursa olsun

$$\int_Q s^3\lambda^8\mu^8\varphi^3w^2dxdt \geq \int_Q b_2s^3\lambda^7\mu^8\varphi^3w^2dxdt$$

sağlandığından

$$-\frac{81}{2}\int_Q s^3\lambda^8\mu^8\varphi^3w^2dxdt \leq -\frac{81}{2}\int_Q b_2s^3\lambda^7\mu^8\varphi^3w^2dxdt \qquad (3.30)$$

şeklindedir. $\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)$ çarpanını içinde bulunduran negatif katsayılı integraller ise, 3 ile genişletilerek daha da küçültülmüştür. İkinci olarak, katsayısı pozitif olanlar için b_2 nin işareti ne olursa olsun

$$18\int_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3|\partial_x w|^2\,dxdt \geq 18\int_Q b_2s^3\lambda^5\mu^6\varphi^3|\partial_x w|^2\,dxdt$$

olduğundan $C>0$ seçimi ile

$$-\frac{C}{2}\int_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3|\partial_x w|^2\,dxdt \leq -\frac{C}{2}\int_Q b_2s^3\lambda^5\mu^6\varphi^3|\partial_x w|^2\,dxdt \qquad (3.31)$$

şeklinde küçültülebilir. Diğer pozitif katsayılı integral için benzer inceleme ile

$$24\int_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \geq 24\int_Q b_1 s^4\lambda^5\mu^6\varphi^4\left|\partial_x w\right|^2 dxdt$$

olduğundan

$$-\frac{C}{2}\int_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \leq -\frac{C}{2}\int_Q b_1 s^4\lambda^5\mu^6\varphi^4\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \tag{3.32}$$

elde edilir. (3.29) eşitsizliğinde (3.30), (3.31), (3.32) incelemeleri yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{6} I_k \geq\ & 3\int_Q \beta s^3\lambda^5\mu^4\varphi^3(-T)w^2 dxdt - 81\int_Q s^3\lambda^8\mu^8\varphi^3 w^2 dxdt \\
& -C\int_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left|\partial_x w\right|^2 dxdt - \int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
& -256\int_Q s^4\lambda^8\mu^8\varphi^4 w^2 dxdt - C\int_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
& -225\int_Q s^5\lambda^8\mu^8\varphi^5 w^2 dxdt + 6\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
& -36\int_Q s^6\lambda^8\mu^8\varphi^6 w^2 dxdt - \int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}\right) w^2 dxdt \\
\geq\ & -C\int_Q s^3\lambda^5\mu^4\varphi^3 w^2 dxdt - C\int_Q s^3\lambda^8\mu^8\varphi^3 w^2 dxdt - C\int_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
& -\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt - C\int_Q s^4\lambda^8\mu^8\varphi^4 w^2 dxdt - C\int_Q s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
& -C\int_Q s^5\lambda^8\mu^8\varphi^5 w^2 dxdt + 6\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
& -C\int_Q s^6\lambda^8\mu^8\varphi^6 w^2 dxdt - \int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}\right) w^2 dxdt \\
=\ & -C\int_Q \left(s^3\lambda^5\mu^4\varphi^3 + s^3\lambda^8\mu^8\varphi^3 + s^4\lambda^8\mu^8\varphi^4 + s^5\lambda^8\mu^8\varphi^5 + s^6\lambda^8\mu^8\varphi^6\right) w^2 dxdt \\
& -\int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}\right) w^2 dxdt + 6\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
& -C\int_Q \left(s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3 + s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4\left|\partial_x w\right|^2 dxdt - \int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt
\end{aligned} \tag{3.33}$$

bulunur. (3.33) ifadesinin sağ tarafında $|\partial_x w|^2$ ve w^2 içeren integrallerde absorbe işlemi yapılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{6} I_k \geq & -C\int_Q s^6\lambda^8\mu^8\varphi^6\left(1+\frac{a}{s}\right)w^2dxdt - \int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2dxdt \\
& +6\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2 dxdt - C\int_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3|\partial_x w|^2 dxdt \\
& -\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Diğer taraftan, her $A, B \in \mathbb{R}$ için, $0 \leq (A+B)^2$ olup binom açılımı gereği $2AB \leq A^2+B^2$ yazılır. Burada $A = Fe^{s\varphi}$, $B = s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w$ seçimi ile

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{6} I_k &= \int_Q Fe^{s\varphi}s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_Q 2Fe^{s\varphi}s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 w dxdt \\
&\leq \frac{1}{2}\int_Q F^2e^{2s\varphi}dxdt + \frac{1}{2}\int_Q s^6\lambda^8\mu^8\varphi^6 w^2 dxdt
\end{aligned} \tag{3.35}$$

elde edilir. (3.34) ve (3.35) eşitsizlikleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
& -C\int_Q s^6\lambda^8\mu^8\varphi^6\left(1+\frac{a}{s}\right)w^2dxdt - \int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2dxdt \\
& +6\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2 dxdt - C\int_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3|\partial_x w|^2 dxdt \\
& -\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
\leq & \frac{1}{2}\int_Q F^2e^{2s\varphi}dxdt + \frac{1}{2}\int_Q s^6\lambda^8\mu^8\varphi^6 w^2 dxdt
\end{aligned}$$

yazılıp düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
& 6\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt - C\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\,|\partial_x w|^2\,dxdt \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int\limits_Q F^2e^{2s\varphi}dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_Q s^6\lambda^8\mu^8\varphi^6w^2dxdt + \int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2dxdt \\
& +C\int\limits_Q s^6\lambda^8\mu^8\varphi^6\left(1+\frac{a}{s}\right)w^2dxdt + \int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2dxdt \\
=\ & \frac{1}{2}\int\limits_Q F^2e^{2s\varphi}dxdt + \int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2dxdt + \int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2dxdt \\
& +C\int\limits_Q s^6\lambda^8\mu^8\varphi^6\left(1+\frac{a}{s}\right)w^2dxdt + C\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\,|\partial_x w|^2\,dxdt \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

şekline gelir. Ayrıca,

$$
\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2dxdt \leq \int\limits_Q s^4\lambda^9\mu^6\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2dxdt
$$

olduğu göz önüne alınır ise, $C > 0$ için

$$
-C\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2dxdt \geq -C\int\limits_Q s^4\lambda^9\mu^6\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2dxdt \qquad (3.37)
$$

yazılabilir. (3.37), (3.36) eşitsizliğinin sol tarafını incelemek için kullanılarak

$$
\begin{aligned}
& 6\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt - C\int\limits_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\,|\partial_x w|^2\,dxdt \\
\geq\ & 6\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt - C\int\limits_Q s^4\lambda^9\mu^6\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2dxdt \\
=\ & 6\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{c\lambda^3}{s\varphi^2}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \qquad (3.38)
\end{aligned}
$$

bulunur.

(3.38) ve (3.36) eşitsizlikleri yardımıyla

$$
\begin{aligned}
& 6\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{c\lambda^3}{s\varphi^2}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
\leq\; & \frac{1}{2}\int_Q F^2e^{2s\varphi}dxdt+\int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2dxdt+\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2dxdt \\
& +C\int_Q s^6\lambda^8\mu^8\varphi^6\left(1+\frac{a}{s}\right)w^2dxdt+C\int_Q s^3\lambda^6\mu^6\varphi^3|\partial_x w|^2\,dxdt
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

elde edilir. (3.39) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{19+2\delta}{6}$ ile çarpılırsa

$$
\begin{aligned}
& (19+2\delta)\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{c\lambda^3}{s\varphi^2}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
\leq\; & \frac{19+2\delta}{12}\int_Q F^2e^{2s\varphi}dxdt+\frac{19+2\delta}{6}\int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2dxdt \\
& +C\int_Q s^6\lambda^8\mu^8\varphi^6\left(1+\frac{a}{s}\right)w^2dxdt+\frac{19+2\delta}{6}\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2dxdt \\
\leq\; & C\int_Q F^2e^{2s\varphi}dxdt+\frac{19+2\delta}{6}\int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2dxdt \\
& +C\int_Q s^6\lambda^8\mu^8\varphi^6\left(1+\frac{a}{s}\right)w^2dxdt+\frac{19+2\delta}{6}\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2dxdt
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

ikinci değerlendirmenin sonucu bulunmuş olur. İlk değerlendirmenin sonucu olan (3.27) ile ikinci değerlendirmenin sonucu (3.40) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$
\begin{aligned}
& (P_1w,P_2w)_{L^2(Q)}+\varepsilon\left\|P_2w\right\|^2_{L^2(Q)}+C\int_Q F^2e^{2s\varphi}dxdt \\
& +\frac{19+2\delta}{6}\int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2dxdt \\
& +C\int_Q s^6\lambda^8\mu^8\varphi^6\left(1+\frac{a}{s}\right)w^2dxdt+\frac{19+2\delta}{6}\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2dxdt \\
\geq\; & 2\int_Q s\lambda^2\mu^2\varphi\left|\partial_x^3 w\right|^2dxdt+65\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2dxdt
\end{aligned}
$$

$$-(19+\delta)\int\limits_Q \left(s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5 + Cs^4\lambda^6\mu^6\varphi^4 + Cs^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\right)|\partial_x w|^2\,dxdt$$
$$+(19+2\delta)\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{c\lambda^3}{s\varphi^2}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt$$
$$+13\int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 w^2 dxdt \tag{3.41}$$

elde edilir ve (3.41) eşitsizliğinde gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$
\begin{aligned}
&(P_1w,P_2w)_{L^2(Q)} + \varepsilon\|P_2w\|^2_{L^2(Q)} + C\int\limits_Q F^2e^{2s\varphi}dxdt \\
&+C\int\limits_Q s^6\lambda^8\mu^8\varphi^6\left(1+\frac{a}{s}\right)w^2dxdt \\
\geq\ & 2\int\limits_Q s\lambda^2\mu^2\varphi\left|\partial_x^3 w\right|^2dxdt + \left(\frac{59-2\delta}{6}\right)\int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2dxdt \\
&+\left(65-\frac{19+2\delta}{6}\right)\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2dxdt \\
&-(19+\delta)\int\limits_Q \left(s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5 + Cs^4\lambda^6\mu^6\varphi^4 + Cs^3\lambda^6\mu^6\varphi^3\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
&+(19+2\delta)\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{c\lambda^3}{s\varphi^2}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt
\end{aligned}
$$

bulunur. $O\left(\frac{c\lambda^3}{s\varphi^2}\right) = \frac{\lambda^3}{s} \geq \frac{1}{s}$ olduğu göz önüne alınarak eşitsizlik, aşağıdaki hali alır.

$$
\begin{aligned}
&(P_1w,P_2w)_{L^2(Q)} + \varepsilon\|P_2w\|^2_{L^2(Q)} + C\int\limits_Q F^2e^{2s\varphi}dxdt + C\int\limits_Q s^6\lambda^8\mu^8\varphi^6\left(1+\frac{a}{s}\right)w^2dxdt \\
\geq\ & 2\int\limits_Q s\lambda^2\mu^2\varphi\left|\partial_x^3 w\right|^2dxdt + \left(\frac{59-2\delta}{6}\right)\int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2dxdt \\
&+\left(65-\frac{19+2\delta}{6}\right)\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2dxdt \\
&-(19+\delta)\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt \\
&+(19+2\delta)\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)|\partial_x w|^2\,dxdt.
\end{aligned}
$$

Gerekli düzenlemelerle

$$\begin{aligned}
&(P_1 w, P_2 w)_{L^2(Q)} + \varepsilon \|P_2 w\|^2_{L^2(Q)} + C\int_Q F^2 e^{2s\varphi} dxdt \\
\geq\ & 2\int_Q s\lambda^2\mu^2\varphi \left|\partial_x^3 w\right|^2 dxdt + \left(65 - \frac{19+2\delta}{6}\right)\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 \left(1 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
&+ \left(\frac{59-2\delta}{6}\right)\int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 \left(1+\frac{b_1}{s}\right) w^2 dxdt \\
&+\delta\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt
\end{aligned} \tag{3.42}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $\left(65 - \frac{19+2\delta}{6}\right)\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left(1+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{\lambda}\right)\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt$ terimi göz önüne alınarak, (3.42) eşitsizliğinin sağ tarafı küçültülürse

$$\begin{aligned}
&(P_1 w, P_2 w)_{L^2(Q)} + \varepsilon \|P_2 w\|^2_{L^2(Q)} + C\int_Q F^2 e^{2s\varphi} dxdt \\
\geq\ & 2\int_Q s\lambda^2\mu^2\varphi \left|\partial_x^3 w\right|^2 dxdt + \left(65 - \frac{19+2\delta}{6}\right)\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 \left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
&+ \left(\frac{59-2\delta}{6}\right)\int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 \left(1+\frac{b_1}{s}\right) w^2 dxdt \\
&+\delta\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt
\end{aligned} \tag{3.43}$$

bulunur. Diğer taraftan, L^2 uzayında iç çarpım ve norm tanımı gereği

$$\begin{aligned}
\int_Q F^2 e^{2s\varphi} dxdt &= (Fe^{s\varphi}, Fe^{s\varphi})_{L^2(Q)} = (Pw, Pw)_{L^2(Q)} \\
&= (P_1 w + P_2 w, P_1 w + P_2 w)_{L^2(Q)} \\
&= \|P_1 w + P_2 w, P_1 w + P_2 w\|^2_{L^2(Q)} \\
&= \|P_1 w\|^2_{L^2(Q)} + \|P_2 w\|^2_{L^2(Q)} + 2(P_1 w, P_2 w)_{L^2(Q)}
\end{aligned}$$

yazılabilir ve her iki taraf 2 ile sadeleştirilerek

$$(P_1 w, P_2 w)_{L^2(Q)} + \frac{1}{2}\|P_1 w\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{2}\|P_2 w\|^2_{L^2(Q)} = \frac{1}{2}\int_Q F^2 e^{2s\varphi} dxdt \tag{3.44}$$

elde edilir.

$\|P_1 w\|^2_{L^2(Q)} \geq 0$ olduğundan, (3.44) eşitliği

$$(P_1 w, P_2 w)_{L^2(Q)} + \frac{1}{2}\|P_2 w\|^2_{L^2(Q)} \leq \frac{1}{2}\int_Q F^2 e^{2s\varphi} dxdt \tag{3.45}$$

biçimine getirilir. $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ seçimi ile, (3.44) eşitsizliğinin sol tarafı küçültülerek

$$(P_1 w, P_2 w)_{L^2(Q)} + \varepsilon\|P_2 w\|^2_{L^2(Q)} \leq \frac{1}{2}\int_Q F^2 e^{2s\varphi} dxdt \tag{3.46}$$

halini alır. (3.25) ile verilen $P_2 w$ tanımından, $\partial_t w$ çekilirse

$$\begin{aligned}
\partial_t w &= P_2 w - 4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w - (-8s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2 - 8s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 + 4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 \\
&\quad +8s\lambda^2\mu\mu_x\varphi + 4s\lambda^3\mu^3\varphi - 4s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 + 4s\lambda\mu_{xx}\varphi + 4s\lambda^2\mu_x\mu\varphi \\
&\quad -4s^2\lambda^2\mu_x\mu\varphi^2)\partial_x w \\
&= P_2 w - 4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w + (8s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2 + 8s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 - 4s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 \\
&\quad -8s\lambda^2\mu\mu_x\varphi - 4s\lambda^3\mu^3\varphi + 4s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 - 4s\lambda\mu_{xx}\varphi - 4s\lambda^2\mu_x\mu\varphi \\
&\quad +4s^2\lambda^2\mu_x\mu\varphi^2)\partial_x w \\
&\leq P_2 w - 4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w + C_1 s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3\partial_x w
\end{aligned} \tag{3.47}$$

bulunur. Burada C, C_i ve C_{ij} terimleri yeterince büyük sabit değerleri belirtecektir. (3.47) eşitsizliğinin sağ tarafındaki iki terim için aşağıdaki incelemeler yapılmıştır: İlk olarak, (3.11) eşitsizliğinde $A = P_2 w + C_1 s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3\partial_x w$, $B = 4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w$ seçilerek (3.47) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
|\partial_t w|^2 &\leq \left|P_2 w - 4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w + C_1 s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3\partial_x w\right|^2 \\
&\leq 2\left(P_2 w + C_1 s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3\partial_x w\right)^2 + 2\left(4s\lambda\mu\varphi\partial_x^3 w\right)^2 \\
&= 2\left|P_2 w + C_1 s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3\partial_x w\right|^2 + 32s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\left|\partial_x^3 w\right|^2
\end{aligned} \tag{3.48}$$

biçiminde bulunur ve ikinci olarak, (3.12) ifadesinde $A = P_2 w$, $B = C_1 s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3\partial_x w$ alınarak, (3.48) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
|\partial_t w|^2 &\leq 2\left(2|P_2 w|^2 + 2\left|C_1 s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3\partial_x w\right|^2\right) + 32s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\left|\partial_x^3 w\right|^2 \\
&= 4|P_2 w|^2 + 4C_1^2 s^6\lambda^6\mu^6\varphi^6|\partial_x w|^2 + 32s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\left|\partial_x^3 w\right|^2 \\
&\leq C|P_2 w|^2 + Cs^6\lambda^6\mu^6\varphi^6|\partial_x w|^2 + Cs^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\left|\partial_x^3 w\right|^2
\end{aligned}$$

haline gelir.

Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\dfrac{1}{s\varphi}$ ile sadeleştirilirse

$$\frac{1}{s\varphi}\left|\partial_t w\right|^2 \leq \frac{C}{s\varphi}\left|P_2 w\right|^2 + Cs^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left|\partial_x w\right|^2 + Cs\lambda^2\mu^2\varphi\left|\partial_x^3 w\right|^2 \tag{3.49}$$

elde edilir. (3.49) eşitsizliğinin Q bölgesi üzerinde her iki taraftan integrali alınırsa

$$\begin{aligned}\int_Q \frac{1}{s\varphi}\left|\partial_t w\right|^2 dxdt &\leq \int_Q \frac{C}{s\varphi}\left|P_2 w\right|^2 dxdt + \int_Q Cs^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\ &\quad + \int_Q Cs\lambda^2\mu^2\varphi\left|\partial_x^3 w\right|^2 dxdt \end{aligned}\tag{3.50}$$

bulunur. Ayrıca, (3.43) eşitsizliğinde bulunan

$$\left(65 - \frac{19+2\delta}{6}\right)\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt, \quad \delta\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\frac{b_1}{s}\left|\partial_x w\right|^2 dxdt,$$

$$\left(\frac{59-2\delta}{6}\right)\int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2 dxdt$$

integralleri, sırasıyla, J_3 ün, J_6 nın ve J_9 un içinde mevcut olduğundan, yukarıdaki terimler $(P_1 w, P_2 w)_{L^2(Q)}$ teriminin içine absorbe edilebilir ve (3.43) aşağıdaki hale gelir:

$$\begin{aligned} & 2\int_Q s\lambda^2\mu^2\varphi\left|\partial_x^3 w\right|^2 dxdt + \delta\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\ \leq\ & (P_1 w, P_2 w)_{L^2(Q)} + \varepsilon\left\|P_2 w\right\|^2_{L^2(Q)} + C\int_Q F^2 e^{2s\varphi} dxdt \end{aligned}\tag{3.51}$$

(3.51), (3.50) ifadesinde yerine konulursa, $\dfrac{1}{\varphi} \leq 1$ olup

$$\begin{aligned}\int_Q \frac{1}{s\varphi}\left|\partial_t w\right|^2 dxdt &\leq C\int_Q \frac{1}{s\varphi}\left|P_2 w\right|^2 dxdt + C(P_1 w, P_2 w)_{L^2(Q)} + C\varepsilon\left\|P_2 w\right\|^2_{L^2(Q)} \\ &\quad + C\int_Q F^2 e^{2s\varphi} dxdt \\ &\leq \frac{C}{s}\int_Q \left|P_2 w\right|^2 dxdt + C(P_1 w, P_2 w)_{L^2(Q)} + C\varepsilon\left\|P_2 w\right\|^2_{L^2(Q)} \\ &\quad + C\int_Q F^2 e^{2s\varphi} dxdt \\ &= \left(C\varepsilon + \frac{C}{s}\right)\left\|P_2 w\right\|^2_{L^2(Q)} + C(P_1 w, P_2 w)_{L^2(Q)} \\ &\quad + C\int_Q F^2 e^{2s\varphi} dxdt \end{aligned}\tag{3.52}$$

elde edilir. (3.52) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk iki terim incelenmiştir. (3.45) eşitsizliği $\frac{2C}{s}$ ile, (3.46) eşitsizliği C ile genişletilir ve taraf tarafa toplanırsa

$$\left(C+\frac{2C}{s}\right)(P_1w,P_2w)_{L^2(Q)}+\left(C\varepsilon+\frac{C}{s}\right)\|P_2w\|^2_{L^2(Q)}\leq\left(\frac{C}{2}+\frac{C}{s}\right)\int\limits_Q F^2e^{2s\varphi}dxdt$$

elde edilir. Burada $\varepsilon>0$ küçük, $s>0$ büyük seçilirse

$$C(P_1w,P_2w)_{L^2(Q)}+C\left(\varepsilon+\frac{1}{s}\right)\|P_2w\|^2_{L^2(Q)}\leq C\int\limits_Q F^2e^{2s\varphi}dxdt \tag{3.53}$$

bulunur. (3.53) eşitsizliği 2 ile genişletilirse

$$C(P_1w,P_2w)_{L^2(Q)}+C\left(\varepsilon+\frac{1}{s}\right)\|P_2w\|^2_{L^2(Q)}\leq C\int\limits_Q F^2e^{2s\varphi}dxdt \tag{3.54}$$

ve (3.52) ifadesi (3.54) eşitsizliğinden taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned}&(2C-C)(P_1w,P_2w)_{L^2(Q)}+\left(2C\left(\varepsilon+\frac{1}{s}\right)-C\left(\varepsilon+\frac{1}{s}\right)\right)\|P_2w\|^2_{L^2(Q)}\\&-C\int\limits_Q F^2e^{2s\varphi}dxdt\\\leq\ &2C\int\limits_Q f^2e^{2s\varphi}dxdt-\int\limits_Q\frac{1}{s\varphi}\left|\partial_tw\right|^2dxdt\end{aligned}$$

yazılır. C sayısının keyfi olduğu göz önünde tutularak, gerekli düzenlemelerle

$$C(P_1w,P_2w)_{L^2(Q)}+C\left(\varepsilon+\frac{1}{s}\right)\|P_2w\|^2_{L^2(Q)}\leq C\int\limits_Q F^2e^{2s\varphi}dxdt-\int\limits_Q\frac{1}{s\varphi}\left|\partial_tw\right|^2dxdt \tag{3.55}$$

elde edilir. (3.55) gereği, (3.43) eşitsizliğinin sol tarafı daha da büyür.

$$\begin{aligned}&C\int\limits_Q F^2e^{2s\varphi}dxdt-\int\limits_Q\frac{1}{s\varphi}\left|\partial_tw\right|^2dxdt+C\int\limits_Q F^2e^{2s\varphi}dxdt\\\geq\ &2\int\limits_Q s\lambda^2\mu^2\varphi\left|\partial_x^3w\right|^2dxdt+\left(65-\frac{19+2\delta}{6}\right)\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2w\right|^2dxdt\\&+\left(\frac{59-2\delta}{6}\right)\int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2dxdt\\&+\delta\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_xw\right|^2dxdt.\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizlik düzenlenerek

$$
\begin{aligned}
& \int\limits_Q \frac{1}{s\varphi}\left|\partial_t w\right|^2 dxdt+2\int\limits_Q s\lambda^2\mu^2\varphi\left|\partial_x^3 w\right|^2 dxdt+\left(65-\frac{19+2\delta}{6}\right)\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
& +\left(\frac{59-2\delta}{6}\right)\int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left(1+\frac{b_1}{s}\right)w^2 dxdt+\delta\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left(1+\frac{b_1}{s}\right)\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
\leq\ & C\int\limits_Q F^2 e^{2s\varphi} dxdt
\end{aligned}
$$

şeklini alır. Bulunan eşitsizlik her iki taraftan 2 ile genişletilirse

$$
\begin{aligned}
& \int\limits_Q \frac{2}{s\varphi}\left|\partial_t w\right|^2 dxdt+4\int\limits_Q s\lambda^2\mu^2\varphi\left|\partial_x^3 w\right|^2 dxdt \\
& +\left(130-\frac{19+2\delta}{3}\right)\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
& +\left(\frac{59-2\delta}{3}\right)\int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 w^2 dxdt+\delta\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
\leq\ & C\int\limits_Q F^2 e^{2s\varphi} dxdt \qquad (3.56)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ancak, elde edilen (3.56) eşitsizliği w ya bağlıdır. u fonksiyonuna bağlı bir eşitsizlik elde etmek için aşağıdaki işlemler yapılacaktır. (3.14) gereği

$$u=we^{-s\varphi} \qquad (3.57)$$

dir ve (3.57) eşitsizliğinin her iki tarafının karesi alınarak (3.56) da yerine konulursa

$$\int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 w^2 dxdt=\int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 u^2 e^{2s\varphi} dxdt \qquad (3.58)$$

yazılır. (3.57) eşitsizliğinin her iki taraftan $t-$ye göre türevi alınırsa

$$
\begin{aligned}
\partial_t u &= \left(\partial_t w\right)e^{-s\varphi}+w\partial_x e^{-s\varphi} \\
&= \left(\partial_t w-s\left(-2\beta(t-t_0)\lambda\varphi\right)w\right)e^{-s\varphi} \\
&= \left(\partial_t w+2s\beta(t-t_0)\lambda\varphi w\right)e^{-s\varphi}
\end{aligned}
$$

olup, yukarıdaki eşitliğin her iki taraftan mutlak değeri alınırsa

$$\left|\partial_t u\right|^2=\left|\partial_t w+2s\beta(t-t_0)\lambda\varphi w\right|^2 e^{-2s\varphi} \qquad (3.59)$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.12) eşitsizliğinde $A = \partial_t w$, $B = 2s\beta(t-t_0)\lambda\varphi w$ seçilir ve (3.59) ifadesinde dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
|\partial_t u|^2 e^{2s\varphi} &= |\partial_t w + 2s\beta(t-t_0)\lambda\varphi w|^2 \\
&\leq 2|\partial_t w|^2 + 8s^2\beta^2(t-t_0)^2\lambda^2\varphi^2 w^2
\end{aligned}$$

bulunur. Her iki taraftan Q bölgesi üzerinde integral alınıp düzenlendiğinde $t - t_0 \leq T$ olduğundan

$$\int_Q \frac{1}{s\varphi}|\partial_t u|^2 e^{2s\varphi}dxdt - 8\int_Q s\beta^2 T^2\lambda^2\varphi u^2 e^{2s\varphi}dxdt \leq 2\int_Q \frac{1}{s\varphi}|\partial_t w|^2 dxdt \tag{3.60}$$

elde edilir. (3.57) eşitliğinin her iki tarafı $x-$e göre türevlenirse

$$\begin{aligned}
\partial_x u &= (\partial_x w)e^{-s\varphi} + w\partial_x e^{-s\varphi} \\
&= (\partial_x w - s\lambda\mu\varphi w)e^{-s\varphi} \qquad (3.61)
\end{aligned}$$

ve her iki taraftan mutlak değeri alınırsa

$$|\partial_x u|^2 = |\partial_x w - s\lambda\mu\varphi w|^2 e^{-2s\varphi}$$

yazılır. Her iki taraftan $e^{2s\varphi}$ ile genişletilir ve (3.11) eşitsizliğinde $A = \partial_t w$, $B = s\lambda\mu\varphi w$ seçilirse

$$\begin{aligned}
|\partial_x u|^2 e^{2s\varphi} &= |\partial_x w - s\lambda\mu\varphi w|^2 \\
&\leq 2|\partial_x w|^2 + 2s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 w^2
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bulunan eşitsizliğin her iki tarafında Q bölgesi üzerinde integral alınıp düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5|\partial_x u|^2 e^{2s\varphi}dxdt - 2\int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 w^2 dxdt \\
\leq\ & 2\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5|\partial_x w|^2 dxdt \qquad (3.62)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.61) in x-e göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 u &= (\partial_x w - s\lambda\mu\varphi w)_x e^{-s\varphi} - (\partial_x w - s\lambda\mu\varphi w)s\lambda\mu\varphi e^{-s\varphi} \\
&= \left((\partial_x^2 w - s\lambda\mu_x\varphi w - s\lambda^2\mu^2\varphi w - s\lambda\mu\varphi\partial_x w) - (\partial_x w - s\lambda\mu\varphi w)s\lambda\mu\varphi\right)e^{-s\varphi} \\
&= \left(\partial_x^2 w - s\lambda\mu_x\varphi w - s\lambda^2\mu^2\varphi w - s\lambda\mu\varphi\partial_x w - s\lambda\mu\varphi\partial_x w + s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 w\right)e^{-s\varphi} \\
&= \left(\partial_x^2 w - s\lambda\mu_x\varphi w - s\lambda^2\mu^2\varphi w - 2s\lambda\mu\varphi\partial_x w + s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 w\right)e^{-s\varphi} \qquad (3.63)
\end{aligned}$$

yazılır. (3.63) eşitliğinin her iki taraftan mutlak değeri alınır ve $e^{2s\varphi}$ ile genişletilirse elde edilen ifade, (3.12) eşitsizliğinde $A = \partial_x^2 w - s\lambda\mu_x\varphi w - s\lambda^2\mu^2\varphi w - 2s\lambda\mu\varphi\partial_x w$, $B = s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 w$ seçiminden

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x^2 u\right|^2 e^{2s\varphi} &= \left|\partial_x^2 w - s\lambda\mu_x\varphi w - s\lambda^2\mu^2\varphi w - 2s\lambda\mu\varphi\partial_x w + s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 w\right|^2 \\
&\leq 2\left|\partial_x^2 w - s\lambda\mu_x\varphi w - s\lambda^2\mu^2\varphi w - 2s\lambda\mu\varphi\partial_x w\right|^2 + 2\left|s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 w\right|^2
\end{aligned}$$

dır. Bulunan eşitlik ise, (3.11) de $A = \partial_x^2 w - s\lambda\mu_x\varphi w - s\lambda^2\mu^2\varphi w$, $B = 2s\lambda\mu\varphi\partial_x w$ ve yine (3.11) de $A = \partial_x^2 w - s\lambda\mu_x\varphi w$, $B = s\lambda^2\mu^2\varphi w$ seçiminden

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x^2 u\right|^2 e^{2s\varphi} &\leq 2\left(2\left|\partial_x^2 w - s\lambda\mu_x\varphi w - s\lambda^2\mu^2\varphi w\right|^2 + 2\left(4\left|s\lambda\mu\varphi\partial_x w\right|^2\right)\right) + 2\left|s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 w\right|^2 \\
&\leq 4\left|\partial_x^2 w - s\lambda\mu_x\varphi w - s\lambda^2\mu^2\varphi w\right|^2 + 16\left|s\lambda\mu\varphi\partial_x w\right|^2 + 2\left|s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 w\right|^2 \\
&\leq 4\left(2\left|\partial_x^2 w - s\lambda\mu_x\varphi w\right|^2 + 2\left|s\lambda^2\mu^2\varphi w\right|^2\right) + 16\left|s\lambda\mu\varphi\partial_x w\right|^2 + 2\left|s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 w\right|^2 \\
&\leq 8\left|\partial_x^2 w - s\lambda\mu_x\varphi w\right|^2 + 8\left|s\lambda^2\mu^2\varphi w\right|^2 + 16\left|s\lambda\mu\varphi\partial_x w\right|^2 + 2\left|s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 w\right|^2
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu eşitsizlik için son kez (3.11) de $A = \partial_x^2 w$, $B = s\lambda\mu_x\varphi w$ olarak dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x^2 u\right|^2 e^{2s\varphi} &\leq 16\left|\partial_x^2 w\right|^2 + 16\left|s\lambda\mu_x\varphi w\right|^2 + 8\left|s\lambda^2\mu^2\varphi w\right|^2 + 16\left|s\lambda\mu\varphi\partial_x w\right|^2 + 2\left|s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 w\right|^2 \\
&= 16\left|\partial_x^2 w\right|^2 + 16s^2\lambda^2\mu_x^2\varphi^2 w^2 + 8s^2\lambda^4\mu^4\varphi^2 w^2 + 16s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\left|\partial_x w\right|^2 \\
&\quad + 2s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4 w^2 \qquad (3.64)
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. (3.64) eşitsizliğinin her iki tarafı $s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3$ ile genişletilerek Q üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt - 16\int_Q s^5\lambda^6\mu^4\mu_x^2\varphi^5 w^2 dxdt - 8\int_Q s^5\lambda^8\mu^8\varphi^5 w^2 dxdt \\
&-16\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left|\partial_x w\right|^2 dxdt - 2\int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 w^2 dxdt \\
\leq\ & 16\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt
\end{aligned}$$

bulunur.

Yukarıdaki eşitsizlik düzenlenerek

$$
\begin{aligned}
& \int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 \left|\partial_x^2 u\right|^2 e^{2s\varphi} dxdt - 16\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5 \left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
& -C_{41}\int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 w^2 dxdt \\
\leq \; & 16\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 \left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \qquad (3.65)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği yazılır. (3.61) eşitliğinin $x-$e göre türevi alınırsa

$$
\begin{aligned}
\partial_x^3 u &= \partial_x\left(\partial_x^2 w - s\lambda\mu_x\varphi w - s\lambda^2\mu^2\varphi w - 2s\lambda\mu\varphi\partial_x w + s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 w\right)e^{-s\varphi} \\
& \quad -\left(\partial_x^2 w - s\lambda\mu_x\varphi w - s\lambda^2\mu^2\varphi w - 2s\lambda\mu\varphi\partial_x w + s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2 w\right)s\lambda\mu\varphi e^{-s\varphi} \\
&= (\partial_x^3 w - s\lambda\mu_{xx}\varphi w - s\lambda^2\mu_x\mu\varphi w - s\lambda\mu_x\varphi\partial_x w - 2s\lambda^2\mu\mu_x\varphi w - s\lambda^3\mu^3\varphi w \\
& \quad -s\lambda^2\mu^2\varphi\partial_x w - 2s\lambda\mu_x\varphi\partial_x w - 2s\lambda^2\mu^2\varphi\partial_x w - 2s\lambda\mu\varphi\partial_x^2 w \\
& \quad +2s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2 w + 2s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 w + s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\partial_x w - s\lambda\mu\varphi\partial_x^2 w \\
& \quad +s^2\lambda^2\mu_x\mu\varphi^2 w + s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 w + 2s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\partial_x w - s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 w)e^{-s\varphi} \\
&= (\partial_x^3 w - s\lambda\mu_{xx}\varphi w - 3s\lambda^2\mu_x\mu\varphi w - 3s\lambda\mu_x\varphi\partial_x w - s\lambda^3\mu^3\varphi w \\
& \quad -3s\lambda^2\mu^2\varphi\partial_x w - 3s\lambda\mu\varphi\partial_x^2 w + 3s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2 w + 3s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 w \\
& \quad +3s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\partial_x w - s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 w)e^{-s\varphi}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadenin her iki taraftan mutlak değeri alınırsa ve $e^{2s\varphi}$ ile genişletilirse

$$
\begin{aligned}
\left|\partial_x^3 u\right|^2 e^{2s\varphi} &= \big|\partial_x^3 w - s\lambda\mu_{xx}\varphi w - 3s\lambda^2\mu_x\mu\varphi w - 3s\lambda\mu_x\varphi\partial_x w - s\lambda^3\mu^3\varphi w - 3s\lambda^2\mu^2\varphi\partial_x w \\
& \quad -3s\lambda\mu\varphi\partial_x^2 w + 3s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2 w + 3s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 w + 3s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\partial_x w - s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 w\big|^2
\end{aligned}
$$

olup, yukarıdaki eşitlik, (3.11) ifadesinde

$$
\begin{aligned}
A &= \partial_x^3 w - s\lambda\mu_{xx}\varphi w - 3s\lambda^2\mu_x\mu\varphi w - 3s\lambda\mu_x\varphi\partial_x w - s\lambda^3\mu^3\varphi w - 3s\lambda^2\mu^2\varphi\partial_x w \\
& \quad -3s\lambda\mu\varphi\partial_x^2 w + 3s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2 w + 3s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 w + 3s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\partial_x w, \\
B &= s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 w
\end{aligned}
$$

seçilirse

$$\begin{aligned}\left|\partial_x^3 u\right|^2 e^{2s\varphi} &\le 2\left|\partial_x^3 w - s\lambda\mu_{xx}\varphi w - 3s\lambda^2\mu_x\mu\varphi w - 3s\lambda\mu_x\varphi\partial_x w - s\lambda^3\mu^3\varphi w\right.\\ &\quad -3s\lambda^2\mu^2\varphi\partial_x w - 3s\lambda\mu\varphi\partial_x^2 w + 3s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2 w + 3s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 w\\ &\quad \left.+3s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\partial_x w\right|^2 + 2\left|s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 w\right|^2\end{aligned}$$

haline, (3.12) eşitsizliğinde

$$\begin{aligned}A &= \partial_x^3 w - s\lambda\mu_{xx}\varphi w - 3s\lambda^2\mu_x\mu\varphi w - 3s\lambda\mu_x\varphi\partial_x w - s\lambda^3\mu^3\varphi w\\ &\quad -3s\lambda^2\mu^2\varphi\partial_x w - 3s\lambda\mu\varphi\partial_x^2 w + 3s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2 w + 3s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 w,\\ B &= 3s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\partial_x w\end{aligned}$$

alınırsa, ve yine (3.12) eşitsizliğinde

$$\begin{aligned}A &= \partial_x^3 w - s\lambda\mu_{xx}\varphi w - 3s\lambda^2\mu_x\mu\varphi w - 3s\lambda\mu_x\varphi\partial_x w - s\lambda^3\mu^3\varphi w\\ &\quad -3s\lambda^2\mu^2\varphi\partial_x w - 3s\lambda\mu\varphi\partial_x^2 w + 3s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2 w,\\ B &= 3s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 w\end{aligned}$$

olarak dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\left|\partial_x^3 u\right|^2 e^{2s\varphi} &\le 4\left|\partial_x^3 w - s\lambda\mu_{xx}\varphi w - 3s\lambda^2\mu_x\mu\varphi w - 3s\lambda\mu_x\varphi\partial_x w - s\lambda^3\mu^3\varphi w\right.\\ &\quad \left.-3s\lambda^2\mu^2\varphi\partial_x w - 3s\lambda\mu\varphi\partial_x^2 w + 3s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2 w + 3s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 w\right|^2\\ &\quad +36\left|s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\partial_x w\right|^2 + 2\left|s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 w\right|^2\end{aligned}$$

şekline getirilir. (3.12) eşitsizliğinde

$$\begin{aligned}A &= \partial_x^3 w - s\lambda\mu_{xx}\varphi w - 3s\lambda^2\mu_x\mu\varphi w - 3s\lambda\mu_x\varphi\partial_x w - s\lambda^3\mu^3\varphi w\\ &\quad -3s\lambda^2\mu^2\varphi\partial_x w - 3s\lambda\mu\varphi\partial_x^2 w,\\ B &= 3s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2 w\end{aligned}$$

seçilirse

$$\begin{aligned}\left|\partial_x^3 u\right|^2 e^{2s\varphi} &\le 8\left|\partial_x^3 w - s\lambda\mu_{xx}\varphi w - 3s\lambda^2\mu_x\mu\varphi w - 3s\lambda\mu_x\varphi\partial_x w - s\lambda^3\mu^3\varphi w\right.\\ &\quad \left.-3s\lambda^2\mu^2\varphi\partial_x w - 3s\lambda\mu\varphi\partial_x^2 w + 3s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2 w\right|^2 + 72\left|s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 w\right|^2\\ &\quad +36\left|s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\partial_x w\right|^2 + 2\left|s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 w\right|^2\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.11) ifadesinde

$$\begin{aligned} A &= \partial_x^3 w - s\lambda\mu_{xx}\varphi w - 3s\lambda^2\mu_x\mu\varphi w - 3s\lambda\mu_x\varphi\partial_x w - s\lambda^3\mu^3\varphi w - 3s\lambda^2\mu^2\varphi\partial_x w, \\ B &= 3s\lambda\mu\varphi\partial_x^2 w \end{aligned}$$

olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \left|\partial_x^3 u\right|^2 e^{2s\varphi} \leq\ & 16\left|\partial_x^3 w - s\lambda\mu_{xx}\varphi w - 3s\lambda^2\mu_x\mu\varphi w - 3s\lambda\mu_x\varphi\partial_x w - s\lambda^3\mu^3\varphi w\right. \\ & \left. -3s\lambda^2\mu^2\varphi\partial_x w - 3s\lambda\mu\varphi\partial_x^2 w\right|^2 + 144\left|s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2 w\right|^2 \\ & +72\left|s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 w\right|^2 + 36\left|s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\partial_x w\right|^2 + 2\left|s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 w\right|^2 \end{aligned}$$

bulunur. (3.11) eşitsizliğinde

$$\begin{aligned} A &= \partial_x^3 w - s\lambda\mu_{xx}\varphi w - 3s\lambda^2\mu_x\mu\varphi w - 3s\lambda\mu_x\varphi\partial_x w - s\lambda^3\mu^3\varphi w, \\ B &= 3s\lambda^2\mu^2\varphi\partial_x w \end{aligned}$$

konumu yapılırsa

$$\begin{aligned} \left|\partial_x^3 u\right|^2 e^{2s\varphi} \leq\ & 32\left|\partial_x^3 w - s\lambda\mu_{xx}\varphi w - 3s\lambda^2\mu_x\mu\varphi w - 3s\lambda\mu_x\varphi\partial_x w - s\lambda^3\mu^3\varphi w\right. \\ & \left. -3s\lambda^2\mu^2\varphi\partial_x w\right|^2 + 288\left|s\lambda\mu\varphi\partial_x^2 w\right|^2 + 144\left|s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2 w\right|^2 \\ & +72\left|s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 w\right|^2 + 36\left|s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\partial_x w\right|^2 + 2\left|s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 w\right|^2 \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. (3.11) ifadesinde

$$A = \partial_x^3 w - s\lambda\mu_{xx}\varphi w - 3s\lambda^2\mu_x\mu\varphi w - 3s\lambda\mu_x\varphi\partial_x w, \quad B = s\lambda^3\mu^3\varphi w$$

yapılarak

$$\begin{aligned} \left|\partial_x^3 u\right|^2 e^{2s\varphi} \leq\ & 64\left|\partial_x^3 w - s\lambda\mu_{xx}\varphi w - 3s\lambda^2\mu_x\mu\varphi w - 3s\lambda\mu_x\varphi\partial_x w - s\lambda^3\mu^3\varphi w\right|^2 \\ & +576\left|s\lambda^2\mu^2\varphi\partial_x w\right|^2 + 288\left|s\lambda\mu\varphi\partial_x^2 w\right|^2 + 144\left|s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2 w\right|^2 \\ & +72\left|s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 w\right|^2 + 36\left|s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\partial_x w\right|^2 + 2\left|s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 w\right|^2 \end{aligned}$$

bulunur. (3.11) eşitsizliğinde

$$A = \partial_x^3 w - s\lambda\mu_{xx}\varphi w - 3s\lambda^2\mu_x\mu\varphi w, \qquad B = 3s\lambda\mu_x\varphi\partial_x w$$

alınırsa

$$\begin{aligned} \left|\partial_x^3 u\right|^2 e^{2s\varphi} \leq\ & 128\left|\partial_x^3 w - s\lambda\mu_{xx}\varphi w - 3s\lambda^2\mu_x\mu\varphi w - 3s\lambda\mu_x\varphi\partial_x w\right|^2 + 128\left|s\lambda^3\mu^3\varphi w\right|^2 \\ & +576\left|s\lambda^2\mu^2\varphi\partial_x w\right|^2 + 288\left|s\lambda\mu\varphi\partial_x^2 w\right|^2 + 144\left|s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2 w\right|^2 \\ & +72\left|s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 w\right|^2 + 36\left|s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\partial_x w\right|^2 + 2\left|s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 w\right|^2 \end{aligned}$$

bulunur. (3.11) ifadesinde

$$A = \partial_x^3 w - s\lambda\mu_{xx}\varphi w, \qquad B = 3s\lambda^2\mu_x\mu\varphi w$$

seçilirse

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x^3 u\right|^2 e^{2s\varphi} &\leq 256\left|\partial_x^3 w - s\lambda\mu_{xx}\varphi w - 3s\lambda^2\mu_x\mu\varphi w\right|^2 + 1152\left|s\lambda\mu_x\varphi\partial_x w\right|^2 \\
&\quad +128\left|s\lambda^3\mu^3\varphi w\right|^2 + 576\left|s\lambda^2\mu^2\varphi\partial_x w\right|^2 + 288\left|s\lambda\mu\varphi\partial_x^2 w\right|^2 \\
&\quad +144\left|s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2 w\right|^2 + 72\left|s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 w\right|^2 + 36\left|s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\partial_x w\right|^2 \\
&\quad +2\left|s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 w\right|^2 \\
&\leq 576\left|\partial_x^3 w - s\lambda\mu_{xx}\varphi w\right|^2 + 1728\left|s\lambda^2\mu_x\mu\varphi w\right|^2 + 1152\left|s\lambda\mu_x\varphi\partial_x w\right|^2 \\
&\quad +128\left|s\lambda^3\mu^3\varphi w\right|^2 + 576\left|s\lambda^2\mu^2\varphi\partial_x w\right|^2 + 288\left|s\lambda\mu\varphi\partial_x^2 w\right|^2 \\
&\quad +144\left|s^2\lambda^2\mu\mu_x\varphi^2 w\right|^2 + 72\left|s^2\lambda^3\mu^3\varphi^2 w\right|^2 + 36\left|s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\partial_x w\right|^2 \\
&\quad +2\left|s^3\lambda^3\mu^3\varphi^3 w\right|^2 \\
&\leq 1152\left|\partial_x^3 w\right|^2 + 1152 s^2\lambda^2\mu_{xx}^2\varphi^2 w^2 + 1728 s^2\lambda^4\mu_x^2\mu^2\varphi^2 w^2 \\
&\quad +1152 s^2\lambda^2\mu_x^2\varphi^2\left|\partial_x w\right|^2 + 128 s^2\lambda^6\mu^6\varphi^2 w^2 + 576 s^2\lambda^4\mu^4\varphi^2\left|\partial_x w\right|^2 \\
&\quad +288 s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\left|\partial_x^2 w\right|^2 + 144 s^4\lambda^4\mu^2\mu_x^2\varphi^4 w^2 + 72 s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4 w^2 \\
&\quad +36 s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4\left|\partial_x w\right|^2 + 2 s^6\lambda^6\mu^6\varphi^6 w^2
\end{aligned}$$

elde edilir ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&\left|\partial_x^3 u\right|^2 e^{2s\varphi} - 1152 s^2\lambda^2\mu_{xx}^2\varphi^2 w^2 - 1728 s^2\lambda^4\mu_x^2\mu^2\varphi^2 w^2 - 1152 s^2\lambda^2\mu_x^2\varphi^2\left|\partial_x w\right|^2 \\
&-128 s^2\lambda^6\mu^6\varphi^2 w^2 - 576 s^2\lambda^4\mu^4\varphi^2\left|\partial_x w\right|^2 - 288 s^2\lambda^2\mu^2\varphi^2\left|\partial_x^2 w\right|^2 - 144 s^4\lambda^4\mu^2\mu_x^2\varphi^4 w^2 \\
&-72 s^4\lambda^6\mu^6\varphi^4 w^2 - 36 s^4\lambda^4\mu^4\varphi^4\left|\partial_x w\right|^2 - 2 s^6\lambda^6\mu^6\varphi^6 w^2 \\
\leq\ & 1152\left|\partial_x^3 w\right|^2
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. $i, j \in \mathbb{N}$ için C_{ij} yeterince büyük sabitler olmak üzere, gerekli düzenleme ve absorbe işlemleri sonucu

$$\begin{aligned}
&s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^3 u\right|^2 e^{2s\varphi} - C_{51}s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left|\partial_x^2 w\right|^2 - C_{52}s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7\left|\partial_x w\right|^2 \\
&-C_{53}s^9\lambda^{10}\mu^{10}\varphi^9 w^2 \\
\leq\ & C_{54}s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^3 w\right|^2 \qquad (3.66)
\end{aligned}$$

olup (3.58), (3.60), (3.62), (3.64), (3.66) eşitsizlikleri (3.56) da yerine yazılırsa ve (3.62) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5 \left|\partial_x u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt - 2\int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 w^2 dxdt \leq 2\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5 \left|\partial_x w\right|^2 dxdt$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&\int_Q \frac{2}{s\varphi}\left|\partial_t w\right|^2 dxdt + 4\int_Q s\lambda^2\mu^2\varphi \left|\partial_x^3 w\right|^2 dxdt - 2C_{31}\int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 w^2 dxdt \\
&+\left(130 - \frac{19+2\delta}{3}\right)\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 \left|\partial_x^2 w\right|^2 dxdt \\
&+\left(\frac{59-2\delta}{3}\right)\int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 w^2 dxdt + C_{31}\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5 \left|\partial_x u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt \\
\leq\ & C\int_Q F^2 e^{2s\varphi}dxdt
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&C_{21}\int_Q \frac{1}{s\varphi}\left|\partial_t u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt - C_{22}\int_Q s\beta^2 T^2\lambda^2\varphi u^2 e^{2s\varphi}dxdt + C_{43}\int_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 \left|\partial_x^2 u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt \\
&+4\int_Q \Big(s\lambda^2\mu^2\varphi \left|\partial_x^3 u\right|^2 e^{2s\varphi} - C_{51}s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 \left|\partial_x^2 w\right|^2 - C_{52}s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5 \left|\partial_x w\right|^2 \\
&-C_{53}s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 w^2\Big) dxdt - C_{42}\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5 \left|\partial_x w\right|^2 dxdt - C_{41}\int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 w^2 dxdt \\
&+C_1\int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 u^2 e^{2s\varphi}dxdt - C_{32}\int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 w^2 dxdt + C_{31}\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5 \left|\partial_x u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt \\
\leq\ & C\int_Q F^2 e^{2s\varphi}dxdt
\end{aligned}$$

halini alır, bu eşitsizlikte terimler absorbe edilirse

$$\begin{aligned}
&C_{21}\int_Q \frac{1}{s\varphi}\left|\partial_t u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt + C_3\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5 \left|\partial_x u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt \\
&+\int_Q \left(C_{52}s\lambda^2\mu^2\varphi \left|\partial_x^3 u\right|^2 e^{2s\varphi} - C_{51}s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3 \left|\partial_x^2 w\right|^2\right) dxdt \\
&+C_2\int_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5 \left|\partial_x w\right|^2 dxdt + C_1\int_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 u^2 e^{2s\varphi}dxdt
\end{aligned}$$

$$\leq C\int\limits_Q Fe^{2s\varphi}dxdt$$

olur. Burada $s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 w\right|^2$ terimini içeren integral göz önüne alınıp (3.64) yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
&C_{21}\int\limits_Q \frac{1}{s\varphi}\left|\partial_t u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt + C_{52}\int\limits_Q s\lambda^2\mu^2\varphi\left|\partial_x^3 u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt \\
&-C_{61}\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt + C_{62}\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
&+C_{63}\int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 w^2 dxdt + C_2\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
&+C_1\int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 u^2 e^{2s\varphi}dxdt + C_3\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left|\partial_x u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt \\
\leq\ & C\int\limits_Q F^2 e^{2s\varphi}dxdt
\end{aligned}$$

elde edilir ve tekrardan absorbe edilirse

$$\begin{aligned}
&C_{21}\int\limits_Q \frac{1}{s\varphi}\left|\partial_t u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt + C_{52}\int\limits_Q s\lambda^2\mu^2\varphi\left|\partial_x^3 u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt \\
&-C_{61}\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt + C_2\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left|\partial_x w\right|^2 dxdt \\
&+C_1\int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 u^2 e^{2s\varphi}dxdt + C_3\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left|\partial_x u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt \\
\leq\ & C\int\limits_Q F^2 e^{2s\varphi}dxdt
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Eşitsizlikte $s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left|\partial_x w\right|^2$ terimini içeren integral göz önüne alınıp (3.62) ifadesi, yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&C_{21}\int\limits_Q \frac{1}{s\varphi}\left|\partial_t u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt + C_{52}\int\limits_Q s\lambda^2\mu^2\varphi\left|\partial_x^3 u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt \\
&-C_{61}\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt + C_2\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left|\partial_x u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt \\
&-2C_2\int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 w^2 dxdt + C_1\int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 u^2 e^{2s\varphi}dxdt
\end{aligned}$$

$$+C_3\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left|\partial_x u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt \leq C\int\limits_Q F^2 e^{2s\varphi}dxdt$$

ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& C_{21}\int\limits_Q \frac{1}{s\varphi}\left|\partial_t u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt + C_{52}\int\limits_Q s\lambda^2\mu^2\varphi\left|\partial_x^3 u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt + C_1\int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 u^2 e^{2s\varphi}dxdt \\
& -C_{61}\int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt + C_2\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left|\partial_x u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt \\
\leq\ & C\int\limits_Q F^2 e^{2s\varphi}dxdt
\end{aligned}$$

bulunur. Absorbe işlemi sonucu

$$\begin{aligned}
& \int\limits_Q \frac{1}{s\varphi}\left|\partial_t u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt + \int\limits_Q s\lambda^2\mu^2\varphi\left|\partial_x^3 u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt + \int\limits_Q s^3\lambda^4\mu^4\varphi^3\left|\partial_x^2 u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt \\
& +\int\limits_Q s^5\lambda^6\mu^6\varphi^5\left|\partial_x u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt + \int\limits_Q s^7\lambda^8\mu^8\varphi^7 u^2 e^{2s\varphi}dxdt \\
\leq\ & C\int\limits_Q F^2 e^{2s\varphi}dxdt
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da, $F = \left(\partial_t - \partial_x^4\right)u$ olduğu dikkate alınırsa ispat tamamlanır.

3.3 VERİLEN CARLEMAN DEĞERLENDİRMESİ İÇİN BİR UYGULAMA

(3.67) kesirli difüzyon denkleminin, (3.68) başlangıç koşulu ve (3.69) Cauchy verisini sağlayan (3.67) için başlangıç-Cauchy problemi aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
\left(\partial_t^{\frac{1}{2}} - \partial_x^2\right)u(x,t) &= p(x)u(x,t), \qquad (x,t)\in Q, && (3.67)\\
u(x,0) &= a(x), \qquad x\in(0,l)\equiv\Omega, && (3.68)\\
u(0,t) &= g(t), \partial_x u(0,t) = h(t), \qquad t\in(0,T). && (3.69)
\end{aligned}$$

Burada $a(x), g(t)$ ve $h(t)$ fonksiyonları verilmiştir, ve Q bölgesi üzerinde $a \not\equiv 0$ veya $(0,T)$ üzerinde $g, h \not\equiv 0$ dır, ve $\partial_t^{\frac{1}{2}}$ Caputo anlamında kesirli türevdir. Bu ters problemin amacı $u(.,t)$ $(t_0 > 0)$ ek bilgisi yardımıyla $p(x)$ katsayısının elde edilmesidir.

Bu problem, fiziksel olarak, heterojen su taşıyan katmanda düzensiz difüzyon olayını modellemek için kullanılır.

Gösterilen Carleman değerlendirmesi, $(3.67)-(3.69)$ probleminin çözümünün kararlılığını incelemekte kullanılmaktadır (Yamamoto and Zhang 2012).

KAYNAKLAR

Adams R A and Fournier J J F (2003) *Sobolev spaces.* Elsevier, 305 pp.

Anar İ E (2005) *Kısmi Diferensiyel Denklemler.* Palme Yayıncılık, Ankara, 552 s.

Balcı M (1999) *Analiz Cilt 1.* 6. Baskı, Balcı Yayınları, Ankara, 341 s.

Balcı M (1997) *Analiz Cilt 2.* Balcı Yayınları, Ankara, 420 s.

Bukhgeim A and Klibanov M (1981) Global Uniqueness of Class of Multidimensional Inverse Problems. *Soviet Mathematics – Doklady,* 24 (2): 244-247.

Carl S, Le V K and Motreanu D (2007) *Nonsmooth Variational Problems and Their Inequalities: Comparison Principles And Applications.* Springer, New York, 497 pp.

Carleman T (1939) Sur un Problème D'unicité Pour Les Système D'équations Aux Dérivées Partielles à Deux Variables Indépendentes. *Ark. Mater. Astron. Fys.*, 26 (17): 1-9.

Cheng J, Nakagawa J, Yamamoto M *and* Yamazaki T (2009) Uniqueness in an Inverse Problem for a One-Dimensional Fractional Diffusion Equation. *Inverse Problems,* 25: 1-16.

Çağlıyan M ve Çelebi O (2013) *Kısmi Diferensiyel Denklemler.* 3. Baskı, Dora Yayınları, Bursa, 276 s.

Egerov Y V (1986) *Linear Differential Equations of Principal Type.* Consultants Bureau, New York, 310 pp.

Gölgeleyen F and Yamamoto M (2015) Stability for Some Inverse Problems for Transport Equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis,* 48 (4): 2319-2344.

Gölgeleyen İ ve Kaytmaz Ö (2016) Ters ve Kötü Konulmuş Problemler Teorisinin Bilim ve Teknolojideki Bazı Uygulamaları. *Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi,* 6 (1): 230-237.

Hatano Y and Hatano N (1998) Dispersive Transport of Ions in Column Experiments: An Explanation of Long-Tailed Profiles. *Water Resources Research,* 34 (5), 1027-1033.

Hörmander L (1963) *Linear Partial Differential Operators.* Springer, 288 pp.

Hörmander L (1985) *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I–IV.* Springer, 1712 pp.

Isakov V (1990) *Inverse Source Problems.* Mathematical Surveys and Monographs, Providence, 191 pp.

Isakov V (1993) Carleman Type Estimates in an Anisotropic Case and Applications. *Journal of Differential Equations,* 105 (2): 217-238.

Isakov V (1998) *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 286 pp.

Jin B and Rundell W (2012) An Inverse Problem for a One-Dimensional Time-Fractional Diffusion Problem. *Inverse Problems,* 28: 1-19.

Kilbas A A, Srivastava H M and Trujillo J J (2006) *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Elsevier, 523 pp.

Kreyzig E (1989) *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, New York, 704 pp.

Mikhailov V P (1978) *Partial Differential Equations.* Mir Publishers, Moscow, 396 pp.

Musayev B ve Alp M (2000) *Fonksiyonel Analiz.* Balcı Yayınları, Kütahya, 704 pp.

Narkiewicz W (2000) *The Development of Prime Number Theory.* Springer, 448 pp.

Pankov A A (1997) *G-Convergence and Homogenization of Nonlinear Partial Differential Operators.* Springer Science & Business Media, 249 pp.

Sakamoto K and Yamamoto M (2011) Initial Value/Boundary Value Problems for Fractional Diffusion-Wave Equations and Applications to Some Inverse Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 382 (1): 426-447.

Samko S G, Kilbas A A and Marichev O I (1993) *Fractional Integrals and Derivatives.* Gordon and Breach Science Publishers, 976 pp.

Tataru D (1996) Carleman Estimates And Unique Continuation for Solutions to Boundary Value Problems. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées,* 75 (4): 367-408.

Xu X, Cheng J and Yamamoto M (2011) Carleman Estimate for a Fractional Diffusion Equation with Half Order and Application. *Applicable Analysis*, 90 (9): 1355-1371.

Yamamoto M (2009) Carleman Estimates for Parabolic Equations and Applications. *Inverse Problems,* 25 (12): 1-75.

Yamamoto M and Zhang Y (2012) Conditional Stability in Determining a Zeroth-Order Coefficient in a Half-Order Fractional Diffusion Equation by a Carleman Estimate. *Inverse Problems,* 28 (10): 1-10.

Yıldız M (1995) $Lu \equiv x\Delta u + ku_x = xf(x,y)$ Eliptik Denklemi için Genelleştirilmiş Fonksiyon Sınıflarında Bazı Problemler. *Doktora Tezi,* Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara, 86 s.

ÖZGEÇMİŞ

Özge Arıbaş, 1989 yılında Ankara'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini aynı ilde tamamladıktan sonra, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2012 yılında mezun oldu. 2015 yılında Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans programına başladı. Aynı yıl Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'ne araştırma görevlisi olarak atandı.

ADRES BİLGİLERİ:

Adres: Güven Mah. Meneviş Sok. Yağcıoğlu Apt. No:11 Çankaya / Ankara.

Tel: (+90) 312 428 32 88

E-posta: ozgearibas@gmail.com