BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKLİ FONKSİYONLAR UZAYINDA TANIMLI BAZI OPERATÖRLERİN $q-$ANALİZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NURULLAH COŞKUN

AĞUSTOS 2017

BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKLİ FONKSİYONLAR UZAYINDA TANIMLI BAZI OPERATÖRLERİN $q-$ANALİZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

Nurullah COŞKUN

DANIŞMAN : Yrd. Doç. Dr. Nazmiye GÖNÜL BİLGİN

ZONGULDAK

AĞUSTOS 2017

KABUL:

Nurullah COŞKUN tarafından hazırlanan "Sürekli Fonksiyonlar Uzayında Tanımlı Bazı Operatörlerin q −Analizi" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 24/08/2017

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Nazmiye GÖNÜL BİLGİN ....
Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. Yüksel SOYKAN ....
Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. Gülnihal MERAL ....
Ankara Yıldırım Beyazıt Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. ..../..../20....

Doç. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Nurullah COŞKUN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SÜREKLİ FONKSİYONLAR UZAYINDA TANIMLI BAZI OPERATÖRLERİN

q −ANALİZİ

Nurullah COŞKUN

Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Nazmiye GÖNÜL BİLGİN

Ağustos 2017, 167 sayfa.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, doğrusal pozitif operatörlerle ilgili genel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde sekiz operatörün bazı yaklaşım özellikleri, sürekli fonksiyonların uzayında Korovkin tipli teorem yardımıyla incelenmiştir. Bu operatörlerin yaklaşım hızları süreklilik modülü yardımıyla elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, bir değişkenli q −operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde, iki değişkenli bazı q −operatörler tanıtılmıştır. Bu operatörlerin düzgün yakınsaklığı Volkov tipli teorem yardımıyla incelenmiştir.

ÖZET(devam ediyor)

Anahtar Kelimeler: Doğrusal Pozitif Operatörler, Ağırlıklı uzaylar, q- q −Analiz, Süreklilik modülü, Korovkin Teoremi, Volkov Teoremi

Bilim Kodu: 403.03.00

ABSTRACT

M.Sc.Thesis

$q-$ ANALYSIS OF SOME OPERATORS DEFINED IN CONTINUOUS FUNCTIONS

Nurullah COSKUN

Bulent Ecevit University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Thesis Advisor :Asst.Prof. Dr. Nazmiye GONUL BILGIN

August 2017, 167 pages

This thesis consists of fourt chapters. In the first chapter, general information about the linear positive operators is given.

In the second chapter, eight operators based on $q-$integers are introduced and some convergence properties of these operators are investigated in continous functions with the help of Korovkin type theorem. In addition, the convergence rates of approximation of these operators are obtained with the help of the modulus of continuity.

In the third chapter, the approximation properties operators for one variables based on q integers are examined. In the fourth chapter, some q-operators for two variables are introduced and uniform convergence of these operators is examined by the help of Volkov theorem.

ABSTRACT(continued)

Keywords: Linear Positive Operators, Weighted Spaces, q-analysis, Modulus of Continuity, Korovkin Theorem, Volkov Theorem.

Science Code : 403.03.00.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisansa başladığım günden itibaren güler yüzü, hoşgörüsü ve sevgisiyle onun öğrencisi olma ayrıcalığını ve mutluluğunu bana yaşatan, tezin her aşamasında bilgi ve tecrübelerini hiçbir zaman esirgemeyerek değerli fikir ve önerileri ile çalışmalarıma yön veren, tezin ortaya çıkmasında büyük emeği geçen çok değerli danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Nazmiye GÖNÜL BİLGİN'e;

Değerli vakitlerini ayırarak tezi inceleyen Doç. Dr. Yüksel SOYKAN ve Doç. Dr. Gülnihal MERAL hocalarıma da teşekkürlerimi sunarım.

Her türlü yardımlarını, bilgilerini benden esirgemeyip bana destek olan Bülent Ecevit Üniversitesindeki arkadaşlarım Merve ÇETİNKAYA, Numan ÖZGÜR, Elif ARSLAN, Melih TOLUNAY, Umut ÖZCENGİZ, Derya DOĞAN' a teşekkürlerimi sunarım.

Her konuda destek olan kuzenlerim Emin KAYABAŞI, Elif KAYABAŞI, Kübra Süheyla BİLGİN ve Furkan Efe ZOR'a teşekkürlerimi sunarım.

Her konuda olduğu gibi bu çalışmalar esnasında da bana en büyük desteği veren babam Fatih COŞKUN, annem Gülbahar COŞKUN abim Abdulkerim COŞKUN ve yengem Tuğçe COŞKUN' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$C[a,b]$: $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı

$\rho(x)$: Ağırlık fonksiyonu

$B_\rho(\mathbb{R})$: Her $x \in \mathbb{R}$ için $|f(x)| \leq M_f \cdot \rho(x)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlarının uzayı

$C_\rho(\mathbb{R})$: $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayından olan sürekli fonksiyonların uzayı

$\|\cdot\|_{C[a,b]}$: $C[a,b]$ uzayında norm

$\|\cdot\|_\rho$: $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayında norm

$\|\cdot\|_p$: $L_p(a,b)$ uzayında norm

$\|\cdot\|_{p,\rho}$: $L_{p,\rho}(loc)$ uzayında norm

$\|L\|_{X\to Y}$: X normlu uzayından Y normlu uzayına dönüşüm yapan L operatörünün normu

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Yaklaşım teorisi Matematiksel Analizin önemli çalışma alanlarından birisidir. Yaklaşım teorisinde temel amaç, keyfi bir fonksiyonun daha basit, daha kullanışlı olan diğer fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmektir. Burada basit fonksiyonlar olarak polinomları kullanmak ilk akla gelen örnektir. Nitekim Chebyshev 1854 yılında, bir polinomun, verilen polinomlar sınıfı içinde bir fonksiyona en yakın olup olmadığını düzgün norma göre belirleyen önemli bir kriter vermiştir.

Weierstrass 1885 yılında sürekli fonksiyonlara polinomlarla yaklaşımın mümkün olduğunu gösteren önemli bir teorem vermiştir. 1908 yılında Landau Weierstrass Teoreminin bir başka ispatını vermiştir. Weierstrass Teoreminin en çok bilinen ispatı 1912 yılında Bernstein tarafından verilmiştir.

Bernstein'ın polinom dizilerini oluşturma yöntemi doğrusal pozitif operatörlerle yaklaşım teorisinin ilk adımıdır. Sonraki yıllarda, kapalı bir aralıkta sürekli fonksiyonlara yaklaşım için farklı doğrusal pozitif operatörler tanımlanarak kullanılmaya başlanmıştır.

Yaklaşım teorisinde operatörün yakınsaması kadar bu yakınsamanın hızı da önemlidir. Burada hız ne kadar hızlı olursa yakınsama da o kadar iyi olmaktadır. Yakınsaklık hızı için Totik tarafından tanımlanan süreklilik modülü ve K - fonksiyoneli kullanılmaktadır.

Popoviciu 1935 de, $[0,1]$ aralığında sürekli bir f fonksiyonuna Bernstein polinomlarıyla yaklaşımın hızını süreklilik modülünün yardımıyla hesaplamıştır. Chlodovsky 1937 yılında, Bernstein polinomlarının sonsuz aralıkta bir genellemesini tanımlamıştır. Bu polinomlar Bernstein-Chlodovsky polinomları olarak bilinir.

Mirakyan 1941 de, Szasz 1950 de daha sonra Szasz-Mirakyan operatörleri olarak adlandırılacak operatörleri tanımlayarak bazı yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir.

1951 de Bohman f fonksiyonunun [0,1] aralığı dışındaki değerlerinden bağımsız olan operatörler için kullanışlı bir yöntem vermiştir. Korovkin 1953 de Bohman'ın yöntemini genelleştiren doğrusal pozitif operatörlerle yaklaşım alanına yeni bir soluk getiren bir çalışma ortaya koymuştur.

1957 de Baskakov pozitif yarı eksende sürekli olan ve ağırlık fonksiyonuna bölümünün limiti sonlu olan bir operatörler dizisi tanımlayarak yaklaşım özelliklerini çalışmıştır. Bu operatörler literatürde Baskakov operatörleri olarak bilinmektedir.

1960 yılında [0,1) aralığın da Meyer König Zeller tarafından adlarıyla anılan bir operatör tanımlanmıştır. Daha sonra 1967 de Durrmeyer integrallenebilir fonksiyonlara [0,1] aralığında yaklaşan operatörleri tanıtmıştır. Stancu 1969 da Bernstein operatörünü genelleştirmiştir. Bu operatörler Bernstein-Stancu operatörleri olarak adlandırılır.

1970'te Gadjiev ve İbragimov tarafından [0,A] uzayında bir operatör tanımlanarak bu operatörün Korovkin teoremini sağladığı gösterilmiştir. 1974 de Gadjiev sonlu olmayan aralıklarda doğrusal pozitif operatörlerle yaklaşım teoremini ortaya koymuştur.

Bleimann, Butzer ve Hahn 1980'de pozitif yarı eksende bir operatör tanımlayarak yaklaşım özelliklerini vermişlerdir. Kasana vd. ve Mazhar-Totik birbirinden bağımsız olarak 1985'te Szasz Durmeyer operatörünü tanımlamışlardır.

Bernstein polinomlarının iki değişkenli fonksiyonlar sınıfındaki yaklaşım özellikleri ilk defa Stancu tarafından 1969 da incelenmiştir. 2004 de iki değişkenli Bernstein-Stancu polinomları Büyükyazıcı ve İbikli tarafından tanımlanmıştır.

İbikli 2005'te üçgensel bölgede iki değişkenli Bernstein-Chlodowsky tipi polinomlar dizisi tanımlayarak bu polinomların yaklaşım özelliklerini vermiştir.

Yaklaşım teorisi halen aktif çalışmaların yoğun olarak devam ettiği bir alandır. Günümüzde q-analiz metotları kullanılarak operatör dizilerinin yaklaşım koşullarını araştırmak, yaklaşım teorisinin önemli araştırma alanlarından birisi olmuştur. Operatörlerin q genelleşmelerini çalışmaktaki amaç q'nun seçimine bağlı olarak daha iyi bir yaklaşım derecesi elde etmektir.

Yaklaşım teorisinde $q-$genelleşme kavramı ilk kez Lupaş tarafından 1987 de ortaya konulmuştur. Bu genelleştirme Bernstein polinomları için yapılmıştır.

1996 da Phillips klasik Bernstein polinomlarının farklı bir q tipli genelleşmesini tanımlamıştır. Bu genelleşme $q-$Bernstein polinomları olarak literatürde anılmaktadır. Daha sonra klasik operatörlerin bir çoğunun q genelleşmeleri tanımlanmış ve yaklaşım özellikleri çalışılmıştır. 2000 de Barbosu iki değişkenli $q-$Bernstein operatörlerini tanıtmıştır.

Gupta tarafından 2008 de Durrmeyer operatörlerinin q genelleştirmesi olan $q-$Durrmeyer operatörleri tanımlanmıştır.

Bernstein Chlodowsky polinomunun q genelleştirmesi Karslı ve Gupta tarafından 2008'de tanımlanmıştır. Daha sonra Büyükyazıcı 2009'da iki değişkenli $q-$Bernstein-Chlodowsky tipi polinomlar dizisi tanımlayarak bu polinomların yaklaşım özelliklerini vermiştir

2006'da Aral Szasz-Mirakjan operatörlerinin bir q genelleştirmesini tanımlamıştır. Ardından 2010'da Mahmudov Szasz-Mirakjan operatörlerinin bir başka $q-$genelleşmesini tanımlanmıştır.

2006'da Doğru ve Gupta tarafından iki değişkenli $q-$Meyer-König ve Zeller operatörü tanımlanarak yaklaşım özellikleri çalışılmıştır.

2008'de Ersan tarafından İki değişkenli $q-$Bleimann, Butzer ve Hahn operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Bunun dışında birçok operatörün q genelleştirmesi tanımlanmıştır. Literatürdeki doğrusal pozitif operatörlerin iki değişkenli halleri ve q genelleşmeleri yeni çalışma alanları oluşturmaktadır.

1.1 SONLU BİR ARALIKTA TANIMLI SÜREKLİ FONKSİYONLAR UZAYI

Tanım 1.1.1

$[a,b]$ sonlu aralığı üzerinde tanımlanmış ve aralığın tüm noktalarında sürekli olmakla birlikte a da soldan b de sağdan sürekli olan $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonlar uzayına $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı denir ve kısaca $C[a,b]$ şeklinde gösterilir. $C[a,b]$ bir doğrusal uzaydır(Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Teorem 1.1.1

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise f, bu aralıkta maksimum ve minimum değerini alır(Coşkun 2002).

Tanım 1.1.2

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Teorem 1.1.1 yardımıyla

$$\|f\|_C := \max_{x\in[a,b]}|f(x)| \tag{1.1}$$

$C[a,b]$ uzayında bir norm tanımlanır.
$C[a,b]$ uzayı normlu doğrusal bir uzaydır(Hacısalihoğlu ve Hacıyev1995).

1.2 SONSUZ ARALIKTA TANIMLI SÜREKLİ VE SINIRLI FONKSİYON UZAYLARI

Tanım 1.2.1

$\rho:\mathbb{R}\to[1,\infty[$ sürekli ve her $x\in\mathbb{R}$ için
$\lim\limits_{|x|\to\infty}\rho(x)=\infty$
olsun. Bu durumda her $x\in\mathbb{R}$ için

$$|f(x)|\le M_f\rho(x) \tag{1.2}$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar uzayına $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayı denir. Burada ρ fonksiyonu ağırlık fonksiyon olarak adlandırılır(Gadjiev 1976).

Tanım 1.2.2

$C_\rho(\mathbb{R}) = \{f \in B_\rho(\mathbb{R}): f \text{ sürekli}\}$ şeklinde tanımlı ağırlık uzayına $\mathbb{R}$ üzerinde bir doğrusal uzay denir.

Tanım 1.2.3

ρ ağırlık fonksiyonu ve $f \in B_\rho(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\|f\|_\rho := \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} \tag{1.3}$$

ile $B_\rho(\mathbb{R})$ üzerinde bir norm tanımlanabilir. Bu norm ile $B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ birer normlu uzaydır(Gadjiev 1976).

Tanım 1.2.4

$\rho: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ sürekli, her $x \in \mathbb{R}$ için $\rho(x) \geq 1$ ve
$\lim_{|x|\to\infty} \rho(x) = \infty$
şeklinde monoton artan bir fonksiyon olmak üzere her $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = K_f < \infty \tag{1.4}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı $C_\rho^k(\mathbb{R})$ ile gösterilir ve bu uzay $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayının bir alt uzayıdır(Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

1.3 DOĞRUSAL POZİTİF OPERATÖRLERİN GENEL ÖZELLİKLERİ

Tanım 1.3.1

X ve Y fonksiyon uzayları olsun. Her $f \in X$ için,

$$L(f,x) = g(x) \tag{1.5}$$

olacak şekilde bir $g \in Y$ fonksiyonu varsa L dönüşümüne X uzayından Y uzayına bir operatördür denir.

Örnek 1.3.1

$D \subset C[0,\infty[$ olmak üzere $L: D \to C[0,\infty[$ olsun. Her $x \in [0,\infty[$ için

$$L(f,x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} f(k)$$

bir operatördür. Bu operatör Szasz-Mirakjan operatörü olarak adlandırılır(Szasz 1950).
X uzayı doğrusal uzay ise X üzerinde bir doğrusal operatör aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 1.3.2

X, Y doğrusal uzaylar ve $f_1, f_2 \in X$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ olsun.
$L: X \to Y$ operatörü için,
$L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, x) = \alpha_1 L(f_1, x) + \alpha_2 L(f_2, x)$
koşulunu sağlayan X üzerindeki L operatörüne doğrusal operatör denir.

Tanım 1.3.3

$X^+ := \{f \in X: f(x) \geq 0\}$, $Y^+ := \{g \in Y: g(x) \geq 0\}$
şeklinde tanımlı fonksiyon uzayları ve $L: X \to Y$ doğrusal operatörü için,
$L(X^+) \subset Y^+$ oluyorsa L'ye doğrusal pozitif operatör denir(Korovkin 1960).

Örnek 1.3.2

$[0,\infty[$ aralığında tanımlı gerçel değerli her f fonksiyonu için $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0,\infty[$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$L_n(f,x) = \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k f\left(\frac{k}{n-k+1}\right)$$

operatörleri doğrusal ve pozitiftir. 1980 de tanımlanan bu operatör Bleimann, Butzer ve Hahn operatörü olarak bilinir.

Uyarı 1.3.1

L doğrusal pozitif operatörü negatif fonksiyonları negatif fonksiyonlara dönüştürür.

Uyarı 1.3.2

Her doğrusal pozitif operatör monoton dur(Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).
Gerçekten de her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \leq g(x)$ olduğundan $f(x) - g(x) \leq 0$'dır
Yani $(f-g)(x) \leq 0$ 'dir. Uyarı 1.3.1'den $L(f-g,x) \leq 0$ olduğundan
$L(f,x) - L(g,x) \leq 0$'dır. Böylece $L(f,x) \leq L(g,x)$olur.

Tanım 1.3.4

X ve Y normlu uzaylar ve $L: X \to Y$ doğrusal bir operatör olsun. Her $f \in X$ için

$$\|L(f,x)\|_Y \leq C \cdot \|f\|_X$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C > 0$ sayısı varsa L operatörüne sınırlı operatör denir. Bu C sabitlerinin en küçük alt sınırına L operatörünün normu denir.

$$\|L\|_{X\to Y} = \inf\{C: \|L(f,x)\|_Y \leq C \cdot \|f\|_X\} \tag{1.6}$$

şeklinde gösterilir.

Uyarı 1.3.3

$\|f\|_X \neq 0$ olmak üzere, $L: X \to Y$ sınırlı doğrusal operatörü için

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f,x)\|_Y}{\|f\|_X} \tag{1.7}$$

eşitliği geçerlidir(Rudin 1991).

Sonuç 1.3.1

$L: X \to Y$ sınırlı doğrusal operatörü için
$\|g\|_X = 1$ olmak üzere,
$$\|L\| = \sup_{\|g\|_X = 1} \|L(g,x)\|_Y \tag{1.8}$$
eşitliği geçerlidir.

Önerme 1.3.1

$L: X \to Y$ tanımlı, doğrusal pozitif bir operatör olsun. Bu durumda her $f \in X$ için

$$|L(f,x)| \leq \mathrm{L}(|f|,x) \tag{1.9}$$

eşitsizliği sağlanır(Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Kanıt

L doğrusal pozitif bir operatör olsun. Uyarı 1.3.2 gereği doğrusal pozitif operatörler monoton olduğundan;
$-|f| \leq f \leq |f|$
eşitsizliğine L operatörü uygulanırsa;
$L(-|f|,x) \leq L(f,x) \leq L(|f|,x)$
olur. L operatörünün doğrusallığından,
$-L(|f|,x) \leq L(f,x) \leq L(|f|,x)$

olacaktır. Böylece $|L(f,x)| \leq L(|f|,x)$ eşitsizliği gösterilmiş olur

1.4 C[a,b], $C_\rho(\mathbb{R})$ VE $C_\rho^k(\mathbb{R})$ UZAYLARINDA KOROVKİN TİPLİ TEOREMLER

Teorem 1.4.1 ($C[a,b]$ Uzayında Korovkin Teoremi)

L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi her $x \in [a,b]$ için $m = 0,1,2$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^m,x) - x^m\|_{C[a,b]} = 0$$

şeklindeki üç koşulu sağlıyorsa bu durumda $[a,b]$ de sürekli ve a da soldan b de sağdan sürekli tüm $\mathbb{R}$ de sınırlı her f fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliği geçerlidir(Korovkin 1960).

Kanıt

f, $\mathbb{R}$'de sınırlı olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x)| \leq M$$

olacak şekilde en az bir $M > 0$ vardır.

$f \in C[a,b]$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır, öyle ki $x,t \in [a,b]$ için ve $|t-x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ olur.

Her $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a,b]$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda da $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği doğrudur. Gerçekten

$x \in [a,b]$ ve $t \notin [a,b]$ olsun. $|t-x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği f fonksiyonu a da soldan b de sağdan sürekli olduğu için yine doğrudur.

Diğer taraftan $|t-x| \geq \delta$ olduğunda ise $\frac{|t-x|^2}{\delta^2} \geq 1$ olup açıkça

$$2M \leq \frac{2M}{\delta^2}|t-x|^2$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlikler ve üçgen eşitsizliği kullanılarak her $\varepsilon > 0$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M < \frac{2M}{\delta^2}|t-x|^2 + \varepsilon \tag{1.10}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$$\|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[a,b]} = \|L_n(f(t) - f(x) + f(x), x) - f(x)\|_{C[a,b]}$$
$$= \|L_n(f(t) - f(x), x) + L_n(f(x), x) - f(x)\|_{C[a,b]}$$
$$\leq \|L_n(f(t) - f(x), x)\|_{C[a,b]} + \|f(x)\|_{C[a,b]} \|L_n(1,x) - 1\|_{C[a,b]}$$

eşitsizliği geçerli olduğundan hipotezden ε_n sıfır dizisi olmak üzere

$$\|L_n(1,x) - 1\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon_n$$

olacaktır. Böylece

$$\|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon \|L_n(1,x) - 1\|_{C[a,b]} + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \|L_n(t^2,x) - x^2\|_{C[a,b]}$$
$$-2a\|L_n(t,x) - x\|_{C[a,b]} + b^2 \|L_n(1,x) - 1\|_{C[a,b]}$$

bulunur. Son eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa;

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Dolayısıyla her $f \in C[a,b]$ için $L_n(f,x)$; f fonksiyonuna düzgün yakınsar.

Lemma 1.4.1

L_n doğrusal pozitif operatörler dizisinin C_ρ dan B_ρ uzayına dönüşüm yapması için gerekli ve yeterli koşul M_ρ; ρ fonksiyonuna bağlı bir sabit olmak üzere

$$\|L_n(\rho,x)\|_\rho \leq M_\rho$$

olacak şekilde bir M_ρ sabitinin bulunmasıdır(Gadjiev 1976).

Kanıt

L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi C_ρ dan B_ρ uzayına bir dönüşüm olsun. Yani her $f \in C_\rho$ için $L_n(f,x) \in B_\rho$olsun.

$$|\rho(x)| = \rho(x) \leq 1.\rho(x)$$

olarak yazılabileceğinden $\rho \in C_\rho$ olur. Böylece $L_n(\rho,x) \in B_\rho$ bulunur. B_ρ uzayının tanımından

$$\frac{|L_n(\rho,x)|}{\rho(x)} \leq M_\rho$$

eşitsizliği geçerlidir. $x \in \mathbb{R}$ üzerinden supremum alınırsa $\|L_n(\rho,x)\|_\rho \leq M_\rho$ eşitsizliği gösterilmiş olur.

Diğer taraftan $f \in C_\rho$ olsun. Bu durumda $f(x) \leq M_f.\rho(x)$ olur ve buradan

$\|f\|_\rho \leq M_f$

eşitsizliği bulunur. $L_n(f,x)$operatörünün monotonluğundan ve hipotezden $\|L_n(\rho,x)\|_\rho \leq M_\rho$olur. Ayrıca

$$|L_n(f,x)| \leq L_n(|f|,x) = L_n\left(\frac{|f|}{\rho}\rho, x\right) \leq \|f\|_\rho L_n(\rho,x) \leq M_f M_\rho \rho(x)$$

olur. Bu ise $L_n(f,x) \in B_\rho$ demektir.

Korovkin Teoremi sonlu aralıkta tanımlı sürekli fonksiyonlar için geçerli olup gerçel sayılar kümesi üzerinde sürekli olan fonksiyonlar için geçerli değildir. Bu durum aşağıdaki teoremle verilmiş olup Hacıyev Teoremi olarak bilinir.

Teorem 1.4.2 (Hacıyev Teoremi)

C_ρ dan B_ρ uzayına dönüşüm yapan bir L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi; $m = 0,1,2$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^m,x) - x^m\|_\rho = 0$$

şeklindeki üç koşulu sağlasın. Bu durumda en az bir $f^* \in C_\rho \,/\, C_\rho^k$ için

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|L_n(f^*,x) - f^*(x)\|_\rho > 0$$

eşitsizliği geçerlidir(Gadjiev 1976).

Sonuç 1.4.1

C_ρ dan B_ρ uzayına dönüşüm yapan L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi için $m = 0,1,2$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^m,x) - x^m\|_\rho = 0$$

şeklindeki üç koşul sağlansın. Bu durumda her $f \in C_\rho^k$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f,x) - f(x)\|_\rho = 0$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla C_ρ ağırlıklı uzayında Korovkin Tipli bir teorem geçerli olmayıp C_ρ^k alt uzayında geçerlidir.

Teorem 1.4.3

$\{T_{n,m}f\}$ doğrusal pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - 1 \right\|_{C(X)} = 0$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \alpha_{k,n} P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - x \right\|_{C(X)} = 0$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \beta_{j,m} P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - y \right\|_{C(X)} = 0$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left(\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2\right) P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - (x^2 + y^2) \right\|_{C(X)} = 0$$

koşullarını gerçekliyorsa X bölgesinde sürekli, reel değerli ve tüm $\mathbb{R}^m$ de sınırlı her bir f fonksiyonu için

$$\lim_{n,m\to\infty} \|T_{n,m}f - f\|_{C(X)} = 0$$

ifadesi gerçeklenir(Volkov 1957).

Tanım 1.4.1

$I^2 = [0,A] \times [0,A] = [0,A]^2$ olmak üzere $C(I^2)$, I^2 üzerinde tanımlı gerçel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı olsun. $C(I^2)$

$$\|f\|_{C(I^2),} = \max_{(x,y)\in I^2} |f(x,y)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 1.4.2

$(f_{n,m})$, $C(I^2)$ üzerinde bir fonksiyon dizisi olmak üzere

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|f_{n,m}-f\right\|_{C(I^2)}=\lim_{n,m\to\infty}\max_{(x,y)\in I^2}\left|f_{n,m}(x,y)-f(x,y)\right|=0$$

eşitliği sağlanıyorsa, $(f_{n,m})$ fonksiyonu dizisi I^2 üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsar.

1.5. $q-$ ANALİZ

$q-$Analizle ilgili ilk formüller 18. yüzyılda elde edilmiştir. Modern anlamda $q-$analizinin başlangıcı Jackson tarafından yayınlanan, ilk olarak $q-$integrallerin sistematik olarak tanımlanıp geliştirildiği makalesi ile başlatılabilir. 1910 yılında Jackson $q-$integrali tanıttı ve sistematik olarak analiz alanındaki kavramlar $q-$analize taşınmaya başlandı.

Klasik $q-$teorisi negatif olmayan tamsayıların $q-$benzerlerini tanımlamakla başlamıştır.

Bir n tamsayısının $q-$benzeri $0<q<1$ için

$$\lim_{q\to 1^-}\frac{1-q^n}{1-q}=n$$

eşitliğinden ilham alarak tanımlanmıştır.

Tanım 1.5.1

$q>0$ verilsin. $r\in\mathbb{N}_0$ için $[r]_q$ sayısı

$$[r]_q=\begin{cases}\dfrac{1-q^r}{1-q}, & q\neq 1\\ r, & q=1\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $[r]_q$ bir q tamsayısı olarak adlandırılır.

Açıkça bu tanım $r\in\mathbb{R}$ gerçel sayısı içinde verilebilir. $[r]_q$ bu durumda q reel sayı olarak adlandırılır(Kac Cheung 2002).

Örnek 1.5.1

$r = 3$ için q tam sayısını bulunuz.

$$[3]_q = \frac{1-q^3}{1-q} = 1 + q + q^2$$

Örnek 1.5.2

$q > 0$ olmak üzere
$r = 1$ ve $r = 0$ için q tam sayılarını bulunuz.

$$[1]_q = \frac{1-q}{1-q} = 1$$

ve

$$[0]_q = \frac{1-q^0}{1-q} = 0$$

olarak bulunur.

Tanım 1.5.2

$q > 0$ verilsin. $r \in \mathbb{N}_0$ için;

$$[r]_q! = \begin{cases} [r]_q[r-1]_q \dots [1]_q, & r \geq 1 \\ 1, & r = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ifadeye $q -$ faktöriyel denir(Andrews Askey and Ray 1999).

Örnek 1.5.3

$r = 5$ için $[r]_q!$ faktöriyelini bulunuz.

$$[5]_q! = \frac{1-q^5}{1-q} . \frac{1-q^4}{1-q} . \frac{1-q^3}{1-q} . \frac{1-q^2}{1-q} . \frac{1-q^1}{1-q}$$

Tanım 1.5.3

$q > 0$ verilsin. $t \in \mathbb{N}_0$ için $r \geq 0$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} t \\ r \end{bmatrix}_q = \frac{[t]_q [t-1]_q \ldots [t-r+1]_q}{[r]_q!}$$

şeklinde tanımlı ifadeye q −binom katsayısı denir. Diğer durumlarda ise 0 dır(Kac Cheung 2002).

Tanım 1.5.4

$q > 0$ verilsin. $t, r \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{bmatrix} t \\ r \end{bmatrix}_q = \frac{[t]_q!}{[r]_q! [t-r]_q!}$$

şeklinde tanımlı ifadeye Gauss polinomları denir. (Diğer durumlarda yine 0 dır.)

Örnek 1.5.4

$q > 0$ olmak üzere

$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}_q$! Gauss polinomunu hesaplayınız.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}_q ! = \frac{[5]_q!}{[2]_q! [3]_q!} = \frac{[5]_q [4]_q}{[2]_q [1]_q} = \frac{\frac{1-q^5}{1-q} \cdot \frac{1-q^4}{1-q}}{\frac{1-q^2}{1-q} \cdot \frac{1-q^1}{1-q}} = \frac{(1-q^5)(1-q^4)}{(1-q^2)(1-q)}$$

gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}_q = 1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6$$

Lemma 1.5.1

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

ifadesinin q −analoğu,

$$(x+y)(x+qy)\dots(x+q^{n-1}y) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{n-k} y^k$$

biçimindedir(Kac Cheung 2002).

Kanıt

Binom teoreminden

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k; \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

eşitlikleri geçerlidir. q bir parametre,

$$yx = qxy, \quad xq = qx, \quad ve \quad y = qy \tag{1.11}$$

olmak üzere

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

ifadesinin q −analoğu,

tümevarımdan $n = 1$ için eşitlik doğrudur.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k \tag{1.12}$$

olarak kabul edilsin. $n+1$ içinde eşitliğin doğru olduğu gösterilirse ispat biter.

$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y)$

eşitliği yazılabilir. Buradan

$$\sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k (x+y)$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitlik yardımıyla

$$\sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k = \begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix}_q x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k + \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix}_q y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k (x+y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k x + \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^{k+1}$$

eşitliği geçerlidir. Ayrıca (1.11) den $y^k x = x y^k q^k$ eşitliği de doğrudur. Bu eşitlik toplamda yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix}_q x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k + \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix}_q y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k x$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^{k+1}$$

$$= \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k q^k + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q y^{n+1}$$

$k \to k-1$

bulunur. Burada $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q = 1$ve $\begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix}_q = 1$ eşitlikleri kullanılarak,

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^k + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \right\} x^{n+1-k} y^k$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^k + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{1.13}$$

bulunur. Benzer şekilde

$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n$ ve $\quad yx^{n-k} = q^{n-k} x^{n-k} y$

eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n+1-k} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{1.14}$$

bulunur. O halde (1.13) ve (1.14) den

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{1-q^{n+1-k}}{1-q^k} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q$$

elde edilir. Bu işlem $k-$ kez uygulanırsa

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{1-q^{n+1-k}}{1-q^k} \cdot \frac{1-q^{n+2-k}}{1-q^{k-1}} \dots \frac{1-q^n}{1-q} \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q$$

bulunur. Bu eşitliğin pay ve paydası $(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{n-k})$ ile çarpılırsa

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{n-k})(1-q^{n-k+1})\dots(1-q^n)}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^k)(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{n-k})} = \frac{(1-q)_q^n}{(1-q)_q^k(1-q)_q^{n-k}}$$

olur. $[k]_q! = \frac{(1-q)_q^k}{(1-q)^k}$ eşitliği göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q)_q^n}{(1-q)_q^k(1-q)_q^{n-k}} = \frac{[n]_q!(1-q)^n}{[k]_q!(1-q)^k[n-k]_q!(1-q)^{n-k}} = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}$$

eşitliği doğru olacaktır. (1.12) ile verilen binom eşitliğinin $q-$ analoğunu bulmak için bu eşitlikteki y yerine xy yazılırsa

$$(x+xy)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k}(xy)^k \tag{1.15}$$

bulunur. Burada (1.11) ile verilen eşitlikler kullanılarak,

$$(xy)^k = x^k y^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

elde edilir. Yine (1.11) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
(x+xy)_q^n &= (x+xy)\dots(x+xy)(x+xy)(x+xy) \\
&= x(1+y)\dots x(1+y)x(1+y)x(1+y) \\
&= x(1+y)\dots x(1+y)x(x+xy)(1+y) \\
&= x(1+y)\dots x(1+y)x(x+qxy)(1+y) \\
&= x(1+y)\dots x(1+y)x(x+xqy)(1+y) \\
&= x(1+y)\dots x(1+y)x^2(1+qy)(1+y) \\
&= x(1+y)\dots x(x+xy)x(1+qy)(1+y) \\
&= x(1+y)\dots x(x+qxy)x(1+qy)(1+y) \\
&= x(1+y)\dots x(x+xqy)x(1+qy)(1+y)
\end{aligned}$$

$$= x(1+y)\ldots x^2(1+qy)x(1+qy)(1+y)$$

$$\ldots$$

bu şekilde devam edilerek

$(x+xy)_q^n = x^n(1+q^{n-1}y)\ldots(1+q^2y)(1+qy)(1.16)$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik (1.15) de yerine yazılırsa

$$x^n(1+q^{n-1}y)\ldots(1+q^2y)(1+qy) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k}x^k y^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

eşitliği sağlanır. Buradan

$$(1+y)(1+qy)\ldots(1+q^{n-1}y) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} y^k$$

eşitliği elde edilir. Burada y yerine $\frac{y}{x}$ yazılırsa

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+q\frac{y}{x}\right)\ldots\left(1+q^{n-1}\frac{y}{x}\right) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{y^k}{x}$$

$$(1+y)(x+qy)\ldots(x+q^{n-1}y) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{n-k}\, y^k \qquad (1.17)$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise (1.12) nin bir q −analoğudur.

Uyarı 1.5.1

Lemma 1.5.1 de y yerine $(-y)$ alınırsa

$$(x-y)^n{}_q = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{n-k}(-1)^k y^k$$

eşitliği geçerlidir.

2.BÖLÜM

SÜREKLİ FONKSİYONLARA BAZI DOĞRUSAL POZİTİF OPERATÖRLERLE YAKLAŞIM

Bu bölümde seçilen bazı doğrusal pozitif operatörlerin bazı yaklaşım özellikleri incelenecektir.

2.1. BERNSTEIN POLİNOMLARI

S. Bernstein (1912), $[0,1]$ aralığında verilmiş sürekli bir fonksiyona yakınsayan polinom dizisi tanımlamıştır.

Tanım 2.1.1

$0 \leq x \leq 1$ olmak üzere bu polinom dizisi;

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \tag{2.1}$$

şeklindedir.

Uyarı 2.1.1

Açıkça Bernstein Polinomu doğrusal pozitif bir operatördür.
Gerçekten
$x^k(1-x)^{n-k} \geq 0$ olduğundan her $f \geq 0$ için
$B_n(f,x) = \sum_{k=1}^{n} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \geq 0$ olacaktır. Böylece $B_n(f,x)$ pozitif operatördür.
Doğrusallığı ise şu şekilde kolayca gösterilebilir: $\alpha, \beta \geq 0$ olmak üzere

$$B_n(\alpha f+\beta g,x)=\sum\nolimits_{k=1}^{n} x^k(1-x)^{n-k}\left[\alpha f\left(\frac{k}{n}\right)+\beta g\left(\frac{k}{n}\right)\right]$$

$$=\alpha\sum\nolimits_{k=1}^{n} x^k(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)+\beta\sum\nolimits_{k=1}^{n} x^k(1-x)^{n-k} g\left(\frac{k}{n}\right)$$

olur. Bu ise operatörün doğrusal olması demektir(Bernstein 1912).

Lemma 2.1.1

Bernstein polinomları aşağıdaki üç koşulu sağlar(Bernstein 1912).

$i)$ $B_n(1,x)=1$

ii) $B_n(t,x)=x$

iii) $B_n(t^2,x)=x^2+\frac{x-x^2}{n}$

Kanıt

$$B_n(1,x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=(1-x+x)^n=1$$

olur. Benzer şekilde

$$B_n(t,x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$=x\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$=x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k-1}=x$$

bulunur. Son olarak

$$B_n(t^2,x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\frac{k^2}{n^2}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)+k}{n^2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \frac{(n-1)}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k}{n}$$

$$= \frac{(n-1)}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n}$$

$$= x \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$+ \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$+ \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!} x^{k-2} (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{n-k-2} + \frac{x}{n}$$

$$= x^2 + \frac{x - x^2}{n}$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 2.1.1

Bernstein polinomu Korovkin teoreminin koşullarını sağlar(Bernstein 1912).

Kanıt

$B_n(1,x) = 1$

$B_n(t,x) = x$

eşitlikleri yardımıyla

$\lim_{n\to\infty} \|B_n(1,x) - 1\|_{C[0,1]} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \|B_n(t,x) - x\|_{C[0,1]} = 0$

elde edilir. Son olarak

$(t-x)^2 = t^2 - 2tx + x^2$olduğundan ve her $n \in \mathbb{N}$ için B_n polinomlarının doğrusallığından

$$B_n((t-x)^2,x) = B_n(t^2,x)+B_n(-2\mathrm{xt},x)+B_n(x^2,x)$$
$$= B_n(t^2,x)-2xB_n(\mathrm{t},x)+x^2B_n(1,x)$$
$$= x^2 + \frac{x-x^2}{n} - 2x^2 + x^2$$
$$= \frac{x-x^2}{n}$$

bulunur. Buradan

$y := \frac{x-x^2}{n}$ tanımlaması yapılırsa $y' = \frac{1-2x}{n}$ olur.$y' = \frac{1-2x}{n} = 0$ olması için $x = \frac{1}{2}$ olmalıdır. Buradan

$\max_{0\le x\le 1} B_n((t-x)^2,x) = \frac{1}{4n}\,(n \to \infty)$ bulunur. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n((t^2-x)^2,x)\|_{C[0,1]} = \lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le 1}\left|\frac{x-x^2}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n} = 0$$

olacaktır. Korovkin teoreminden her $f \in C[0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \| B_n(f,x) - f(x)\|_{C[0,1]} = 0$$

bulunur(Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Teorem 2.1.2

Her $f \in C_{[0,1]}$ ve $\omega(f,x)$ klasik süreklilik modülü yardımıyla Bernstein polinomlarının yaklaşım hızı için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$| B_n(f(t),x) - f(x)| \le \frac{3}{2}\omega\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir(Walczak 2004).

Kanıt

Süreklilik modülünün özelliğinden kolayca

$$| B_n(f(t),x) - f(x)| \le B_n\left(1+\frac{|t-x|}{\delta},x\right)\omega(f,\delta)$$
$$= \left[B_n(1,x) + \frac{1}{\delta}B_n(|t-x|,x)\right](\omega(f;|t-x|),x)\omega(f,\delta)$$

$$\leq\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{B_n((t-x)^2,x)}\right)\omega(f,\delta)(\text{Cauchy}-\text{Schwarz Eş.})$$

$$\leq\omega(f,\delta)\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{x-x^2}{n}}\right)$$

$$\leq\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{1}{4n}}\right)\omega(f,\delta)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)\omega\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

bulunur. Burada $\delta=\frac{1}{\sqrt{n}}$ seçilerek

$$|\,B_n(f(t),x)-f(x)|\leq\frac{3}{2}\omega\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

eşitsizliğe ulaşılır.

Daha sonra birçok araştırmacı Bernstein polinomlarının modifikasyonları ve genellemeleri üzerinde çalışmalar yapmıştır. İlk olarak Bernstein-Chlodowsky operatörü incelenecektir.

2.2. BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI

2.2.1. Tek Değişkenli Bernstein-Chlodowsky Polinomları

Chlodowsky (1937) $[0,\infty[$aralığı üzerinde Bernstein polinomlarını genelleştirmiş ve bu polinomların yaklaşım özelliklerini araştırmıştır.

Tanım 2.2.1.1

(b_n) dizisi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$ ve $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0$

koşullarını sağlayan monoton artan gerçel terimli pozitif sayıların dizisi olmak üzere

$x\in[0,b_n]$ için

$$B_n^*(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}b_n\right)C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlı polinomlara Bernstein-Chlodowsky polinomları adı verilir(Chlodowsky 1932).

Uyarı 2.2.1.1

Bu operatör açıkça doğrusal ve pozitiftir.

Bernstein-Chlodowsky operatörünün doğrusallığı;

Her α, β $\in \mathbb{R}$ ve her $f, g \in \mathrm{C}[0,\infty]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
B_n^*(\alpha f+\beta g, x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} (\alpha f+\beta g)\left(\frac{k}{n} b_n\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \alpha f\left(\frac{k}{n} b_n\right) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \beta g\left(\frac{k}{n} b_n\right) \\
&= \alpha \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} f\left(\frac{k}{n} b_n\right) \\
&\quad + \beta \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} g\left(\frac{k}{n} b_n\right) \\
&= \alpha B_n^*(f,x)+\beta B_n^*(g,x)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise operatörün doğrusallığını kanıtlar. Son olarak pozitiflik gösterilmelidir.

Bernstein-Chlodowsky operatörünün pozitifliği;

her $x \in [0, b_n]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \geq 0$$

olduğundan her $f \geq 0$ için $B_n^*(f;x) \geq 0$ olur. Bu ise operatörün pozitif olduğunu gösterir.

Lemma 2.2.1.1

Bernstein-Chlodowsky polinomu aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

i) $B_n^*(1,x) = 1$

ii) $B_n^*(t,x) = x$

iii) $B_n^*(t^2,x) = x^2 + x\left(\frac{b_n - x}{n}\right)$

Kanıt

$f(t) = 1$ olmak üzere,

$$B_n^*(1,x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$
$$= \left(1 - \frac{x}{b_n} + \frac{x}{b_n}\right)^n$$
$$= 1$$

olur.

$f(t) = t$ için

$$B_n^*(t,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} b_n C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} b_n \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} b_n \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

($k \to k + 1$dönüşümü yapılarak)

$$= \sum_{k=0}^{n-1} b_n \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k+1} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} b_n \frac{x}{b_n} \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1}$$
$$= x \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1}$$
$$= x\left(1 - \frac{x}{b_n} + \frac{x}{b_n}\right)^{n-1}$$
$$= x$$

bulunur. Son olarak

$f(t) = t^2$ olmak üzere,

$$B_n^*(t^2,x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} b_n\right)^2 C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} {b_n}^2 \frac{k}{n} \frac{k}{n} \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} {b_n}^2 \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} {b_n}^2 \frac{x}{b_n} \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=1}^{n} b_n \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{b_n}{n} x \sum_{k=1}^{n} (k-1+1) \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{b_n}{n} x \sum_{k=1}^{n} (k-1) \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$+ \frac{b_n}{n} x \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{b_n}{n} x \frac{x}{b_n} \sum_{k=2}^{n} (k-1) \frac{(n-1)!}{(k-1)(k-2)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$+ \frac{b_n}{n} x \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

$$= \frac{x^2}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-2)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} + \frac{b_n}{n} x$$

$$= \frac{x^2}{n} (n-1) \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} + \frac{b_n}{n} x$$

($k \to k+2$ dönüşümü yapılarak)

$$= \frac{x^2}{n} (n-1) \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-2} + \frac{b_n}{n} x$$

$$= x^2 \frac{(n-1)}{n} + \frac{b_n}{n} x$$

$$= x^2 - \frac{x^2}{n} + \frac{b_n}{n} x$$

$$= x^2 + x\left(\frac{b_n - x}{n}\right)$$

bulunur.

Ancak Bernstein-Chlodowsky polinomları, tanımlı olduğu $[0, b_n]$ aralığının $n \to \infty$ iken $[0, \infty)$ aralığına dönüşmesi sonucu $\lim_{n\to\infty} \|B_n{}^*(t^2, x) - t^2\| = \infty$ olduğundan Korovkin Teoremi'ni sağlamaz.

Teorem 2.2.1.1

Her $f \in C[0, \infty)$ fonksiyonu için

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = k_f < \infty$$

ve (b_n)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n^2}{n} = 0$$

koşulunu sağlayan bir dizi olsun.

Bu durumda Tanım 2.2.1.1 de verilen B_n^* polinom dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n^*(f, x) - f(x)\|_{C[0,b_n)} = 0$$

eşitliği geçerlidir(İbikli 2003, İşler 2009).

Kanıt

Teoremin kanıtını $k_f = 0$ olması durumunda yapmak yeterlidir. Bu durumda $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ olur. Yani; her $\varepsilon > 0$ için $x \geq x_0$ iken $|f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan en az bir x_0 noktası vardır.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \;; & 0 \leq x \leq x_0 \\ lineer \;; & x_0 \leq x \leq x_0 + \dfrac{1}{2} \\ 0 \;; & x \geq x_0 + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

şeklinde sürekli bir g fonksiyonu tanımlansın.

Burada x_0 noktası için $\max_{x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{1}{2}} |g(x)| = |f(x_0)|$ dır. Bu durumda g fonksiyonunun tanımı gereğince;

$$\sup_{0\leq x\leq b_n} |f(x) - g(x)| \leq \sup_{0\leq x\leq x_0} |f(x) - g(x)| + \sup_{x_0\leq x\leq x_0+\frac{1}{2}} |f(x) - g(x)|$$

$$+\sup_{x\geq x_0+\frac{1}{2}}|f(x)-g(x)|$$

$$=\sup_{x_0\leq x\leq x_0+\frac{1}{2}}|f(x)-g(x)|+\sup_{x\geq x_0+\frac{1}{2}}|f(x)|$$

$$\leq \sup_{x_0\leq x\leq x_0+\frac{1}{2}}|f(x)|+\sup_{x_0\leq x\leq x_0+\frac{1}{2}}|g(x)|+\sup_{x\geq x_0+\frac{1}{2}}|f(x)|$$

olacaktır. Bu eşitsizlikte

$$\max_{x_0\leq x\leq x_0+\frac{1}{2}}|g(x)|=|f(x_0)| \text{ve} \lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

olduğundan

$$\sup_{0\leq x\leq b_n}|f(x)-g(x)|<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$$

elde edilir. Bu durumda

$$\sup_{0\leq x\leq b_n}|B_n^*(f,x)-f(x)|=\sup_{0\leq x\leq b_n}|B_n^*(f,x)-B_n^*(g,x)+B_n^*(g,x)-g(x)+g(x)-f(x)|$$

$$\leq \sup_{0\leq x\leq b_n}|B_n^*(f-g,x)|+\sup_{0\leq x\leq b_n}|B_n^*(g,x)-g(x)|$$

$$+\sup_{0\leq x\leq b_n}|f(x)-g(x)|$$

$$\leq \sup_{0\leq x\leq b_n}B_n^*\left(\sup_{0\leq t\leq b_n}|f-g|,x\right)+\sup_{0\leq x\leq b_n}|B_n^*(g,x)-g(x)|$$

$$+\sup_{0\leq x\leq b_n}|f(x)-g(x)|$$

$$\leq 3\varepsilon+B_n^*(1,x)+\sup_{0\leq x\leq b_n}|B_n^*(g,x)-g(x)|+3\varepsilon$$

$$=6\varepsilon+\sup_{0\leq x\leq b_n}|B_n^*(g,x)-g(x)|$$

olup, limite geçilirse

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x\leq b_n}|B_n^*(f,x)-f(x)|\leq 6\varepsilon+\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x\leq b_n}|B_n^*(g,x)-g(x)|$$

yazılabilir. İlk olarak bu eşitsizlikte yer alan

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x\leq b_n}|B_n^*(g,x)-g(x)|$$

ifadesi göz önüne alınsın.

g fonksiyonu $\left[x_0+\frac{1}{2},b_n\right]$ aralığında sıfır olduğundan sınırlıdır. Yani; $|g(x)|\leq M$ koşulunu sağlayan $M>0$ sayısı vardır. Ayrıca kapalı ve sınırlı $\left[0,x_0+\frac{1}{2}\right]$ aralığı üzerinde g fonksiyonu düzgün süreklidir.

O halde düzgün süreklilik tanımı kullanılarak; her $\varepsilon>0$ için $\left|\frac{k}{n}b_n-x\right|<\delta$ iken $x\in[0,b_n]$ için

$$\left|g\left(\frac{k}{n}b_n\right)-g(x)\right|<\varepsilon \tag{2.3}$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı vardır. Diğer taraftan

$\left|\frac{k}{n}b_n-x\right|\geq\delta$ ve g fonksiyonu sınırlı olduğundan

$$\left|g\left(\frac{k}{n}b_n\right)-g(x)\right|\leq 2M$$

olacaktır. Ayrıca

$$\frac{\left(\frac{k}{n}b_n-x\right)^2}{\delta^2}\geq 1\Longrightarrow\frac{2M\left(\frac{k}{n}b_n-x\right)^2}{\delta^2}\geq 2M$$

eşitsizliğinden

$$\left|g\left(\frac{k}{n}b_n\right)-g(x)\right|\leq\frac{2M\left(\frac{k}{n}b_n-x\right)^2}{\delta^2} \tag{2.4}$$

elde edilir. (2.3) ve (2.4) eşitsizliklerinden

$$\left|g\left(\frac{k}{n}b_n\right)-g(x)\right|\leq\frac{2M\left(\frac{k}{n}b_n-x\right)^2}{\delta^2}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
|B_n^*(g,x)-g(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}g\left(\frac{k}{n}b_n\right)C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}-g(x)\right| \\
&\leq\sum_{k=0}^{n}\left|g\left(\frac{k}{n}b_n\right)-g(x)\right|C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\leq\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n-x\right)^2C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&=\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&-2x\frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}b_nC_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\frac{2M}{\delta^2}x^2 \\
&=\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\left[x^2+\frac{x(b_n-x)}{n}-2x^2+x^2\right]
\end{aligned}$$

$$= \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\frac{x(b_n - x)}{n}$$

olup,

$$\sup_{0\le x\le b_n} |B_n^*(g,x) - g(x)| \le \varepsilon + \max_{0\le x\le b_n} \frac{2M}{\delta^2}\frac{x(b_n - x)}{n}$$

$$\le \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\frac{b_n^2}{4n}$$

eşitsizliği elde edilir. (b_n) dizisinin tanımından

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le x\le b_n} |B_n^*(g,x) - g(x)| \le \varepsilon + \lim_{n\to\infty} \frac{2M}{\delta^2}\frac{b_n^2}{4n}$$

$$= 0$$

olur.

Bu ifade yardımıyla

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le x\le b_n} |B_n^*(g,x) - g(x)| = 0$$

bulunur. Bu ise kanıtı tamamlar.

Teorem 2.2.1.2

$\rho(x) = 1 + x^2$ olmak üzere her $f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ için, $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n^2}{n} = 0$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n^*(g,x) - g(x)\|_\rho = 0 \tag{2.5}$$

olur(Gadjiev ve İbikli 1999).

Kanıt

Norm tanımı kullanılarak Lemma 2.2.1.1 den

$0 \le x \le b_n$ olmak üzere

$$\|L_n(1,x) - 1\|_\rho = \sup_{0\le x\le b_n} \frac{|B_n^*(1,x) - 1|}{\rho(x)}$$

$$= 0$$

olacağından,

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(1,x) - x\|_\rho = 0$$

olur.

Benzer şekilde norm tanımından

$$\|L_n(t,x) - x\|_\rho = \sup_{0\le x\le b_n} \frac{|B_n^*(t,x) - x|}{\rho(x)}$$

$$= 0$$

eşitliğinden,

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t,x) - x\|_\rho = 0$$

bulunur.

Son olarak t^2için norm tanımından

$$\|L_n(t^2,x) - x^2\|_\rho = \sup_{0\le x\le b_n} \frac{|B_n^*(t^2,x) - x^2|}{\rho(x)}$$

$$= \sup_{0\le x\le b_n} \frac{\left|x^2 + \frac{x(b_n - x)}{n} - x^2\right|}{1+x^2}$$

$$\le \frac{1}{n} \sup_{0\le x\le b_n} (b_n^2)$$

$$= \frac{b_n^2}{n}$$

bulunur. (b_n) pozitif sayı dizisi $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n^2}{n} = 0$ olma koşulunu sağladığından

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^2,x) - x^2\|_\rho = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

(B_n^*) doğrusal pozitif operatörler dizisinin tanımından

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n^* f - f\|_\rho = 0$$

olup kanıt tamamlanmış olur.

Yaklaşım keyfi $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ fonksiyonu için genel olarak sağlanmaz. Aşağıdaki teoremde $B_n^*(f,x)$ polinomlar dizisinin özel bir durumda yaklaşımı sağladığı gösterilecektir.

Teorem 2.2.1.3

$\rho(x) = 1 + x^2$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$ olmak üzere her $f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{b_n}} \|B_n^*(f,x) - f(x)\|_\rho = 0$$

eşitliği sağlanır(Gadjiev ve İbikli 1999).

Kanıt

Sürekli her f fonksiyonu kapalı ve sınırlı bir aralıkta düzgün sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $|t-x| < \delta$ olan her $x \in [0, b_n]$ ve her $t \in [0, \infty)$ için

$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$

eşitsizliğini sağlayan en az bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

$f \in C_\rho(\mathbb{R})$ olduğundan $|t-x| \geq \delta$ koşulunu sağlayan her $x \in [0, b_n]$ ve her $t \in [0, \infty)$ için

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq |f(t)| + |f(x)| \\ &\leq M_f(1+t^2) + M_f(1+x^2) \\ &\leq M_f(2 + t^2 + x^2) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq M_f\{2 + (t-x+x)^2 + x^2\} \\ &= M_f\{2 + (t-x)^2 + 2x(t-x) + 2x^2\} \\ &\leq M_f\{2(x^2+1) + 2(t-x)^2 + 2(x^2+1)|t-x|\} \\ &= 2M_f\{(x^2+1)(1+|t-x|)(t-x)^2\} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $\frac{|t-x|}{\delta} \geq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq 2M_f\left\{(x^2+1)\left(\frac{|t-x|}{\delta} + |t-x|\right) + (t-x)^2\right\} \\ &= 2M_f\left\{(x^2+1)|t-x|\left(\frac{1}{\delta}+1\right) + (t-x)^2\right\} \\ &\leq 2M_f\left\{(x^2+1)|t-x|\left(\frac{1}{\delta}+1\right) + (t-x)^2\left(\frac{1}{\delta}+1\right)\right\} \end{aligned}$$

$$\leq 2M_f\left(\frac{1}{\delta}+1\right)\{(x^2+1)|t-x| + (t-x)^2\}$$

eşitsizşiği geçerli olur. Burada

$$2M_f\left(\frac{1}{\delta}+1\right) \leq C_f(\delta)$$

ile gösterilirse

$$|f(t) - f(x)| \leq C_f(\delta)\{(t-x)^2 + (1+x^2)|t-x|\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu durumda her $x \in [0, b_n]$ ve her $t \in [0, \infty)$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + C_f(\delta)\{(t-x)^2 + (1+x^2)|t-x|\} \tag{2.6}$$

eşitsizliği doğru olur. Operatör dizisi için

$$|B_n^*(f,x)-f(x)| \le B_n^*(|f(t)-f(x)|,x)$$
$$< B_n^*\big(\varepsilon + C_f(\delta)\{(t-x)^2+(1+x^2)|t-x|\},x\big)$$
$$= \varepsilon B_n^*(1,x) + C_f(\delta)B_n^*((t-x)^2,x)$$
$$+(1+x^2)C_f(\delta)B_n^*\left(\sqrt{(t-x)^2},x\right)$$
$$= \varepsilon B_n^*(1,x) + C_f(\delta)B_n^*(t^2,x) - C_f(\delta)2xB_n^*(t,x)$$
$$+C_f(\delta)x^2B_n^*(1,x) + (1+x^2)C_f(\delta)B_n^*\left(\sqrt{(t-x)^2},x\right)$$

eşitsizliği geçerli olduğundan operatörün tanımı ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$|B_n^*(f,x)-f(x)| \le \varepsilon + C_f(\delta)\frac{x(b_n-x)}{n} + (1+x^2)C_f(\delta)\left(\sqrt{\frac{x(b_n-x)}{n}}\right)$$

bulunur. Bu ifadenin her iki yanı $\frac{1}{1+x^2}$ ile çarpılırsa

$$\frac{|B_n^*(f,x)-f(x)|}{1+x^2} < \varepsilon + C_f(\delta)\frac{x(b_n-x)}{n(1+x^2)} + C_f(\delta)\left(\sqrt{\frac{x(b_n-x)}{n}}\right)$$

olur. Supremuma geçilirse

$$\sup_{0\le x\le b_n}\frac{|B_n^*(f,x)-f(x)|}{1+x^2} < \varepsilon + C_f(\delta)\sup_{0\le x\le b_n}\frac{x(b_n-x)}{n(1+x^2)} + C_f(\delta)\sup_{0\le x\le b_n}\left(\sqrt{\frac{x(b_n-x)}{n}}\right)$$

eşitsizliği yazılabileceğinden

$$\sup_{0\le x\le b_n}\frac{x(b_n-x)}{n(1+x^2)} \le \frac{b_n}{n} \quad ve \quad \sup_{0\le x\le b_n}\left(\sqrt{\frac{x(b_n-x)}{n}}\right) = \sqrt{\frac{b_n^2}{4n}}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\sup_{0\le x\le b_n}\frac{|B_n^*(f,x)-f(x)|}{1+x^2} < \varepsilon + C_f(\delta)\frac{b_n}{n} + C_f(\delta)\sqrt{\frac{b_n^2}{4n}}$$

olur. Bu ifadenin her iki yanı $\frac{1}{\sqrt{b_n}}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{\sqrt{b_n}}\sup_{0\le x\le b_n}\frac{|B_n^*(f,x)-f(x)|}{1+x^2} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{b_n}} + C_f(\delta)\left[\frac{\sqrt{b_n}}{n} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right]$$

$$< \frac{\varepsilon}{\sqrt{b_n}} + C_f(\delta)\left[\frac{\sqrt{b_n}}{n} + \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right]$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{b_n}} \sup_{0\le x\le b_n} \frac{|B_n^*(f,x) - f(x)|}{1+x^2} < \varepsilon \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{b_n}} + C_f(\delta) \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{b_n}}{n} + \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right]$$

olup, (b_n) dizisinin tanımından

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{b_n}} \sup_{0\le x\le b_n} \frac{|B_n^*(f,x) - f(x)|}{1+x^2} = 0$$

bulunur. Bu ise kanıtı tamamlar.

i) I.Tip Bernstein-Chlodowsky Operatörü

İbikli (2000) I. tip genelleşmiş Bernstein-Chlodowsky tipi polinomlar dizisini tanımlayarak yaklaşım özelliklerini araştırmıştır.

Tanım 2.2.1.2

(b_n) dizisi $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$

koşullarını sağlayan monoton artan gerçel terimli pozitif bir sayı dizisi ve $0 \le \alpha \le \beta$ olmak üzere

$$S_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta} b_n\right) C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \quad (2.7)$$

eşitliği ile tanımlı polinomlar dizisi 1. tip genelleşmiş Bernstein-Chlodowsky tipi polinomlar dizisi olarak adlandırılır(İbikli 2000).

Uyarı 2.2.1.2

(2.7) eşitliği ile verilen polinomlar için

i) $S_n(1;x) = 1$

ii) $S_n(t;x) = \frac{n}{n+\beta} x + \frac{\alpha}{n+\beta} b_n$

iii) $S_n(t^2;x)=\left(\frac{n}{n+\beta}\right)^2\left(x^2+\frac{x(b_n-x)}{n}\right)+\frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2}b_n x+\alpha^2\frac{b_n^2}{(n+\beta)^2}$

eşitlikleri geçerlidir.

$$S_n(1;x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}=1 \tag{2.8}$$

eşitliği geçerlidir.

Operatörün tanımından

$$\begin{aligned}
S_n(t;x)&=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&=\frac{b_n}{n+\beta}\sum_{k=0}^{n}(k+\alpha)\,C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&=\frac{b_n}{n+\beta}\left\{\sum_{k=0}^{n}k\,C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right.\\
&\left.+\alpha\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right\}\\
&=\frac{b_n}{n+\beta}\left\{\sum_{k=0}^{n}k\,C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}+\alpha\right\}\\
&=\frac{n}{n+\beta}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n\right)C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}+\frac{\alpha}{n+\beta}b_n\\
&=\frac{n}{n+\beta}x+\frac{\alpha}{n+\beta}b_n
\end{aligned} \tag{2.9}$$

olarak bulunur.

Son olarak $S_n(t^2;x)$ hesaplanacaktır.

$$\begin{aligned}
S_n(t^2;x)&=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}b_n\right)^2C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&=\frac{b_n^2}{(n+\beta)^2}\sum_{k=0}^{n}(k+\alpha)^2C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&=\frac{b_n^2}{(n+\beta)^2}\left\{\sum_{k=0}^{n}k^2\,C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right.
\end{aligned}$$

$$+2\alpha\sum_{k=0}^{n}kC_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}+\alpha^2\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\Bigg\}$$

$$=\frac{b_n^2}{(n+\beta)^2}\Bigg\{\sum_{k=0}^{n}\frac{n^2}{n^2}k^2C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}+$$

$$+2\alpha\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n}kC_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}+\alpha^2\Bigg\}$$

$$=\left(\frac{n}{n+\beta}\right)^2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$+\frac{2\alpha}{(n+\beta)^2}b_n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n\right)C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}+\alpha^2\frac{b_n^2}{(n+\beta)^2}$$

$$=\left(\frac{n}{n+\beta}\right)^2\left(x^2+\frac{x(b_n-x)}{n}\right)+\frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2}b_nx+\alpha^2\frac{b_n^2}{(n+\beta)^2}\qquad(2.10)$$

eşitliği geçerlidir.

Uyarı 2.2.1.3

$|f(x)|\leq M_f(1+x^2)$ eşitsizliğini sağlayan bir $f\in C(\mathbb{R})$ fonksiyonu için (2.7) ile tanımlı polinomlar dizisi yakınsaklık durumunu sağlamayabilir.

Örnek 2.2.1.1

$[0,b_n]$ aralığı üzerinde sürekli olan $f(x)=x^2$ fonksiyonuna (2.7) polinomlar dizisi ile yaklaşım yapılırsa

$f(t)=t^2$ için

$$S_n(t^2;x)=\left(\frac{n}{n+\beta}\right)^2\left(x^2+\frac{x(b_n-x)}{n}\right)+\frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2}b_nx+\alpha^2\left(\frac{b_n}{n+\beta}\right)^2$$

olmak üzere,

$$|S_n(t^2;x)-x^2|\geq x^2-S_n(t^2;x)$$

$$=x^2\left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)+\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\frac{x(b_n-x)}{n}+\frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2}b_nx+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}b_n^2$$

eşitsizliği yazılabilir. Supremuma geçilirse

$$\sup_{0\le x\le b_n}|S_n(t^2;x)-x^2| \ge \sup_{0\le x\le b_n} x^2\left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)+\sup_{0\le x\le b_n}\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\frac{x(b_n-x)}{n}$$
$$+\sup_{0\le x\le b_n}\frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2}b_n x+\sup_{0\le x\le b_n}\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}b_n^2$$
$$=b_n^2\left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)+\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\frac{b_n^2}{4n}+\frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2}b_n^2+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}b_n^2$$

eşitsizliği bulunur. Burada

$$b_n^2\left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)+\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\frac{b_n^2}{4n}\ge\frac{b_n^2}{4}\left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)+\frac{b_n^2}{4n}$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilirse ispat biter.

$$\frac{3}{4}\left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)+\frac{n}{4(n+\beta)^2}\ge\frac{1}{4n}$$

$$3\left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)+\frac{n}{(n+\beta)^2}\ge\frac{1}{n}$$

$$3(2n^2\beta+n\beta^2)+n(n+\beta)^2\ge(n+\beta)^2$$

olup, eşitsizlik geçerlidir. Böylece

$$\sup_{0\le x\le b_n}|S_n(t^2;x)-x^2|\ge\frac{b_n^2}{4}\left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)+\frac{b_n^2}{4n}+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}b_n^2$$

olacaktır. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le b_n}|S_n(t^2;x)-x^2|\ge\infty$$

olup, yaklaşım sağlanmaz(İşler 2009).

$|f(x)|\le M_f(1+x^2)$ eşitsizliğini sağlayan $f\in C(\mathbb{R})$ fonksiyonları için sağlanmayan yaklaşım teoremi aşağıdaki teoremde verilen uzaydan alınan fonksiyonlar için geçerlidir.

Teorem 2.2.1.4

$\rho(x)=1+x^2$ ve $f\in C_p(0,\infty)$ olmak üzere kapalı ve sınırlı $[0,A]$ aralığı üzerinde

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n(f;x)-f(x)\|_{C[0,A]}=0$$

yakınsaması düzgün olarak sağlanır(İşler 2009).

Kanıt

Kanıtı yapmak için Korovkin teoreminin koşullarının sağlandığı gösterilmelidir. Uyarı 2.2.1.2 (2.8) ifadesi göz önüne alınırsa

$$S_n(1;x)-1=0$$

ve böylece

$$\sup_{0\le x\le A}|S_n(1;x)-1|=0$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n(1;x)-1\|_{C[0,A]}=0$$

eşitliği kolayca sağlanır.

(2.9) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}S_n(t;x)-x&=x\frac{n}{n+\beta}+\frac{\alpha}{n+\beta}b_n-x\\&=x\left(\frac{n}{n+\beta}-1\right)+\frac{\alpha}{n+\beta}b_n\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Mutlak değer ve supremumun özellikleri kullanılarak

$$|S_n(t;x)-x|\le x\left(1-\frac{n}{n+\beta}\right)+\frac{\alpha}{n+\beta}b_n$$

$$\sup_{x\in[0,A]}|S_n(t;x)-x|\le A\left(1-\frac{n}{n+\beta}\right)+\frac{\alpha}{n+\beta}b_n$$

eşitsizliği sağlandığından,

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n(t;x)-x\|_{C[0,A]}=0$$

yakınsaması geçerlidir.

(2.10) ifadesinden yararlanılarak

$$S_n(t^2;x)-x^2=\left(\frac{n}{n+\beta}\right)^2\left(x^2+\frac{x(b_n-x)}{n}\right)+\frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2}b_nx+\alpha^2\frac{b_n^2}{(n+\beta)^2}-x^2$$

$$\begin{aligned}|S_n(t^2;x)-x^2|\le&\left(\frac{n^2}{(n+\beta)^2}-1\right)x^2+\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\frac{b_n}{n}x+\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\frac{x^2}{n}\\&+2\alpha x\frac{n}{n^2\left(1+2\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}\right)}b_n+\alpha^2\left(\frac{b_n}{n+\beta}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,A]}|S_n(t^2;x)-x^2|\le&A^2\left(\frac{n^2}{(n+\beta)^2}-1+\frac{n}{(n+\beta)^2}\right)\\&+2\alpha A\frac{n}{n^2\left(1+2\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}\right)}b_n+\alpha^2\left(\frac{b_n}{n+\beta}\right)^2\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerli olup, limite geçilerek

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(t^2;x) - x^2\|_{C[0,A]} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla Korovkin teoreminin tüm koşulları sağlandığından istenen yaklaşım gösterilmiş olur.

$|f(x)| \le M_f(1+x^2)$ eşitsizliğini sağlayan $f \in C(\mathbb{R})$ fonksiyonları için sağlanmayan yaklaşım teoremi yine aşağıdaki teoremde verilen alt uzaydan alınan fonksiyonlar için geçerlidir.

Teorem 2.2.1.5

$\rho(x) = 1 + x^2$ ve $f \in C_p^k(\mathbb{R})$için

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(f;x) - f(x)\|_\rho = 0$$

eşitliği sağlanır(İşler 2009).

Kanıt

Norm tanımı kullanılarak

$$\frac{|S_n(1;x) - 1|}{1+x^2} = \frac{1-1}{1+x^2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le x\le b_n} \frac{|S_n(1;x) - 1|}{1+x^2} = 0$$

eşitliği geçerli olup, kolayca

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(1;x) - 1\|_\rho = 0$$

elde edilir.

(2.9) ifadesi kullanılarak

$$S_n(t;x) - x = x\left(\frac{n}{n+\beta} - 1\right) + \frac{n}{n+\beta} b_n$$

olacağından, her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha, \beta, b_n > 0$ durumu kullanılarak

$$|S_n(t;x) - x| \le \left|\frac{n}{n+\beta} - 1\right| x + \frac{n}{n+\beta} b_n$$

$$\frac{|S_n(t;x) - x|}{1+x^2} \le \left(1 - \frac{n}{n+\beta}\right)\frac{x}{1+x^2} + \frac{\alpha}{n+\beta} b_n \frac{1}{1+x^2}$$

$$\le \left(1 - \frac{n}{n+\beta}\right) + \frac{\alpha}{n+\beta} b_n$$

$$\sup_{0\le x\le b_n}\frac{|S_n(t;x)-x|}{1+x^2}\le\left(1-\frac{n}{n+\beta}\right)+\frac{\alpha}{n+\beta}b_n$$

yazılabilir. Böylece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le b_n}\frac{|S_n(t;x)-x|}{1+x^2}\le\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n}{n+\beta}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}\frac{\alpha}{n\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}$$

$$=0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n(t;x)-x\|_\rho=0$$

eşitliği elde edilir.

Son olarak (2.10) ifadesi kullanılarak

$$S_n(t^2;x)-x^2=\left(\frac{n^2}{(n+\beta)}-1\right)x^2+\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\frac{x(b_n-x)}{n}+\frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2}b_nx+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}b_n^2$$

$$|S_n(t^2;x)-x^2|\le\left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)x^2+\frac{n}{(n+\beta)^2}x(b_n-x)+\frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2}b_nx+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}b_n^2$$

$$\begin{aligned}\frac{|S_n(t^2;x)-x^2|}{1+x^2}&\le\left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{n}{(n+\beta)^2}\frac{x(b_n-x)}{1+x^2}\\&\quad+\frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2}b_n\frac{x}{1+x^2}+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}b_n^2\frac{1}{1+x^2}\\&\le\left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)+\frac{n}{(n+\beta)^2}(b_n-x)+\frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2}b_n+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}b_n^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sup_{0\le x\le b_n}\frac{|S_n(t^2;x)-x^2|}{1+x^2}&\le\left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)+\frac{n}{(n+\beta)^2}\sup_{0\le x\le b_n}(b_n-x)\\&\quad+\frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2}b_n+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}b_n^2\\&\le\left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)+\frac{n}{(n+\beta)^2}b_n+\frac{2\alpha n}{(n+\beta)^2}b_n+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}b_n^2\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Buradan

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le b_n}\frac{|S_n(t^2;x)-x^2|}{1+x^2}&\le\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n^2}{(n+\beta)^2}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{nb_n}{n^2\left(1+\frac{2\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}\right)}\\&\quad+\lim_{n\to\infty}\frac{2\alpha nb_n}{n^2\left(1+\frac{2\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}\right)}+\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^2b_n^2}{n^2\left(1+\frac{2\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}\right)}\end{aligned}$$

eşitsizliği doğru olup, (b_n) dizisinin özelliklerinden

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n(t^2;x)-x^2\|_\rho=0$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla $v = 0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le x\le b_n} \frac{|S_n(t^v;x) - x^v|}{1+x^2} = 0$$

ifadesi geçerli olup, her $f \in C_p^k(\mathbb{R})$ içinde

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le x\le b_n} \frac{|S_n(f;x) - f(x)|}{1+x^2} = 0$$

bulunur. Bu ise kanıtı tamamlar.

ii) II. Tip Bernstein-Chlodowsky Operatörü

İzgi (2004) tarafından II. tip Bernstein-Chlodowsky polinomlar dizisi tanımlanmış ve bu polinomlar dizisinin yaklaşım özellikleri araştırılmıştır.

Tanım 2.2.1.3

(b_n) dizisi

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ve $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{b_n}{\mathrm{n}} = 0$

koşullarını sağlayan monoton artan gerçel pozitif terimli bir dizi $\alpha, \beta > 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere

$$B_n^{\alpha,\beta}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\alpha x + \beta \frac{k}{n} b_n\right) C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \quad ; 0 \le x \le b_n \tag{2.11}$$

şeklinde 2. tip genelleşmiş Bernstein-Chlodowsky tipi polinomlar dizisi tanımlanır.

Lemma 2.2.1.2

(2.11**)** ile tanımlanan polinomlar dizisi için

$B_n^{\alpha,\beta}(1,x) = 1$

$B_n^{\alpha,\beta}(t,x) = x$

$$B_n^{\alpha,\beta}(t^2,x) = x^2 + \beta^2 \frac{x(b_n - x)}{n}$$

eşitlikleri sağlanır(İzgi 2004).

Kanıt

$0 \leq x \leq b_n$ ve $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$f(t) = 1$ için binom formülü kullanılarak kolayca

$$B_n^{\alpha,\beta}(1,x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} = 1$$

elde edilir.

$f(t) = t$ için binom formülü ve $\alpha + \beta = 1$ eşitliği kullanılarak

$$B_n^{\alpha,\beta}(t,x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\alpha x + \beta \frac{k}{n} b_n\right) C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \alpha x \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$+\beta \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} b_n C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= x$$

elde edilir.

$f(t) = t^2$ için binom formülü ve $\alpha + \beta = 1$ eşitliği kullanılarak

$$B_n^{\alpha,\beta}(t^2,x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\alpha x + \beta \frac{k}{n} b_n\right)^2 C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \alpha x^2 \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$+2\alpha\beta x \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} b_n C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$+\beta^2 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} b_n\right)^2 C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x^2 + \beta^2 \left[x^2 + x\left(\frac{b_n - x}{n}\right)\right]$$

$$= x^2 \left[(\alpha^2 + \beta^2) + \left(2\alpha\beta + \frac{\beta^2}{n}\right)\right] + \beta^2 \frac{x b_n}{n}$$

$$= x^2 (\alpha + \beta)^2 + \beta^2 \left[\frac{x b_n}{n} - \frac{x}{n}\right]$$

olacağından

$$B_n^{\alpha,\beta}(t^2,x) = x^2 + \beta^2 \frac{x(b_n - x)}{n}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 2.2.1.6

$\rho(x) = 1 + x^2$ olmak üzere $f \in C_\rho(0,\infty)$ için herhangi bir kapalı ve sınırlı $[0,A]$ aralığı üzerinde

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_n^{\alpha,\beta}(f,x) - f(x) \right\|_{C[0,A]} = 0$$

eşitsizliği sağlanır(İşler 2009).

Kanıt

Polinomun tanımından

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_n^{\alpha,\beta}(1,x) - 1 \right\|_{C[0,A]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_n^{\alpha,\beta}(t,x) - x \right\|_{C[0,A]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_n^{\alpha,\beta}(t^2,x) - x^2 \right\|_{C[0,A]} = 0$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu durumda her $f \in C_\rho(0,\infty)$ için $[0,A]$ aralığı üzerinde

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_n^{\alpha,\beta}(f,x) - f(x) \right\|_{C[0,A]} = 0$$

eşitliği geçerlidir. Bu da kanıtı tamamlar.

Aşağıdaki (2.11) polinomlar dizisinin $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ fonksiyonuna olan yaklaşım hızıyla ilgili bir teorem verilecektir.

Teorem 2.2.1.7

$\omega_f^{1+A}(\delta), f$ fonksiyonunun $[0,1+A]$ aralığı üzerinde tanımlanan süreklilik modülü olsun. Her $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ için M , f fonksiyonuna bağlı bir sabit olmak üzere $[0,A]$ aralığı üzerinde

$$\left|B_n^{\alpha,\beta}(f,x)-f(x)\right| \leq M\omega_f^{1+A}\left(\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt

$x \in [0,A]$ olmak üzere

$E_1 = \left\{k: \alpha x + \beta \frac{k}{n} b_n \geq 1 + A\right\}$ ve $E_2 = \left\{k: \alpha x + \beta \frac{k}{n} b_n \leq 1 + A\right\}$

kümeleri tanımlansın.

$$\begin{aligned}
\left|B_n^{\alpha,\beta}(f,x)-f(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right]C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right| \\
&= \left|\sum_{k\in E_1}\left[f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right]C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right. \\
&\quad \left.+\sum_{k\in E_2}\left[f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right]C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right| \\
&\leq \sum_{k\in E_1}\left|f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right|C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad +\sum_{k\in E_2}\left|f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right|C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= I_n^{(1)} + I_n^{(2)}
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

$I_n^{(1)}$ ve $I_n^{(2)}$ ifadeleri ayrı ayrı düşünülmelidir.

$k \in E_1$ ve $x \in [0,A]$ için f fonksiyonunun özelliklerinden

$$\begin{aligned}
\left|f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right| &\leq M_f\left(2+\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)^2+x^2\right) \\
&\leq M_f\left[\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n-x\right)^2+2x\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n-x\right)+2(1+x^2)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$\left|\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n-x\right| \geq 1$ olduğundan

$$\left|f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right| \leq 2M_f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n-x\right)^2[4+4x+x^2]$$

$$\leq 2M_f(A+2)^2\left((a-1)x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)^2$$

eşitsizliği geçerli olup,

$B:=2M_f(A+2)^2$ tanımlaması yapılırsa

$$\left|f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right|\leq B\left((a-1)x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)^2$$

bulunur. Böylece

$$I_n^{(1)}\leq B\sum_{k=0}^{n}\left((a-1)x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)^2 C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$=B\beta^2\frac{x(b_n-x)}{n}$$

$$\leq B\beta^2 A\frac{b_n}{n}$$

eşitsizliği yazılabilir. Tanımdan $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0$ olduğundan yeterince büyük n değerleri için $\frac{b_n}{n}\leq\sqrt{\frac{b_n}{n}}$ olacaktır. Burada

$$C_f\sqrt{\frac{b_n}{n}}\leq\omega_f^{1+A}\left(\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\Longrightarrow\sqrt{\frac{b_n}{n}}\leq\frac{1}{C_f}\omega_f^{1+A}\left(\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

olacak şekilde f fonksiyonuna ve (δ_n) dizisine bağlı $C_f>0$ sayısı vardır.

$M:=\frac{B\beta^2 A}{C_f}$ olarak tanımlanırsa

$$I_n^{(1)}\leq M\omega_f^{1+A}\left(\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\tag{2.12}$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan $k\in E_2$ ve $x\in[0,A]$ için süreklilik modülünün özelliklerinden

$$\left|f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right|\leq\omega_f^{1+A}\left(\left|\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n-x\right|\right)$$

$$\leq\omega_f^{1+A}(\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\left|\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n-x\right|\right]$$

olarak yazılabilir. Süreklilik modülünün özellikleri ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$I_n^{(2)} \leq \omega_f^{1+A}(\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\left|\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n-x\right| C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right]$$

$$\leq \omega_f^{1+A}(\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\sum_{k=0}^{n}\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n-x\right)^2 C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}}\right]$$

$$= \omega_f^{1+A}(\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\beta^2\frac{x(b_n-x)}{n}}\right]$$

$$\leq \omega_f^{1+A}(\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\beta\sqrt{A}\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right]$$

eşitsizliği bulunur. Burada $\delta_n = \sqrt{\frac{b_n}{n}}$ ve $K = 1+\beta\sqrt{A}$ olarak alınırsa

$$I_n^{(2)} \leq K\omega_f^{1+A}\left(\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) \tag{2.13}$$

elde edilir.

Bu durumda (2.12) ve (2.13) ifadelerinden $C := M + K$ olarak tanımlanırsa

$$\left|B_n^{\alpha,\beta}(f,x)-f(x)\right| \leq M.\,\omega_f^{1+A}\left(\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

eşitsizliği gösterilmiş olur.

2.2.2. İki Değişkenli Bernstein-Chlodowsky Polinomlar Dizisi İle Yaklaşım

İbikli (2005) üçgensel bölgede iki değişkenli Bernstein-Chlodowsky tipi polinomlar dizisini tanımlamış ve polinomların bazı yaklaşım özelliklerini araştırmıştır.

Tanım 2.2.2.1

(b_n) , monoton artan gerçel terimli pozitif sayıların bir dizisi ve

$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ve $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n} = 0$ olsun.

Herhangi bir $a > 0$ sayısı için

$\Delta_a = \{(x,y): x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq a\}$

üçgensel bölgesi tanımlansın. $a = b_n$ durumundaki üçgensel bölge Δ_{b_n} ile gösterilmek üzere $(x,y) \in \Delta_{b_n}$ olan iki değişkenli bir f fonksiyonu için Bernstein-Chlodowsky tipi polinomlar

$$B_n^{**}(f;x,y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1 - \frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} f\left(\frac{k-j}{n} b_n, \frac{j}{n} b_n\right) C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^j \qquad (2.14)$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 2.2.2.1

Δ_{b_n} üçgensel bölgesi üzerinde sürekli olan

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

fonksiyonuna (2.14) ile tanımlanan polinomlar dizisi ile yaklaşım yapılırsa;

$$B_n^{**}(f;x,y) - (f;x,y) = x^2 + \frac{x(b_n - x)}{n} + y^2 + \frac{y(b_n - y)}{n} - x^2 - y^2$$

$$= \frac{x(b_n - x)}{n} + \frac{y(b_n - y)}{n}$$

eşitliği geçerlidir. Buradan kolayca

$$\max_{(x,y)\in\Delta_{b_n}} |B_n^{**}(f;x,y) - (f;x,y)| = \max_{(x,y)\in\Delta_{b_n}} \left\{\frac{x(b_n - x)}{n} + \frac{y(b_n - y)}{n}\right\}$$

$$= \frac{b_n^2}{2n}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty} \max_{(x,y)\in\Delta_{b_n}} |B_n^{**}(f;x,y) - (f;x,y)| = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n^2}{2n} = \infty$$

elde edilir. Bu da yakınsamanın sağlanmadığını gösterir.

Yeterince büyük n değeri için Δ_{b_n} üçgeni bir Δ_a üçgenini oluşturuyorsa Δ_{b_n} üçgeninin herhangi bir kapalı alt kümesinde

$|f(x,y)| \leq M_f(1 + x^2 + y^2)$

koşulunu sağlayan sürekli fonksiyonlara (2.14) polinomlar dizisi ile yaklaşım sağlanır. Bu durum aşağıdaki teorem ile verilebilir(İbikli 2005).

Teorem 2.2.2.1

$a > 0$ keyfi sabit sayı olsun. $f \in C_\rho(R_2^{++})$ için Δ_a bölgesi üzerinde

$\lim_{n\to\infty} \|B_n^{**}(f;x,y) - f(x,y)\|_{C_{(\Delta_a)}} = 0$

eşitliği sağlanır(İbikli 2005).

Kanıt

Kanıt için k ve m pozitif tamsayılar olmak üzere

$f_{k,m}(t;\rho) = t^k \rho^m$

olarak tanımlansın. İlk olarak

$$B_n^{**}\left(f_{0,0};x,y\right) = 1 \tag{2.15}$$

$$B_n^{**}\left(f_{1,0};x,y\right) = x \tag{2.16}$$

$$B_n^{**}\left(f_{0,1};x,y\right) = y \tag{2.17}$$

$$B_n^{**}\left(f_{2,0};x,y\right) = x^2 + \frac{x(b_n - x)}{n} \tag{2.18}$$

$$B_n^{**}\left(f_{0,2};x,y\right) = y^2 + \frac{y(b_n - y)}{n} \tag{2.19}$$

eşitliklerinin doğruluğu gösterilmelidir.

$f_{0,0}(t,\rho) = 1$ için

$$\begin{aligned} B_n^{**}\left(f_{0,0};x,y\right) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1 - \frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^j \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1 - \frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^k \\ &= \left(1 - \frac{x+y}{b_n} + \frac{x+y}{b_n}\right)^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

$f_{1,0}(t,\rho) = t$ için

$$B_n^{**}(f_{1,0};x,y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{k-j}{n} b_n\right) C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^j$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{k}{n} b_n\right) \sum_{j=0}^{k} C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^j$$

$$-\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{j}{n} b_n\right) C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^j$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} b_n\right) C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^k$$

$$-\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{j}{n} b_n\right) C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^j$$

şeklinde yazılabilir. $I_1 - I_2$ ve I_3 olarak tanımlanacak terimler ayrı ayrı hesaplanırsa

$$I_1 := b_n \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^k$$

$$= b_n \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^k$$

$$= b_n \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^k$$

$$= b_n \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k)!} \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^k$$

$$= b_n \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^k$$

$(k \to k+1)$ dönüşümüyle

$$= b_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k+1}$$

$$= b_n \frac{x+y}{b_n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^k$$

$$= (x+y) \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^k$$

$$= (x + y)$$

olur. Benzer şekilde

I_2 için;

$$I_2 = \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{j}{n} b_n\right) C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^j$$

olmak üzere

$$I_2 = \frac{b_n}{n} \sum_{j=0}^{k} j C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^j$$

$$= \frac{b_n}{n} \sum_{j=1}^{k} j C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^j$$

$$= \frac{b_n}{n} \sum_{j=1}^{k} j \frac{k!}{(k-j)!\, j!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^j$$

$$= \frac{b_n}{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{k!}{(k-j)!\,(j-1)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^j$$

$$= \frac{b_n}{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{k}{k} \frac{k!}{(k-j)!\,(j-1)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^j$$

$$= \frac{b_n}{n} k \sum_{j=1}^{k} \frac{(k-1)!}{(k-j)!\,(j-1)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^j$$

$(j \to j+1)$ dönüşümü yapılarak

$$= \frac{b_n}{n} k \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(k-1)!}{(k-j-1)!\, j!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j-1} \left(\frac{y}{b_n}\right)^{j+1}$$

$$= \frac{b_n}{n} \frac{y}{b_n} k \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(k-1)!}{(k-j-1)!\, j!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j-1} \left(\frac{y}{b_n}\right)^j$$

$$= \frac{k}{n} y \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j-1} \left(\frac{y}{b_n}\right)^j$$

$$= \frac{k}{n} y \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}$$

olur. I_2 I_3 de yerine yazılırsa

$$I_3 = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} y\, C_n^k \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= y\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\ C_n^k\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= y\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= y\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k)!}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= y\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}$$

$(k \to k+1)$ dönüşümü yapılırsa

$$= y\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

$$= y\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

$$= y$$

bulunur. I_1ve I_3 ifadeleri $B_n^{**}(f_{1,0};x,y)$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$B_n^{**}(f_{1,0};x,y) = x + y - y = x$$

olup, istenilen elde edilir.

$f_{0,1}(t,\rho) = \rho$ olmak üzere;

$$B_n^{**}(f_{1,0};x,y) = \sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{j}{n}b_n\right)C_k^j\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$B_n^{**}(f_{1,0};x,y) = I_3$$

olduğundan

$$B_n^{**}(f_{1,0};x,y) = y$$

olur. Bu ise istenen ifadedir.

$f_{2,0}(t,\rho) = t^2$olmak üzere;

$$B_n^{**}(f_{2,0};x,y) = \sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{k-j}{n}b_n\right)^2C_k^j\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \left[\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2 - 2kj\left(\frac{b_n}{n}\right)^2 + \left(\frac{j}{n}b_n\right)^2\right] C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^j$$

$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{k}{n}b_n\right)^2 C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^j$$

$$-2\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} kj\left(\frac{b_n}{n}\right)^2 C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^j$$

$$+\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{j}{n}b_n\right)^2 C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^j$$

şeklinde yazılabilir.

Eşitliğin sağ tarafındaki ifadeler sırasıyla P_1, P_2, P_3 olarak adlandırılırsa

$$P_1 = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}b_n\right)^2 C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} C_k^j \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j} \left(\frac{y}{b_n}\right)^j$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}b_n\right)^2 C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^k$$

$$= {b_n}^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} C_n^k \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^k$$

$$= {b_n}^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{k}{n}\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k)!} \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^k$$

$$= {b_n}^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^k$$

$$= {b_n}^2 \left(\frac{x+y}{b_n}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)+1}{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}$$

$$= {b_n}^2 \left(\frac{x+y}{b_n}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}$$

$$+{b_n}^2 \left(\frac{x+y}{b_n}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}$$

$$= {b_n}^2 \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k} \left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-2}$$

$$+{b_n}^2\left(\frac{x+y}{b_n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}$$

$$=\frac{(x+y)^2}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-2)!\,(n-k)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-2}$$

$$+b_n\left(\frac{x+y}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}$$

$$=\frac{(x+y)^2}{n}(n-1)\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-2}$$

$$+b_n\left(\frac{x+y}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}$$

toplamdaki terimlerde sırasıyla $k\to k+2$ ve $k\to k+1$ dönüşümleri yapılırsa

$$=\frac{(x+y)^2}{n}(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{(k)!\,(n-k-2)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-2}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k}$$

$$+b_n\left(\frac{x+y}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(k)!\,(n-k-1)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k}$$

$$=\frac{(n-1)}{n}(x+y)^2+\frac{b_n}{n}(x+y)$$

olarak bulunur.

$$P_2=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{b_n}{n}\right)k\sum_{j=0}^{k}jC_k^j\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

olarak yazılabilir. Burada içerdeki toplam $\tilde{P}_2$ ayrıca hesaplanmalıdır.

$$\tilde{P}_2=\sum_{j=0}^{k}jC_k^j\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

olmak üzere

$$\tilde{P}_2=\sum_{j=1}^{k}jC_k^j\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}j\frac{k!}{j!\,(k-j)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}j\frac{k(k-1)!}{j(j-1)!\,(k-j)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

$$= k\sum_{j=1}^{k}\frac{(k-1)!}{(j-1)!\,(k-j)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

$$= k\,\frac{y}{b_n}\sum_{j=1}^{k}\frac{(k-1)!}{(j-1)!\,(k-j)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j-1}$$

$j \to j+1$ dönüşümü yapılırsa

$$= k\,\frac{y}{b_n}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(k-1)!}{j!\,(k-j-1)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j-1}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

$$= k\,\frac{y}{b_n}\sum_{j=0}^{k-1}C_{k-1}^{j}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j-1}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

$$= k\,\frac{y}{b_n}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}$$

elde edilir. Bu ifade P_2 de yerine yazılırsa

$$P_2 = \sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{b_n}{n}\right)k^2\,\frac{y}{b_n}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{b_n}{n^2}\,y\sum_{k=1}^{n}k^2C_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{b_n}{n^2}\,y\sum_{k=1}^{n}kk\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{b_n}{n}\,y\sum_{k=1}^{n}k\,\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}$$

$k \to k+1$ dönüşümü yapılırsa

$$= \frac{b_n}{n}\,y\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)C_{n-1}^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k}$$

$$= \frac{b_n}{n}\,y\sum_{k=0}^{n-1}kC_{n-1}^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k}$$

$$+\frac{b_n}{n}\,y\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k}$$

$$= \frac{b_n}{n}\,y\sum_{k=0}^{n-1}kC_{n-1}^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k}+\frac{b_n}{n}\,y$$

$$=\frac{b_n}{n}y\sum_{k=0}^{n-1}kC_{n-1}^{k}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k}+\frac{b_n}{n}y$$

$$=\frac{b_n}{n}y\sum_{k=1}^{n-1}k\frac{(n-1)(n-2)!}{k(k-1)!(n-k-1)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k}+\frac{b_n}{n}y$$

$$=\frac{(n-1)}{n}b_ny\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k}+\frac{b_n}{n}y$$

$$=\frac{(n-1)}{n}b_ny\left(\frac{x+y}{b_n}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}+\frac{b_n}{n}y$$

$k\to k+1$ dönüşümü yapılırsa

$$=\frac{(n-1)}{n}b_ny\left(\frac{x+y}{b_n}\right)\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k!(n-k-2)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-2}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k}+\frac{b_n}{n}y$$

$$=\frac{(n-1)}{n}b_ny\left(\frac{x+y}{b_n}\right)+\frac{b_n}{n}y$$

olarak elde edilir.

$$P_3=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{b_n}{n}\right)^2\sum_{j=0}^{k}j^2C_k^j\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

olmak üzere ilk olarak

$$\tilde{P}_3=\sum_{j=0}^{k}j^2C_k^j\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

ifadesi göz önüne alınırsa

$$\tilde{P}_3=\sum_{j=0}^{k}j^2C_k^j\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}jj\frac{k!}{j(j-1)!(k-j)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}j\frac{k!}{(j-1)!(k-j)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

$$=k\sum_{j=1}^{k}j\frac{(k-1)!}{(j-1)!(k-j)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

$$=k\sum_{j=1}^{k}[(j-1)+1]\frac{(k-1)!}{(j-1)!(k-j)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

$$= k\sum_{j=1}^{k}(j-1)\frac{(k-1)!}{(j-1)!\,(k-j)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

$$+k\sum_{j=1}^{k}\frac{(k-1)!}{(j-1)!\,(k-j)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

$$= k\sum_{j=2}^{k}(j-1)\frac{(k-1)(k-2)!}{(j-1)(j-2)!\,(k-j)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

$$+k\sum_{j=1}^{k}\frac{(k-1)!}{(j-1)!\,(k-j)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

$$= k(k-1)\sum_{j=2}^{k}\frac{(k-2)!}{(j-2)!\,(k-j)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

$$+k\sum_{j=1}^{k}\frac{(k-1)!}{(j-1)!\,(k-j)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

$$= k(k-1)\left(\frac{y}{b_n}\right)^{2}\sum_{j=2}^{k}\frac{(k-2)!}{(j-2)!\,(k-j)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j-2}$$

$$+k\left(\frac{y}{b_n}\right)\sum_{j=1}^{k}\frac{(k-1)!}{(j-1)!\,(k-j)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j-1}$$

toplamın terimlerinden $j \to j+2$ ve $j \to j+1$ dönüşümleri yapılırsa

$$= k(k-1)\left(\frac{y}{b_n}\right)^{2}\sum_{j=0}^{k-2}\frac{(k-2)!}{j!\,(k-j-2)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j-2}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

$$+k\left(\frac{y}{b_n}\right)\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(k-1)!}{j!\,(k-j-1)!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j-1}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

$$= k(k-1)\left(\frac{y}{b_n}\right)^{2}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-2}+k\left(\frac{y}{b_n}\right)\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}$$

olur. Bu ifade P_3 de yerine yazılırsa

$$P_3=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{b_n}{n}\right)^{2}\left\{k(k-1)\left(\frac{y}{b_n}\right)^{2}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-2}+k\left(\frac{y}{b_n}\right)\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}\right\}$$

$$=\left(\frac{y}{n}\right)^{2}\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\frac{n(n-1)(n-2)!}{k(k-1)(k-2)!\,(n-k)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-2}$$

$$+\frac{b_n}{n^2}y\sum_{k=1}^{n}k\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}$$

$$=\frac{(n-1)}{n}y^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-2}$$

$$+\frac{b_n}{n}y\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k-1}$$

toplamın terimlerinde sırasıyla $k\to k+2$ ve $k\to k+1$ dönüşümleri yapılırsa

$$=\frac{(n-1)}{n}y^2\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k!\,(n-k-2)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-2}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k}$$

$$+\frac{b_n}{n}y\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-1}\left(\frac{x+y}{b_n}\right)^{k}$$

$$=\frac{(n-1)}{n}y^2+\frac{b_n}{n}y$$

olarak bulunur. Hesaplanan P_1,P_2,P_3 ifadeleri $B_n^{**}(f_{2,0};x,y)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$B_n^{**}(f_{2,0};x,y)=\frac{n-1}{n}(x+y)^2+\frac{b_n}{n}(x+y)-2\left(\frac{n-1}{n}\right)y(x+y)-2\frac{b_n}{n}y+\frac{n-1}{n}y^2$$

$$+\frac{b_n}{n}y$$

$$=\frac{n-1}{n}[x+y-y]^2+\frac{b_n}{n}x$$

$$=x^2+\frac{x(b_n-x)}{n}$$

elde edilir. Bu ise aranan eşitliktir.

$f_{0,2}(t,\rho)=\rho^2$olmak üzere

$$B_n^{**}(f_{0,2};x,y)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(1-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{j}{n}b_n\right)^2C_k^j\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-j}\left(\frac{y}{b_n}\right)^{j}$$

ifadesi için;

$$B_n^{**}(f_{0,2};x,y)=P_3$$

olduğundan

$$B_n^{**}(f_{0,2};x,y)=\frac{n-1}{n}y^2+\frac{b_n}{n}y$$

$$=y^2-\frac{1}{n}y^2+\frac{b_n}{n}y$$

$$= y^2 + \frac{y(b_n - y)}{n}$$

olarak yazılabilir. Bu ise istenen ifadedir.

(2.15) ifadesi kullanılarak

$$B_n^{**}(f_{0,0}; x, y) - f_{0,0}(x,y) = 0$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_n^{**}(f_{0,0}; x, y) - f_{0,0}(x,y) \right\|_{C_{(\Delta_a)}} = 0$$

eşitliği sağlanır.

(2.16) ifadesinden kolayca

$$B_n^{**}(f_{1,0}; x, y) - f_{1,0}(x, y) = 0$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_n^{**}(f_{1,0}; x, y) - f_{1,0}(x, y) \right\|_{C_{(\Delta_a)}} = 0$$

eşitliğine ulaşılır.

(2.17) ifadesi kullanılarak

$$B_n^{**}(f_{0,1}; x, y) - f_{0,1}(x, y) = 0$$

eşitliği yazılabileceğinden,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_n^{**}(f_{0,1}; x, y) - f_{0,1}(x, y) \right\|_{C_{(\Delta_a)}} = 0$$

bulunur.

(2.18) ifadesi kullanılarak

$$B_n^{**}(f_{2,0}; x, y) - f_{2,0}(x,y) = x^2 + \frac{x(b_n - x)}{n} - x^2$$

$$= \frac{x(b_n - x)}{n}$$

eşitliği yazılabilir. Maksimuma geçilirse

$$\max_{(x,y)\in\Delta_a} \left| B_n^{**}(f_{2,0}; x, y) - f_{2,0}(x,y) \right| = \max_{(x,y)\in\Delta_a} \frac{x(b_n - x)}{n}$$

$$= \frac{a(b_n - \frac{a}{2})}{2n}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_n^{**}(f_{2,0}; x, y) - f_{2,0}(x, y) \right\|_{C_{(\Delta_a)}} = 0$$

eşitliği sağlanır.

(2.19) ifadesi dikkate alınırsa

$$B_n^{**}\left(f_{0,2};x,y\right)-f_{0,2}(x,y)=y^2+\frac{y(b_n-y)}{n}-y^2$$
$$=\frac{y(b_n-y)}{n}$$

olacağından yine maksimum alınarak

$$\max_{(x,y)\in\Delta_a}\left|B_n^{**}\left(f_{0,2};x,y\right)-f_{0,2}(x,y)\right|=\max_{(x,y)\in\Delta_a}\frac{y(b_n-y)}{n}$$
$$=\frac{a(b_n-\frac{a}{2})}{2n}$$

eşitliği geçerli olup,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n^{**}\left(f_{0,2};x,y\right)-f_{0,2}(x,y)\right\|_{C_{(\Delta_a)}}=0$$

elde edilir. Bu durumda Volkov Teoreminin tüm koşulları sağlanır. O halde Volkov Teoreminden her $f\in C_\rho(R_2^{++})$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty}\|B_n^{**}(f;x,y)-f(x,y)\|_{C_{(\Delta_a)}}=0$$

eşitliği sağlanır. Bu ise kanıtı tamamlar.

2.3.BERNSTEIN-STANCU POLİNOMU

2.3.1 Bir Değişkenli Bernstein-Stancu Polinomu

Stancu (1969) Bernstein-Stancu polinomunu tanımlamıştır.

Tanım 2.3.1.1

$B_{n,\alpha,\beta}: C[0,1]\to C[0,1]$ Bernstein-Stancu polinomlar dizisi ve α,β sayıları ise

$0\le\alpha\le\beta$

koşulunu sağlayan pozitif gerçel sayılar olmak üzere

$$B_{n,\alpha,\beta}(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k} \tag{2.20}$$

şeklinde tanımlanır. Burada Bernstein-Stancu polinomunun düğüm noktaları $[0,1]$ aralığının $\frac{k+\alpha}{n+\beta}$ noktalarıdır. Açıkça bu polinomda $\alpha=\beta=0$ alınırsa klasik Bernstein polinomuna dönüşür.

Uyarı 2.3.1.1.

Tanım 2.3.1.1 ile verilen Bernstein-Stancu polinomlar dizisi doğrusal ve pozitif bir operatör dizisidir.

Kanıt

$a,b\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}B_{n,\alpha,\beta}(af+bg,x)&=\sum_{k=0}^{n}(af+bg)\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}(af)\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}(bg)\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\\&=a\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}+b\sum_{k=0}^{n}g\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\end{aligned}$$

bu ise operatörün doğrusal olması demektir.
Pozitiflik için
$f(x)\geq 0$ olsun. $C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\geq 0$ olduğundan açıkça $B_{n,\alpha,\beta}(f,x)\geq 0$.

Lemma 2.3.1.1

Her $x\in[0,1]$ ve $n\in\mathbb{N}$ için Bernstein-Stancu polinomu aşağıdaki eşitlikleri sağlar(Stancu 1969).

i) $B_{n,\alpha,\beta}(1,x)=1$

ii) $B_{n,\alpha,\beta}(t,x)=\frac{n}{n+\beta}x+\frac{\alpha}{n+\beta}$

iii) $B_{n,\alpha,\beta}(t^2,x)=\frac{1}{(n+\beta)^2}\{n(n-1)x^2+(1+2\alpha)nx+\alpha^2\}$

iv) $B_{n,\alpha,\beta}((t-x)^2,x)=\frac{1}{(n+\beta)^2}\{n(n-1)+(\beta x+\alpha)^2\}$

Kanıt

Bernstein-Stancu polinomunda $f(t) = 1$ fonksiyonu alınırsa Binom formülünden kolayca

$$B_{n,\alpha,\beta}(1,x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

elde edilir.

Benzer şekilde $B_{n,\alpha,\beta}$ operatörünün doğrusallığı kullanılarak $f(t) = t$ fonksiyonu için

$$B_{n,\alpha,\beta}(t,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n+\beta}\left\{\sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} + \alpha \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right\}$$

$$= \frac{1}{n+\beta}\left\{nx \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k} + \alpha\right\}$$

$$= \frac{1}{n+\beta}\left\{nx \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k\, x^k (1-x)^{n-1-k} + \alpha\right\}$$

$$= \frac{n}{n+\beta} x + \frac{\alpha}{n+\beta}$$

bulunur.

$f(t) = t^2$ fonksiyonu için yine $B_{n,\alpha,\beta}$ operatörünün doğrusallığından

$$B_{n,\alpha,\beta}(t^2,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{(n+\beta)^2}\left\{\sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} + 2\alpha \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right.$$

$$\left. + \alpha^2 \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right\}$$

$$= \frac{1}{(n+\beta)^2}\left\{n \sum_{k=1}^{n} (k-1+1) \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}\right.$$

$$\left. + 2n\alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} + \alpha^2\right\}$$

$$B_{n,\alpha,\beta}(t^2,x)=\frac{1}{(n+\beta)^2}\left\{n\sum_{k=1}^{n}(k-1)\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}\right.$$

$$+\,n\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}x^k\,(1-x)^{n-k}+2n\alpha x\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}x^k\,(1-x)^{n-1-k}$$

$$\left.+\,\alpha^2\right\}$$

$$=\frac{1}{(n+\beta)^2}\left\{n(n-1)x^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!}x^{k-2}(1-x)^{n-k}\right.$$

$$\left.+nx\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}x^k(1-x)^{n-1-k}+2n\alpha x+\alpha^2\right\}$$

$$=\frac{1}{(n+\beta)^2}\left\{n(n-1)x^2\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}x^k\,x^k(1-x)^{n-2-k}+nx+2n\alpha x+\alpha^2\right\}$$

$$=\frac{1}{(n+\beta)^2}\{n(n-1)x^2+(1+2\alpha)nx+\alpha^2\}$$

elde edilir.

$B_{n,\alpha,\beta}$ operatörünün doğrusallığı ve yukarıda elde edilen eşitlikler yardımıyla $f(t)=(t-x)^2$ fonksiyonu için

$$B_{n,\alpha,\beta}((t-x)^2,x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}-x\right)^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$-2x\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$+x^2\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k\,(1-x)^{n-k}$$

eşitliği yazılabilir. Böylece (i), (iii) eşitlikleri kullanılarak

$$B_{n,\alpha,\beta}((t-x)^2,x)=\frac{1}{(n+\beta)^2}\{n(n-1)x^2+(1+2\alpha)nx+\alpha^2\}$$

$$-2x\left\{\frac{n}{n+\beta}x+\frac{\alpha}{n+\beta}\right\}+x^2$$

$$=\frac{1}{(n+\beta)^2}\{nx(n-1)+(\beta x-\alpha)^2\}$$

olacaktır.

Lemma 2.3.1.1 den yararlanılarak Bernstein-Stancu operatör dizisinin yakınsaklığı Korovkin teoremi yardımıyla aşağıdaki şekilde verilir.

Teorem 2.3.1.1

$f \in C[0,1]$ olsun. Bu durumda Bernstein-Stancu operatör dizisi her $f \in C(0,1)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_{n,\alpha,\beta}(f,x) - f(x) \right\|_{C[0,1]} = 0$$

eşitliğini sağlar(Stancu 1969).

Kanıt

Kanıt için Korovkin teoremindeki koşulların sağlandığın göstermek yeterlidir. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_{n,\alpha,\beta}(t^v,x) - x^v \right\|_{C[0,1]} = 0 \quad , \qquad v = 0,1,2$$

olduğu gösterilmelidir.

$v = 0$ için Lemma 2.3.1.1(i) den

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\le x\le 1} \left| B_{n,\alpha,\beta}(1,x) - 1 \right| = 0$$

olduğu açıktır.

Dolayısıyla $v = 0$ için kolayca

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_{n,\alpha,\beta}(t^v,x) - x^v \right\|_{C[0,1]} = 0$$

olacaktır.

Benzer şekilde Lemma 2.3.1.1 (ii) ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\le x\le 1} \left| B_{n,\alpha,\beta}(t,x) - x \right| = \lim_{n\to\infty} \max_{0\le x\le 1} \left| \frac{n}{n+\beta} x + \frac{\alpha}{n+\beta} - x \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \max_{0\le x\le 1} \left| \frac{-\beta}{n+\beta} x + \frac{\alpha}{n+\beta} \right|$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \max_{0\le x\le 1} \left\{ \left| \frac{-\beta}{n+\beta} \right| x + \left| \frac{\alpha}{n+\beta} \right| \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha+\beta}{n+\beta}$$

$$= 0$$

bulunur. Bu ise

$v = 1$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_{n,\alpha,\beta}(t^v, x) - x^v \right\|_{C[0,1]} = 0$$

olması demektir.

Son olarak $v = 2$ için Lemma 2.3.1.1 (ii) ve üçgen eşitsizliğinden

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\le x\le 1} \left| \beta_{n,\alpha\beta}(t^2, x) - x^2 \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \max_{0\le x\le 1} \left| \frac{1}{(n+\beta)^2} \{n(n-1)x^2 + (1+2\alpha)nx + \alpha^2\} - x^2 \right|$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+\beta)^2} \left\{ \max_{0\le x\le 1} (|-(n+2n\beta+\beta^2)|x^2 + |1+2\alpha|nx + |\alpha^2|) \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+\beta)^2} \left\{ \max_{0\le x\le 1} [(n+2n\beta+\beta^2)x^2 + (1+2\alpha)nx + \alpha^2] \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+\beta)^2} \{(n+2n\beta+\beta^2) + (1+2\alpha)n + \alpha^2\}$$

$$= 0$$

bulunur. O halde $v = 2$ için de istenen eşitlik gösterilmiş olur. Böylece Korovkin teoreminin koşulları sağlandığından $[0,1]$ aralığında sürekli her f fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_{n,\alpha,\beta}(f, x) - f(x) \right\|_{C[0,1]} = 0$$

eşitliği gösterilmiş olur

$C[0,1]$ uzayında tanımlı süreklilik modülü yardımıyla Bernstein-Stancu polinomlarının yaklaşım hızı, aşağıdaki teoremle verilecektir.

Teorem 2.3.1.2

Her $f \in C[0,1]$ ve $x \in [0,1]$ için Bernstein-Stancu polinomu

$$\left| B_{n,\alpha,\beta}(f, x) - f(x) \right|$$

$$\le \begin{cases} \frac{3}{2}\omega\left(f, (n+4\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}\right) & ; \quad \alpha \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \; ve \; \beta \in [\alpha, 2\alpha] \; veya \; \alpha \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \; ve \; \beta \in [4\alpha^2, 2\alpha] \\ \left(1 + \frac{4\alpha^2+1}{2\beta+2}\right)\omega\left(f, (n+4\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}\right) & ; \quad \alpha \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \; ve \; \beta \in [\alpha, 4\alpha^2] \; veya \; \frac{1}{2} \le \alpha \le \beta \le 2\alpha \\ \frac{3}{2}\omega\left(f, (n+4(\beta-\alpha)^2)^{-\frac{1}{2}}\right) & ; \quad \alpha \in \left[\beta - \frac{\sqrt{\beta}}{2}, \frac{\beta}{2}\right] \; ve \; \beta \in \left[\frac{1}{4}, 1\right] \\ \left(1 + \frac{4\alpha^2+1}{2\beta+2}\right)\omega\left(f, (n+4(\beta-\alpha)^2)^{-\frac{1}{2}}\right) & ; \quad \alpha \le \frac{\beta}{2} \; ve \; \beta \ge 1 \end{cases}$$

eşitsizliğini sağlar(Döne 2011).

Kanıt

Süreklilik modülünün özelliği kullanılarak sağ taraftaki ifade büyütülürse

$$\left|B_{n,\alpha,\beta}(f,x)-f(x)\right|$$

$$\leq \left\{\left\{1+\delta^{-1}\sqrt{B_{n,\alpha,\beta}((t-x)^2,x)}\right\}\omega(f,\delta)\right\}$$

$$=\left\{1+\delta^{-1}\frac{1}{(n+\beta)}\sqrt{\{nx(1-x)+(\beta x-\alpha)^2\}}\right\}\omega(f,\delta)$$

$$\leq \left\{1+\delta^{-1}\frac{1}{(n+\beta)}\sqrt{\left\{\left[\max_{x\in[0.1]} nx(1-x)\right]+\max_{x\in[0.1]}(\beta x-\alpha)^2\right\}}\right\}\omega(f,\delta) \qquad (2.21)$$

eşitsizliği elde edilir.

Burada $c(1-x)$ fonksiyonu

$g(x) := c(1-x)$

eşitliği ile tanımlansın. Açıkça maksimumu aşağıdaki şekilde belirlenir.

$g'(x) = 1-2x$ olduğundan $x=\frac{1}{2}$, g fonksiyonunun kritik noktasıdır. Ayrıca

$g''(x) = -2 < 0$ olduğundan

$$\max_{x\in[0,1]} g(x) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

bulunur. Dolayısıyla (2.21) eşitsizliği

$$\left|B_{n,\alpha,\beta}(f,x)-f(x)\right| \leq \left\{1+\delta^{-1}\frac{1}{(n+\beta)}\sqrt{\left\{\frac{n}{4}+\max_{x\in[0.1]}(\beta x-\alpha)^2\right\}}\right\}\omega(f,\delta) \qquad (2.22)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$(\beta x-\alpha)^2$ fonksiyonunun maksimumunu hesaplamak için

$h(x) := (\beta x-\alpha)^2$

eşitliği tanımlansın. Açıkça $h''(x) = 2\beta^2 > 0$ olduğundan h fonksiyonu maksimum değerini kritik noktasında değil aralığın uç noktalarından birinde alır. Yani

$$\max_{x\in[0.1]} h(x) = \max_{x\in[0.1]}(\beta x-\alpha)^2$$

$$= \max\{\alpha^2, (\beta-\alpha)^2\}$$

olacaktır.

Burada iki durum söz konusudur:

1.Durum : $\max\limits_{x\in[0.1]}(\beta x-\alpha)^2=\alpha^2$ olsun.

Bu durumda $\alpha^2\geq(\beta x-\alpha)^2$ olacağından

$$2\alpha\geq\beta \tag{2.23}$$

olmalıdır. Diğer taraftan $\max\limits_{x\in[0.1]}(\beta x-\alpha)^2=\alpha^2$ olduğundan (2.22) eşitsizliği

$$\left|B_{n,\alpha,\beta}(f,x)-f(x)\right|\leq\left\{1+\delta^{-1}\frac{1}{2(n+\beta)}\sqrt{n+4\alpha^2}\right\}\omega(f,\delta) \tag{2.24}$$

şeklini alır. (2.24) de

$$\delta:=\frac{1}{\sqrt{n+4\alpha^2}}$$

olarak alınırsa

$$\left|B_{n,\alpha,\beta}(f,x)-f(x)\right|\leq\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{n+4\alpha^2}{n+\beta}\right)\right\}\omega\left(f,\frac{1}{\sqrt{n+4\alpha^2}}\right) \tag{2.25}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada

$$\alpha_n:=\frac{n+4\alpha^2}{n+\beta}$$

dizisi tanımlansın.

$$\alpha_{n+1}-\alpha_n=\frac{\beta-4\alpha^2}{(n+\beta)(n+\beta+1)}$$

olduğundan açıkça $\beta-4\alpha^2\geq0$ ve $\beta-4\alpha^2<0$ durumları söz konusudur.

a) $\beta-4\alpha^2\geq0$ olsun. Bu durumda $\beta\geq4\alpha^2$ olacağından

$$\alpha_n:=\frac{n+4\alpha^2}{n+\beta}\leq1\ ,\quad n=1,2,...$$

eşitsizliği bulunur.Bu eşitsizlik ve (2.25) ifadesi birlikte düşünülerek

$$\left|B_{n,\alpha,\beta}(f,x)-f(x)\right|\leq\frac{3}{2}\omega\left(f,\frac{1}{\sqrt{n+4\alpha^2}}\right) \tag{2.26}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu ise kanıtı tamamlar.

(2.26) eşitsizliğinde α ve β sabitlerinin seçimi için $a)$ şıkkında $\beta \geq 4\alpha^2$ olması durumu ele alınmıştır. Bernstein-Stancu polinomunun tanımından $0 \leq \alpha \leq \beta$ olduğu bilinmektedir. Bu durumda $\alpha \geq 4\alpha^2$ ve $\alpha < 4\alpha^2$ olmak üzere iki durum söz konusudur.

(i) $\alpha \geq 4\alpha^2$ olsun. $B_{n,\alpha,\beta}$ polinomunun tanımından $\beta \leq 2\alpha$ ve $a)$ şıkkındaki seçim nedeniyle $\beta \geq 4\alpha^2$ olduğu biliniyor. Bu eşitsizlikler birlikte düşünülüp $\alpha \geq 4\alpha^2$ olması durumu incelenecek olursa

$4\alpha^2 \leq \alpha \leq 2\alpha$

$\alpha \leq \beta \leq 2\alpha$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan

$\alpha \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ ve $\beta \in [\alpha, 2\alpha]$

bulunur.

(ii) $\alpha < 4\alpha^2$ olsun. $B_{n,\alpha,\beta}$ polinomunun tanımından, (2.23) ifadesinden $\beta \leq 2\alpha$ ve $a)$ şıkkındaki seçimden $\beta \geq 4\alpha^2$ olduğu biliniyor. Bu eşitsizlikler aynı anda düşünülerek $\alpha < 4\alpha^2$ olması durumu incelenecek olursa

$\alpha \leq 4\alpha^2 \leq 2\alpha$ ve $4\alpha^2 \leq \beta \leq 2\alpha$

elde edilir. Buradan

$\alpha \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ ve $\beta \in [4\alpha^2, 2\alpha]$

bulunur.

b) $\beta - 4\alpha^2 \leq 0$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_{n+1} - \alpha_n < 0$ olacağından α_n dizisi açıkça azalandır. Yani $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha_n \leq \alpha_n = \frac{4\alpha^2 + 1}{\beta + 1} \;,$$

olacaktır. Bu eşitsizlik (2.25) eşitsizliğinde dikkate alınırsa

$$\left|B_{n,\alpha,\beta}(f;x) - f(x)\right| \leq \left\{1 + \frac{4\alpha^2 + 1}{2(\beta + 1)}\right\} \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n + 4\alpha^2}}\right) \tag{2.27}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Şimdi de (2.27) eşitsizliğinin α ve β sabitlerinin hangi durumlarda sağlanacağı araştırılacaktır. b) şıkkında $\beta \leq 4\alpha^2$ olması durumu ele alınmış ve (2.23) ifadesinden $2\alpha \geq \beta$ olduğu biliniyor. Bu durumda $2\alpha \geq 4\alpha^2$ ve $2\alpha \geq 4\alpha^2$ olmak üzere iki durum söz konusudur.

(i) $2\alpha \geq 4\alpha^2$ olsun. $B_{n,\alpha,\beta}$ polinomunun tanımından, (2.23) ifadesinden $\beta \leq 2\alpha$ ve $b)$ şıkkındaki seçim nedeniyle $\beta \leq 4\alpha^2$ olduğu biliniyor. Bu eşitsizlikler birlikte düşünülürse

$\alpha \leq 4\alpha^2 \leq 2\alpha$ ve $\alpha \leq \beta \leq 4\alpha^2$

elde edilir. Dolayısıyla

$\alpha \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ ve $\beta \in [\alpha, 4\alpha^2]$

olacaktır.

(ii) $2\alpha \leq 4\alpha^2$ olsun. $B_{n,\alpha,\beta}$ polinomunun tanımından, (2.23) ifadesinden $\beta \leq 2\alpha$ ve (b) şıkkındaki seçimden $\beta \leq 4\alpha^2$ olduğu biliniyor. Bu eşitsizlikler birlikte düşünülerek

$0 \leq 2\alpha \leq 4\alpha^2$ ve $\alpha \leq \beta \leq 2\alpha$

elde edilir. Buradan

$\alpha \geq \frac{1}{2}$ve $\beta \in [\alpha, 2\alpha]$

ifadelerine ulaşılır.

2. *Durum :* $\max_{x\in[0.1]}(\beta x - \alpha)^2 = (\beta - \alpha)^2$olsun.

Bu durumda $(\beta - \alpha)^2 \geq \alpha^2$ olacağından

$$\beta \geq 2\alpha \tag{2.28}$$

eşitsizliği doğrudur. Diğer taraftan

$\max\limits_{x\in[0.1]}(\beta x - \alpha)^2 = (\beta - \alpha)^2$

olduğundan (2.22) eşitsizliği

$$\left|B_{n,\alpha,\beta}(f;x) - f(x)\right| \leq \left\{1 + \delta^{-1}\frac{1}{2(n+\beta)}\sqrt{\{n + 4(\beta - \alpha)^2\}}\right\}\omega(f,\delta) \tag{2.29}$$

olacaktır. (2.29) eşitsizliğinden

$\delta = \dfrac{1}{\sqrt{n + 4(\beta - \alpha)^2}}$

olarak seçilirse

$$\left|B_{n,\alpha,\beta}(f;x) - f(x)\right| \leq \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{n + 4(\beta - \alpha)^2}{n + \beta}\right)\right\}\omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n + 4(\beta - \alpha)^2}}\right) \tag{2.30}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$b_n = \frac{n + 4(\beta - \alpha)^2}{n + \beta}$$

dizisi tanımlansın.

$$b_{n+1} - b_n = \frac{\beta - 4(\beta - \alpha)^2}{(n + \beta)(n + \beta + 1)}$$

olduğundan burada iki durum söz konusudur.

a) $\beta - 4(\beta - \alpha)^2 \geq 0$ olsun. Bu durumda $\beta \geq 4(\beta - \alpha)^2$ olacağından her $n \in \mathbb{N}$ için

$$b_n = \frac{n + 4(\beta - \alpha)^2}{n + \beta} \leq 1 \ ,$$

bulunur ve bu eşitsizlik (2.30) ifadesinde dikkate alınırsa

$$\left|B_{n,\alpha,\beta}(f; x) - f(x)\right| \leq \frac{3}{2}\omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n + 4(\beta - \alpha)^2}}\right) \tag{2.31}$$

elde edilir.

Şimdi de (2.31) eşitsizliğinin α ve β sabitlerinin hangi seçimlerinde sağlanacağı belirlenmelidir. Burada $\beta \geq 4(\beta - \alpha)^2$ olduğundan $\alpha \geq \beta - \frac{\sqrt{\beta}}{2}$ elde edilir. $B_{n,\alpha,\beta}$ polinomunun tanımından ve (2.28) ifadesinden $\beta \geq 2\alpha$ eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizliklerden yararlanarak

$$0 \leq \beta - \frac{\sqrt{\beta}}{2} \leq \alpha \leq 2\alpha \leq \beta$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada $\beta - \frac{\sqrt{\beta}}{2} \leq \frac{\beta}{2}$ olduğundan $\beta \leq 1$ ve $\beta \leq \frac{\sqrt{\beta}}{2} \geq 0$ durumları, dikkate alınarak $\beta \geq \frac{1}{4}$ elde edilir. Sonuç olarak (2.31) eşitsizliği

$$\alpha \in \left[\beta - \frac{\sqrt{\beta}}{2}, \frac{\beta}{2}\right] \text{ve } \beta \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$$

sağlanır.

b) $\beta - 4(\beta - \alpha)^2 \leq 0$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $b_{n+1} - b_n < 0$ olacağından b_n dizisi azalandır. Bu durumda

$$b_n \le b_1 = \frac{4(\beta-\alpha)^2+1}{\beta+1}, n = 1,2,\dots$$

olacaktır. Bu eşitsizlik ve (2.30) eşitsizliğinde göz önüne alınırsa

$$\left|B_{n,\alpha,\beta}(f;x) - f(x)\right| \le \left\{1 + \frac{4(\beta-\alpha)^2+1}{\beta+1}\right\}\omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n+4(\beta-\alpha)^2}}\right) \tag{2.32}$$

elde edilir.

Şimdi de (2.32) eşitsizliğindeα ve β sabitlerinin hangi seçimlerde sağlandığı araştırılacaktır. Burada $\beta \le 4(\beta-\alpha)^2$eşitsizliğinden$\alpha \le \beta - \frac{\sqrt{\beta}}{2}$ bulunur. (2.28) ifadesinden

$\beta \ge 2\alpha$ yani $\alpha \le \frac{\beta}{2}$ ve $\frac{\beta}{2} \le \beta - \frac{\sqrt{\beta}}{2}$ olduğu bilinmektedir. Bu eşitsizlikler beraber göz önüne alınırsa $\beta \ge 1$ elde edilir. Dolayısıyla (2.32) eşitsizliği

$$\alpha \le \frac{\beta}{2} \quad ve\, \beta \ge 1$$

için sağlanır.

2.3.2 İki Değişkenli Bernstein-Stancu Polinomu

Büyükyazıcı ve İbikli (2004) tarafından iki değişkenli Bernstein-Stancu Polinomu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.3.2.1

İki değişkenli Bernstein-Stancu polinomu $B := \left[\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}\right] \times \left[\frac{\alpha_2}{m+\beta_2}, \frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}\right]$ dikdörtgensel bölgesinde x değişkenine göre n – inci ve y değişkenine göre m – inci dereceden olmak üzere

$$B_{n,m}^{\alpha_k,\gamma_k,\beta_k,\sigma_k}(f,x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f\left(\frac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1}, \frac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}\right) p_{n,i,\alpha_1\beta_1}(x) q_{m,j\alpha_2\beta_2}(y) \tag{2.33}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada

$$p_{n,i,\alpha_1\beta_1}(x) = \left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n C_n^i \left(x - \frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^i \left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1} - 1\right)^{n-i}$$

$$q_{m,j\alpha_2\beta_2}(y) = \left(\frac{m+\beta_2}{m}\right)^m C_m^j \left(y - \frac{\alpha_2}{m+\beta_2}\right)^j \left(\frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2} - 1\right)^{m-j}$$

şeklinde tanımlıdır.

İki değişkenli Bernstein-Stancu polinomunun doğrusal ve pozitif olduğu açıktır.

Lemma 2.3.2.1

$n, m \in \mathbb{N}$ ve $B_{n,m}(f; x, y) B$ dikdörtgensel bölgesi üzerinde (2.33) ile tanımlı iki değişkenli Bernstein-Stancu tipli polinom olmak üzere

$$B_{n,m}(1; x, y) = 1 \tag{2.34}$$

$$B_{n,m}(t; x, y) = \frac{n+\beta_1}{n+\sigma_1} x + \frac{\gamma_1 - \alpha_1}{n+\sigma_1} \tag{2.35}$$

$$B_{n,m}(\tau; x, y) = \frac{m+\beta_2}{m+\sigma_2} y + \frac{\gamma_2 - \alpha_2}{m+\sigma_2} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned} B_{n,m}(t^2+\tau^2; x, y) = {} & \left(\frac{n+\beta_1}{n+\sigma_1}\right)^2 \left(\frac{n-1}{n}\right) \left(x - \frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2 + (1+2\gamma_1) \frac{n+\beta_1}{(n+\sigma_1)^2} \\ & \times \left(x - \frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right) + \frac{\gamma_1^2}{(n+\sigma_1)^2} + \left(\frac{m+\beta_2}{m+\sigma_2}\right)^2 \left(\frac{m-1}{m}\right) \left(y - \frac{\alpha_2}{m+\beta_2}\right)^2 \\ & + (1+2\gamma_2) \frac{m+\beta_2}{(m+\sigma_2)^2} \left(y - \frac{\alpha_2}{m+\beta_2}\right) + \frac{\gamma_2^2}{(n+\sigma_2)^2} \end{aligned} \tag{2.37}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Kanıt

$g(t, \tau) = 1$ fonksiyonu için Binom Özdeşliğinden

$$B_{n,m}(1; x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)\, q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)$$

$$=\sum_{i=0}^{n} p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)\sum_{j=0}^{m} q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)$$

$$=\sum_{i=0}^{n} p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)$$

$$=1$$

elde edilir. $g(t,\tau)=t$ fonksiyonu için $B_{n,m}$ operatörünün doğrusallığından

$$B_{n,m}(t;x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1}\right)p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)$$

$$=\frac{1}{n+\sigma_1}\left\{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} ip_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)\,q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\right.$$

$$\left.+\gamma_1\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\right\}$$

$$=\frac{1}{n+\sigma_1}\left\{\sum_{i=0}^{n} ip_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)\sum_{j=0}^{m} q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)+\gamma_1\right\}$$

$$=\frac{1}{n+\sigma_1}\left\{\sum_{i=0}^{n} ip_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)+\gamma_1\right\}$$

$$B_{n,m}(t;x,y)$$

$$=\frac{1}{n+\sigma_1}\left\{\left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n\sum_{i=0}^{n} i\,\frac{n!}{i!\,(n-i)!}\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^i\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^{n-i}+\gamma_1\right\}$$

$$=\frac{1}{n+\sigma_1}\left\{n\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)\left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(i-1)!\,(n-i)!}\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^{i-1}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^{n-i}+\gamma_1\right\}$$

$$=\frac{1}{n+\sigma_1}\left\{n\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)\left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i}\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^i\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^{n-1-i}+\gamma_1\right\}$$

$$=\frac{1}{n+\sigma_1}\left\{n\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)\left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n\left(\frac{n}{n+\beta_1}\right)^{n-1}+\gamma_1\right\}$$

$$=\frac{n+\beta_1}{n+\sigma_1}x+\frac{\gamma_1-\alpha_1}{n+\sigma_1}$$

elde edilir. $g(t,\tau)=\tau$ fonksiyonu için benzer işlemler yapılarak

$$B_{n,m}(\tau;x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}\right)p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)\,q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)$$

$$=\frac{1}{m+\sigma_2}\left\{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}jp_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)\,q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\right.$$

$$\left.+\gamma_2\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)\,q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\right\}$$

$$=\frac{1}{m+\sigma_2}\left\{\sum_{i=0}^{n}p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)\sum_{j=0}^{m}jq_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)+\gamma_2\right\}$$

$$=\frac{m+\beta_2}{m+\sigma_2}y+\frac{\gamma_2-\alpha_2}{m+\sigma_2}$$

elde edilir.

Son olarak da $g(t,\tau)=t^2\tau^2$ fonksiyonu için

$$B_{n,m}(t^2+\tau^2;x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[\left(\frac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1}\right)^2\left(\frac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}\right)^2\right]p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)\,q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1}\right)^2p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)\,q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}\right)^2p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)\,q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1}\right)^2p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)\sum_{j=0}^{m}q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)+\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}\right)^2q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)\sum_{i=0}^{n}p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1}\right)^2p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)+\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{j+\gamma_2}{m+\sigma_2}\right)^2q_{m,j,\alpha_2,\beta_2}(y)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliklerden ve $B_{n,m}$ operatörünün doğrusallığından

$$I_1=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i+\gamma_1}{n+\sigma_1}\right)^2p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)$$

$$=\frac{1}{(n+\sigma_1)^2}\left\{\sum_{i=0}^{n}i^2p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)+2\gamma_1\sum_{i=0}^{n}ip_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)+\gamma_1^2\sum_{i=0}^{n}p_{n,i,\alpha_1,\beta_1}(x)\right\}$$

$$=\frac{1}{(n+\sigma_1)^2}\left\{\left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n n\sum_{i=0}^{n}\frac{i^2}{n}\frac{n!}{i!\,(n-i)!}\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^i\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^{n-i}\right.$$

$$\left.+2\gamma_1(n+\beta_1)\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)+\gamma_1^2\right\}$$

$$=\frac{1}{(n+\sigma_1)^2}\left\{\left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n n\sum_{i=1}^{n}(i-1+1)\frac{(n-1)!}{(i-1)!\,(n-i)!}\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^i\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^{n-i}\right.$$

$$\left.+2\gamma_1(n+\beta_1)\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)+\gamma_1^2\right\}$$

$$I_1=\frac{1}{(n+\sigma_1)^2}\left\{\left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n n\sum_{i=1}^{n}(i-1)\frac{(n-1)!}{(i-1)!\,(n-i)!}\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^i\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^{n-i}\right.$$

$$+\left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n n\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(i-1)!\,(n-i)!}\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^i\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^{n-i}$$

$$\left.+2\gamma_1(n+\beta_1)\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)+\gamma_1^2\right\}$$

$$=\frac{1}{(n+\sigma_1)^2}\left\{\left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n n(n-1)\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-2)!}{(i-2)!\,(n-i)!}\right.$$

$$\times\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^{i-2}\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^{n-i}+\left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n n\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)\sum_{i=1}^{n-1}C_{n-1}^{i}\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^i$$

$$\left.\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^{n-1-i}+2\gamma_1(n+\beta_1)\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)+\gamma_1^2\right\}$$

$$=\frac{1}{(n+\sigma_1)^2}\left\{\left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n n(n-1)\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2\sum_{i=0}^{n-2}C_{n-2}^{i}\times\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^i\right.$$

$$\times\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^{n-2-i}+\left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n n\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)\left(\frac{n}{n+\beta_1}\right)^{n-1}$$

$$\left.+2\gamma_1(n+\beta_1)\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)+\gamma_1^2\right\}$$

$$=\frac{1}{(n+\sigma_1)^2}\left\{\left(\frac{n+\beta_1}{n}\right)^n n(n-1)\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2\left(\frac{n}{n+\beta_1}\right)^{n-2}(n+\beta_1)\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)\right.$$

$$\left.+2\gamma_1(n+\beta_1)\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)+\gamma_1^2\right\}$$

$$=\left(\frac{n+\beta_1}{n+\sigma_1}\right)^n\frac{(n-1)}{n}\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2+(1+2\gamma_1)\frac{n+\beta_1}{(n+\sigma_1)^2}\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)+\frac{\gamma_1^2}{(n+\sigma_1)^2}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$I_2=\left(\frac{m+\beta_2}{m+\sigma_2}\right)^2\left(\frac{m-1}{m}\right)\left(y-\frac{\alpha_2}{m+\beta_2}\right)^2+(1+2\gamma_2)\frac{m+\beta_2}{(m+\sigma_2)^2}\left(y-\frac{\alpha_2}{m+\beta_2}\right)$$

$$+\frac{\gamma_2^2}{(m+\sigma_2)^2}$$

şekilde elde edilir. Böylece kanıt tamamlanır.

Teorem 2.3.2.1

f, $[0,1] \times [0,1]$ bölgesinde sürekli bir fonksiyon ise

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\| B_{n,m}f - f \right\|_{C(S)} = 0$$

gerçeklenir.

Kanıt

Bu teoremin kanıtı Teorem 2.4.1 de kullanılacağından öncelikle

$$\lim_{n,m\to\infty} \max_{(x,y)\in S} \left| B_{n,m}(1; x, y) - 1 \right| = 0$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \max_{(x,y)\in S} \left| B_{n,m}(t; x, y) - x \right| = 0 \tag{2.38}$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \max_{(x,y)\in S} \left| B_{n,m}(\tau; x, y) - y \right| = 0$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \max_{(x,y)\in S} \left| B_{n,m}(t^2 + \tau^2; x, y) - (x^2 + y^2) \right| = 0$$

olduğu gösterilmelidir.

$g(t,\tau) = 1$ fonksiyonu için (2.34) eşitliğinden

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\{ \max_{(x,y)\in S} \left| B_{n,m}(1; x, y) - 1 \right| \right\} = 0$$

olduğu açıktır.

$g(t,\tau) = 1$ fonksiyonu için (2.34) eşitliği ve üçgen eşitsizliğinden

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\{ \max_{(x,y)\in S} \left| B_{n,m}(t; x, y) - x \right| \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \max_{\frac{\alpha_1}{n+\beta_1} \le x \le \frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}} \left| \frac{n+\beta_1}{n+\sigma_1} x + \frac{\gamma_1 - \alpha_1}{n+\sigma_1} - x \right| \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(\frac{\beta_1 - \sigma_1}{n+\sigma_1} \right) \left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1} \right) + \frac{\gamma_1 - \alpha_1}{n+\sigma_1} \right\}$$

$$= 0$$

elde edilir.

$g(t,\tau) = \tau$ fonksiyonu için (2.36) eşitliği ve üçgen eşitsizliğinden

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\{ \max_{(x,y)\in S} \left| B_{n,m}(\tau; x, y) - y \right| \right\}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left\{\max_{\frac{\alpha_2}{m+\beta_2}\le y\le\frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}}\left|\frac{m+\beta_2}{m+\sigma_2}y+\frac{\gamma_2-\alpha_2}{m+\sigma_2}-y\right|\right\}$$

$$\le \lim_{m\to\infty}\left\{\max_{\frac{\alpha_2}{m+\beta_2}\le y\le\frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}}\left(\left|\frac{\beta_2-\sigma_2}{m+\sigma_2}\right|y+\left|\frac{\gamma_2-\alpha_2}{m+\sigma_2}\right|\right)\right\}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left\{\left(\frac{\beta_2-\sigma_2}{m+\sigma_2}\right)\left(\frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}\right)+\frac{\gamma_2-\alpha_2}{m+\sigma_2}\right\}$$

$$=0$$

elde edilir.

Son olarak $g(t,\tau)=t^2+\tau^2$fonksiyonu için (2.37) eşitliği ve üçgen eşitsizliğinden

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\{\max_{(x,y)\in S}\left|B_{n,m}(t^2+\tau^2;x,y)-(x^2+y^2)\right|\right\}$$

$$= \lim_{n,m\to\infty}\left\{\max_{(x,y)\in S}\left|\left(\frac{n+\beta_1}{n+\sigma_1}\right)^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2+(1+2\gamma_1)\frac{n+\beta_1}{(n+\sigma_1)^2}\left(x-\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)\right.\right.$$

$$+\frac{\gamma_1^2}{(n+\sigma_1)^2}+\left(\frac{m+\beta_2}{m+\sigma_2}\right)^2\left(\frac{m-1}{m}\right)\left(y-\frac{\alpha_2}{m+\beta_2}\right)^2$$

$$\left.\left.+(1+2\gamma_2)\frac{m+\beta_2}{(m+\sigma_2)^2}\left(y-\frac{\alpha_2}{m+\beta_2}\right)+\frac{\gamma_2^2}{(m+\sigma_2)^2}-(x^2+y^2)\right|\right\}$$

$$= \lim_{n,m\to\infty}\left\{\max_{(x,y)\in S}\left|\left[\left(\frac{n+\beta_1}{n+\sigma_1}\right)^2\left(\frac{n-1}{n}\right)-1\right]x^2+\left[\left(\frac{m+\beta_2}{m+\sigma_2}\right)^2\left(\frac{m-1}{m}\right)-1\right]y^2\right.\right.$$

$$+\frac{n+\beta_1}{(n+\sigma_1)^2}\left[-2\alpha_1\left(\frac{n-1}{n}\right)+1+2\gamma_1\right]x+\frac{m+\beta_2}{(m+\sigma_2)^2}\left[-2\alpha_2\left(\frac{m-1}{m}\right)+1+2\gamma_2\right]y$$

$$+\frac{\alpha_1^2}{(n+\sigma_1)^2}\left(\frac{n-1}{n}\right)-\frac{(1+2\gamma_1)}{(n+\sigma_1)^2}\alpha_1+\frac{\gamma_1^2}{(n+\sigma_1)^2}+\frac{\alpha_2^2}{(m+\sigma_2)^2}\left(\frac{m-1}{m}\right)-\frac{(1+2\gamma_2)}{(n+\sigma_2)^2}\alpha_2$$

$$\left.\left.+\frac{\gamma_2^2}{(m+\sigma_2)^2}\right|\right\}$$

$$\le \lim_{n,m\to\infty}\left\{\left|\left(\frac{n+\beta_1}{n+\sigma_1}\right)^2\left(\frac{n-1}{n}\right)-1\right|\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2\left|\left(\frac{m+\beta_2}{m+\sigma_2}\right)^2\left(\frac{m-1}{m}\right)-1\right|\left(\frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}\right)^2\right.$$

$$+\frac{n+\beta_1}{(n+\sigma_1)^2}\left|-2\alpha_1\left(\frac{n-1}{n}\right)+1+2\gamma_1\right|\left(\frac{n+\alpha_1}{n+\beta_1}\right)+\frac{m+\beta_2}{(m+\sigma_2)^2}\left|-2\alpha_2\left(\frac{m-1}{m}\right)+1+2\gamma_2\right|$$

$$\times\left(\frac{m+\alpha_2}{m+\beta_2}\right)+\left|\frac{\alpha_1^2}{(n+\sigma_1)^2}\left(\frac{n-1}{n}\right)-\frac{(1+2\gamma_1)}{(n+\sigma_1)^2}\alpha_1+\frac{\gamma_1^2}{(n+\sigma_1)^2}\right|+\left|\frac{\alpha_2^2}{(m+\sigma_2)^2}\left(\frac{m-1}{m}\right)\right.$$

$$\left.\left.-\frac{(1+2\gamma_2)}{(n+\sigma_2)^2}\alpha_2+\frac{\gamma_2^2}{(m+\sigma_2)^2}\right|\right\}$$

$$=0$$

elde edilir. $B_{n,m}^{*}$ operatörü

$$B_{n,m}^{*}(f;x,y)=\begin{cases}B_{n,m}(f;x,y) & ; \quad (x,y)\in B\\ f(x,y) & ;(x,y)\in[0,1]\times[0,1]\backslash B\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Bu durumda

$$\left\|B_{n,m}^{*}(f;x,y)\right\|_{C([0,1]\times[0,1])}=\max_{x,y\in[0,1]\times[0,1]}\left|B_{n,m}^{*}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$\max_{x,y\in S}\left|B_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right| \ (2.39)$$

eşitliğine ulaşılır. (2.38) ve (2.39) ifadeleri kullanılarak

$$\lim_{n,m\to\infty}\max_{(x,y)\in S}\left\|S_{n,m}^{*}(1;x,y)-1\right\|_{C([0,1]\times[0,1])}=0$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\max_{(x,y)\in S}\left\|S_{n,m}^{*}(t;x,y)-x\right\|_{C([0,1]\times[0,1])}=0$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\max_{(x,y)\in S}\left\|S_{n,m}^{*}(\tau;x,y)-y\right\|_{C([0,1]\times[0,1])}=0$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\max_{(x,y)\in S}\left\|B_{n,m}^{*}(t^2+\tau^2;x,y)-(x^2+y^2)\right\|_{C([0,1]\times[0,1])}=0$$

bulunur. Böylece Teorem 2.4.1 den $[0,1]\times[0,1]$ bölgesinde sürekli ve tüm $\mathbb{R}^2$de sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|B_{n,m}^{*}f-f\right\|_{C([0,1]\times[0,1])}=0$$

elde edilir. Burada (4.2.1.6) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\{\max_{(x,y)\in S}\left|B_{n,m}(f;x,y)-f\right|\right\}=0$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

2.4 BASKAKOV DURRMEYER OPERATÖRLERİ

$(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b>0$ olmak üzere, $[0,b]$ aralığında tanımlı her $n\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{N}_0$ için

$\phi_n\in C^{\infty}[0,b]$ ve $\phi_n(0)=1$ olsun. (2.40)

ϕ_n dizisi için $(-1)^k{\phi_n}^k\geq 0$ ve $n>\max\{0,-c\}$ olmak üzere en az bir $c\in\mathbb{Z}$ için,

$${\phi_n}^{(k+1)}=-n{\phi_{n+c}}^{(k)} \quad (2.41)$$

eşitliği sağlansın.

Tanım 2.4.1

$n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{N}_0$, $f \in L_p[0,\infty)$, $x \in [0,\infty)$, $n > c$ olsun.

$P_{n,k}(x) = (-1)^k \dfrac{x^k}{k!} {\phi_n}^{(k)}(x)$

şeklinde tanımlı olmak üzere

$$(M_n f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)(n-c)\int_0^{\infty} P_{n,k}(x) f(t)dt \tag{2.42}$$

ile tanımlı operatöre Baskakov Durrmeyer operatörü denir(Heilmann 1989).

Örnek 2.4.1

Yukarıdaki koşulları sağlayan (ϕ_n) dizileri için şu örnekler verilebilir(Heilmann1989 Ulusoy 2012).

$\phi_n(x) = (1-x)^n$, $x \in [0,1]$aralığında , $c = 1$

$\phi_n(x) = e^{-nx}$, $x \in [0,\infty)$ aralığında , $c = 0$

$\phi_n(x) = (1+cx)^{-n/c}$, $x \in [0,\infty)$ aralığında , $c > 0$

Tanım 2.4.2

(Süreklilik Modülü ve K-fonksiyoneli)

$L_p[0,\infty)$ uzayında yaklaşım hızı hesabı için süreklilik modülü,

$\omega_\varphi^r(f,t)_p = \sup_{0<h\le r} \|\Delta_h^r \varphi f\|_p$, $f \in L_p[0,\infty)$,$1 \le p \le \infty$,$\varphi(x) = \sqrt{x(1+cx)}$,

$\Delta_H^r f(x) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^k f\left(x + \left(\frac{r}{2} - k\right)H\right)$,$\left[x - \frac{r}{2}H, x + \frac{r}{2}H\right] \subset [0,\infty)$

şeklinde tanımlanır. Diğer durumlarda $\Delta_H^r f(x) = 0$ alınacaktır.

Burada süreklilik modülü

$\omega_p^r(\varphi,[0,\infty)) = \{g \in L_p[0,\infty) : g^{(r-1)} \in AC_{loc}(0,\infty); \varphi^r g^{(r)} \in L_p[0,\infty)\}$

$\overline{\omega}_p^r(\varphi,[0,\infty)) = \{g \in L_p[0,\infty) : g^{(r-1)} \in AC_{loc}(0,\infty); \varphi^r g^{(r)} \in L_p[0,\infty)\}$

olmak üzere,

$$K_\varphi^r(f,t^r)_p = \inf_{g\in\omega_p^r(\varphi,[0,\infty))} \left\{\|f-g\|_p + t^r\left\|\varphi^r g^{(r)}\right\|_p\right\}$$

$$\overline{K}_\varphi^r(f,t^r)_p = \inf_{g\in\omega_p^{-r}(\varphi,[0,\infty))} \left\{\|f-g\|_p + t^r\left\|\varphi^r g^{(r)}\right\|_p + t_\tau^r\left\|g^{(r)}\right\|_p\right\}$$

şeklinde tanımlı K- fonksiyoneli $\omega_\varphi^r(f,t)_p$ ile verilen süreklilik modülüne denktir(Ditzian ve Tatik 1987).

Aşağıdaki Lemma da $P_{n,k}$ ağırlık fonksiyonunun sağladığı bazı özellikler verilecektir. (ϕ_n) fonksiyonlar dizisinin sağladığı özellikler dikkate alınırsa aşağıdaki eşitlikler kolayca elde edilir.

Lemma 2.4.1

Her $n \in \mathbb{N}$,$n > c$,$k \in \mathbb{N}_0$,$x \in [0,\infty)$ için,

1) $\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x) = 1$ (2.43)

2) $\lim_{n\to\infty} x^k \phi_n{}^{(k-1)}(x) = \lim_{n\to\infty} x^{k-1} \phi_n{}^{(k-2)}(x) = \ldots = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = 0$ için,

$$\int_0^\infty P_{n,k}(t)dt = \frac{1}{n-c}, \qquad (2.44)$$

3) $\frac{k}{n} P_{n,k}(x) = xP_{n+c,k-1}(x)$ (2.45)

4) $\varphi(x)^2 \frac{d}{dx} P_{n,k}(x) = (k-nx)P_{n,k}(x),$ (2.46)

5) $n\left[P_{n+c,k-1}(x) - P_{n+c,k}(x)\right] = \frac{d}{dx} P_{n,k}(x),$ (2.47)

dir. Eğer $k < 0$ ise $P_{n,k}(x) = 0$ dır(Heilmann 1989, Ulusoy 2012).

Kanıt

1) (ϕ_n) türevlenebilir fonksiyonlar dizisi olduğundan

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi_n^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

ile $x = t$ noktasında, $\phi_n(x)$ fonksiyonu tarafından üretilen Taylor polinomunu gösterilecek. Fonksiyonda $x = 0$ alınırsa, $\phi_n(x)$ in tanımında $\phi_n(0) = 1$ olduğundan,

$$\phi_n(0) = 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi_n^{(k)}(t)}{k!}(-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)$$

elde edilir.

Özel olarak , $\phi_n(x) = e^{-nx}$ seçilirse ,

$$\phi_n^{(k)}(x) = (-1)^k n^k e^{-nx}$$

olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} P_{n,k}(x) &= (-1)^k \frac{x^k}{k!} \phi_n^{(k)}(x) \\ &= (-1)^k \frac{x^k}{k!} (-1)^k n^k e^{-nx} \\ &= \frac{x^k}{k!} n^k e^{-nx} \end{aligned}$$

bulunur. $\phi_n(x)$ in $x = t$ noktasındaki Taylor polinomundan faydalanarak,

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi_n^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n^k e^{-nx}}{k!}(x-t)^k \end{aligned}$$

olduğu görülür. $x = 0$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \phi_n(0) = 1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n^k e^{-nx}}{k!}(-1)^k (t)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} n^k e^{-nx} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da $f\left(\frac{k}{n}\right) = 1$ için Szasz operatörüdür.

Şimdi $\phi_n(x) = (1+x)^{-n}$ seçilirse,

$$\phi_n^{(k)}(x) = (-1)^k n(n+1) \ldots \big(n + (k-1)\big)(1+x)^{-(n+k)}$$

olup,

$$P_{n,k}(x) = (-1)^k \frac{x^k}{k!} \phi_n{}^{(k)}(x)$$
$$= x^k (1+x)^{-(n+k)} \binom{n+k-1}{k}$$

bulunur. Bu durumda,

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi_n{}^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (1+x)^{-(n+k)} (x-t)^k \binom{n+k-1}{k}$$

ve

$$\phi_n(0) = 1 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (1+x)^{-(n+k)} (-1)^k t^k \binom{n+k-1}{k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} t^k (1+x)^{-(n+k)} \binom{n+k-1}{k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)$$

elde edilir. Bu da $f\left(\frac{k}{n}\right) = 1$ için klasik Baskakov operatörüdür.

2) Şimdi

$$\int_0^{\infty} P_{n,k}(t)dt = \frac{1}{n-c}$$

olduğu gösterilecektir. $x^k = u, \phi_n{}^{(k)}(x)dx = dv$ olmak üzere, $\int_0^{\infty} x^k \phi_n{}^{(k)}(x)dx$ integraline k kez kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\int_0^{\infty} x^k \phi_n{}^{(k)}(x)dx = x^k \phi_n{}^{(k-1)}(x)\Big|_0^{\infty} - k \int_0^{\infty} \phi_n{}^{(k-1)}(x) x^{k-1}\, dx$$
$$= x^{k-1} \phi_n{}^{(k-2)}(x)\Big|_0^{\infty} - k(k-1) \int_0^{\infty} \phi_n{}^{(k-2)}(x) x^{k-2}\, dx$$
$$= x^{k-2} \phi_n{}^{(k-3)}(x)\Big|_0^{\infty} - k(k-1)(k-2) \int_0^{\infty} \phi_n{}^{(k-3)}(x) x^{k-3}\, dx$$

.
.
.

$$= k(k-1)(k-2)\dots\big(k-(k-2)\big)\int_0^\infty \phi_n{}'(x)dx$$

$$= (-1)^k k!\int_0^\infty \phi_n\,(x)dx$$

$$= -\frac{(-1)^k k!}{n-c}\int_0^\infty \phi'{}_{n-c}(x)dx$$

$$= -\frac{(-1)^k k!}{n-c}\phi'{}_{n-c}(x)\Big|_0^\infty$$

$$= -\frac{(-1)^k k!}{n-c}$$

bulunur. Buradan,

$$\int_0^\infty P_{n,k}(x)dx = \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^\infty x^k\phi_n^{(k)}(x)dx$$

$$= -\frac{(-1)^k(-1)^k k!}{k!\,(n-c)}$$

$$= \frac{1}{n-c}$$

elde edilir.

Özel olarak $\phi_n(x) = e^{-nx}$ seçilip k kez kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\int_0^\infty x^k e^{-nx}dx = x^k e^{-nx}\Big|_0^\infty + \frac{k}{n}\int_0^\infty x^{k-1}e^{-nx}dx$$

$$\int_0^\infty x^k e^{-nx}dx = -\frac{k(k-1)}{n^2}\int_0^\infty x^{k-2}e^{-nx}dx$$

.
.
.

$$= \frac{k(k-1)(k-2)\dots\big(k-(k-2)\big)}{n^k}\int_0^\infty e^{-nx}\,dx$$

$$= \frac{k!}{n^k}\int_0^\infty e^{-nx}\,dx = -\frac{k!}{n^k}\frac{1}{n-c}\int_0^\infty (\phi_{n-c})'(x)dx$$

$$= -\frac{k!}{n^k(n-c)}\phi_{n-c}(x)\Big|_0^\infty = \frac{k!}{n^k(n-c)}e^{-(n-c)}\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{k!}{n^k(n-c)}$$

bulunur. Böylece,

$$\int_0^\infty P_{n,k}(t)\,dt = \frac{n^k}{k!}\int_0^\infty x^k e^{-nx}\,dx$$

$$= \frac{n^k}{k!}\frac{k!}{n^k(n-c)}$$

$$= \frac{1}{n-c}$$

elde edilir. $\phi_n(x) = (1+x)^{-n}$ seçilip k kez kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\int_0^\infty x^k(1+x)^{-(n+k)}dx = -x^k\frac{(1+x)^{-(n+k-1)}}{(n+k-1)}\Bigg|_0^\infty - \frac{k}{(n+k-1)}\int_0^\infty x^{k-1}(1+x)^{-(n+k-1)}dx$$

$$= -\frac{k(k-1)}{(n+k-1)(n+k-2)}\int_0^\infty (1+x)^{-(n+k-2)}x^{k-2}dx$$

$$\vdots$$

$$= \frac{k(k-1)(k-2)\ldots\big(k-(k-2)\big)}{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+1)n}\int_0^\infty (1+x)^{-n}\,dx$$

$$\int_0^\infty x^k(1+x)^{-(n+k)}\,dx = -\frac{k!}{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+1)n}\frac{1}{n-c}\int_0^\infty (\phi_{n-c})'(x)dx$$

$$= -\frac{k!}{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+1)n}\frac{1}{n-c}\phi_{n-c}(x)\Big|_0^\infty$$

$$= -\frac{k!}{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+1)n}\frac{1}{n-c}(1+x)^{-(n-c)}\Big|_0^\infty$$

$$= -\frac{k!}{(n+k-1)(n+k-2)\ldots n(n-c)}$$

olup buradan

$$\int_0^\infty P_{n,k}(t)dt = \int_0^\infty x^k(1+x)^{-(n+k)}\binom{n+k-1}{k}dx$$

$$= \frac{k!}{(n+k-1)(n+k-2)\ldots n(n-c)}\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$$

$$= \frac{1}{n-c}$$

elde edilir.

3) Şimdi de

$$\frac{k}{n}P_{n,k}(x) = xP_{n+c,k-1}(x)$$

olduğu gösterilmelidir.

$$\frac{x}{k}P_{n+c,k-1}(x) = \frac{x}{k}(-1)^{k-1}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\phi_{n+c}{}^{(k-1)}$$

eşitliği geçerli olup, (2.41) kullanılarak,

$$\frac{x}{k}P_{n+c,k-1}(x) = (-1)^{k}\frac{x^{k}}{k!}\phi_n{}^{(k)}\frac{1}{n}$$

bulunur. Böylece,

$$xP_{n+c,k-1}(x) = \frac{k}{n}P_{n,k}(x)$$

elde edilir.

Özel olarak $\phi_n(x) = e^{-nx}$ seçilirse , $\phi_n{}^{(k)}(x) = (-1)^k n^k e^{-nx}$ olup,

$$\frac{x}{k}P_{n+c,k-1}(x) = \frac{x}{k}(-1)^{k-1}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}(-1)^{k-1}(n+c)^{k-1}e^{-x(n+c)}$$

$$= (-1)^{k-1}\frac{x^{k}}{k!}(n+c)^{k-1}e^{-x(n+c)}(-1)^{k-1}$$

bulunur. Burada (2.41) kullanılırsa,

$$\frac{x}{k}P_{n+c,k-1}(x) = \frac{1}{n}(-1)^{k}\frac{x^{k}}{k!}\phi_n{}^{(k)} = \frac{1}{n}(-1)^{k}\frac{x^{k}}{k!}(-1)^k n^k e^{-nx}$$

$$= \frac{1}{n}P_{n,k}(x)$$

elde edilir.

$\phi_n(x) = (1+x)^{-n}$ seçilirse , $\phi_n{}^{(k)}(x) = (-1)^k n(n+1)\ldots\big(n+(k-1)\big)(1+x)^{-(n+k)}$ olup,

$$\frac{x}{k}P_{n+c,k-1}(x) = \frac{x}{k}(-1)^{k-1}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}(-1)^{k-1}(n+c)(n+c+1)\ldots\big(n+c+(k-1)\big)$$

$$\times(1+x)^{-(n+c+k-1)}$$

$$= \frac{x^{k}}{k!}(-1)^{k}\phi_{n+c}^{(k-1)}(x)$$

bulunur. Burada (2.41) kullanılırsa

$$\frac{x}{k}P_{n+c,k-1}(x) = \frac{1}{n}(-1)^{k}\frac{x^{k}}{k!}(-1)^k n(n+1)\ldots\big(n+(k-1)\big)(1+x)^{-(n+k)}$$

$$= \frac{1}{n}P_{n,k}(x)$$

olduğu görülebilir.

4) $\varphi(x)^2 \dfrac{d}{dx} P_{n,k}(x) = (k - nx) P_{n,k}(x)$

olduğu gösterilmelidir.

$c = 1$ olarak alınırsa $\phi_n(x) = (1+x)^{-n}$ ve $\varphi(x) = \sqrt{x(1+x)}$ olur. Bu durumda,

$\phi_n^{(k)}(x) = (-1)^k n(n+1) \dots \big(n + (k-1)\big)(1+x)^{-(n+k)}$

olup,

$P_{n,k}(x) = x^k (1+x)^{-(n+k)} \binom{n+k-1}{k}$

bulunur. $P_{n,k}(x)$ in türevi alınıp denklem düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} P_{n,k}(x) &= \left[\frac{x}{x} k \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k}} - (n+k)\frac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}}\right]\binom{n+k-1}{k} \\
&= \frac{k}{x} P_{n,k}(x) - \frac{(n+k)}{(1+x)} P_{n,k}(x) \\
&= \frac{k(1+x) - (n+k)x}{x(1+x)} P_{n,k}(x) \\
&= \frac{k - nx}{\varphi^2(x)} P_{n,k}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\phi_n(x) = e^{-nx}$ olarak alınırsa, $\phi_n^{(k)}(x) = (-1)^k n^k e^{-nx}$ ve $\varphi(x) = x$ olup,

$P_{n,k}(x) = \dfrac{x^k}{k!} n^k e^{-nx}$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} P_{n,k}(x) &= \frac{x}{x}\frac{n^k}{k!} k x^{k-1} e^{-nx} - \frac{n^k}{k!} n x^k e^{-nx} \\
&= \frac{n^k}{k!}\frac{k}{x} x^k e^{-nx} - \frac{n^k}{k!} n x^k e^{-nx} \\
&= \frac{k}{x} P_{n,k}(x) - n P_{n,k}(x) \\
&= P_{n,k}(x)\left(\frac{k}{x} - n\right) \\
&= \frac{k - nx}{x} P_{n,k}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

5)

$$n\left[P_{n+c,k-1}(x)-P_{n+c,k}(x)\right]=\frac{d}{dx}P_{n,k}(x)$$

olduğu gösterilmelidir.

$$P_{n,k}(x)=(-1)^k\frac{x^k}{k!}\phi_n^{(k)}(x)$$

olup,

$$\frac{d}{dx}P_{n,k}(x)=\frac{(-1)^k}{k!}\left[kx^{k-1}\phi_n^{(k)}(x)+x^k\phi_n^{(k+1)}(x)\right]$$

$$\frac{d}{dx}P_{n,k}(x)=(-1)^k\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\phi_n^{(k)}(x)+\frac{(-1)^k}{k!}x^k\phi_n^{(k+1)}(x)$$

(2.41) dan

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}P_{n,k}(x)&=(-1)^k\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}(-n)\phi_{n+c}^{(k-1)}(x)+\frac{(-1)^k}{k!}x^k(-n)\phi_{n+c}^{(k+1)}(x)\\&=nP_{n+c,k-1}(x)-nP_{n+c,k}(x)\\&=n\left[P_{n+c,k-1}(x)-P_{n+c,k}(x)\right]\end{aligned}$$

elde edilir.

Özel olarak $\phi_n(x)=e^{-nx}$ alınırsa,

$$\phi_n^{(k)}(x)=(-1)^k n^k e^{-nx} \text{ ve } P_{n,k}(x)=\frac{n^k}{k!}n^k e^{-nx}$$

olup, (2.41) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}P_{n,k}(x)&=\frac{d}{dx}\left[\frac{x^k}{k!}n^k e^{-nx}\right]\\&=\frac{n^k}{k!}\left[kx^{k-1}e^{-nx}-nx^k e^{-nx}\right]\\&=\frac{n^k}{(k-1)!}e^{-nx}x^{k-1}-\frac{n^{k+1}}{k!}e^{-nx}x^k\\&=(-1)^k\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\phi_n{}^{(k)}(x)-\frac{x^k}{k!}(-1)^{k+1}\phi_n{}^{(k+1)}(x)\\&=(-1)^k\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}(-n)\phi_{n+c}{}^{(k-1)}(x)-\frac{x^k}{k!}(-1)^{k+1}\phi_{n+c}{}^{(k)}(x)\\&=\left[(-1)^{k-1}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\phi_{n+c}^{(k-1)}(x)-(-1)^k\frac{x^k}{k!}\phi_{n+c}^{(k)}(x)\right]\\&=n\left[P_{n+c,k-1}(x)-P_{n+c,k}(x)\right]\end{aligned}$$

elde edilir.

Özel olarak, $\phi_n(x)=(1+x)^{-n}$ alınırsa,

$$P_{n,k}(x) = x^k(1+x)^{-n-k}\binom{n+k-1}{k}$$

ve

$$\phi_n^k(x) = (-1)^k n(n+1)\ldots\big(n+(k-1)\big)(1+x)^{-n-k}$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}P_{n,k}(x) &= \frac{d}{dx}\left[x^k(1+x)^{-n-k}\binom{n+k-1}{k}\right] \\
&= \binom{n+k-1}{k}\left[\frac{kx^{k-1}}{(1+x)^{n+k}} - (n+k)\frac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}}\right] \\
&= \binom{n+k-1}{k}k\frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k}} - \binom{n+k-1}{k}(n+k)\frac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}} \\
&= \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}k\frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k}} - \frac{n(n+k)!}{n!\,k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}} \\
&= \frac{n(n+k-1)!}{n(n-1)!\,(k-1)!}\frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k}} - \frac{n(n+k)!}{n!\,k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}} \\
&= n\left[\binom{n+k-1}{k-1}\frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k}} - \binom{n}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}}\right] \\
&= n\big[P_{n+c,k-1}(x) - P_{n+c,k}(x)\big]
\end{aligned}$$

olduğu gösterilmiş olur.

2.5 SZASZ OPERATÖRLERİ

Tanım 2.5.1

$x \in [0\,,\infty)$ ve $f \in C\,([0,+\infty))$ olsun. Szazs operatörleri

$$S_n(f;x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!} \quad (2.48)$$

şeklinde tanımlı olan lineer pozitif operatörlerdir(Szasz 1950).

Teorem 2.5.1

Szasz operatörleri $A > 0$ olmak üzere $[0, A]$ kapalı aralığında sürekli ve tüm pozitif yarı eksende de sınırlı olan fonksiyonuna bu aralıkta düzgün yakınsar.

Kanıt

Kanıtı Korovkin teoremini kullanarak yapılmalıdır. Bunun için öncelikle $S_n(f\ ;x\ )$'in doğrusal ve pozitif bir operatör olduğu gösterilmelidir.

Doğrusallık**:**

Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C[0, A]$ için,

$$S_n\left((af\ (t) + bg(t)); x\right) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left[a\ f\left(\frac{k}{n}\right) + bg\ \left(\frac{k}{n}\right)\right] \frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} a\ f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} + e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} bg\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= ae^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} + be^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= a\ S_n(f\ (t); x) + b\ S_n(g(t)\ ; x$$

olduğundan (S_n) doğrusal bir opetatördür.

Pozitiflik**:**

$k = 0,1,2, \ldots n \ \in \ \mathbb{N}$ ve $x \in C[0, A]$için,

$$e^{-nx} \frac{n^k}{k!} x^k \geq 0$$

olduğundan

$f \geq 0$ ise $S_n\ (f(t); x) \geq 0$ dır.

Korovkin teoremi gereğince;

i. $\lim_{n \to \infty} \|S_n(1; x) - 1\| = 0$

ii. $\lim_{n \to \infty} \|\ S_n(t; x) - t\| = x$

iii. $\lim_{n \to \infty} \|S_n(t^2; x) - t^2\| = x^2$

olduğu gösterilirse $\lim_{n \to \infty} \|S_n(f; x) - f\| = f(x)$ olduğu ispatlanmış olur. Şimdi bunlar gösterilmelidir.

$$S_n(1\ ; x\ ) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} 1\ \frac{(nx)^k}{k!} = e^{-nx} e^{nx}$$

olup

$$S_n(1\,;x\,) = 1 \tag{2.49}$$

dır.

$$S_n(t\,;x\,) = \; e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{(nx)^k}{k!} \; = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{n^k x^k}{k!}$$

$$= \; e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{n^k x^k}{k!}$$

$$= \; e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}\;, \qquad (k\to k+1)$$

$$= \; xe^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^k x^k}{k!} = xe^{-nx}e^{nx}$$

$$= \; x$$

dır.

$$\lim_{n\to\infty}\|\; S_n(t;x) - t\| = x \tag{2.50}$$

$$S_n(t^2\,;x\,) = \; e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}\frac{(nx)^k}{k!} \; = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}\frac{n^k x^k}{k!}$$

$$= \; e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}\frac{n^k x^k}{k!} \; = e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \; e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{n}+\frac{1}{n}\right)\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}$$

$$= \; e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!} \; + \; \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}\right)$$

$$= \; e^{-nx}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k-1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}\,x}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}\right)$$

$$= \; e^{-nx}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{n^{k-2}x^{k-2}x^2}{(k-2)!} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}\right)\begin{matrix} k\to k+2 \\ k\to k+1 \end{matrix}$$

$$= e^{-nx}\left(x^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{n^k x^k}{k!} - \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k x^k}{k!}\right)$$

$$= x^2 e^{-nx} e^{nx} + \frac{x}{n} e^{-nx} e^{nx}$$

$$= x^2 + \frac{x}{n}$$

olduğundan

$$S_n(t^2\,; x\,) = x^2 + \tfrac{x}{n} \tag{2.51}$$

dır.

$$S_n(t^2\,; x\,) = x^2, \quad (\,n \to \infty)$$

elde edilir. Dolayısıyla (i), (ii) ve (iii) şartları sağlandığından Korovkin teoremi gereğince her $f\ \in C\ [0, A]$ için $[0, A]$ aralığında:

$\lim_{n\to\infty} \|\ S_n(f; x) - f(x)\| = 0$

gösterilmiş olur.

2.6 SZASZ DURMEYER OPERATÖRLERİ

Bu kısımda Szasz-Durrmeyer operatörlerinin yakınsaklığı incelenecektir.

Tanım 2.6.1

$f, [0,\infty)$ da integrallenebilir bir fonksiyon ve $p_{n,k}(x) = e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}$ olsun. $x \in [0,\infty)$ için Szasz-Durrmeyer operatörleri

$$S_n^*(f; x) = n\sum_{k=0}^{\infty} p_{n.k}(x)\int_0^{\infty} f(t)\, p_{n.k-1}(t)dt\ ; \tag{2.52}$$

olarak tanımlanır(Aral ve Gupta 2011).

Teorem 2.6.1

(2.52) ile tanımlı Szazs-Durrmeyer operatörleri Korovkin tip teoremi sağlar(Özdoğan 2010).

Kanıt

Öncelikle S_n^* ın doğrusal ve pozitif bir operatör olduğu gösterilmelidir.

Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve her $f_1, f_2 \in C[0,\infty)$ için

$$\begin{aligned} S_n^*\left(\left(\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\right);x\right) &= n\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty}\left(\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\right)p_{n,k-1}(t)dt \\ &= n\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty}\alpha f_1(t)p_{n,k-1}(t)dt \\ &+n\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty}\beta f_2(t)p_{n,k-1}(t)dt \\ &= \alpha\left(n\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty} f_1(t)p_{n,k-1}(t)dt\right) \\ &+\beta\left(n\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty} f_2(t)p_{n,k-1}(t)dt\right) \\ &= \alpha S_n^*(f_1(t);x)+\beta S_n^*(f_2(t);x) \end{aligned}$$

olduğundan S_n^* doğrusal bir operatördür.

$k \in \mathbb{N}_0$ $n \in \mathbb{N}$ve$x \in [0,\infty)$ için $p_{n,k}(x) = e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!} \geq 0$ olduğundan $f \geq 0$ olduğundan açıkça $S_n^*(f;x) \geq 0$ dır. O halde S_n^* pozitif bir operatördür.

$A > 0$ için $T_A: C[0,\infty) \to C[0,A]$ dönüşümü $T_A(f) = f_{[0,A]}$ olarak tanımlansın.

Her $f \in C[0,\infty)$ ve $x \in [0,A]$ için

i) İlk olarak $\lim_{n\to\infty}\left\|T_A\left(S_n^*(e_0,x) - T_A(e_0)\right)\right\| = 0$ olduğu gösterilecektir.

$$S_n^*(e_0;x) = n\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty} p_{n,k-1}(t)dt$$

$$= n\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty} e^{-nt}\frac{(nt)^{k-1}}{(k-1)!}dt$$

$$= n\sum_{k=0}^{\infty} p_{n.k}(x)\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}\int_0^{\infty} e^{-nt}t^{k-1}dt \tag{2.53}$$

(2.53)deki integralin değerini hesaplamak için $t = \frac{u}{n}$ dönüşümünü kullanılırsa

$$\int_0^{\infty} e^{-nt}t^{k-1}dt = \int_0^{\infty} e^{-u}\left(\frac{u}{n}\right)^{k-1}\frac{du}{n} = \frac{1}{n^k}\int_0^{\infty} e^{-u}u^{k-1}du$$

integrali bulunur. Gamma fonksiyonu tanımından

$$\frac{1}{n^k}\int_0^{\infty} e^{-u}u^{k-1}du = \frac{1}{n^k}\Gamma(k) = \frac{1}{n^k}(k-1)!$$

bulunur. Bu ifade (2.53) de yerine yazıldığında

$$S_n^*(e_0;x) = n\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\frac{1}{(k-1)!}n^{k-1}\frac{1}{n^k}(k-1)!$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)$$

$$= S_n^*(e_0;x) = 1 \tag{2.54}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_A\big(S_n^*(e_0)\big) - T_A(e_0)\right\|_{C[0,A]} = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,A]}\left|T_A\big(S_n^*(e_0;x)\big) - T_A(e_0;x)\right|$$

$$= 0$$

eşitliği gösterilmiş olur.

ii) $\lim_{n\to\infty}\left\|T_A\big(S_n^*(e_1,x) - T_A(e_1)\big)\right\| = 0$ eşitliği araştırılacaktır.

$$S_n^*(e_1;x) = n\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty} t.p_{n,k-1}(t)dt$$

$$= n\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty} t.e^{-nt}\frac{(nt)^{k-1}}{(k-1)!}dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}\int_0^{\infty} t^k e^{-nt}dt \tag{2.55}$$

(2.55) de $t = \frac{u}{n}$ değişken değişimi uygulanırsa

$$S_n^*(e_1,x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{n}\right)^k \frac{du}{n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} . \frac{1}{n^k} \int_0^{\infty} e^{-u} u^k \, du$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{1}{(k-1)!} \int_0^{\infty} e^{-u} u^k du$$

eşitliği bulunur. Buradan yine Gamma fonksiyonu kullanılarak

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{1}{(k-1)!} \Gamma(k+1)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{1}{(k-1)!} . k!$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} p_{n,k}(x)$$

$$= S_n(e_1; x)$$

$$= x \tag{2.56}$$

olacaktır. O halde

$$\lim_{n\to\infty} \left\| T_A\left(S_n^*(e_1)\right) - T_A(e_1) \right\|_{C[0,A]} = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,A]} \left| T_A\left(S_n^*(e_1; x)\right) - T_A(e_1; x) \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,A]} |x - x| = 0$$

eşitliğine ulaşılır. Bu ise aranan eşitliktir.

iii) Son olarak $e_2(x)$ fonksiyonu için benzer işlemler yapılacaktır.

$$S_n^*(e_2; x) = n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} t^2 . p_{n,k-1}(t) dt$$

$$= n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} t^2 . e^{-nt} \frac{(nt)^{k-1}}{(k-1)!} dt$$

$$= n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} \int_0^{\infty} e^{-nt} . t^{k+1} dt \tag{2.57}$$

(2.57) de $t=\frac{u}{n}$ dönüşümü uygulanırsa

$$=n\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}\int_{0}^{\infty}e^{-u}\left(\frac{u}{n}\right)^{k+1}\frac{du}{n}$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)\frac{1}{(k-1)!}\int_{0}^{\infty}e^{-u}u^{k+1}du$$

eşitliği yazılabilir. Gamma fonksiyonu yardımı ile

$$S_n^*(e_2;x)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)\frac{1}{(k-1)!}\Gamma(k+2)$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)\frac{1}{(k-1)!}(k+1)!$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}(k^2+k)p_{n,k}(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^2p_{n,k}(x)+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\right)p_{n,k}(x)$$

$$=S_n(e_2;x)+\frac{1}{n}S_n(e_1;x)$$

$$=x^2+\frac{2x}{n} \tag{2.58}$$

ifadesine ulaşılır. Buradan da

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_A\big(S_n^*(e_2)\big)-T_A(e_2)\right\|_{C[0,A]}=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,A]}\left|T_A\big(S_n^*(e_2;x)\big)-T_A(e_2;x)\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,A]}\left|x^2+\frac{2x}{n}-x^2\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,A]}\left|\frac{2x}{n}\right|=0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_A\big(S_n(e_2)\big)-T_A(e_2)\right\|_{C[0,A]}=0$$

eşitliği gösterilmiş olur.

(i),(ii),(iii) den $[0,A]$ aralığı üzerinde her $f\in C[0,\infty)$için

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n^*(f)-f\|_{C[0,A]}=0$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 2.6.2.

$S_n^*: C_\rho^k[0,\infty) \rightarrow B_\rho(\mathbb{R})$ olmak üzere, Szasz Durmeyer operatörleri

her $f \in C_\rho^k[0,\infty)$ ve her $x \in [0,\infty)$ için

$\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n^*(f) - f\|_\rho = 0$

eşitliğini sağlar(Aral ve Gupta 2011).

Kanıt

(S_n^*) doğrusal pozitif operatörler dizisinin ağırlıklı uzaylarda Korovkin tipi teoremin hipotezlerini sağlandığı gösterilmelidir.

i)

$S_n^*(e_0;x) = 1$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n^*(e_0,x) - e_0(x)\|_\rho = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{|S_n^*(e_0,x) - e_0(x)|}{1+x^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{0}{1+x^2} = 0$$

bulunur.

ii) Benzer şekilde

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n^*(e_1,x) - e_1(x)\|_\rho = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{|S_n^*(e_1;x) - e_1(x)|}{1+x^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{|x-x|}{1+x^2}$$

$$= 0$$

ifadesi geçerlidir.

iii) Yine norm tanımı gereği

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n^*(e_2,x) - e_2(x)\|_\rho = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{|S_n^*(e_2;x) - e_2(x)|}{1+x^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{\left|x^2 + \frac{2}{n}x - x^2\right|}{1+x^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{\left|\frac{2}{n}x\right|}{1+x^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{2x}{1+x^2}$$

eşitliğin ulaşılır. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n^*(e_2;x) - e_2(x)\|_\rho = 0$$

bulunur. Sonuç olarak (i),(ii),(iii) den, her $f \in C_\rho^k[0,\infty)$ ve her $x \in [0,\infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n^*(f) - f\|_\rho = 0$$

eşitliği geçerlidir. Bu ise kanıtı tamamlar.

2.7 GADJIEV-IBRAGIMOV OPERATÖRLERİ

Bu kesimde Gadjiev-Ibragimov(1970) tarafından literatüre kazandırılan (klasik) Gadjiev-İbragimov operatörünün $C[0,A]$ uzayında yaklaşım özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.7.1

$A > 0$ olmak üzere $(\varphi_n(t))$ ve $(\psi_n(t))$; $C[0,A]$ uzayında iki fonksiyon dizisi, (α_n) ise pozitif sayılar dizisi olsun. Bu diziler için $\varphi_n(0) = 0, \psi_n(0) \neq 0$, $t \in [0,A], n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2 \psi_n(0)} = 0$$

koşulları sağlansın. Ayrıca

$x, t \in [0,A]$ ve $u \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(K_n(x,t,u))$ üç değişkenli fonksiyonlar dizisi için aşağıdaki dört koşul sağlansın.

1°) Bu dizinin her bir terimi x ve t nin $[0,A]$ aralığındaki her belirli değerine karşılık u ya göre tam analitik fonksiyondur.

2°) Her $x \in [0,A]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $K_n(x,0,0) = 1$dir.

3°) Her $x \in [0,A]$ ve $\nu, n \in \mathbb{N}$ ve bir $u_1 \in \mathbb{R}$ için

$$\left\{(-1)^\nu \left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\right]_{\substack{u=u_1\\ t=0}}\right\} \geq 0 \text{ eşitsizliği sağlanır.}$$

4°) $$\left.\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\right|_{\substack{u=u_1\\ t=0}} = -nx \left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{n+m}(x,t,u)\right]_{\substack{u=u_1\\ t=0}}$$

eşitliğini sağlayan $(n+m) \in \mathbb{N}_0$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}$ vardır.

Bu tanım yardımıyla aşağıdaki operatörler dizisi tanımlanabilir.

Tanım 2.7.2

Yukarıdaki koşulları sağlayan $\left(K_n(x,t,u)\right)$ üç değişkenli fonksiyonlar dizisi yardımıyla $L_n(f,x)$ operatörler dizisi

$$L_n(f,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)\left\{\left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\right]_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!} \tag{2.59}$$

şeklinde tanımlanır. Bu operatöre Gadjiev-İbragimov operatörü adı verilir (Gadjiev and Ibragimov 1970).

Teorem 2.7.1

$[0,\infty[$yarı ekseninde tanımlı

$|f(x)|\leq M_f(1+x^2)$

eşitsizliğini sağlayan ve $f\in C[0,A]$ olan her f fonksiyonu için $L_n(f,x)$;

$$L_n(f,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)\left\{\left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\right]_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $f\in C[0,A]$ için

$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f,x)-f(x)\|_{C[0,A]}=0$

eşitliği geçerlidir(Gadjiev and Ibragimov 1970).

Kanıt

Açıkça Korovkin Teoreminin koşullarının sağlandığını göstermek yeterlidir.

$K_n(x,t,u)$ tam analitik fonksiyon olduğundan Taylor serisi şeklinde yazılabilir. $(u-u_1)$ farkının kuvvetlerine göre Taylor serisine açılır ve $u=\varphi_n(t)$, $u_1=\alpha_n\psi_n(t)$ olarak alınırsa;

$$K_n\left(x,t,\varphi_n(t)\right)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\right]_{\substack{u_1=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(\varphi_n(t)-\alpha_n\psi_n(t)\right)^\nu}{\nu!}$$

eşitliği elde edilir.

Bu eşitlikte $t=0$ alınırsa 2°) özelliği ile $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{n}=1$ ve $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}=0$ eşitlikleri dikkate alınarak $L_n(1,x)=1$ elde edilir.

Diğer taraftan 4°) özelliğinden

$$L_n(t,x) = \frac{x\alpha_n}{n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_{n+m}\big(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\big)\right]_{\substack{u_1=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^\nu}{\nu!} = \frac{x\alpha_n}{n}$$

olup $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{n} = 1$ eşitliği kullanılarak 3°) özelliği yardımıyla; $\lim_{n\to\infty}L_n(t,x) = x$ bulunur. Bu operatöre iki defa 4°) özelliği uygulanırsa;

$$L_n(t^2,x) = \left(\frac{x\alpha_n}{n}\right)^2\frac{n+m}{n}\sum_{\nu=2}^{\infty}\left[\frac{\partial^{\nu-2}}{\partial u^{\nu-2}}K_{n+2m}\big(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\big)\right]_{\substack{u_1=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^{\nu-2}}{(\nu-2)!}$$

$$+\frac{x\alpha_n}{n}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}$$

$$= \left(\frac{x\alpha_n}{n}\right)^2\frac{n+m}{n} + \frac{x\alpha_n}{n}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}$$

eşitliği elde edilecektir. Bu ise $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{n} = 1$ olması nedeniyle

$$\lim_{n\to\infty} L_n(t^2,x) = x^2$$

olduğunu gösterir. Dolayısıyla Korovkin teoreminin koşulları geçerli olduğundan her $f \in C[0,A]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[0,A]} = 0$$

eşitliği gösterilmiş olur.

2.8 BASKAKOV OPERATÖRLERİ

Tanım 2.8.1

$f \in C\,[0,\infty)$ ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için Baskakov operatörü

$$B_n(f;x) = \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k} \tag{2.60}$$

biçiminde tanımlanır(Baskakov 1957).

Lemma 2.8.1

Başkakov operatörü için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i) $B_n(1,x) = 1$

ii) $B_n(t,x) = x$

iii) $B_n(t^2,x) = x^2$

Kanıt

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k}$$

olduğundan

$$B_n(1;x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} 1 \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k} = 1$$

yine tanımdan

$$B_n(t;x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$= \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} \frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$= \frac{x}{(1+x)} \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{k-1}}$$

$k \to k+1$

$$= \frac{x}{(1+x)} \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!\,k!} \frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$= \frac{x}{(1+x)} \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$= \frac{x}{(1+x)} \frac{1}{(1+x)^n} (1+x)^{n+1} = x$$

dir. Son olarak

$$B_n(t^2;x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{n^2} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$= \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k-1)}{n^2}\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$+\frac{1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$= \frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-2)!}\frac{x^{k-2}}{(1+x)^{k-2}}+\frac{1}{n}B_n(t;x)$$

$$= \frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)!}{n!\,k!}\frac{x^k}{(1+x)^k}+\frac{x}{n}$$

$$= \frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{n+1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)!}{(n+1)!\,k!}\frac{x^k}{(1+x)^k}+\frac{x}{n}$$

$$= \frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{n+1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}+\frac{x}{n}$$

$$= \frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{n+1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}(1+x)^{n+2}+\frac{x}{n}$$

$$= x^2\frac{x(1+x)}{n}$$

dir.

Uyarı 2.8.1

Korovkin Teoremi uygulandığında da Baskakov operatörünün sonlu aralıkta kendisini oluşturan fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğu kolayca görülür.

Gerçekten

$$\lim_{n\to\infty}\|B_n(1,x)-1\| = \lim_{n\to\infty}\|1-1\| = 0$$

olur. Benzer şekilde

$$\lim_{n\to\infty}\|B_n(t,x)-x\| = \lim_{n\to\infty}\|x-x\| = 0$$

eşitliği geçerlidir. Son olarak

$$\lim_{n\to\infty}\|B_n(t^2,x)-x^2\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{x^2(1+x)}{n}-x^2\right\| = 0$$

BÖLÜM 3

SÜREKLİ FONKSİYONLARA BAZI q-DOĞRUSAL POZİTİF OPERATÖRLERLE YAKLAŞIM

q −Analizin matematikte; özel fonksiyonlar, ortogonal polinomlar ile Lie cebirleri gibi ve fizikte genel rölativite, sicim teorisi, kuantum dinamiği, moleküler ve nükleer spektroskopi gibi uygulama alanları vardır. 20.yüzyılın ikinci yarısında matematikçiler tarafından oldukça rağbet gören bu kavram yaklaşım kuramı alanında da büyük ilgi görmüştür. Bu çalışmalara örnek olarak Bernstein operatörlerinin q−genellemesi gösterilebilir. Bu genelleştirilmiş operatörlerin Korovkin teoremini sağladığı aynı zamanda da klasik yaklaşım hızından daha hızlı yaklaşım hızına sahip olduğu kanıtlanmıştır. Operatörlerin q versiyonları için son yıllarda yoğun çalışmalar yapılmaktadır. Aral, Gupta ve Agarwal 2013 de hazırladıkları kitapta son yıllarda tanımlanan q −operatörleri derlemişlerdir.

Bu bölümde literatürdeki bazı q − operatörler ve bazı yaklaşım özelliklerine yer verilmiştir.

3.1 TEK DEĞİŞKENLİ q-BERNSTEIN POLİNOMLARI

Tanım 3.1.1

$x \in [0,1]$, $f \in C[0,1]$ ve $0 < q < 1$ olsun.

$$B_n(f;q;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

ifadesine q − Bernstein polinomu denir(Philips 1996).

Teorem 3.1.1

q −Bernstein polinomları için aşağıdaki eşitlikler sağlanır(Philips 1996).

i) $B_n(1;q;x) = 1$

ii) $B_n(t;q;x) = x$

iii) $B_n(t^2;q;x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{[n]_q}$

Kanıt

i)

Bu sonuç

$$(x+1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

ifadesi kullanılarak

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x) = 1$$

olur. Dolayısıyla

$$B_n(1;q;x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x) = 1$$

bulunur.

ii) Operatörün tanımından

$$B_n(t;q;x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{[k]_q}{[n]_q} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{[n]_q}{[k]_q} \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q!\,[n-k]_q!} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q!\,[n-k]_q!} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x)$$

$k \to k+1$ dönüşünden yararlanılarak

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[n-1]_q!}{[k]_q!\,[n-k-1]_q!} x^{k+1} \prod_{s=0}^{n-k-2} (1-q^s x)$$

$$= x\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-2}(1-q^s x)$$

$= x$

elde edilir. Böylece

$B_n(t;q;x) = x$

eşitliği gösterilmiş olur.

iii) Son olarak

$$B_n(t^2;q;x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q{}^2}{[n]_q{}^2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{[k]_q}{[n]_q}\frac{[k]_q}{[n]_q}\frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!}x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{[k]_q}{[n]_q}\frac{[k]_q}{[n]_q}\frac{[n]_q}{[k]_q}\frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q!\,[n-k]_q!}x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{[k]_q}{[n]_q}\frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q!\,[n-k]_q!}x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{q[k-1]_q+1}{[n]_q}\frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q!\,[n-k]_q!}x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{q[k-1]_q}{[n]_q}\frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q!\,[n-k]_q!}x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{[n]_q}\frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q!\,[n-k]_q!}x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

$$= \sum_{k=2}^{n}\frac{q[k-1]_q}{[n]_q}\frac{[n-1]_q[n-2]_q!}{[k-1]_q[k-2]_q!\,[n-k]_q!}x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{[n]_q}\frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q!\,[n-k]_q!}x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

$$= \frac{q[n-1]_q}{[n]_q}\sum_{k=2}^{n}\frac{[n-2]_q!}{[k-2]_q!\,[n-k]_q!}x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{[n]_q}\frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q!\,[n-k]_q!}x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

$k \to k+2$ ve $k \to k+1$ dönüşümleri yapılırsa

$$=\frac{q[n-1]_q}{[n]_q}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{[n-2]_q!}{[k-2]_q![n-k-2]_q!}x^{k+2}\prod_{s=0}^{n-k-3}(1-q^s x)$$

$$+\frac{1}{[n]_q}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q![n-k-1]_q!}x^{k+1}\prod_{s=0}^{n-k-2}(1-q^s x)$$

$$=\frac{q[n-1]_q}{[n]_q}x^2\sum_{k=0}^{n-2}\begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-3}(1-q^s x)$$

$$+\frac{1}{[n]_q}x\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-2}(1-q^s x)$$

$$=\frac{q[n-1]_q}{[n]_q}x^2+\frac{1}{[n]_q}x$$

$$=\frac{[n]_q-1}{[n]_q}x^2+\frac{1}{[n]_q}x$$

$$=\left(1-\frac{1}{[n]_q}\right)x^2+\frac{x}{[n]_q}$$

$$=x^2-\frac{x^2}{[n]_q}+\frac{x}{[n]_q}$$

$$=x^2+\frac{x(1-x)}{[n]_q}$$

dir. Yani

$$B_n(t^2;q;x)=x^2+\frac{x(1-x)}{[n]_q}$$

olur. Bunları sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.2

Eğer $0<q_n<1$, $\lim_{n\to\infty} q_n=1$ ve $\lim_{n\to\infty} {q_n}^n=c\ \ (c\neq 1)$ sağlanıyor ise $B_n(f;q_n;x)$ q-Bernstein polinomları $[0,1]$ aralığında sürekli ve tüm $\mathbb{R}$ de sınırlı $|f|\leq M_f$ koşulunu sağlayan f fonksiyonuna düzgün yakınsar. Yani $f\in C[0,1]$ ise

$$\lim_{n\to\infty}\|B_n(f;q_n;x)-f(x)\|=0$$

sağlanır(Philips 1996).

Kanıt

Bu teoremin sağlanabilmesi için $B_n(f;q;x)$ in doğrusal ve pozitif olduğunu göstermek yeterlidir.

Doğrusallık:

Her $a,b \in \mathbb{R}$ve$f,g \in C[0,1]$ için

$$B_n(af(t)+bg(t);q;x) = \sum_{k=0}^{n}\left(af\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)+bg\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(af)\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x) + \sum_{k=0}^{n}(bg)\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

$$= a\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x) + b\sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

$$= aB_n(f(t);q;x) + bB_n(g(t);q;x)$$

olduğundan (B_n) doğrusal bir operatördür.

Pozitiflik:

$k = 0,1,\dots;n \in \mathbb{N}vex \in [0,1]$ için

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x) \geq 0$$

olduğundan$f \geq 0$ ise

$B_n(f;q;x) \geq 0$

olur. Yani $B_n(f;q;x)$ pozitif bir operatördür.

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n(t^v\colon q;x) - x^v\| = 0$$

Kolayca gösterilecek olan $v = 0,1,2 \dots$ için eşitlikleri geçerli olduğundan her $f \in C[0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n(f;q_n;x) - f(x)\| = 0$$

olur.

3.2 TEK DEĞİŞKENLİ q-BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI

Tanım 3.2.1

$(\mathrm{b_n})$dizisi

$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{[n]_q} = 0$

koşulunu sağlayan monoton artan gerçel terimli pozitif bir sayı dizisi olmak üzere $0 \leq x \leq b_n$ için

$$B_n^*(f;q;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q} b_n\right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right)$$

şeklinde tanımlı polinomlara q −Bernstein-Chlodowsky polinomları adı verilir(Karslı ve Gupta 2008).

Teorem 3.2.1

q −Bernstein-Chlodowsky polinomları aşağıdaki eşitlikleri sağlar(Karslı ve Gupta 2008).

i) $B_n^*(1;q;x) = 1$

ii) $B_n^*(t;q;x) = x$

iii) $B_n^*(t^2;q;x) = x^2 + \frac{x(b_n - x)}{[n]_q}$.

Kanıt

i)

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) = 1$$

eşitliği kullanılarak x yerine $\frac{x}{b_n}$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right) = 1$$

olur. Dolayısıyla

$$B_n^*(1;q;x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right) = 1$$

bulunur.

ii) Benzer şekilde

$$B_n^*(t;q;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{[k]_q}{[n]_q} b_n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right)$$

$$= b_n \sum_{k=0}^{n} \frac{[k]_q}{[n]_q} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right)$$

$$= b_n \frac{x}{b_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{[n]_q}{[k]_q} \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q! [n-k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right)$$

$$= x \sum_{k=1}^{n} \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q! [n-k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right)$$

$k \to k+1$ dünüşümü uygulanırsa

$$= x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[n-1]_q!}{[k]_q! [n-k-1]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k} \prod_{s=0}^{n-k-2} \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right)$$

$$= x$$

dir. Yani

$B_n^*(t;q;x) = x$

eşitliği geçerlidir.

iii) Son olarak

$$B_n^*(t^2;q;x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{[k]_q}{[n]_q} b_n\right)^2 \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right)$$

$$= {b_n}^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{[n]_q}{[k]_q} \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q! [n-k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right)$$

$$= {b_n}^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q! [n-k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right)$$

$$= {b_n}^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{q[k-1]_q + 1}{[n]_q} \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q! [n-k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right)$$

$$= {b_n}^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{q[k-1]_q}{[n]_q} \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q! [n-k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right)$$

$$+ {b_n}^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{[n]_q} \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q! [n-k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right)$$

$$=b_n{}^2\sum_{k=1}^{n}\frac{q[k-1]_q}{[n]_q}\frac{[n-1]_q[n-2]_q!}{[k-1]_q[k-2]_q![n-k]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s\frac{x}{b_n}\right)$$

$$+\frac{b_n{}^2}{[n]_q}\sum_{k=1}^{n}\frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q![n-k]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s\frac{x}{b_n}\right)$$

$$=\frac{qb_n{}^2[n-1]_q}{[n]_q}\sum_{k=2}^{n}\frac{[n-2]_q!}{[k-2]_q![n-k]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s\frac{x}{b_n}\right)$$

$$+\frac{b_n{}^2}{[n]_q}\sum_{k=1}^{n}\frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q![n-k]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s\frac{x}{b_n}\right)$$

$$=\frac{qb_n{}^2[n-1]_q}{[n]_q}\left(\frac{x}{b_n}\right)^2\sum_{k=2}^{n}\frac{[n-2]_q!}{[k-2]_q![n-k]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2}\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s\frac{x}{b_n}\right)$$

$$+\frac{b_n{}^2}{[n]_q}\left(\frac{x}{b_n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q![n-k]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1}\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s\frac{x}{b_n}\right)$$

$k\to k+2$ ve $k\to k+1$ dönüşümleri uygulanırsa

$$=\frac{qx^2[n-1]_q}{[n]_q}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{[n-2]_q!}{[k]_q![n-k-2]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-3}\left(1-q^s\frac{x}{b_n}\right)$$

$$+\frac{b_n}{[n]_q}x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{[n-1]_q!}{[k]_q![n-k-1]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-2}\left(1-q^s\frac{x}{b_n}\right)$$

$$=\frac{q[n-1]_q}{[n]_q}x^2+\frac{b_n}{[n]_q}x$$

$$=\frac{[n]_q-1}{[n]_q}x^2+\frac{b_n}{[n]_q}x$$

$$=\left(1-\frac{1}{[n]_q}\right)x^2+\frac{b_n}{[n]_q}x$$

$$=x^2-\frac{x^2}{[n]_q}+\frac{b_n}{[n]_q}x$$

$$=x^2+\frac{x(b_n-x)}{[n]_q}$$

eşitliği geçerlidir. Yani

$$B_n^*(t^2;q;x)=x^2+\frac{x(b_n-x)}{[n]_q}$$

eşitliği geçerli olur.

Burada $0 < q < 1$ için, $n \to \infty$ iken $[n]_q \to \frac{1}{1-q}$ bulunur. Açıkça $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$ ve $n \to \infty$ iken $B_n^*(t^v, x)$ sırasıyla $1, x, x^2$ ye yakınsar.

3.3 q −DURRMEYER OPERATÖRLERİ

Tanım 3.3.1

$f \in C[0,1], x \in [0,1]$ ve $0 < q \leq 1$ olmak üzere (Gupta 2008) tarafından tanımlanan q-Durrmeyer operatörü;

$$D_{n,q}(f;x) = [n+1]_q \sum_{k=0}^{n} q^{-k} p_{n,k}(q;x) \int_0^1 f(t)\, p_{n,k}(q;qt) d_q t$$

$$= \sum_{k=0}^{n} A_{n,k}(f) p_{n,k}(q;x) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$p_{n,k}(q;x) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k (1-x)_q^{n-k}$

eşitliğini ifade eder. Dikkat edilirse $q = 1$ durumunda (3.1) eşitliği,

$$D_n(f;x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \int_0^1 f(t)\, p_{n,k}(t) dt$$

eşitliğine dönüşür. Yani klasik Durrmeyer operatörü elde edilir.

Lemma 3.3.1

Her $s \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\int_0^1 t^k p_{n,k}(q;qt) d_q t = q^k \frac{[n]_q!\,[k+s]_q!}{[n+s+1]_q!\,[k]_q!}$$

Kanıt

$0 < q \leq 1$ olmak üzere, Tanım3.3.1 den

$$\int_0^1 t^k p_{n,k}(q;qt)d_q t = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^k \int_0^1 t^{k+s}(1-qt)_q^{n-k} d_q t$$

$$= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \frac{\Gamma_q(k+s+1)\Gamma_q(n-k+1)}{\Gamma_q(n+s+2)}$$

$$= q^k \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!} \frac{[k+s]_q!\,[n-k]_q!}{[n+s+1]_q!}$$

$$= q^k \frac{[n]_q!\,[k+s]_q!}{[n+s+1]_q!\,[k]_q!}$$

istenilen eşitlik gösterilmiş olur.

Teorem 3.3.1

Her $n \in \mathbb{N}, x \in [0,1]$ ve $0 < q \leq 1$ için

i) $D_{n,q}(1,x) = 1$

ii) $D_{n,q}(t,x) = \dfrac{1 + qx[n]_q}{[n+2]_q}$

iii) $D_{n,q}(t^2,x) = \dfrac{1 + q + (1+q)^2 qx[n]_q + q^3x^2[n]_q\left([n]_q - 1\right)}{[n+2]_q[n+3]_q}$

eşitlikleri geçerlidir(Gupta 2008).

Kanıt

i) Her $0 < q \leq 1$ için Lemma 3.3.1 den $s = 0$ olduğundan

$$D_{n,q}(1,x) = [n+1]_q \sum_{k=0}^{n} q^{-k} p_{n,k}(q;x) \int_0^1 p_{n,k}(q;qt)\, d_q t$$

$$= [n+1]_q \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(q;x)\, q^{-k} q^k \frac{[n]_q!\,[k]_q!}{[n+1]_q!\,[k]_q!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(q;x)$$

$$= 1$$

bulunur.

ii) Her $0 < q \leq 1$ için yine Lemma 3.3.1 den $s = 1$ olduğundan

$$D_{n,q}(t,x) = [n+1]_q \sum_{k=0}^{n} q^{-k} p_{n,k}(q;x) \int_0^1 t\, p_{n,k}(q;qt) d_q t$$

$$= [n+1]_q \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(q;x)\, q^{-k} q^k \frac{[n]_q!\,[k+1]_q!}{[n+2]_q!\,[k]_q!}$$

$$= \frac{1}{[n+2]_q} \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(q;x)\,[k+1]_q \tag{3.2}$$

olur. Burada

$[k+1]_q = 1+q+\cdots+q^k = 1+q(1+q+\cdots+q^{k-1}) = 1+q[k]_q$

eşitliği yardımıyla,

$$D_{n,q}(f,x) = \frac{1}{[n+2]_q} \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(q;x)\big(1+q[k]_q\big)$$

$$= \frac{1}{[n+2]_q} \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(q;x) + \frac{q}{[n+2]_q} \sum_{k=0}^{n} [k]_q p_{n,k}(q;x)$$

sağlanır. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ikinci toplam $[n]_q$ ile çarpılıp bölünür ve Lemma 3.3.1'i dikkate alınırsa,

$$D_{n,q}(t,x) = \frac{1}{[n+2]_q} \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(q;x) + \frac{q[n]_q}{[n+2]_q} \sum_{k=0}^{n} \frac{[k]_q}{[n]_q} p_{n,k}(q;x)$$

$$= \frac{1+qx[n]_q}{[n+2]_q}$$

elde edilir.

iii)

$$D_{n,q}(t^2,x) = [n+1]_q \sum_{k=0}^{n} q^{-k} p_{n,k}(q;x) + \int_0^1 t^2\, p_{n,k}(q;qt) d_q t$$

$$= [n+1]_q \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(q;x)\, q^{-k} q^k \frac{[n]_q!\,[k+2]_q!}{[n+3]_q!\,[k]_q!}$$

$$\times \frac{1}{[n+2]_q [n+3]_q} \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(q;x)[k+2]_q[k+1]_q \tag{3.3}$$

bulunur.

$[k+1]_q = 1+q[k]_q$ ve $[k+2]_q = 1+q+q^2[k]_q$

eşitlikleri kullanılarak,

$$[k+1]_q[k+2]_q = \left(1+q[k]_q\right)\left(1+q+q^2[k]_q\right)$$
$$= \left(1+q+q[k]_q+2q^2[k]_q+q^3[k]_q^2\right)$$
$$= \left(1+q+(q+2q^2)[k]_q+q^3[k]_q^2\right)$$

eşitliğini yazabilir (3.3) eşitliği (3.2) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$D_{n,q}(t^2,x) = \frac{1}{[n+2]_q[n+3]_q}\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(q;x)\left(1+q+(q+2q^2)[k]_q+q^3[k]_q^2\right)$$
$$= \frac{1+q}{[n+2]_q[n+3]_q}\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(q;x)+\frac{(q+2q^2)}{[n+2]_q[n+3]_q}\sum_{k=0}^{n}[k]_q p_{n,k}(q;x)$$
$$+\frac{q^3}{[n+2]_q[n+3]_q}\sum_{k=0}^{n}[k]_q{}^2 p_{n,k}(q;x)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada ikinci toplam $[n]_q$ üçüncü toplam ise $[n]_q^2$ ile çarpılıp bölündüğünde

$$D_{n,q}(t^2,x) = \frac{1}{[n+2]_q[n+3]_q}\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(q;x)\left(1+q+(q+2q^2)[k]_q+q^3[k]_q^2\right)$$
$$= \frac{1+q}{[n+2]_q[n+3]_q}\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(q;x)+\frac{(q+2q^2)[n]_q}{[n+2]_q[n+3]_q}\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q}{[n]_q} p_{n,k}(q;x)$$
$$+\frac{q^3[n]_q^2}{[n+2]_q[n+3]_q}\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q^2}{[n]_q^2} p_{n,k}(q;x)$$

elde edilir. Lemma 3.3.1 yardımıyla,

$$D_{n,q}(t^2,x) = \frac{1}{[n+2]_q[n+3]_q}\sum_{k=0}^{n}\left(1+q+(q+2q^2)[n]_q x\right.$$
$$\left.+q^3[n]_q^2\left(\frac{[n]_q-1}{[n]_q}x^2+\frac{1}{[n]_q}x\right)\right)$$
$$= \frac{1+q+q(1+q)^2x[n]_q+x^2q^3\left([n]_q\left([n]_q-1\right)\right)}{[n+2]_q[n+3]_q}$$

bulunur. Dolayısıyla teorem kanıtlanmış olur.

Teorem 3.3.2

0$< q \leq 1$ olsun. Her $f \in C[0,1]$için, $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde $\lim_{n\to\infty}\left\|D_{n,q_n}(f,x)-f(x)\right\| = 0$ olması için gerekli ve yeter koşul $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$ eşitliğinin sağlanmasıdır(Delibaş 2010).

Kanıt

$\Leftarrow$

$q_n \in C\ (0,1]$ için, $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$ olsun. $\lim_{n\to\infty}\left\|D_{n,q_n}(f,x)-f(x)\right\| = 0$ eşitliği gösterilecektir. Kanıt için Korovkin tipi teorem kullanılacaktır. O halde ilk önce $D_{n,q}$ operatörlerinin doğrusal ve pozitif olduğu gösterilmelidir.

i)

Doğrusallık: Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ve $f,g \in C[0,1]$ için

$$\begin{aligned}
D_{n,q}\left(\alpha f(t)+\beta g(t);x\right) &= [n+1]_q \sum_{k=0}^{n} q^{-k} P_{n,k}(q;x) \int_0^1 \left(\alpha f(t)+\beta g(t)\right) P_{n,k}(q;qt)\, d_q t\Big) \\
&= [n+1]_q \sum_{k=0}^{n} q^{-k} P_{n,k}(q;x) \left(\alpha \int_0^1 f(t) P_{n,k}(q;qt)\, d_q t \right. \\
&\quad \left. +\, \beta \int_0^1 g(t) P_{n,k}(q;qt)\, d_q t \right) \\
&= \alpha\, [n+1]_q \sum_{k=0}^{n} q^{-k} P_{n,k}(q;x) \int_0^1 f(t) P_{n,k}(q;qt)\, d_q t \\
&\quad + \beta\, [n+1]_q \sum_{k=0}^{n} q^{-k} P_{n,k}(q;x) \int_0^1 g(t) P_{n,k}(q;qt)\, d_q t \\
&= \alpha D_{n,q}(f;x) + \beta D_{n,q}(g;x)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlandığından $(D_{n,q})$ operatörü açıkça doğrusal bir operatördür.

ii)

Pozitiflik: Her $x \in [0,1]$ ve $0 < q \leq 1$ için,

$$D_{n,q}(f\,;x) = [n+1]_q \sum_{k=0}^{n} q^{-k} P_{n,k}(q;x) \int_0^1 f(t) P_{n,k}(q;qt)\, d_q t$$

operatöründe

$[n+1]_q q^{-k} x^k (1-x)_q^{n-k} \geq 0$ olduğu açıktır. Ayrıca $t \in [0,1]$ için

$P_{n,k}(q;qt) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (qt)^k\ (1-qt)^{n-k} \geq 0$

ve $f \geq 0$ ise $f(t) \geq 0$ olacağından,

$\int_0^1 f(t) P_{n,k}(q;qt) d_q t \geq 0$ olur. O halde $D_{n,q}(f\,;x) \geq 0$ olup $\left(D_{n,q}\right)$ operatörü pozitif bir operatördür. O halde Korovkin teoreminden her

$f \in C[0,1]$ için $D_{n,q}(f;x)$ nın $f(x)$'e düzgün yakınsak olması için,

$$D_{n,q}(t^v\,;x) \rightrightarrows x^v, \qquad v = 0,1,2 \tag{3.4}$$

yakınsaklığının sağlanması gerekir. Ayrıca $q_n \to 1$ ise $[n]_{q_n} \to \infty$ ve $s = 1,2,3$ için $\lim_{n\to\infty} \frac{[n+s]_q}{[n]_q} = 1$ sağlanır. Teorem 3.3.1 deki

i) $D_{n,q}(1\,;x) = 1$

ii) $D_{n,q}(t\,;x) = \dfrac{1 + qx[n]_q}{[n+2]_q}$

iii) $D_{n,q}(\,t^2\,;x\,) = \dfrac{1 + q + (1+q)^2 qx[n]_q + \ q^3 x^2 [n]_q\,([n]_q - 1)}{[n+2]_q [n+3]_q}$

eşitliklerinde $q = (q_n)$ alınırsa,

$D_{n,q}(1\,;x)$ operatör dizisi 1'e

$D_{n,q}(t\,;x)$ operatör dizisi x'e

$D_{n,q}(t^2;x\,)$ operatör dizisi x^2 ye

yakınsar. Dolayısıyla Korovkin teoreminden $D_{n,q}(f;x) \rightrightarrows f(x)$ sağlanır.

$(\Longrightarrow)$

Diğer taraftan her $f \in C[0,1]$ için $D_{n,q}(f;x) \rightrightarrows f(x)$ düzgün yakınsaklık sağlansın. $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için (q_n) dizisinin limitinin 1 olmadığı kabul edilsin. O halde (q_n) dizisinin öyle bir (q_{n_k}) alt dizisi vardır ki $q_{n_k} \to q_0 \in (0,1)$, $(k \to \infty)$ sağlanmalıdır. Buradan

$(\,k \to \infty)$ için $\frac{1}{[n_k+s]_{q_{n_k}}} = \frac{1-q_{n_k}}{1-(q_n)^{n_n+s}} \to (1-q_0)$,$(s = 0,1,2,3)$ sağlanır.

Şimdi $n = \ n_k$, $q = \ q_{n_k}$ seçimiyle;

$D_{n,q}(t^2;x) \to x(1-{q_0}^2)(1+q_0)q_0 + x^2 {q_0}^4 \nrightarrow x^2$, $(\,k \to \infty)$ olur. Bu durum $D_{n,q}(f;x) \rightrightarrows f(x)$ düzgün yakınsaklık kabülüyle çelişir. O halde $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$ olmalıdır.

3.4 q –SZASZ –MIRAKJAN OPERATÖRLERİ

Bu kesimde q - Szasz-Mirakjan operatörlerinin tanımı, yaklaşım özellikleri verilecektir.

Tanım 3.4.1

e^z üstel fonksiyonunun q - genelleşmesi

$$e(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{[k]_q!} = \frac{1}{(1-(1-q)z)_q^{\infty}}, \quad |z| < \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1,$$

ve

$$E(z) = \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 + (1-q)q^j z\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (1-(1-q)z)_q^{\infty}, \quad |q| < 1$$

olarak iki farklı şekilde ifade edilir.

Tanım 3.4.2.

$q \in (0,1),\ n \in \mathrm{N}$ ve $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $q -$ Szasz-Mirakjan operatörleri

$$S_{n,q}(f;x) = \frac{1}{E([n]_q x)} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-2}[n]_q}\right) q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n]_q^k x^k}{[k]_q!} \tag{3.5}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-2}[n]_q}\right) s_{nk}(q;x)$$

şeklinde tanımlanır(Mahmudov 2010). Burada

$$s_{n,k}(q;x) = \frac{1}{E([n]_q x)} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n]_q^k x^k}{[k]_q!}, \quad n = 1,2,\dots \tag{3.6}$$

olup ve açıktır ki $S_{n,q}$ operatörü doğrusal ve pozitiftir(Aral and Gupta 2006).

Lemma 3.4.1.

(3.5) ile tanımlı $q-$ Szasz-Mirakjan operatörleri

$$S_{n,q}(t^{m+1};x)=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{x}{q^{2j-m-1}[n]_q^{m-j}}S_{n,q}\left(t^j;x\right) \tag{3.7}$$

rekürans formülü geçerlidir.

Kanıt

Kanıt için

(3.5) da$[k]_q=[k-1]_q+q^{k-1}$ eşitliği kullanılırsa

$$S_{n,q}(t^{m+1};x)=\frac{1}{E([n]_qx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[k]_q^{m+1}}{q^{(k-2)(m+1)}[n]_q^{m+1}}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{[n]_q^k x^k}{[k]_q!}$$

$$=\frac{1}{E([n]_qx)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[k]_q^{m+1}}{q^{(k-2)m}[n]_q^{m}}q^{\frac{k(k-1)}{2}-k+1}\frac{[n]_q^{k-1} x^k}{[k-1]_q!}$$

$$=\frac{1}{E([n]_qx)}\sum_{k=1}^{\infty}q\frac{\left([k-1]_q+q^{k-1}\right)^n}{q^{(k-2)m}[n]_q^{m}}q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}}\frac{[n]_q^{k-1} x^k}{[k-1]_q!}$$

$$=\frac{q}{E([n]_qx)}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}q^{(k-1)(m-j)}[k-1]_q^j\frac{1}{q^{(k-2)m}[n]_q^{m}}q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}}\frac{[n]_q^{k-1} x^k}{[k-1]_q!}$$

$$S_{n,q}(t^{m+1};x)=\frac{q}{E([n]_qx)}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{1}{q^{2j-m}[n]_q^{m-j}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[k-1]_q^j}{q^{(k-3)j}[n]_q^j}q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}}\frac{[n]_q^{k-1} x^k}{[k-1]_q!}$$

$$=\frac{q}{E([n]_qx)}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{x}{q^{2j-m}[n]_q^{m-j}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[k]_q^j}{q^{(k-3)j}[n]_q^j}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{[n]_q^{k} x^k}{[k]_q!}$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{x}{q^{2j-m}[n]_q^{m-j}}S_{n,q}\left(t^j;x\right)$$

eşitligi elde edilir.

Lemma 3.4.2.

$q \in (0,1)$ için,

i) $S_{n,q}(1;x) = 1$

ii) $S_{n,q}(t;x) = qx$

iii) $S_{n,q}(t^2;x) = qx^2 + \frac{q^2}{[n]_q}x$

iv) $S_{n,q}(t^3;x) = \frac{q^3x}{[n]_q^2} + (2q^2+q)\frac{x^2}{[n]_q} + x^3$

v) $S_{n,q}(t^4;x) = \frac{q^4x}{[n]_q^3} + (3q^3+3q^2+q)\frac{x^2}{[n]_q^2} + \left(3q+2+\frac{1}{q}\right)\frac{x^3}{[n]_q} + \frac{x^4}{q^2}$

eşitlikleri geçerlidir(Mahmudov 2010).

Kanıt

i) (3.6) eşitliği kullanılarak

$$S_{n,q}(1;x) = \frac{1}{E([n]_q x)}\sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{[n]_q^k x^k}{[k]_q!}$$

$S_{n,q}(1;x) = 1$

olur.

ii) $$S_{n,q}(t;x) = \frac{1}{E([n]_q x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[k]_q}{q^{k-2}[n]_q}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{[n]_q^k x^k}{[k]_q!}$$

$$= \frac{1}{E([n]_q x)}\sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} q \frac{[n]_q^{k-1}x^k}{[k-1]_q!}$$

eşitliği geçerlidir. k yerine $k+1$ alınırsa yine (3.10) den

$S_{n,q}(t;x) = qx$

bulunur.

iii) (3.7) rekürans formülü kullanılırsa (i) ve (ii) den

$$S_{n,q}(t^2;x) = \frac{q^2x}{[n]_q}S_{n,q}(1;x) + xS_{n,q}(t;x)$$

$$= qx^2 + \frac{q^2}{[n]_q}x$$

olur.

iv) (i), (iii) den

$$S_{n,q}(t^3;x) = \frac{q^3x}{[n]_q^2}S_{n,q}(1;x) + 2\frac{qx}{[n]_q}S_{n,q}(t;x) + \frac{x}{q}S_{n,q}(t^2;x)$$

$$= \frac{q^3x}{[n]_q^2} + \frac{2q^2x^2}{[n]_q} + \frac{x}{q}\left(qx^2 + \frac{q^2}{[n]_q}x\right)$$

$$= \frac{q^3x}{[n]_q^2} + (2q^2+q)\frac{x^2}{[n]_q} + x^3$$

olur

v) (i), (iv) den

$$S_{n,q}(t^4;x) = \frac{q^4x}{[n]_q^3}S_{n,q}(1;x) + 3\frac{q^2x}{[n]_q}S_{n,q}(t;x) + 3\frac{x}{[n]_q}S_{n,q}(t^2;x) + \frac{x}{q^2}S_{n,q}(t^3;x)$$

$$S_{n,q}(t^4;x) = \frac{q^4x}{[n]_q^3} + 3\frac{q^3x^2}{[n]_q^2} + 3\frac{x}{[n]_q}\left(qx^2 + \frac{q^2x}{[n]_q}\right) + \frac{x}{q^2}\left(\frac{q^3x}{[n]_q^2} + (2q^2+q)\frac{x^2}{[n]_q} + x^3\right)$$

$$= \frac{q^4x}{[n]_q^3} + (3q^3+3q^2+q)\frac{x^2}{[n]_q^2} + \left(3q+2+\frac{1}{q}\right)\frac{x^3}{[n]_q} + \frac{x^4}{q^2}$$

bulunur. Bu da kanıtı tamamlar.

Lemma 3.4.3

(q_n), her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < q_n < 1$, $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$ve $\lim_{n\to\infty} q_n^n = a$ olacak şekilde bir dizi olsun.

Bu durumda her $x \in [0,\infty)$ için,

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}S_{n,q_n}(t-x;x) = (a-1)x \tag{3.8}$$

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}S_{n,q_n}((t-x)^2;x) = (a-1)x^2 + x \tag{3.9}$$

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}^2S_{n,q_n}((t-x)^4;x) = 3x^2 + 6(1-a)x^3 + 3(1-a)^2x^4 \tag{3.10}$$

eşitlikleri sağlanır.

Kanıt

Lemma3.4.2 (i), (v) den

$$S_{n,q_n}((t-x)^4;x) = S_{n,q}(t^4;x) - 4xS_{n,q}(t^3;x) + 6x^2S_{n,q}(t^2;x) - 4xS_{n,q}(1;x) + x^4$$

$$= \frac{q^4x}{[n]_q^3} + (3q^3+3q^2+q)\frac{x^2}{[n]_q^2} + \left(3q+2+\frac{1}{q}\right)\frac{x^3}{[n]_q} + \frac{x^4}{q^2}$$

$$-4x\left(\frac{q^3x}{[n]_q^2} + (2q^2+q)\frac{x^2}{[n]_q} + x^3\right) + 6x^2\left(qx^2 + \frac{q^2}{[n]_q}x\right) - 4qx^4 + x^4$$

$$S_{n,q_n}((t-x)^4;x) = \frac{q^4x}{[n]_q^3} + (3q^2+q-q^3)\frac{x^2}{[n]_q^2} + \left(2+\frac{1}{q}-q-2q^2\right)\frac{x^3}{[n]_q}$$

$$+x^4\left(\frac{1}{q^2}+2q-3\right) \tag{3.11}$$

bulunur. Eşitliği kullanılarak $[n]_{q_n}(q_n-1) = q_n^n - 1$

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}S_{n,q_n}(t-x;x) = \lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}(q_n-1)x$$

$$= \lim_{n\to\infty}(q_n^n-1)x$$

$$= (a-1)x$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}S_{n,q_n}((t-x)^2;x) = \lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}\left((1-q_n)x^2 + \frac{q_n^2x}{[n]_{q_n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left((1-q_n)x^2 + q_n^2x\right)$$

$$= (a-1)x^2 + x$$

olacaktır (3.11) den

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}^2S_{n,q_n}((t-x)^4;x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{q_n^4x}{[n]_{q_n}} + (3q^2+q-q^3)\right)$$

$$+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{[n]_{q_n}(1-q_n^2)(2q_n+1)}{q_n}x^2 + \frac{[n]_{q_n}^2(1-q_n)^2(2q_n+1)}{q_n^2}x^4\right)$$

$$= 3x^2 + 6(1-a)x^3 + 3(1-a)^2x^4$$

bulunur. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

4. BÖLÜM

İKİ DEĞİŞKENLİ q −OPERATÖRLERLE YAKLAŞIM

4.1 İKİ DEĞİŞKENLİ q-BERNSTEIN POLİNOMLARI

Tanım 4.1.1

İki değişkenli q-Bernstein polinomu

$$B_{n_1,n_2}(f;q_1,q_2;x,y) = \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}},\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right)\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1}y^{k_2}$$

$$\times \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right) \quad (4.1)$$

şeklindedir(Barbosu 2000).

Tanım 4.1.2

$I^2 = [0,1]\text{x}[0,1]$, $R^{I^2} = \{f | f: I^2 \to R\}$, $f \in R^{I^2}$, $0 < q_1 < 1$, $0 < q_2 < 1$ olmak üzere

$$B_{n_1}^{x}(f;q_1,;x,y) = \sum_{k_1=0}^{n_1} f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}},y\right)\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right) \quad (4.2)$$

ve

$$B_{n_2}^{y}(f;q_2,;x,y) = \sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(x,\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right)\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right) \quad (4.3)$$

şeklindedir(Altın 2010)

Teorem 4.1.1

$B_{n_1}^x$, $B_{n_2}^y$ $C(I^2)$ üzerinde (4.1) ve (4.2) de tanımlanan operatörler olmak üzere her $f \in C(I^2)$ için $B_{n_1,n_2}: C(I^2) \to C(I^2)$ iki değişkenli q-Bernstein polinomu için

$B_{n_1}^x B_{n_2}^y = B_{n_2}^y B_{n_1}^x = B_{n_1,n_2}(f; q_1, q_2; x, y)$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt

Tanımdan;

$$
\begin{aligned}
B_{n_1}^x B_{n_2}^y(f; q_2; x, y) &= B_{n_1}^x \left(B_{n_2}^y(f; q_2; x, y)\right) \\
&= B_{n_1}^x \left(\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(x, \frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right) \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} (1 - q_2^{s_2} y) \right) \\
&= \sum_{k_2=0}^{n_2} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} (1 - q_2^{s_2} y)\, B_{n_1}^x \left(f\left(x, \frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right)\right) \\
&= \sum_{k_2=0}^{n_2} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} (1 - q_2^{s_2} y) \\
&\times \left(\sum_{k_1=0}^{n_1} f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}, \frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right) \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} (1 - q_1^{s_1} x) \right) \\
&= \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}, \frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right) \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1} y^{k_2} \\
&\times \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} (1 - q_1^{s_1} x) \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} (1 - q_2^{s_2} y)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
B_{n_2}^y B_{n_1}^x(f; q_1; x, y) &= B_{n_2}^y \left(B_{n_1}^x(f; q_1; x, y)\right) \\
&= B_{n_2}^y \left(\sum_{k_1=0}^{n_1} f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}, y\right) \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} (1 - q_1^{s_1} x) \right) \\
&= \sum_{k_1=0}^{n_1} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} (1 - q_1^{s_1} x)\, B_{n_2}^y \left(f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}, y\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n_1} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} \left(1 - q_1^{s_1} x\right)$$

$$\times \left(\sum_{k_1=0}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_2}}, \frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}} \right) \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} \left(1 - q_2^{s_2} y\right) \right)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_2}}, \frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}} \right) \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1} y^{k_2}$$

$$\times \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} \left(1 - q_1^{s_1} x\right) \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} \left(1 - q_2^{s_2} y\right)$$

elde edilir. İfadeler denk olduğundan kanıt tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.2

$e_{ij}: I^2 \to I^2$, $e_{ij}(x,y) = x^i y^j$, $i,j = 0,1,2$ test fonksiyonları olmak üzere, her $(x,y) \in I^2$ için

i) $B_{n_1,n_2}(e_{00}; q_1, q_2; x, y) = e_{00}(x,y)$

ii) $B_{n_1,n_2}(e_{10}; q_1, q_2; x, y) = e_{10}(x,y)$

iii) $B_{n_1,n_2}(e_{01}; q_1, q_2; x, y) = e_{01}(x,y)$

iv) $B_{n_1,n_2}(e_{11}; q_1, q_2; x, y) = e_{11}(x,y)$

v) $B_{n_1,n_2}(e_{20}; q_1, q_2; x, y) = e_{20}(x,y) + \dfrac{x(1-x)}{[n_1]_q}$

vi) $B_{n_1,n_2}(e_{02}; q_1, q_2; x, y) = e_{02}(x,y) + \dfrac{y(1-y)}{[n_2]_q}$

eşitlikleri sağlanır(Barbosu 2000).

Kanıt

i)

$B_{n_1,n_2}(e_{00}; q_1, q_2; x, y)$

$$= \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1} y^{k_2} \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} \left(1 - q_1^{s_1} x\right) \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} \left(1 - q_2^{s_2} y\right)$$

$$=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right\}\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right\}$$

$$=B_{n_1}(e_0;q_1;x)B_{n_2}(e_0;q_2;y)$$

$$=1.1=e_{00}(x,y)$$

ii)

$$B_{n_1,n_2}(e_{10};q_1,q_2;x,y)$$

$$=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1}y^{k_2}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right\}\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right\}$$

$$=B_{n_1}(e_1;q_1;x)B_{n_2}(e_0;q_2;y)$$

$$=x.1=x=e_{10}(x,y)$$

iii.

$$B_{n_1,n_2}(e_{01};q_1,q_2;x,y)=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1}y^{k_2}$$

$$\times\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right\}$$

$$\times\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right\}$$

$$=B_{n_1}(e_0;q_1;x)B_{n_2}(e_1;q_2;y)$$

$$=1.y=y=e_{01}(x,y)$$

iv.

$$B_{n_1,n_2}(e_{11};q_1,q_2;x,y)=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1}y^{k_2}$$

$$\times \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right\}$$

$$\times\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right\}$$

$$=B_{n_1}(e_1;q_1;x)B_{n_2}(e_1;q_2;y)$$

$$=x.y=e_{11}(x,y)$$

v.

$$B_{n_1,n_2}(e_{20};q_1,q_2;x,y)=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}\right)^2\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}x^{k_1}y^{k_2}$$

$$\times \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}\right)^2\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right\}$$

$$\times\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right\}$$

$$=B_{n_1}(e_2;q_1;x)B_{n_2}(e_0;q_2;y)$$

$$=\left(x^2+\frac{x(1-x)}{[n_1]_q}\right).1$$

$$=e_{20}(x,y)+\frac{x(1-x)}{[n_1]_q}$$

vi. Son olarak

$$B_{n_1,n_2}(e_{02};q_1,q_2;x,y)=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\left(\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right)^2\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}x^{k_1}y^{k_2}$$

$$\times \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right\}$$

$$\times\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\left(\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right)^2\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right\}$$
$$= B_{n_1}(e_0;q_1;x)B_{n_2}(e_2;q_2;y)$$
$$= 1.\left(y^2+\frac{y(1-y)}{[n_1]_q}\right)$$
$$= e_{20}(x,y)+\frac{y(1-y)}{[n_2]_q}$$

eşitliği geçerli olduğundan kanıt tamamlanmış olur.

4.2 İKİ DEĞİŞKENLİ q-BERNSTEİN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI

Tanım 4.2.1

$\alpha_n > 0,\ \beta_m > 0$ ve artan dizileri için $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{m\to\infty}\beta_m = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{[n]_{q_n}} = 0$ ve

$\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\beta_m}{[m]_{q_m}} = 0$ olarak tanımlansın.

$D_{\alpha_n\beta_m} = \{(x,y): 0 \le x \le \alpha_n, 0 \le y \le \beta_m\}$ olmak üzere

iki değişkenli q-Bernstein-Chlodowsky polinomu;

$$\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(f;x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n, \frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m\right)\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j$$
$$\times\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right) \tag{4.4}$$

şeklindedir. Burada

$$\breve{B}_n^{q_n}(f;x,y) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n, y\right)\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right) \tag{4.5}$$

$$\breve{B}_m^{q_m}(f;x,y) = \sum_{j=0}^{m} f\left(x, \frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m\right)\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right) \tag{4.6}$$

şeklinde tanımlıdır(Büyükyazıcı 2009).

Teorem 4.2.1

$e_{ij}: I^2 \to I^2$ $i,j = 0,1,2$ $e_{ij}(x,y) = x^i y^j$, olmak üzere test fonksiyonları olsun. Bu durumda her $(x,y) \in I^2$ için

i) $\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(e_{00};x,y) = 1$

ii) $\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(e_{10};x,y) = x$

iii) $\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(e_{01};x,y) = y$

iv) $\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(e_{20};x,y) = x^2 + \dfrac{x(\alpha_n - x)}{[n]_{q_n}}$

v) $\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(e_{02};x,y) = y^2 + \dfrac{y(\beta_m - y)}{[m]_{q_m}}$

eşitlikleri geçerlidir(Büyükyazıcı 2009).

Kanıt

i)

Polinomun tanımından kolayca

$$\begin{aligned}
\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(e_{00};x,y) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m} \left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k \left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j \prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1 - q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right) \prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1 - q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right) \\
&= \left\{\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k \prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1 - q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\right\} \left\{\sum_{j=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m} \left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j \prod_{\square_2=0}^{m-j-1}\left(1 - q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\right\} \\
&= \breve{B}_n^{q_n}(e_0;x)\breve{B}_m^{q_m}(e_0;y) \\
&= 1.1 = 1
\end{aligned}$$

bulunur

ii)

e_{10} hesap yapılırsa

$$\begin{aligned}
\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(e_{10};x,y) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}} \alpha_n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m} \left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k \left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j \\
&\times \prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1 - q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right) \prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1 - q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)
\end{aligned}$$

$$= \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}} \alpha_n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{\alpha_n} \right)^k \prod_{s_1=0}^{n-k-1} \left(1 - q_n^{s_1} \frac{x}{\alpha_n} \right) \right\}$$

$$\times \left\{ \sum_{j=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m} \left(\frac{y}{\beta_m} \right)^j \prod_{s_2=0}^{m-j-1} \left(1 - q_m^{s_2} \frac{y}{\beta_m} \right) \right\}$$

$$= \breve{B}_n^{q_n}(e_1; x) \breve{B}_m^{q_m}(e_0; y)$$

$$= x.1 = x$$

eşitliğine ulaşılır.

iii)

Benzer şekilde

$$\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(e_{01}; x, y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}} \beta_m \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m} \left(\frac{x}{\alpha_n} \right)^k \left(\frac{y}{\beta_m} \right)^j$$

$$\times \prod_{s_1=0}^{n-k-1} \left(1 - q_n^{s_1} \frac{x}{\alpha_n} \right) \prod_{s_2=0}^{m-j-1} \left(1 - q_m^{s_2} \frac{y}{\beta_m} \right)$$

$$= \left\{ \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{\alpha_n} \right)^k \prod_{s_1=0}^{n-k-1} \left(1 - q_n^{s_1} \frac{x}{\alpha_n} \right) \right\}$$

$$\times \left\{ \sum_{j=0}^{m} \frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}} \beta_m \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m} \left(\frac{y}{\beta_m} \right)^j \prod_{s_2=0}^{m-j-1} \left(1 - q_m^{s_2} \frac{y}{\beta_m} \right) \right\}$$

$$= \breve{B}_n^{q_n}(e_0; x) \breve{B}_m^{q_m}(e_1; y)$$

$$= 1.y = y$$

olduğu kolayca bulunur.

iv)

$$\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(e_{20}; x, y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}} \alpha_n \right)^2 \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m} \left(\frac{x}{\alpha_n} \right)^k \left(\frac{y}{\beta_m} \right)^j$$

$$\times \prod_{s_1=0}^{n-k-1} \left(1 - q_n^{s_1} \frac{x}{\alpha_n} \right) \prod_{s_2=0}^{m-j-1} \left(1 - q_m^{s_2} \frac{y}{\beta_m} \right)$$

$$= \left\{ \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}} \alpha_n \right)^2 \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{\alpha_n} \right)^k \prod_{s_1=0}^{n-k-1} \left(1 - q_n^{s_1} \frac{x}{\alpha_n} \right) \right\}$$

$$\times \left\{ \sum_{j=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m} \left(\frac{y}{\beta_m} \right)^j \prod_{s_2=0}^{m-j-1} \left(1 - q_m^{s_2} \frac{y}{\beta_m} \right) \right\}$$

$$= \breve{B}_n^{q_n}(e_2;x)\breve{B}_m^{q_m}(e_0;y)$$

$$= \left(x^2 + \frac{x(\alpha_n - x)}{[n]_{q_n}}\right).1$$

$$= \left(x^2 + \frac{x(\alpha_n - x)}{[n]_{q_n}}\right)$$

eşitliği bulunur.

v-

Son olarak

$$\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(e_{02};x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m\right)^2 \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m} \left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k \left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j$$

$$\times \prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1 - q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right) \prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1 - q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)$$

$$= \left\{\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k \prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1 - q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\right\}$$

$$\times \left\{\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m\right)^2 \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m} \left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j \prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1 - q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\right\}$$

$$= \breve{B}_n^{q_n}(e_0;x)\breve{B}_m^{q_m}(e_2;y)$$

$$= 1.\left(y^2 + \frac{y(\beta_m - y)}{[m]_{q_m}}\right)$$

$$= y^2 + \frac{y(\beta_m - y)}{[m]_{q_m}}$$

eşitliği gösterildiğinden kanıt tamamlanmış olur

Teorem 4.2.2

$\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(f;x,y)$ doğrusal pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(e_{00};x,y) - 1\right\|_{C(D_{\alpha_n\beta_m})} = 0$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(e_{10};x,y) - x\right\|_{C(D_{\alpha_n\beta_m})} = 0$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(e_{01};x,y) - y\right\|_{C(D_{\alpha_n\beta_m})} = 0$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(t^2 + \tau^2;x,y) - (x^2 + y^2)\right\|_{C(D_{\alpha_n\beta_m})} \le a\frac{\alpha_n}{[n]_{q_n}} + b\frac{\beta_m}{[m]_{q_m}}$$

koşullarını sağlıyorsa Tanım 4.2.1 de tanımlanan $D_{\alpha_n\beta_m}$ bölgesinde sürekli, gerçel değerli ve tüm $\mathbb{R}^2$ de sınırlı her bir f fonksiyonu için

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(f;x,y)-f\right\|_{C(D_{\alpha_n\beta_m})}=0$$

ifadesi gerçeklenir(Büyükyazıcı 2009).

4.3 İKİ DEĞİŞKENLİ KING TİPLİ q −BERNSTEIN POLİNOMLARI

Bu bölümde iki değişkenli King tipli q −Bernstein polinomlarının tanımı verilerek Volkav tipli teorem yardımıyla yaklaşım özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.3.1

$I^2=[0,1]\times[0,1]$,$f: I^2\to\mathbb{R}$ olmak üzere $0\le r_{r_1}(x)\le 1$,$0\le r_{r_2}(y)\le 1$,
$0<q_1<1$ ve $0<q_2<1$ olsun.

$$r_{n_1}(x)=x+\frac{x}{2[n_1]_q}-\frac{1}{2[n_1]_q}\text{ve}r_{n_2}(y)=y+\frac{y}{2[n_2]_q}-\frac{1}{2[n_2]_q}$$

şeklinde gösterilsin. $V_{n_1}^x(f;q_1;x,y)$ ve $V_{n_2}^y(f;q_2;x,y)$ operatörleri

$$V_{n_1}^x(f;q_1;x,y)=\sum_{k_1=0}^{n_1}f\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q},y\right)\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\tag{4.7}$$

şeklinde tanımlanır(Altın 2010).

$$V_{n_2}^y(f;q_2;x,y)=\sum_{k_2=0}^{n_2}f\left(x,\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q},y\right)\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q\left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)\tag{4.8}$$

Uyarı 4.3.1

$V_{n_1}^x(f;q_1;x,y)$ için

i) $V_{n_1}^x(1;q_1;x,y)=1$

ii) $V_{n_1}^{x}(t;q_1;x,y)=r_{n_1}(x)$

iii) $V_{n_1}^{x}(t^2;q_1;x,y)=x^2$

eşitlikleri geçerlidir. Benzer şekilde $V_{n_2}^{y}(f;q_2;x,y)$ için

iv) $V_{n_2}^{y}(1;q_2;x,y)=1$

v) $V_{n_2}^{y}(t;q_2;x,y)=r_{n_2}(y)$

vi) $V_{n_2}^{y}(t^2;q_2;x,y)=y^2$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım 4.3.2

$I^2=[0,1]\times[0,1]$ ve $V_{n_1,n_2}:C(I^2)\to C(I^2)$ olmak üzere

iki değişkenli King tipli q −Bernstein polinomu

$$V_{n_1,n_2}(f;q_1,q_2;x,y)=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q},\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\right)\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q\left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}$$
$$\times\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)\quad(4.9)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.3.1

$V_{n_1}^{x},V_{n_2}^{y}$ $C(I^2)$ üzerinde tanımlı operatörler olmak üzere her $f\in C(I^2)$ için

$$V_{n_1}^{x}V_{n_2}^{y}(f;q_2;x,y)=V_{n_2}^{y}V_{n_1}^{x}(f;q_1;x,y)\qquad(4.10)$$

eşitliği geçerlidir(Altın 2010).

Kanıt

Operatörün tanımından

$$V_{n_1}^{x}V_{n_2}^{y}(f;q_2;x,y)=V_{n_1}^{x}\left(V_{n_2}^{y}(f;q_2;x,y)\right)$$
$$=V_{n_1}^{x}\left(\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(x,\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\right)\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q\left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)\right)$$

$$= \sum_{k_2=0}^{n_2} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2} \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} \left(1 - q_2^{s_2} r_{n_2}(y)\right) V_{n_1}^x \left(f\left(x, \frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\right)\right)$$

$$= \sum_{k_2=0}^{n_2} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2} \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} \left(1 - q_2^{s_2} r_{n_2}(y)\right)$$

$$\times \left(\sum_{k_1=0}^{n_1} f\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}, \frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\right) \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1} \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} \left(1 - q_1^{s_1} r_{n_1}(x)\right)\right)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}, \frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\right) \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1} \left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}$$

$$\times \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} \left(1 - q_1^{s_1} r_{n_1}(x)\right) \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} \left(1 - q_2^{s_2} r_{n_2}(y)\right) (4.11)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde

$$V_{n_2}^y V_{n_1}^x (f; q_1; x, y) = V_{n_2}^y \left(V_{n_1}^x (f; q_1; x, y)\right)$$

$$= V_{n_2}^y \left(\sum_{k_1=0}^{n_1} f\left(, \frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}, y\right) \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1} \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} \left(1 - q_1^{s_1} r_{n_1}(x)\right)\right)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n_1} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1} \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} \left(1 - q_1^{s_1} r_{n_1}(x)\right) V_{n_2}^y \left(f\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}, y\right)\right)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n_1} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1} \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} \left(1 - q_1^{s_1} r_{n_1}(x)\right)$$

$$\times \left(\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}, \frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\right) \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2} \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} \left(1 - q_2^{s_2} r_{n_2}(y)\right)\right)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}, \frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\right) \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1} \left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}$$

$$\times \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} \left(1 - q_1^{s_1} r_{n_1}(x)\right) \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} \left(1 - q_2^{s_2} r_{n_2}(y)\right) \qquad (4.12)$$

olacaktır. (4.11) ve (4.12) ifadeleri birbirine denk olduğundan teoremin kanıtı tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.2

$e_{i,j}: I^2 \to I^2$, $e_{ij}: (x,y) = x^i y^j$ ve $i,j = 0,1,2$ test fonksiyonları olmak üzere, her $(x,y) \in I^2$ için

i) $V_{n_1,n_2}(e_{00}; q_1, q_2; x, y) = e_{00}(x,y)$ (4.13)

ii) $V_{n_1,n_2}(e_{10}; q_1, q_2; x, y) = r_{n_1}(x)$ (4.14)

iii) $V_{n_1,n_2}(e_{01}; q_1, q_2; x, y) = r_{n_2}(y)$ (4.15)

iv) $V_{n_1,n_2}(e_{11}; q_1, q_2; x, y) = \left(r_{n_1}(x)\right)\left(r_{n_2}(y)\right)$ (4.16)

v) $V_{n_1,n_2}(e_{20}; q_1, q_2; x, y) = e_{20}(x,y) = x^2$ (4.17)

vi) $V_{n_1,n_2}(e_{02}; q_1, q_2; x, y) = e_{02}(x,y) = y^2$ (4.18)

eşitlikleri sağlanır(Altın 2010).

Kanıt

i)

e_{00}'ın operatörde yerine yazılmasıyla

$$V_{n_1,n_2}(e_{00}; q_1, q_2; x, y) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1} \left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}$$

$$\times \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} \left(1 - q_1^{s_1} r_{n_1}(x)\right) \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} \left(1 - q_2^{s_2} r_{n_2}(y)\right)$$

$$= \left\{ \sum_{k_1=0}^{n_1} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1} \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} \left(1 - q_1^{s_1} r_{n_1}(x)\right) \right\}$$

$$\times \left\{ \sum_{k_2=0}^{n_2} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2} \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} \left(1 - q_2^{s_2} r_{n_2}(y)\right) \right\}$$

$$= V_{n_1}(e_0;q_1;x)V_{n_2}(e_0;q_2;y)$$
$$= 1.1 = 1 = e_{00}(x,y)$$

eşitliğine ulaşılır.

ii)

e_{10} fonksiyonunun operatörde yerine yazılmasıyla

$$V_{n_1,n_2}(e_{10};q_1,q_2;x,y) = \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q\left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}$$
$$\times\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)$$
$$=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\right\}$$
$$\times\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q\left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)\right\}$$
$$= V_{n_1}(e_1;q_1;x)V_{n_2}(e_0;q_2;y)$$
$$= r_{n_1}(x).1 = r_{n_1}(x)$$

eşitliğine ulaşılır.

iii)

Operatörün tanımından

$$V_{n_1,n_2}(e_{01};q_1,q_2;x,y) = \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q\left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}$$
$$\times\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)$$
$$=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\right\}$$
$$\times\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q\left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)\right\}$$
$$= V_{n_1}(e_0;q_1;x)V_{n_2}(e_1;q_2;y)$$
$$= 1.r_{n_2}(y) = r_{n_2}(y)$$

eşitliğine kolayca ulaşılır.

iv)

e_{11}fonksiyonunun operatörde yerine yazılmasıyla

$$V_{n_1,n_2}(e_{11};q_1,q_2;x,y) = \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q\left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}$$

$$\times\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)$$

$$=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\right\}$$

$$\times\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q\left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)\right\}$$

$$=V_{n_1}(e_1;q_1;x)V_{n_2}(e_1;q_2;y)$$

$$=\left(r_{n_1}(x)\right)\left(r_{n_2}(y)\right)$$

bulunur.

v)

Benzer şekilde

$$V_{n_1,n_2}(e_{20};q_1,q_2;x,y) = \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}\right)^2\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q\left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}$$

$$\times\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)$$

$$=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}\right)^2\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\right\}$$

$$\times\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)\right\}$$

$$=V_{n_1}(e_2;q_1;x)V_{n_2}(e_0;q_2;y)$$

$$=x^2.1=e_{20}(x,y)$$

eşitliğine ulaşılır.

vi)

Son olarak

$$V_{n_1,n_2}(e_{02};q_1,q_2;x,y)=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}\right)^2\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q\left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}$$

$$\times\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)$$

$$=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\right\}$$

$$\times\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}\right)^2\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q\left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)\right\}$$

$$=V_{n_1}(e_0;q_1;x)V_{n_2}(e_2;q_2;y)$$

$$=1.(y^2)=e_{02}(x,y)$$

eşitliği de gösterildiğinden kanıt tamamlanmış olur.

4.4 İKİ DEĞİŞKENLİ q −BLEIMANN, BUTZER VE HAHN OPERATÖRLERİ

İki değişkenli Bleimann, Butzer Hahn operatörleri (Altın et al. 2005) tarafından tanımlanmış ve bu operatörlerin yaklaşım özellikleri elde edilmiştir. Kısalık olması bakımından Bleimann, Butzer Hahn operatörleri BBH şeklinde gösterilecektir. İki değişkenli q −BBH operatörlerinin yaklaşım özellikleri verilecektir. Yaklaşım hızı; süreklilik modülü ve Lipschitz tipli maksimal fonksiyonlar ile araştırılacaktır.

Tanım 4.4.1

$\mathbb{R}_+^2=[0,\infty)\times[0,\infty)$, $f:\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}$ve $0\le q_{n_1},q_{n_2}\le 1$ olsun.

$$l_{n_1,n_2}(x)=\prod_{s=0}^{n_1-1}\left(1+q_{n_1}^s x\right)\;\; ve\; l_{n_1,n_2}(y)=\prod_{s=0}^{n_2-1}\left(1+q_{n_2}^s x\right)\;(4.19)$$

olmak üzere iki değişkenli q −BBH operatörü

$$L_{n_1,n_2}\left(f;q_{n_1},q_{n_2},x,y\right)=\frac{1}{l_{n_1,n_2}(x)}\frac{1}{l_{n_1,n_2}(y)}\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}f\left(\frac{[k_1]_{q_{n_1}}}{[n_1-k_1+1]_{q_{n_1}}q_{n_1}^{k_1}},\frac{[k_2]_{q_{n_2}}}{[n_2-k_2+1]_{q_{n_2}}q_{n_2}^{k_2}}\right)$$

$$\times q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}}q_{n_2}^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_{n_1}}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_{n_2}}x^{k_1}y^{k_2}(4.20)$$

şeklinde tanımlansın(Ersan Çevik 2008).

dir. Bu operatörün doğrusal ve pozitif olduğu açıktır. $q_{n_1} = q_{n_2} = 1$ alınması durumunda (Altın et al.2005) tarafından tanımlanan aşağıdaki iki değişkenli Bleimann-Butzer ve Hahn operatörüne dönüşecektir:

$$l_{n_1,n_2}(f;x,y) = \frac{1}{(1+x)^{n_1}}\frac{1}{(1+y)^{n_2}}\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(\frac{k_1}{n_1 - k_1 + 1}, \frac{k_2}{n_2 - k_2 + 1}\right)$$
$$\times \binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2} x^{k_1} y^{k_2}. \tag{4.21}$$

Şimdi operatörün Volkov teoremini sağladığı gösterilirken kullanılan aşağıdaki eşitlikler Lemma ile verilecektir.

Lemma 4.4.1

$$A_{n_1}^{x}\left(f;q_{n_1},x,y\right) = \frac{1}{l_{n_1,q_{n_1}}(x)}\sum_{k_1=0}^{n_1} f\left(\frac{[k_1]_{q_{n_1}}}{[n_1 - k_1 + 1]_{q_{n_1}} q_{n_1}^{k_1}}, y\right) q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1}$$

$$B_{n_2}^{y}\left(f;q_{n_2},x,y\right) = \frac{1}{l_{n_2,q_{n_2}}(y)}\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(x, \frac{[k_2]_{q_{n_2}}}{[n_2 - k_2 + 1]_{q_{n_2}} q_{n_2}^{k_2}}\right) q_{n_2}^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{n_2}} y^{k_2}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

(4.20) de tanımlanan L_{n_1,n_2} operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) $L_{n_1,n_2}\left(f;q_{n_1},q_{n_2},x,y\right) = A_{n_1}^{x}\left(B_{n_2}^{y}\left(f;q_{n_2},x,y\right)\right)$,

ii) $L_{n_1,n_2}\left(f;q_{n_1},q_{n_2},x,y\right) = B_{n_2}^{y}\left(A_{n_1}^{x}\left(f;q_{n_1},x,y\right)\right)$,

eşitlikleri sağlanır(Ersan Çevik 2008).

Kanıt

Operatörün tanımından

i)

$A_{n_1}^{x}\left(B_{n_2}^{y}\left(f;q_{n_2},x,y\right)\right)$

$$= A_{n_1}^x\left(\frac{1}{l_{n_2,q_{n_2}}(y)}\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(x,\frac{[k_2]_{q_{n_2}}}{[n_2-k_2+1]_{q_{n_2}}q_{n_2}^{k_2}}\right)q_{n_2}^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_{n_2}} y^{k_2}\right)$$

$$= \frac{1}{l_{n_2,q_{n_2}}(y)}\sum_{k_2=0}^{n_2} A_{n_1}^x\left(f\left(x,\frac{[k_2]_{q_{n_2}}}{[n_2-k_2+1]_{q_{n_2}}q_{n_2}^{k_2}}\right),q_{n_1},x,y\right)q_{n_2}^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_{n_2}} y^{k_2}$$

$$= \frac{1}{l_{n_2,q_{n_2}}(y)}\sum_{k_2=0}^{n_2} q_{n_2}^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_{n_2}} y^{k_2}\sum_{k_1=0}^{n_1}\frac{1}{l_{n_1,q_{n_1}}(x)}$$

$$\times f\left(\frac{[k_1]_{q_{n_1}}}{[n_1-k_1+1]_{q_{n_1}}q_{n_1}^{k_1}},\frac{[k_2]_{q_{n_2}}}{[n_2-k_2+1]_{q_{n_2}}q_{n_2}^{k_2}}\right)q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1}$$

$$= \frac{1}{l_{n_1,q_{n_1}}(x)}\frac{1}{l_{n_2,q_{n_2}}(y)}\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_{q_{n_1}}}{[n_1-k_1+1]_{q_{n_1}}q_{n_1}^{k_1}},\frac{[k_2]_{q_{n_2}}}{[n_2-k_2+1]_{q_{n_2}}q_{n_2}^{k_2}}\right)$$

$$\times q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}}q_{n_2}^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_{n_1}}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_{n_2}} x^{k_1}y^{k_2}$$

$$= L_{n_1,n_2}(f;q_{n_1},q_{n_2},x,y).$$

eşitliğine ulaşılır.

ii)'nin kanıtıda benzer şekilde yapılır.

Lemma 4.4.2

$i,j = 0,1,2$ olmak üzere $e_{\tilde{ij}}$: $\mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ iki boyutlu test fonksiyonu $e_{\tilde{ij}} = \left(\frac{x}{1+x}\right)^i\left(\frac{y}{1+y}\right)^j$ şeklinde tanımlansın. (4.20) de tanımlanan L_{n_1,n_2} doğrusal pozitif operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) $L_{n_1,n_2}(e_{\tilde{00}};q_{n_1},q_{n_2},x,y) = 1$,

ii) $L_{n_1,n_2}(e_{\tilde{10}};q_{n_1},q_{n_2},x,y) = \dfrac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}}\dfrac{x}{1+x}$

iii) $L_{n_1,n_2}(e_{\tilde{01}};q_{n_1},q_{n_2},x,y) = \dfrac{[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}}\dfrac{y}{1+y}$

iv) $L_{n_1,n_2}(e_{\tilde{20}};q_{n_1},q_{n_2},x,y) = \dfrac{[n_1]_{q_{n_1}}[n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2}q_{n_1}^2\dfrac{x^2}{(1+x)(1+q_{n_1}x)}$

$$+\frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}}\frac{x}{1+x}$$

v) $L_{n_1,n_2}\left(\tilde{e_{02}}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right) = \frac{[n_2]_{q_{n_2}}[n_2-1]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2} q_{n_2}^2 \frac{x^2}{(1+x)\left(1+q_{n_2}y\right)}$

$$+\frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}}\frac{y}{1+y}$$

eşitlikleri geçerlidir(Ersan Çevik 2008).

Kanıt

Operatörün tanımından

$$L_{n_1,n_2}\left(\tilde{e_{00}}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right) = \frac{1}{l_{n_1,q_{n_1}}(x)}\frac{1}{l_{n_2,q_{n_2}}(y)}\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} q_{n_2}^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} \times \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{n_2}}$$

eşitliği geçerlidir. Burada $0 \leq q \leq 1$ için

$$\sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k = \prod_{k=0}^{n-1}(1+q^k x) = l_{n,q}(x)$$

olduğundan (i) sağlanır(Andrews et al 1999).

ii)

Benzer şeklide

$$L_{n_1,n_2}\left(\tilde{e_{10}}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right) = \frac{1}{l_{n_1,q_{n_1}}(x)}\frac{1}{l_{n_2,q_{n_2}}(y)}\sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2} \frac{[k_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} q_{n_2}^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} \times \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{n_2}} x^{k_1} y^{k_2}$$

$$= \frac{1}{l_{n_1,q_{n_1}}(x)}\frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}}\sum_{k_1=1}^{n_1} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-1 \\ k_1-1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1}$$

$$= \frac{1}{l_{n_1,q_{n_1}}(x)}\frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}}\sum_{k_1=0}^{n_1-1} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1+1}$$

$$= \frac{1}{l_{n_1,q_{n_1}}(x)}\frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}}\sum_{k_1=0}^{n_1-1} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} \left(q_{n_1}x\right)^{k_1}$$

$$= \frac{x}{1+x}\frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}}\frac{1}{l_{n_1-1,q_{n_1}-1}(x)}\sum_{k_1=0}^{n_1-1} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}}$$

$$\times \left(q_{n_1}x\right)^{k_1}$$

$$=\frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}}\frac{x}{1+x} \quad ,$$

eşitliği gösterilebilir.

(iii) de $e_{\tilde{10}}$ yerine $e_{\tilde{01}}$ alınarak benzer şekilde yapılabilir.

iv)

Son olarak

$$L_{n_1,n_2}\left(e_{\tilde{20}}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right)$$

$$=\frac{1}{l_{n_1,q_{n_1}}(x)}\frac{1}{l_{n_2,q_{n_2}}(y)}\sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2}\frac{[k_1]_{q_{n_1}}^2}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} q_{n_2}^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{n_2}} x^{k_1}y^{k_2}$$

$$=\frac{1}{l_{n_1,q_{n_1}}(x)}\sum_{k_1=1}^{n_1}\frac{q_{n_1}[k_1-1]_{q_{n_1}}+1}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2}\frac{[n_1]!_{q_{n_1}}}{[k_1-1]!_{q_{n_1}}[n_1-k_1]!_{q_{n_1}}} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} x^{k_1}$$

$$=\frac{1}{l_{n_1,q_{n_1}}(x)}\frac{[n_1-1]_{q_{n_1}}[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2}\sum_{k_1=1}^{n_1} q_{n_1}\begin{bmatrix} n_1-2 \\ k_1-2 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} x^{k_1}$$

$$+\frac{1}{l_{n_1,q_{n_1}}(x)}\frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2}\sum_{k_1=1}^{n_1}\begin{bmatrix} n_1-1 \\ k_1-1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} x^{k_1}$$

$$=\frac{x^2}{l_{n_1,q_{n_1}}(x)} {q_{n_1}}^2 \frac{[n_1-1]_{q_{n_1}}[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2}\sum_{k_1=0}^{n_1-2}\begin{bmatrix} n_1-2 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \left(q_{n_1}^2 x\right)^{k_1}$$

$$+\frac{x}{l_{n_1,q_{n_1}}(x)}\frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\begin{bmatrix} n_1-1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \left(q_{n_1}x\right)^{k_1}$$

$$=\frac{[n_1]_{q_{n_1}}[n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} {q_{n_1}}^2 \frac{x^2}{(1+x)\left(1+q_{n_1}x\right)}+\frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2}\frac{x}{1+x}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt benzer olduğundan v) ifadesinin kanıtına yer verilmemiştir.

$\mathbb{R}_+^2$ üzerinde tanımlı sınırlı ve sürekli fonksiyonlar uzayı $C_B(\mathbb{R}_+^2)$ şeklinde gösterilsin. Bu uzaydaki norm

$$\|f\|_{C_B(\mathbb{R}_+^2)} = \sup_{x,y\geq 0} |f(x,y)|$$

ile tanımlıdır.

Her $x, y \in \mathbb{R}_+$ için

$$|f(x)-f(y)| \leq \omega\left(\left|\frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}\right|\right)$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar uzayına H_ω uzayı denir.

İki değişkenli q −BBH operatörlerinin düzgün yakınsaklığından bahsedebilmek için öncelikle $H_\omega(\mathbb{R}_+^2)$ uzayında iki değişkenli doğrusal pozitif operatörler içinde yaklaşımın sağlandığını göstermek gerekir. Bunun için öncelikle aşağıdaki teorem kanıtlanacaktır.

Teorem 4.4.1

$q = (q_{n_1})$ ve $q = (q_{n_2})$ dizileri

$0 < q_{n_1} \leq 1, 0 < q_{n_2} \leq 1$ ve $q_{n_1} \to 1\ (n_1 \to \infty), q_{n_2} \to 1\ (n_2 \to \infty)$

koşullarını sağlayan iki dizi olsun. Bu durumda $\tilde{e}_{ij}: \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ iki boyutlu test fonksiyonu $\tilde{e}_{ij} = \left(\frac{x}{1+x}\right)^i \left(\frac{y}{1+y}\right)^j$ şeklinde tanımlanmak üzere

$A_{n_1,n_2}: H_\omega(\mathbb{R}_+^2) \to C_B(\mathbb{R}_+^2)$ olan herhangi bir doğrusal pozitif operatör dizisi

i) $\lim\limits_{n_1,n_2\to\infty} \left\|A_{n_1,n_2}(\tilde{e}_{00}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - \tilde{e}_{00}\right\|_{C_B(\mathbb{R}_+^2)} = 0,$

ii) $\lim\limits_{n_1,n_2\to\infty} \left\|A_{n_1,n_2}(\tilde{e}_{10}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - \tilde{e}_{10}\right\|_{C_B(\mathbb{R}_+^2)} = 0,$

iii) $\lim\limits_{n_1,n_2\to\infty} \left\|A_{n_1,n_2}(\tilde{e}_{01}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - \tilde{e}_{01}\right\|_{C_B(\mathbb{R}_+^2)} = 0,$

iv) $\lim\limits_{n_1,n_2\to\infty} \left\|A_{n_1,n_2}(\tilde{e}_{20} + \tilde{e}_{02}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - \tilde{e}_{20} - \tilde{e}_{02}\right\|_{C_B(\mathbb{R}_+^2)} = 0$

koşullarını sağlıyorsa her $f \in H_\omega(\mathbb{R}_+^2)$ için

$\lim\limits_{n\to\infty} \left\|A_{n_1,n_2}(f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - f(x,y)\right\|_{C_B(\mathbb{R}_+^2)} = 0$

eşitliği sağlanır.

Kanıt

Her $f \in H_\omega(\mathbb{R}_+^2)$ ve her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyleki

$$\sqrt{\left(\frac{t}{1+t}-\frac{x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{s}{1+s}-\frac{y}{1+y}\right)^2} < \delta$$

için

$|f(t,s) - f(x,y)| < \varepsilon$

eşitsizliği sağlanır.

Ayrıca

$$\sqrt{\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y}\right)^2} \geq \delta$$

için ise

$$|f(t,s) - f(x,y)| \leq \frac{2M}{\delta^2}\left[\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y}\right)^2\right]$$

eşitsizliği sağlanır.

Dolayısıyla her $(t,s), (x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ için

$$|f(t,s) - f(x,y)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\left[\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y}\right)^2\right] \tag{4.22}$$

olduğu açıktır.

$A_{n_1 n_2}$ nin doğrusal ve pozitifliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\left|A_{n_1 n_2}(f; q_1, q_2, x, y) - f\right| \\
&= \left|A_{n_1,n_2}\big(f(t,s) - f(x,y) + f(x,y); q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\big) - f(x,y)\right| \\
&= \left|A_{n_1,n_2}\big(f(t,s) - f(x,y); q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\big) + f(x,y)\big(A_{n_1,n_2}(1; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - 1\big)\right| \\
&\leq A_{n_1,n_2}\big(|f(t,s) - f(x,y)|; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\big) + |f|\left|A_{n_1,n_2}\big(\tilde{e}_{00}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\big) - \tilde{e}_{00}\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|A_{n_1 n_2}(f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - f\right| \\
&\leq A_{n_1 n_2}\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\left[\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y}\right)^2\right]\right. \\
&\left. + |f||f|\left|A_{n_1,n_2}\big(\tilde{e}_{00}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\big) - \tilde{e}_{00}\right|\right) \\
&\leq (\varepsilon + M)\left|A_{n_1,n_2}\big(\tilde{e}_{00}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\big) - \tilde{e}_{00}\right| + \varepsilon \\
&+ \frac{2M}{\delta^2}\Big[\left|A_{n_1,n_2}\big(\tilde{e}_{20} + \tilde{e}_{02}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\big) - \tilde{e}_{20} + \tilde{e}_{02}\right| \\
&+ 2\left|A_{n_1,n_2}\big(\tilde{e}_{10}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\big) - \tilde{e}_{10}\right| + 2\left|A_{n_1,n_2}\big(\tilde{e}_{01}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\big) - \tilde{e}_{01}\right|\Big]
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Hipotezden teorem 4.4.2 de verilen koşullar uygulandığında

$$\lim_{n\to\infty} \left\|A_{n_1,n_2}\big(f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\big) - f(x,y)\right\|_{C_B(\mathbb{R}_+^2)} = 0$$

eşitsizliği gösterilmiş olur.

Şimdi iki değişkenli q −BBH operatörleri için bu teoremin doğruluğu gösterilecektir.

Teorem 4.4.2.

$q=\left(q_{n_1}\right)$ ve $q=\left(q_{n_2}\right)$ dizileri $0<q_{n_1}\leq 1, 0<q_{n_2}\leq 1$ ve $q_{n_1}\to 1\ (n_1\to\infty)$, $q_{n_2}\to 1\ (n_2\to\infty)$ koşullarını sağlayan iki dizi olsun. Eğer $\tilde{e}_{ij}=\left(\frac{x}{1+x}\right)^i\left(\frac{y}{1+y}\right)^j$ $i,j=0,1,2$ olmak üzere $L_{n_1,n_2}: H_\omega(\mathbb{R}_+^2)\to C_B(\mathbb{R}_+^2)$ doğrusal pozitif operatörler dizisi için

i) $\lim\limits_{n_1,n_2\to\infty}\left\|L_{n_1,n_2}\left(\tilde{e}_{00};q_{n_1},q_{n_2},x,y\right)-\tilde{e}_{00}\right\|_{C_B(\mathbb{R}_+^2)}=0,$ (4.23)

ii) $\lim_{n_1,n_2\to\infty}\left\|L_{n_1,n_2}\left(\tilde{e}_{10};q_{n_1},q_{n_2},x,y\right)-\tilde{e}_{10}\right\|_{C_B(\mathbb{R}_+^2)}=0,$ (4.24)

iii) $\lim\limits_{n_1,n_2\to\infty}\left\|L_{n_1,n_2}\left(\tilde{e}_{01};q_{n_1},q_{n_2},x,y\right)-\tilde{e}_{01}\right\|_{C_B(\mathbb{R}_+^2)}=0,$ (4.25)

iv) $\lim\limits_{n_1,n_2\to\infty}\left\|L_{n_1,n_2}\left(\tilde{e}_{20}+\tilde{e}_{02};q_{n_1},q_{n_2},x,y\right)-\tilde{e}_{20}+\tilde{e}_{02}\right\|_{C_B(\mathbb{R}_+^2)}=0$ (4.26)

koşulları sağlanıyorsa her $f\in H_\omega(\mathbb{R}_+^2)$ için

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|L_{n_1,n_2}\left(f;q_{n_1},q_{n_2},x,y\right)-f(x,y)\right\|_{C_B(\mathbb{R}_+^2)}=0$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt

Lemma 4.4.2 da elde edilen sonuçlar kullanılarak aşağıdaki sonuçlara kolaylıkla ulaşılabilir.

$L_{n_1,n_2}\left(\tilde{e}_{00};q_{n_1},q_{n_2},x,y\right)=1$

eşitliğinden

$\lim\limits_{n_1,n_2\to\infty}\left\|L_{n_1,n_2}\left(\tilde{e}_{00};q_{n_1},q_{n_2},x,y\right)-\tilde{e}_{00}\right\|_{C_B(\mathbb{R}_+^2)}=0$

olacağı açıktır. Ayrıca

$$\begin{aligned}\left\|L_{n_1,n_2}\left(\tilde{e}_{00};q_{n_1},q_{n_2},x,y\right)-\tilde{e}_{00}\right\|_{C_B} &= \sup_{x,y\geq 0}\left|\frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}}\frac{x}{1+x}-\frac{x}{1+x}\right| \\ &\leq \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}}-1\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. q −tam sayı tanımından

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}} = 1$$

olup (4.24) sağlanır. Simetri tanımından (4.25) de kolayca gösterilir.

Son olarak

$$\lim_{n_1,n_2\to\infty} \left\| L_{n_1,n_2}\left(\tilde{e}_{20}+\tilde{e}_{02}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right) - \tilde{e}_{20}+\tilde{e}_{02} \right\|_{C_B}$$

$$= \sup_{x,y\geq 0} \left| \frac{[n_1]_{q_{n_1}}[n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]^2_{q_{n_1}}} q_{n_1}{}^2 \frac{x^2}{(1+x)\left(1+q_{n_1}x\right)} + \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]^2_{q_{n_1}}} \frac{x}{1+x} \right.$$

$$\left. + \frac{[n_2]_{q_{n_2}}[n_2-1]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]^2_{q_{n_2}}} q_{n_2}{}^2 \frac{y^2}{(1+y)\left(1+q_{n_2}y\right)} + \frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]^2_{q_{n_2}}} \frac{y}{1+y} - \frac{x^2}{(1+x)^2} - \frac{y^2}{(1+y)^2} \right|$$

$$= \left| \sup_{x,y\geq 0} \frac{x^2}{(1+x)^2} \left(\frac{[n_1]_{q_{n_1}}[n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]^2_{q_{n_1}}} q_{n_1}{}^2 \frac{1+x}{1+q_{n_1}x} - 1 \right) + \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]^2_{q_{n_1}}} \frac{x}{1+x} \right.$$

$$\left. + \frac{y^2}{(1+y)^2} \left(\frac{[n_2]_{q_{n_2}}[n_2-1]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]^2_{q_{n_2}}} q_{n_2}{}^2 \frac{1+y}{1+q_{n_2}x} - 1 \right) + \frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]^2_{q_{n_2}}} \frac{y}{1+y} \right|$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\frac{[n][n-1]}{[n+1]^2} = A + \frac{B}{[n+1]} + \frac{C}{[n+1]^2}$$

tanımlaması yapılırsa q −tam sayı tanımından $[n] = q[n-1]+1$ olacaktır. Dolayısıyla bu eşitliğin yukarıda de kullanılmasıyla

$$\frac{[n][n-1]}{[n+1]^2} = \frac{1}{q^3}\left(1 - \frac{2+q}{[n+1]} + \frac{1+q}{[n+1]^2}\right)$$

elde edilir. Böylece

$$\left\| L_{n_1,n_2}\left(\tilde{e}_{20}+\tilde{e}_{02}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right) - \tilde{e}_{20}+\tilde{e}_{02} \right\|_{C_B(\mathbb{R}^2_+)}$$

$$= \sup_{x,y\geq 0} \left| \frac{x^2}{(1+x)^2} \left[\frac{1}{q_{n_1}} \left(1 - \frac{2+q_{n_1}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}} + \frac{1+q_{n_1}}{[n_1+1]^2_{q_{n_1}}} \right) \frac{1+x}{1+q_{n_1}x} - 1 \right] \right.$$

$$+ \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]^2_{q_{n_1}}} \frac{x}{1+x} + \frac{y^2}{(1+y)^2} \left[\frac{1}{q_{n_2}} \left(1 - \frac{2+q_{n_2}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}} + \frac{1+q_{n_2}}{[n_2+1]^2_{q_{n_2}}} \right) \frac{1+y}{1+q_{n_2}y} - 1 \right]$$

$$\left. + \frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]^2_{q_{n_2}}} \frac{y}{1+y} \right|$$

$$\leq \sup_{x\geq 0} \left| \frac{x^2}{(1+x)^2} \left(\frac{1}{q_{n_1}} \frac{1+x}{1+q_{n_1}x} - 1 \right) \right|$$

$$+ \sup_{x\geq 0} \left| \frac{x^2}{(1+x)^2} \left\{ \frac{1}{q_{n_1}} \left(-\frac{2+q_{n_1}}{[n_1+1]} + \frac{1+q_{n_1}}{[n_2+1]^2_{q_{n_1}}} \right) \frac{1+x}{1+q_{n_1}x} \right\} \right.$$

$$+\sup_{x\geq 0}\left|\frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2}\frac{x}{1+x}\right|+\sup_{y\geq 0}\left|\frac{y^2}{(1+y)^2}\left(\frac{1}{q_{n_2}}\frac{1+y}{1+q_{n_2}x}-1\right)\right|$$

$$+\sup_{y\geq 0}\left|\frac{y^2}{(1+y)^2}\left\{\frac{1}{q_{n_2}}\left(-\frac{2+q_{n_2}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}}+\frac{1+q_{n_2}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2}\right)\frac{1+y}{1+q_{n_2}y}\right\}\right|$$

$$+\sup_{y\geq 0}\left|\frac{[n_2]}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2}\frac{y}{1+y}\right|$$

$$=\sup_{x\geq 0}\frac{x^2}{(1+x)^2}\left(\frac{1}{q_{n_1}}\frac{1+x}{1+q_{n_1}x}-1\right)$$

$$+\sup_{x\geq 0}\frac{x^2}{(1+x)^2}\left\{\frac{1}{q_{n_1}}\left(\frac{2+q_{n_1}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}}-\frac{1+q_{n_1}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2}\right)\frac{1+x}{1+q_{n_1}x}\right\}+\sup_{x\geq 0}\frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2}\frac{x}{1+x}$$

$$+\sup_{y\geq 0}\frac{y^2}{(1+y)^2}\left\{\frac{1}{q_{n_2}}\left(\frac{2+q_{n_2}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}}-\frac{1+q_{n_2}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2}\right)\frac{1+y}{1+q_{n_2}y}\right\}+\sup_{y\geq 0}\frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2}\frac{y}{1+y}$$

$$\leq\left(\frac{1}{q_{n_1}^2}-1\right)+\frac{1}{q_{n_1}^2}\left(\frac{2+q_{n_1}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}}-\frac{1+q_{n_1}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2}\right)\frac{1}{q_{n_1}[n_1+1]_{q_{n_1}}}-\frac{1}{q_{n_1}[n_1+1]_{q_{n_1}}^2}$$

$$+\left(\frac{1}{q_{n_2}^2}-1\right)+\frac{1}{q_{n_2}^2}\left(\frac{2+q_{n_2}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}}-\frac{1+q_{n_2}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2}\right)\frac{1}{q_{n_2}[n_2+1]_{q_{n_2}}}-\frac{1}{q_{n_2}[n_2+1]_{q_{n_2}}^2}$$

eşitsizliği elde edilir.

Kabul gereği $n\to\infty$ için $[n+1]\to\infty$ ve$q_{n\to\infty}$ olduğundan

$$\lim_{n_1,n_2\to\infty}\left\|L_{n_1,n_2}\left(\tilde{e}_{20}+\tilde{e}_{02};q_{n_1},q_{n_2},x,y\right)-\tilde{e}_{20}+\tilde{e}_{02}\right\|_{C_B}=0$$

bulunur. Böylece (4.26)'de gösterilmiş olur. Dolayısıyla Teorem 4.4.1 gereği her $f\in H_\omega(\mathbb{R}_+^2)$ için

$$\lim_{n_1,n_2\to\infty}\left\|L_{n_1,n_2}\left(f;q_{n_1},q_{n_2},x,y\right)-f\right\|_{C_B(\mathbb{R}_+^2)}=0$$

sonucuna ulaşılır. Böylece iki değişkenli q −BBH operatörlerinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığını gösterilmiş olur.

4.5 İKİ DEĞİŞKENLİ q −MEYER-KÖNİG VE ZELLER OPERATÖRLERİ

Bu bölümde q −Meyer-König ve Zeller operatörlerinin iki değişkenli bir genelleştirmesi verilerek, bu operatörlerin Volkov tipli yaklaşım özellikleri incelenecektir.

Bu kısımda operatörlerin iki değişkenli bir genelleştirmesi Barbosunun tekniğinden yararlanılarak aşağıdaki şekilde tanımlanacaktır(Barbosu 2000).

Tanım 4.5.1

$I^2 = [0,A] \times [0,A] = [0,A]^2$ olsun. $f \in C(I^2)$ ve $0 < q_1, q_2 \leq 1$ için operatörlerin iki değişkenli hali

$u_{n_1 q_1}(x) = \prod_{s_1=0}^{n_1} \left(1 - q_1^{s_1} x\right)$ ve $u_{n_2 q_2}(x) = \prod_{s_2=0}^{n_2} \left(1 - q_2^{s_2} x\right)$ dir.

$$M_{n_1 n_2}(f; q_1, q_2, x, y) = u_{n_1 q_1}(x) u_{n_2 q_2}(y) \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} f\left(\frac{q_1^{n_1}[k_1]_{q_1}}{[n_1+k_1]_{q_1}}, \frac{q_2^{n_2}[k_2]_{q_2}}{[n_2+k_2]_{q_2}}\right)$$

$$\times \begin{bmatrix} n_1+k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \begin{bmatrix} n_2+k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1} y^{k_2} \tag{4.27}$$

şeklinde tanımlanır(Doğru ve Gupta 2006).

(4.27) de verilen operatörlerin lineer ve pozitif olduğu açıktır.

$q_1 = q_2 = 1$ alınırsa klasik Meyer-König ve Zeller operatörlerinin Stancu tipli genelleştirmesi (Stancu 1972) elde edilir.

Şimdi, ana teoremin ispatında kullanılacak olan aşağıdaki Lemma verilecektir.

Lemma 4.5.1

(4.27) ile tanımlı operatör için

i) $M_{n_1 n_2}(f; q_1, q_2, x, y) = M_{n_1}{}^{x}\left(M_{n_2}{}^{y}(f; q_2, x, y)\right)$,

ii) $M_{n_1 n_2}(f; q_1, q_2, x, y) = M_{n_2}{}^{y}\left(M_{n_1}{}^{x}(f; q_1, x, y)\right)$

eşitlikleri geçerlidir.

$$M_{n_1}{}^{x}(f; q_1, x, y) = u_{n_1 q_1}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} f\left(\frac{q_1^{n_1}[k_1]_{q_1}}{[n_1+k_1]_{q_1}}, y\right) \begin{bmatrix} n_1+k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \tag{4.28}$$

ve

$$M_{n_2}{}^{y}(f; q_2, x, y) = u_{n_2 q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} f\left(y, \frac{q_2^{n_2}[k_2]_{q_2}}{[n_2+k_2]_{q_2}}\right) \begin{bmatrix} n_2+k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \tag{4.29}$$

(Doğru ve Gupta 2006).

Kanıt

$$M_{n_1}{}^{x}\left(M_{n_2}{}^{y}(f;q_2,x,y)\right)=M_{n_1}{}^{x}\left(u_{n_2q_2}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty}f\left(x,\frac{q_2^{n_2}[k_2]_{q_2}}{[n_2+k_2]_{q_2}}\right)\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}y^{k_2}\right)$$

olup, burada $M_{n_1}{}^{x}$ in doğrusallığı kullanılırsa

$$M_{n_1}{}^{x}\left(M_{n_2}{}^{y}(f;q_2,x,y)\right)$$
$$=u_{n_2q_2}(y)\textstyle\sum_{k_2=0}^{\infty}M_{n_1}{}^{x}\left(f\left(x,\frac{q_2^{n_2}[k_2]_{q_2}}{[n_2+k_2]_{q_2}}\right);q_1,x,y\right)\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}y^{k_2} \tag{4.30}$$

elde edilir. (4.30) ve (4.28) birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned}M_{n_1}{}^{x}\left(M_{n_2}{}^{y}(f;q_2,x,y)\right)&=u_{n_2q_2}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty}u_{n_1q_1}(x)\sum_{k_1=0}^{\infty}f\left(\frac{q_1^{n_1}[k_1]_{q_1}}{[n_1+k_1]_{q_1}},\frac{q_2^{n_2}[k_2]_{q_2}}{[n_2+k_2]_{q_2}}\right)\\&\quad\times\begin{bmatrix}n_1+k_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}x^{k_1}\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}y^{k_2}\\&=u_{n_1q_1}(x)u_{n_2q_2}(y)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}f\left(\frac{q_1^{n_1}[k_1]_{q_1}}{[n_1+k_1]_{q_1}},\frac{q_2^{n_2}[k_2]_{q_2}}{[n_2+k_2]_{q_2}}\right)\\&\quad\times\begin{bmatrix}n_1+k_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}x^{k_1}\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}y^{k_2}\\&=M_{n_1n_2}(f;q_1,q_2,x,y)\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

ii),i) ye benzer şekilde yapılır.

Bu kesimde, iki değişkenli $q-$Meyer-König ve Zeller operatörlerinin yaklaşım özellikleri hem Doğru ve Gupta tarafından verilen Heping tipli bir Korovkin teoremi (Doğru ve Gupta 2006) hem de Volkov (Volkov 1957) tarafından verilen iki değişkenli fonksiyonlar için Korovkin teoremi yardımıyla incelenecektir.

Lemma 4.5.2

$e_{ij}:I^2\rightarrow I,e_{ij}(t,s)=t^is^j$ test fonksiyonları olmak üzere (4.26) de tanımlanan operatör için aşağıdaki özellikler geçerlidir (Doğru ve Gupta 2006).

(i) $M_{n_1n_2}(e_{00}(t,s);q_1,q_2,x,y)=1$

(ii) $M_{n_1n_2}(e_{10}(t,s);q_1,q_2,x,y)=q_1^{n_1}x$

(iii) $M_{n_1n_2}(e_{01}(t,s);q_1,q_2,x,y)=q_2^{n_2}y$

(iv) $q_1^{2n_1}x^2\le M_{n_1n_2}(e_{20}(t,s);q_1,q_2,x,y)\le q_1^{2n_1+1}x^2+\frac{q_1^{2n_1}x}{[n_1]_{q_1}}$

(v) $q_2^{2n_2}y^2\le M_{n_1n_2}(e_{02}(t,s);q_1,q_2,x,y)\le q_2^{2n_2+1}y^2+\frac{q_2^{2n_2}y}{[n_2]_{q_2}}$

Kanıt

i) $e_{00}=t^0s^0=1$ için Lemma4.5.1 i) den

$$M_{n_1n_2}(1;q_1,q_2,x,y)=M_{n_1}{}^{x}\left(M_{n_2}{}^{y}(1;q_2,x,y)\right)$$

$$=M_{n_1}{}^{x}\left(u_{n_2q_2}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty}\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}y^{k_2}\right)$$

yazılabilir. $M_{n_1}{}^{x}$ in doğrusallığından

$$M_{n_1n_2}(1;q_1,q_2,x,y)=u_{n_2q_2}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty}M_{n_1}{}^{x}(1;q_1,x,y)\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}y^{k_2}$$

$$=M_{n_1}{}^{x}(1;q_1,x,y)u_{n_2q_2}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty}\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}y^{k_2}$$

$$=u_{n_1q_1}(x)\sum_{k_1=0}^{\infty}\begin{bmatrix}n_1+k_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}x^{k_1}u_{n_2q_2}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty}\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}y^{k_2}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$M_{n_1n_2}(1;q_1,q_2,x,y)=1$$

eşitliği elde edilir.

ii)

$e_{10}=t^1s^0=t$ için Lemma4.5.1 (ii) den

$$M_{n_1n_2}(e_{10};q_1,q_2,x,y)=M_{n_2}{}^{y}\left(M_{n_1}{}^{x}(e_{10};q_1,x,y)\right)$$

$$=M_{n_2}{}^{y}\left(u_{n_1q_1}(x)\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{q_1^{n_1}[k_1]_{q_1}}{[n_1+k_1]_{q_1}}\begin{bmatrix}n_1+k_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}x^{k_1}\right)$$

eşitliği geçerlidir. $M_{n_2}{}^{y}$ in doğrusallığından

$$M_{n_1 n_2}(e_{10}; q_1, q_2, x, y) = u_{n_1 q_1}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} M_{n_2}{}^{y}(1; q_2, x, y) \frac{q_1^{n_1} [k_1]_{q_1}}{[n_1 + k_1]_{q_1}} \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1}$$

$$= M_{n_2}{}^{y}(1; q_2, x, y) u_{n_1 q_1}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{q_1^{n_1} [k_1]_{q_1}}{[n_1 + k_1]_{q_1}} \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1}$$

$$= u_{n_2 q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{q_1^{n_1} [k_1]_{q_1}}{[n_1 + k_1]_{q_1}} \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1}$$

eşitliği doğrudur. Böylece

$M_{n_1 n_2}(e_{10}; q_1, q_2, x, y) = q_1^{n_1} x$

eşitliği gösterilmiş olur.

iii)

$e_{01} = t^0 s^1 = s$ için Lemma 4.5.1 i) den

$$M_{n_1 n_2}(e_{01}; q_1, q_2, x, y) = M_{n_1}{}^{x}\left(M_{n_2}{}^{y}(e_{01}; q_1, x, y)\right)$$

$$= M_{n_1}{}^{x}\left(u_{n_2 q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{q_2^{n_2} [k_2]_{q_2}}{[n_2 + k_2]_{q_2}} \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}\right)$$

bulunur. $M_{n_1}{}^{x}$ in doğrusallığından

$$M_{n_1 n_2}(e_{01}; q_1, q_2, x, y) = u_{n_2 q_2}(y) \sum_{k_1=0}^{\infty} M_{n_1}{}^{x}(1; q_1, x, y) \frac{q_2^{n_2} [k_2]_{q_2}}{[n_2 + k_2]_{q_2}} \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}$$

$$= M_{n_1}{}^{x}(1; q_1, x, y) u_{n_2 q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{q_2^{n_2} [k_2]_{q_2}}{[n_2 + k_2]_{q_2}} \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}$$

$$= u_{n_1 q_1}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} u_{n_2 q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{q_2^{n_2} [k_2]_{q_2}}{[n_2 + k_2]_{q_2}}$$

$$\times \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}$$

olacaktır. Dolayısıyla

$$q_2^{2n_2} y^2 \leq M_{n_1 n_2}(e_{10}; q_1, q_2, x, y) \leq q_2^{2n_2+1} y^2 + \frac{q_2^{2n_2} y}{[n_2]_{q_2}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.5.1

$0 < q_{1,n_1}, q_{2,n_2} \leq 1$ olmak üzere $\left(q_{1,n_1}\right)$ ve $\left(q_{2,n_2}\right)$ dizileri,

$$\lim_{n_1\to\infty} q_{1,n_1}^{n_1} = 1 \qquad , \lim_{n_1\to\infty} \frac{1}{[n_1]_{q_{1,n_1}}} = 0$$

$$\lim_{n_2\to\infty} q_{2,n_2}^{n_2} = 1 \qquad , \lim_{n_2\to\infty} \frac{1}{[n_2]_{q_{2,n_2}}} = 0$$

eşitliklerini sağlıyorsa, her $f \in C(I^2)$ için $\left(M_{n_1 n_2}\left(f; q_{1,n_1}, q_{2,n_2}, x, y\right)\right)$ operatörler dizisi I^2 üzerinde $f(x,y)$ ye düzgün yakınsar(Doğru ve Gupta 2006).

Kanıt

Operatörün doğrusallığı ve Lemma 4.5.2 deki iv) ve v) den

$$q_{1,n_1}^{2n_1} x^2 + q_{2,n_2}^{2n_2} y^2 \le M_{n_1 n_2}\left(e_{20}; q_{1,n_1}, q_{2,n_2}, x, y\right) + M_{n_1 n_2}\left(e_{02}; q_{1,n_1}, q_{2,n_2}, x, y\right)$$

$$\le q_{1,n_1}^{2n_1} x^2 + q_{2,n_2}^{2n_2} y^2 + \frac{q_{1,n_1}^{2n_1} x}{[n_1]_{q_{1,n_1}}} + \frac{q_{2,n_2}^{2n_2} x}{[n_2]_{q_{2,n_2}}}$$

bulunur. $n_1 \to \infty$ ve $n_2 \to \infty$ için limite geçilirse sıkıştırma teoreminden

$$M_{n_1 n_2}\left(e_{20} + e_{02}; q_{1,n_1}, q_{2,n_2}, x, y\right) \rightrightarrows x^2 + y^2$$

bulunur.

Lemma 4.5.1 i), iii) den $n_1, n_2 \to \infty$için limite geçilir ve hipotez kullanılırsa

$$M_{n_1 n_2}(e_{00}; q_1, q_2, x, y) \rightrightarrows 1$$

$$M_{n_1 n_2}(e_{10}; q_1, q_2, x, y) \rightrightarrows x$$

$$M_{n_1 n_2}(e_{01}; q_1, q_2, x, y) \rightrightarrows y$$

olacaktır. Bu ise kanıtı tamamlar.

Lemma 4.5.2, Teorem 4.5.1 kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.5.1

$0 < q_{1,n_1}, q_{2,n_2} \le 1$ olmak üzere $\left(q_{1,n_1}\right)$ ve $\left(q_{2,n_2}\right)$ dizileri,

$$\lim_{n_1\to\infty} q_{1,n_1}^{n_1} = c_1 < 1, \qquad , \lim_{n_1\to\infty} q_{1,n_1} = 1$$

$$\lim_{n_2\to\infty} q_{2,n_2}^{n_2} = c_2 < 1, \qquad , \lim_{n_2\to\infty} q_{2,n_2} = 1$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda her $f \in C(I^2)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| M_{n_1 n_2}(f) - M_{\infty,\infty}(f) \right\|_{C(I^2)} = 0,$$

eşitliği geçerlidir(Doğru ve Gupta 2006).

Operatörlerin yaklaşım hızları süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla incelenecektir.

Tanım 4.5.2

$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ ve $f \in C(I^2)$ olmak üzere, iki değişkenli fonksiyonlar için süreklilik modülü
$\omega(f;\delta_1,\delta_2) = \sup\{|f(t,s) - f(x,y)| : (t,s),(x,y) \in I^2, |t-x| \le \delta_1, |s-y| \le \delta_2\}$
şeklinde tanımlanır.
Burada $f \in C(I^2)$ için olduğundan
$\delta_1 \to 0$ ve $\delta_2 \to 0$ için $\omega(f;\delta_1,\delta_2) \to 0$
olduğu açıktır. Ayrıca $\omega(f;\delta_1,\delta_2)$ nin monotonluğundan

$$\begin{aligned}|f(t,s) - f(x,y)| &\le \omega(f;|t-x|,|s-y|)\\ &\le \omega(f;\delta_1,\delta_2)\left(\frac{|t-x|}{\delta_1}+1\right)\left(\frac{|s-y|}{\delta_2}+1\right)\end{aligned} \tag{4.31}$$

eşitsizliği geçerlidir. (Stancu 1972) (Barbosu 2000).

Teorem 4.5.3

$0 < q_{1,n_1}, q_{2,n_2} \le 1$ olmak üzere (q_{1,n_1}) ve (q_{2,n_2}) dizileri Teorem 4.5.1 in koşullarını sağlasın.

$$\delta_{1,n_1} = \left\{\left(1-q_{1,n_1}^{n_1}\right)^2 A^2 + \frac{A q_{1,n_1}^{2n_1}}{[n_1]_{q_{1,n_1}}}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{ve} \quad \delta_{2,n_2} = \left\{\left(1-q_{2,n_2}^{n_2}\right)^2 A^2 + \frac{A q_{2,n_2}^{2n_2}}{[n_2]_{q_{2,n_2}}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

olmak üzere

$$\left\|M_{n_1 n_2}(f;q_{1,n_1},q_{2,n_2},.) - f\right\|_{C(I^2)} \le 4\,\omega\left(f;\delta_{1,n_1},\delta_{2,n_2}\right)$$

eşitsizliği sağlanır(Doğru ve Gupta 2006).

Kanıt

Her $(x,y) \in I^2$ için $M_{n_1 n_2}$ nin doğrusallığından

$$\left|M_{n_1 n_2}(f;q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y) - f(x,y)\right| = \left|M_{n_1 n_2}(f(t,s) - f(x,y);q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y)\right|$$

eşitliği geçerlidir. Lemma 4.5.1 i) kullanılarak

$$\left|M_{n_1n_2}\left(f(t,s)-f(x,y);q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)\right| = \left|M_{n_1}{}^x\left(M_{n_2}{}^y\left(f(t,s)-f(x,y);q_{2,n_2},x,y\right)\right)\right|$$

$$= \left|M_{n_1}{}^x\left(u_{n_2q_{2,n_2}}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty}\left\{f\left(x,\frac{q_2^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}\right)-f(x,y)\right\}\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_{2,n_2}}y^{k_2}\right)\right|$$

eşitliği yazılabilir. $M_{n_1}{}^x$in doğrusallığı, Lemma 4.5.1 ii) kullanılırsa

$$\left|M_{n_1n_2}\left(f(t,s)-f(x,y);q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)\right|$$

$$= \left|u_{n_2q_{2,n_2}}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty}M_{n_1}{}^x\left\{f\left(x,\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}\right)-f(x,y);q_{1,n_1},x,y\right\}\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_{2,n_2}}y^{k_2}\right|$$

$$= \left|u_{n_2q_{2,n_2}}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty}u_{n_1q_{1,n_1}}(x)\sum_{k_1=0}^{\infty}\left\{f\left(\frac{q_{1,n_1}^{n_1}[k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1+k_1]_{q_{1,n_1}}},\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}\right)-f(x,y)\right\}\right.$$

$$\left.\times\begin{bmatrix}n_1+k_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_{1,n_1}}x^{k_1}\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_{2,n_2}}y^{k_2}\right|$$

$$\leq u_{n_1q_{1,n_1}}(x)u_{n_2q_{2,n_2}}(y)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\left\{f\left(\frac{q_{1,n_1}^{n_1}[k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1+k_1]_{q_{1,n_1}}},\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}\right)-f(x,y)\right\}$$

$$\times\begin{bmatrix}n_1+k_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_{1,n_1}}\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_{2,n_2}}x^{k_1}y^{k_2}$$

$$= M_{n_1n_2}\left(|f(t,s)-f(x,y)|;q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right) \tag{4.32}$$

eşitsizliği M_{n_1,n_2}operatörünün monoton ve doğrusal olması kullanılarak

$$M_{n_1n_2}\left(|f(t,s)-f(x,y)|;q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)$$

$$\leq \omega(f;\delta_1,\delta_2)\left[\frac{1}{\delta_1\delta_2}M_{n_1n_2}\left(|t-x||s-y|;q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\delta_1}M_{n_1n_2}\left(|t-x|;q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)+\frac{1}{\delta_2}M_{n_1n_2}\left(|s-y|;q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\right)+1\right]$$

$$= \omega(f;\delta_1,\delta_2)\left[\frac{1}{\delta_1\delta_2}M_{n_1}{}^x\left(M_{n_2}{}^y\left(|t-x||s-y|;q_{2,n_2},x,y\right)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\delta_1}M_{n_2}{}^y\left(M_{n_1}{}^x\left(|t-x|;q_{1,n_1},x,y\right)\right)+\frac{1}{\delta_2}M_{n_1}{}^x\left(M_{n_2}{}^y\left(|s-y|;q_{2,n_2},x,y\right)\right)+1\right]$$

$$= \omega(f;\delta_1,\delta_2)\left[\frac{1}{\delta_1\delta_2}M_{n_1}{}^x\left(u_{n_2q_{2,n_2}}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty}|t-x|\left|\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}-y\right|\right)\begin{bmatrix}n_2+k_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_{2,n_2}}y^{k_2}\right.$$

$$+\frac{1}{\delta_1}M_{n_2}{}^{y}\left(u_{n_1 q_{1,n_1}}(x)\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|\frac{q_{1,n_1}^{n_1}[k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1+k_1]_{q_{1,n_1}}}-x\right|\begin{bmatrix}n_1+k_1\\ k_1\end{bmatrix}_{q_{1,n_1}}x^{k_1}\right)$$

$$+\frac{1}{\delta_2}M_{n_1}{}^{x}\left(u_{n_2 q_{2,n_2}}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty}\left|\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}-y\right|\begin{bmatrix}n_2+k_2\\ k_2\end{bmatrix}_{q_{2,n_2}}y^{k_2}\right)+1\Bigg]$$

eşitsizliği bulunur. Burada $M_{n_1}{}^{x}$ ve $M_{n_2}{}^{y}$ nin doğrusallığı kullanılarak

$$M_{n_1n_2}\big(|f(t,s)-f(x,y)|;q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\big)$$

$$\leq \omega(f;\delta_1,\delta_2)\left[\frac{1}{\delta_1\delta_2}u_{n_1 q_{1,n_1}}(x)\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|\frac{q_{1,n_1}^{n_1}[k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1+k_1]_{q_{1,n_1}}}-x\right|\begin{bmatrix}n_1+k_1\\ k_1\end{bmatrix}_{q_{1,n_1}}x^{k_1}\right.$$

$$\times u_{n_2 q_{2,n_2}}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty}|t-x|\left|\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}-y\right|\begin{bmatrix}n_2+k_2\\ k_2\end{bmatrix}_{q_{2,n_2}}y^{k_2}$$

$$+\frac{1}{\delta_1}u_{n_1 q_{1,n_1}}(x)\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|\frac{q_{1,n_1}^{n_1}[k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1+k_1]_{q_{1,n_1}}}-x\right|\begin{bmatrix}n_1+k_1\\ k_1\end{bmatrix}_{q_{1,n_1}}x^{k_1}M_{n_2}{}^{y}\big(1;q_{2,n_2},x,y\big)$$

$$\left.+\frac{1}{\delta_2}u_{n_2 q_{2,n_2}}(y)\sum_{k_2=0}^{\infty}\left|\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}-y\right|\begin{bmatrix}n_2+k_2\\ k_2\end{bmatrix}_{q_{2,n_2}}y^{k_2}M_{n_1}{}^{x}\big(1;q_{1,n_1},x,y\big)+1\right]$$

elde edilir. Son olarak

$$P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)\coloneqq u_{n_1 q_{1,n_1}}(x)\begin{bmatrix}n_1+k_1\\ k_1\end{bmatrix}_{q_{1,n_1}}x^{k_1}$$

$$P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)=u_{n_2 q_{2,n_2}}(y)\begin{bmatrix}n_2+k_2\\ k_2\end{bmatrix}_{q_{2,n_2}}y^{k_2}$$

tanımlamaları yapılıp, $M_{n_1}{}^{x}\big(1;q_{1,n_1},x,y\big)=1, M_{n_2}{}^{y}\big(1;q_{2,n_2},x,y\big)=1,$

eşitliği kullanılarak

$$M_{n_1n_2}\big(|f(t,s)-f(x,y)|;q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\big)$$

$$\leq \omega(f;\delta_1,\delta_2)\left[\frac{1}{\delta_1\delta_2}\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|\frac{q_{1,n_1}^{n_1}[k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1+k_1]_{q_{1,n_1}}}-x\right|P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)\right.$$

$$\times\sum_{k_2=0}^{\infty}|t-x|\left|\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}-y\right|P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)$$

$$+\frac{1}{\delta_1}\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|\frac{q_{1,n_1}^{n_1}[k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1+k_1]_{q_{1,n_1}}}-x\right|P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)$$

$$\left.+\frac{1}{\delta_2}\sum_{k_2=0}^{\infty}\left|\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}-y\right|P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)+1\right]$$

bulunur. Burada

$$\left|\frac{q_{1,n_1}^{n_1}[k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1+k_1]_{q_{1,n_1}}}-x\right|P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)=\left\{\left(\frac{q_{1,n_1}^{n_1}[k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1+k_1]_{q_{1,n_1}}}-x\right)^2 P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\left|\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}-y\right|P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)=\left\{\left(\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}-y\right)^2 P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

eşitlikleri kullanılarak Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$M_{n_1n_2}\big(|f(t,s)-f(x,y)|;q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\big)$$

$$\leq \omega(f;\delta_1,\delta_2)\left[\frac{1}{\delta_1\delta_2}\left\{\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{q_{1,n_1}^{n_1}[k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1+k_1]_{q_{1,n_1}}}-x\right)^2 P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\times\left\{\sum_{k_1=0}^{\infty}P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}-y\right)^2 P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$x\left\{\sum_{k_2=0}^{\infty}P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{1}{\delta_1}\left\{\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{q_{1,n_1}^{n_1}[k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1+k_1]_{q_{1,n_1}}}-x\right)^2 P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k_1=0}^{\infty}P_{n_1,k_1,q_{1,n_1}}(x)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\left.+\frac{1}{\delta_2}\left\{\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}}-y\right)^2 P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k_2=0}^{\infty}P_{n_2,k_2,q_{2,n_2}}(y)\right\}^{\frac{1}{2}}+1\right]$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\varphi_{n_1,2}(x)=M_{n_1}{}^{x}\big((t-x)^2;q_{1,n_1},x\big)\leq\big(1-q_{1,n_1}\big)^2x^2+\frac{xq_{1,n_1}^{2n_1}}{[n_1]_{q_{1,n_1}}}$$

$$\varphi_{n_2,2}(x)=M_{n_2}{}^{x}\big((s-y)^2;q_{2,n_2},y\big)\leq\big(1-q_{2,n_2}\big)^2y^2+\frac{yq_{2,n_2}^{2n_2}}{[n_2]_{q_{2,n_2}}}$$

eşitsizlikleri kullanılarak

$$M_{n_1n_2}\big(|f(t,s)-f(x,y)|;q_{1,n_1},q_{2,n_2},x,y\big)$$

$$\leq \omega(f;\delta_1,\delta_2)\left[\frac{1}{\delta_1\delta_2}\left\{M_{n_1}\big((t-x)^2;q_{1,n_1},x,\big)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{M_{n_2}\big((s-y)^2;q_{2,n_2},y,\big)\right\}^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\delta_1}\left\{M_{n_1}\big((t-x);q_{1,n_1},x\big)\right\}^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\delta_2}\left\{M_{n_2}\big((s-y);q_{2,n_2},y\big)\right\}^{\frac{1}{2}}+1\right]$$

$$= \omega(f;\delta_1,\delta_2)\left[\frac{1}{\delta_1\delta_2}\{\varphi_{n_1,2}(x)\}^{\frac{1}{2}}\{\varphi_{n_2,2}(x)\}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\delta_1}\{\varphi_{n_1,2}(x)\}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\delta_2}\{\varphi_{n_2,2}(x)\}^{\frac{1}{2}} + 1\right]$$

$$\leq \omega(f;\delta_1,\delta_2)\left\{\left[\frac{1}{\delta_1\delta_2}\left(1-q_{1,n_1}\right)^2 x^2 + \frac{xq_{1,n_1}^{2n_1}}{[n_1]_{q_{1,n_1}}}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\left(1-q_{2,n_2}\right)^2 y^2 + \frac{yq_{2,n_2}^{2n_2}}{[n_2]_{q_{2,n_2}}}\right\}^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.\frac{1}{\delta_1}\left\{\left(1-q_{1,n_1}\right)^2 x^2 + \frac{xq_{1,n_1}^{2n_1}}{[n_1]_{q_{1,n_1}}}\right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\delta_2}\left\{\left(1-q_{2,n_2}\right)^2 y^2 + \frac{yq_{2,n_2}^{2n_2}}{[n_2]_{q_{2,n_2}}}\right\}^{\frac{1}{2}} + 1\right]$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada $(x,y) \in I^2$ için maksimum alınır ve

$\delta_1 = \delta_{1,n_1}$ ve $\delta_2 = \delta_{2,n_2}$ olacak şekilde seçimi yapılırsa

$\left\|M_{n_1,n_2}\left(f(t,s);q_{1,n_1},q_{2,n_2}\right) - f\right\|_{C(I^2)} \leq 4\omega(f;\delta_1,\delta_2)$

sonucuna ulaşılır. Bu ise kanıtı tamamlar.

SONUÇ

Bu tezde farklı operatörlerin tek değişkenli ve iki değişkenli hallerinin $C[0,A]$ ve ağırlıklı uzaylardaki yaklaşım özelliklerini inceledik.

Literatürdeki operatörlerin bazıları için q genelleştirmeler bazıları içinse operatörlerin iki değişkenli halleri henüz çalışılmamıştır. Literatürdeki boşlukları göstermesi açısından tezimizin önemli bir kaynak olabileceği düşüncesindeyiz. Bunun dışında tezde verilen operatörlerin yeni formlarını oluşturarak yaklaşım özelliklerini inceleyecek araştırmacılar için de bir başvuru kaynağı niteliğindedir.

KAYNAKLAR

Altin A, Dogru O ve Arslan M A O (2005). A Rates of convergence of Meyer-Konig and Zeller operators based on *q*-integers, *WSEAS Transactions on Mathematics*, vol. 4, no. 4, pp. 313–318.

Altın H E (2010) İki değişkenli q-Bernstein polinomlarının King tipli genelleşmelerinin yaklaşım özellikleri. *Yüksek Lisans Tezi,* Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalı, Ankara, 86 s.

Altomare F and Campiti M (1994) *Korovkin Type Approximation Theory And Its Applications*. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 195-352.

Andrews G E, Askey R and Roy R (1999) *Special Functions*. Cambridge University Press,1-70.

ARAL A and GUPTA V (2006) *q-derivatives and applications to the q-Szasz Mirakyan operators*. Calcolo **43** (3) 151–170.

Aral A (2008), A generalization of Szasz-Mirakjan operators based on q-integers. *Math. Comput. Model.,* 47:1052–1062.

Aral A ve Gupta V (2011) Generalized Szász Durrmeyer operators. *Lobachevskii J. Math.* 32(1), 23–31.

Aral A, Gupta ve Agarwal V R P (2013) *Applications of q-Calculus in Operator* Theory, Springer Science+Business Media New York.

Barbosu D (2000) *Some generalized bivariate Bernstein operators*. Mathematical Notes, vol. 1, no.1, pp. 3–10.

Baskakov V A (1957) Dokl. Akad. Nauk SSSR 113. An example of a sequence of linear positive operators in the spaces of continuous functions. 249-251.

KAYNAKLAR(devam ediyor)

Bernstein S N (1912) Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee sur la calcul des probabilities, *Comm. Soc. Math. Charkow Ser.,* 2(13):1-2.

Bohman H (1951) *On approximation of continuous and analytic functions*. Arkif Für Math., 2(3): 43-56.

Büyükyazıcı İ ve İbikli E (2004). The approximation properties of generalized Bernstein polynomials of two variables, *Appl. Math. Comput.,* 156(2), 367-380

Büyükyazıcı I (2009) On the approximation properties of two-dimensional $q-$Bernstein-Chlodowsky polynomials. *Math. Commun.* 14(2), 255-269.

Cholodovsky I (1929) Sur la répresentation des functions discontinues par les Polynomes de M.S. Bernstein. *Fund. Math.,* 13 : 62-72

Coşkun E (2002) *Analiz I.* 1.Basım, ISBN: 975-6674-06-7, Alp Yayınevi, Ankara, 349 s.

Delibaş H (2010) q-Durrmeyer Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri. *Yüksek Lisans Tezi,* Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalı, Ankara, 67 s.

Ditzian Z, Totik V (1987) *Moduli of Smoothness*. Springer Series in Computational Mathematics 9, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Newyork.

Doğru O ve Gupta V (2006) Korovkin Type approximation properties of bivariate q-Meyer-König and Zeller operators. *Calcolo,* 43:51-63.

Döne Y (2011) Bernstein-Stancu polinomlarıyla yaklaşım. *Yüksek Lisans Tezi,* Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalı, Ankara 90 s.

Durrmeyer J L (1967) Une formule d'inversion de la transformée de laplace : Applications la théorie des moments. *PhD thesis,* Faculté des Sciences de I'Université de Paris.

Ersan Çevik S S (2008) İki değişkenli q-Bleimann, Butzer ve Hahn operatörlerinin yaklaşım özellikleri. *Doktora Tezi,* Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalı, Ankara, 47 s.

KAYNAKLAR(devam ediyor)

Ezgi A (2004) İki değişkenli fonksiyonlar sınıfında Bernstein-Chlodowsky tipi lineer pozitif operatörler dizisinin yakınsaklık özellikleri. *Doktora Lisans Tezi,* Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara, 74 s.

Gadjiev A D and Ibragimov I(1970) On a Sequence of Linear Positi ve Operators. *Sov. Math. Dokl.,*11(4): 1092-1095

Gadjiev A D (1974) The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets and theorems analogous to that of P.P. Korovkin. *Soviet Math. Dokl.,* 15:1433-1436.

Gadjiev A D (1976) On P.P. Korovkin type theorems. *Math. Zametki,* 20:781- 786.

Gadjieva E A ve Ibikli E (1999) Weighted Approximation by Bernstein-Chlodowsky Polynomials. *Indian J. Pure Ap. Math.* 3083-87.

Gupta V (2008) Some approximation properties of q-Durrmeyer operators. *Appl. Math. Comput,* 197(1): 172–178.

Gupta V, Hepıng W (2008) The rate of convergence of q-Durrmeyer operators for 0 < q < 1. *Math. Methods Appl. Sci.* 31 1946–1955.

Hacısalihoğlu H ve Hacıyev A (1995) *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı.* Ankara, 1-16.

Heilmann M (1989) Dırect and Converse Results for Operators of Baskakov Durrmeyer Type, *To Appear in J. Approx. Theory, 1-10.*

İbikli E (2000) On Stancu type generalization of Bernstein-Chlodowsky polynomials. *Mathematica* 42 (65), 37-43.

İbikli E (2003) On approximation by Bernstein–Chlodowsky polynomials. *Math. Balkanica (N.S.),* 17 (3–4) pp. 259-265.

İbikli E (2005) On approximation for functions of two variables on a triangular domain. *Rocky Mountain J.Math.,* 5, 1523-1531.

İşler N (2009) Bir ve iki değişkenli Bernstein-Chlodowsky polinomları. *Yüksek Lisans Tezi,* Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalı, Ankara 139 s.

Kac V, **Cheung P** (2002) *Quantum Calculus.* Universitex, Springer-Verlag, New York, 2002.

Karsli H ve Gupta V (2008) Some approximation properties of q-Chlodowsky operators, *Applied Mathematics and Computation,* 195: 220–229.

Kasana H S, Prasad G, **Agrawal P N and Sahai A** (1985) Modified Szasz Operators, *Proceedings International Conference on Mathematical Analysis and Its Applications, Kuwait* 29–41, Pergamon Press, Oxford.

Korovkin P P (1953) Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.), "On convergence of linear positive operators in the space of continous functions", 90: 961-964.

Korovkin P P (1960) *Linear Operators and Approximation Theory.* Hidustan Publishing Corp.(İndia), Delhi.

Lupaş A (1987). A q −analogue of the Bernstein operator. *University of Cluj Napoca, Seminar on Numerical and Statistical Calculus,* 9: 1-40.

Mahmudov N I (2010) On q −Parametric Szasz-Mirakjan Operators. Mediterr. *J. Math.,* 7:297-311.

Mazhar S M and Totik V (1985) Approximation by Modified Szasz Operators. *Acta Sci. Math. (Szeged),* 49 257–269.

Meyer-König W and Zeller K (1960) Bernsteinsche potenzreihen. *Studia Math.,* 19:89-94.

Özdoğan H (2010) Szasz-Durrmeyer operatörleri ile global yaklaşım. *Yüksek Lisans Tezi,* Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalı, Ankara, 56 s.

Phillips G M (1997) Bernstein polynomials based on the q –integers. *Annals Num. Math.,* 4:511-518

KAYNAKLAR(devam ediyor)

Stancu D D (1968) Approximation of functions by a new class of *linear polynomial operators, Rev. Roum. Math.* Pures Appl. 13 (8) (1968) 1173-1194.

Szasz O (1950) Generalization of Bernsteinís polynomials to the inÖnite interval. *J. Res. Nat. Bur. Stds.* 45, 239-245

Szasz O (1950) Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval. *J. Research Nat. Bur. Standards,* 45: 239-245.

Ulusoy G (2012) Durrmeyer tipli operatörlerin yakınsaklık özellikleri. *Yüksek Lisans Tezi,* Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalı, Kırıkkale, 84 s.

Walczak Z (2004 Bernstein-Durrmeyer type operators, *Acta Mathematica Universitatis Ostraviensis*12 65-72.

Weierstrass K (1885). *Über die analytische Darstellbarkeit sogennanter willkürlicher Funktionen reler Argumente.* Sitzungsberichte der Acad., Berlin, 633-805.

Yıldız E (2009) İki değişkenli q-Meyer-König ve Zeller operatörlerinin Korovkin tipi yaklaşım özellikleri. *Yüksek Lisans Tezi,* Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalı, Ankara, 82 s.

ÖZGEÇMİŞ

Nurullah Coşkun 1991'de İstanbul'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2009 yılında Rezan Has Lisesinden mezun oldu. 2011 yılında ZKÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde öğrenime başladı. 2015 yılında "iyi" derece ile mezun olduktan sonra BEÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans programına kabul edildi.

2017 yılında girdiği BEÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programını sürdürmektedir.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Gülsuyu Mahallesi Gülenken Sokak No:48
Maltepe/İSTANBUL

Tel : (534) 843 19 05

E-posta: nurullahcskn18@gmail.com