BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TRANSPORT DENKLEMLER İÇİN BAZI TERS PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞININ ARAŞTIRILMASI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEVİL AMİROVA

ARALIK 2017

BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TRANSPORT DENKLEMLER İÇİN BAZI TERS PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞININ ARAŞTIRILMASI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sevil AMİROVA

DANIŞMAN: Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

ZONGULDAK

Aralık 2017

KABUL:

Sevil AMİROVA tarafından hazırlanan "Transport Denklemler için Bazı Ters Problemlerin Çözümlerinin Kararlılığının Araştırılması" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 29/12/2017

Danışman: Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN ....
Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. Ali GELİŞKEN ....
Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Yrd. Doç. Dr. Sedat ÇEVİKEL ....
Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. ..../..../2017

Doç. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Sevil AMİROVA

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TRANSPORT DENKLEMLER İÇİN BAZI TERS PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞININ ARAŞTIRILMASI

Sevil AMİROVA

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

Aralık 2017, 67 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, diferensiyel denklemler için ters problemler teorisine ilişkin temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde, sınırlı bir bölgede serbest transport denklemi için soğurma katsayısının belirlenmesi ters problemi ele alınmıştır. Bu problemin çözümünün kararlılığı iki büyük parametre içeren Carleman değerlendirmesi kullanılarak gösterilmiştir, (Gaitan and Ouzzane 2013). Üçüncü bölümde, integral terimi içeren bir transport denklem için bir başlangıç/sınır değer problemi ele alınmış ve sınırın bir parçasında verilmiş ek bilgiler yardımıyla bu denklemdeki saçılım katsayısının ve toplam zayıflama katsayısının belirlenmesi ters problemi tartışılmıştır. Bu kapsamda bir büyük parametre içeren ve lineer ağırlık fonksiyonunun kullanıldığı Carleman değerlendirmeleri yardımıyla Lipschitz kararlılığı incelenmiştir, (Machida and Yamamoto 2014). Son bölümde, değişken katsayılı bir transport denklem için kaynak ve katsayı ters problemlerinin çözümlerinin kararlılığı, zamana göre lineer ve bir büyük parametre içeren bir Carleman değerlendirmesi kullanılarak araştırılmıştır, (Gölgeleyen and Yamamoto 2016).

Anahtar Kelimeler: Transport denklem, Ters problem, Kararlılık, Carleman değerlendirmeleri.

Bilim Kodu: 403.06.00.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

INVESTIGATION OF THE STABILITY OF SOLUTIONS OF SOME INVERSE PROBLEMS FOR TRANSPORT EQUATIONS

Sevil AMİROVA

Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Fikret GÖLGELEYEN

December 2017, 67 pages

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, some basic definitions and theorems related to the theory of inverse problems are given. In the second chapter, we consider an inverse problem of determination of an absorption coefficient in the free transport equation in a bounded domain. The stability of the solution of the problem is investigated by means of a Carleman estimate which includes two big parameters, (Gaitan and Ouzzane 2013). In the third chapter, we deal with an initial/boundary problem for a transport equation with an integral term and discuss inverse problem of determining a time independent scattering coefficient or total attenuation by boundary data on a suitable sub-boundary. In this context, Lipschitz stability is studied by using a Carleman estimate which is based on a linear weight function and includes one big parameter, (Machida and Yamamoto 2014). In the last section, the stability of the solution of some source and coefficient inverse problems for a transport equation with variable principle part is investigated with the help of a Carleman estimate which is linear with respect to time t and includes one large parameter (Gölgeleyen and Yamamoto 2016).

Keywords: Transport equation, Inverse problem, Stability, Carleman estimates.

Science Code: 403.06.00.

TEŞEKKÜR

Tezimin tüm aşamalarında görüş ve önerileriyle değerli vaktini esirgemeden bana ayıran, bilgisiyle beni yönlendiren; bu tezi tamamlamamda çok büyük emeği olan danışman hocam sayın Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN ’e sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu sürecin her anında yanımda olan, sevgisiyle her daim güç veren değerli anneme; sevgili ablalarım Emine ve Medine’ ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Desteğine ihtiyaç duyduğum her anda benimle olan ve beni cesaretlendiren değerli aile dostumuz Melahat ÇÖĞENDEZ ’e en içten dileklerimle sonsuz teşekkür ederim.

Bu tezi, Bülent Ecevit Üniversitesi Matematik bölümüne adım atmamı ve bugünlere gelmemi sağlayan sevgili babam merhum Prof. Dr. Arif AMİROV ‘a ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

Ω	: Verilen bir bölge
$\overline{\Omega}$	: Ω bölgesinin kapanışı
$\partial\Omega$	: Ω bölgesinin sınırı
$\mathbb{R}^n$	: n − boyutlu Euclid uzayı
$v \cdot v'$	: $\mathbb{R}^n$ uzayındaki skaler çarpımı gösterir
$C^k(\Omega)$	: Ω bölgesinde tanımlı *k*. mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar uzayı
$C_0^\infty(\Omega)$	: Ω bölgesinde tanımlı sonsuz defa diferensiyellenebilir ve supportu Ω nın kompakt alt kümesi olan fonksiyonlar uzayı
D^α	: Türev için multiindeks gösterimi
$D'(\Omega)$	: Genelleşmiş fonksiyonlar sınıfı
$L^1(\Omega)$	: Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L^2(\Omega)$	: Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$(.\,,.)_{L^2(\Omega)}$	: $L^2(\Omega)$ da iç çarpım
$H^k(\Omega)$	: Kendisi ve *k*. mertebeye kadar tüm genelleştirilmiş türevleri $L^2(\Omega)$ ya ait olan fonksiyonlar uzayı
$\chi(t)$	: Kesme (cut off) fonksiyonu
$supp\varphi(x)$	: φ fonksiyonunun supportu; $supp\varphi(x) = \overline{\{x \mid x \in \Omega, \varphi(x) \neq 0\}}$

BÖLÜM 1

DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN DİREKT VE TERS PROBLEMLER

1.1 GİRİŞ

Kısmı türevli denklemler teorisi alanındaki çalışmalar, 18. yüzyıldan itibaren sürekli ortamlar mekaniği ve daha genel olarak fizikteki çeşitli modellerin analitik olarak ele alınmasında temel bir araç olarak Euler, d'Ambert, Lagrange ve Laplace'ın öncülüğünde başlamıştır. 19. yüzyılın ortalarından başlayarak özellikle Riemann'ın çalışmalarıyla birlikte matematiğin birçok alanında önemli bir rol oynamaya başlamıştır (Brezis and Browder, 1997). Basit olarak, iki veya daha fazla değişkene bağlı bilinmeyen bir fonksiyon ve onun bazı kısmi türevlerini içeren bir denkleme kısmi türevli denklem adı verilir. Bütün kısmi türevli denklemleri kapsayan çözülebilirlik ile ilgili bilinen genel bir teori mevcut olmadığından bu denklemlerin sınıflandırılmasının yapılması büyük önem arz etmektedir (Evans, 1997). Bu sınıflandırma yapılırken denklemin mertebesi, bağımsız değişken sayısı, lineerliği, homojenliği ve katsayılarının özellikleri dikkate alınır. Birinci mertebeden kısmi türevli denklemler birçok bilim dalında ve çeşitli uygulama alanlarında ortaya çıkar. Bunlara örnek olarak; diferensiyel geometri, analitik mekanik, katı mekaniği, gaz dinamiği, geometrik optik, dalga teorisi, ısı ve kütle transferi, çok fazlı akışlar, kontrol teorisi, varyasyon hesabı, dinamik proglamlama, kimya mühendisliği ve benzeri alanlar verilebilir (Polyanin et.al. 2002).

Matematiksel fizikte direkt problem; denklem, bölge ve koşullar verildiğinde denklemi ve koşulları sağlayan çözümün bulunması problemi olarak tanımlanır. Burada amaç, belli bir anda bölgenin belli bir noktasındaki fiziksel alanı veya süreci tanımlayan (elektromanyetik, akustik, sismik vb.) bir fonksiyonun bulunmasıdır. Diğer yandan sıklıkla ortamın özelliklerinin, fiziksel sürecin başlangıç anındaki durumunun ve/veya sınırda sağlanan özelliklerin bilinmediği durumlar ile karşılaşılmaktadır. Matematiksel olarak, böyle bir problem direkt problemin çözümü hakkında verilen ek bilgi yardımıyla ilgili denklemin katsayılarının veya başlangıç ve/veya sınır koşullarından bazılarının belirlenmesi ters problemi olarak ifade edilir. Daha basit bir ifade ile direkt problem; var olan bir sebepten ortaya çıkabilecek sonuçların bulunması problemi iken ters problem mevcut sonuçlardan sebebin belirlenmesi problemi olarak ifade edilebilir (Gölgeleyen ve Kaytmaz 2016). Ters problemler teorisi, 20. yüzyılın ortalarından itibaren bilim ve teknolojideki önemli uygulamaları nedeniyle bilim insanlarının büyük ilgisini çekmiştir. Uzaktan algılama ve tahribatsız değerlendirme alanlarında bu tür problemlerin çözümleri incelenen ortama ait yoğunluk, dalga yayılım hızı, elastisite parametreleri, iletkenlik, elektriksel ve manyetik geçirgenlik gibi önemli fiziksel özellikler hakkında bilgi vermektedir. Ters problemler genel olarak Hadamard anlamında kötü konulmuş problemlerdir. 1902 yılında Fransız matematikçi J. S. Hadamard iyi konulmuş problem kavramını aşağıdaki şekilde ifade etmiştir:

Problem 1.1 U ve F metrik uzaylar, A: $U \to F$ bir operatör olmak üzere

$$Au = f \tag{1.1}$$

denklemini göz önüne alalım. (1.1) denkleminin aşağıdaki özellikleri sağlayan çözümünün bulunması problemine (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında iyi konulmuş problem denir:

i. Her $f \in F$ için U uzayında problemin çözümü vardır;

ii. Problemin çözümü U uzayında tektir;

iii. Problemin koşulları F uzayında az değiştiğinde problemin çözümü de U uzayında az değişir (kararlılık koşulu) (Lavrent'ev et al. 1986).

Bu şartlardan herhangi birinin sağlanmaması durumunda problem, (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında kötü konulmuş problem olarak adlandırılır. Özel olarak, son koşul olarak verilen kararlılık kriteri fiziksel uygulamalardan doğan problemler için büyük önem taşımaktadır. Çünkü uygulamada sınır verileri ölçüm yapılarak elde edilmektedir ve bu ölçümler belli oranda hata içermektedir. O halde küçük ölçüm hataları problemin çözümünü sert bir biçimde değiştirmemelidir (Jost, 2013).

Bu tezde transport denklem olarak adlandırılan birinci mertebeden bazı kısmı türevli denklemler için kaynak ve katsayı ters problemlerinin çözümlerinin kararlılığı Carleman değerlendirmeleri yardımıyla araştırılmıştır. Bu amaçla son zamanlarda bu alanda yapılmış olan çalışmalar kapsamlı olarak incelenmiştir. Klibanov and Pamyatnykh (2008), Gaitan and Ouzanne (2014), Machida and Yamamoto (2014) ve Gölgeleyen and Yamamoto (2016) tarafından transport denklemler için başlangıç/sınır değer problemleri ile bağlantılı bazı ters problemlerin çözümlerinin tekliği ve kararlılığı ispatlanmıştır. Klibanov and Pamyatnykh (2008) ve Machida and Yamamoto (2014), integral terimi içeren, çözümü hız, zaman ve konum değişkenlerine bağlı ve temel kısmının katsayısı sabit olan bir transport denklemi ele almışlardır.

Yukarıda bahsedilen çalışmalarda kullanılan temel araç Carleman değerlendirmesidir. Carleman değerlendirmesi, iki boyutlu eliptik denklemlerin çözümlerinin bazı özelliklerinin araştırılması amacıyla ilk kez 1939 yılında Torsten Carleman tarafından ortaya konulmuştur. Daha sonra, Calderon (1958) ve Hörmander (1963) tarafından daha genel ispatlar verilmiştir. Bu metodun ters problemler teorisine uygulanması ise Bukhgeim and Klibanov (1981) tarafından gerçekleştirilmiştir. Daha sonra bu doğrultuda pek çok çalışma yapılmıştır. Klibanov and Timonov (2004), Carleman değerlendirmelerini kullanarak, lineer ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemler için klasik katsayı ters problemleri ile ilgili önemli sonuçlar elde etmişlerdir. Parabolik ve hiperbolik denklemler için ters problemler üzerine yapılan çalışmalara örnek olarak Baudouin, Buhan and Ervedoza (2013), Beilina and Klibanov (2012), Bellassoued and Yamamoto (2017), Yuan and Yamamoto (2009) verilebilir.

1.2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Aşağıda, bu tezde geçen bazı önemli tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.1 (Tam Uzay) *X bir normlu lineer uzay olmak üzere X'in elemanlarından oluşan her bir Cauchy dizisi X in bir elemanına yakınsıyor ise X'e tam uzay denir (Mikhailov 1978, s. 65).*

Tanım 1.2 (Banach Uzayı) *Tam normlu bir lineer uzaya Banach uzayı denir (Mikhailov 1978, s. 65).*

Tanım 1.3 (Hilbert Uzayı) *Bir Hilbert uzayı, üzerindeki iç çarpımla tanımlanmış metriğe göre tam olan bir iç çarpım uzayıdır (Kreyszig 1989).*

Tanım 1.4 ($C^m(\Omega)$ Uzayı) *Ω, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge olsun. Negatif olmayan bir m tamsayısı için kendisi ve $|\alpha| \leq m$ olmak üzere $D^\alpha\varphi$ kısmi türevleri Ω bölgesinde sürekli olan fonksiyonlar uzayı $C^m(\Omega)$ ile gösterilir (Mikhailov 1978, s. 128).*

Tanım 1.5 ($C_0^\infty(\Omega)$ Uzayı) *Bir Ω bölgesi üzerinde tanımlı, sonsuz defa differensiyellenebilir ve supportu ($supp\varphi(x) = \overline{\{x| \ x \in \Omega, \ \varphi(x) \neq 0\}}$) Ω nın kompakt alt cümlesi olan tüm fonksiyonların oluşturduğu cümle $C_0^\infty(\Omega)$ ile gösterilir (Vladimirov 2002, s.7)*

Tanım 1.6 ($L^p(\Omega)$ Uzayı) *Ω, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir bölge ve p bir pozitif reel sayı olsun. Ω bölgesinde tanımlı*

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty$$

şartını sağlayan tüm ölçülebilir u fonksiyonlarının uzayı $L^p(\Omega)$ ile gösterilir (Adams and Fournier 2003, s. 23).

Tanım 1.7 ($L^\infty(\Omega)$ Uzayı) *Ω bölgesi üzerinde ölçülebilir bir u fonksiyonu bu bölgede esas sınırlıdır (essential bounded) denir, eğer Ω bölgesi üzerinde hemen hemen her yerde $|u(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K sabiti varsa. Bu K sabitlerinin en büyük alt sınırı Ω üzerinde $|u|$ nun esas supremumu olarak adlandırılır ve $\operatorname{esssup}_{x\in\Omega}|u(x)|$ ile gösterilir. Burada*

$$\|u\|_\infty = ess\sup_{x\in\Omega}|u(x)|$$

şeklinde tanımlıdır. $\|\cdot\|_\infty$ fonksiyoneli $L^\infty(\Omega)$ üzerinde bir normdur (Adams and Fournier 2003, s. 27).

Tanım 1.8 (Genelleşmiş Fonksiyon) *$C_0^\infty(\Omega)$ üzerinde aşağıdaki yakınsaklık yardımı ile verilen topoloji ile elde edilen uzaya test fonksiyonlar uzayı denir ve $D(\Omega)$ ile gösterilir:*

i) Öyle bir $K \subset \Omega$ kompakt kümesi vardır ki

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $\operatorname{supp}\varphi_k \in K$,

ii) Her $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ve $k \to \infty$ için

$$D^\alpha_{\varphi_k}(x) \to D^\alpha_\varphi(x)$$

yakınsaması Ω bölgesinde düzgün ise, $k \to \infty$ için $\varphi_k \overset{D(\Omega)}{\to} \varphi$ yakınsar demektir.
$D(\Omega)$ topolojik uzayında tanımlı, sürekli, lineer fonksiyonellere genelleşmiş fonksiyon denir. Genelleşmiş fonksiyonlar sınıfı $D'(\Omega)$ ile gösterilir (Vladimirov 2002, s. 10).

Tanım 1.9 (Genelleşmiş Türev) *$f \in D'(\Omega)$ olmak üzere, f genelleşmiş fonksiyonunun $D^{\alpha} f$ (genelleşmiş) türevi,*

$$(D^{\alpha} f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \left(f, D^{\alpha} \varphi\right), \varphi \in D(\Omega)$$

eşitliği ile tanımlanır (Vladimirov 2002, s. 25). Klasik anlamda türev kavramı yerel olarak tanımlanır ancak genelleşmiş türev bölgesel bir kavramdır. Bir genelleşmiş fonksiyonun türevi de genelleşmiş fonksiyondur. Klasik anlamda birinci mertebeden türev mevcut değil ise ikinci mertebeden türevlerden bahsedilemez. Ancak genelleşmiş türev için bu durum geçerli değildir.

Örnek 1.1 *$f(x) = |x_1|$ fonksiyonu, $\Omega = \{|x| < 1\}$ yuvarında $f_{x_1} = signx_1$, $f_{x_i} = 0$, $i = 2, ..., n$ birinci mertebeden genelleşmiş türevlerine sahiptir.*

Gerçekten de her $g(x) \in C_0^1(\overline{\Omega})$ için

$$\Omega^+ = \Omega \cap (x_1 > 0), \Omega^- = \Omega \cap (x_1 < 0)$$

olmak üzere

$$\int_{\Omega} |x_1| \, \overline{g}_{x_1} dx = \int_{\Omega^+} x_1 \overline{g}_{x_1} dx - \int_{\Omega^-} x_1 \overline{g}_{x_1} dx$$

yazılabilir. Ostrogradskii formülü kullanılarak ve $\partial\Omega$ üzerinde $x_1\overline{g} = 0$ olduğu göz önünde bulundurularak

$$\int_{\Omega} |x_1| \, \overline{g}_{x_1} dx = -\int_{\Omega^+} \overline{g} dx + \int_{\Omega^-} \overline{g} dx = -\int_{\Omega} signx_1 \overline{g} dx$$

elde edilir. Bu nedenle $|x_1|$ fonksiyonunun x_1 e göre genelleşmiş türevi var ve $signx_1$ fonksiyonuna eşittir. Diğer yandan $i \geq 2$ için

$$\int_{\Omega} |x_i| \, \overline{g}_{xi} dx = \int_{\Omega+} (|x_1| \, \overline{g})_{x_i} \, dx = 0 = -\int_{\Omega} 0 \cdot \overline{g} dx$$

olduğundan $|x_1|$ fonksiyonunun x_i, $i = 2, ..., n$ değişkenlerine göre genelleşmiş türevi var ve sıfıra eşittir (Mikhailov 1978, s. 112).

Dikkat edilirse $|x_1|$ fonksiyonun Ω bölgesinde x_1 e göre klasik türevi yoktur ($x_1 = 0$ için türev mevcut değildir).

Örnek 1.2 *$f(x) = signx_1$ fonksiyonu $Q = \{|x| < 1\}$ yuvarında $f_{x_i} = 0$, $i = 2, ...n$ birinci genelleşmiş türevlerine sahiptir ancak f_{x_1} genelleşmiş türevi mevcut değildir.*

f_{x_i}, $i = 2, ..., n$ genelleşmiş türevlerinin varlığı örnek 1.1 de verilen yöntem ile gösterilir. Şimdi f fonksiyonunun x_1 değişkenine göre genelleşmiş türevinin olmadığını gösterelim. Tersine kabul edelim ki f fonksiyonunun x_1 değişkenine göre genelleşmiş türevi olan bir $\omega \in L_{2,loc}(\Omega)$ fonksiyonu mevcut olsun. Bu durumda, her $g(x) \in C_0^1(\overline{\Omega})$ için

$$\begin{aligned} \int_\Omega \omega \overline{g} dx &= -\int_\Omega (signx_1)\, \overline{g}_{x_1} dx = -\int_{\Omega^+} \overline{g}_{x_1} dx + \int_{\Omega^-} \overline{g}_{x_1} dx \\ &= 2\int_{\Omega\cap\{x_1=0\}} \overline{g}_{x_1} dx_2 ... dx_n \end{aligned} \tag{1.2}$$

olur. Bu eşitlik, en başta, hemen hemen heryerde Ω bölgesinde $\omega = 0$ olduğunu gösterir. Aslında (1.2) eşitliğinde Ω^- bölgesinde sıfır olan keyfi bir $g(x) \in C_0^1(\overline{\Omega})$ fonksiyonu yazılırsa $\int_\Omega \omega \overline{g} dx = 0$ olur. Buradan Ω^+ bölgesinde hemen hemen heryerde $\omega = 0$ olduğu görülür. Benzer olarak Ω^- bölgesinde hemen hemen heryerde $\omega = 0$ olduğu gösterilebilir. Bu nedenle her $g(x) \in C_0^1(\overline{\Omega})$ için $\int_\Omega \omega \overline{g} dx = 0$ olur yani $\int_{\Omega\cap\{x_1=0\}} \overline{g}_{x_1} dx_2 ... dx_n = 0$, bu eşitsizlik keyfi $g(x) \in C_0^1(\overline{\Omega})$ için sağlanmaz (Mikhailov 1978, s. 113).

Örnek 1.3 *$Q = \{|x| < 1\}$ yuvarında $f(x) = signx_1$ olmak üzere $f(x) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$ şeklinde tanımlı bir fonksiyonu ele alalım. Örnek 1.2 de f fonksiyonunun f_{x_1} ve f_{x_2} genelleşmiş türevlerinin olmadığı gösterildi. Bununla birlikte $f_{x_1x_2}$ genelleşmiş türevinin varlığı kolayca gösterilebilir. Bunun için keyfi $g(x) \in C_0^2(\overline{\Omega})$ alınarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir:*

$$\int_\Omega \overline{g}_{x_1x_2} f dx = \int_\Omega \varphi(x_1)\overline{g}_{x_1x_2} dx + \int_\Omega \varphi(x_2)\overline{g}_{x_1x_2} dx.$$

Diğer taraftan

$$\int_\Omega \varphi(x_1)\overline{g}_{x_1x_2} dx = -2\int_{\Omega\cap\{x_1<0\}} \overline{g}_{x_1x_2} dx + \int_{\Omega\cap\{x_1>0\}} \overline{g}_{x_1x_2} dx = 0.$$

Benzer şekilde $\int_\Omega \varphi(x_2)\overline{g}_{x_1x_2} dx = 0$ olduğundan

$$\int_\Omega f\overline{g}_{x_1x_2} dx = 0 = \int_\Omega 0 \cdot \overline{g} dx$$

elde edilir. Böylece $f_{x_1x_2}$ genelleşmiş türevi mevcut ve sıfıra eşittir (Mikhailov 1978, s. 114).

Tanım 1.10 (Sobolev Uzayları) *m pozitif bir tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, $\|\cdot\|_{m,p}$ fonksiyoneli aşağıdaki şekilde tanımlansın:*

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, \qquad 1 \leq p < \infty, \tag{1.3}$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_\infty . \tag{1.4}$$

Yukarıdaki eşitliklerde $\|\cdot\|_p$ sembolü $L^p(\Omega)$ uzayındaki normu göstermektedir. (1.3) veya (1.4) normları ile verilen aşağıdaki uzaylar Ω bölgesi üzerinde Sobolev uzayı olarak adlandırılır:

1) $H^{m,p}(\Omega) \equiv \left\{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\right\}$ *kümesinin* $\|\cdot\|_{m,p}$ *normuna göre tamlanışı;*

2) $W^{m,p}(\Omega) \equiv \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$;

3) $W_0^{m,p}(\Omega) \equiv W^{m,p}(\Omega)$ *uzayında* $C_0^\infty(\Omega)$ *uzayının kapanışı.*

Açıktır ki $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ *ve* $W^{2,p}(\Omega) = H^p$ *dir (Adams and Fournier 2003, s. 60).*

Teorem 1.1 $W^{m,p}(\Omega)$ *bir Banach uzayıdır.*

İspat. $\{u_n\}$, $W^{m,p}(\Omega)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. O zaman $\{D^\alpha u\}, 0 < |\alpha| \leq m$ olmak üzere $L^p(\Omega)$ uzayında bir Cauchy dizisidir. $L^p(\Omega)$ uzayı tam olduğundan $n \to \infty$ ve $0 < |\alpha| \leq m$ iken $u_n \to u$, $D^\alpha u_n \to u_\alpha$ olacak şekilde u ve u_α fonksiyonları vardır. $L_p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ olduğundan u_n, $T_{u_n} \in D'(\Omega)$ genelleşmiş fonksiyonunu tanımlar. Her $\phi \in D(\Omega)$ için Hölder eşitsizliğinden

$$|T_{u_n}(\phi) - T_u(\phi)| \leq \int_\Omega |u_n(x) - u(x)|\,|\phi(x)|\,dx \leq \|\phi\|_{p'}\,\|u_n - u\|_p$$

sağlanır. Burada p', p nin üstel eşleniğidir. Bu yüzden, $n \to \infty$ iken her $\phi \in D(\Omega)$ için $T_{u_n}(\phi) \to T_u(\phi)$ dir. Benzer şekilde her $\phi \in D(\Omega)$ için $T_{D^\alpha u_n}(\phi) \to T_{u_n}(\phi)$ olur. Buradan her $\phi \in D(\Omega)$ için

$$T_{u_\alpha}(\phi) = \lim_{n\to\infty} T_{D^\alpha u_n}(\phi) = \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|}\, T_{u_n}(D^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|}\, T_u(D^\alpha \phi)$$

elde edilir. Böylece $0 \leq |\alpha| \leq m$ için $u \in W^{m,p}(\Omega)$ olduğunda Ω bölgesinde genelleşmiş anlamda $u_\alpha = D^\alpha u$ görülür. Son olarak $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{m,p} = 0$ olduğundan $W^{m,p}$ uzayı tamdır (Adams and Fournier 2003, s. 61). ■

Tanım 1.11 **($H^k(\Omega)$ Uzayı)** $H^k(\Omega)$, *kendisi ve k. mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri* $L^2(\Omega)$ *uzayına ait olan tüm fonksiyonların oluşturduğu cümledir. Bu cümleye ait bazı önemli özellikler aşağıda verilmiştir:*

i) $H^k(\Omega)$ lineer uzaydır ve $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$;

ii) $H^k(\Omega)$ üzerinde tanımlanan

$$(f_1, f_2)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha f_1 D^\alpha \overline{f_2} dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır, bu iç çarpım ile tanımlanan norm

$$\|f\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega |D^\alpha f|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

biçimindedir;

iii) $\partial\Omega \in C^k$ ise $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayı, $H^k(\Omega)$ uzayında heryerde yoğundur;

iv) $\partial\Omega \in C^k$ ise $H^k(\Omega)$ ayrılabilir uzaydır (Mikhailov 1978, s. 122).

Teorem 1.2 $H^k(\Omega)$ *uzayı, üzerinde tanımlanan*

$$(f, g)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha f D^\alpha \overline{g} dx \tag{1.5}$$

iç çarpımı ile birlikte bir Hilbert uzayıdır.

İspat. Bunu göstermek için (1.5) tarafından üretilen $H^k(\Omega)$ uzayının

$$\|f\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega |D^\alpha f|^2 \, dx \right)^{1/2} \tag{1.6}$$

normuna göre tam olduğunu ispatlamak yeterlidir. Kabul edelim ki f_m, $m = 1, 2, ..., n$; $H^k(\Omega)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun:

$$\|f_s - f_m\|^2_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega |D^\alpha f_s - D^\alpha f_m|^2 \, dx \to 0, m, s \to \infty.$$

Bu durumda $|\alpha| \le k$ olmak üzere her α için

$$\int_\Omega |D^\alpha f_s - D^\alpha f_m|^2 \, dx \to 0, \ m, s \to \infty \tag{1.7}$$

olur. Özel olarak $\alpha = 0$ durumunda

$$\int_\Omega |f_s - f_m|^2 \, dx \to 0 \tag{1.8}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $L_2(\Omega)$ uzayı tam olduğundan, (1.8) dikkate alınarak f_m, $m = 1, 2..., n$ dizisinin yakınsadığı bir $f \in L_2(\Omega)$ fonksiyonun varlığı ve (1.7) dikkate alınarak

$D^\alpha f_m$ dizisinin yakınsadığı bir $f^\alpha \in L_2(\Omega)$ fonksiyonun varlığı görülür. Ayrıca tüm f_m fonksiyonlarının k. mertebeye kadar genelleşmiş türevleri mevcut ve $L_2(\Omega)$ uzayına ait olduğundan her $g(x) \in C_0^1(\overline{\Omega})$ ve $|\alpha| \leq k$ olacak şekilde her α için

$$(f_m, D^\alpha g)_{L_2(\Omega)} = (-1)^{|\alpha|} (D^\alpha f_m, g)_{L_2(\Omega)}$$

yazılabilir. Bu özdeşlikte $m \to \infty$ için limit alınırsa, f^α fonksiyonunun f in α. mertebeden genelleşmiş türevi olduğu görülür. Böylece $f \in H^k(\Omega)$ ve $\|f_m - f\|_{H^k(\Omega)} \to 0$, $m, s \to \infty$ olur (Mikhailov 1978, s. 121). ■

Yukarıda tanımı verilen Sobolev uzaylarının farklı tipleri mevcuttur. Aşağıda zaman değişkenini bir Banach uzayına dönüştüren fonksiyonların oluşturduğu bazı uzaylar verilmiştir. Kabul edelim ki bir X reel Banach uzayı $\|.\|$ normuyla verilsin.

Tanım 1.12 ($C([0,T];X)$ uzayı) *$u : [0,T] \to X$ şeklinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların uzayı $C([0,T];X)$ ile gösterilir, bu uzayda norm*

$$\|u\|_{C([0,T];X)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| < \infty$$

şeklinde verilir (Evans 1997, s. 285).

Tanım 1.13 ($L^p(0,T;X)$ Uzayı) *$u : [0,T] \to X$ şeklinde tanımlı ve ölçülebilir tüm fonksiyonların uzayı $L^p(0,T;X)$ ile gösterilir ve bu uzayda norm p sayısının durumuna göre*

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(0,T;X)} &:= \left(\int_0^T \|u(x)\|^p \, dt \right)^{1/p} < \infty, \ 1 \leq p \leq \infty, \\ \|u\|_{L^\infty(0,T;X)} &:= esp \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| < \infty \end{aligned}$$

olarak tanımlanır (Evans, 1997 s. 285).

Tanım 1.14 ($W^{1,p}(0,T;X)$ uzayı) *Kendisi ve birinci mertebeden genelleşmiş türevi $L^p(0,T;X)$ uzayına ait olan tüm u fonksiyonlarının uzayı $W^{1,p}(0,T;X)$ ile gösterilir. Ayrıca burada norm*

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} := \begin{cases} \int_0^T \left(\|u(t)\|^p + \left\|u'(t)\right\|^p dt \right)^{1/p}, 0 \leq p < \infty, \\ \quad ess \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\|u(t)\| + \left\|u'(t)\right\| \right), (p = \infty) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Açıktır ki

$$H^1(0,T;X) = W^{1,2}(0,T;X)$$

olur (Evans 1997, s. 286).

Tanım 1.15 (Gronwall Eşitsizliği) *Kabul edelim ki* $m \geq 0$ *ve* $b > 0$ *olsun. Ayrıca* $u, h : [0, b] \to [0, \infty)$ *sürekli negatif olmayan fonksiyonlar olup her* $t \in [0, b]$ *için*

$$u(t) \leq m + \int_0^t h(s)u(s)ds \tag{1.9}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda her $t \in [0, b]$ *için* u *aşağıdaki eşitsizliği doğrular:*

$$u(t) \leq me^{\int_0^t h(s)ds}. \tag{1.10}$$

İspat. (1.9) eşitsizliğinin sağ tarafı her $t \in [0, b]$ için

$$F(t) \equiv m + \int_0^t h(s)u(s)ds$$

olarak gösterilirse, F negatif olmayan bir fonksiyon olur. Ayrıca integral hesabın temel teoreminden F in diferensiyellenebilir olduğu görülür ve

$$F'(t) = h(t)u(t) \leq h(t)F(t)$$

eşitsizliği sağlanır. Kabul edelim ki $m > 0$ olsun bu durumda her $t \in [0, b]$ için $F(t) > 0$ olur. Eğer son eşitsizlik $F(t)$ ile bölünürse

$$\frac{d}{dt} \ln F(t) = \frac{F'(t)}{F(t)} \leq h(t)$$

elde edilir. Eğer son eşitsizlik kullanılırsa

$$\ln F(t) - \ln m = \int_0^t \frac{d}{dt} \ln F(s)ds \leq \int_0^t h(s)ds$$

bulunur. Böylece doğal üstel fonksiyon bir artan fonksiyon olduğundan

$$e^{\ln F(t) - \ln m} \leq e^{\int_0^t h(s)ds}$$

yazılabilir. Buradan Gronwall eşitsizliği olan (1.10) elde edilir ve $m > 0$ durumunda ispat tamamlanmış olur. $m = 0$ durumunda, $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$ sıfıra yakınsayan pozitif sayıların bir dizisi olmak üzere her $t \in [0, b]$ için ve tüm j ler için

$$u(t) \leq m_j + \int_0^t h(s)u(s)ds$$

yazılabilir. Sonuç olarak

$$u(t) \leq m_j e^{\int_0^t h(s)ds}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $t \to \infty$ için limit alınırsa $u(t) \leq 0$ olur. Böylece $m = 0$ durumunda da (1.10) Gronwall eşitsizliği sağlanır (Betounes, s. 557-558).

BÖLÜM 2

SERBEST TRANSPORT DENKLEM İÇİN SOĞURMA KATSAYISININ BELİRLENMESİ TERS PROBLEMİ

Bu bölümde, sınırlı bir bölgede serbest transport denklem için soğurma katsayısının belirlenmesi probleminin çözümünün kararlılığı Carleman değerlendirmesi kullanılarak araştırılmaktadır. Matematiksel biyolojide, örneğin difüzyon-reaksiyon modelleri gibi ortaya çıkan bazı sistemler saçılım terimi ihtiva etmeyen transport denklemleri içerir. Bu denklemler genel olarak organizmaların (hücrelerin, parazitlerin) yoğunluğunun evrimini tasvir eder. Burada ele alınan problem, angiogenez süreciyle bağlantılı bir ters problemdir. Ω, $\mathbb{R}^n$ de açık bağlantılı bir bölge olmak üzere $\partial\Omega = \Gamma$ sınırı, C^2 sınıfından olsun. Ayrıca $\Omega_T := \Omega \times (0,T)$ bölgesi verilsin. $u(x,t) \in \mathbb{R}$ fonksiyonu $t > 0$ zamanında, $x \in \mathbb{R}^n$ konumunda, $A = A(x)$ hızıyla süzülen parçacıkların yoğunluğunu göstersin. $\nu(x)$, $x \in \partial\Omega$ noktasında $\partial\Omega$ sınırına göre birim dış normal vektör olmak üzere $\Gamma_\pm$ alt sınırları aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\Gamma_+ = \{x \in \partial\Omega; \nu(x)\cdot A > 0\}, \; \Gamma_- = \{x \in \partial\Omega; \nu(x)\cdot A \leq 0\}.$$

Burada Γ_-, bölgeye girişlerin olduğu sınır parçasını, Γ_+ ise çıkışların olduğu sınır parçasını ifade eder.

Aşağıdaki bağıntılardan u fonksiyonunun bulunması problemini göz önüne alalım:

$$\partial_t u(x,t) + A(x)\cdot\nabla u(x,t) + p(x)u(x,t) = 0, \;\; (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{2.1}$$

$$u(x,t) = h(x,t), \;\; (x,t) \in \Gamma_- \times (0,T), \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \;\; (x,t) \in \Omega. \tag{2.3}$$

(2.1) denkleminde soğurma katsayısı olan p, $L^\infty(\Omega)$ uzayına aittir. Ayrıca $A \in (W^{1.\infty}(\Omega))^n$ olup (h, u_0) fonksiyonlar çifti de $L^2(\Gamma_- \times (0,T)) \times L^2(\Omega)$ uzayında yer alan sınır ve başlangıç verilerine karşılık gelmektedir. Bir W uzayını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$W = \left\{ u \in L^2(\Omega \times (0,T)); \frac{\partial u}{\partial t} + A\cdot\nabla u \in L^2(\Omega \times (0,T)) \right\}.$$

Bu durumda (2.1)-(2.3) probleminin W uzayına ait tek bir çözümü olduğu bilinmektedir ve $u \in C\left([0,T]\,; L^2\left(\Omega\right)\right)$, (Dautray and Lions 1993).
Üstelik, eğer $u_0 \in C^1\left(\Omega\right), h \in C^1\left([0,T]\,; L^2\left(\Gamma_-\right)\right)$ ve Γ_- sınırı üzerinde

$$u_0 = h\mid_{t=0},\ \partial_t h\mid_{t=0} + A\cdot\nabla u_0 + V u_0 = 0$$

uyumluluk şartları sağlanırsa

$$u \in C^1\left([0,T]\,; L^2\left(\Omega\right)\right),\ A\cdot\nabla u \in C\left([0,T]\,; L^2\left(\Omega\right)\right)$$

olur. Eğer $u_0 \geq 0$ ise maksimum prensibinden $u \geq 0$ olduğu görülür (Dautray and Lions, 1993). Burada C pozitif bir sabiti göstermektedir.
Bu bölümde ele alınan problem aşağıda verilmiştir :
(2.1)-(2.3) bağıntılarından, $p(x)$ soğurma katsayısının $\left(\partial_t u\right)|_{\Gamma_+\times(0,T)}$ verisi kullanılarak belirlenmesi mümkün müdür? Burada kullanılan ve Carleman değerlendirmelerine dayanan yöntem, kuvvetli geometrik şartlara ihtiyaç duymaktadır.
Geometrik koşul:

$$\exists x_0 \notin \overline{\Omega}\ ,\ \text{öyle ki } \Gamma_+ \supset \left\{x \in \partial\Omega, (x-x_0)\cdot\nu(x) \geq 0\right\}. \tag{2.4}$$

İlk olarak, Carleman değerlendirmesini elde etmek için aşağıdaki ağırlık fonksiyonunu tanımlayalım:
Ağırlık fonksiyonu:
Kabul edelim $x_0 \notin \overline{\Omega}$ için Γ_+ alt sınırı (2.4) koşulunu sağlasın. $\beta \in (0,1)$ olmak üzere $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$ için

$$\psi(x,t) = |x-x_0|^2 - \beta t^2 + M,\ \varphi(x,t) = e^{\lambda\psi(x,t)},\ \lambda > 0 \tag{2.5}$$

fonksiyonları tanımlansın. Burada M sayısı, $\Omega \times (0,T)$ bölgesinde $\psi > 0$ olacak şekilde seçilsin ve β,

$$T > \frac{1}{\sqrt{\beta}}\sup_{x\in\Omega}|x-x_0| \tag{2.6}$$

eşitsizliğini sağlasın.
Literatürde, integral terimi içeren transport denklem için ters problemlerle ilgili sınırlı sayıda çalışma mevcuttur. Choulli and Stefanov (1996), $u\mid_{\Gamma_+}$ ve $u\mid_{\Gamma_-}$ büyüklükleri arasındaki ilişkiyi veren Albedo operatörü yardımıyla soğurma katsayısının belirlenmesi

problemini ele almıştır. Zamana bağlı tranport denklemler için katsayı ters problemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği Prilepko and Ivankov (1985) tarafından ispatlanmıştır. Transport denklemler için aşırı belirgin ters problemlerle ilgili bazı sonuçlar Tamasan (2002) ve Stefanov (2003) de verilmiştir. Bazı katsayıların belirlenmesi problemi için kararlılık değelendirmeleri Bal and Jolivet (2009, 2010) tarafından Albedo operatörleri kullanılarak elde edilmiştir. Bu çalışmalarda, sonsuz sayıda ölçüm yapılması gereklidir. Bal (2009) ve Stefanov (2003) tarafından lineer transport denklemler için ters problemlerle ilgili son zamanlarda elde edilmiş önemli sonuçlar kapsamlı olarak sunulmuştur. Bu çalışmalarda farklı ters problemler ele alınmış, durağan ve durağan olmayan durumlar için teklik ve kararlılık sonuçları ispatlanmıştır. Klibanov and Pamyatnykh (2008) de uygulanan yöntem, Bal and Jolivet (2009, 2010) da kullanılan yaklaşımdan farklıdır. Burada $\Gamma_+ \times (0,T)$ sınırında tek bir ölçüm yapılmış, başlangıç değeri ve $\Gamma_- \times (0,T)$ üzerinde sınır verileri verilmiştir. Uygun sınır ölçümlerinden, transport denklem için soğurma katsayılarının belirlenmesi ters problemi, Carleman değerlendirmeleri kullanılarak Klibanov and Pamyatnykh (2008) ve Machida and Yamamoto (2014) tarafından incelenmiştır. Machida and Yamamoto (2014) den farklı olarak Gaitan and Ouzzane (2014), hızın uzaysal değişkene bağlı olma durumunu ele almıştır. Ayrıca, Carleman değerlendirmesinde bir yerine iki büyük parametre kullanılmış ve kararlılık ispatı enerji değerlendirmesi yardımıyla yapılmıştır. Transport denklem için bir Lipschitz tipi kararlılık değerlendirmesi, Klibanov and Pamyatnykh (2008) tarafından noktasal Carleman değerlendirmesi kullanılarak elde edilmiştir.

2.1 CARLEMAN DEĞERLENDİRMELERİ

Kabul edelim ki ψ ağırlık fonksiyonu

$$|(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi)(x,t)| \neq 0, \forall(x,t) \in \overline{\Omega}\times[-T,T] \tag{2.7}$$

şartını sağlasın. (2.7) durumunu sağlayan bir örnek verelim:

$0 \notin \overline{\Omega}$ ve $A(x) = x$ olduğunu kabul edelim. Eğer

$$T < \frac{1}{\beta}\min_{\overline{\Omega}} |x|^2$$

olursa, o zaman (2.7) sağlanır. Diğer bir taraftan, (2.6) durumu

$$T > \frac{1}{\sqrt{\beta}}\max_{\overline{\Omega}} |x|$$

olmasını gerektirir.

Bu nedenle, β parametresi için aşağıdaki şart elde edilir:

$$\sqrt{\beta} < \min_{\overline{\Omega}} |x|^2 \cdot \left(\max_{\overline{\Omega}} |x| \right)^{-1}.$$

İlk olarak, ileri problem için bir Carleman değerlendirmesi verilecektir.

Önerme 2.1 *Kabul edelim ki $p \in L^{\infty}(\Omega)$ olsun. ψ (2.5) eşitliği ile tanımlanan ve (2.7) şartını sağlayan bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda her $s > s_0, \lambda > \lambda_0$ için*

$$Lv := \partial_t v + A \cdot \nabla v \in L^2 (\Omega \times (0,T)), \; v\,|_{\Gamma_-} = 0, \, v(\cdot, 0) = v(\cdot, T) = 0$$

bağıntılarını sağlayan her $v \in L^2 (\Omega \times (0,T))$ için

$$\begin{aligned} & \|P_1 (e^{s\varphi} v)\|_{L^2(\Omega_T)} + s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega \varphi |v|^2 e^{2s\varphi} dxdt \\ \leq \; & C \int_0^T \int_\Omega |Lv|^2 e^{2s\varphi} dxdt + Cs\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_+} \varphi |v|^2 A \cdot \nu e^{2s\varphi} d\sigma dt \end{aligned} \tag{2.8}$$

olacak şekilde s_0, λ_0 ve $C = C(s_0, \lambda_0, \Omega, T, \Gamma) > 0$ sabitleri vardır. Burada P_1, aşağıdaki (2.9) ve (2.10) eşitliklerini sağlar.

İspat. Öncelikle $s > 0$ için $w(x,t) = e^{s\varphi(x,t)} v(x,t)$ şeklinde yeni bir fonksiyon ve $Pw = e^{s\varphi} L (e^{-s\varphi} w)$ operatörünü tanımlayalım. O halde, $\partial_t v = e^{-s\varphi}(\partial_t w - s\partial_t \varphi w)$ ve $\nabla v = \nabla w e^{-s\varphi} - sw\nabla\varphi e^{-s\varphi}$ olduğundan

$$\begin{aligned} Pw &= e^{s\varphi} L \left(e^{-s\varphi} w\right) \\ &= e^{s\varphi} \left[e^{-s\varphi} \left(\partial_t w - s\partial_t \varphi w + \nabla w \cdot A(x) - swA(x) \cdot \nabla\varphi\right)\right] \\ &= \partial_t w - s\partial_t \varphi w + \nabla w \cdot A(x) - swA(x) \cdot \nabla\varphi \end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca $\varphi = e^{\lambda\psi}$, $\partial_t \varphi = s\lambda\varphi\partial_t\psi$ ve $\nabla\varphi = s\lambda\varphi\nabla\psi$ eşitlikleri göz önünde bulundurularak

$$Pw = \partial_t w + A \cdot \nabla w - s\lambda\varphi \left(\partial_t \psi + A \cdot \nabla\psi\right) w := P_1 w + P_2 w \tag{2.9}$$

elde edilir. Burada $P_1 w$ ve $P_2 w$ sırasıyla

$$P_1 w = \partial_t w + A \cdot \nabla w, \, P_2 w = -s\lambda\varphi \left(\partial_t \psi + A \cdot \nabla\psi\right) w \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlıdır. O halde (2.9) ve (2.10) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\|Pw\|^2_{L^2(\Omega_T)} &= (P_1w + P_2w, P_1w + P_2w)_{L^2(\Omega_T)} \\
&= (P_1w, P_1w + P_2w)_{L^2(\Omega_T)} + (P_2w, P_1w + P_2w)_{L^2(\Omega_T)} \\
&= (P_1w, P_1w)_{L^2(\Omega_T)} + (P_1w, P_2w)_{L^2(\Omega_T)} \\
&\quad + (P_2w, P_1w)_{L^2(\Omega_T)} + (P_2w, P_2w)_{L^2(\Omega_T)} \\
&= (P_1w, P_1w)_{L^2(\Omega_T)} + (P_1w, P_2w)_{L^2(\Omega_T)} \\
&\quad + (P_1w, P_2w)_{L^2(\Omega_T)} + (P_2w, P_2w)_{L^2(\Omega_T)} \\
&= \|P_1w\|^2_{L^2(\Omega_T)} + 2\,(P_1w, P_2w)_{L^2(\Omega_T)} + \|P_2w\|^2_{L^2(\Omega_T)} \\
&\geq 2\,(P_1w, P_2w)_{L^2(\Omega_T)} \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Şimdi $2\,(P_1w, P_2w)_{L^2(\Omega_T)}$ ifadesini hesaplayalım. Kısmi integrasyon yardımıyla, $w(\cdot, 0) = w(\cdot, T)$ ve $w\,|_{\Gamma_-} = 0$ koşulları dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
2\,(P_1w, P_2w)_{L^2(\Omega_T)} &= 2\,(\partial_t w + A\cdot\nabla w, -s\lambda\varphi(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi)\,w)_{L^2(\Omega_T)} \\
&= 2\int_0^T\int_\Omega (\partial_t w + A\cdot\nabla w)\,(-s\lambda\varphi\,(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi)\,w)\,dxdt \\
&= -2s\lambda\int_0^T\int_\Omega w\partial_t w\varphi\,(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi)\,dxdt \\
&\quad -2s\lambda\int_0^T\int_\Omega w\nabla w\cdot A\varphi\,(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi)\,dxdt \\
&= -s\lambda\int_0^T\int_\Omega \partial_t\left(w^2\right)\varphi\,(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi)\,dxdt \\
&\quad -s\lambda\int_0^T\int_\Omega \nabla\left(w^2\right)\cdot A\varphi\,(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi)\,dxdt \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi, I_1 ve I_2 terimlerini değerlendirelim:

$$\begin{aligned}
I_1 &= -s\lambda\int_0^T\int_\Omega \partial_t\left(w^2\right)\varphi\,(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi)\,dxdt \\
&= s\lambda\int_0^T\int_\Omega w^2\varphi\,(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi)\,dxdt + s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega w^2\varphi\partial_t\psi\,(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi)\,dxdt \\
&\quad +s\lambda\int_0^T\int_\Omega w^2\varphi\partial_t\,(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi)\,dxdt \\
&= s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega w^2\varphi\partial_t\psi\,(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi)\,dxdt + s\lambda\int_0^T\int_\Omega w^2\varphi\partial_t\,(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi)\,dxdt,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= s\lambda \int_0^T \int_\Omega \nabla\left(w^2\right) A\varphi\left(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi\right) dxdt \\
&= -s\lambda \int_0^T \int_\Omega \operatorname{div}\left(w^2 A\varphi\left(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi\right)\right) dxdt \\
&\quad + s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega \varphi\nabla\psi\cdot A\left(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi\right) w^2 dxdt \\
&\quad + s\lambda \int_0^T \int_\Omega \varphi\nabla\left(A\left(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi\right)\right) w^2 dxdt \\
&= -s\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_+} w^2 A\cdot\nu\left(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi\right)\varphi d\sigma dt \\
&\quad + s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega \varphi\nabla\psi\cdot A\left(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi\right) w^2 dxdt \\
&\quad + s\lambda \int_0^T \int_\Omega \varphi\nabla\left(A\left(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi\right)\right) w^2 dxdt
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca s ve λ nın kuvvetlerine göre yüksek ve düşük mertebeden terimleri biraraya getirirsek

$$
\begin{aligned}
& s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega w^2\varphi\left(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi\right)^2 dxdt - s\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_+} w^2 A\cdot\nu\left(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi\right)\varphi d\sigma dt \\
& + s\lambda \int_0^T \int_\Omega w^2\varphi\left(\partial_t^2\psi + 2A\cdot\nabla\partial_t\psi + |A|^2\triangle\psi + \nabla\cdot A\left(\partial_t\psi + A\cdot\nabla\psi\right)\right) dxdt \\
= {} & 2\left(P_1 w, P_2 w\right)_{L^2(\Omega_T)}
\end{aligned}
$$

yazılır. Burada s ve λ parametrelerine göre yüksek dereceden kuvvetleri içeren terimlerin pozitif olması gerekmektedir. ψ ve A ile ilgili regülerlik koşullarını ve (2.7) şartını kullanarak

$$
\begin{aligned}
& \int_0^T \int_\Omega |P_1 w|^2 dxdt + s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega \varphi w^2 dxdt \\
\leq {} & C \int_0^T \int_\Omega |Pw|^2 dxdt + Cs\lambda \int_0^T \int_\Omega \varphi w^2 dxdt \\
& + Cs\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_+} w^2 A\cdot\nu\varphi d\sigma dt
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son eşitsizlikte, $s > 0$ ve $\lambda > 0$ için sağ taraftaki ikinci integral, sol taraftaki $s\lambda^2$ kuvvetli terim tarafından absorbe edilir, böylece

$$
\begin{aligned}
& \int_0^T \int_\Omega |P_1 w|^2 dxdt + s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega w^2\varphi dxdt \\
\leq {} & C \int_0^T \int_\Omega |Pw|^2 dxdt + Cs\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_+} w^2 A\cdot\nu\varphi d\sigma dt
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Son olarak, w den v ye geçersek, ispat tamamlanır. Şimdi, geri problem için bir Carleman değerlendirmesi verilecektir. ■

Önerme 2.2 *Kabul edelim ki $p \in L^{\infty}(\Omega)$ olsun. ψ, (2.5) eşitliği ile tanımlanan ve (2.7) ifadesini sağlayan bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda her $s > s_0, \lambda > \lambda_0$ için*

$$\begin{aligned} L_{geri}v &: = -\partial_t v + A \cdot \nabla v \in L^2(\Omega \times (0,T)), \\ v|_{\Gamma_-} &= 0,\ v(\cdot,0) = v(\cdot,T) = 0, \end{aligned}$$

bağıntılarını sağlayan her $v \in L^2(\Omega \times (0,T))$ için

$$\begin{aligned} s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega \varphi |v|^2 e^{s\varphi} dxdt &\leq C \int_0^T \int_\Omega |L_{geri}v|^2 e^{s\varphi} dxdt \\ &+ Cs\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_+} \varphi |v|^2 A \cdot \nu e^{2s\varphi} dxdt \end{aligned} \tag{2.12}$$

olacak şekilde s_0, λ_0 ve $C = C(s_0,\ \lambda_0,\ \Omega,\ T,\ \Gamma) > 0$ sabitleri vardır.

İspat. $s > 0$ için, $w(x,t) = e^{s\varphi(x,t)}v(x,t)$ şeklinde yeni bir fonksiyon ve $Pw = e^{s\varphi}L_{geri}(e^{-s\varphi}w)$ operatörünü tanımlayalım. Ayrıca $\partial_t v = e^{-s\varphi}(\partial_t w - s\partial_t\varphi w)$ ve $\nabla v = \nabla w e^{-s\varphi} - sw\nabla\varphi e^{-s\varphi}$ olduğundan

$$\begin{aligned} P_{geri}w &= e^{s\varphi} L_{geri}\left(e^{-s\varphi}w\right) \\ &= e^{s\varphi}\left[e^{-s\varphi}\left(-\partial_t w + s\partial_t\varphi w + \nabla w \cdot A(x) - swA(x) \cdot \nabla\varphi\right)\right] \\ &= -\partial_t w + s\partial_t\varphi w + \nabla w \cdot A(x) - swA(x) \cdot \nabla\varphi \end{aligned}$$

olur. $\varphi = e^{\lambda\psi}$, $\partial_t\varphi = s\lambda\varphi\partial_t\psi$ ve $\nabla\varphi = s\lambda\varphi\nabla\psi$ olduğundan

$$P_{geri}w = -\partial_t w + A \cdot \nabla w + s\lambda\varphi\left(\partial_t\psi + A \cdot \nabla\psi\right)w := P_{1,geri}w + P_{2,geri}w$$

elde edilir. Burada $P_{1,geri}w$ ve $P_{2,geri}w$ sırasıyla

$$\begin{aligned} P_{1,geri}w &= -\partial_t w + A \cdot \nabla w, \\ P_{2,geri}w &= +s\lambda\varphi\left(\partial_t\psi - A \cdot \nabla\psi\right)w \end{aligned}$$

şeklindedir. O halde,

$$\begin{aligned} \|P_{geri}w\|^2_{L^2(\Omega_T)} &= \left(P_{1,geri}w + P_{2,geri}w, P_{1,geri}w + P_{2,geri}w\right)_{L^2(\Omega_T)} \\ &= \left(P_{1,geri}w, P_{1,geri}w + P_{2,geri}w\right)_{L^2(\Omega_T)} + \left(P_{2,geri}w, P_{1,geri}w + P_{2,geri}w\right)_{L^2(\Omega_T)} \\ &= \left(P_{1,geri}w, P_{1,geri}w\right)_{L^2(\Omega_T)} + \left(P_{1,geri}w, P_{2,geri}w\right)_{L^2(\Omega_T)} \\ &\quad + \left(P_{2,geri}w, P_{1,geri}w\right)_{L^2(\Omega_T)} + \left(P_{2,geri}w, P_{2,geri}w\right)_{L^2(\Omega_T)} \\ &= \left(P_{1,geri}w, P_{1,geri}w\right)_{L^2(\Omega_T)} + \left(P_{1,geri}w, P_{2,geri}w\right)_{L^2(\Omega_T)} \\ &\quad + \left(P_{1,geri}w, P_{2,geri}w\right)_{L^2(\Omega_T)} + \left(P_{2,geri}w, P_{2,geri}w\right)_{L^2(\Omega_T)} \\ &= \|P_{1,geri}w\|^2_{L^2(\Omega_T)} + 2\left(P_{1,geri}w, P_{2,geri}w\right)_{L^2(\Omega_T)} + \|P_{2,geri}w\|^2_{L^2(\Omega_T)} \\ &\geq 2\left(P_{1,geri}w, P_{2,geri}w\right)_{L^2(\Omega_T)} \end{aligned}$$

yazılabilir. Şimdi $2\left(P_{1,geri}w, P_{2,geri}w\right)_{L^2(\Omega_T)}$ ifadesini hesaplayalım. Kısmi integrasyon yardımıyla, $w(\cdot,0)=w(\cdot,T)$ ve $w\mid_{\Gamma_-}=0$ koşulları ve $\partial_t\left(w^2\right)=2w\partial_t w$ ve $\nabla\left(w^2\right)=2w\nabla w$ eşitlikleri dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
2\left(P_{1,geri}w, P_{2,geri}w\right)_{L^2(\Omega_T)} &= 2\left(\left(-\partial_t w + A\cdot\nabla w, s\lambda\varphi(\partial_t\psi - A\cdot\nabla\psi)\, w\right)\right)_{L^2(\Omega_T)} \\
&= 2\int_0^T\int_\Omega \left(-\partial_t w + A\cdot\nabla w\right)\left(s\lambda\varphi\left(\partial_t\psi - A\cdot\nabla\psi\right)w\right)dxdt \\
&= 2s\lambda\int_0^T\int_\Omega w\partial_t w\varphi\left(\partial_t\psi - A\cdot\nabla\psi\right)dxdt \\
&\quad +2s\lambda\int_0^T\int_\Omega w\nabla w\cdot A\varphi\left(\partial_t\psi - A\cdot\nabla\psi\right)dxdt \\
&= s\lambda\int_0^T\int_\Omega \partial_t\left(w^2\right)\varphi\left(\partial_t\psi - A\cdot\nabla\psi\right)dxdt \\
&\quad +s\lambda\int_0^T\int_\Omega \nabla\left(w^2\right)\cdot A\varphi\left(\partial_t\psi - A\cdot\nabla\psi\right)dxdt \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
I_1 &= s\lambda\int_0^T\int_\Omega \partial_t\left(w^2\right)\varphi\left(\partial_t\psi - A\cdot\nabla\psi\right)dxdt \\
&= -s\lambda\int_0^T\int_\Omega w^2\varphi\left(\partial_t\psi - A\cdot\nabla\psi\right)dxdt \\
&\quad -s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega w^2\varphi\partial_t\psi\left(\partial_t\psi - A\cdot\nabla\psi\right)dxdt \\
&\quad -s\lambda\int_0^T\int_\Omega w^2\varphi\partial_t\left(\partial_t\psi - A\cdot\nabla\psi\right)dxdt \\
&= -s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega w^2\varphi\partial_t\psi\left(\partial_t\psi - A\cdot\nabla\psi\right)dxdt \\
&\quad -s\lambda\int_0^T\int_\Omega w^2\varphi\left(\partial_t^2\psi - A\cdot\nabla\partial_t\psi\right)dxdt,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= s\lambda \int_0^T \int_\Omega \nabla \left(w^2\right) A\varphi \left(\partial_t \psi - A \cdot \nabla \psi\right) dxdt \\
&= s\lambda \int_0^T \int_\Omega \operatorname{div} \left(w^2 A\varphi \left(\partial_t \psi - A \cdot \nabla \psi\right)\right) dxdt \\
&\quad -s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega \varphi \nabla \psi \cdot A \left(\partial_t \psi - A \cdot \nabla \psi\right) w^2 dxdt \\
&\quad -s\lambda \int_0^T \int_\Omega \varphi \nabla \left(A \left(\partial_t \psi - A \cdot \nabla \psi\right)\right) w^2 dxdt \\
&= s\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_+} w^2 A \cdot \nu \left(\partial_t \psi - A \cdot \nabla \psi\right) \varphi d\sigma dt \\
&\quad -s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega \varphi \nabla \psi \cdot A \left(\partial_t \psi - A \cdot \nabla \psi\right) w^2 dxdt \\
&\quad -s\lambda \int_0^T \int_\Omega \varphi \nabla \left(A \left(\partial_t \psi - A \cdot \nabla \psi\right)\right) w^2 dxdt
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca s ve λ nın kuvvetlerine göre yüksek mertebeden ve düşük mertebeden terimleri biraraya getirirsek

$$
\begin{aligned}
& 2 \left(P_{1,geri} w, P_{2,geri} w\right)_{L^2(\Omega_T)} \\
= \;& s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega w^2 \varphi \left(\partial_t \psi - A \cdot \nabla \psi\right)^2 dxdt + s\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_+} w^2 A \cdot v \left(\partial_t \psi - A \cdot \nabla \psi\right) \varphi d\sigma dt \\
& + s\lambda \int_0^T \int_\Omega w^2 \varphi \left(\partial_t^2 \psi - 2A \cdot \nabla \partial_t \psi + |A|^2 \triangle \psi - \nabla \cdot A \left(\partial_t \psi - A \cdot \nabla \psi\right)\right) dxdt
\end{aligned}
$$

denklemi yazılır. Son eşitlikte $\partial_t \psi - A \cdot \nabla \psi$ ifadesinin işaretini bilmiyoruz, (2.7) den $\partial_t \psi - A \cdot \nabla \psi \neq 0$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
& s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega \varphi w^2 dxdt \\
\leq \;& \int_0^T \int_\Omega \left|P_{1,geri} w\right|^2 dxdt + Cs\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_+} w^2 A \cdot \nu \varphi d\sigma dt
\end{aligned}
$$

bulunur. Şimdi $w(x,t) = e^{s\varphi(x,t)} v(x,t)$ eşitliğini kullanarak w den v ye geçelim:

$$
\begin{aligned}
P_{geri} w &= -\partial_t w + A \cdot \nabla w + s\lambda \varphi \left(\partial_t \psi - A \cdot \nabla \psi\right) w \\
&= -e^{s\varphi} \partial_t v - s e^{s\varphi} \partial_t \varphi \nu + A \left(e^{s\varphi} \nabla v + s e^{s\varphi} \nabla \varphi v\right) + s\lambda \varphi \left(\partial_t \psi - A \cdot \nabla \psi\right) e^{s\varphi}
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$\int_0^T\int_\Omega |P_{geri}w|^2\, dxdt = \int_0^T\int_\Omega |-\partial_t w + A\cdot\nabla w + s\lambda\varphi\left(\partial_t\psi - A\cdot\nabla\psi\right)w|^2\, dxdt$$

$$= \int_0^T\int_\Omega |-e^{s\varphi}\partial_t v - se^{s\varphi}\partial_t\varphi\nu + A\left(e^{s\varphi}\nabla v + se^{s\varphi}\nabla\varphi v\right) + s\lambda\varphi\left(\partial_t\psi - A\cdot\nabla\psi\right)e^{s\varphi}|^2\, dxdt$$

$$\leq \int_0^T\int_\Omega e^{s\varphi}\,|-\partial_t v - s\lambda\partial_t\psi\varphi\nu + A\cdot\nabla v + s\lambda\varphi\nabla\psi v + s\lambda\varphi v\partial_t\psi - s\lambda\varphi A\cdot\nabla\psi v|^2\, dxdt$$

$$= \int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi}\,|-\partial_t v + A\cdot\nabla v|^2$$

$$= \int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi}\,|L_{geri}v|^2$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned} s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega \varphi\,|v|^2\, e^{s\varphi}dxdt \;&\leq\; C\int_0^T\int_\Omega |L_{geri}v|^2\, e^{s\varphi}dxdt \\ &\quad + Cs\lambda\int_0^T\int_{\Gamma_+}\varphi\,|v|^2\, A\cdot\nu e^{s\varphi}dxdt \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi, (2.8) ve (2.12) Carleman değerlendirmelerini kullanarak aşağıdaki önermeyi verebiliriz. ■

Önerme 2.3 *Kabul edelim ki $p \in L^\infty(\Omega)$ olsun. ψ, (2.5) eşitliği ile tanımlanan ve (2.7) şartını sağlayan ağırlık fonksiyonu olsun.*

$$\widehat{A}(x,t) = \begin{cases} A(x),\ t\in(0,T), \\ -A(x),\ t\in(-T,0) \end{cases} \tag{2.13}$$

olarak tanımlansın. O halde, her $s > s_0, \lambda > \lambda_0$ için

$$\begin{aligned} Lv \;&:= \partial_t v + \widehat{A}\cdot\nabla v \in L^2\left(\Omega\times(-T,T)\right), \\ v|_{\Gamma_-} \;&=\; 0,\ v\left(\cdot,-T\right) = v\left(\cdot,T\right) = 0 \end{aligned}$$

bağıntılarını sağlayan her $v \in L^2\left(\Omega\times(0,T)\right)$ için

$$\begin{aligned} &\|P\left(e^{s\varphi}v\right)\|^2_{L^2(\Omega\times(-T,T))} + s\lambda^2\int_{-T}^T\int_\Omega \varphi\,|v|^2\, e^{2s\varphi}dxdt \\ \leq\;& C\int_{-T}^T\int_\Omega |Lv|^2\, e^{2s\varphi}dxdt \\ &+ Cs\lambda\int_{-T}^T\int_{\Gamma_+}\varphi\,|v|^2\,\widehat{A}\cdot\nu e^{2s\varphi}d\sigma dt, \end{aligned} \tag{2.14}$$

olacak şekilde s_0, λ_0 ve $C = C(s_0,\ \lambda_0,\ \Omega,\ T,\ \Gamma) > 0$ sabitleri vardır.

2.2 KARARLILIK DEĞERLENDİRMELERİ

Bu bölümde, $p(x)$ soğurma katsayısı için kararlılık ve teklik sonuçları verilmiştir. Bu tür problemler, kötü konulmuş olduğundan sayısal çözümleri açısından kararlılık değerlendirmeleri önemlidir. İspat için, hem yerel hem de genel Carleman değerlendirmeleri ve enerji değerlendirmeleri kullanılır.

Teorem 2.1 Kabul edelim ki sırasıyla u ve $\widetilde{u}$ (2.1)-(2.3) probleminin (p, h, u_0) ve $(\widetilde{p}, h, u_0)$ için birer çözümü olsun. (2.5) eşitliği ile tanımlanan ağırlık fonksiyonu ψ, (2.7) şartını sağlasın. Bu durumda bir $C > 0$ sabiti vardır öyle ki

$$\int_\Omega |(p-\widetilde{p})(x)|^2 \, dx \leq C \int_0^T \int_{\Gamma_+} |(\partial_t u - \partial_t \widetilde{u})(x,t)|^2 \, d\sigma dt$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Teoremin ispatı dört adımda verilecektir.

Adım 1. Problem lineer hale dönüştürülür. Bunun için $U = u - \widetilde{u}$ olarak alınarak, $\partial_t U$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde genişletilir:

$$Y(x,t) = \begin{cases} \partial_t U(x,t), t > 0, \\ \partial_t U(x,-t), t < 0. \end{cases}$$

Böylece Y aşağıdaki problemin çözümü olur:

$$\partial_t Y + \widehat{A}(x,t) \cdot \nabla Y + p(x) Y = (p-\widetilde{p})(x) \partial_t \widetilde{u}, \ (x,t) \in \Omega \times (-T,T), \tag{2.15}$$

$$Y(x,t) = 0, \ (x,t) \in \Gamma_- \times (-T,T), \tag{2.16}$$

$$Y(x,0) = (p-\widetilde{p})(x) u_0(x), x \in \Omega. \tag{2.17}$$

Burada $\widehat{A}$, (2.13) şeklinde tanımlanır.

Adım 2. Y fonksiyonu teoremin hipotezinde istenen $Y(\cdot,-T) = Y(\cdot,T) = 0$ şartını sağlamadığından, Önerme 2.3 ü uygulayabilmek için $0 \leq \chi \leq 1$ olmak üzere bir $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ kesme (cut-off) fonksiyonu tanımlanır. Her $t \in (-T, -T+\eta) \cup (T-\eta, T)$ için $\psi(x,t) \leq C \leq \psi(x,0)$ olacak şekilde $\eta \in (0,T)$ seçelim, ve

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, \ -T+\eta \leq t \leq T-\eta, \\ 0, \ t \leq -T \text{ veya } t \geq T \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $\widetilde{Y} = \chi Y$ fonksiyonu için (2.14) Carleman değerlendirmesi uygulanır. Burada $\widetilde{Y}$ aşağıdaki problemin çözümüdür:

$$\partial_t \widetilde{Y} + \widehat{A}(x,t) \cdot \nabla \widetilde{Y} + p(x) \widetilde{Y} = \chi L Y + Y \partial_t \chi, \ (x,t) \in \Omega \times (-T,T), \tag{2.18}$$

$$\widetilde{Y}(x,t)=0,\ (x,t)\in\Gamma_-\times(-T,T), \tag{2.19}$$

$$\widetilde{Y}(x,-T)=\widetilde{Y}(x,T)=0,\ x\in\Omega. \tag{2.20}$$

O halde,

$$\begin{aligned} &\left\|P_1\left(e^{s\varphi}\widetilde{Y}\right)\right\|_{L^2(\Omega\times(-T,T))}+s\lambda^2\int_{-T}^{T}\int_\Omega\varphi\left|\widetilde{Y}\right|^2e^{2s\varphi}dxdt\\ \le\ & C\int_{-T}^{T}\int_\Omega|\chi LY+Y\partial_t\chi|^2e^{2s\varphi}dxdt\\ &+Cs\lambda\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_+}\varphi\left|\widetilde{Y}\right|^2\widehat{A}\cdot\nu e^{2s\varphi}d\sigma dt, \end{aligned}$$

yazılabilir. Diğer taraftan supp $\partial_t\chi\subset(-T,-T+\eta)\cup(T-\eta,T)$ olduğu dikkate alınırsa, Y için aşağıdaki değerlendirme elde edilir:

$$\begin{aligned} &\|P_1(e^{s\varphi}Y)\|_{L^2(\Omega\times(-T+\eta,T-\eta))}+s\lambda^2\int_\eta^{T-\eta}\int_\Omega\varphi|Y|^2e^{2s\varphi}dxdt\\ \le\ & C\int_0^T\int_\Omega|LY|^2e^{2s\varphi}dxdt+Cs\lambda\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_+}\varphi\left|\widetilde{Y}\right|^2\widehat{A}\cdot\nu e^{2s\varphi}d\sigma dt\\ &+C\int_{-T}^{-T+\eta}\int_\Omega|Y|^2e^{2s\varphi}dxdt+C\int_{T-\eta}^{T}\int_\Omega|Y|^2e^{2s\varphi}dxdt. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Adım 3. Şimdi (2.21) eşitsizliğinin sağ tarafındaki son iki integrali, aynı eşitsizliğin sol tarafındaki integral yardımıyla değerlendirelim. Buradaki amaç, yeterince büyük $s>0$ için (2.21) eşitsizliğinin sağ tarafındaki son iki terimin, sol taraftaki integral terimi tarafından absorbe edilmesini sağlamaktır. Bunun için, bazı enerji değerlendirmelerinin yapılması gereklidir. İlk olarak, $\lambda=\lambda_0$ alarak ve φ nin alttan 1 ile üstten de λ ya bağlı bazı sabitlerle sınırlı olduğunu göz önünde bulundurarak aşağıdaki ağırlıklı enerji fonksiyonunu tanımlayalım:

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega|Y|^2e^{2s\varphi}dx.$$

i) $\int_{T-\eta}^{T}\int_\Omega|Y|^2e^{2s\varphi}dxdt$ integralinin değerlendirilmesi:

Ağırlıklı enerji fonksiyonunun türevi

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}&=s\int_\Omega\partial_t\varphi|Y|^2e^{2s\varphi}dx+\int_\Omega|Y|\partial_tYe^{2s\varphi}dx\\ &=s\int_\Omega\partial_t\varphi|Y|^2e^{2s\varphi}dx+\int_\Omega\left(LY-\widehat{A}\cdot\nabla Y\right)Ye^{2s\varphi}dx \end{aligned}$$

olduğundan

$$\frac{dE}{dt}-s\int_\Omega\partial_t\varphi|Y|^2e^{2s\varphi}dx+\frac{1}{2}\int_\Omega e^{2s\varphi}\widehat{A}\cdot\nabla\left(|Y|^2\right)dx=\int_\Omega YLYe^{2s\varphi}dx$$

yazılabilir. Eşitliğin solundaki üçüncü terime kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{dE}{dt} - s\int_\Omega \left(\partial_t\varphi + \nabla\varphi\cdot\widehat{A}\right)|Y|^2 e^{2s\varphi}dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_+}\widehat{A}\cdot\nu\left(|Y|^2\right)e^{2s\varphi}d\sigma \\ = & \int_\Omega YLYe^{2s\varphi}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla\cdot\widehat{A}\,|Y|^2 e^{2s\varphi}dx \end{aligned} \tag{2.22}$$

bulunur. Ayrıca, her büyük $s > 0$ için $-\left(\partial_t\varphi + \nabla\varphi\cdot\widehat{A}\right) \geq c > 0$ olduğundan

$$\frac{dE}{dt} + sc\int_\Omega |Y|^2 e^{2s\varphi}dx \leq \int_\Omega YLYe^{2s\varphi}dx \tag{2.23}$$

olur. $\varepsilon = sc$ için $2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}$ formülü kullanılarak (2.23) un sağ tarafı

$$\left|\int_\Omega YLYe^{2s\varphi}dx\right| \leq \frac{1}{2}sc\int_\Omega |Y|^2 e^{2s\varphi}dx + \frac{1}{2sc}\int_\Omega |LY|^2 e^{2s\varphi}dx.$$

şeklinde değerlendirilebilir. O halde,

$$\frac{dE}{dt} + scE(t) \leq \frac{1}{2sc}\int_\Omega |LY|^2 e^{2s\varphi}dx$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $t \in (T-\eta, T)$ için Gronwall lemması kullanılırsa,

$$\begin{aligned} E(t) &\leq e^{\int_{T-\eta}^{t} -csd\tau}\left(E(T-\eta) + \int_{T-\eta}^{t}\frac{1}{2sc}\int_\Omega e^{2s\varphi(\tau)}|LY(\tau)|^2 dxd\tau\right) \\ &\leq e^{-sc(t-(T-\eta))}E(T-\eta) + \frac{e^{sc(t-(T-\eta))}}{2sc}\int_{T-\eta}^{t}\int_\Omega e^{2s\varphi(\tau)}|LY(\tau)|^2 dxd\tau \\ &\leq e^{-sc(t-(T-\eta))}E(T-\eta) + \frac{1}{2sc}\int_{T-\eta}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi(\tau)}|LY(\tau)|^2 dxd\tau \end{aligned}$$

olur.

Son eşitsizliğin $(T-\eta, T)$ aralığında integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_{T-\eta}^{T} E(t)dt &\leq E(T-\eta)\int_{T}^{T-\eta} e^{-sc(t-(T-\eta))}dt \\ &\quad + \int_{T-\eta}^{T}\frac{1}{2sc}\int_{T-\eta}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi(\tau)}|LY(\tau)|^2 dxd\tau dt \\ &\leq E(T-\eta)\int_{T}^{T-\eta} e^{-sc(t-(T-\eta))}dt + \frac{\eta}{2sc}\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi}|LY|^2 dxdt \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\int_{T-\eta}^{T} E(t)dt \leq \frac{C}{s}E(T-\eta) + \frac{C}{s}\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi}|LY|^2 dxdt \tag{2.24}$$

olduğu görülür. Şimdi, $\tau \in (\eta, T-\eta)$ için $E(T-\eta)$ ifadesini $E(\tau)$ yadımıyla değerlendire-lim. (2.22) eşitliğinin τ dan $(T-\eta)$ ya integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau}^{T-\eta} \frac{dE}{dt} dt + \frac{1}{2} \int_{\tau}^{T-\eta} \int_{\Gamma_+} \widehat{A} \cdot \nu \, |Y|^2 \, e^{2s\varphi} d\sigma dt \\
= &\int_{\tau}^{T-\eta} s \int_{\Omega} \left(\partial_t \varphi + \widehat{A} \cdot \nabla \varphi \right) |Y|^2 \, e^{2s\varphi} dx dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\tau}^{T-\eta} \int_{\Omega} \nabla \cdot \widehat{A} \, |Y|^2 \, e^{2s\varphi} dx dt \\
&+ \int_{\tau}^{T-\eta} \int_{\Omega} Y L Y e^{2s\varphi} dx dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau}^{T-\eta} \frac{dE}{dt} dt + \frac{1}{2} \int_{\tau}^{T-\eta} \int_{\Gamma_+} \widehat{A} \cdot \nu \, |Y|^2 \, e^{2s\varphi} d\sigma dt \\
\leq \; & Cs \int_{\tau}^{T-\eta} \int_{\Omega} |Y|^2 \, e^{2s\varphi} dx dt \\
&+ \frac{1}{2} sc \int_{\tau}^{T-\eta} \int_{\Omega} |Y|^2 \, e^{2s\varphi} dx dt + \frac{1}{2sc} \int_{\tau}^{T-\eta} \int_{\Omega} |LY|^2 \, e^{2s\varphi} dx dt
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$E(T-\eta) - E(\tau) \leq Cs \int_{\eta}^{T-\eta} \int_{\Omega} |Y|^2 \, e^{2s\varphi} dx dt + \frac{C}{s} \int_{-T}^{T} \int_{\Omega} |LY|^2 \, e^{2s\varphi} dx dt$$

olur. Yeterince büyük $s > 0$ için η dan $T-\eta$ ya integral alınarak

$$E(T-\eta) \leq Cs \int_{\eta}^{T-\eta} \int_{\Omega} E(t) dt + \frac{C}{s} \int_{-T}^{T} \int_{\Omega} |LY|^2 \, e^{2s\varphi} dx dt \tag{2.25}$$

bulunur. Son olarak (2.24) ve (2.25) eşitsizlikleri yardımıyla,

$$\int_{T-\eta}^{T} \int_{\Omega} |Y|^2 \, e^{2s\varphi} dx dt \leq C \int_{\eta}^{T-\eta} \int_{\Omega} |Y|^2 \, e^{2s\varphi} dx dt + \frac{C}{s} \int_{-T}^{T} \int_{\Omega} e^{2s\varphi} \, |LY|^2 \, dx dt \tag{2.26}$$

elde edilir.

ii) $\int_{-T}^{-T+\eta} \int_{\Omega} |Y|^2 \, e^{2s\varphi} dx dt$ integralinin değerlendirilmesi

$t \in (-T, -T+\eta)$ için benzer bir sonuç elde etmek amacıyla $t \to -t$ değişken değişimi yapılır, $Y_{geri}(x,t) = Y(x,-t)$ tanımlanarak yukarıda elde edilen değerlendirme Y_{geri} ye uygulanır. Buradan (2.24) ve (2.25) eşitsizliklerine paralel olarak,

$$\int_{-T}^{-T+\eta} E(t) dt \leq \frac{C}{s} E(-T+\eta) + \frac{C}{s} \int_{-T}^{T} \int_{\Omega} e^{2s\varphi} \, |LY|^2 \, dx dt, \tag{2.27}$$

$$E(-T+\eta) \leq Cs \int_{-T+\eta}^{T-\eta} E(t) dt + \frac{C}{s} \int_{-T}^{T} \int_{\Omega} |LY|^2 \, e^{2s\varphi} dx dt \tag{2.28}$$

bulunur. Son olarak, (2.27) ve (2.28) yardımıyla,

$$\int_{-T}^{-T+\eta}\int_\Omega |Y|^2 e^{2s\varphi} dxdt \le C\int_{-T+\eta}^{T-\eta}\int_\Omega |Y|^2 e^{2s\varphi}dxdt + \frac{C}{s}\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi}|LY|^2 dxdt \tag{2.29}$$

olarak bulunur. Şimdi, (2.21) eşitsizliğinde (2.26) ve (2.29) kullanılırsa,

$$s\int_{-T+\eta}^{T-\eta}\int_\Omega |Y|^2 e^{2s\varphi}dxdt \le C\int_{-T}^{T}\int_\Omega |LY|^2 e^{2s\varphi}dxdt + Cs\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_+}|Y|^2 \widehat{A}\cdot\nu e^{2s\varphi}d\sigma dt \tag{2.30}$$

elde edilir.

(2.25), (2.26) ve (2.30) eşitsizliklerinden, Y için

$$\begin{aligned} &\|P_1(e^{s\varphi}Y)\|_{L^2(\Omega\times(-T+\eta,T-\eta))} + s\int_{-T}^{T}\int_\Omega |Y|^2 e^{2s\varphi}dxdt \\ \le\ & C\int_{-T}^{T}\int_\Omega |LY|^2 e^{2s\varphi}dxdt + Cs\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_+}|Y|^2 \widehat{A}\cdot\nu e^{2s\varphi}d\sigma dt \end{aligned} \tag{2.31}$$

Carleman değerlendirmesi elde edilir. Ayrıca $P_1Y = \partial_t Y + \widehat{A}\cdot\nabla Y = -pY - (p-\widetilde{p})\,\partial_t\widetilde{u}$ olduğundan,

$$\int_{-T}^{-T+\eta}\int_\Omega |P_1Y|^2 e^{2s\varphi}dxdt \le C\int_{-T}^{-T+\eta}\int_\Omega |Y|^2 e^{2s\varphi}dxdt + C\int_{-T}^{-T+\eta}\int_\Omega |p-\widetilde{p}|^2 |\partial_t\widetilde{u}|^2 e^{2s\varphi}dxdt,$$

$$\int_{T-\eta}^{T}\int_\Omega |P_1Y|^2 e^{2s\varphi}dxdt \le C\int_{T-\eta}^{T}\int_\Omega |Y|^2 e^{2s\varphi}dxdt + C\int_{T-\eta}^{T}\int_\Omega |p-\widetilde{p}|^2 |\partial_t\widetilde{u}|^2 e^{2s\varphi}dxdt,$$

yazılabilir. Böylece (2.31) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} &\|P_1(e^{s\varphi}Y)\|_{L^2(\Omega\times(T,-T))} + s\int_{-T}^{T}\int_\Omega |Y|^2 e^{2s\varphi}dxdt + \int_{-T}^{T}\int_\Omega |P_1Y|^2 e^{2s\varphi}dxdt \\ \le\ & C\int_{-T}^{T}\int_\Omega |p-\widetilde{p}|^2 |\partial_t\widetilde{u}|^2 e^{2s\varphi}dxdt + Cs\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_+}|Y|^2 \widehat{A}\cdot\nu e^{2s\varphi}d\sigma dt \end{aligned} \tag{2.32}$$

elde edilir.

Adım 4. Kararlılık Değerlendirmesi

Kabul edelim ki $W = e^{s\varphi}\widetilde{Y}$ olsun. $P_1W = \partial_t W + \widehat{A}\cdot\nabla W$ olduğunu göz önünde bulundurarak, aşağıdaki integrali ele alalım:

$$I = \int_{-T}^{0}\int_\Omega P_1W\cdot W dxdt$$

Baudouin and Puel (2002) tarafından geliştirilen yöntem kullanılarak I için bir üst sınır Carleman değerlendirmesi kullanılarak elde edilebilir:

$$\begin{aligned} |I| &= \left|\int_{-T}^{0}\int_\Omega P_1W\cdot W dxdt\right| \\ &\le s^{-\frac{1}{2}}\left(\int_{-T}^{0}\int_\Omega |P_1W|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(s\int_{-T}^{0}\int_\Omega |Y|^2 e^{2s\varphi}\right)^{\frac{1}{2}} dxdt. \end{aligned}$$

Young eşitsizliği kullanılırsa,

$$|I| \le s^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{-T}^{T} \int_{\Omega} |P_1 W|^2 \, dxdt + s \int_{-T}^{T} \int_{\Omega} |Y|^2 \, e^{2s\varphi} dxdt \right)$$

olur.

(2.32) eşitsizliğini kullanarak,

$$|I| \le C s^{-\frac{1}{2}} \int_{-T}^{T} \int_{\Omega} |p - \widetilde{p}|^2 \, |\partial_t \widetilde{u}|^2 \, dxdt + s \int_{\Gamma_+} \int_{-T}^{T} |Y|^2 \, \widehat{A} \cdot \nu e^{2s\varphi} d\sigma dt \tag{2.33}$$

elde edilir.

Şimdi I ifadesini hesaplayalım, kısmi integrasyon kullanarak,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Y(x,0)|^2 \, e^{2s\varphi(x,0)} dx &= I + \frac{1}{2} \int_{-T}^{0} \int_{\Omega} \left(\nabla \cdot \widehat{A} \right) \left| \widetilde{Y} \right|^2 e^{2s\varphi} dxdt \\ & \quad - \int_{-T}^{0} \int_{\Gamma_+} \widehat{A} \cdot \nu \left| \widetilde{Y} \right|^2 e^{2s\varphi} d\sigma dt \end{aligned}$$

bulunur. (2.32) ve (2.33) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Y(x,0)|^2 \, e^{2s\varphi(x,0)} dx &\le C \left(s^{-\frac{1}{2}} + s^{-1} \right) \left\{ \int_{-T}^{T} \int_{\Omega} |p - \widetilde{p}|^2 \, |\partial_t \widetilde{u}|^2 \, e^{2s\varphi} dxdt \right\} \\ & \quad + C \left(s^{\frac{1}{2}} + 1 \right) \int_{-T}^{T} \int_{\Gamma_+} \widehat{A} \cdot \nu \, |Y|^2 \, e^{2s\varphi} d\sigma dt \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$Y(x,0) = \partial_t U(x,0) = -\left(p - \widetilde{p} \right)(x) \, \widetilde{u}(x,0)$$

olur. Son eşitsizlikte Y yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |(p - \widetilde{p})(x) \, \widetilde{u}(x,0)|^2 \, e^{2s\varphi(x,0)} dx &\le C \left(s^{-\frac{1}{2}} + s^{-1} \right) \int_{-T}^{T} \int_{\Omega} |p - \widetilde{p}|^2 \, |\partial_t \widetilde{u}|^2 \, e^{2s\varphi} dxdt \\ & \quad + C \left(s^{\frac{1}{2}} + 1 \right) \int_{-T}^{T} \int_{\Gamma_+} \widehat{A} \cdot \nu \, |Y|^2 \, e^{2s\varphi} d\sigma dt \end{aligned} \tag{2.34}$$

elde edilir.

$x_0 \notin \overline{\Omega}$ olduğu ve tanımı dikkate alındığında φ nin alttan sınırlı olduğu görülür. Ayrıca, her $x \in \Omega$ ve $t \in (-T, T)$ için $e^{2s\varphi(x,t)} \le e^{2s\varphi(x,0)}$ dir. $\widetilde{u} \in W^{1,2}\left(-T, T; L^{\infty}(\Omega)\right)$ olduğundan

$$\forall x \in \Omega, t \in (-T, T) \text{ için } \exists k_0 \in L^2(-T, T), |\partial_t \widetilde{u}(x,t)| \le k_0(t) \, |\widetilde{u}(x,0)|$$

yazılabilir. Böylece (2.34) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - C \left(s^{-\frac{1}{2}} + s^{-1} \right) \right) \int_{\Omega} |(p - \widetilde{p})(x)|^2 \, |\widetilde{u}(x,0)|^2 \, e^{2s\varphi(x,0)} dx \\ \le \; & C \left(s^{\frac{1}{2}} + 1 \right) \int_{-T}^{T} \int_{\Gamma_+} \widehat{A} \cdot \nu \, |Y|^2 \, e^{2s\varphi} d\sigma dt \end{aligned}$$

bulunur.

O halde, eğer s yeterince büyük seçilirse,

$$\int_{\Omega} |(p-\widetilde{p})(x)|^2 |\widetilde{u}(x,0)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dx \le C \int_{-T}^{T} \int_{\Gamma_+} \widehat{A} \cdot \nu |Y|^2 e^{2s\varphi} d\sigma dt$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $C = C(s_0,\ \lambda_0,\ \Omega,\ T,\ \Gamma)$ sabiti vardır. Diğer taraftan, ψ ve $\widehat{A}$ için verilen şartlar altında $\widehat{A} \cdot \nu$ ve $e^{2s\varphi}$, $(-T,T) \times \Gamma_+$ sınırı üzerinde sınırlıdır. Gerçekten de

$$\begin{aligned} a &= \min_{\overline{\Omega}} \left[\exp\left(s\varphi\left(x,0\right)\right)\right], \\ b &= \max_{\overline{\Omega}\times[0,T]} \left[\exp\left(s\varphi\left(x,t\right)\right)\right] \end{aligned}$$

olmak üzere $|\widetilde{u}(x,0)| \ge r_0 > 0$ olduğundan

$$\int_{\Omega} |(p-\widetilde{p})(x)|^2 dx \le C \int_{-T}^{T} \int_{\Gamma_+} |Y|^2 e^{2s\varphi} d\sigma dt$$

kararlılık sonucunu elde ederiz. Burada, $C = C(\frac{b}{a},\ s_0,\ \lambda_0,\ \Omega,\ T,\ \Gamma)$ dir. Son olarak Y, $t<0$ için $\partial_t U := \partial_t u - \partial_t \widetilde{u}$ nin bir genişlemesi olduğundan,

$$\int_{\Omega} |p-\widetilde{p}|^2 dx \le C \int_{0}^{T} \int_{\Gamma_+} |\partial_t u - \partial_t \widetilde{u}|^2 d\sigma dt$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

BÖLÜM 3

RADYATİF TRANSPORT DENKLEM İÇİN BAZI TERS PROBLEMLER

Bu bölümde, bir radyatif transport denklem için zamandan bağımsız olan saçılma ve toplam zayıflama katsayılarının belirlenmesi ters problemleri ele alınmıştır. Burada pozitif olan bir başlangıç değeri ve uygun bir alt sınır üzerindeki sınır verisine ek olarak başka bir alt sınır parçası üzerinde sınır verilerini kullanarak bir lineer ağırlık fonksiyonu üzerine kurulu Carleman eşitsizliği yardımıyla Lipschitz kararlılık değerlendirmesi ispatlanmıştır. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, sınırlı bir bölge ve $\partial\Omega$ sınırı C^1sınıfından olsun. Ayrıca $V \subset R^n$ sınırlı bir alt bölge veya $c > 0$ bir sabit olmak üzere $\{v \in R^n; |v| = c\}$ kümesinin ölçülebilir bir alt kümesi olsun. $\partial\Omega$ sınırının $x \in \partial\Omega$ noktasındaki birim dış normal vektörü $\nu(x)$ olmak üzere

$$\Gamma_+ = \{(x, v) \in \partial\Omega \times V; \nu(x) \cdot v > 0\},$$

$$\Gamma_- = \{(x, v) \in \partial\Omega \times V; \nu(x) \cdot v \leq 0\}$$

alt sınır parçalarını tanımlayalım. Bu bölümde

$$\partial_t u(x, v, t) + v \cdot \nabla u(x, v, t) + \sigma_t(x, v)u - \int_V k(x, v, v')u(x, v', t)dv' = 0, \tag{3.1}$$

$x \in \Omega, v \in V, 0 < t < T,$

transport denklemi

$$u(x, v, 0) = a(x, v), \; x \in \Omega, \; v \in V \tag{3.2}$$

başlangıç koşulu ve

$$u(x, v, t) = g(x, v, t), \; 0 < t < T, \; (x, v) \in \Gamma_- \tag{3.3}$$

sınır koşulu ile birlikte ele alınacaktır. (3.1) denkleminde $\nabla = \nabla_x = (\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$ olup $v, v' \in R^n$ olmak üzere $v \cdot v'$, R^n uzayındaki skaler çarpımı gösterir.

Radyatif transport denklemi, bir reaktördeki nötronlar gibi etkileşim halinde olmayan parçacıkların davranışını modeller (Case, 1967; Duderstadt and Martin, 1979). Ayrıca

(3.1) denklemi; biyolojik dokular, yıldızlar arası ortam ve atmosfer gibi rastgele ortamlarda ışığın yayılımını tasvir eder (Chandrasekhar, 1960; Sobolev, 1975). Burada reel değerli $u(x,v,t)$ fonksiyonu belli bir $t \in (0,T)$ anında, $x \in \Omega \subset R^n$ konumunda, $v \in V$ hızındaki parçacıkların açısal yoğunluğunu veya ışığın yoğunluğunu ifade eder. $\sigma_t(x,v)$ toplam zayıflama katsayısı olup burada

$$\sigma_t \in L^\infty(\Omega \times V) \tag{3.4}$$

dır. Ayrıca $k(x,v,v')$ saçılım çekirdeği; x konumunda, v' yönünden v yönüne saçılan parçacıkların miktarını gösterir. k çekirdeğinin t den bağımsız olduğu ve

$$k(x,v,v') \equiv \sigma_s(x,v)p(x,v,v'), \tag{3.5}$$

$$\sigma_s \in L^\infty(\Omega \times V),$$

$$p \in L^\infty(\Omega \times V \times V),\ p > 0 \tag{3.6}$$

şartlarını sağladığı kabul edilir. Böylece (3.1) denklemi

$$\partial_t u(x,v,t) + v \cdot \nabla u(x,v,t) + \sigma_t(x,v)u - \sigma_s(x,v)\int_V p(x,v,v')u(x,v',t)dv' = 0 \tag{3.7}$$

olarak yazılabilir.

Ayrıca $\overline{V}$, V nin kapanışı olmak üzere bu bölümde v nin dağılımı sınırlı, yani

$$\overline{V} \subset \{v;\ (\gamma \cdot v) \geq \theta\} \tag{3.8}$$

olacak şekilde $\gamma \in R^n, \gamma \neq 0$ ve $\theta > 0$ olduğu kabul edilmiştir.

Bu bölümde iki ters problem ele alınmıştır.

Problem 1. (3.7) denkleminden, (3.2) başlangıç ve (3.3) sınır koşulları altında, σ_t toplam zayıflama katsayısının

$$u(x,v,t),\ (x,v) \in \Gamma_{+,}\ 0 < t < T$$

ek bilgisi yardımıyla belirlenmesi problemi.

Problem 2. (3.7) denkleminden, (3.2) başlangıç ve (3.3) sınır koşulları altında, σ_s saçılım katsayısının

$$u(x,v,t),\ (x,v) \in \Gamma_{+,}\ 0 < t < T$$

ek bilgisi yardımıyla belirlenmesi problemi.

Bu tür ters problemlerin ortaya çıktığı alanlardan biri optik tomografidir. Dışarıdan gelen $g(x,v,t)$ lazer ışını, $\Gamma_- \times (0,T)$ alt sınırından geçiş yaparak bölgeye girer ve $u(x,v,t)$ çıkan ışını $\Gamma_+ \times (0,T)$ alt sınırında ölçülür.

Burada σ_s veya σ_t katsayılarından birinin tek bir ölçümle belirlenmesi söz konusudur. Ancak literatürde aynı anda birden fazla parametrenin belirlenmesi ters problemi ile ilgili çalışmalar da mevcuttur (Machida and Yamamoto, 2014). Örneğin, σ_s ve σ_t katsayılarının iki gözlem verisi yardımıyla aynı zamanda belirlenebilmesi için aşağıdaki şartı sağlayan iki a, b başlangıç değerinin seçilmesi gerekir:

$$\det \begin{pmatrix} a \int_V p(x,v,v')a\,(x,v')\,dv' \\ b \int_V p(x,v,v')b\,(x,v')\,dv' \end{pmatrix} \neq 0.$$

Bu tür problemlerin çözümlerinin araştırılması benzer şekilde yapılır ancak daha karmaşıktır.

Klibanov and Pamyatnykh (2008) tarafından u nun sınır değerleri yardımıyla σ_t katsayısının tekliği ispatlanmıştır. Bu bölümde başlangıç değeri ve $\Gamma_- \times (0,T)$ üzerinde sınır verisi belirlendikten sonra $\Gamma_+ \times (0,T)$ sınırında tek bir ölçüm yapılmaktadır. Machida and Yamamoto (2014) tarafından yapılan ispat her ne kadar Bukhgeim and Klibanov (1981) ve Klibanov and Pamyatnykh (2008) tarafından kullanılan yöntemle aynı olsa da Lemma 3.2 ile verilen Carleman değerlendirmesi farklı bir karakterdedir ve u çözümünün $(-T,T)$ aralığına genişlemesinin yapılmasına gerek yoktur. Diğer taraftan Klibanov and Pamyatnykh (2008) de u nun $(-T,T)$ aralığına genişlemesi gereklidir. Ayrıca burada σ_t bilinmeyen katsayısı için ve $a(x,v)$ başlangıç verisi için ek koşullara ihtiyaç vardır.

Gaitan and Ouzzane (2014), $k \equiv 0$ durumunda Klibanov and Pamyatnykh (2006) ve Klibanov and Pamyatnykh (2008) çalışmalarında kullanılan metodları uygulayarak σ_t için bir Lipschitz tipi kararlılık değerlendirmesi elde etmişlerdir. Bukhgeim and Klibanov (1981) tarafından geliştirilen yöntem tek bir ölçüm kullanılarak katsayı ters problemlerinin tekliğinin ve kararlılığının araştırılması için kullanışlı bir yöntemdir. Bununla birlikte Machida and Yamamoto (2014) tarafından ele alınan ve bu bölümde yer verilen $k \neq 0$ durumu daha özel ve detaylı bir yaklaşım gerektirmektedir.

$V \subset \{v \in R^n; |v| = c\}$ durumunda yapılması gerekenler $V \subset R^n$ durumuyla aynı olduğundan bundan sonraki adımlarda V, R^n nin bir alt bölgesi olarak kabul edilmiştir.

Aşağıda verilen lemma ve teoremlerin ispatında

$$X = H^1(0,T; L^\infty(\Omega \times V)) \cap H^2(0,T; L^2(\Omega \times V))$$

ve $M > 0$ keyfi bir sabit olmak üzere,

$$U = \left\{ u \in X; \|u\|_X + \|\nabla u\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega\times V))} \leq M \right\} \tag{3.10}$$

gösterimleri kullanılmıştır.

3.1 ENERJİ DEĞERLENDİRMESİ

Lemma 3.1 *Teorem 3.3 ün kabulleri altında, $a(x,v)$ başlangıç değeri ve $f(x,v)R(x,v,t)$ sağ tarafıyla birlikte radyatif transport denklemini sağlayan u fonksiyonu için,*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_V |\partial_t u(x,v,t)|^2 \, dvdx \quad &\leq \quad C\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega\times V)} + \|a\|^2_{L^2(\Omega\times V)} + \|\nabla a\|^2_{L^2(\Omega\times V)} \right) \\ &\quad + C\int_0^T \int_{\Gamma_-} |v\cdot\nu| \, |\partial_t u|^2 \, dSdvdt, \;\; 0 \leq t \leq T \end{aligned} \tag{3.11}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Gamma_+} |v\cdot\nu| \, |\partial_t u|^2 \, dSdvdt \quad &\leq \quad C\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega\times V)} + \|a\|^2_{L^2(\Omega\times V)} + \|\nabla a\|^2_{L^2(\Omega\times V)} \right) \\ &\quad + C\int_0^T \int_{\Gamma_-} |v\cdot\nu| \, |\partial_t u|^2 \, dSdvdt \end{aligned} \tag{3.12}$$

olacak şekilde $\|\sigma_t\|_{L^\infty(\Omega\times V)}$ ve $\|k\|_{L^\infty(\Omega\times V\times V)}$ büyüklüklerine bağlı bir $C > 0$ sabit vardır.

İspat. (3.1) transport denkleminin t ye göre türevi alınırsa

$$\partial_t(\partial_t u) + v\cdot\nabla(\partial_t u) + \sigma_t(\partial_t u) - \int_V k(\partial_t u) dv' = f(x,v)\partial_t R,$$

$$(\partial_t u)(x,v,0) = f(x,v)R(x,v,0)$$

elde edilir. Bu denklem $2(\partial_t u)$ ile çarpılıp, $\Omega \times V$ bölgesi üzerinden integral alınırsa,

$$\begin{aligned} &\partial_t \int_\Omega \int_V |\partial_t u(x,v,t)|^2 \, dvdx + \int_\Omega \int_V v\cdot\nabla\left(|\partial_t u|^2\right) dvdx + 2\int_\Omega \int_V \sigma_t \, |\partial_t u|^2 \, dvdx \\ &-2\int_\Omega \int_V \left(\int_V k(x,v,v')\partial_t u(x,v',t)dv' \right) \partial_t u(x,v,t) dvdx \\ = \;\; & 2\int_\Omega \int_V f(\partial_t R)\partial_t u dvdx \end{aligned}$$

elde edilir. $E(t) = \int_\Omega \int_V |\partial_t u(x,v,t)|^2 \, dvdx$ olarak alınır ve sol taraftaki ikinci terimin integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_V v\cdot\nabla \, |\partial_t u|^2 \, dvdx \quad &= \quad \int_\Omega \int_V \operatorname{div}\left(v\cdot\nabla \, |\partial_t u|^2\right) dvdx \\ & \quad\;\; \int_{\partial\Omega} v\cdot v \, |\partial_t u|^2 \, dvdS \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} E'(t) &= -\int_{\partial\Omega}\int_V v\cdot\nu\,|\partial_t u|^2\,dvdS - 2\int_\Omega\int_V \sigma_t\,|\partial_t u|^2\,dvdx \\ &+2\int_\Omega\int_V\left(\int_V k(x,v,v')\partial_t u(x,v',t)dv'\right)\partial_t u(x,v,t)dvdx \\ &+2\int_\Omega\int_V f(\partial_t R)\partial_t udvdx \end{aligned}$$

bulunur. Burada $2ab \le a^2+b^2$ olduğundan

$$2\int_\Omega\int_V |f(\partial_t R)\partial_t u|\,dvdx \le \int_\Omega\int_V |f|^2\,|\partial_t R|^2\,dvdx + \int_\Omega\int_V |\partial_t u|^2\,dvdx$$

eşitsizliği yazılabilir. O halde $(0,t)$ üzerinden integral alınır ve k, $\sigma_t \in L^\infty$ olduğu göz önünde bulundurulursa $0\le t\le T$ için

$$\begin{aligned} E(t)-E(0) &= -\int_0^t\left(\int_{\Gamma_+}+\int_\Gamma\right) v\cdot\nu\,|\partial_t u|^2\,dSdvdt - 2\int_0^t\int_\Omega\int_V \sigma_t\,|\partial_t u|^2\,dvdxdt \\ &+2\int_0^t\int_\Omega\int_V\left(\int_V k(x,v,v')\partial_t u(x,v',t)dv'\right)\partial_t u(x,v,t)dvdxdt \\ &+2\int_0^t\int_\Omega\int_V f(\partial_t R)\partial_t udvdxdt \\ &\le -\int_0^t\int_{\Gamma_+} v\cdot\nu\,|\partial_t u|^2\,dSdvdt - \int_0^t\int_{\Gamma_-} v\cdot\nu\,|\partial_t u|^2\,dSdvdt \\ &+C\int_0^t E(\eta)d\eta + C\,\|f\|^2_{L^2(\Omega\times V)} \end{aligned} \tag{3.13}$$

bulunur. Burada Cauchy-Schwarz eşitsziliği ve $k\in L^\infty(\Omega\times V\times V)$ olması dikkate alınarak elde edilen

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^t\int_\Omega\int_V\left(\int_V |k(x,v,v')\partial_t u(x,v',t)|\,dv'\right)\partial_t u(x,v,t)dvdxdt\right| \\ &\le C\int_0^t\int_\Omega\left(\int_V\left(\int_V |\partial_t u(x,v',t)|\,dv'\right)|\partial_t u(x,v,t)|\,dv\right)dxdt \\ \le\ & C\int_0^t\int_\Omega\left(\left(\int_V |\partial_t u(x,v',t)|^2\,dv'\right)^{\frac12}|V|^{\frac12}\right) \\ &\times\left(\left(\int_V |\partial_t u(x,v,t)|^2\,dv\right)^{\frac12}|V|^{\frac12}\right)dxdt \\ =\ & C\,|V|\int_0^t\int_\Omega\int_V |\partial_t u(x,v,t)|^2\,dvdxdt, \end{aligned}$$

eşitsizliği kullanılmıştır. Burada $|V| = \int_V dv$ dir. $R(\cdot,\cdot,0)\in L^\infty(\Omega\times V)$ olması, (3.19) şartları ve

$$\partial_t u(x,y,0) = -v\cdot\nabla a - \sigma_t a + \int_V k(x,v,v')a(x,v')dv' + fR(x,v,0)$$

eşitliği kullanılarak

$$E(0) = \int_\Omega \int_V |\partial_t u(x, v, 0)|^2 \, dvdx$$

elde edilir ve

$$E(0) \leq C \left(\|f\|^2_{L^2(\Omega\times V)} + \|a\|^2_{L^2(\Omega\times V)} + \|\nabla a\|^2_{L^2(\Omega\times V)} \right)$$

olarak yazılır. Böylece $\int_0^t \int_{\Gamma_+} v \cdot \nu \, |\partial_t u|^2 \, dSdvdt \geq 0$ olduğundan (3.13) eşitsizliği kullanılarak $0 \leq t \leq T$ için

$$\begin{aligned} E(t) &\leq E(0) - \int_0^t \int_{\Gamma_+} v \cdot \nu \, |\partial_t u|^2 \, dSdvdt + C \, \|f\|^2_{L^2(\Omega\times V)} + C \int_0^t E(\eta) d\eta \\ &\leq -\int_0^t \int_{\Gamma_-} v \cdot \nu \, |\partial_t u|^2 \, dSdvdt + C \left(\|f\|^2_{L^2(\Omega\times V)} + \|a\|^2_{L^2(\Omega\times V)} + \|\nabla a\|^2_{L^2(\Omega\times V)} \right) \\ &\quad + C \int_0^t E(\eta) d\eta \end{aligned}$$

bulunur. Grönwall eşitsizliği kullanılırsa $0 \leq t \leq T$ için

$$E(t) \leq C \left(-\int_0^T \int_{\Gamma_-} v \cdot \nu \, |\partial_t u|^2 \, dSdvdt + \|f\|^2_{L^2(\Omega\times V)} + \|a\|^2_{L^2(\Omega\times V)} + \|\nabla a\|^2_{L^2(\Omega\times V)} \right) \tag{3.14}$$

elde edilir. Buradan (3.11) eşitsizliği sağlanır. Diğer taraftan, (3.13) eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} E(t) &\leq E(0) - \int_0^T \int_{\Gamma_+} v \cdot \nu \, |\partial_t u|^2 \, dSdvdt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Gamma_-} v \cdot \nu \, |\partial_t u|^2 \, dSdvdt + C \int_0^T E(\eta) d\eta + C \, \|f\|^2_{L^2(\Omega\times V)} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Son olarak (3.14) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Gamma_-} v \cdot \nu \, |\partial_t u|^2 \, dSdvdt \\ \leq \; & E(t) - E(0) - \int_0^T \int_{\Gamma_-} v \cdot \nu \, |\partial_t u|^2 \, dSdvdt + C \int_0^T E(\eta) d\eta + C \, \|f\|^2_{L^2(\Omega\times V)} \\ \leq \; & -C \int_0^T \int_{\Gamma_-} v \cdot \nu \, |\partial_t u|^2 \, dSdvdt + C \left(\|f\|^2_{L^2(\Omega\times V)} + \|a\|^2_{L^2(\Omega\times V)} + \|\nabla a\|^2_{L^2(\Omega\times V)} \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece Lemma 3.1 in ispatı tamamlanır. ■

3.2 CARLEMAN DEĞERLENDİRMESİ

Bu bölümde kararlılık teoremlerinin ispatında kullanılacak olan bir Carleman değerlendirmesi verilecektir. Bu amaçla

$Q = \Omega \times (0, T)$

bölgesini ve

$Pu(x, v, t) := \partial_t u(x, v, t) + v \cdot \nabla u(x, v, t) + \sigma_t(x, v)u(x, v, t), (x, t) \in Q, v \in V$

operatörünü ele alalım. V için verilmiş olan (3.8) şartından, her $v \in \overline{V}$ için $(\gamma \cdot v) > 0$ eşitsizliğini sağlayan bir $\gamma \in \mathbb{R}^n$ seçilebilir. $0 < \beta < \min_{v \in \overline{V}}$ olmak üzere

$\varphi(x, t) = -\beta t + (\gamma \cdot x)$

ağırlık fonksiyonunu ve

$B := \partial_t \varphi + (v \cdot \nabla \varphi) = -\beta + (\gamma \cdot v) > 0$

ifadesini tanımlayalım.

Lemma 3.2 *Her* $s \geq s_0$ *ve*

$\nabla u \in L^2(\Omega \times V \times (0, T)), u(\cdot, \cdot, T) = 0; (x, v) \in \Omega \times V,$

bağıntılarını sağlayan $u \in H^1(0, T; L^2(\Omega \times V))$ *fonksiyonu için*

$$\begin{aligned} & s \int_\Omega \int_V |u(x, v, 0)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dv dx + s^2 \int_Q \int_V |u(x, v, t)|^2 e^{2s\varphi(x,t)} dv dx dt \\ \leq \; & C \int_Q \int_V |Pu|^2 e^{2\varphi(x,t)} dv dx dt + s \int_0^T \int_{\Gamma_+} v \cdot \nu \, |u|^2 e^{2s\varphi(x,t)} dS dv dt \end{aligned}$$

olacak şekilde $C > 0$ *ve* $s_0 > 0$ *sabitleri vardır.*

Bundan sonra $C > 0$ sabitleri $s > 0$ parametresinden bağımsız sabitleri gösterecektir.

İspat. $\sigma_t \in L^\infty(\Omega \times V)$ olduğundan $s > 0$ yeterince büyük seçilerek $\sigma_t = 0$ için eşitsizliği ispatlamak yeterlidir. Bu amaçla

$$\begin{aligned} w(x, v, t) &= e^{s\varphi(x,t)} u(x, v, t) \\ Lw(x, v, t) &= e^{s\varphi(x,t)} P(e^{-s\varphi(x,t)} w(x, v, t)) \end{aligned}$$

eşitlikleri göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}
\partial_t u &= \partial_t w e^{-s\varphi} - sw\partial_t \varphi e^{-s\varphi}, \\
\nabla u &= \nabla w e^{-s\varphi} - sw\nabla \varphi e^{-s\varphi}, \\
B &= \partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi \text{ yazılabilir. O halde}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Lw)(x,t) &= e^{s\varphi(x,t)} P\left(e^{-s\varphi} w\right) \\
&= e^{s\varphi} Pu \\
&= e^{s\varphi}\left[e^{-s\varphi}\left(\partial_t w - sw\partial_t\varphi + v\cdot\nabla w - swv\cdot\nabla\varphi\right)\right] \\
&= \partial_t w - sw\partial_t\varphi + v\cdot\nabla w - swv\cdot\nabla\varphi \\
&= \{\partial_t w + v\cdot\nabla w\} - sBw
\end{aligned}$$

elde edilir. Açıktır ki

$$\int_Q |Pu|^2 e^{2s\varphi(x,t)} dxdt = \int_Q |Lw|^2 dxdt$$

dir. Şimdi hemen hemen her $v \in V$ için, $u(\cdot, v, T) = 0$ koşulu ve $2\partial_t ww = \partial_t w^2$ ve $2\nabla w \cdot w = \nabla\left(w^2\right)$ eşitlikleri dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
\int_Q |Pu|^2 e^{2s\varphi} dxdt &= \int_Q \left|e^{-2s\varphi(x,t)} Lw\right|^2 e^{2s\varphi(x,t)} dxdt \\
&= \int_Q |Lw|^2 dxdt \\
&= \int_Q |\partial_t w + v\cdot\nabla w|^2 dxdt + \int_Q |sB|^2 |w|^2 dxdt \\
&\quad -2s\int_Q Bw\left(\partial_t w + v\cdot\nabla w\right) dxdt \\
&\geq -2s\int_Q Bw\left(\partial_t w + v\cdot\nabla w\right) dxdt + s^2\int_Q B^2 w^2 dxdt \\
&= -s\int_\Omega (B\partial_t\left(w^2\right) + Bv\cdot\nabla\left(w^2\right)) dxdt + s^2\int_Q B^2 w^2 dxdt \\
&= -s\int_Q B|w(x,T)|^2 dx + s\int_\Omega B|w(x,0)|^2 dxdt \\
&\quad -s\int_Q \operatorname{div}(Bvw^2) dxdt + s^2\int_Q B^2 w^2 dxdt \\
&= s\int_\Omega B|w(x,0)|^2 dx - s\int_0^T\int_{\partial\Omega} Bv\cdot vw^2 dSdt + s^2\int_Q B^2 w^2 dxdt \\
&\geq s\int_\Omega B|w(x,0)|^2 dx - s\int_0^T\int_{\partial\Omega\cap\{v\cdot\nu(x)>0\}} Bv\cdot\nu w^2 dSdt \\
&\quad +s^2\int_Q B^2 w^2 dxdt
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. $B > 0$ göz önünde bulundurarak $w = e^{s\varphi}u$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega s\left|u(x,v,0)\right|^2 e^{2s\varphi(x,0)}dx + s^2\int_Q \left|u(x,v,t)\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt \\
&-s\int_0^T\int_{\partial\Omega\cap\{v\cdot\nu(x)>0\}} v\cdot\nu\left|u(x,v,t)\right|^2 e^{2s\varphi}dSdt \\
\leq\ & C\int_Q \left|Pu(x,v,t)\right|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dxdt
\end{aligned}$$

elde edilir. V alt bölgesinde v ye göre integral alınırsa ispat tamamlanır. ■

Son olarak $\int_V kudv'$ integral terimi içeren transport denklem için bir Carleman değerlendirmesi verilecektir. Bunun için $\varphi(x,t) = -\beta t + (\gamma\cdot x)$ fonksiyonunun v değişkeninden bağımsız olması gerekmektedir.

Lemma 3.3 *Her $s \geq s_0$ ve*

$\nabla u \in L^2(\Omega\times V\times(0,T)), u(\cdot,\cdot,T) = 0, (x,t) \in (\Omega\times V)$,

bağıntılarını sağlayan $u \in H^1(0,T;L^2(\Omega\times V))$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
&s\int_\Omega\int_V \left|u(x,v,0)\right|^2 e^{2s\varphi(x,0)}dvdx + s^2\int_Q\int_V \left|u(x,v,t)\right|^2 e^{2s\varphi}dxdt \\
\leq\ & C\int_Q\int_V \left|\partial_t u + v\cdot\nabla u + \sigma_t u - \int_V kudv'\right|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dvdxdt \\
&+s\int_0^T\int_{\Gamma_+} v\cdot\nu\left|u\right|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dSdvdt
\end{aligned}$$

olacak şekilde $C > 0$ ve $s_0 > 0$ sabitleri vardır.

İspat. φ ağırlık fonksiyonu v den bağımsız ve $k \in L^\infty(\Omega\times V\times V)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
&\int_Q\int_V \left|\int_V k(x,v,v')u(x,v',t)dv'\right|^2 e^{2s\varphi}dvdxdt \\
\leq\ & C\int_Q\int_V \left(\int_V \left|u(x,v',t)\right|^2 dv'\right) e^{2s\varphi(x,t)}dvdxdt \\
\leq\ & C\left|V\right|\int_Q\int_V \left|u(x,v',t)\right|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dv'dxdt
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle $s > 0$ seçilerek $\int_Q\int_V \left|\int_V k(u)dv'\right|^2 e^{2s\varphi}dvdxdt$ terimi sol tarafa absorbe edilebilir. Böylece, Lemma 3.2 dikkate alınarak ispat tamamlanır. ■

3.3 KARARLILIK DEĞERLENDİRMELERİ

Teorem 3.1 (σ_t katsayısının belirlenmesi) Kabul edelim ki $u^i = u(\sigma_t^i)(x,v,t)$, $i = 1,2$ fonksiyonları aşağıdaki problemin iki çözümü olsun:

$$\partial_t u(x,v,t) + v\cdot\nabla u + \sigma_t^i(x,v)u - \sigma_s(x,v)\int_V p(x,v,v')u(x,v',t)dv' = 0,$$

$$\begin{aligned} x &\in \Omega,\ v\in V, 0<t<T,\\ u(x,v,0) &= a_i(x,v),\ x\in\Omega,\ v\in V,\\ u &= g,\ (x,v)\in\Gamma_-\times(0,T),\ t\in(0,T). \end{aligned}$$

Ayrıca $u^i \in U$ ve $\|\sigma_t^i\|_{L^\infty(\Omega\times V)}$, $\|\sigma_s\|_{L^\infty(\Omega\times V)} \le M$, $i=1,2$ olsun. Ek olarak, kabul edelim ki

$$T > \frac{\max_{x\in\overline{\Omega}}(\gamma\cdot x) - \min_{x\in\overline{\Omega}}(\gamma\cdot x)}{\min_{v\in\overline{V}}(\gamma\cdot v)} \tag{3.15}$$

eşitsizliği sağlansın ve hemen hemen her $(x,v)\in\Omega\times V$ için

$$a_1(x,v)\ge a_0 \text{ veya } a_2(x,v)\ge a_0 \tag{3.16}$$

olacak şekilde bir $a_0>0$ sabiti mevcut olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|\sigma_t^1-\sigma_t^2\|_{L^2(\Omega\times V)} &\le C\left(\int_0^T\int_{\Gamma_+}\nu(x)\cdot v\left|\partial_t(u^1-u^2)(x,v,t)\right|^2 dSdvdt\right)^{\frac12}\\ &+C\left(\|a_1-a_2\|_{L^2(\Omega\times V)}+\|\nabla a_1-\nabla a_2\|_{L^2(\Omega\times V)}\right),\\ &\left(\int_0^T\int_{\Gamma_+}\nu(x)\cdot v\left|\partial_t(u^1-u^2)(x,v,t)\right|^2 dSdvdt\right)^{\frac12}\\ \le C&\left(\|\sigma_t^1-\sigma_t^2\|_{L^2(\Omega\times V)}+\|a_1-a_2\|_{L^2(\Omega\times V)}+\|\nabla a_1-\nabla a_2\|_{L^2(\Omega\times V)}\right) \end{aligned} \tag{3.17}$$

olacak şekilde bir $C = C(M,a_0)>0$ sabiti vardır. Burada $M\to\infty$ veya $a_0\to 0$ iken $C(M,a_0)\to\infty$ dır.

Özel olarak eğer $\Omega\times V$ bölgesinde $a_1=a_2$ olduğu kabul edilirse, bu durumda

$$C^{-1}\left(\int_0^T\int_{\Gamma_+}\nu(x)\cdot v\left|\partial_t(u^1-u^2)(x,v,t)\right|^2 dSdvdt\right)^{\frac12} \le \|\sigma_t^1-\sigma_s^2\|_{L^2(\Omega\times V)}$$
$$\le C\left(\int_0^T\int_{\Gamma_+}\nu(x)\cdot v\left|\partial_t(u^1-u^2)(x,v,t)\right|^2 dSdvdt\right)^{\frac12}$$

şeklinde çift taraflı bir değerlendirme elde edilir.

Bu teoremde, ileride verilecek olan (3.9) ve (3.2)-(3.3) direkt problemlerinin çözümleri için $u^i\in U$, $i=1,2$ regülerliği kabul edilmiştir. Aşağıdaki teoremlerde de u^i çözümleri için aynı regülerlik şartları kabul edilmektedir.

Teorem 3.2 (σ_s katsayısının belirlenmesi) Kabul edelim ki $u^i = u\left(\sigma_s^i\right)(x,v,t)$, $i = 1,2$ fonksiyonları aşağıdaki problemin iki çözümü olsun:

$$\partial_t u(x,v,t) + v\cdot\nabla u + \sigma_t(x,v)u - \sigma_s^i(x,v)\int_V \rho(x,v,v')u(x,v',t)dv' = 0,$$

$$\begin{aligned} x &\in \Omega,\ v\in V,\ 0<t<T, \\ u(x,v,0) &= a_i(x,v),\ x\in\Omega,\ v\in V, \\ u &= g,\ (x,v)\in\Gamma_-\times(0,T)\ t\in(0,T). \end{aligned}$$

Ayrıca $u^i \in U$ ve $\|\sigma_t\|_{L^\infty(\Omega\times V)}$, $\|\sigma_s^i\|_{L^\infty(\Omega\times V)} \le M$, $i = 1,2$ olsun. Ek olarak (3.15) ve (3.16) şartları sağlansın.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|\sigma_s^1-\sigma_s^2\|_{L^2(\Omega\times V)} &\le C\left(\int_0^T\int_{\Gamma_+}\nu(x)\cdot v\left|\partial_t(u^1-u^2)(x,v,t)\right|^2 dSdvdt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + C\left(\|a_1-a_2\|_{L^2(\Omega\times V)} + \|\nabla a_1-\nabla a_2\|_{L^2(\Omega\times V)}\right), \\ &\left(\int_0^T\int_{\Gamma_+}\nu(x)\cdot v\left|\partial_t(u^1-u^2)(x,v,t)\right|^2 dSdvdt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le C\|\sigma_s^1-\sigma_s^2\|_{L^2(\Omega\times V)} + \|a_1-a_2\|_{L^2(\Omega\times V)} + \|\nabla a_1-\nabla a_2\|_{L^2(\Omega\times V)} \end{aligned} \tag{3.18}$$

olacak şekilde bir $C = C(M,a_0) \ge 0$ sabiti vardır. Burada $M\to\infty$ veya $a_0\to 0$ iken $C(M,a_0)\to\infty$ dır.

(3.15) koşulu T gözlem zamanının yeterince büyük olması gerektiğini ifade eder. (3.1) transport denkleminin temel kısmının birinci mertebeden bir hiperbolik operatör olması transport denklemin sonlu yayılım hızına sahip olduğu anlamına gelir. Bu nedenle (3.15) tipinde bir şart kaçınılmazdır. Aksi halde $\Omega\times V$ bölgesinde sadece sınır verisinden katsayılar hakkında yeterli bilgi elde edilemez.

Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 yi kanıtlamak için, ele alınan ters problemin lineer hale dönüştürülmesi gerekir. Bu amaçla $\Omega\times V$ bölgesinde hemen hemen her yerde $a_1 > a_0$ olduğu kabul edilerek, $u = u^2 - u^1$, $f = \sigma_t^2 - \sigma_t^1$, $a = a_2 - a_1$ alınırsa

$$\partial_t u + v\cdot\nabla u + \sigma_t u - \int_V k(x,v,v')u(x,v',t)dv' = f(x,v)R(x,v,t),\ x\in\Omega,\ v\in V,\ 0<t<T,$$

$$u(x,v,0) = a(x,v),\ x\in\Omega,\ v\in V$$

lineer problemi elde edilir.

Teorem 3.3 Kabul edelim ki

$$k \in L^{\infty}(\Omega \times V \times V)\,;\ R,\ \partial_t R \in L^2(0,T;L^{\infty}(\Omega \times V));\ \sigma_s, \sigma_t \in L^{\infty}(\Omega \times V) \tag{3.19}$$

ve

$$u \in U \tag{3.20}$$

olsun. Keyfi sabitlenmiş $a_0 > 0$ için, hemen hemen her $(x, v) \in \Omega \times V$ için

$$R(x, v, 0) > a_0 \tag{3.21}$$

ve

$$T > \frac{\max_{x\in\overline{\Omega}}(\gamma \cdot x) - \min_{x\in\overline{\Omega}}(\gamma \cdot x)}{\min_{v\in\overline{V}}(\gamma \cdot v)} \tag{3.22}$$

eşitsizlikleri sağlansın.
Bu durumda her $f \in L^2(\Omega \times V)$ için

$$\|f\|_{L^2(\Omega\times V)} \le C\left(\int_0^T \int_{\partial\Omega}\int_V |v\cdot\nu|\,|\partial_t u|^2\, dvdSdt\right)^{\frac{1}{2}} + C\left(\|a\|_{L^2(\Omega\times V)} + \|\nabla a\|_{L^2(\Omega\times V)}\right) \tag{3.23}$$

olacak şekilde $\|\sigma_t\|_{L^\infty(\Omega\times V)}$, $\|k\|_{L^\infty(\Omega\times V\times V)}$, $\|R\|_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega\times V))}$ büyüklüklerine bağlı bir $C > 0$ sabiti vardır.

İspat. Teorem 3.3 ün ispatı daha önce elde edilen Carleman değerlendirmesine (Lemma 3.3) ve enerji değerlendirmesine (Lemma 3.1) dayanır. Burada, $C > 0$ ve C_1, $s > 0$ parametresinden bağımsız olan sabitleri ifade etmektedir. Ayrıca $\varphi(x,t) = -\beta t + (\gamma \cdot x)$, $(x,t) \in Q$ ve

$$r_{\max} = \max_{x\in\overline{\Omega}}(\gamma \cdot x)\,, r_{\min} = \min_{x\in\overline{\Omega}}(\gamma \cdot x)$$

olsun. $T > 0$ için verilen (3.22) koşulunda,

$$0 < \beta < \min_{v\in\overline{V}}(\gamma \cdot v)\,, r_{\max} - \beta T < r_{\min} \tag{3.24}$$

olacak şekilde $\beta > 0$ seçilebilir. Bu durumda

$$\varphi(x,T) \le r_{\max} - \beta T < r_{\min} \le \varphi(x,0),\ x \in \overline{\Omega}$$

yazılabilir. Ayrıca $r_{\max} - \beta T < r_0 < r_1 < r_{\min}$,

$$\varphi(x,t) > r_1,\ (x,t) \in \overline{\Omega},\ 0 \le t \le \delta \tag{3.25}$$

ve

$$\varphi(x,t) < r_0, (x,t) \in \overline{\Omega},\ T-2\delta \le t \le T \tag{3.26}$$

olacak şekilde $\delta > 0$ ve r_0, r_1 vardır. Lemma 3.3 ü uygulamak için $0 \le \chi \le 1$ olmak üzere

$$\chi(t) = \begin{cases} 1,\ 0 \le t \le T-2\delta, \\ 0,\ T-\delta \le t \le T. \end{cases} \tag{3.27}$$

şeklinde bir $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ kesme (cut-off) fonksiyonunu ve

$$z(x,v,t) = \partial_t u(x,v,t)\chi(t)$$

yeni bilinmeyen fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda $z(x,v,T) = 0$ olur. Diğer yandan

$$Pu(x,v,t) - \int_V k(x,v,v')u(x,v',t)dv' = f(x,v)R(x,v,t)$$

eşitliğinin daha açık olarak

$$\partial_t u + v\cdot\nabla(\partial_t u) + \sigma_t u - \int_V k(x,v,v')u(x,v',t)dv' = f(x,v)R(x,v,t) \tag{3.28}$$

eşitliğinin t ye göre türevi alınırsa

$$\partial_t^2 u + v\cdot\nabla(\partial_t u) + \sigma_t(\partial_t u) - \int_V k(x,v,v')\partial_t u = f(x,v)(\partial_t R)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \partial_t u &= z(x,v,t)\chi^{-1} \\ \partial_t^2 u &= \partial_t z\chi^{-1} - z\chi^{-2}\partial_t\chi \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\partial_t z\chi^{-1} - z\chi^{-2}\partial_t\chi + v\cdot\nabla\left(z\chi^{-1}\right) + \sigma_t z\chi^{-1} - \int_V kz\chi^{-1} = f(x,v)(\partial_t R)$$

ve böylece

$$Pz - \int_V k(x,v,v')zdv' = \chi f(\partial_t R) + z\chi^{-1}\partial_t\chi,\ (x,t)\in Q,\ v\in V,$$

eşitliği bulunur. Ayrıca (3.28) eşitliğinden

$$z(x,v,0) = \partial_t u(x,v,0)\chi(0) = \partial_t u(x,v,0)$$

$$z(x,v,0)=f(x,v)R(x,v,0)-v\cdot\nabla a(x,v)-\sigma_t a+\int_V k(x,v,v')a(x,v')dv',\ x\in\Omega,\ v\in V$$

elde edilir. Lemma 3.3 ü z ye uygularsak

$$\begin{aligned}
s\int_\Omega\int_V |z(x,v,0)|^2 e^{2s\varphi(x,0)}dvdx \quad &\leq \quad C\int_Q\int_V |\chi f(\partial_t R)|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dvdxdt \\
&\quad +C\int_Q\int_V |(\partial_t\chi)\,\partial_t u|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dvdxdt \\
&\quad +Ce^{C_1 s}d_0^2 \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada,

$$d_0=\left(\int_0^T\int_{\Gamma_+} v\cdot\nu\,|\partial_t u|^2\,dSdvdt\right)^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$d=\left(\int_0^T\int_{\Gamma_+} v\cdot\nu\,|\partial_t u|^2\,dSdvdt\right)^{\frac{1}{2}}+\|a\|_{L^2(\Omega\times V)}+\|\nabla a\|_{L^2(\Omega\times V)}$$

şeklinde tanımlı olup, $t>0$ için $se^{Cs}\leq e^{(C+1)s}$ eşitsizliği kullanılmıştır. (3.29) eşitsizliğinin sağ tarafındaki son terimde C yerine $C+1$ yazılıp, $C_1=C+1$ olarak alınmıştır. Diğer taraftan, $0\leq t\leq T-2\delta$ veya $T-\delta\leq t\leq T$ için $\partial_t\chi=0$ olduğundan (3.26) yardımıyla

$$\begin{aligned}
\int_Q\int_V |(\partial_t\chi)\,\partial_t u|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dvdxdt \quad &= \quad \int_{T-2\delta}^{T-\delta}\int_\Omega\int_V |(\partial_t\chi)\,\partial_t u|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dvdxdt \\
&\leq \quad Ce^{2sr_0}\int_{T-2\delta}^{T-\delta}\int_\Omega\int_V |\partial_t u|^2\,dvdxdt \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan (3.11) eşitsizliğiyle $0\leq t\leq T$ için

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\int_V |\partial_t u(x,v,t)|^2\,dvdx \quad &\leq \quad C\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega\times V)}+\|a\|^2_{L^2(\Omega\times V)}+\|\nabla a\|^2_{L^2(\Omega\times V)}\right) \\
&\quad +C\int_0^T\int_{\Gamma_-}|v\cdot\nu|\,|\partial_t u|^2\,dSdvdt
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.30) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\int_Q\int_V |(\partial_t\chi)\,\partial_t u|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dvdxdt \quad &\leq \quad Ce^{2sr_0}\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega\times V)}+\|a\|^2_{L^2(\Omega\times V)}+\|\nabla a\|^2_{L^2(\Omega\times V)}\right) \\
&\quad -Ce^{2sr_0}\int_0^T\int_{\Gamma_-} v\cdot\nu\,|\partial_t u|^2\,dSdvdt
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca, $R(x,v,0)\neq 0$ ve

$$f(x,v)R(x,v,0)=z(x,v,0)+v\cdot\nabla a+\sigma_t a-\int_V k(x,v,v')a(x,v')dv',\ x\in\overline{\Omega},v\in\overline{V}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_V |z(x,v,0)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dvdx + Ce^{C_1 s}\left(\|a\|^2_{L^2(\Omega\times V)} + \|\nabla a\|^2_{L^2(\Omega\times V)}\right) \\
\geq\ & C\int_\Omega \int_V |f(x,v)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dvdx
\end{aligned}$$

yazılabilir. O halde, (3.29) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
s\int_\Omega \int_V |f(x,v)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dvdx \ &\leq\ C\int_\Omega \int_V |f(x,v)|^2 e^{2s\varphi(x,t)} dvdxdt + Ce^{2sr_0}\|f\|^2_{L^2(\Omega\times V)} \\
&\quad -Ce^{2sr_0}\int_0^T \int_{\Gamma_-} v\cdot\nu\,|\partial_t u|^2 dSdvdt + Ce^{C_1 s} d^2
\end{aligned}$$

olduğu görülür. $\varphi(x,t) \leq \varphi(x,0)$ olduğundan

$$s\int_\Omega \int_V |f(x,v)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dvdx \leq C\int_0^T \int_\Omega \int_V |f(x,v)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dvdxdt + Ce^{2sr_0}\|f\|^2_{L^2(\Omega\times V)}$$

$$-Ce^{2sr_0}\int_0^T \int_{\Gamma_-} v\cdot\nu\,|\partial_t u|^2 dSdvdt + Ce^{C_1 s} d^2,\ \ (x,t)\in Q$$

bulunur. Yani her büyük $s>0$ için

$$\begin{aligned}
(s-CT)\int_\Omega \int_V |f(x,v)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dvdx \ &\leq\ Ce^{2sr_0}\|f\|^2_{L^2(\Omega\times V)} \\
&\quad -Ce^{2sr_0}\int_0^T \int_{\Gamma_-} v\cdot\nu\,|\partial_t u|^2 dSdvdt + Ce^{C_1 s} d^2
\end{aligned}$$

elde edilir. $\varphi(x,0) > r_1$ eşitsizliği göz önünde bulundurulup, $s>0$ büyük seçilerek

$$\begin{aligned}
se^{2sr_1}\int_\Omega \int_V |f(x,v)|^2 dvdx \ &\leq\ Ce^{2sr_0}\|f\|^2_{L^2(\Omega\times V)} \\
&\quad -Ce^{Cs}\int_0^T \int_{\Gamma_-} v\cdot\nu\,|\partial_t u|^2 dSdvdt + Ce^{C_1 s} d^2
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak her $s>0$ için

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L^2(\Omega\times V)} \ &\leq\ Ce^{-2s(r_1-r_0)}\|f\|^2_{L^2(\Omega\times V)} - Ce^{Cs}\int_0^T \int_{\Gamma_-} v\cdot\nu\,|\partial_t u|^2 dSdvdt \\
&\quad +Ce^{C_1 s}\int_0^T \int_{\Gamma_+} v\cdot\nu\,|\partial_t u|^2 dSdvdt + Ce^{C_1 s}\left(\|a\|^2_{L^2(\Omega\times V)} + \|\nabla a\|^2_{L^2(\Omega\times V)}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $r_1 - r_0 > 0$ olduğu dikkate alınarak ve $s>0$ büyük seçilirse, sağ taraftaki ilk terim sol taraftaki terim içerisine absorbe edilebilir ve ispat tamamlanır. ■

Uyarı 3.1 *Eğer $M>0$ olmak üzere $\|\partial_t u\|_{L^2(\Omega\times V\times(0,T))} \leq M$ olduğu kabul edilirse (3.30) eşitsizliği*

$$\int_\Omega \int_V |(\partial_t \chi)\,\partial_t u|^2 e^{2s\varphi(x,t)} dvdxdt \leq Ce^{2sr_0} M^2$$

şeklinde yazılır. Bu durumda f için daha az kesinlikli fakat (3.11) eşitsizliği kullanılmadan ve daha kolay şekilde

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega\times V)} \le CM^2 e^{-2s(r_1-r_0)} + C_1 e^{Cs} d^2$$

değerlendirmesi elde edilir.

s parametresine bağlı olarak sağ taraf minimize edilerek, sadece $\Gamma_+ \times (0,T)$ alt sınırı üzerindeki verilere dayanan bir Hölder kararlılığı elde edilebilir. Daha açık olarak $\kappa \in (0,1)$, $C > 0$ ve $T > 0$ sabitleri vardır öyle ki her $f \in L^2(\Omega \times V)$ için

$$\|f\|_{L^2(\Omega\times V)} \le C \left(\left(\int_0^T \int_{\Gamma_+} v\cdot\nu \left|\partial_t u\right|^2 dvdSdt \right)^{\frac{1}{2}} + \|a\|_{L^2(\Omega\times V)} + \|\nabla a\|_{L^2(\Omega\times V)} \right)^k$$

değerlendirmesi sağlanır. Diğer yandan Lipschitz kararlığını elde etmek için $V\times\partial\Omega\times(0,T)$ sınırının tamamı üzerinde verilerin verilmesi gereklidir.

Teorem 3.4 (3.19)-(3.22) şartlarının sağlandığını kabul edelim. Eğer Teorem 3.3 te $\Gamma_- \times (0,T)$ alt sınırı üzerinde $u = 0$ ise, her $f \in L^2(\Omega\times V)$ için

$$\|f\|_{L^2(\Omega\times V)} \le C \left(\int_0^T \int_{\Gamma_+} \nu\cdot v \left|\partial_t u\right|^2 dSdvdt \right)^{\frac{1}{2}} + C\left(\|a\|_{L^2(\Omega\times V)} + \|\nabla a\|_{L^2(\Omega\times V)} \right)$$

ve

$$\left(\int_0^T \int_{\Gamma_+} \nu\cdot v \left|\partial_t u\right|^2 dSdvdt \right)^{\frac{1}{2}} \le C\left(\|f\|_{L^2(\Omega\times V)} + \|a\|_{L^2(\Omega\times V)} + \|\nabla a\|_{L^2(\Omega\times V)} \right)$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır. Bu sabit $\|\sigma_t\|_{L^\infty(\Omega\times V)}$, $\|k\|_{L^\infty(\Omega\times V\times V)}$ ve $\|R\|_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega\times V))}$ büyüklüklerine bağlıdır.

Teorem 3.4, Lemma 3.1 ve Teorem 3.3 ten elde edilmiştir. Teorem 3.4 teki birinci eşitsizlik Γ_- alt sınırı üzerinde $u = 0$ alınarak ve Teorem 3.3 kullanılarak elde edilir, ikinci eşitsizlik ise (3.12) yardımıyla bulunur.

u^1, u^2 için verilen regülerlik şartları ve $\|\sigma_t^i\|_{L^\infty(\Omega\times V)}$, $\|\sigma_s^i\|_{L^\infty(\Omega\times V)} \le M$ ön kabülleri altında Teorem 3.4 kullanılarak (3.17) eşitsizlikleri elde edilebilir. Benzer şekilde Teorem 3.2 de Teorem 3.4 ten elde edilecektir. Eğer $\Gamma_- \times (0,T)$ alt sınırı üzerinde $u^1 = u^2 = g$ olarak kabul edilmezse (3.23) kullanılarak σ_t veya σ_s nin belirlenmesi ters problemi için Lipschitz kararlılığı elde edilebilir:

$$\begin{aligned} \left\|\sigma_t^1 - \sigma_t^2\right\|_{L^2(\Omega\times V)} \le\ & C\left(\int_0^T \int_{\partial\Omega} \int_V |v\cdot\nu| \left|\partial_t\left(u^1-u^2\right)\right|^2 dSdvdt \right)^{\frac{1}{2}} \\ & + C\left(\|a\|_{L^2(\Omega\times V)} + \|\nabla a\|_{L^2(\Omega\times V)} \right) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\left\|\sigma_s^1-\sigma_s^2\right\|_{L^2(\Omega\times V)} &\leq C\left(\int_0^T\int_{\partial\Omega}\int_V |v\cdot\nu|\left|\partial_t\left(u^1-u^2\right)\right|^2 dSdvdt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &+C\left(\|a\|_{L^2(\Omega\times V)}+\|\nabla a\|_{L^2(\Omega\times V)}\right).\end{aligned}$$

3.4 SONUÇ

(3.7) transport denklemi $0 < t < T$ aralığı üzerinde ele alınmış a başlangıç değeri ve $\Gamma_- \times (0,T)$ alt sınırı üzerinde verilen g sınır değeri ile birlikte $\Gamma_+ \times (0,T)$ alt sınırı üzerinde verilen ek bilgi kullanılarak σ_s veya σ_t nin belirlenmesi ters problemi için Lipschitz kararlılığı ispatlanmıştır. Burada ters problem $(0,T)$ aralığı üzerinde ele alınmıştır. İlk defa Bukhgeim and Klibanov (1981) tarafından kullanılan ve sonrasında pek çok çalışmanın temelini oluşturan yönteme göre $u(x,v,t)$ çözümünün $-T < t < 0$ aralığına genişletilmesi gereklidir. Böyle bir genişleme σ_t için ek şartlar verilmesi ihtiyacını ortaya çıkarır (Klibanov and Pamyatnykh, 2008). Eğer transport denklem $t \in (-T,T)$ aralığında $u(x,v,0)$ orta değeriyle ele alınırsa bu durumda u nun t ye göre genişlemesinin yapılmasına gerek kalmaz ve Lipschitz kararlılığı direkt bir şekilde ispatlanabilir (Klibanov and Pamyatnykh, 2006). Böyle bir durumda (3.16) pozitiflik şartının sağlanması için $u(x,v,0)$ değerinin kontrol edilmesi gerekir ki, bu da bir başlangıç değeri mevcut olmadığı için zor bir durumdur.

BÖLÜM 4

DEĞİŞKEN KATSAYILI BİR TRANSPORT DENKLEM İÇİN KAYNAK VE KATSAYI TERS PROBLEMLERİ

Bu bölümde, bir transport denklemde kaynak terimin ya da bir katsayının belirlenmesi ters problemi ele alınmış, en az sınır verisi kullanılarak çözümün kararlılığı araştırılmıştır. $\Omega \subset R^n$ düzgün sınırlı bir bölge, $H := (h_1, ..., h_n) \in \{C^1(\overline{\Omega})\}^n$ ve $V \in L^\infty(\Omega)$ olmak üzere aşağıda verilen iki ters problem ele alınacaktır:

1. Ters Kaynak Problemi

H, V, R fonksiyonları, $\Gamma \subset \partial\Omega$ alt sınırı ve $T > 0$ uygun şekilde verilsin.

$$\partial_t y(x,t) + H(x) \cdot \nabla y(x,t) + V(x)y(x,t) = f(x)R(x,t), \quad x \in \Omega,\ 0 < t < T \tag{4.1}$$

denkleminden,

$$y(x,0) = 0,\ x \in \Omega \tag{4.2}$$

başlangıç koşulu ve $y|_{\Gamma\times(0,T)}$ verisi yardımıyla $f(x)$, $x \in \Omega$ fonksiyonunun belirlenmesi problemini ele alalım.

2. Katsayı Ters Problemi

H fonksiyonu uygun şekilde verilsin.

$$\partial_t u(x,t) + H(x) \cdot \nabla u(x,t) + V(x)u(x,t) = 0, \quad x \in \Omega,\ 0 < t < T, \tag{4.3}$$

denkleminden $u|_{\Gamma\times(0,T)}$ verisi yardımıyla $H(x)$ veya $V(x)$ fonksiyonunun belirlenmesi problemini ele alalım.

(4.1) ve (4.3) eşitlikleri transport denklem olarak adlandırılır ve Liouville denklemi, kütle korunum kanunu gibi birçok fiziksel olayın modellenmesinde kullanılır. Ayrıca transport denklemler, integral geometri problemleriyle de bağlantılıdır (Amirov, 2001).

Bu bölümde ele alınan ters problem, bir tek ölçüm kullanılarak formülize edilmiştir. Transport denklemler için çok ölçüm içeren ters problemler Bal (2009) ve Stefanov (2003) tarafından incelenmiştir.

Kabul edelim ki

$$Q = \Omega \times (0, T)$$

bölgesi verilsin ve

$$\begin{cases} \partial\Omega_+ = \{x \in \partial\Omega;\ (\nu(x) \cdot H(x)) > 0\}, \\ \partial\Omega_- = \{x \in \partial\Omega;\ (\nu(x) \cdot H(x)) \leq 0\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu bölüm boyunca $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ ve $H = (h_1, ..., h_n) \in \{C^1(\overline{\Omega})\}^n$ fonksiyonlarının

$$\mu := \min_{x \in \overline{\Omega}} (H(x) \cdot \nabla\psi(x)) > 0 \tag{4.4}$$

koşulunu sağladığını kabul edeceğiz. (4.4) şartı $x \in \overline{\Omega}$ için $|H(x)| \neq 0$ olmasını gerektirir, ayrıca bu şart H için bazı sınırlamalar getirilmesini gerekli kılar. Aşağıda (4.4) şartının sağlandığı 4 durum verilmiştir.

1. Durum: Kabul edelim ki $\overline{\Omega}$ bölgesinde $d \in C^2(\overline{\Omega})$ fonksiyonu için

$$|\nabla d| > 0,\ H(x) = \nabla d(x)$$

olsun. Eğer $\psi(x) = d(x)$, $x \in \Omega$, seçilirse (4.4) şartı sağlanır.

2. Durum: Kabul edelim ki $\{(h_1(x), ..., h_n(x));\ x \in \overline{\Omega}\} \subset \mathbb{R}^n$, $(0, ..., 0)$ vektöründen $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ hiperdüzlemiyle ayrılsın. Burada $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ ve $|a_1| + \cdots + |a_n| \neq 0$ dır. Bu durumda $\psi(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ veya $\psi(x) = -a_1x_1 - \cdots - a_nx_n$ fonksiyonları (4.4) şartını sağlar. Özel olarak, eğer $H(x)$ bir sabit vektör ise (4.4) şartı sağlanır.

3. Durum: $0 \in \Omega$ olsun. Kabul edelim ki

$$|H(x)| \geq \delta_0,\ x \in \overline{\Omega}$$

olacak şekilde bir $\delta_0 > 0$ sabiti vardır. Bu durumda eğer $\max_{x \in \overline{\Omega}} |x|$ yeterince küçükse, $\psi(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j h_j(x)$ fonksiyonu (4.4) şartını sağlar.

4. Durum: Kabul edelim ki her $x \in \overline{\Omega}$ için $h_{i_0}(x) > 0$ olacak şekilde $i_0 \in \{1, 2, ..., n\}$ vardır. Bu durumda $\overline{\Omega} \subset \{(x_1, x_2, ..., x_n);\ x_{i_0} > b\}$ olacak şekilde yeterince küçük $b \in \mathbb{R}$ seçelim. Böylece (4.1) şartının sağlandığı görülebilir.

Gaitan and Ouzanne (2014) tarafından yapılan çalışmada

$$|H(x)\cdot(x-x_0)-\beta t| \neq 0, \;\; (x,t)\in\overline{Q} \tag{4.5}$$

şartı Carleman değerlendirmesi için gereklidir. Ancak bu şart yukarıda verilen 4 durumdan daha az esnektir.

4.1 CARLEMAN DEĞERLENDİRMESİ

İlk olarak

$$Pu = \partial_t u + H(x)\cdot\nabla u + V(x)u, \quad P_0 u = \partial_t u + H(x)\cdot\nabla u, \quad (x,t)\in Q,$$

şeklinde P ve P_0 operatörlerini,

$$M_0 = \beta\|\,\mathrm{div}\; H\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\,\mathrm{div}\,(H(H\cdot\nabla\psi))\|_{L^\infty(\Omega)}$$

sayısını, $\psi\in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ olmak üzere

$$\varphi(x,t) = -\beta t + \psi(x), \quad (x,t)\in Q \tag{4.6}$$

ağırlık fonksiyonunu ve buna bağlı olarak

$$B(x) := \partial_t\varphi + H\cdot\nabla\varphi = -\beta + H(x)\cdot\nabla\psi, \;\; x\in\Omega, \;\; \beta>0 \tag{4.7}$$

eşitliklerini tanımlayalım.

Lemma 4.1 *(i) Her $s>0$ ve Ω bölgesinde $u(\cdot,T)=0$ şartını sağlayan $u\in H^1(Q)$ fonksiyonları için*

$$\begin{aligned} & s\int_\Omega B(x)|u(x,0)|^2 e^{2s\varphi(x,0)}dx + s^2\int_Q B^2(x)|u(x,t)|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dxdt \\ \leq\;& 2\int_Q |Pu|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dxdt + (sM_0 + 2\|V\|^2_{L^\infty(\Omega)})\int_Q |u(x,t)|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dxdt \\ & + s\int_0^T\int_{\partial\Omega} B(x)\nu\cdot H|u|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dS_x dt \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

(ii) Kabul edelim ki (4.4) şartı ve

$$0<\beta<\mu := \min_{x\in\overline{\Omega}}(H(x)\cdot\nabla\psi(x)) \tag{4.8}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda

$$s_0 = \max\left\{\frac{4M_0}{(\mu-\beta)^2}, \frac{\sqrt{8}\|V\|_{L^\infty(\Omega)}}{\mu-\beta}\right\}$$

olmak üzere her $s \geq s_0$ *için* Ω bölgesinde $u(\cdot, T) = 0$ şartını sağlayan $u \in H^1(Q)$ fonksiyonları için

$$s(\mu-\beta)\int_\Omega |u(x,0)|^2 e^{2s\varphi(x,0)}dx + \frac{s^2(\mu-\beta)^2}{2}\int_Q |u(x,t)|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dxdt$$

$$\leq 2\int_Q |Pu|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dxdt + s\int_0^T\int_{\partial\Omega_+} BH\cdot\nu|u|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dS_x dt \tag{4.9}$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma (4.1) deki (4.8) şartından $\beta > 0$ sayısının keyfi şekilde büyük olamayacağı ve $T > 0$ ın da büyük olması gerektiği görülür. Bu durum ele alınan hiperbolik operatörünün yayılım hızının sonluluğu anlamına gelir.

(4.9) eşitsizliği Carleman tipi bir değerlendirmedir ve yeterince $s > 0$ için düzgün şekilde sağlanır.

Burada $u\,(x, 0)$ başlangıç değeri de değerlendirmeye alınmaktadır ve ağırlık fonksiyonu t ye göre lineerdir. Machida and Yamamoto (2014) de böyle bir lineer ağırlık fonksiyonu kullanılmaktadır ancak söz konusu çalışmada ele alınan denklemin temel kısmının katsayısı x ten bağımsızdır. Ek olarak Carleman değerlendirmesinde seçilen ağırlık fonksiyonu değişken $H(x)$ durumu için uygun değildir.

Gaitan and Ouzzane (2014) ve Klibanov and Pamyatnykh (2008) çalışmalarının aksine burada ele alınan (4.6) ağırlık fonksiyonu sayesinde ters problemler üzerinde çalışırken u fonksiyonunun $(-T, 0)$ aralığına genişlemesinin yapılmasına gerek kalmaz. Klibanov and Pamyatnykh (2008) de bu genişleme işlemi için başlangıç verisi ve bilinmeyen katsayı üzerinde ek şartların konulması gerekir.

İspat. İlk olarak yukarıda verilen ağırlık fonksiyonu yardımıyla

$$w = e^{s\varphi}u$$

yeni bir bilinmeyen fonksiyon ve

$$Lw = e^{s\varphi(x,t)}P_0\left(e^{-s\varphi(x,t)}w\right)$$

operatörünü tanımlayalım. Böylece $\partial_t u = -s\partial\varphi e^{-s\varphi}w + e^{-s\varphi}\partial w$, $\nabla u = -s\partial\varphi e^{-s\varphi}w + se^{s\varphi}\nabla w$ eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}(Lw)(x,t) &= e^{s\varphi(x,t)}P_0 u = e^{s\varphi}(\partial_t u + H(x)\cdot\nabla u)\\ &= e^{s\varphi}\left[e^{-s\varphi}(-s\partial_t\varphi w + \partial_t w - sw\nabla\varphi\cdot H(x) + H(x)\cdot\nabla w)\right]\\ &= -s\partial_t\varphi w + \partial_t w - sw\nabla\varphi\cdot H(x) + H(x)\cdot\nabla w\\ &= \partial_t w + H(x)\cdot\nabla w - s(\partial_t\varphi + H(x)\cdot\nabla\varphi)w\\ &= \partial_t w + H(x)\cdot\nabla w - sB(x)w\end{aligned}$$

elde edilir. $u(\cdot,T)=0$ olduğundan, kısmı integrasyon yardımıyla

$$\begin{aligned}&\int_Q |P_0u|^2 e^{2s\varphi(x,t)}dxdt = \int_Q |Lw|^2 dxdt\\ =&\int_Q \left|\partial_t w + H\cdot\nabla w - sBw\right|^2 dxdt\\ =&\int_Q |\partial_t w + H\cdot\nabla w|^2 dxdt + \int_Q |sB|^2 w^2 dxdt - 2s\int_Q Bw(\partial_t w + H\cdot\nabla w)dxdt\\ \geq& -2s\int_Q B(\partial_t w + H\cdot\nabla w)wdxdt + s^2\int_Q B^2w^2dxdt\\ =& -s\int_Q (B\partial_t(w^2) + BH\cdot\nabla(w^2))dxdt + s^2\int_Q B^2w^2dxdt\\ =& \ s\int_Q(\partial_t B + (\text{div } BH))w^2dxdt - s\int_0^T\int_{\partial\Omega} B\nu\cdot Hw^2dS_xdt\\ &+s^2\int_Q B^2w^2dxdt + s\int_\Omega B(x)|w(x,0)|^2dx\\ \geq& -M_0 s\int_Q w^2dxdt - s\int_0^T\int_{\partial\Omega}B\nu\cdot Hw^2dS_xdt\\ &+s^2\int_Q B^2w^2dxdt + s\int_\Omega B(x)|w(x,0)|^2dx\end{aligned}$$

olarak bulunur. $w = e^{s\varphi}u$ fonksiyonu yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&s\int_\Omega B(x)|u(x,0)|^2e^{2s\varphi(x,0)}dx + s^2\int_Q B^2(x)|u(x,t)|^2e^{2s\varphi(x,t)}dxdt\\ &\leq \int_Q |P_0u|^2e^{2s\varphi(x,t)}dxdt + M_0 s\int_Q |u(x,t)|^2e^{2s\varphi(x,t)}dxdt\\ &\quad +s\int_0^T\int_{\partial\Omega}B(x)|H\cdot\nu||u(x,t)|^2e^{2s\varphi(x,t)}dS_xdt \qquad (4.10)\end{aligned}$$

elde edilir. İkinci olarak $V\in L^\infty(\Omega)$, $V\not\equiv 0$ olsun. O halde

$$|P_0u|^2 = |P_0u + Vu - Vu|^2 \leq 2|P_0u+Vu|^2 + 2|Vu|^2$$
$$\leq 2|Pu|^2 + 2\|V\|^2_{L^\infty(\Omega)}|u|^2$$

yazılabilir. Böylece Lemma 4.1 (i) nin ispatı tamamlanır.

Lemma 4.1 (ii) nin ispatı:

(4.7) eşitliği ve (4.8) şartı kullanılarak $\overline{\Omega}$ bölgesinde $B(x) \geq \mu - \beta > 0$ olduğu görülür. Bu nedenle Lemma 4.1 de bulunan sonucun sağ tarafındaki ikinci terim sol tarafa absorbe edilebilir. Daha açık olarak

$$s^2 \int_Q B^2(x)|u|^2 e^{2s\varphi} dxdt \geq (\mu-\beta)^2 s^2 \int_Q |u|^2 e^{2s\varphi} dxdt$$

ve $s \geq s_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&(\mu-\beta)^2 s^2 - M_0 s - 2\|V\|^2_{L^\infty(\Omega)} \\
&\geq \frac{(\mu-\beta)^2}{2} s^2 + \left(\frac{(\mu-\beta)^2}{4} s^2 - M_0 s\right) + \left(\frac{(\mu-\beta)^2}{4} s^2 - 2\|V\|^2_{L^\infty(\Omega)}\right) \\
&\geq \frac{(\mu-\beta)^2}{2} s^2
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlandığından

$$\begin{aligned}
& s(\mu-\beta)\int_\Omega |u(x,0)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dx + \frac{s^2(\mu-\beta)^2}{2}\int_Q |u(x,t)|^2 e^{2s\varphi(x,t)} dxdt \\
\leq\ & 2\int_Q |Pu|^2 e^{2s\varphi(x,t)} dxdt + s\int_0^T \int_{\partial\Omega_+} B(H\cdot\nu)|u|^2 e^{2s\varphi(x,t)} dS_x dt \\
& + s\int_0^T \int_{\partial\Omega} B(x)\nu\cdot H|u|^2 e^{2s\varphi(x,t)} dS_x dt
\end{aligned}$$

yazılabilir. Ek olarak $\partial\Omega_-$ ve $\partial\Omega_+$ sınır parçalarının tanımlarından

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} B(x) H\cdot\nu |u|^2 dS_x dt \leq \int_0^T \int_{\partial\Omega_+} B(x) H\cdot\nu |u|^2 dS_x dt$$

olduğu göz önünde bulundurulursa (ii) nin ispatı tamamlanmış olur. ∎

4.2 ENERJİ DEĞERLENDİRMESİ

Şimdi klasik enerji değerlendirmesini elde edelim:

Lemma 4.2 *$M > 0$ keyfi sabit olmak üzere $\|V\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$ ve $\|H\|_{\{C^1(\overline{\Omega})\}^n} \leq M$ olsun. Ayrıca $w \in H^1(Q)$ fonksiyonu aşağıdaki (4.11) denklemini ve (4.12) başlangıç koşulunu sağlasın:*

$$\partial_t w + H(x)\cdot\nabla w + Vw = F(x,t), (x,t) \in \Omega, \tag{4.11}$$

$$w(x,0) = a(x),\ x \in \Omega. \tag{4.12}$$

Bu durumda

$$\int_\Omega |w(x,t)|^2 dx + \int_0^T \int_{\partial\Omega_+} H\cdot\nu |w|^2 dS_x dt$$

$$\leq C\left(\|a\|^2_{L^2(\Omega)} + \|F\|^2_{L^2(Q)} + \int_0^T \int_{\partial\Omega_-} |H\cdot\nu||w|^2 dS_x dt \right),\ 0\leq t\leq T, \tag{4.13}$$

olacak şekilde Ω, T, M *büyüklüklerine bağlı bir* $C>0$ *sabiti vardır.*

İspat. (4.11) denklemi $2w$ ile çarpılıp Ω bölgesi üzerinde integral alınırsa,

$$\partial_t \int_\Omega |w(x,t)|^2 dx + \sum_{\ell=1}^n \int_\Omega h_\ell \partial_\ell(|w|^2) dx + 2\int_\Omega V|w|^2 dx = 2\int_\Omega Fw dx$$

yazılabilir. Burada $E(t) = \int_\Omega |w(x,t)|^2 dx$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \int_\Omega h_l \partial_l(|w|^2) dx &= \int_\Omega \operatorname{div}(H\cdot v)|w|^2 dx - \int_\Omega (\operatorname{div} H)|w|^2 dx \\ &= \int_{\partial\Omega} H\cdot v\,|w|^2 dSx - \int_\Omega (\operatorname{div} H)|w|^2 dx \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} E'(t) &= -\int_{\partial\Omega} H\cdot\nu|w|^2 dS_x + \int_\Omega (\operatorname{div}\ H)|w|^2 dx \\ &\quad -2\int_\Omega Vw^2 dx + 2\int_\Omega Fw dx \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte $(0,t)$ üzerinde integral alınır ve $2\int_\Omega |Fw|dx \leq \int_\Omega |F|^2 dx + \int_\Omega |w|^2 dx$ eşitsizliği kullanılırsa

$$E(t) - E(0) = -\int_0^t \left(\int_{\partial\Omega_+} + \int_{\partial\Omega_-} \right) H\cdot\nu|w|^2 dS_x dt + \int_0^t \int_\Omega (\operatorname{div}\ H)|w|^2 dx dt$$

$$-2\int_0^t \int_\Omega Vw^2 dx dt + \int_0^t \int_\Omega |F|^2 dx dt + \int_0^t E(\xi) d\xi$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} E(0) &= \int_\Omega |w(x,0)|^2 dx = \|a\|^2_{L^2(\Omega)}, \\ -2\int_0^t \int_\Omega Vw^2 dx dt &\leq 2\|V\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^t E(\xi) d\xi, \\ \int_0^t \int_\Omega (\operatorname{div}\ H)|w|^2 dx dt &\leq \|\operatorname{div}\ H\|_{L^\infty(\Omega)}, \end{aligned}$$

bağıntıları göz önünde bulundurularak

$$E(t) + \int_0^t \int_{\partial\Omega_+} H \cdot \nu |w|^2 dS_x dt \leq \|a\|^2_{L^2(\Omega)} + \|F\|^2_{L^2(Q)}$$

$$+(2\|V\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\operatorname{div} H\|_{L^\infty(\Omega)} + 1) \int_0^t E(\xi) d\xi + \left| \int_0^t \int_{\partial\Omega_-} H \cdot \nu |w|^2 dS_x dt \right| \tag{4.14}$$

eşitsizliği yazılabilir. Ayrıca, $\int_0^t \int_{\partial\Omega_+} H \cdot \nu |w|^2 dS_x dt \geq 0,\ 0 \leq t \leq T$ olduğundan (4.14) eşitsizliğinde bu terim ihmal edilirse, Gronwall eşitsizliğinden

$$E(t) \leq Ce^{CT}(\|a\|^2_{L^2(\Omega)} + \|F\|^2_{L^2(Q)}$$

$$+ \int_0^T \int_{\partial\Omega_-} |H \cdot \nu||w|^2 dS_x dt),\ 0 \leq t \leq T \tag{4.15}$$

elde edilir. Son olarak (4.15) eşitsizliği, (4.14) eşitsizliğinin sağ tarafındaki üçüncü terimin yerine yazılırsa, lemmanın ispatı tamamlanır. ■

4.3 KARARLILIK DEĞERLENDİRMELERİ

Teorem 4.1 Kabul edelim ki $y \in H^1(Q)$ fonksiyonu $\partial_t y \in H^1(Q)$ özelliğini, (4.1) denklemini ve (4.2) şartını ve bir $\mu > 0$ sabiti için (4.4) şartını sağlasın. Ayrıca

$$|R(x,0)| \geq c_0, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{4.16}$$

olacak şekilde bir $c_0 > 0$ sabiti mevcut ve

$$\partial_t y, \partial_t R \in H^1(Q), \quad \partial_t R \in L^2(0,T;L^\infty(\Omega))$$

olsun. Ek olarak

$$T > \frac{\max_{x\in\overline{\Omega}} \psi(x) - \min_{x\in\overline{\Omega}} \psi(x)}{\mu} \tag{4.17}$$

eşitsizliği sağlansın.

(i) Kabul edelim ki $M > 0$ sabiti için $\|\partial_t y\|_{L^2(Q)} \leq M$ olsun. Bu durumda her $f \in L^2(\Omega)$ için,

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left\{ \left(\int_0^T \int_{\partial\Omega_+} H \cdot \nu |\partial_t y|^2 dS_x dt \right)^{\frac{\theta}{2}} + \left(\int_0^T \int_{\partial\Omega_+} H \cdot \nu |\partial_t y|^2 dS_x dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

olacak şekilde Ω, T, H, $\|V\|_{L^\infty(\Omega)}$, ψ, M, $\|\partial_t R\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}$ büyüklüklerine bağlı $\theta \in (0,1)$ ve $C > 0$ sabiti vardır.

(ii) (i) de verilen $\|\partial_t y\|_{L^2(Q)} \leq M$ kabulü olmaksızın her $f \in L^2(\Omega)$ için,

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\int_0^T \int_{\partial\Omega} |H \cdot \nu| |\partial_t y|^2 dS_x dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

olacak şekilde Ω, T, H, $\|V\|_{L^\infty(\Omega)}$, ψ, $\|\partial_t R\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}$ büyüklüklerine bağlı bir $C > 0$ sabiti vardır.

(iii) (4.1) denklemi ve (4.2) şartına ek olarak, kabul edelim ki

$$y|_{\partial\Omega_- \times (0,T)} = 0, \tag{4.18}$$

olsun. Bu durumda her $f \in L^2(\Omega)$ için

$$C^{-1} \left(\int_0^T \int_{\partial\Omega_+} H \cdot \nu |\partial_t y|^2 dS_x dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\int_0^T \int_{\partial\Omega_+} H \cdot \nu |\partial_t y|^2 dS_x dt \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.19}$$

olacak şekilde Ω, T, H, $\|V\|_{L^\infty(\Omega)}$, ψ, $\|\partial_t R\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}$ büyüklüklerine bağlı bir $C > 0$ sabiti vardır.

Teorem 4.1 de verilen eşitsizlikte **(i)** şıkkı bir Hölder tipi kararlılık değerlendirmesidir ve $\|\partial_t y\|_{L^2(Q)} \leq M$ ön kabulü altında sağlanır. Bu nedenle, şartlı kararlılık olarak adlandırılır. Dikkat edilirse şartlı kararlılık için $\partial\Omega_- \times (0, T)$ sınır parçası üzerinde veriye ihtiyaç duyulmaz, ancak **(ii)** ve **(iii)** de verilen eşitsizlikler Lipschitz tipinde kararlılık değerlendirmeleridir ve bütün $\partial\Omega \times (0, T)$ sınırında veriye ihtiyaç duyulmaktadır. Ayrıca (4.16) şartıyla birlikte, ele alınan ters problem için çift taraflı bir değerlendirme olan (4.19) elde edilmiş olur.

İspat. İlk olarak $M_1 = \max_{x \in \overline{\Omega}} \psi(x)$ ve $m_1 = \min_{x \in \overline{\Omega}} \psi(x)$ olmak üzere (4.17) şartı dikkate alınarak

$$T > \frac{M_1 - m_1}{\beta}, \quad 0 < \beta < \mu \tag{4.20}$$

olacak şekilde $\beta > 0$ seçilebilir. Bu $\beta > 0$ sayısı kullanılarak

$$\varphi(x,t) = -\beta t + \psi(x), \qquad (x,t) \in Q \tag{4.21}$$

şeklinde bir ağırlık fonksiyonu tanımlayalım. (4.20) şartından

$$\varphi(x,T) \leq M_1 - \beta T < m_1 \leq \varphi(x', 0), \quad x, x' \in \overline{\Omega}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan $\varphi \in C^1\left(\overline{Q}\right)$ olduğundan, $M_1 - \beta T < m_2 < m_3 < m_1$ ve

$$\begin{cases} \varphi(x,t) > m_3, & x \in \overline{\Omega},\ 0 \leq t \leq \delta_1, \\ \varphi(x,t) < m_2, & x \in \overline{\Omega},\ T - 2\delta_1 \leq t \leq T \end{cases} \tag{4.22}$$

olacak şekilde $\delta_1 > 0$ ve m_2, m_3 sayıları vardır. Lemma 4.1 i uygulayabilmek için $0 \leq \chi \leq 1$ olmak üzere

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 \;, 0 \leq t \leq T - 2\delta_1, \\ 0 \;, T - \delta_1 \leq t \leq T \end{cases} \tag{4.23}$$

şeklinde bir $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ kesme (cut-off) fonksiyonu tanımlayalım. Buna bağlı olarak

$$z = (\partial_t y)\chi$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} z(x,0) &= \partial_t y\,(x,0)\,\chi\,(0) = \partial_t y\,(x,0) = f\,(x)\,R\,(x,0)\,, \\ z(x,T) &= \partial_t y\,(x,T)\,\chi\,(T) = 0,\; x \in \Omega, \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca,

$$Py = \partial_t y + H \cdot \nabla y + Vy$$

olarak verildiğinden

$$\begin{aligned} Pz &= \partial_t z + H \cdot \nabla z + Vz \\ &= \chi \partial_t^2 y + \partial_t \chi \partial_t y + \chi H \cdot \nabla\,(\partial_t y) + \chi V\,(\partial_t y) \\ &= \chi\,(f(\partial_t R) - H \cdot \nabla\,(\partial_t y) - V \partial_t y) + \partial_t \chi \partial_t y + \chi H \cdot \nabla\,(\partial_t y) + \chi V\,(\partial_t y) \\ &= \chi f(\partial_t R) + \partial_t \chi \partial_t y, \quad (x,t) \in Q \end{aligned}$$

yazılabilir. O halde $z = (\partial_t y)\chi \in H^1(Q)$ olduğu göz önünde bulundurularak Lemma 4.1 (ii), z fonksiyonuna uygulanırsa her $s > 0$ için

$$s \int_\Omega |z(x,0)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dx \leq C \int_Q |\chi f(\partial_t R)|^2 e^{2s\varphi} dxdt + C \int_Q |(\partial_t \chi)\partial_t y|^2 e^{2s\varphi} dxdt + Ce^{Cs} D^2 \tag{4.24}$$

bulunur. (4.24) eşitsizliğinde

$$D^2 = \int_0^T \int_{\partial\Omega_+} H \cdot \nu |\partial_t y|^2 dS_x dt$$

olarak tanımlıdır. Burada $\|\partial_t y\|_{L^2(Q)} \leq M$ ön kabulü, $0 \leq t \leq T - 2\delta_1$ veya $T - \delta_1 \leq t \leq T$ olduğunda $\partial_t \chi = 0$ olması ve (4.22) deki ikinci eşitsizlik kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_Q |(\partial_t \chi)\partial_t y|^2 e^{2s\varphi} dxdt &= \int_{T-2\delta_1}^{T-\delta_1} \int_\Omega |(\partial_t \chi)\partial_t y|^2 e^{2s\varphi} dxdt \\ &\leq \max_{\overline{Q}} |\partial_t \chi|^2 e^{2sm_2} \int_{T-2\delta_1}^{T-\delta_1} \int_\Omega |\partial_t y|^2 dxdt \\ &\leq Ce^{2sm_2} \int_Q |\partial_t y|^2 dxdt \leq Ce^{2sm_2} M^2 \end{aligned} \tag{4.25}$$

elde edilir. Ayrıca $R(x,0) \neq 0$ ve $z(x,0) = f(x)R(x,0)$, $x \in \overline{\Omega}$ olduğu dikkate alınarak

$$\int_{\Omega} |z(x,0)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dx \geq C \int_{\Omega} |f(x)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dx \tag{4.26}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu nedenle (4.24) eşitsizliği

$$s \int_{\Omega} |f(x)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dx \leq C \int_{Q} |f(x)|^2 e^{2s\varphi(x,t)} dxdt + CM^2 e^{2sm_2} + Ce^{Cs} D^2$$

halini alır. Diğer yandan

$$\varphi(x,t) = -\beta t + \psi(x) \leq \psi(x) = \varphi(x,0), \ \ (x,t) \in Q$$

olduğundan

$$s \int_{\Omega} |f(x)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dx \leq C \int_0^T \int_{\Omega} |f(x)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dxdt + CM^2 e^{2sm_2} + Ce^{Cs} D^2$$

$$\leq CT \int_{\Omega} |f(x)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dx + CM^2 e^{2sm_2} + Ce^{Cs} D^2$$

ve buna bağlı olarak $s > 0$ için

$$(s - CT) \int_{\Omega} |f(x)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dx \leq CM^2 e^{2sm_2} + Ce^{Cs} D^2$$

elde edilir. (4.22) den $\varphi(x,0) > m_3$ yazılabileceğinden ve $s > 0$ seçilerek

$$se^{2sm_3} \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \leq CM^2 e^{2sm_2} + Ce^{Cs} D^2$$

ve buradan $s_* > 0$ yeterince büyük bir sabit ve $m_* := m_3 - m_2 > 0$ olmak üzere her $s > s_*$ için

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq CM^2 e^{-2sm_*} + Ce^{Cs} D^2 \tag{4.27}$$

olarak bulunur. ∎

Şimdi (4.27) eşitsizliğinin sağ tarafının uygun bir $s > 0$ seçilerek daha da küçültülmesi gerekir. Bunun için farklı iki durum ele alınacaktır:

1. Durum: $D \geq M$ olsun. (4.27) eşitsizliğinden

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (Ce^{-2sm_*} + Ce^{Cs}) D^2 \tag{4.28}$$

sonucuna varılır.

2. Durum: $D < M$ olsun. Eğer C yerine Ce^{Cs_*} yazılırsa, her $s > 0$ için (4.27) eşitsizliğinin sağlandığı görürülür. Burada amaç (4.27) eşitsizliğinin sağ tarafının s ye göre küçültülmesidir. Bunun için $M^2 e^{-2sm_*} = e^{Cs} D^2$ alınarak

$$s = \frac{2}{C + 2m_*} \log \frac{M}{D}$$

belirlenir. (4.27) eşitsizliği

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2CM^{2-2\theta}D^{2\theta}$$

formuna indirgenir. Burada $\theta = \frac{2m_*}{C+2m_*} \in (0,1)$ dir.
Sonuç olarak

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \max\{(Ce^{-2sm_*} + Ce^{Cs})D^2,\ 2CM^{2-2\theta}D^{2\theta}\}$$

elde edilir. Böylece Teorem 4.1 (i) nin ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi Teorem 4.1 (ii) yi ispatlayalım:

ii) İlk olarak, (4.1) denkleminden

$$\partial_t(\partial_t y) + H(x)\cdot\nabla\partial_t y + V\partial_t y = f(x)\partial_t R,\ (x,t) \in Q,$$
$$(\partial_t y)(x,0) = f(x)R(x,0),\ x \in \Omega$$

yazılabilir. $\partial_t y \in H^1(Q)$ olduğundan ve $\partial_t y$ fonksiyonuna Lemma 4.2 uygulanırsa,

$$\int_\Omega |\partial_t y(x,t)|^2 dx + \int_0^T \int_{\partial\Omega_+} H\cdot\nu|\partial_t y|^2 dS_x dt$$
$$\leq C\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + C\int_0^T\int_{\partial\Omega_-} |H\cdot\nu||\partial_t y|^2 dS_x dt,\ 0 \leq t \leq T \tag{4.29}$$

elde edilir. (4.29) eşitsizliğinin sol tarafındaki ikinci terim ihmal edilir ve burada (4.25) eşitsizliği dikkate alınırsa o zaman

$$\begin{aligned}\int_Q |(\partial_t\chi)\partial_t y|^2 e^{2s\varphi} dxdt &\leq Ce^{2sm_2}\int_Q |\partial_t y|^2 dxdt\\ &\leq Ce^{2sm_2}\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T\int_{\partial\Omega_-}|H\cdot\nu||\partial_t y|^2 dS_x dt\right)\end{aligned}$$

bulunur. O halde (4.26) eşitsizliği, yukarıdaki son eşitsizlik ve $\partial_t R \in L^2(0,T;L^\infty(\Omega))$ olması göz önünde bulundurularak (4.24) den

$$s\int_\Omega |f(x)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dx \leq C\int_Q |f|^2 e^{2s\varphi(x,t)} dxdt$$
$$+Ce^{2sm_2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + Ce^{Cs}\int_0^T\int_{\partial\Omega_-}|H\cdot\nu||\partial_t y|^2 dS_x dt + Ce^{Cs}D^2$$

elde edilir. Ayrıca $\varphi(x,0) \geq \varphi(x,t)$, $(x,t) \in Q$ oldugundan

$$s\int_\Omega |f(x)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dx \leq C\int_Q |f|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dxdt$$
$$+Ce^{2sm_2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + Ce^{Cs}\int_0^T\int_{\partial\Omega}|H\cdot\nu||\partial_t y|^2 dS_x dt + Ce^{Cs}D$$

yazılabilir.

Böylece

$$(s-C)\int_{\Omega}|f(x)|^2e^{2s\varphi(x,0)}dx \leq Ce^{2sm_2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+Ce^{Cs}\int_0^T\int_{\partial\Omega}|H\cdot\nu||\partial_t y|^2dS_xdt$$

olduğu görülür. Diğer yandan (4.22) den $\varphi(x,0) > m_3,\ x \in \Omega$ eşitsizliği kullanılarak yeterince büyük $s > 0$ için

$$se^{2sm_3}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq Ce^{2sm_2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+Ce^{Cs}\int_0^T\int_{\partial\Omega}|H\cdot\nu||\partial_t y|^2dS_xdt$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq Ce^{-2sm_*}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+Ce^{Cs}\int_0^T\int_{\partial\Omega}|H\cdot\nu||\partial_t y|^2dS_xdt$$

elde edilir. Yeterince büyük $s > 0$ seçilerek, sağ taraftaki ilk terim ikinci tarafa absorbe edilir. Böylece (ii) nin ispatı tamamlanır.

Son olarak Teorem 4.1 (iii) yi ispatlayalım.

iii) Eğer $y|_{\partial\Omega_-\times(0,T)} = 0$ şartı Teorem 4.1 (ii) de elde edilen eşitsizlikte kullanılırsa (4.19) daki ikinci eşitsizlik elde edilir. Diğer taraftan yine (4.18) ve (4.29) kullanılarak (4.19) daki birinci eşitsizliğin sağlandığı kolayca görülür.

Şimdi Teorem 4.1 yardımıyla $V(x)$ katsayısının belirlenmesi problemini ele alacağız.

Teorem 4.2 Kabul edelim ki $j = 1, 2$ olmak üzere

$$u_j, \partial_t u_j \in H^1(Q) \cap L^2(0,T;L^\infty(\Omega)), \tag{4.30}$$

fonksiyonları

$$\partial_t u_j + H(x)\cdot\nabla u_j + V_j(x)u_j(x,t) = 0,\ (x,t) \in Q, \tag{4.31}$$

denklemlerini sağlasın. Ayrıca

$$u_1 = u_2,\ (x,t) \in \partial\Omega_- \times (0,T), \tag{4.32}$$

$$u_1(\cdot,0) = u_2(\cdot,0),\ x \in \Omega \tag{4.33}$$

koşulları sağlansın. Ek olarak:

i) H için (4.4) şartını sağlayan $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ fonksiyonu mevcut olsun;

ii) (4.17) şartı sağlansın, yani

$$T > \frac{\max_{x\in\overline{\Omega}}\psi(x) - \min_{x\in\overline{\Omega}}\psi(x)}{\mu};$$

iii) $M > 0$ bir sabit olmak üzere

$$\|V_j\|_{L^\infty(\Omega)},\ \|\partial_t u_j\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} \leq M,\ j = 1,2 \tag{4.34}$$

olsun;

iv) Bir $c_0 > 0$ sabiti vardır öyle ki

$$|u_1(x,0)| \geq c_0,\ x \in \overline{\Omega}. \tag{4.35}$$

Bu durumda

$$C^{-1}\|\sqrt{H \cdot \nu}\partial_t(u_1 - u_2)\|_{L^2(\partial\Omega_+ \times (0,T))} \leq \|V_1 - V_2\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq C\|\sqrt{H \cdot \nu}\partial_t(u_1 - u_2)\|_{L^2(\partial\Omega_+ \times (0,T))} \tag{4.36}$$

olacak şekilde Ω, T, H, ψ, a, M büyüklüklerine bağlı bir $C > 0$ sabiti vardır.

Sabit bir $H(x)$ vektörü için Teorem 4.1 ve Teorem 4.2, Machida and Yamamoto (2014) tarafından elde edilen sonuç ile aynıdır. Gölgeleyen and Yamamoto (2016) tarafından $H(x)$ in sabit olmadığı durum incelenmiştir.

İspat. Teorem 4.2 direkt olarak Teorem 4.1 kullanılarak ispatlanabilir. (4.31)-(4.35) bağıntılarından elde edilen

$$\begin{aligned} \partial_t(u_1 - u_2) + H(x)\nabla(u_1 - u_2) + V_1u_1 - V_2u_2 + (V_1u_2 - V_1u_2) &= 0, \\ u_1 - u_2|_{\partial\Omega_- \times (0,T)} &= 0, \\ u_1(\cdot,0) - u_2(\cdot,0) &= 0, \end{aligned}$$

eşitliklerinde $y = u_1 - u_2$, $f = V_1 - V_2$ ve $R = u_2$ alınırsa

$$\begin{aligned} &\partial_t y + H(x) \cdot \nabla y + V_1 y = f(x)R(x,t),\ (x,t) \in Q, \\ &y(x,0) = 0,\ x \in \Omega, \\ &y|_{\partial\Omega_- \times (0,T)} = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Ayrıca burada $\partial_t y \in H^1(Q), \|\partial_t R\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} \leq M$, $R(x,0) = -a(x)$, $x \in \overline{\Omega}$ dır. O halde Teorem 4.1 (iii) den ispat tamamlanır.

■

4.4 SONUÇ

Gaitan and Ouzzane (2014) ve Klibanov and Pamyatnykh (2008) de kullanılan temel Carleman değerlendirmesi ikinci mertebeden hiperbolik denklemlerde kullanılan Carleman değerlendirmesiyle aynıdır ve bu çalışmalarda çözümün $(-T, 0)$ zaman aralığına genişletilmesi gerekir. Böyle bir genişleme, ispatı daha uzun hale getireceği gibi tıpkı Klibanov and Pamyatnykh (2008) de olduğu gibi bilinmeyen katsayı ve başlangıç değer için ek koşulların varlığını gerektirir. Diğer yandan Gölgeleyen and Yamamoto (2016) tarafından elde edilen Carleman değerlendirmesi sayesinde böyle bir genişlemeye ihtiyaç duyulmaz, kararlılık ispatı daha da basitleşir ve temel kısımdaki H katsayısı üzerindeki sınırlamalar da hafifletilmiş olur. Bununla birlikte (4.1) denklemi için Carleman değerlendirmesi yapılırken $H(x)$ temel katsayı için bazı ön koşulların kabul edilmesi zorunludur. Ayrıca burada verilen Carleman eşitsizliklerinde (Lemma 4.1 ve 4.2) başlangıç verileri de direkt olarak değerlendirmeye alınmaktadır. Gaitan and Ouzanne (2014) deki Carleman değerlendirmesinde kullanılan ağırlık fonksiyonu ile $H(x)$ üzerine konulan koşul daha karmaşık bir hal almaktadır ancak Lemma 4.1 ve Lemma 4.2 de alınan ağırlık fonksiyonu t ye linner olarak bağlı olup Carleman değerlendirmesi için $H(x)$ üzerinde daha basit bir şarta ihtiyaç duyulmaktadır.

KAYNAKLAR

Amirov A (2001) *Integral Geometry and Inverse Problems for Kinetic Equations*. 1st edition, ISBN: 90-6764-352-1, VSP, Utrecht, 201 pp.

Adams R A and Fournier J J F (2003) *Sobolev Spaces.* 2nd edition, ISBN: 0-12-044143-8, Elsevier, Academic Press, Amsterdam, 305 pp.

Bal G (2009**)** Inverse transport theory and applications. *Inverse Problems*, 25 (5): 053001.

Bal G, Langmore I and Monard F (2008) Inverse transport with isotropic sources and angularly averaged measurements. *Inverse Problems Imaging*, 2: 23–42.

Bal G and Jollivet A (2008) Stability estimates in stationary inverse transport. *Inverse Problems Imaging*, 2: 427–454.

Bal G and Jollivet A (2009) Time-dependent angularly averaged inverse transport. *Inverse Problems*, 25 (7): 075010.

Bal G and Jollivet A (2010) Stability for time-dependent inverse transport. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 42 (2): 679–700.

Bal G, Ren K and Hielscher AH (2007) Transport -and diffusion- based optical tomography in small domains: a comparative study. *Applied Optics*, 46 (27): 6669-6679.

Baudouin L, DE Buhan M and Ervedoza S (2013) Global Carleman estimates for waves and applications. *Communications in Partial Differential Equations,* 38 (5): 823-859.

Baudouin L and Puel JP. *(2002)* Uniqueness and stability in an inverse problems for Schrödinger equation. *Inverse Problems*, 18 (6): 1537-1554.

Bellassoued and Yamamoto M (2017) *Carleman Estimates and Applications to Inverse Problems for Hyperbolic Systems*. 1st edition, ISBN: 978-4-431-56598-7, Springer, Berlin, 259 pp.

Brezis H and Browder F (1997) Partial Differential Equations in the 20th Century. *Advanced in Mathematics,* 135 (1): 76-144.

Bukhgeim A and Klibanov M (1981) Uniqueness and Stability Inverse Problems, *Soviet Math. Dokl.*, Amsterdam, 24: 244-247.

Case K M and Zweifel P F (1967*) Linear Transport Theory*. 1st edition, Addison-Wesley, Boston, 351 pp.

Chandrasekhar S (1960) *Radiative Transfer.* 1st edition, Dover, New York, 393 pp.

Choulli M and Stefanov P (1996) Inverse scattering and inverse boundary value problems for the linear Boltzmann equation. *Communications in Partial Differential Equations*, 21 (5-6): 763–785.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Choulli M and Stefanov P (1999) An inverse boundary value problem for the stationary transport equation. *Osaka Journal of Math,* 36 (1): 87–104.

Dautray R and Lions J-L. (1993) *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology.* Vol. 6., ISBN: 978-3-540-66097-2, Springer, Berlin, 715 pp.

Duderstadt J J and Martin W R (1979) *Transport Theory.* 1st edition, John Wiley & Sons, Chichester, 613 pp.

Evans L C (1997) *Partial Differential Equations.* 1st edition, Vol 6., American Mathematical Society, Berkeley, 662 pp.

Gaitan P and Ouzzane H (2014*)* Inverse problem for a free transport equation using Carleman estimates. *Applicable Analysis*, 93 (5): 1073-1086.

Gölgeleyen F and Yamamoto M (2016) Stability for some inverse problems for transport equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis,* 48 (4): 2319-2344.

Gölgeleyen İ ve Kaytmaz Ö (2016) Ters ve Kötü Konulmuş Problemler Teorisinin Bilim ve Teknolojideki bazı Uygulamaları. *Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi,* 6 (1): 230-237.

Hörmander L (1963) *Linear Partial Differential Operators*. 1rd edition, ISBN: 978-3-662-30653-6, Springer, Berlin, 290 pp.

Imanuvilov O and Yamamoto M (2001) Global Lipschitz stability in an inverse hyperbolic problem by interior observations. *Inverse Problems,* 17: 717-728.

Isakov V (2006) *Inverse Problems for Partial Differential Equations.* 2nd edition, ISBN: 0-387-25364-5, Springer, Berlin, 344 pp.

Jost J (2013) *Partial Differential Equations.* 3rd edition, Springer, New York, USA 410 pp.

Klibanov M V (1992) Inverse problems and Carleman estimates. *Inverse Problems,* 8: 575–596.

Klibanov M V and Pamyatnykh S E (2006) Lipschitz stability of a non-standard problem for the non-stationary transport equation via a Carleman estimate. *Inverse Problems*, 22: 881.

Klibanov M V and Pamyatnykh S E (2008) Global uniqueness for a coefficient inverse problem for the non-stationary transport equation via Carleman estimate. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 343 (1): 352–365.

Klibanov M V and Timonov A A (2004) *Carleman estimates for coefficient inverse problems and numerical applications. Inverse and Ill- Posed Problems Series*, 1st edition, ISBN: 90-6764-405-6, VSP, Utrecht, 273 pp.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Klibanov M V and Yamamoto M (2007) Exact controllability for the time dependent transport equation. *SIAM Journal on Control and Optimization,* 46 (6): 2071–2195.

Kreyszig E (1989) *Introductory Functional Analysis with Applications*. 1st edition. ISBN: 0-471-50731-8*,* John Wiley & Sons, USA, 688 pp.

Lavrent'ev M M, Romanov V G and Shishatskii S P (1986*) Ill-posed Problems of Mathematical Physics and Analysis.* 1st edition, ISBN: 0-8218-0896-6, American Mathematical Society, 291 pp.

Logan J D (2015) *Applied Partial Differential Equations.* 3rd edition, ISBN: 978-3-319-17851-6, Springer, 367 pp.

Machida M and Masahiro Yamamoto M (2014) Global Lipschitz stability in determining coefficients of the radiative transport equation*. Inverse problems*, 30 (3): 035010.

Mikhailov V P (1978) *Partial Differential Equations*. Revised from the 1976 Russian edition, Mir Publishers translate, Moscow, 396 pp.

Pankov A A (1997) *G-Convergence and Homogenization of Nonlinear Partial Differential Operators.* 1st edition, ISBN: 978-90-481-4900-1, Springer Science & Business Media, 249 pp.

Prilepko A I and Ivankov A L (1985) Inverse problems for the time-dependent transport equation. *Soviet Mathematics Doklady,* 29: 559–564.

Polyanin A D, Zaitsev V F and Moussiaux A (2002) *First Order Partial Differential Equations.* 1st edition, ISBN: 978-0415272674, Taylor & Francis, London, 520 pp.

Romanov V G (1997) Stability estimates in the three-dimensional inverse problem for the transport equation. *Journal of Inverse Ill-Posed Problems,* 5 (5): 463–475.

Romanov V G (1998) A Conditional Stability Theorem in The Problem of Determining The Dispersion Index and Relaxation for The Stationary Transport Equation. (Engl. transl.), *Matematiceskie Trudy, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,* 1 (1): 78–115.

Sobolev V V (1975) Light Scatering in Planetary Atmospheres. *Pergamon Press,* 76: 263.

Stefanov P (2003) İnverse Problem in transport theory. In inside out: inverse problems and applications. *Mathematical Sciences Research Institute Publications, Cambridge University Press,* 47: 111-131.

Stefanov P and Tamasan A (2009) Uniqueness and non-uniqueness in inverse radiative transfer. *Proceedings of the American Mathematical Society,* 137 (7): 2335–2344.

Stefanov P and Uhlmann G (2003) Optical tomography in two dimensions. *Methods and Applications of Analysis,* 10 (1): 1–10.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Tamasan A (2002) An inverse boundary value problem in two-dimensional transport. *Inverse Problems,* 18 (1): 209 pp.

Vladimirov V S (2002) *Methods of the Theory of Generalized Functions*. ISBN 0-415-27356-0, CRC Press, London, 311 pp.

Wang J-N (1999) Stability estimates of an inverse problem for the stationary transport equation. *Ann. Inst. Henri Poincare´* A, 70: 1-5.

Yamamoto M (2009) Carleman estimates for parabolic equations and applications. *Inverse Problems*, 25 (12): 123013.

Yuan G and Yamamoto M (2009) Lipschitz stability in the determination of the principal part of a parabolic equation. *ESAIM Control Optimisation and Calcilus Variations,* 15 (3): 525-554.

ÖZGEÇMİŞ

Sevil AMİROVA, 1989 yılında Novosibirsk, Rusya' da doğdu. İlk öğrenimini Bakü'de, orta öğrenimini Zonguldak'da tamamladı. Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2013 yılında mezun oldu. 2015 yılında Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına başladı.

ADRES BİLGİLERİ:

Adres: Üniversite Mah. Aydoğmuş Sok. Merkez / Zonguldak.

Tel: (+90) 5315941875
E-posta: sevilamirov@hotmail.com