BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKLİ FONKSİYON UZAYLARINDA DOĞRUSAL POZİTİF OPERATÖR DİZİLERİ İÇİN VORONOVSKAYA TİPLİ TEOREMLER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HURİYE ALDEMİR

MAYIS 2018

BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKLİ FONKSİYONUZAYLARINDA DOĞRUSAL POZİTİF OPERATÖR DİZİLERİ İÇİN VORONOVSKAYA TİPLİ TEROEMLER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

Huriye ALDEMİR

DANIŞMAN : Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN

ZONGULDAK

MAYIS 2018

KABUL:

Huriye ALDEMİR tarafından hazırlanan "Sürekli Fonksiyon Uzaylarında Doğrusal Pozitif Operatör Dizileri İçin Voronovskaya Tipli Teoremler" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 11/05/2018

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN ....
Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. Tülin COŞKUN ....
Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN ....
Düzce Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

ONAY:

Yukarıda imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. ...../...../2018

Doç. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Huriye ALDEMİR

H. Aldemir

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SÜREKLİ FONKSİYON UZAYLARINDA DOĞRUSAL POZİTİF OPERATÖR DİZİLERİ İÇİN VORONOVSKAYA TİPLİ TEOREMLER

Huriye ALDEMİR

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN

Mayıs 2018, 97 sayfa.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, doğrusal pozitif operatörlerle ilgili temel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde yedi operatörün genel yaklaşım özellikleri, sürekli fonksiyonlar uzayında Voronovskaya tipli teorem yardımıyla araştırılmıştır.

Üçüncü bölümde, farklı yakınsama türlerine göre operatörlerin yaklaşım durumları Voronovskaya tipi teoremler yardımıyla verilmiştir. Dördüncü bölümde, bazı q −operatörler için Voronovskaya tipi teoremler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal Pozitif Operatörler, q −Analiz, Voronovskaya Teoremi, İstatistiksel Yaklaşım.

Bilim Kodu: 403.03.00.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

VORONOVSKAYA TYPE THEOREMS FOR SEQUENCES OF LINEAR POSITIVE OPERATORS IN CONTINUOUS FUNCTIONS SPACE

Huriye ALDEMIR

Bulent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Asst. Prof. Dr. Nazmiye GONUL BILGIN

May 2018, 97 pages.

This thesis consists of fourt chapters. In the first chapter, fundamentalin formation about the linear positive operators is given.

In these condchapter, some approximation properties of the seven operators have been investigated using the Voronovskaya typed theorem in the space of continuous functions.

In the third chapter, the approximation properties of operators according to different types of convergence are given with the help of Voronovskaya type theorems. In the fourth chapter, Voronovskaya type theorems areexamined for some q-operators.

Keywords: Linear Positive Operators, q-analysis, Voronovskaya Theorem, Statistical Approximation.

Science Code: 403.03.00.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşturulmasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren, ilgisini ve tecrübesini esirgemeyen, tezin her aşamasında büyük bir özveriyle emek veren değerli danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN'e;

Ayrıca değerli vakitlerini ayırarak tezi inceleyen Doç. Dr. Tülin COŞKUN ve Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman hoşgörüyle bana destek olan babam İsmail ALDEMİR, annem Aynur ALDEMİR, kardeşim Merve ALDEMİR'e ve enerjisiyle bana motivasyon kazandıran kıymetli öğretmen arkadaşım Osman KAPAN'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

SİMGELER DİZİNİ

$C[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$\rho(x)$	: Ağırlık fonksiyonu
$B_\rho(\mathbb{R})$	: Her $x \in \mathbb{R}$ için $\lvert f(x)\rvert \leq M_f \cdot \rho(x)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı
$C_\rho(\mathbb{R})$	: $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayındaki sürekli fonksiyonlar uzayı
$\lVert\cdot\rVert_{C[a,b]}$	: $C[a,b]$ uzayı için norm
$\lVert\cdot\rVert_\rho$	: $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayı için norm
$\lVert L\rVert_{X\to Y}$	: X normlu uzayından Y uzayına dönüşüm yapan operatör için norm
$B_n(f;x)$	: Bernstein operatörü
$M_{n,r}(f;x)$	: Bernstein-Durrmeyer operatörü
$K_n(f;x)$	: Bernstein-Kantorovich operatörü
$S_n(f;x)$	: Szasz-Mirakyan-Bernstein operatörü
$S_n^\rho(f;x)$	: Genelleştirilmiş Szasz-Mirakyan operatörü
$A_n(f;x)$	: Genelleştirilmiş Favard-Szasz operatörü
$S_{n,q}(f;x)$	: q-Szasz-Mirakyan operatörü

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Yaklaşım teorisi matematiğin birçok alanıyla ilgilidir. Yaklaşım teorisi bir fonksiyonun, daha kullanışlı ve basit olan bir diğer fonksiyon cinsinden gösterimini elde etmeyi amaçlar.

Klasik yaklaşım teorisi, 1885 de Weierstrass'ın ispatladığı; sürekli her fonksiyona bir polinom fonksiyonu ile istenildiği kadar düzgün yaklaşılabileceğini gösteren teorem ile başlamıştır. Daha sonra Korovkin 1953 de yalnızca test fonksiyonlarının bir fonksiyona düzgün yakınsamasının, doğrusal pozitif operatör dizilerinin düzgün yakınsaması için gerekli ve yeterli olduğunu göstermiştir. Bu çalışma yardımıyla çeşitli doğrusal pozitif operatörler tanımlanarak yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Sonraki yıllarda birçok araştırmacı farklı uzaylar üzerinde bu koşulları araştırmıştır. Birçok operatör sınırsız aralıkta tanımlandığından bu operatörlerin sadece ağırlıklı uzaylarda yaklaşım özellikleri çalışılabilmektedir.

Voronovskaya 1932 yılında, Bernstein polinomları ve $[0,1]$ aralığında sınırlı olup belli bir x noktasında 2. türeve sahip f fonksiyonu için asimptotik yaklaşım olarak adlandırılan;

$$\lim_{n\to\infty} n[B_n(f;x) - f(x)] = x(1-x)^2 f''(x)$$

eşitliğinin sağlandığını göstermiştir.

Doğrusal pozitif operatörlerin bir diğer genellemesi de operatörlerin q_analizleridir. Yaklaşım teorisinde q_genelleme kavramı ilk olarak 1987 de Lupaş tarafından Bernstein polinomlarına uygulanmıştır. Daha sonra farklı araştırmacılar tarafından literatürdeki birçok operatörün q_genellemesi verilmiştir.

Yaklaşım Teorisinde sıkça kullanılmaya başlanan istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk kez 1949 yılında Steinhaus tarafından tanıtılmış ve daha sonra 1951 yılında Fast tarafından geliştirilmiştir.

Daha sonra bu tanım kullanılarak Gadjiev ve Orhan, 2002; Duman ve ark., 2003 tarafından Korovkin tipli yaklaşım için güçlü sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tezde Voronovskaya tipli teoremi sağlayan bazı doğrusal pozitif operatörler tanıtılarak bu operatörlerin klasik anlamda yaklaşım özellikleri incelenecektir. Daha sonra farklı yakınsama türlerine göre yaklaşım özelliklerini sağlayan operatörler için Voronovskaya tipli teoremler verilecektir. Son olarak bazı q_operatörler için Voronovskaya tipli yaklaşım teoremleri incelenecektir.

1.1 [a,b] ARALIĞINDA TANIMLI SÜREKLİ FONKSİYONLAR UZAYI

Tanım 1.1.1

$[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı, aralıktaki tüm noktalarda sürekli ve a da soldan b de sağdan sürekli olan $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar uzayına $[a, b]$ *aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı* denir ve $C[a, b]$ şeklinde gösterilir. Açıkça $C[a, b]$ uzayı doğrusal uzaydır.

Tanım 1.1.2

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu durumda

$$\|f\|_C := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

ile $C[a, b]$ uzayında bir normdur.

Buna göre $C[a, b]$ uzayı açıkça normlu doğrusal bir uzaydır.

Önerme 1.1.1

$(f_n) \subset C[a, b]$ fonksiyon dizisinin bir $g \in C[a, b]$ fonksiyonuna düzgün yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gerçel sayılardan oluşan bir sıfır dizisi olmak üzere her $x \in [a, b]$için

$$|f_n(x) - g(x)| < M \cdot \varepsilon_n \tag{1.1}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde en az bir $M > 0$ sayısının olmasıdır(Coşkun 1997).

1.2 SONSUZ ARALIKTA TANIMLI SÜREKLİ VE SINIRLI FONKSİYON UZAYLARI

Tanım 1.2.1

$\rho: \mathbb{R} \to [1, \infty[$ her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{|x| \to \infty} \rho(x) = \infty$$

olan sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x)| \leq M_f \rho(x)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayına $B_\rho(\mathbb{R})$ $uzay$ı denir. Burada ρ fonksiyonu ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılır(Gadjiev 1976).

Tanım 1.2.2

$C_\rho(\mathbb{R}) = \{f \in B_\rho(\mathbb{R}): f\ sürekli\}$ ağırlık uzayı $\mathbb{R}$ üzerinde bir doğrusal uzaydır.

Tanım 1.2.3

ρ bir ağırlık fonksiyonu, $f \in B_\rho(\mathbb{R})$olsun. Bu durumda

$$\|f\|_\rho := \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$$

ile $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde norm tanımlanabilir. Bu norm ile $B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayları normlu uzaydır(Gadjiev 1976).

Tanım 1.2.4

$\rho: \mathbb{R} \to [1, \infty[$ sürekli fonksiyonu her$x \in \mathbb{R}$ için $\rho(x) \geq 1$ ve

$$\lim_{|x| \to \infty} \rho(x) = \infty$$

şeklinde bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = K_f < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı $C_\rho^k(\mathbb{R})$ ile gösterilir ve açıkça bu uzay $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayının alt uzayıdır(Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

1.3 DOĞRUSAL POZİTİF OPERATÖRLERİN GENEL ÖZELLİKLERİ

Tanım 1.3.1

X ve Y fonksiyon uzayları olsun. Bu durumda her $f \in X$ için

$$L(f, x) = g(x)$$

olacak şekilde $g \in Y$ fonksiyonu varsa L dönüşümü X uzayından Y ye bir operatördür denir.

Örnek 1.3.1

$\boldsymbol{i}$) $[0,1]$ aralığında tanımlı sürekli keyfi f fonksiyonu için, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Bernstein polinomlar dizisi

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde tanımlanır(Bernstein 1912).

$\boldsymbol{ii}$) $D \subset C(\mathbb{R})$ ve $L: D \to C(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için

$$L(f, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(t-x)^2}{2}} f(t)\, dt$$

de bir operatördür. Bu operatör Gauss-Weierstrass operatörü olarak adlandırılır(Altomare and Campite 1994).

X doğrusal bir uzay olsun. X üzerinde doğrusal operatör tanımı aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 1.3.2

X, Y uzayları doğrusal, $f_1, f_2 \in X$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ olsun.

$L: X \to Y$ operatörü için

$$L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, x) = \alpha_1 L(f_1, x) + \alpha_2 L(f_2, x)$$

eşitliğini sağlayan L operatörüne doğrusaldır denir.

Tanım 1.3.3

$X^{+} := \{f \in X: f(x) \geq 0\}$, $Y^{+} := \{g \in Y: g(x) \geq 0\}$

olarak tanımlı fonksiyon uzayları için $L: X \rightarrow Y$ operatörü doğrusal olsun. Bu durumda

$L(X^{+}) \subset Y^{+}$ ise L'ye doğrusal pozitif operatör denir.

Örnek 1.3.2

$i)$ $L: C[0,1[\rightarrow C[0,1[$ olsun. Her $x \in [0,1[$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k (1-x)^{n+1} f\left(\frac{k}{n+k}\right)$$

şeklinde tanımlı operatörler açıkça doğrusal ve pozitiftir. Bu operatör Meyer-Zeller operatörü olarak adlandırılır.

$ii)$ $x \in [-1,1]$ ve $f \in C[-1,1]$ olmak üzere

$$\varphi_n^k(x) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

olsun. Bu durumda

$$K_n(f;x) = \frac{n+1}{2}\varphi_{n(x)}^k \sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x) \int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} f(t)dt$$

şeklinde tanımlı doğrusal pozitif operatör Bernstein-Kantarovic operatörü olarak bilinir.

Uyarı 1.3.1

Doğrusal pozitif L operatörler negatif fonksiyonları negatif fonksiyonlara dönüştürür.

Uyarı 1.3.2

Doğrusal pozitif operatörler monotondur.

Her $x \in \mathbb{R}$ için

$f(x) \leq g(x)$ için $f(x) - g(x) \leq 0$ dır.

Yani

$(f - g)(x) \leq 0$ dır. Uyarı 1.3.1 den

$L(f - g, x) \leq 0$ olacağından

$L(f, x) - L(g, x) \leq 0$ dır.

Böylece $L(f, x) \leq L(g, x)$ olur.

Tanım 1.3.4

X ve Y normlu uzaylar ve $L: X \to Y$ doğrusal operatör olsun. Her $f \in X$ için

$\|L(f, x)\|_Y \leq C\|f\|_X$

koşulunu sağlayan bir $C > 0$ sayısı varsa L ye sınırlı operatör denir. Bu C sabitlerinin en küçük alt sınırına L operatörünün normu denir. Kısaca

$\|L\|_{X\to Y} = \inf\{C: \|L(f, x)\|_Y \leq C\|f\|_X\}$

eşitliğiyle gösterilir.

Uyarı 1.3.2

$L: X \to Y$ sınırlı doğrusal bir operatör ve $\|f\|_X \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f, x)\|_Y}{\|f\|_X}$$

eşitliği geçerlidir(Rudin 1991).

Kanıt:

L operatörü sınırlı olduğundan her $f \in X$ için

$$\frac{\|L(f, x)\|_Y}{\|f\|_X} \leq \|L\|_{X\to Y}$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece

$$\sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f,x)\|_Y}{\|f\|_X} \leq \|L\|_{X\to Y}$$

olacaktır.

Diğer taraftan infimum tanımından her $\varepsilon > 0$ için

$$\|L(f_\varepsilon, x)\|_Y \geq (\|L\|_{X\to Y} - \varepsilon)\|f\|_X$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir $f_\varepsilon \in X$ vardır.

Böylece her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{\|L(f_\varepsilon, x)\|_Y}{\|f_\varepsilon\|_X} \geq \|L\|_{X\to Y} - \varepsilon$$

eşitsizliği geçerlidir. O halde

$$\sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f_\varepsilon,x)\|_Y}{\|f_\varepsilon\|_X} \geq \frac{\|L(f_\varepsilon,x)\|_Y}{\|f_\varepsilon\|_X} \geq \|L\|_{X\to Y} - \varepsilon$$

eşitsizliğine ulaşılır. ε istenildiği kadar küçük bir sayı olduğundan

$$\sup_{\|f\|_x \neq 0} \frac{\|L(f,x)\|_Y}{\|f\|_X} \geq \|L\|_{X\to Y}$$

eşitsizliği gösterilmiş olur. Bu ise kanıtı tamamlar.

Sonuç 1.3.1

Sınırlı ve doğrusal $L: X \to Y$operatörü için

$\|g\|_X = 1$ olmak üzere

$$\|L\| = \sup_{\|g\|_X = 1} \|L(g,x)\|_Y$$

eşitliği geçerlidir.

Önerme 1.3.1

$L: X \to Y$ bir doğrusal pozitif operatör olsun. Bu durumda her $f \in X$ için

$|L(f,x)| \leq$ L

eşitsizliği sağlanır(Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Kanıt:

L operatörü doğrusal pozitif olsun. Uyarı 1.3.2 den doğrusal pozitif operatörler monoton olduğundan L operatörü

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

eşitsizliğine uygulanırsa

$$L(-|f|,x) \leq L(f,x) \leq L(|f|,x)$$

olur. Operatörün doğrusallığından,

$$-L(|f|,x) \leq L(f,x) \leq L(|f|,x)$$

olacaktır. Dolayısıyla

$$|L(f,x)| \leq L(|f|,x)$$

bulunur.

1.4 SÜREKLİ FONKSİYON UZAYLARINDA KOROVKİN TİPLİ TEOREMLER

Teorem 1.4.1 (Korovkin Teoremi)

Her $x \in [a,b]$ ve $m = 0,1,2$ için L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^m,x) - x^m\|_{C[a,b]} = 0$$

şeklinde verilen üç koşulu sağlıyorsa tüm $\mathbb{R}$ de sınırlı $[a,b]$ de sürekli ve a da soldan b de sağdan sürekli her f fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliği geçerlidir(Korovkin 1960).

Kanıt:

f, tüm ℝ de sınırlı olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için

$|f(x)| \leq M$

olacak şekilde en az bir $M > 0$ vardır.

$f \in C[a,b]$ olduğundan

her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ bulunur, öyle ki $x, t \in [a,b]$ için ve $|t - x| < \delta$ olduğunda

$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$

eşitsizliği sağlanır.

Her $t \in \mathbb{R}$, $x \in [a,b]$ için

$|t - x| < \delta$ olduğunda da

$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$

eşitsizliği doğrudur.

Gerçekten $x \in [a,b]$ ve $t \notin [a,b]$ olsun. $|t - x| < \delta$ olduğunda

$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$

koşulu f fonksiyonu a da soldan b de sağdan sürekli olduğundan yine doğrudur.

Öte yandan

$|t - x| \geq \delta$ olduğunda ise

$\frac{|t-x|^2}{\delta^2} \geq 1$ olup açıkça

$$2M \leq \frac{2M}{\delta^2}|t - x|^2$$

eşitsizliği geçerlidir. Üçgen eşitsizliği ve bu eşitsizlikleri kullanarak

her $\varepsilon > 0$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M < \frac{2M}{\delta^2}|t - x|^2 + \varepsilon$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$$\|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[a,b]} = \|L_n(f(t) - f(x) + f(x), x) - f(x)\|_{C[a,b]}$$

$$= \|L_n(f(t) - f(x), x) + L_n(f(x), x) - f(x)\|_{C[a,b]}$$

$$\leq \|L_n(f(t) - f(x), x)\|_{C[a,b]} + \|f(x)\|_{C[a,b]} \|L_n(1, x) - 1\|_{C[a,b]}$$

eşitsizliği geçerli olduğundan hipotezden (ε_n) sıfır dizisi olmak üzere

$$\|L_n(1,x) - 1\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon_n$$

olacaktır. Böylece

$$\|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon \|L_n(1,x) - 1\|_{C[a,b]} + \ \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \|L_n(t^2, x) - x^2\|_{C[a,b]}$$

$$-2a\|L_n(t,x) - x\|_{C[a,b]} + b^2 \|L_n(1,x) - 1\|_{C[a,b]}$$

bulunur. Ayrıca (1.1) eşitsizliğinden son eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınacak olursa

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Böylece her $f \in C[a,b]$ için $L_n(f,x)$ operatörler dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı gösterilmiş olur.

Lemma 1.4.1

L_n doğrusal pozitif operatörler dizisinin $C_\rho$uzayından B_ρ ya dönüşüm yapması için gerekli ve yeterli koşul, ρ fonksiyonuna bağlı $M_\rho$sabiti için

$$\|L_n(\rho, x)\|_\rho \leq M_\rho$$

olacak şekilde bir M_ρ sabitinin bulunmasıdır(Gadjiev 1976).

Kanıt

Doğrusal pozitif operatörler dizisi L_n, C_ρ dan B_ρ uzayına bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $f \in C_\rho$ için $L_n(f,x) \in B_\rho$ olacaktır.

$$|\rho(x)| = \rho(x) \leq 1.\rho(x)$$

olacağından $\rho \in C_\rho$ olur. Dolayısıyla $L_n(\rho, x) \in B_\rho$olacaktır. B_ρ uzayının tanımından

$$\frac{|L_n(\rho, x)|}{\rho(x)} \leq M_\rho$$

eşitsizliğine ulaşılır. $x \in \mathbb{R}$ üzerinden supremum alınırsa $\|L_n(\rho, x)\|_\rho \leq M_\rho$ eşitsizliği gösterilmiş olur.

Diğer yandan$f \in C_\rho$ olsun. Açıkça

$$|f(x)| \leq M_f . \rho(x)$$

eşitsizliği geçerli olur ve böylece

$$\|f\|_\rho \leq M_f$$

eşitsizliği yazılabilir. Hipotez ve $L_n(f, x)$ operatörünün monotonluğu kullanılarak

$$\|L_n(\rho, x)\|_\rho \leq M_\rho$$

olur. Ayrıca

$$|L_n(f, x)| \leq L_n(|f|, x) = L_n\left(\frac{|f|}{\rho}\rho, x\right) \leq \|f\|_\rho L_n(\rho, x) \leq M_f M_\rho \rho(x)$$

olur. Bu ise $L_n(f, x) \in B_\rho$ demektir.

Sonlu aralıklar üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar için Korovkin Teoremi geçerli olup gerçel sayılar kümesi üzerinde sürekli olan fonksiyonlar için geçerli değildir. Bu durum Hacıyev tarafından kanıtlanmış olup Hacıyev Teoremi olarak bilinir.

Teorem 1.4.2 (Hacıyev Teoremi)

C_ρ dan B_ρ uzayına dönüşüm yapan bir L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi, $m = 0,1,2$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^m, x) - x^m\|_\rho = 0$$

şeklindeki üç koşulu sağlasın. Bu durumda en az bir $f^* \in C_\rho$ için

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|L_n(f^*, x) - f^*(x)\|_\rho > 0$$

eşitsizliği geçerlidir(Gadjiev 1976).

Sonuç 1.4.1

C_ρ dan B_ρ uzayına dönüşüm yapan L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi $m = 0,1,2$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^m, x) - x^m\|_\rho = 0$$

şeklindeki üç koşulu sağlasın. Bu durumda her $f \in C_\rho^k$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f, x) - f(x)\|_\rho = 0$$

eşitliği sağlanır. Böylece Korovkin Tipli bir teorem C_ρ ağırlıklı uzayında geçerli olmayıp C_ρ^k alt uzayında geçerlidir.

2.BÖLÜM

BAZI OPERATÖRLER İÇİN VORONOVSKAYA TİPLİ TEOREMLER

Bu bölümde literatürde yer alan yedi farklı doğrusal pozitif operatör için bazı önemli eşitlikler ve Voronovskaya tipli teoremler verilecektir.

2.1 BERNSTEIN POLİNOMLARI

Tanım 2.1.1

$[0,1]$ aralığında tanımlı sürekli keyfi f fonksiyonu için, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Bernstein polinomlar dizisi

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde tanımlanır(Bernstein 1912).

Uyarı 2.1.1

Bu polinomlar binom açılımına dayanmaktadır. $n \in \mathbb{N}$ ve x, y pozitif sayılar olmak üzere binom açılımı

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

biçiminde tanımlıdır.

Burada $x \in [0,1]$ olmak üzere $y = 1 - x$ alınırsa

$$1 = (x + 1 - x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}$$

olacağı açıktır.

Lemma 2.1.1

Bernstein polinomları doğrusaldır.

Bernstein polinomları pozitiftir.

Kanıt

Bernstein polinomları doğrusaldır:

Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; her $f, g \in C[0,1]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$B_n(\alpha f + \beta g; x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} (\alpha f + \beta g) \left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \alpha \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} f \left(\frac{k}{n}\right) + \beta \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right) x^k (1 - x)^{n-k} g \left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \alpha B_n(f; x) + \beta B_n(g; x)$$

olduğundan Bernstein polinomları doğrusaldır.

Pozitiflik:

Her $x \in [0,1]$ her $n \in \mathbb{N}$ ve her $k = 0,1 \ldots n$ için

$$x^k (1 - x)^{n-k} \geq 0$$

olup açıkça

$f \geq 0$ için $B_n(f; x) \geq 0$

sağlanır.

Lemma 2.1.2

Bernstein polinomları için aşağıdaki üç eşitlik sağlanır(Bernstein 1912).

$$B_n(e_0;x) = 1 \ \ ; \ B_n(e_1;x) = x \quad ; B_n(e_2;x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

Kanıt:

$$B_n(e_0;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, (1-x)^{n-k} = (1-x+x)^n = 1$$

olur.

Aynı şekilde

$$B_n(e_1;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, (1-x)^{n-k} \frac{k}{n}$$

$$= x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} \, (1-x)^{n-k} \frac{k}{n}$$

$$= x \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k \, (1-x)^{(n-1)-k}$$

$$= x.(1+x-x)^{n-1} = x$$

bulunur.

Son olarak

$$B_n(e_2;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, (1-x)^{n-k} \frac{k^2}{n^2}$$

$$= x \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} \, (1-x)^{n-k} \frac{k}{n}$$

$$= x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} \, (1-x)^{n-k} \frac{k-1}{n} + \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \frac{k-1}{n}$$

$$= x^2 \frac{(n-1)}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} \, (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} \, (1-x)^{n-k}$$

$$= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{(n-2)-k} + \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{(n-1)-k}$$

$$= x^2 \frac{n-1}{n} (1-x+x)^{n-2} + \frac{x}{n} (1-x+x)^{n-1} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

eşitliği geçerlidir. Bu ise kanıtı tamamlar.

Teorem 2.1.1

Bernstein polinomlar dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n(1;x) - 1\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n(t;x) - x\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n(t;x) - x^2\|_{C[0,1]} = 0$$

eşitlikleri geçerlidir(Bernstein 1912).

Kanıt

$(t-x)^2 = t^2 - 2xt + x^2$ eşitliği ve polinomların doğrusallığı kullanılarak Lemma 2.1.2 den

$$B_n((t-x)^2;x) = B_n(t^2;x) + B_n(-2x\mathrm{t};x) + B_n(x^2;x)$$

$$= B_n(t^2;x) - 2xB_n(\mathrm{t};x) + x^2 B_n(1;x)$$

$$= t^2 + \frac{x-x^2}{n} - 2x^2 + x^2$$

$$= \frac{x-x^2}{n}$$

elde edilir.

$C[0,1]$ de norm tanımından $B_n((t-x)^2;x)$ in maksimumu için türev kullanılarak

$y = \frac{x-x^2}{n}$ alınırsa $y' = \frac{1-2x}{n}$ olacaktır.

($y' = \frac{1-2x}{n} = 0$ için $x = \frac{1}{2}$ olur.)

Böylece

$$\max_{0\le x\le 1} B_n((t-x)^2;x)=\frac{1}{4n}(n\to\infty)$$

olur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\|B_n((t^2-x)^2;x^2)\|_{C[0,1]} = \max_{0\le x\le 1}\left|\frac{x-x^2}{n}=\frac{1}{4n}=0\right|$$

bulunur.

Uyarı 2.1.2

Korovkin Teoremi kullanılarak her $f\in C[0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty}\| B_n(f;x)-f(x)\|_{C[0,1]}=0$$

sağlanır(Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Lemma 2.1.3

Bernstein polinomlarının merkezi momentleri aşağıdaki şekilde verilir(Şimşek 2013).

Her $x\in[0,1]$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$B_n(e_1-x;x)=0\ \ ;\ B_n((e_1-x)^2;x)=\frac{x(1-x)}{n} \tag{2.1}$$

$$B_n(e_3;x)=x^3+\frac{3x^2(1-x)}{n}+\frac{x(1-x)(1-2x)}{x^2}$$

$$B_n(e_4;x)=x^4+\frac{6x^3(1-x)}{n}+\frac{x^2(1-x)(7-11x)}{n^2}+\frac{x(1-x)(6x^2-6x+1)}{n^3}$$

$$B_n((e_1-x)^3;x)=\frac{x(1-x)(1-2x)}{n^2}$$

$$B_n((e_1-x)^4;x)=\frac{x(1-x)[1+3(n-2)x(1-x)]}{n^3} \tag{2.2}$$

Teorem 2.1.2 (Voronovskaya)

$[0,1]$ aralığında sınırlı bir f fonksiyonu için $x \in [0,1]$ noktasında ikinci mertebeden türev sürekli ise bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} n[B_n(f;x) - f(x)] = \frac{1}{2}x(1-x)f''(x)$$

eşitliği sağlanır(Voronovskaya 1932).

Kanıt

Her $t \in (0,1)$ ve sabit x noktası için f fonksiyonunun Taylor formülü

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2}[f''(x)(t-x)^2 + g(t;x)(t-x)^2] \tag{2.3}$$

şeklinde verilir. x de sürekli ve

$\lim_{t\to\infty} g(t;x) = 0$ olan bir $g(.;x)$ fonksiyonu için Bernstein polinomu (2.3) ün her iki tarafına uygulanırsa

$$B_n(f;x) = f(x)B_n(e_0;x) + f'(x)B_n\big((e_0;x);x\big) + \frac{1}{2}f''(x)B_n((e_0-x)^2;x)$$

$$+\frac{1}{2}B_n(g(.,x)(e_0-x)^2;x)$$

elde edilir. Burada(2.1) eşitliği dikkate alınırsa

$$B_n(f;x) - f(x) = \frac{x(1-x)}{2n}f''(x) + B_n(g(.,x)(e_1-x)^2;x)$$

ifadesi geçerli olur.

Bu son eşitlik düzenlenirse

$$n[B_n(f;x) - f(x)] = \frac{x(1-x)}{2}f''(x) + nB_n(g(.,x)(e_1-x)^2;x)$$

eşitliğine ulaşılır. O halde

$$\lim_{n\to\infty} nB_n(g(.,x)(e_1-x)^2;x) = 0$$

olduğu gösterilirse istenen gösterilmiş olur.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$nB_n(g(.,x)(e_1-x)^2;x) \leq (n^2B_n(e_1-x)^4;x)^{\frac{1}{2}}(B_n(g(.,x)^2;x)^{\frac{1}{2}} \tag{2.4}$$

eşitsizliği geçerlidir.

$$g(x,x)=0$$

olduğundan Teorem 2.1.1 gereğince

$$\lim_{n\to\infty} B_n((g(.,x)^2;x)=(g(x,x))^2=0$$

olur.

Diğer yandan (2.2) kullanılırsa, (2.4) ifadesi

$$nB_n(g(.,x)(e_1-x)^2;x) \leq \left[n^2\frac{x(1-x)\big[1+3\big(n-2x(1-x)\big)\big]}{n^3}\right]^{\frac{1}{2}}.((B_ng(.,x)^2;x))^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 2(B_n\big(g(.,x)\big)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} n.B_n(g(.,x)(e_1-x)^2;x)=0$$

bulunur. Bu ise kanıtı tamamlar.

2.2. BERNSTEIN-DURRMEYER OPERATÖRLERİ

Tanım 2.2.1

$r \in \mathbb{N}_0$ sabiti için

$$p_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \qquad ,0 \leq k \leq n$$

olmak üzere Bernstein-Durrmeyer operatörlerinin $M_{n,r}$ operatörlerin sınıfı

$$M_{n,r}(f;x) := (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)\int_{0}^{1} p_{n,k}(t)\sum_{j=0}^{r}\frac{f^{(j)}(t)}{j!}(x-t)^{j}dt \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır(Durrmeyer 1967).

Uyarı 2.2.1

$f(x)=x^{q}$, $x\in[0,1]$ ve $q\in\mathbb{N}_0$ bir sabit $y\in[0,1]$ olmak üzere Taylor formülü

$$f(x)=\sum_{j=0}^{q}\frac{f^{(j)}(y)}{j!}(x-y)^{j}$$

şeklinde tanımlıdır(Walczak 2004).

Lemma 2.2.1

$x\in[0,1]$, $q\in\mathbb{N}_0$ olsun. Bu durumda $q\le r\in\mathbb{N}_0$ sabiti için

$M_{n,r}(t^{q};x)=x^{q}$

olmak üzere

$M_n(1;x)=1$

$$M_n(x-t;x)=-\frac{(1-2x)}{(n+2)} \tag{2.6}$$

$$(n+q+2)M_n((x-t)^{q+1};x)=x(1-x)\{2qM_n((x-t)^{q-1};x)-M_n'((x-t)^{q};x)\}$$
$$-(1-2x)(q+1)M_n((t-x)^{q};x)$$

eşitlikleri geçerlidir(Derriennic 1981).

Lemma 2.2.2

Her $q\in\mathbb{N}$ ve $n\in\mathbb{N}$ için $x\in[0,1]$ olmak üzere

$$M_n((x-t)^{2q};x)=\sum_{j=0}^{q}a_{j,q,n}(x)\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{q-j}.n^{-2j} \qquad x\in[0,1]$$

eşitliği geçerlidir.

Burada $a_{j,q,n}(x)$, x in polinomlarıdır(Ditzian 1989).

Lemma 2.2.3

Her $q \in \mathbb{N}$ için, $K_1(q)$ pozitif sabiti yardımıyla

$$\|M_n((.-t)^{2q};.)\| \leq K_1(q)n^{-q}$$

eşitsizliği geçerlidir(Walczak 2004).

Kanıt

Lemma 2.2.2 den

$$|M_n((x-t)^{2q};x)| \leq \sum_{j=0}^{q} |a_{j,q,n}(x)| \left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{q-j} .n^{-2j}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 2.2.1 kullanılarak

$$|M_n((x-t)^{2q};x)| \sum_{j=0}^{q} K_2\,(q)4^{j-q}n^{-j-q} \leq K_1(q)n^{-q}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Lemma 2.2.4

$r \in \mathbb{N}_0$ bir sabit, $f \in C^{\tau}_{[0,1]}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\|M_{n,r}(f;.)\right\| \leq \sum_{j=0}^{r} \frac{\left\|f^{(j)}\right\|}{j!}$$

eşitsizliği geçerlidir(Walczak 2004).

Kanıt

$r = 0$ için

$$\left|M_{n,0}(f;x)\right| \leq \|f\|(n+1) \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \int_{0}^{1} p_{n,k}\,(t)dt = \|f\|$$

olur.

$r \geq 1$ için

$$\left|M_{n,r}(f;x)\right| \leq \sum_{j=0}^{r} \frac{1}{j!} M_n\left(\left|f^{(j)}(t)(x-t)^j\right|;x\right)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{r} \frac{1}{j!} \left\|f^{(j)}\right\| M_n\left(|x-t|^j;x\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $|x-t| \leq 1$ ve $x,t \in [0,1]$ için

$M_n(|x-t|^j;x) \leq 1$

eşitsizliği geçerlidir.

Buradan $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|M_{n,r}(f;x)\right| \leq \sum_{j=0}^{r} \frac{\left\|f^{(j)}\right\|}{j!}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.2.1

$f \in C_{[0,1]}^{r+2}$, $r \in \mathbb{N}_0$ ve $x \in [0,1]$ için; $n \to \infty$ iken

$$M_{n,r}(f;x) - f(x) = \frac{(-1)^r f^{(r+1)}(x) M_n((t-x)^{r+1};x)}{(r+1)!} + \frac{(-1)^r f^{(r+2)}(x) M_n((t-x)^{r+2};x)}{(r+2)!} + o_x\left(\frac{1}{n^{1+\frac{r}{2}}}\right) \tag{2.7}$$

eşitliği geçerlidir(Walczak 2004).

Kanıt

$r \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0,1]$ için Bernstein-Durrmeyer Operatörü (2.7) eşitliğini sağlasın.

$f \in C_{[0,1]}^{r+2}$ ve $p_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

olmak üzere $0 \leq j \leq r$ için $f^{(j)} \in C_{[0,1]}^{r+2-j}$ olur.

Böylece her $f^{(j)}$ için Taylor formülünden $0 \leq j \leq r$ olmak üzere

$$f^{(j)}(t) = \sum_{i=0}^{r+2-j} \frac{f^{(j+i)}(x)}{i!}(t-x)^i + \varphi_j(t;x)(t-x)^{r+2-j}$$

eşitliği geçerlidir.

Burada $t \in [0,1]$ ve $\varphi_j(t) = \varphi_j(t;x)$ için

$\varphi_j(t)t^{r+2-j}$ fonksiyonu, $C_{[0,1]}^{r+2}$ uzayının bir elemanı olup

$\lim\limits_{t \to x} \varphi_j(t) = 0$

koşulunu sağlar.

Dolayısıyla, $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} M_{n,r}(f;x) &= (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \int_0^1 p_{n,k}(t) \sum_{j=0}^{r} \frac{(x-t)^j}{j!} \sum_{i=0}^{r+2-j} \frac{f^{(j+i)}(x)}{i!}(t-x)^i dt \\ &\quad + (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \int_0^1 p_{n,k}(t) \sum_{j=0}^{r} \frac{(x-t)^j}{j!} \varphi_j(t;x)(t-x)^{r+2-j} dt \\ &:= A_{n,r}(x) + B_{n,r}(x) \qquad (2.8) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Burada

$$\begin{aligned} A_{n,r}(x) &= (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \int_0^1 p_{n,k}(t) \sum_{j=0}^{r} \frac{(x-t)^j}{j!} \sum_{l=j}^{r+2} \frac{f^{(l)}(x)}{(l-j)!}(t-x)^{l-j} dt \\ &= (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \int_0^1 p_{n,k}(t) \sum_{j=0}^{r} \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{l=j}^{r+2} \frac{f^{(l)}(x)}{(l-j)!}(t-x)^{l} dt \end{aligned}$$

$$= (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)\int_{0}^{1} p_{n,k}(t)\sum_{j=0}^{r}\frac{(-1)^j}{j!}\left\{\sum_{l=j}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{(l-j)!}(t-x)^l\right.$$

$$\left.+\frac{f^{(r+1)}(x)}{(r+1-j)!}(t-x)^{r+1}+\frac{f^{(r+2)}(x)}{(r+2-j)!}(t-x)^{r+2}\right\}dt$$

$$= (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)\int_{0}^{1} p_{n,k}(t)\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l\sum_{j=0}^{l}\binom{l}{j}(-1)^j dt+\frac{f^{(r+1)}(x)}{(r+1)!}$$

$$.(n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)\int_{0}^{1} p_{n,k}(t)\,(t-x)^{r+1}\sum_{j=0}^{r}\binom{r+1}{j}(-1)^j dt$$

$$+\frac{f^{(r+2)}(x)}{(r+2)!}(n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)\int_{0}^{1} p_{n,k}(t)\,(t-x)^{r+2}\sum_{j=0}^{r}\binom{r+2}{j}(-1)^j dt$$

$$= f(x) + (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)\int_{0}^{1} p_{n,k}(t)\sum_{l=1}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l\sum_{j=0}^{l}\binom{l}{j}(-1)^j dt$$

$$+\frac{f^{(r+1)}(x)}{(r+1)!}(n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)\int_{0}^{1} p_{n,k}(t)\,(t-x)^{r+1}\sum_{j=0}^{r}\binom{r+1}{j}(-1)^j dt$$

$$+\frac{f^{(r+2)}(x)}{(r+2)!}(n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)\int_{0}^{1} p_{n,k}(t)\,(t-x)^{r+2}\sum_{j=0}^{r}\binom{r+2}{j}(-1)^j dt$$

eşitlikleri geçerlidir.

Burada

$$\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^j = 0,$$

$$\sum_{j=0}^{r}\binom{r+1}{j}(-1)^j = (-1)^r,$$

$$\sum_{j=0}^{r}\binom{r+2}{j}(-1)^j = (r+1)(-1)^r$$

eşitlikleri ile (2.5) ve (2.6) kullanılarak

$$A_{n,r}(x) = f(x) + \frac{(-1)^r f^{(r+1)}(x) M_n((t-x)^{r+1};x)}{(r+1)!}$$

$$+\frac{(-1)^r (r+1) f^{(r+2)}(x) M_n((t-x)^{r+2};x)}{(r+2)!} \tag{2.9}$$

eşitliği yazılabilir.

Φ_r, $C_{[0,1]}$ e ait bir fonksiyon olmak üzere

$\lim\limits_{t\to x}\Phi_\mathrm{r}(\mathrm{t}) = \Phi_\mathrm{r}(x) = 0$

olsun. Hölder eşitsizliği ve Lemma 2.2.3 kullanılarak

$$\Phi_r(t) \coloneqq \Phi_r(t;x) \coloneqq \sum_{j=0}^{r} \frac{(-1)^j}{j!} \varphi_j(t;x) \ , \quad t \in [0,1]$$

ve

$$B_{n,r}(x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \int_0^1 p_{n,k}(t)\,(t-x)^{r+2} \Phi_r(t;x) d$$

$$= M_n((t-x)^{r+2}\Phi_r(t);x)$$

olduğundan

$$|B_{n,r}(x)| \le (M_n(\Phi_r^2(t);x))^{\frac{1}{2}} (M_n((t-x)^{2r+4};x))^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \left(\frac{K_1(q)}{n^{r+2}}\right)^{\frac{1}{2}} (M_n(\Phi_r^2(t);x))^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Böylece

$\Phi_r^2 \in C_{[0,1]}$ olduğundan

$\lim\limits_{n\to\infty} M_n(\Phi_r^2(t);x) = \Phi_r^2(x) = 0$ dır.

Dolayısıyla $n \to \infty$ iken

$$B_{n,r}(x) = o_x\left(\frac{1}{n^{1+\frac{r}{2}}}\right) \tag{2.10}$$

eşitliği geçerlidir.

(2.8), (2.9) ve (2.10) birlikte düşünülürse, aranan (2.7) eşitliği elde edilmiş olur.

Bu ise kanıtı tamamlar.

2.3 BERNSTEIN-KANTOROVICH OPERATÖRÜ

Tanım 2.3.1

$x \in [-1,1]$ ve $f \in C[-1,1]$ olmak üzere

$\varphi_n^k(x) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}$ olsun. Bu durumda

$$K_n(f;x) = \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} f(t)dt \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlı operatör Bernstein-Kantorovich operatörü olarak adlandırılır(Kantorovich 1930, Kahvecibaşı 2014).

Lemma 2.3.1

(2.11) de tanımlı $K_n(f;x)$ operatörü doğrusal ve pozitif bir operatördür.

Kanıt

Doğrusallık:

Her $f,g \in [-1,1]$ ve her $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ için

$$K_n(\alpha f + \beta g; x) = \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big)dt$$

$$= \alpha \frac{n+1}{2} \sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x) \int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} f(t)dt + \beta \frac{n+1}{2} \sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x) \int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} g(t)dt$$

$$= \alpha K_n(f;x) + \beta K_n(g;x)$$

olduğundan $K_n(f;x)$ doğrusal bir operatördür.

Pozitiflik:

$k, n \in \mathbb{N}$ve$x \in [-1,1]$ için $f \geq 0$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k} \geq 0$$

ve

$$\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} f(t)dt \geq 0$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Dolayısıyla $K_n(f;x)$ pozitif bir operatördür.

Lemma 2.3.2

$$\lim_{n\to\infty} \|K_n(1;x) - 1\|_{C[-1,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|K_n(t;x) - x\|_{C[-1,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|K_n(t^2;x) - x^2\|_{C[-1,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|K_n(t^3;x) - x^3\|_{C[-1,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|K_n(t^4;x) - x^4\|_{C[-1,1]} = 0$$

eşitlikleri geçerlidir(Kantorovich 1930, Kahvecibaşı 2014).

Teorem 2.3.1

f fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında sınırlı, $(-1,1)$ aralığında ise bir x noktasında ikinci türevi mevcut olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} n(K_n(f;x) - f(x)) = -xf'(x) + (1 - x^2)\frac{f''(x)}{2}$$

eşitliği sağlanır(Kahvecibaşı 2014).

Kanıt

Bir f fonksiyonunun bir x noktasındaki Taylor açılımı

$$f(t) = f(x) + \frac{1}{1!}f'(x)(t-x) + \frac{1}{2!}f''(x)(t-x)^2 + R_n(t-x)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$R_n(t-x) = \frac{1}{3!}f'''(x)(t-x)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(t-x)^4 + \cdots \tag{2.12}$$

kalan terimdir. Kalan terim için

$$\lim_{h\to 0}\mu(h) = 0$$

olmak üzere

$$R_n(t-x) = (t-x)^2\mu(t-x)$$

eşitliği geçerlidir.

Dolayısıyla $\mu(h)$ sınırlıdır. Yani her h sayısı için bir $H > 0$ vardır öyle ki

$$|\mu(h)| \leq H$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu durumda (2.12) eşitliği

$$f(t) = f(x) + \frac{1}{1!}f'(x)(t-x) + \frac{1}{2!}f''(x)(t-x)^2 + (t-x)^2\mu(t-x)$$

olarak gösterilir. Daha sonra her iki tarafın

$\left[\left(2\frac{k}{n+1} - 1\right), \left(2\frac{k+1}{n+1} - 1\right)\right]$ aralığında integrali alınıp, her iki taraf

$$\frac{n+1}{2}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

ile çarpıldıktan sonra her iki tarafın n üzerinden k ya kadar toplamı alınırsa operatör dizisi için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$K_n(f;x)=\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} f(x)dt+\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} f'(x)(t-x)dt$$

$$+\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} \frac{1}{2!}f''(x)(t-x)^2dt$$

$$+\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} (t-x)^2\mu(t-x)dt$$

eşitliği geçerlidir. Böylece

$$K_n(f;x)=f(x)\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} dt$$

$$+f'(x)\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} (t-x)dt$$

$$+\frac{1}{2!}f''(x)\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} (t-x)^2dt$$

$$+\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} (t-x)^2\mu(t-x)dt$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla

$$K_n(f;x) = f(x)K_n(1;x) + f'(x)K_{n,1}(x) + \frac{f''(x)}{2}K_{n,2}(x)$$

$$+\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^2\mu(t-x)dt$$

eşitliği geçerlidir. Buradan

$$K_n(f;x) = f(x) - f'(x)\frac{x}{n+1} + \frac{f''(x)}{2}\left(\frac{3x^2-3x^2n+3n+1}{3(n+1)^2}\right)$$

$$+\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^2\mu(t-x)dt \tag{2.13}$$

eşitliği doğru olacaktır. (2.13) eşitliğinde 4.terim

$$B_n(x) := \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^2\mu(t-x)dt$$

şeklinde adlandırılırsa eşitlik

$$B_n(x) = \frac{n+1}{2}\sum_{|t-x|<\delta}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^2\mu(t-x)dt$$

$$+\frac{n+1}{2}\sum_{|t-x|\geq\delta}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^2\mu(t-x)dt \tag{2.14}$$

halini alır. Ayrıca

$|t-x| < \delta$ iken $|\mu(t-x)| < \varepsilon$ olacağından bu eşitsizlik ve $|\mu(h)| \leq H$ eşitsizliği (2.14) de yerine yazılırsa

$$|B_n(x)| \leq \varepsilon \frac{n+1}{2} \sum_{|t-x|<\delta} \varphi_n^k(x) \int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} (t-x)^2 dt$$

$$+H \frac{n+1}{2} \sum_{|t-x|\geq\delta} \varphi_n^k(x) \int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} (t-x)^2 dt \tag{2.15}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla eşitsizliğin son hali

$$|B_n(x)| \leq \varepsilon K_{n,2}(x) + H \frac{n+1}{2} \sum_{|t-x|\geq\delta} \varphi_n^k(x) \int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} (t-x)^2 dt$$

şeklinde olacaktır. Burada

$K_{n,2}(x)$ ifadesi yerine yazılırsa

$$|B_n(x)| \leq \varepsilon \left(\frac{3x^2 - 3x^2 n + 3n + 1}{3(n+1)^2} \right) + H \frac{n+1}{2} \sum_{|t-x|\geq\delta} \varphi_n^k(x) \int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} (t-x)^2 dt$$

eşitsizliğine ulaşılır. Toplamın ikinci kısmında

$$M := \frac{n+1}{2} \sum_{|t-x|\geq\delta} \varphi_n^k(x) \int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} (t-x)^2 dt$$

tanımlaması yapılırsa ve $|t-x| \geq \delta$ için $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ eşitsizliği kullanılırsa

$$M \leq \frac{n+1}{2} \sum_{|t-x|\geq\delta} \varphi_n^k(x) \int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} (t-x)^2 \frac{(t-x)^2}{\delta^2} dt$$

bulunur. $|t-x| \geq \delta$ olduğundan

$$M \leq \frac{1}{\delta^2}\frac{n+1}{2}\sum_{|t-x|\geq\delta}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^4dt = \frac{1}{\delta^2}\varphi_{n,4}(x)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Bu ifade (2.15) de kullanılırsa

$$|B_n(x)| \leq \varepsilon\left(\frac{3x^2-3x^2n+3n+1}{3(n+1)^2}\right)+\frac{H}{\delta^2}K_{n,4}(x)$$

bulunur. Yine $K_{n,4}(x)$ in bu eşitsizlik de yerine yazılmasıyla

$$|B_n(x)| \leq \varepsilon\left(\frac{3x^2-3x^2n+3n+1}{3(n+1)^2}\right)$$

$$+\frac{H}{\delta^2}\left(\frac{n^2x^4+8nx^4+x^4+44nx^2+20n^2x^2+24n^2x+24n^2x^3}{(n+1)^4}\right)$$

$$+\frac{H}{\delta^2}\left(\frac{24nx^3+20nx+2x^2+3n^2+4n+\frac{1}{5}}{(n+1)^4}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Her iki tarafın limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} nB_n(x) \leq \lim_{n\to\infty}\varepsilon\left(\frac{n^2(3-3x^2)+3x^2+1}{3(n+1)^2}\right)$$

$$+\lim_{n\to\infty}\frac{H}{\delta^2}\left(\frac{n^3(x^4+20x^2+24x+24x^3+3)}{(n-1)^4}\right)$$

$$+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2(8x^4+44x^2+24x^3+20x+4)+n(+2x^2+\frac{1}{5}}{(n+1)^4}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\varepsilon(1-x^2)$$

ifadesi doğru olacaktır. Böylece $x\in[-1,1]$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} nB_n(x)=0$$

eşitliği gösterilmiş olur.

$K_n(f;x)$ operatörler dizisi için

$$K_n(f;x) = f(x) - f'(x)\frac{x}{n+1} + \frac{f''(x)}{2}\left(\frac{3x^2 - 3x^2n + 3n + 1}{3(n+1)^2}\right) + B_n(x)$$

eşitliği geçerli olduğundan

$$n\big(K_n(f;x) - f(x)\big) = -f'(x)\frac{nx}{n+1} + \frac{f''(x)}{2}\left(\frac{3nx^2 - 3x^2n^2 + 3n^2 + n}{3(n+1)^2}\right) + nB_n(x)$$

eşitliği yazılabilir. Açıkça her iki tarafın limiti alınarak

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\big(K_n(f;x) - f(x)\big) &= f'(x)\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{n+1} \\ &\quad + \frac{f''(x)}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3nx^2 - 3x^2n^2 + 3n^2 + n}{3(n+1)^2}\right) + \lim_{n\to\infty} nB_n(x) \\ &= -xf'(x) + (1 - x^2)\frac{f''(x)}{2}\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu ise kanıtı tamamlar.

2.4 SZASZ-MIRAKYAN-BERNSTEIN OPERATÖRLERİ

Tanım 2.4.1

$f \in C[0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun.

$$q_{n,m}(x) = \frac{e^{-mx}(nx)^m}{m!}$$

ve

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} 1 \leq k \leq n$$

olmak üzere

$$S_n(f;x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m-1}(x) \sum_{k=0}^{m\alpha_n} p_{m\alpha_n,k}(x) f\left(\frac{k}{m\alpha_n}\right), \qquad x \in [0,1] \tag{2.16}$$

ile tanımlı operatöre Szasz-Mirakyan-Bernstein operatörü denir.

Lemma 2.4.1

$x \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere e_i $(i \in \{0,1,\dots,4\})$ fonksiyonları için

$S_n(e_0;x) = 1$

$S_n(e_1;x) = x$

$$S_n(e_2;x) = x^2 + \frac{(1-x)(1-e^{-nx})}{n\alpha_n}$$

$$S_n(e_3;x) = x^3 + \frac{3x(1-x)(1-e^{-nx})}{n\alpha_n} + \frac{(1-x)(1-2x)}{n\alpha_n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^m}{m.m!} \qquad (2.17)$$

$$S_n(e_4;x) = x^4 + \frac{6x^2(1-x)(1-e^{-nx})}{n\alpha_n} + \frac{x(1-x)(7-11x)}{n\alpha_n^2}\sum_{m}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^m}{m.m!}$$
$$+ \frac{(1-x)(6x^2-6x+1)}{n\alpha_n^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^m}{m^2m!} \qquad (2.18)$$

eşitlikleri geçerlidir. Bu durumda Szasz-Mirakyan-Bernstein operatörünün merkezi momentleri

$S_n\big((e_1-x);x\big) = 0$

$$S_n((e_1-x)^2;x) = \frac{(1-x)(1-e^{-nx})}{n\alpha_n} \qquad (2.19)$$

$$S_n((e_1-x)^3;x) = \frac{(1-x)(1-2x)}{n\alpha_n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^m}{m.m!}$$

$$S_n((e_1-x)^4;x) = \frac{3x(1-x)^2}{n\alpha_n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^m}{m.m!} + \frac{(1-x)(6x^2-6x+1)}{n\alpha_n^3}$$

şeklindedir.

Kanıt

$x = 0$ olduğunda istenen eşitliklerin doğrulukları açıktır.

$x > 0$olsun. (2.16) da tanımlı operatör için (2.17), (2.18) ve (2.19) ifadeleri aşağıdaki biçimde hesaplanır.

$$S_n(e_0;x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m-1}(x) \sum_{k=0}^{m\alpha_n} p_{m\alpha_n;k}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m-1}(x) = 1$$

olur. e_1 fonksiyonu için

$$S_n(e_1;x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m-1}(x) \sum_{k=0}^{m\alpha_n} p_{m\alpha_n;k}(x) \frac{k}{m\alpha_n} = x \sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m-1}(x) = x$$

eşitsizliği geçerlidir. Benzer şekilde e_2 fonksiyonu için

$$S_n(e_2;x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m-1}(x) \sum_{k=0}^{m\alpha_n} p_{m\alpha_n,k}(x) \left(\frac{k}{m\alpha_n}\right)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m-1}(x) \left(x^2 + \frac{x(1-x)}{m\alpha_n}\right)$$

$$= x^2 + \sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m-1}(x) + \frac{x(1-x)}{\alpha_n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}(nx)^{m-1}}{m(m-1)!}$$

$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{n\alpha_n x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}(nx)^m}{m!} = x^2 + \frac{(1-x)(1-e^{-nx})}{n\alpha_n}$$

eşitliği doğrudur. e_3 fonksiyonu operatörde yerine yazılırsa

$$S_n(e_3;x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m-1}(x) \sum_{k=0}^{m\alpha_n} p_{m\alpha_n,k}(x) \left(\frac{k}{m\alpha_n}\right)^3$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m-1}(x) \left(x^3 + \frac{3x^2(1-x)}{m\alpha_n} - \frac{x(1-x)(1-2x)}{m^2\alpha_n^2}\right)$$

$$= x^3 + \frac{3x(1-x)(1-e^{-nx})}{m\alpha_n} + \frac{e^{-nx}(1-x)(1-2x)}{m\alpha_n^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(nx)^m}{m.m!}$$

olacaktır. Son olarak e_4 fonksiyonu için

$$S_n(e_4;x)=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}(x)\sum_{k=0}^{m\alpha_n}p_{m\alpha_n,k}\,(x)\left(\frac{k}{m\alpha_n}\right)^4$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\,(x)\left(x^4+\frac{6x^3(1-x)}{m\alpha_n}+\frac{x^2(1-x)(7-11x)}{m^2\alpha_n^2}\right.$$

$$\left.+\frac{x(1-x)(6x^2-6x+1)}{m^3\alpha_n^3}\right)$$

$$=x^4+\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\,(x)+\frac{6x^3(1-x)}{\alpha_n}\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}(x)\frac{1}{m}$$

$$+\frac{x^2(1-x)(7-11x)}{\alpha_n^2}\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}(x)\frac{1}{m^2}$$

$$+\frac{x(1-x)(6x^2-6x+1)}{\alpha_n^3}\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}(x)\frac{1}{m^3}$$

eşitliği geçerlidir. Gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$S_n(e_4;x)=x^4+\frac{6x^2(1-x)(1-e^{-nx})}{m\alpha_n}$$

$$+\frac{x(1-x)(7-11x)}{m\alpha_n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^m}{m.m!}$$

$$+\frac{(1-x)(6x^2-6x+1)}{m\alpha_n^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^m}{m^2m!}$$

eşitliğine ulaşılır.

Şimdi de operatörün merkezi momentleri hesaplanacaktır. Operatörün doğrusallığından

$$S_n\big((e_1-x);x\big)=S_n(e_1;x)-xS_n(e_0;x)$$

ve

$$S_n((e_1-x)^2;x)=S_n(e_2;x)-2xS_n(e_1;x)+x^2S_n(e_0;x)$$

eşitlikleri yazılabilir. $S_n(e_0;x)$, $S_n(e_n;x)$ in sağladığı eşitliklerden (2.19) geçerlidir.

Benzer şekilde

$$S_n((e_1-x)^3;x)=S_n(e_3;x)-3xS_n(e_2;x)+3x^2S_n(e_1;x)-x^3S_n(e_0;x)$$

$$S_n((e_1-x)^4;x)=S_n(e_4;x)-4xS_n(e_3;x)+6x^2S_n(e_2;x)-4x^3S_n(e_1;x)\ +x^4S_n(e_0;x)$$

eşitliklerinde (2.17) ve (2.18) eşitlikleri kullanılarak kolayca elde edilir.

Aşağıdaki lemma kanıtsız olarak verilecektir.

Lemma 2.4.2

Her $x\in(0,1]$ ve $n\in\mathbb{N}$ için c_n ; $[0,1]$ de tanımlı $\lim_{n\to\infty}c_n(x)=6$ olan bir fonksiyon olmak üzere

$$S_n((e_1-x)^4;x)\le c_n(x)\left(\frac{1}{n\alpha_n}\right)^2 \tag{2.20}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Aşağıda (2.16) ile tanımlı operatörler dizisi için Voronovskaya tipi teorem verilmiştir.

Teorem 2.4.1

$f\in C^2[0,1]$ olsun. Bu durumda (2.16) ile verilen operatör için

$$\lim_{n\to\infty}n\alpha_n\,[S_n(f;x)-f(x)]=\frac{1}{2}(1-x)f''(x)\quad,\qquad x\in[0,1]$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt

Sabit bir x noktası ve her $t\in[0,1]$ için f fonksiyonunun Taylor formülü

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2}[f''(x)(t-x)^2+g(t;x)(t-x)^2] \tag{2.21}$$

şeklindedir.

Burada $g(.,x)$ x noktasında sürekli ve

$$\lim_{t\to x}g(t,x)=0$$

olan bir fonksiyondur.

(2.21) eşitliğinin her iki tarafına (2.16) operatörü uygulanırsa

$$S_n(f;x) = f(x)S_n(e_0;x) + f'(x)S_n\big((e_1 - x);x\big) + \frac{1}{2}f''(x)S_n((e_1 - x)^2;x)$$

$$+\frac{1}{2}S_n(g(.,x)(e_1 - x)^2;x)$$

eşitliği elde edilir. (2.19) eşitliği dikkate alınarak

$$S_n(f;x) - f(x) = \frac{(1-x)(1-e^{-nx})}{2n\alpha_n}f''(x) + S_n(g(.,x)(e_1 - x)^2;x)$$

ifadesine ulaşılır. Son eşitlik düzenlenerek

$$n\alpha_n[S_n(f;x) - f(x)] = \frac{(1-x)(1-e^{-nx})}{2}f''(x) + n\alpha_n S_n(g(.,x)(e_1 - x)^2;x)$$

ifadesi bulunur. Bu son eşitlikte de

$$\lim_{n\to\infty} n\alpha_n S_n(g(.,x)(e_1 - x)^2;x) = 0$$

olduğu gösterilirse kanıt tamamlanmış olur.

Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$n\alpha_n S_n(g(.,x)(e_1 - x)^2;x) \leq [n^2\alpha_n^2 S_n((e_1 - x)^4;x)]^{\frac{1}{2}}[S_n(g(.,x))^2;x)]^{\frac{1}{2}} \tag{2.22}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Kabulden

$g(x;x) = 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(\left(g(.,x)\right)^2;x\right) = (g(x,x))^2 = 0$$

bulunur.

Diğer taraftan (2.20) eşitsizliği kullanılarak (2.22) ifadesinden,

$$n\alpha_n S_n(g(.,x)(e_1 - x)^2;x) \leq \left(n^2\alpha_n^2(g_n(x)\left(\frac{1}{n\alpha_n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(S_n\left(\left(g(,,x)\right)^2;x\right)\right)^2$$

$$= \sqrt{\alpha_n(x)}\left(S_n\left(\left(g(,,x)\right)^2;x\right)\right)^2$$

eşitsizliği bulunur.

Böylece istenen

$$\lim_{n\to\infty} n\alpha_n S_n(g(.,x)(e_1 - x)^2; x = 0$$

ifadesine ulaşılmış olur.

2.5 SZASZ-MIRAKYAN OPERATÖRÜ

Tanım 2.5.1

$q \in \mathbb{N}_0$ ve $f \in C_q$ olmak üzere $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_0$ olsun.

$$I_{n,k} = \left[\frac{2k}{n}, \frac{2k+2}{n}\right]$$

ve

$$p_{n,k}(x) \coloneqq \frac{1}{\cosh nx} \cdot \frac{(nx)^{2k}}{(2k)!}$$

olarak tanımlansın.

Bu durumda $L_n(f;x)$ ve $U_n(f;x)$ ile gösterilecek olan Szasz-Mirakyan operatörleri,

$$L_n(f;x) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) f(\frac{2k}{n}) \tag{2.23}$$

$$U_n(f;x) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{n}{2} \int\limits_{I_{n,k}} f(t)dt$$

şeklinde tanımlıdır(Firlejand and Rempulska 1997).

Uyarı 2.5.1

$\mathbb{R}_0 \coloneqq [0, +\infty)$, $\mathbb{N}_0 \coloneqq \mathbb{N} \cup \{0\}$, $q \in \mathbb{N}_0$ ve $w_q(.)$, $\mathbb{R}_0$ üzerinde ağırlık fonksiyonu

$w_0(x) \coloneqq 1$ ve $q \geq 1$ için

$$w_q(x) \coloneqq (1 + x^q)^{-1}$$

formülü ile verilsin.

$q \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere sürekli ve sınırlı gerçel değerli fonksiyonlar uzayı, C_q ile gösterilecektir. Burada C_q üzerinde norm

$$\|f\|_q := sup_{x\in\mathbb{R}_0} w_q(x)|f(x)|$$

ile tanımlanır.

$q \in \mathbb{N}_0$ sabiti için

$C_q^2 := \{f \in C_q : f', f'' \in C_q\}$ olur(Rempulska and Skorupka 1995).

Tanım 2.5.2

C_q uzayında A_n ve B_n operatörleri aşağıdaki şekilde tanımlanacaktır.

$n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ ve $x \in \mathbb{R}_0$ olmak üzere

$$q_{n,k}(x) := \frac{1}{1+\sinh nx}.\frac{(nx)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ve

$$I_{n,k}^* := \left[\frac{2k+1}{n}, \frac{2k+3}{n}\right]$$

olsun. Bu durumda

$$A_n(f;x) := \frac{f(0)}{1+\sinh nx} + \sum_{k=0}^{\infty} q_{n,k}(x) f\left(\frac{2k+1}{n}\right)$$

$$B_n(f;x) := \frac{f(0)}{1+\sinh nx} + \sum_{k=0}^{\infty} q_{n,k}(x) \frac{n}{2} \int_{I_{n,k}^*} f(t)dt$$

eşitlikleri geçerlidir.

Açıkça L_n , U_n , A_n , B_n operatörleri C_q uzayında doğrusal pozitif operatörlerdir(Firlej and Rempulska 1997).

Uyarı 2.5.2

i) Her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{R}$ için

$$L_n(1;x) = U_n(1;x) = A_n(1;x) = B_n(1;x) = 1. \tag{2.24}$$

ii) Her $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_0$ için

$$S(nx) \coloneqq \frac{\sinh nx}{1+\sinh nx}$$

$$T(nx) \coloneqq \frac{\cosh nx}{1+\sinh nx}$$

$$U(nx) \coloneqq 1-\tanh nx \tag{2.25}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Aşağıdaki lemma kanıtsız olarak verilecektir.

Lemma 2.5.1

Her $x \in \mathbb{R}_0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir(Rempulska and Skorupka 1995).

$$L_n(t-x;x) = -xV(nx)$$

$$L_n((t-x)^2;x) = \left(2x^2 - \frac{x}{n}\right)V(nx) + \frac{x}{n}$$

$$L_n((t-x)^2;x) = \left(8x^4 - \frac{12x^3}{n} + \frac{4x^2}{x^2} - \frac{x}{n^3}\right)V(nx) + \frac{3x^2}{n^2} + \frac{x}{n^3}$$

$$U_n(t-x;x) = -xV(nx) + \frac{1}{n}$$

$$U_n((t-x)^2;x) = \left(2x^2 - \frac{3x}{n}\right)V(nx) + \frac{x}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

$$U_n((t-x)^4;x) = \left(8x^4 - \frac{28x^3}{n} + \frac{32x^2}{n^2} - \frac{21x}{n^3}\right)V(nx) + \frac{12x}{n^3} + \frac{16}{5n^4}$$

$$A_n(t-x;x) = x(T(nx)-1)$$

$$A_n((t-x)^2;x) = x^2(S(nx) - 2T(nx) + 1) + \frac{x}{n}T(nx)$$

$$A_n((t-x)^4;x) = x^4(7S(nx) - 8T(nx) + 1) + \frac{12x^3}{n}\big(T(nx) - S(nx)\big)$$

$$+\frac{x^2}{n^2}\big(7S(nx) - 4T(nx)\big) + \frac{x}{n^2}T(nx)$$

$$B_n(t-x;x) = x(T(nx) - 1) + \frac{1}{n}S(nx)$$

$$B_n((t-x)^2;x) = x^2(S(nx) - 2T(nx) + 1) + \frac{2x}{n}\big(T(nx) - S(nx)\big) + \frac{4}{3n^2}S(nx)$$

$$B_n((t-x)^4;x) = x^4(7S(nx) - 8T(nx) + 1) + \frac{28x^3}{n}\big(T(nx) - S(nx)\big)$$

$$+\frac{x^2}{n^2}\big(35S(nx) - 32T(nx)\big) + \frac{17x}{n^3}T(nx)$$

Lemma 2.5.2

Belirli bir $x_0 \in \mathbb{R}_0$ noktası için

$$\lim_{n\to\infty} nL_n(t-x_0;x_0) = \lim_{n\to\infty} nA_n(t-x_0;x_0) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} nU_n(t-x_0;x_0) = \lim_{n\to\infty} nB_n(t-x_0;x_0) = 1$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} n \begin{cases} L_n((t-x_0)^2;x_0) \\ U_n((t-x_0)^2;x_0) \\ A_n((t-x_0)^2;x_0) \\ B_n((t-x_0)^2;x_0) \end{cases} = x_0$$

eşitlikleri geçerlidir(Rempulska and Skorupka 1995).

Lemma 2.5.3

Sabit bir $x_0 \in \mathbb{R}_0$ için pozitif bir $M_1(x_0)$ sabiti vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{cases} L_n((t-x_0)^4;x_0) \\ U_n((t-x_0)^4;x_0) \\ A_n((t-x_0)^4;x_0) \\ B_n((t-x_0)^4;x_0) \end{cases} \leq M_1(x_0)n^{-2} \tag{2.26}$$

eşitsizlikleri geçerlidir(Rempulska and Skorupka 1995).

Kanıt

Yöntem benzer olduğundan sadece A_n için kanıt verilecektir.

(2.25) eşitsizliklerinden her $x \geq 0$ ve $n, r \in \mathbb{N}$ için

$$x^r|S(nx) - T(nx)| = \frac{2x^r e^{-nx}}{2 + e^{nx} - e^{-nx}} \leq \frac{2x^r}{e^{nx} + 1} \leq 2r!\, n^{-r}$$

$$x^r|1 - S(nx)| = \frac{2x^r}{2 + e^{nx} - e^{-nx}} \leq \frac{2x^r}{e^{nx} + 1} \leq 2r!\, n^{-r}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Dolayısıyla

$$x^r|1 - T(nx)| \leq 2r!\, n^{-r}$$

$$0 \leq S(nx) \leq 1\,, \;\; 0 < T(nx) \leq 1$$

eşitsizliği doğrudur.

Bu eşitsizliği kullanarak, (2.25) denkleminden $x_0 \geq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} A_n((t - x_0)^4; x_0) \leq\; & x_0^4\{7|S(nx_0) - T(nx_0)| + |1 - T(nx_0)|\} + \frac{12x_0^3}{n}|S(nx_0) - T(nx_0)| \\ & + \frac{x_0^2}{n^2}\{7|S(nx_0) - T(nx_0)| + 3T(nx_0)\} + \frac{x_0}{n^3}T(nx_0) \\ & \leq 16(4!\, n^{-4}) + 24(3!\, n^{-4}) + n^{-2}(28n^{-2} + 3x_0^2) + x_0 n^{-3} \\ & \leq (3x_0^2 + x_0 + 556)n^{-2} = M_1(x_0)n^{-2} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Dolayısıyla kanıt tamamlanmış olur.

Lemma 2.5.4

$q \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere sabit bir x_0 noktası için $\varphi(.\,, x_0)$, C_q uzayına ait bir fonksiyon olsun.

Bu durumda

$\lim_{t \to x_0} \varphi(t; x_0) = 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\varphi(t;x_0);x_0) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n(\varphi(t;x_0);x_0) = 0 = \lim_{n\to\infty} A_n(\varphi(t;x_0);x_0) = \lim_{n\to\infty} B_n(\varphi(t;x_0);x_0)$$

eşitlikleri sağlanır(Rempulska and Skorupka 1995).

(2.23) ile tanımlanan L_n operatörü için Teorem 2.5.1 de Voronovskaya tipli bir teorem verilecektir.

Teorem 2.5.1

$f \in C_q^2$ ve $q \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, belirli her $x \in \mathbb{R}_0$ için

$$\lim_{n\to\infty} n\{L_n(f;x) - f(x)\} = \frac{x}{2} f''(x)$$

eşitliği geçerlidir(Rempulska and Skorupka 1995).

Kanıt

$x_0 \in \mathbb{R}_0$ belirli bir nokta olsun.

Her $t \in \mathbb{R}_0$ için

$\psi(.,x_0)$ C_q uzayına ait ve $\lim_{t\to x_0} \psi(t;x_0) = 0$ eşitliğini sağlayan bir fonksiyon olmak üzere Taylor formülünden

$$f(t) = f(x_0) + f'(x_0)(t-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(t-x_0)^2 + \psi(t,x_0)(t-x_0)^2 \tag{2.27}$$

eşitliği geçerlidir.

(2.27) , (2.23) ve (2.24) ifadelerinden, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$L_n(f(t);x_0) - f(x_0) = f'(x_0)L_n(t-x_0;x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)L_n((t-x_0)^2;x_0)$$
$$+L_n(\psi(t,x_0)(t-x_0)^2;x_0)$$

eşitliği geçerlidir.

Lemma 2.5.2 den

$$\lim_{n\to\infty} nL_n\,(t-x_0;x_0)=0 \tag{2.28}$$

$$\lim_{n\to\infty} nL_n\,((t-x_0)^2;x_0)=x_0 \tag{2.29}$$

eşitlikleri elde edilir.

(2.23) ifadesi ve Hölder eşitsizliği kullanılarak, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|L_n(\psi(t,x_0)(t-x_0)^2;x_0)| \leq \{L_n(\psi^2(t;x_0);x_0)\}^{\frac{1}{2}}\{L_n((t-x_0)^4;x_0)\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.30}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Her $t \geq 0$ için

$\varphi(t;t_0) := \psi^2(t;t_0)$ fonksiyonu

$\varphi(.,x_0) \in C_{2q}$ ve $\lim\limits_{t\to x_0} \varphi(t;x_0)=0$ koşullarını sağlar.

Bu özellikler ve Lemma 2.5.4 kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\psi^2(t;x_0);x_0) = \lim_{n\to\infty} L_n(\varphi(t;x_0);x_0)=0 \tag{2.31}$$

eşitliğine ulaşılır.

(2.26) ve (2.31) eşitliklerini kullanarak (2.30) eşitsizliğinden

$$\lim_{n\to\infty} nL_n(\psi(t;x_0)(t-x_0)^2;x_0)=0 \tag{2.32}$$

eşitliği geçerlidir.

(2.28) , (2.29) ve (2.32) ifadeleri kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} n\{L_n(f(t);x_0)-f(x_0)\} = \frac{x_0}{2}f''(x_0)$$

eşitliğine ulaşılır.

Bu ise kanıtı tamamlar.

2.6 GENELLEŞTİRİLMİŞ SZASZ-MIRAKYAN OPERATÖRLERİ

Tanım 2.6.1

ρ, $\rho(0) = 0$, $inf_{x\in\mathbb{R}^+}\rho'(x) \geq 1$ ifadelerini sağlayan $\mathbb{R}^+$ üzerinde sürekli türevlenebilen bir fonksiyon olsun.

$$\varrho_{\rho,n,k}(x) = \exp\big(-np(x)\big)\frac{\big(n\rho(x)\big)^k}{k!}$$

şekilde tanımlanmak üzere Genelleştirilmiş Szasz-Mirakyan operatörleri

$$S_n^\rho(f;x) = \exp\,(-np(x))\sum_{k=0}^{\infty}(f\circ\rho^{-1})\left(\frac{k}{n}\right)\frac{\big(n\rho(x)\big)^k}{k!} = (S_n(f\circ\rho^{-1})\circ\rho)(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\rho^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)\right)\varrho_{\rho,n,k}(x) \qquad (2.33)$$

şeklinde tanımlanır(Szasz 1950).

$\rho(x) = x + x^2$ şeklinde tanımlı fonksiyon için

$\rho = e_1$ ise, $S_n^\rho = S_n$ dır.

$$S_n^\rho(1;x) = 1 \qquad (2.34)$$

$$S_n^\rho(\rho;x) = \rho(x) \qquad (2.35)$$

ve

$$S_n^\rho(\rho^2;x) = \rho^2(x) + \frac{\rho(x)}{n} \qquad (2.36)$$

olduğu açıktır.

Tanım 2.6.2

$\varphi(x) \coloneqq 1 + \rho^2(x)$ olarak tanımlansın. Bu durumda açıkça

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x) = \infty$$

olur.

M_f, f fonksiyonuna bağlı bir sabit olmak üzere

$B_\varphi(\mathbb{R}^+) = \{f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \big| |f(x)| \leq Mf\varphi(x), x \geq 0\}$ bir ağırlıklı uzaydır.

$B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ uzayında norm ise

$$\|f\|_\varphi = sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{|f(x)|}{\varphi(x)}$$

şeklinde tanımlıdır.

$B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ uzayına ait tüm sürekli fonksiyonların alt uzayı, $C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ ile gösterilecektir.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k_f$$

olmak üzere $f \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonlarının alt uzayı $C_\varphi^k(\mathbb{R}^+)$ ile gösterilecektir ve burada

k_f, f e bağlı bir sabittir. Ayrıca $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ şeklinde verilen $f \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonlarının uzayı $U_\varphi(\mathbb{R}^+)$ olarak gösterilecektir.

Bu uzaylar için

$C_\varphi^k(\mathbb{R}^+) \subset U_\varphi(\mathbb{R}^+) \subset C_\varphi(\mathbb{R}^+) \subset B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ kapsaması geçerlidir.

Lemma 2.6.1

$L_n C_\varphi(\mathbb{R}^+) \to B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ doğrusal pozitif bir operatör olması için gerekli ve yeterli koşul $x \geq 0$ ve K_n pozitif bir sabit olmak üzere

$$|L_n(\varphi; x) \leq K_n \varphi(x)|$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır(Hacıyev 1974-1977).

Teorem 2.6.1

$(L_n)_{n\geq 1}$, $C_\varphi(\mathbb{R}^+) \to B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ doğrusal pozitif operatörlerin bir dizisi olsun.

Bu durumda eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n\rho^v - \rho^v\|_\varphi = 0 \qquad v = 0,1,2$$

eşitliği sağlanırsa her $f \in C_\varphi^k(\mathbb{R}^+)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n f - f\|_\varphi = 0$$

eşitliği geçerlidir (Hacıyev, 1974-1977).

(2.34), (2.36) ve Lemma 2.6.1 den S_n^ρ ; $C_\varphi(\mathbb{R}^+) \to B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ doğrusal pozitif bir operatördür.

Teorem 2.6.2

Her $f \in C_\varphi^k(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonları ve (2.33) ile tanımlı operatör için

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(f) - f\|_\varphi = 0$$

eşitliği geçerlidir(Aral et al. 2014).

Kanıt

Teorem 2.6.1 den

$$\lim_{n\to\infty} \left\|S_n^\rho(\rho^v) - \rho^v\right\|_\varphi = 0 \quad , \quad v = 0,1,2 \tag{2.37}$$

olduğunu kanıtlamak yeterlidir.

(2.34) ve (2.35) den

$$\left\|S_n^\rho(1) - 1\right\|_\varphi = 0$$

ve

$$\left\|S_n^\rho(\rho) - \rho\right\|_\varphi = 0$$

eşitlikleri geçerlidir. Dolayısıyla (2.37) ifadesi $v = 0,1$ için gösterilmiş olur. Diğer taraftan

$$\left\|S_n^\rho(\rho^2) - \rho^2\right\|_\varphi = sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{\rho(x)}{\left(1+\rho^2(x)\right)n} \leq \frac{1}{n}$$

olacaktır.

Bu ifade ise $v = 2$ için (2.37) ifadesinin sağlanması demektir. Teorem 2.6.1 den kanıt tamamlanmış olur.

Tanım 2.6.3

Szasz-Mirakyan operatörü, $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$ sınırsız aralığı üzerinde tanımlı uygun bir f fonksiyonu için Bernstein operatörünün bir genellemesi

$$S_n(f;x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Teorem 2.6.3

$f \in C(\mathbb{R}^+)$ olsun.

$x \in \mathbb{R}^+$ ve $\rho(x)$ noktasında $f \circ g^{-1}$ nin birinci ve ikinci türevleri olsun.

Eğer $f \circ g^{-1}$ nin ikinci türevi $\mathbb{R}^+$ da sınırlı ise

$$\lim_{n\to\infty} n(S_n^{\rho}(f;x) - f(x)) = \frac{\rho(x)}{2}(f \circ g^{-1})''(\rho(x))$$

eşitliği geçerlidir(Aral et al. 2014).

Kanıt

$\rho(x) \in \mathbb{R}^+$ noktasında $f \circ g^{-1}$ nin Taylor genişlemesi kullanılarak

$$f(t) = (f \circ g^{-1})\big(\rho(t)\big) = (f \circ g^{-1})\big(\rho(x)\big) + (f \circ g^{-1})'\big(\rho(x)\big)\big(\rho(t) - \rho(x)\big)$$

$$+\frac{1}{2}(f \circ g^{-1})''\big(\rho(x)\big)\big(\rho(t) - \rho(x)\big)^2 + \lambda x(t)\big(\rho(t) - \rho(x)\big)^2 \tag{2.38}$$

eşitliği geçerlidir. Bu durumda x ve t arasında bir ξ keyfi sayısı vardır öyle ki

$$\lambda x(t) := \frac{(f \circ g^{-1})''(\rho(\xi) - (f \circ g^{-1})'')(\rho(x))}{2} \tag{2.39}$$

eşitliği sağlanır.

(2.39) den her t için

$t \to x$ iken 0 a yaklaşan ve $|\lambda x(t)| \leq M$ eşitsizliğini sağlayan her f için

(2.38) eşitliğine (2.33) operatörü uygulanırsa

$$S_n^{\rho}(t;x) - f(x) = (f \circ g^{-1})'(\rho(x)) S_n^{\rho}\left((\rho(t) - \rho(x)); x\right)$$

$$+\frac{1}{2}(f \circ g^{-1})''(\rho(x)) S_n^{\rho}\left((\rho(t) - \rho(x))^2; x\right)$$

$$+S_n^{\rho}\left(\lambda x(t)(\rho(t) - \rho(x))^2; x\right)$$

eşitliği geçerlidir.

(2.34), (2.35) ve (2.36) ifadelerinden

$$\lim_{n\to\infty} n S_n^{\rho}\left((\rho(t) - \rho(x)); x\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} n S_n^{\rho}\left((\rho(t) - \rho(x))^2; x\right) = \rho(x)$$

eşitliği geçerli olur ve böylece

$$\lim_{n\to\infty} n(S_n^{\rho}(f;x) - f(x) = \frac{\rho(x)}{2}(f \circ g^{-1})''(\rho(x)) + \lim_{n\to\infty} n S_n^{\rho}(\lambda x(t)(\rho(t) - \rho(x))^2; x)$$

eşitliğine ulaşılır.

Bu eşitliğin sağ tarafındaki son terimler dikkate alınarak

$|t - x| < \delta$ için $|\lambda x(t)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ seçilsin. $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$|\rho(t) - \rho(x)| = \rho'(\eta)|t - x| \geq |t - x|$

ifadesi ρ nun tanımından geçerlidir.

Dolayısıyla

$|\rho(t) - \rho(x)| \leq \delta$ için

$$\left|\lambda x(t)(\rho(t) - \rho(x))^2\right| < \varepsilon\left|(\rho(t) - \rho(x))^2\right|$$

eşitsizliği sağlanır.

Eğer $|\rho(t) - \rho(x)| > \delta$ ise

$|\lambda x(t)| \leq M$ olduğunda

$$\left|\lambda x(t)\big(\rho(t)-\rho(x)\big)^2\right| \leq \frac{M}{\delta^2}\big(\rho(t)-\rho(x)\big)^4$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece

$$S_n^\rho\left(\lambda x(t)\big(\rho(t)-\rho(x)\big)^2;x\right) < \varepsilon S_n^\rho\left(\big(\rho(t)-\rho(x)\big)^2;x\right) + \frac{M}{\delta^2} S_n^\rho\left(\big(\rho(t)-\rho(x)\big)^4;x\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Yapılan hesaplamalar sonucunda

$$S_n^\rho\left(\big(\rho(t)-\rho(x)\big)^4;x\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} n S_n^\rho\left(\lambda x(t)\big(\rho(t)-\rho(x)\big)^2;x\right) = 0$$

eşitliği gösterilmiş olur.

2.7 GENELLEŞTİRİLMİŞ FAVARD-SZASZ OPERATÖRLERİ

a_{2k} polinomları,

$$a_{2k}(x) = \frac{(1+x)^{2k} + (1-x)^{2k}}{2(2k)!}$$

şeklinde tanımlansın.

$$\cosh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

olarak verilmek üzere

$$\cosh u \cosh ux = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}(x) u^{2k}$$

eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki tanım verilecektir.

Tanım 2.7.1

$[0,\infty)$ aralığında gerçel değerli sürekli fonksiyonların uzayı $C[0,\infty)$ olsun.

$x \geq 0$, $p > 0$ için

$w_p(x) = e^{-px}$ ağırlıklı fonksiyonu

$\|f\|_p = \sup_{x \in [0,\infty)} w_p(x)|f(x)|$ normu ile birlikte

$C_p = \{f \in C[0,\infty): w_p f\ ; [0,\infty)\ aralığında\ sınırlı\ sürekli\ \}$

olarak tanımlanır(Ciupa 2005).

Tanım 2.7.2

$r > p$, $A_n: C_p \to C_r$ olmak üzere doğrusal pozitif $A_n(f;x)$ operatörü

$$A_n(f;x) = \frac{1}{\cosh u \cosh ux} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}\,(nx) f\left(\frac{2k}{n}\right),\ x \geq 0$$

olarak tanımlanır.

Burada, $x \in [0,\infty)$ için $A_n(1;x) = 1$ dır(Ciupa 2005).

Lemma 2.7.1

Her $x \in [0,\infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$A_n(t-x;x) = -x(1-\tanh nx) + \frac{1}{n}\tanh 1$$

$$A_n((t-x)^2;x) = (1-\tanh nx)\left[2x^2 - \frac{x}{n}(1+2\tanh 1\right] + \frac{x}{n} + \frac{1}{n^2}(1+\tanh 1)$$

$$A_n((t-x)^4;x) = (1-\tanh nx)\left(b_1 x^4 - b_2\frac{x^3}{n} + b_3\frac{x^2}{n^2} - b_4\frac{x}{n^3}\right)$$

$$+b_5\frac{x^2}{n^2} + b_6\frac{x}{n^3} + b_7\frac{1}{n^4}$$

eşitlikleri geçerlidir.

$u = 1$ alınırsa ve u parametresine ilgili genelleştirilmiş fonksiyonun ardışık kısmi diferensiyeli uygulanırsa

$i = 1,2,\ldots,7$ pozitif sabitler olmak üzere

$b_1 = 8$

$b_2 = 12 + 16 \tanh 1$

$b_3 = 24 \tanh 1 + 16$

$b_4 = 18 \tanh 1 + 19$

$b_5 = 3$

$b_6 = 7 + 10 \tanh 1$

$b_7 = 8 + 7 \tanh 1$

formülleri elde edilir(Ciupa 2005).

Aşağıdaki üç lemma kanıtsız olarak verilecektir.

Lemma 2.7.2

Her $x_0 \in [0, \infty)$ sabit noktası için

$$\lim_{n\to\infty} n.A_n(t - x_0\,; x_0) = \tanh 1$$

$$\lim_{n\to\infty} n.A_n((t - x_0)^2; x_0) = x_0$$

eşitlikleri geçerlidir(Ciupa 2005).

Lemma 2.7.3

Her $x_0 \in [0, \infty)$ sabit noktası için x_0 a bağlı $M_0(x_0)$ pozitif sabiti vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$A_n((t - x_0)^4; x_0) \leq M_0(x_0).\frac{1}{n^2}$$

eşitsizliği sağlanır(Ciupa 2005).

Lemma 2.7.4

$p > 0$, $r > p$ ve n_0 ; $n_0 \geq \frac{p}{\ln r - \ln p}$ eşitsizliğini sağlayan

bir doğal sayı olmak üzere

her $x \in [0, \infty)$ ve $n > n_0$ için

$$w_r(x) A_n(e^{pt}; x) \leq 2 \frac{\cosh(e^p)}{\cosh 1}$$

$$w_r(x) A_n((t-x)^2 e^{pt}; x) \leq M_1(p, r) \frac{\cosh(e^p)}{\cosh 1} . \frac{x+1}{n}$$

eşitsizlikleri geçerlidir(Ciupa 2003).

Burada $M_1(p, r)$, yalnızca p ve r 'e bağlı pozitif sabittir.

Lemma 2.7.5

$x_0 \in [0, \infty)$ sabit bir nokta ve $\varphi(.; x_0) \in C_p$ bir fonksiyon olmak üzere

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(t; x_0) = 0$$

ve

$$\lim_{n \to \infty} A_n(\varphi(t; x_0); x_0) = 0$$

eşitlikleri geçerlidir(Ciupa 2005).

Kanıt

$r > p > 0$ olsun. Her $x_0 \geq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$e^{-rx_0} A_n(\varphi(t; x_0); x_0) = e^{-rx_0} \frac{1}{\cosh 1 \cosh n x_0} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}(n x_0) \varphi\left(\frac{2k}{n}; x_0\right)$$

$\varphi(.; x_0)$ fonksiyonunun özellikleri yardımıyla her $\varepsilon > 0$ için

$$|t - x_0| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir $\delta(\varepsilon)$ sabiti vardır. Buradan $t \geq 0$ olmak üzere

$$|\varphi(t; x_0)| < \delta$$

olacaktır.

Diğer taraftan

$M_2 \coloneqq M_2(p)$ olan bir pozitif sabit vardır öyle ki $t \geq 0$ için

$$e^{-pt}|\varphi(t;x_0)| \le M_2$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$e^{-rx_0}A_n(\varphi(t;x_0);x_0) \le e^{-rx_0}\frac{1}{\cosh 1 \cosh nx_0}\sum_{\left|\frac{2k}{n}-x_0\right|<\delta} a_{2k}(nx_0)\left|\delta\left(\frac{2k}{n};x_0\right)\right|$$

$$+e^{-rx_0}\frac{1}{\cosh 1 \cosh nx_0}\sum_{\left|\frac{2k}{n}-x_0\right|\ge\delta} a_{2k}(nx_0)\left|\delta\left(\frac{2k}{n};x_0\right)\right| \coloneqq S_1+S_2$$

eşitsizliği geçerlidir.

$\varphi(.\,;x_0)$ fonksiyonunun tanımından

$$S_1 \le \frac{\varepsilon}{2}e^{-rx_0}\frac{1}{\cosh 1 \cosh nx_0}\sum_{\left|\frac{2k}{n}-x_0\right|<\delta} a_{2k}(nx_0) < \frac{\varepsilon}{2}e^{-rx_0}A_n(1;x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği yazılabilir. Diğer taraftan

$$S_2 = e^{-rx_0}\frac{1}{\cosh 1 \cosh nx_0}\sum_{\left|\frac{2k}{n}-x_0\right|\ge\delta} a_{2k}(nx_0)\left|\delta\left(\frac{2k}{n};x_0\right)\right| e^{-p\frac{2k}{n}}e^{p\frac{2k}{n}}$$

$$\le M_2 e^{-rx_0}\frac{1}{\cosh 1 \cosh nx_0}\sum_{\left|\frac{2k}{n}-x_0\right|\ge\delta} a_{2k}(nx_0)\, e^{p\frac{2k}{n}}$$

olacaktır.

$\left|\frac{2k}{n}-x_0\right| \ge \delta$ için

$$\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{2k}{n}-x_0\right)^2 \ge 1$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 2.7.4 den

$$S_2 \le M_2\frac{e^{-rx_0}}{\delta^2}\frac{1}{\cosh 1 \cosh nx_0}\sum_{\left|\frac{2k}{n}-x_0\right|\ge\delta} a_{2k}\,(nx_0)e^{p\frac{2k}{n}}\left(\frac{2k}{n}-x_0\right)^2$$

$$\leq M_2 \frac{e^{-rx_0}}{\delta^2} A_n((t-x_0)^2 e^{pt}; x_0) \leq M_2 \frac{1}{\delta^2} M_1(p,r) \frac{\cosh(e^p)}{\cosh 1} \frac{x_0+1}{n}$$

olacaktır.

Her $n > n_0$ ve x_0,ε,δ sabitleri için

bir $n_0 \coloneqq n_0(x_0, \varepsilon, \delta, M_2, M_1(p,r))$ doğal sayısı vardır öyle ki

$$S_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur.

Böylece her $n > n_0$ için

$$e^{-rx_0} A_n(\varphi(t; x_0); x_0) < \varepsilon$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} e^{-rx_0} A_n(\varphi(t; x_0); x_0) = 0$$

ifadeleri geçerlidir. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} A_n(\varphi(t; x_0); x_0) = 0$$

eşitliğine ulaşılır.

Bu sonuçlar dikkate alınarak Voronovskaya-tipli bir teorem verilecektir.

Teorem 2.7.1

$p > 0$ sabiti için, $C_p^2 = \{f \in C_p\, ; f', f'' \in C_p\}$ olsun.

Her $f \in C_p^2$ ve her $x_0 \in [0, \infty)$ sabiti için

$$\lim_{n\to\infty} n\{A_n(f; x) - f(x)\} = \frac{x}{2} f''(x) + f'(x) \tanh 1$$

eşitliği geçerlidir(Ciupa 2005).

Kanıt

$x_0 \in [0, \infty)$ sabit noktası için Taylor formülü kullanılırsa her $t \in [0,\infty)$ için

$$f(t) = f(x_0) + (t - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(t - x_0)^2 f''(x_0) + g(t;x_0)(t - x_0)^2$$

eşitliği geçerlidir.

Burada $g(t;x_0)$ geri kalan kısmın Peano formu olup $g(.;x_0) \in C_p$ ve

$\lim\limits_{n\to\infty} g(t;x_0) = 0$ dır.

$A_n(1;x_0) = 1$ olduğundan

$$A_n(f;x_0) - f(x_0) = f'(x_0)A_n(t - x_0;x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)A_n((t - x_0)^2;x_0)$$
$$+A_n(g(t;x_0)(t - x_0)^2;x_0)$$

eşitliği geçerlidir.

Cauchy eşitsizliği kullanılarak

$$|A_n(g(t;x_0)(t - x_0)^2;x_0)| \le \{A_n(g^2(t;x_0);x_0)\}^{\frac{1}{2}}.\{A_n((t - x_0)^4;x_0)\}^{\frac{1}{2}}.$$

eşitsizliği bulunur.

Her $t \ge 0$ ve Lemma 2.7.5 den $\varphi(t;x_0) = g^2(t;x_0)$ dır.

Böylece

$$\lim_{n\to\infty} A_n(g^2(t;x_0);x_0) = 0$$

olacaktır.

Buradan Lemma 2.7.3 kullanılarak

$$n.A_n(g(t;x_0)(t - x_0)^2;x_0) \le \{A_n(g^2(t;x_0);x_0)\}^{\frac{1}{2}}.\left(n^2 M_0(x_0)\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Böylece

$$\lim_{n\to\infty} n.A_n(g(t;x_0)(t - x_0)^2;x_0) = 0$$

eşitliği doğru olur.

Lemma 2.7.2 kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} n.\left(A_n(f;x_0)-f(x_0)\right)=f'(x_0)\tanh 1+\frac{x_0}{2}f''(x_0)$$

eşitliği gösterilmiş olur.

BÖLÜM 3

FARKLI ANLAMDA YAKINSAYAN BAZI OPERATÖRLER İÇİN VORONOVSKAYA TİPİ TEOREMLER

3.1 İSTATİSTİKSEL YAKINSAK DOĞRUSAL POZİTİF OPERATÖRLER

Bu kesimde (Doğru 2008) operatörün özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.1.1 (İstatistiksel Noktasal Yakınsaklık)

Her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in D$ için

$$\delta\{n: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0$$

koşulu sağlanıyorsa bu durumda (f_n) dizisi $f: D \to R$ fonksiyonuna D üzerinde istatistiksel noktasal yakınsak denir ve $f_n \to f$ (istatistiksel) ile gösterilir(Duman ve Orhan 2004).

Tanım 3.1.2 (İstatistiksel Düzgün Yakınsaklık)

(f_n) , D üzerinde sınırlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer

$$st - \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{B(D)} = 0$$

ise bu durumda (f_n) dizisi $f: D \to R$ fonksiyonuna D üzerinde istatistiksel düzgün yakınsak denir ve $f_n \rightrightarrows f$ (istatistiksel) ile gösterilir(Duman ve Orhan 2004).

Tanım 3.1.3

$$\alpha_{n,v} = \frac{\varphi_n^{(v)}(0)}{\varphi_n^{(v-1)}(0)}$$

$$\lim_{v\to\infty} \frac{\alpha_{n,v}}{v} = \mu$$

$0 \leq x < \frac{1}{\mu}$ ve $f \in C\left[0, \frac{1}{\mu}\right)$ olsun.

$\varphi_n(x) \in C^\infty$ aşağıdaki koşulları sağlamak üzere

(i) $\{\varphi_n\}$ dizisinin her elemanı $B = \left\{z \in \mathbb{C}: |z| < \frac{1}{\mu}\right\}$ diskini içeren bir D bölgesinde analitiktir.

(ii) $\varphi_n^v(0) = \frac{d^v}{dx^y}\varphi_n(x) > 0, \quad v = 1,2$ ...için

(iii) $\varphi_n(x) > 0$ her$x \in \left[0, \frac{1}{\mu}\right)$ için

(iv) $\left|\frac{v+1}{\alpha_{n,v+1}} - \frac{v}{\alpha_{n,v}}\right| \leq c_n$ ve $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ koşullarını sağlayan bir $\{c_n\}$ dizisi vardır.

Bu durumda

$$L_n(f;x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{\alpha_{n,v}}\right) \varphi_n^v(0) \frac{x^v}{v!} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlıdır(Doğru 2008).

Lemma 3.1.1

Her $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, a]$ $\left(0 < a < \frac{1}{\mu}\right)$ olmak üzere (3.1) operatörü için

$L_n(1;x) = 1$

$L_n(t;x) = x$

$|L_n(t^2;x) - x^2| \leq c_n x$

olur(Doğru 2008).

Tanım 3.1.4

Bir $x = x_k$ dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması, her $\varepsilon > 0$ için

$\delta\{k \in \mathbb{N}: |x_k - L| \geq \varepsilon\} = 0$

olmasıdır. Burada $\delta(K), K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\delta(K) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: k \in K\}|$$

olup $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin yoğunluğudur(Niven and Zuckerman 1980).

Burada $K \subseteq \mathbb{N}$ için $|K|$ ile K kümesinin eleman sayısı gösterilmektedir.

Örnek 3.1.1

$\delta(\mathbb{N}) = 1$, $\delta(2k: k \in \mathbb{N}) = \frac{1}{2}$, $\delta(k^2: k \in \mathbb{N}) = 0$ dır.

Uyarı 3.1.1

Herhangi yakınsak bir dizi istatistiksel olarak yakınsak olmasına rağmen bu durumun tersi doğru değildir. Örneğin

$$x_n = \begin{cases} L_1 & , n = m^2 \\ L_2 & , n \neq m^2 \end{cases} \qquad (m = 1,2 \dots)$$

dizisi istatistiksel olarak L_2 sayısına yakınsaktır. Ancak açıkça $L_1 \neq L_2$ durumunda klasik anlamda yakınsaklık söz konusu değildir.

Örnekten de görüldüğü gibi istatistiksel yakınsaklık kavramı daha geniş çalışma alanı sağladığından araştırmacılar için önem taşımaktadır(Canatan 2014).

Lemma 3.1.2

$L_n(f;x)$, (3.1) ile tanımlanmış olsun. Bu durumda

$$L_n(t^3;x) \leq x^3 + 3c_n x^2 + c_n^2 x \tag{3.2}$$

eşitsizliği geçerlidir(Canatan ve Doğru 2012).

Lemma 3.1.3

$L_n(f;x)$, (3.1) ile tanımlanmış olsun. Bu durumda

$$L_n(t^4;x) \leq x^4 + 6c_n x^3 + 7c_n^2 x^2 + c_n^3 x \tag{3.3}$$

eşitsizliği sağlanır(Canatan ve Doğru 2012).

Teorem 3.1.1

$L_n(f;x)$, (3.1) ile tanımlanmış olsun. Bu durumda

$$st - \lim_{n\to\infty} [L_n(f;x) - f(x)] = \frac{f''(x)}{2} x \tag{3.4}$$

eşitliği geçerlidir(Canatan ve Doğru 2012).

Kanıt

Taylor seri açılımı kullanılarak

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{f''(x)}{2!}(t-x)^2 + (t-x)^2\eta(t-x) \tag{3.5}$$

elde edilir.

$\eta(t-x) = \frac{f'''(x)}{3!}(t-x) + \cdots$ dır. Üstelik bu fonksiyon sürekli ve $t \to x$ için 0 a yaklaşır.

(3.5) de

$$t = \frac{v}{\alpha_{n,v}}$$

seçilsin. Bu durumda

$$f\left(\frac{v}{\alpha_{n,v}}\right) = f(x) + f'(x)\left(\frac{v}{\alpha_{n,v}} - x\right) + \frac{f''(x)}{2!}\left(\frac{v}{\alpha_{n,v}} - x\right)^2$$

$$+\left(\frac{v}{\alpha_{n,v}} - x\right)^2 \eta\left(\frac{v}{\alpha_{n,v}} - x\right) \tag{3.6}$$

olacaktır.

η sürekli olduğundan sınırlıdır yani her h için $|\eta(h)| \leq H$ olacak şekilde bir $H > 0$ sabiti vardır. (3.6) ifadesi

$$\frac{1}{\varphi_n(x)}\varphi_n^{(v)}(0)\frac{x^v}{v!}$$

ile çarpılır ve toplama geçilirse

$$\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{\alpha_{n,v}}\right)\varphi_n^v(0)\frac{x^v}{v!} = f(x)L_n(1;x) + f'(x)L_n(t-x;x) \ + \frac{f''(x)}{2}L_n((t-x)^2;x)$$

$$+\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{v}{\alpha_{n,v}} - x\right)^2 \eta\left(\frac{v}{\alpha_{n,v}} - x\right)\varphi_n^v(0)\frac{x^v}{v!}$$

elde edilir. Böylece

$$L_n(f;x) = f(x) + f'(x)[L_n(t;x) - x] + \frac{f''(x)}{2}[L_n(t^2;x) - 2xL_n(t;x) + x^2] + I \tag{3.7}$$

olur. Burada

$$I = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{\alpha_{n,v}} - x\right)^2 \eta\left(\frac{v}{\alpha_{n,v}} - x\right) \varphi_n^v(0) \frac{x^v}{v!}$$

şeklinde tanımlı olup

$$I = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\substack{v=0 \\ \left|\frac{v}{\alpha_{n,v}} - x\right| \leq \delta}}^{\infty} \left(\frac{v}{\alpha_{n,v}} - x\right)^2 \eta\left(\frac{v}{\alpha_{n,v}} - x\right) \varphi_n^v(0) \frac{x^v}{v!}$$

$$+ \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\substack{v=0 \\ \left|\frac{v}{\alpha_{n,v}} - x\right| > \delta}}^{\infty} \left(\frac{v}{\alpha_{n,v}} - x\right)^2 \eta\left(\frac{v}{\alpha_{n,v}} - x\right) \varphi_n^v(0) \frac{x^v}{v!} \tag{3.8}$$

eşitliği yazılabilir. Her $\varepsilon > 0$ için η sürekliliğinden bir $\delta(\varepsilon)$ vardır öyle ki

$\left|\frac{v}{\alpha_{n,v}} - x\right| \leq \delta$ için

$\left|\eta\left(\frac{v}{\alpha_{n,v}} - x\right)\right| \leq \varepsilon$ sağlanır.

Diğer yandan η sınırlı olduğundan

$\left|\frac{v}{\alpha_{n,v}} - x\right| > \delta$ için

$\left|\eta\left(\frac{v}{\alpha_{n,v}} - x\right)\right| < H$ eşitsizliği geçerlidir.

Bu durumlar (3.8) de kullanılırsa

$$I \leq \varepsilon \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{\alpha_{n,v}} - x\right)^2 \varphi_n^v(0) \frac{x^v}{v!} + HJ \tag{3.9}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$J = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\substack{v=0 \\ \left|\frac{v}{\alpha_{n,v}}-x\right|>\delta}}^{\infty} \left(\frac{v}{\alpha_{n,v}} - x\right)^2 \varphi_n^v(0) \frac{x^v}{v!}$$

olup,

$\left|\frac{v}{\alpha_{n,v}} - x\right| > \delta$ olduğundan $\frac{\left(\frac{v}{\alpha_{n,v}}-x\right)^2}{\delta^2} > 1$ olur ki

$$J \leq \frac{1}{\delta^2} \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{\alpha_{n,v}} - x\right)^4 \varphi_n^v(0) \frac{x^v}{v!} \tag{3.10}$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada (3.9) ve (3.10) kullanıldığında

$$I \leq \varepsilon L_n((t-x)^2; x) + H \frac{1}{\delta^2} L_n((t-x)^4; x)$$

$$I \leq \varepsilon\{L_n(t^2; x) - 2xL_n(t; x) + x^2 L_n(1; x)\}$$

$$+ \frac{H}{\delta^2}\{L_n(t^4; x) - 4xL_n(t^3; x) + 6x^2 L_n(t^2; x) - 4x^3 L_n(t; x) + x^4 L_n(1; x)\}$$

$$I \leq \varepsilon(x^2 + c_n x - 2x^2 + x^2 + \frac{H}{\delta^2}(x^4 + 6c_n x^3 + 7c_n^2 x^2 + c_n^3 x$$

$$-4x(x^3 + 3c_n x^2 + c_n^2 x) + 6x^2(c_n x + x^2) - 4x^3 x + x^4)$$

olur. Böylece

$$I \leq c_n \left[\varepsilon x + \frac{H}{\delta^2}(c_n^2 x + 3c_n x^2)\right] \tag{3.11}$$

eşitsizliği bulunur. (3.11) in (3.7) de kullanılmasıyla

$$L_n(f; x) - f(x) \leq \frac{f''(x)}{2} c_n x + c_n \left[\varepsilon x + \frac{H}{\delta^2}(c_n^2 x + 3c_n x^2)\right]$$

$$= c_n \left\{\frac{f''(x)}{2} x + \varepsilon x + \frac{H}{\delta^2}(c_n^2 x + 3c_n x^2)\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

$st - \lim_{n\to\infty} c_n = 0$ ve ε istenildiği kadar küçük bırakılabilen keyfi pozitif bir sabit olduğundan kanıt tamamlanmış olur.

3.2 EŞ-İSTATİSTİKSEL YAKINSAK DOĞRUSAL POZİTİF OPERATÖRLER

X gerçel sayıların kompakt bir alt kümesi ve $C(X)$, X üzerindeki tüm gerçel değerli sürekli fonksiyonların uzayı olsun.$f \in C(X)$ ve $f_n \in C(X)$ olmak üzere her $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ için $C(X)$ uzayı üzerindeki supremum normu

$$\|f\|_{C(X)} = \sup_{x\in X}|f(x)|$$

olarak tanımlıdır.

Aşağıdaki kesimde $\psi_n(x,\varepsilon)$,

$$\psi_n(x,\varepsilon) \coloneqq |\{k \leq n : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| \quad ,(x \in X)$$

şeklinde kullanılacaktır.

Tanım 3.2.1

Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n(x,\varepsilon)}{n} = 0$$

ve yakınsama $x \in X$'e göre düzgün ise yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\psi_n(.\,,\varepsilon)\|_{B(X)}}{n} = 0$$

ise $f(n)$, X üzerinde f fonksiyonuna eş-istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda X üzerinde $f_n \to f$ (eş-istatistiksel) ile gösterilir(Balcerzak et al. 2007).

$C(X)$ uzayı üzerinde alışılmış düzgün yakınsaklık, istatistiksel düzgün yakınsaklık, istatistik noktasal yakınsaklık ve eş-istatistiksel yakınsaklık tanımları düşünülerek aşağıdaki sonuç elde edilir.

Lemma 3.2.1

X üzerinde $f_n \rightrightarrows f$ ise X üzerinde $f_n \rightrightarrows f$ (istatistiksel) olur, bu ise $f_n \to f$ (eş-istatistiksel) olduğunu gösterir.

Ayrıca, X üzerinde $f_n \to f$ (eş-istatistiksel) ise X üzerinde $f_n \to f$ (istatistiksel) olur.

Bunun yanı sıra, X üzerinde (f_n) fonksiyon dizisi bir f fonksiyonuna alışılmış anlamda noktasal yakınsak ise X üzerinde $f_n \to f$ (istatistiksel) olur(Balcerzak et al. 2007).

Teorem 3.2.1

$L_n: C(X) \to C(X)$ doğrusal pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. O zaman her $f \in C(X)$ için X üzerinde

$L_n(f) \to f(\text{eş} - \text{istatistiksel})$

olması için gerekli ve yeterli koşul $e_i(x) = x^i\,,\ i = 0{,}1{,}2$ olmak üzere X üzerinde

$L_n(e_i) \to e_i(\text{eş} - \text{istatistiksel})$

ifadesinin geçerli olmasıdır(Karakuş 2009).

Lemma 3.2.2

$X = [0,1]$ ve $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere $C[0,1]$ üzerinde

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) c_n^k x^k \,(1-x)^{n-k}$$

ile tanımlanan $B_n(f;x)$ klasik Benstein polinomları göz önüne alınsın.

$x \in [0,1]\ ve\ f \in C[0,1]$ için

$$D_n(f;x) = \big(1 + g_n(x)\big)B_n(f;x) \qquad (3.12)$$

olsun. Bu durumda

$\{D_n\}$ doğrusal pozitif operatörleri için

$D_n(e_0;x) = \big(1 + g_n(x)\big)e_0(x)$

$D_n(e_1;x) = \big(1 + g_n(x)\big)e_1(x)$

$$D_n(e_2;x) = \left(1 + g_n(x)\right)\left[e_2(x) + \frac{x(1-x)}{n}\right]$$

eşitlikleri geçerlidir(Balcerzak et al. 2007).

$[0,1]$ üzerinde $g_n \to g = 0$ (eş-istatistiksel) olduğundan her bir $i = 0,1,2$ için, $[0,1]$ üzerinde

$$D_n(e_i) \to e_i(\text{eş} - \text{istatistiksel})$$

sonucu doğrudur. Böylece Teorem 3.2.1 den her $f \in C[0,1]$ için $[0,1]$ üzerinde

$$D_n(f) \to f(\text{eş} - \text{istatistiksel})$$

olur.

$$D_n(f;x) = \left(1 + g_n(x)\right)B_n(f;x)$$

doğrusal D_n operatörünün eş-istatistiksel yakınsaklık anlamında Voronovskaya-tipi bir teoremi sağladığı gösterilecektir.

Hazırlık olarak öncelikle aşağıdaki lemma verilecektir.

Lemma 3.2.3

$x \in [0,1]$ ve $\varphi(y) \coloneqq y - x$ olsun.

Bu durumda $[0,1]$ üzerinde

$n^2 D_n(\varphi^4) \to 3e_2(e_2 - 2e_1 + e_0)$ (eş-istatistiksel)

yakınsaması geçerli olur(Karakuş 2009).

Kanıt

$B_n(f;x)$ Bernstein polinomu için

$$B_n(1;x) = 1$$

$$B_n(t;x) = x$$

$$B_n(t^2;x) = x^2 + \frac{(x - x^2)}{n}$$

eşitlikleri geçerlidir. Diğer taraftan

$$B_n(t^3;x) = x^3\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + x^2\frac{(3n-3)}{n^2} + \frac{x}{n^2}$$

$$B_n(t^4;x) = x^4\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3} + 6x^3\frac{(n-1)(n-2)}{n^3} + 7x^2\frac{(n-1)}{n^3} + \frac{x}{n^2}$$

eşitlikleri de geçerlidir.

Böylece $\{D_n\}$ operatörü için

$$n^2D_n(\varphi^4) = (1+g(x))\left[3x^4 - 6x^3 + 3x^2 + \frac{-6x^4+12x^3-7x^2+x}{n}\right]$$

eşitliği doğrudur. Bu durumda her $x \in [0,1]$ için

$$|n^2D_n(\varphi^4;x) - 3e_2(x)(e_2(x) - 2e_1(x) + e_0(x))| \leq 12g_n(x) + \frac{26(1+g_n(x))}{n} \tag{3.13}$$

olacaktır.

[0,1] üzerinde

$$12g_n + \frac{26(1+g_n)}{n} \to 0 \text{ (eş} - \text{istatistiksel)} \tag{3.14}$$

ifadesi geçerli olduğundan

(3.13) ve (3.14) birlikte düşünülerek $[0,1]$ üzerinde

$n^2D_n(\varphi^4) \to 3e_2(e_2 - 2e_1 + e_0)$ (eş-istatistiksel)

olur. Bu ise kanıtı tamamlar.

(3.12) ile tanımlanan D_n operatörü için Voronovskaya tipli teorem verilecektir.

Teorem 3.2.2

Her $f \in C[0,1]$ ve $f', f'' \in C[0,1]$ için $[0,1]$ üzerinde

$n\{D_nf - f\} \to \frac{e_1-e_2}{2}f''$ (eş $-$ istatistiksel)

yakınsaması geçerlidir(Karakuş 2009).

Kanıt

$f, f', f'' \in C[0,1]$ ve $x \in [0,1]$ olsun.

$$\xi_x(y) = \begin{cases} f(y) - f(x) - (y-x)f'(x) - \frac{1}{2}(y-x)^2 f''(x) & , \quad y \neq x \; ise \\ 0 & , \quad y = x \; ise \end{cases}$$

fonksiyonu tanımlansın.

Kabulden ξ_x fonsiyonu $C[0,1]$ e aittir.

Böylece Taylor Teoreminden

$$f(y) = f(x) + (y-x)f'(x) + \frac{(y-x)^2}{2} f''(x) + (y-x)^2 \xi_x(x)$$

eşitliği doğrudur.

Şimdi (3.12) ile tanımlı D_n operatörlerini eşitliğin her iki tarafına uygularsak

$\varphi(y) \coloneqq y - x$ olmak üzere

$$D_n(f;x) - f(x) = D_n\left(f(x) + (y-x)f'(x) + \frac{(y-x)^2}{2} f''(x) + (y-x)^2 \xi_x(y); x \right) - f(x)$$

$$= f(x)D_n(1;x) + (x)D_n\big((y-x);x\big) + \frac{f''(x)}{2} D_n((y-x)^2;x)$$

$$+ D_n((y-x)^2 \xi_x(y);x) - f(x)$$

$$= f(x)g_n(x) + f'(x)D_n(\varphi;x) + \frac{f''(x)}{2} D_n(\varphi^2;x) + D_n(\varphi^2 \xi_x;x)$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan

$$D_n(\varphi;x) = 0$$

$$D_n(\varphi^2;x) = (1 + g_n(x))\left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{n}\right)$$

eşitlikleri geçerlidir. Dolayısıyla

$$D_n(f;x) - f(x) = f(x)g_n(x) + \frac{x(1-x)f''(x)}{2n}\big(1 + g_n(x)\big) + D_n(\varphi^2 \xi_x;x)$$

eşitliği yazılabilir.

Buradan $M = \|f\|_{C[0,1]} + \|f''\|_{C[0,1]}$ olmak üzere

$$\left|nD_n(f;x) - f(x) - \frac{e_1(x) - e_2(x)}{2} f''(x)\right|$$

$$\leq n\|f\|_{C[0,1]} g_n(x) + \frac{|x| + |x^2|}{2} g_n(x) \|f''\|_{C[0,1]} + n|D_n(\varphi^2 \xi_x; x)|$$

$$\leq M(n+1) g_n(x) + n|D_n(\varphi^2 \xi_x; x)| \tag{3.15}$$

olacaktır. (3.2) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terime Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$n|D_n(\varphi^2 \xi_x; x)| \leq (n^2 D_n(\varphi^4; x))^{\frac{1}{2}} (D_n({\xi_x}^2; x))^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$$\eta_x(y) := \xi_x^2(y)$$

olsun. Bu durumda $\eta_x(x) = 0$ ve $\eta_x(.) \in C[0,1]$ olur.

Böylece 3.2.1 den $[0,1]$ üzerinde

$$D_n(\eta_x) \to 0 \ \ (\text{eş} - \text{istatistiksel})$$

(3.3) ve (3.4) ifadeleri birlikte düşünülerek ve Lemma 3.1.2 den $[0,1]$ üzerinde

$$nD_n(\varphi^2 \xi_x; x) \to 0 \ \ (\text{eş} - \text{istatistiksel}) \tag{3.16}$$

olur.

Verilmiş bir $\varepsilon > 0$ için

$$\psi_n(x, \varepsilon) := \left|\left\{k \leq n : \left|k\big(D_k(f;x) - f(x)\big) - \frac{e_1(x) - e_2(x)}{2} f''(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$\psi_{1,n}(x, \varepsilon) := \left|\left\{k \leq n : |(k+1) g_k(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2M}\right\}\right|$$

$$\psi_{2,n}(x, \varepsilon) := \left|\left\{k \leq n : |k D_k(\varphi^2 \xi_x; x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

kümeleri tanımlansın. (3.15) den

$$\frac{\psi_n(x,\varepsilon)}{n} \leq \frac{\psi_{1,n}(x,\varepsilon)}{n} + \frac{\psi_{2,n}(x,\varepsilon)}{n}$$

eşitsizliği doğrudur. Böylece

$$\frac{\|\psi_n(.,\varepsilon)\|_{B[0,1]}}{n} \leq \frac{\|\psi_{1,n}(.,\varepsilon)\|_{B[0,1]}}{n} + \frac{\|\psi_{2,n}(.,\varepsilon)\|_{B[0,1]}}{n} \tag{3.17}$$

olduğu görülür. Ayrıca g_n fonksiyon dizisinin tanımından $[0,1]$ üzerinde

$$(n+1)g_n \to g = 0 \ \ (\text{eş} - \text{istatistiksel}) \tag{3.18}$$

olacaktır. (3.16) ve (3.18) den (3.17) eşitsizliğinin her iki tarafına $n \to \infty$ için limit alınırsa limitin sıfıra gittiğini görülür. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\psi_n(.,\varepsilon)\|_{B[0,1]}}{n} = 0$$

olur.

Uyarı 3.2.1

(3.12) ile tanımlı D_n operatörleri ve (g_n) fonksiyon dizisi $[0,1]$ üzerinde $g = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olmadığından alışılmış anlamda Voronovskaya-tipi özelliği sağlamaz.

3.3 AĞIRLIKLI EŞ-İSTATİSTİKSEL YAKINSAK DOĞRUSAL POZİTİF OPERATÖRLER

Bu çalışmada $\{p_k\}$ negatif olmayan gerçel sayıların

i. $p_1 > 0$
ii. $\lim_{n\to\infty} \inf p_n > 0$
iii. $n \in \mathbb{N}$ve$p_n \to \infty$ olmak üzere

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$$

koşullarını sağlayan bir dizi olarak alınacaktır.

Tanım 3.3.1

$\{f_n\}$ fonksiyonlar dizisinin D üzerinde f fonksiyonuna ağırlıklı eş-istatistiksel yakınsak olması için yeterli ve gerekli koşul

$$\Phi_n(x,\varepsilon) \coloneqq |\{k \le n : |f_k(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}|$$

olarak tanımlanmak üzere

her $\varepsilon > 0$ için $x \in D$ ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi_n(x,\varepsilon)}{P_n} = 0$$

dır. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\Phi_n(.,\varepsilon)\|}{P_n} = 0$$

olmasıdır. Bu durumda kısaca $f_n \to f\ (w - eş - ist)$ ile gösterilir (Akdağ, 2016).

Tanım 3.3.2

Bir $\{f_n\}$ dizisinin D üzerinde f fonksiyonuna ağırlıklı noktasal istatistiksel yakınsak olması her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in D$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} |\{k \le P_n : p_k |f_k(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}| = 0$$

şeklinde tanımlıdır. Bu durumda $f_n \to f\ (w - ist)$ ile gösterilir(Akdağ 2016).

Tanım 3.3.3

Bir $\{f_n\}$ dizisinin D üzerinde f fonksiyonuna ağırlıklı düzgün istatistiksel yakınsak olması her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} |\{k \le P_n : p_k \|f_k - f\| \ge \varepsilon\}| = 0$$

şeklinde verilir. Kısaca $f_n \rightrightarrows f\ (w - ist)$ ile gösterilir (Akdağ 2016).

Uyarı 3.3.1

Her k için $p_k = 1$ olsun. Bu durumda ağırlıklı eş-istatistiksel yakınsaklık, ağırlıklı noktasal istatistiksel yakınsaklık ve ağırlıklı düzgün istatistiksel yakınsaklık klasik durumlara dönüşür.

Lemma 3.3.1

$\{f_n\}$ fonksiyonlar dizisi ve f fonksiyonu için aşağıdaki yakınsamalar geçerlidir.

$f_n \rightrightarrows f\ (w - ist) \Longrightarrow f_n \to f\ (w - eş - ist) \Longrightarrow f_n \to f\ (w - ist)$

Ancak tersi her zaman doğru değildir(Akdağ 2016).

Örnek 3.3.1

Her $n \in \mathbb{N}$ için $h_n \in C[0,1]$ dizisi

$$h_n(x) = \begin{cases} 2^{n+1}\left(x - \frac{1}{2^n}\right) & eğer\ x \in \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right] \\ -2^{n+1}\left(x - \frac{1}{2^{n+1}}\right) & eğer\ x \in \left[\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+1}},\right] \\ 0 & diğer\ durum \end{cases} \qquad (3.19)$$

şeklinde tanımlansın.

$p_k = \sqrt{k}$, $(k = 1,2, \dots)$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} |\{k \le P_n : p_k |h_k(x)| \ge \varepsilon\}| \le \frac{1}{P_n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

olur. Böylece $[0,1]$ üzerinde $h_k \to h = 0\ \ (w - eş - ist)$

olur. Diğer taraftan (h_n), $h = 0$ a ağırlıklı düzgün istatistiksel yakınsaktır(Balcerzak 2007).

Teorem 3.3.1

(T_n), $C(D)$ den $C(D)$ ye tanımlı doğrusal pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda $f \in C(D)$ için D üzerinde

$T_n(f; x) \to f\ \ (w - eş - ist)$

olması için gerekli ve yeterli koşul her $i = 0,1,2$ ve $f_i(x) = x^i$ için D üzerinde

$$T_n(f; x) \to f_i\ \ (w - eş - ist) \qquad (3.20)$$

olmasıdır(Akdağ 2016).

Örnek 3.3.2

$D = [0,1]$ olsun.

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \ , \ \ x \in [0,1]$$

Klasik Bernstein operatörü olmak üzere $p_k = \sqrt{k}$ olsun.

$x \in [0,1]$ ve $f \in C[0,1]$ için

$$L_n(f,x) = \big(1 + h_n(x)\big)B_n(f;x) \tag{3.21}$$

dizisi tanımlansın. Burada $h_n(x)$, (3.19) ile verilen h_n olsun.

(h_n), $h = 0$ ’a ağırlıklı eş-istatistiksel yakınsak olup $h = 0$ ’a $[0,1]$ de düzgün olarak yakınsamaz. Bu durumda

$$L_n(1;x) = 1 + h_n(x)$$

$$L_n(t;x) = \big(1 + h_n(x)\big)x$$

$$L_n(t^2;x) = \big(1 + h_n(x)\big)\left(x^2 + \frac{x(1-x)}{n}\right)$$

olur. (L_n) dizisi (3.20) deki koşulları sağladığından ve Teorem 3.3.1 den

$$L_n(f;x) \to f(w - eş - ist)$$

olur. Böylece (h_n), $h = 0$ ’a $[0,1]$ de düzgün olarak yakınsamaz.

Klasik Korovkin Teoremi (3.21) ile tanımlanan operatör için çalışmaz. Sonuç olarak Teorem 3.3.1 Klasik Korovkin Teoreminin alışılmış olmayan bir genişlemesidir.

(3.21) ile tanımlanan (L_n) doğrusal pozitif operatör dizisinin ağırlıklı eş-istatistiksel durumda Voronovskaya tipli bir teoremi sağladığı gösterilecektir.

İlk olarak aşağıdaki lemma verilecektir.

Lemma 3.3.2

$x \in [0,1]$, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$p_k = \sqrt{k}$ ve $\theta(y) = y - x$ olsun. Bu durumda [0,1] üzerinde

$n^2 L_n(\theta^4) \to 3x^2(x^2 + 2x + 1) \quad (w - eş - ist)$

yakınsaması geçerlidir.

Kanıt

(3.21) ’den

$$n^2 L_n(\theta^4) = (1 + h_n(x))\left\{3x^4 - 6x^3 + 3x^2 + \frac{1}{n}(-6x^4 + 12x^3 - 7x^2 + x)\right\}$$

eşitliği geçerlidir. Buradan

$$|n^2 L_n(\theta^4) - 3x^2(x^2 - 2x + 1)| \leq 12h_n(x) + \frac{26(1 + h_n(x))}{n}$$

eşitsizliği bulunur. Örnek 3.3.2 den

$$12h_n + \frac{26}{n} + \frac{26h_n}{n} \to 0 \quad (w - eş - ist)$$

yakınsaması doğrudur. Dolayısıyla

$n^2 L_n(\theta^4) \to 3x^2(x^2 - 2x + 1) \quad (w - eş - ist)$

sonucu elde edilir. Bu ise kanıtı tamamlar.

Teorem 3.3.2

Her$f \in C[0,1]$ ve $f', f'' \in C[0,1]$ olsun. Bu durumda [0,1] de

$$n\{L_n f - f\} \to \frac{x(1-x)}{2} f'' \quad (w - eş - ist)$$

eşitliği geçerlidir(Akdağ 2016).

Kanıt

Kabul edelim ki $f, f', f'' \in C[0,1]$ ve $x \in [0,1]$ olsun.

$$\xi_x(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(x) - (y-x)f'(x) - \frac{1}{2}(y-x)^2 f''}{(y-x)^2} & eğer\ y \neq x \\ 0 & eğer\ y = x \end{cases}$$

tanımlayalım. Bu durumda

$\xi_x(x) = 0$, $\xi_x \in C[0,1]$

olur. Böylece Taylor Teoreminden

$$f(y) = f(x) + (y-x)f'(x) + \frac{(y-x)^2}{2} f''(x) + (y-x)^2 \xi_x(y)$$

dır. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafına (3.21) uygulanırsa

$$L_n(f;x) - f(x) = f(x)h_n(x) + f'(x)L_n(\theta;x) + \frac{f''(x)}{2} L_n(\theta^2;x) + L_n(\theta^2\xi_x;x)$$

$$= f(x)h_n(x) + \left(\frac{x(1-x)}{2n}\right)\big(1 + h_n(x)\big)f''(x) + L_n(\theta^2\xi_x;x)$$

$$\left| n\big(L_n(f;x) - f(x)\big) - \frac{x(1-x)}{2n} f''(x) \right| \leq K(n+1)h_n(x) + n|L_n(\theta^2\xi_x;x)| \qquad (3.22)$$

elde edilir. Burada

$\theta(y) = y - x$ ve $K = \|f\|_{C[0,1]} + \|f''\|_{C[0,1]}$

eşitlikleri geçerlidir.

(3.22) in sağ tarafına Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$n|L_n(\theta^2\xi_x;x)| \leq \big(n^2 L_n(\theta^4;x)\big)^{\frac{1}{2}} \Big(L_n\big({\xi_x}^2;x\big)\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.23)$$

elde edilir.

$\eta_x(y) \coloneqq {\xi_x}^2(y)$ olsun. Bu durumda

$\eta_x(x) = 0$ ve $\eta_x(.) \in [0,1]$

olur. Teorem 3.3.1 den $[0,1]$ üzerinde

$$L_n(\eta_x) \to 0(w - eş - ist) \tag{3.24}$$

dır.

(3.23), (3.24) ve Lemma 3.3.2 den

$$nL_n(\theta^2 \xi_x; x) \to 0 \quad (w - eş - ist) \tag{3.25}$$

olur.

Verien bir $\varepsilon > 0$ için

$$\Omega_n(x, \varepsilon) := \left|\left\{k \le P_n : p_k \left|k\big(L_k(f; x) - f(x)\big) - \frac{x(1-x)}{2} f''(x)\right| \ge \varepsilon\right\}\right|$$

$$\Omega_{1,n}(x, \varepsilon) := \left|\left\{k \le P_n : p_k |(k+1) h_k(x)| \ge \frac{\varepsilon}{2K}\right\}\right|$$

$$\Omega_{2,n}(x, \varepsilon) := \left|\left\{k \le P_n : p_k |k L_k(\theta^2 \xi_x; x)| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

olur. Dolayısıyla

$$\frac{\|\Omega_n(x, \varepsilon)\|_{C[0,1]}}{P_n} \le \frac{\|\Omega_{1,n}(x, \varepsilon)\|_{C[0,1]}}{P_n} \le \frac{\|\Omega_{2,n}(x, \varepsilon)\|_{C[0,1]}}{P_n}$$

eşitsizliği geçerlidir.

h_n'in tanımından

$$(n+1) h_n \to h = 0 \quad (w - eş - ist)$$

olur. Yukarıdaki eşitliklerin geçerli olmasından

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\|\Omega_n(., \varepsilon)\|_{C[0,1]}}{P_n} = 0$$

bulunur. Bu ise kanıtı tamamlar.

4.BÖLÜM

$q -$ OPERATÖRLER İÇİN VORONOVSKAYA TİPLİ TEOREMLER

4.1 q-SZASZ-MIRAKYAN OPERATÖRLERİ

Bu bölümde ağırlıklı uzaylarda q-Szasz-Mirakyan operatörlerinin tanımı ve Voronovskaya tip sonucu verilecektir.

Tanım 4.1.1

e^z üstel fonksiyonun iki tane q-genelleşmesi vardır.

$$e(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{[k]q^!} = \frac{1}{(1-(1-q)z)_q^{\infty}}$$

$|z| < \frac{1}{1-q}$, $|q| < 1$ ve

$$E(z) = \prod_{j=0}^{\infty} (1+(1-q)q^i z) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{z^k}{[k]q^!} = (1-(1-q)z)_q^{\infty} |q| < 1$$

bulunur(Andrews et al. 1999).

Ayrıca q-türev tanımından

$D_q E(ax) = aE(qax)(4.1)$

olur.

Tanım 4.1.2

$q \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$, $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda q-Szasz-Mirakyan operatörleri

$$S_{n,q}(f;x) = \frac{1}{E([n]_q x)} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-2}[n]_q}\right) q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n]_q^k x^k}{[k]q^!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-2}[n]_q}\right) S_{nk}(q;x)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$S_{nk}(q;x) = \frac{1}{E([n]_q x)} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n]_q^k}{[k]q^!} x^k$$

olup,

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_{nk}(q;x) = \frac{1}{E([n]_q x)} \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{\left([n]_q^k x\right)^2}{[k]q^!} = 1$$

olur. $S_{n,q}$ operatörü doğrusal ve pozitiftir(Andrews et al. 1999).

Lemma 4.1.1

$q \in (0,1)$ için

$S_{n,q}(1;x) = 1$

$S_{n,q}(t;x) = qx$

$$S_{n,q}(t^2;x) = qx^2 + \frac{q^2}{[n]_q} x$$

$$S_{n,q}(t^3;x) = \frac{q^3 x}{[n]_q^2} + (2q^2 + q)\frac{x^2}{[n]_q} + x^3$$

$$S_{n,q}(t^4;x) = \frac{q^4 x}{[n]_q^3} + (3q^3 + 3q^2 + q)\frac{x^2}{[n]_q^2} + \left(3q + 2 + \frac{1}{q}\right)\frac{x^3}{[n]_q} + \frac{x^4}{q^2}$$

eşitlikleri geçerlidir(Mahmudov2010, Adıgüzel 2012).

Lemma 4.1.2

(q_n) , her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < q_n < 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$

ve

$$\lim_{n\to\infty} q_n^n = a$$

olacak şekilde bir dizi olsun.

Bu durumda her $x \in [0,\infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty} [n]_{nq} S_{n,q_n}(t-x;x) = (a-1)x \tag{4.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} [n]_{nq} S_{n,q_n}((t-x)^2;x) = (a-1)x^2 + x \tag{4.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} [n]^2{}_{nq} S_{n,q_n}((t-x)^4;x) = 3x^2 + 6(1-a)x^3 + 3(1-a)^2x^4 \tag{4.3}$$

eşitlikleri sağlanır(Mahmudov 2010, Adıgüzel 2012).

$C_2^*[0,\infty)$ uzayı $C_2\ [0,\infty)$dan olan fonksiyonların

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{1+x^2} < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı olmak üzere q-Szasz-Mirakyan operatörleri için Voronovskaya-tipli bir teorem verilecektir.

Uyarı 4.1.1

$q_n \in (0,1)$ ve $f \in C_2^*[0,\infty)$ olsun. Bu durumda $\left(S_{n,q_n}\right)$ dizisinin f fonksiyonuna $[0,A]$ aralığında düzgün yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\lim_{n\to\infty} q_n = 1$$

olmasıdır(Mahmudov 2010).

Teorem 4.1.1

Her $n \in \mathbb{N}$ için $q_n \in (0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} q_n = 1$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} q_n^n = a$$

olsun.

Bu durumda $f', f'' \in C_2^*[0,\infty)$ olacak şekilde herhangi bir $f \in C_2^*[0,\infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{nq}\left(S_{n,q_n}(f;x)-f(x)\right)=(a-1)xf'(x)+\frac{1}{2}f''(x)((1-a)x^2+x)$$

yakınsaması geçerli olup bu yakınsama $[0,A]$ da düzgündür(Mahmudov 2010).

Kanıt

f , f' , $f'' \in C_2^*[0,\infty)$ ve $x \in [0,\infty)$ olsun.

Taylor formülünden

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2}f''(x)(t-x)^2+r(t;x)(t-x)^2 \tag{4.4}$$

eşitliği geçerli olur. Burada $r(t;x)$ kalan terimin Peano formudur.

Açıkça

$r(t;x) \in C_2^*[0,\infty)$

ve

$\lim_{t\to x} r(t;x)=0$

olur.

S_{n,q_n} , (4.4) e uygulanarak eşitliğin her iki tarafı $[n]_{q_n}$ ile çarpılırsa

$$[n]_{nq}\left(S_{n,q_n}(f;x)-f(x)\right)=f'(x)[n]_{nq}S_{n,q_n}(t-x;x)+\frac{1}{2}f''(x)[n]_{nq}S_{n,q_n}((t-x)^2;x)$$

$$+[n]_{nq}S_{n,q_n}(r(t;x)(t-x)^2;x) \tag{4.5}$$

eşitliği bulunur. Eşitliğin en son kısmındaki

$S_{n,q_n}(r(t;x)(t-x)^2;x)$ ifadesinde Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$S_{n,q_n}(r(t;x)(t-x)^2;x) \le \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left(r\left(\frac{[k]_{q_n}}{q_n^{k-2}[n]_{q_n}};x\right)\right)^2\left(s_{n,k}^{\frac{1}{2}}(q_n;x)\right)^2}$$

$$\times \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{[k]_{q_n}}{q_n^{k-2}[n]_{q_n}}-x\right)^4\left(s_{n,k}^{\frac{1}{2}}(q_n;x)\right)^2}$$

$$= \sqrt{S_{n,q_n}(r^2(t;x);x)}\sqrt{S_{n,q_n}((t-x)^4;x)} \tag{4.6}$$

eşitsizliği bulunur. Diğer taraftan

$r^2(x;x) = 0$ ve $r^2(t;x) \in C_2^*[0,\infty)$ olup

$\lim_{n\to\infty} q_n = 1$

eşitsizliği kullanılarak Uyarı 4.2.1 den $[0, A]$ aralığında

$S_{n,q_n}(r^2(t;x);x) = r^2(x;x)(n \to \infty)$ (düzgün)

bulunur. Bu durumda (4.3) , (4.5) ve (4.6) kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n} S_{n,q_n}(r(t;x)(t-x)^2;x)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\sqrt{S_{n,q_n}(r^2(t;x);x)} \times \lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}\sqrt{S_{n,q_n}((t-x)^4;x)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{S_{n,q_n}(r^2(t;x);x)} \times \sqrt{\lim_{n\to\infty}[n]^2{}_{q_n} S_{n,q_n}((t-x)^4;x)}$$

$$= 0.\sqrt{3x^2+6(1-a)x^3+3(1-a)^2x^4}$$

$$= 0 \tag{4.7}$$

bulunur. Yani

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n} S_{n,q_n}(r(t;x)(t-x)^2;x) = 0$$

olup böylece (4.1) , (4.2) , (4.5) ve (4.7) den

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}\left(S_{n,q_n}(f;x)-f(x)\right) = (a-1)xf'(x) + \frac{1}{2}f''(x)\left((1-a)x^2+x\right)$$

elde edilir.

4.2 İSTATİSTİKSEL YAKINSAK q −BERNSTEIN SCHURER OPERATÖRLERİ

$f \in C[0,1+p]$,

$p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < q < 1$ için

$$S_{n,p}(f;q;x) = \sum_{k=0}^{n+p} \begin{bmatrix} n+p \\ k \end{bmatrix}_q x^k (1-x)_q^{n+p-k} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)$$

ile verilen $S_{n,p}(f;q;x)$ operaötürü

$r_{n,p}(q,x) = \frac{[n]_q x}{[n+p]_q}$ olmak üzere

$$\tilde{S}_{n,p}(f;q;x) = \sum_{k=0}^{n+p} \begin{bmatrix} n+p \\ k \end{bmatrix}_q r_{n,p}^k(q,x)(1-r_{n,p}(q,x))_q^{n+p-k} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) \tag{4.8}$$

şeklinde modifiye edilerek q_Bernstein Schurer operatörü olarak adlandırılır(Ren and Zeng 2013).

Lemma 4.2.1

$\tilde{S}_{n,p}(t^j;q;x)$, $j = 0,1,2,3,4$ için

$$r_{n,p}(q,x) = \frac{[n]_q x}{[n+p]_q}$$

olarak seçilsin. Bu durumda

i. $\tilde{S}_{n,p}(1;q;x) = 1$

ii. $\tilde{S}_{n,p}(t;q;x) = x$

iii. $\tilde{S}_{n,p}(t^2;q;x) = \frac{[n+p]_q}{[n]_q^2}\left[[n+p]_q r_{n,p}^2(q,x) + r_{n,p}(q,x)(1-r_{n,p}(q,x))\right]$

iv. $\tilde{S}_{n,p}(t^3;q;x) = \frac{[n+p]_q}{[n]_q^3} r_{n,p}(q,x) + \frac{2q+q^2}{[n]_q^3}[n+p]_q[n+p-1]_q r_{n,p}^2(q,x)$

$$+\frac{q^3}{[n]_q^3}[n+p]_q[n+p-1]_q[n+p-2]_q r_{n,p}^3(q,x)$$

v. $n+p \geq 3$ için

$$\tilde{S}_{n,p}(t^4;q;x) = \frac{[n+p]_q}{[n]_q^4} r_{n,p}(q,x) + \frac{3q+3q^2+q^3}{[n]_q^4}[n+p]_q[n+p-1]_q r_{n,p}^2(q,x)$$

$$+\frac{3q^3+2q^4+q^5}{[n]_q^4}[n+p]_q[n+p-1]_q[n+p-2]_q r_{n,p}^3(q,x)$$

$$+\frac{q^6}{[n]_q^4}[n+p]_q[n+p-1]_q[n+p-2]_q[n+p-3]_q r_{n,p}^4(q,x)$$

eşitlikleri geçerlidir.

Lemma 4.2.2

$0<q<1, n\in\mathbb{N}, x\in[0,1]$ olsun. Bu durumda

i. $\tilde{S}_{n,p}(t-x;q;x)=0$

ii. $\tilde{S}_{n,p}((t-x)^2;q;x)\leq\frac{1}{[n]_{q_n}}\frac{[n]_{q_n}x}{[n+p]_q}$

özellikleri geçerlidir(Ren and Zeng 2013).

Kanıt

Lemma 4.2.1 den $\tilde{S}_{n,p}(t-x;q;x)=0$ olduğu açıktır.

Lemma 4.2.1 de verilen $n\in\mathbb{N}, x\in[0,1]$ için

$$\tilde{S}_{n,p}((t-x)^2;q;x)=\tilde{S}_{n,p}(t^2;q;x)-2x\tilde{S}_{n,p}(t;q;x)+x^2$$

$$=\tilde{S}_{n,p}(t^2;q;x)-x^2$$

$$=\frac{x}{[n]_q}\left(1-\frac{[n]_qx}{[n+p]_q}\right)\leq\frac{1}{[n]_q}\left(1-\frac{[n]_qx}{[n+p]_q}\right)$$

eşitlikleri geçerlidir.

$q=\{q_n\}$, $0<q_n<1$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty}q_n=1$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}q_n^n=a \quad (a\ sabit) \tag{4.9}$$

eşitlikleri geçerli olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar geçerlidir.

Lemma 4.2.3

$x \in [0,1]$ olmak üzere

$q = \{q_n\}$, $0 < q_n < 1$ (4.8) koşullarını sağlayan bir dizi olsun.

Bu durumda

i. $\lim_{n\to\infty} [n]_{q_n} \tilde{S}_{n,p}((t-x)^2; q_n; x) = x(1-x)$

ii. $\lim_{n\to\infty} [n]_{q_n} \tilde{S}_{n,p}((t-x)^4; q_n; x) = 0$

eşitlikleri geçerlidir(Ren and Zeng 2013).

Teorem 4.2.1

$q = \{q_n\}$, $0 < q_n < 1$ dizisi

$$st - \lim_n q_n = 1$$
$$st - \lim_n q_n^n = c \ (c < 1) \tag{4.10}$$

koşullarını sağlasın.

Bu durumda $f \in C[0,1+p]$ için

$$st - \lim_n \left\| \tilde{S}_{n,p}(f; q_n; x) - f \right\|_{C[0,1]} = 0$$

eşitliği sağlanır(Ren and Zeng 2013).

Kanıt

Her $f \in C[0,1+p]$ için $v = 0,1,2$ olmak üzere

$e_v(t) = t^v$ fonksiyonlarının

$$st - \lim_n \left\| \tilde{S}_{n,p}(e_v; q_n; .) - e_v \right\|_{C[0,1]} = 0$$

koşulunu sağladığını göstermek yeterlidir.

Lemma 4.2.1 (i) den

$$st - \lim_n \left\| \tilde{S}_{n,p}(e_0; q_n; .) - e_0 \right\|_{C[0,1]} = 0 \tag{4.11}$$

eşitliği doğrudur.

Lemma 4.2.1 (ii) eşitliği

$$st-\lim_n\left\|\tilde{S}_{n,p}(e_1;q_n;.)-e_1\right\|_{C[0,1]}=0 \qquad (4.12)$$

eşitliğinin geçerliliğini gösterir.

Lemma 4.2.1 (iii) den

$$\left\|\tilde{S}_{n,p}(e_2;q_n;.)-e_2\right\|_{C[0,1]}=\left\|\frac{e_1}{[n]_{q_n}}\left(1-\frac{[n]_{q_n}e_1}{[n+p]_{q_n}}\right)\right\|_{C[0,1]}\leq\frac{1}{[n]_{q_n}}$$

eşitliği geçerlidir.

Verilen bir $\varepsilon>0$ için

$$T=\left\{k:\left\|\tilde{S}_{k,p}(e_2;q_k;.)-e_2\right\|_{C[0,1]}\geq\varepsilon\right\}$$

$$T_1=\left\{k:\frac{1}{[k]_{q_k}}\geq\varepsilon\right\}$$

kümeleri tanımansın. Bu durumda $T\subseteq T_1$ olur. Bu yüzden

$$\delta\left\{k\leq n:\ \left\|\tilde{S}_{k,p}(e_2;q_k;.)-e_2\right\|_{C[0,1]}\geq\varepsilon\right\}\leq\delta\left\{k\leq n:\frac{1}{[k]_{q_k}}\geq\varepsilon\right\}$$

(4.10) koşulundan

$$st-\lim_n\frac{1}{[n]_{q_n}}=0$$

olacağından

$$st-\lim_n\left\|\tilde{S}_{n,p}(e_2;q_n;.)-e_2\right\|_{C[0,1]}=0 \qquad (4.13)$$

(4.11), (4.12) ve (4.13) eşitliklerinden kanıt tamamlanır.

$\tilde{S}_{n,p}(f;q_n;x)$ için aşağıdaki teoremde Voronovskaya tipli bir teorem verilecektir.

Teorem 4.2.2

$x\in[0,1]$ ve $q=\{q_n\}$, $0<q_n<1$ olmak üzere $\{q_n\}$ dizisi (4.9) koşullarını sağlasın.

Bu durumda $f\in C^2[0,1+p]$ için

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}\tilde{S}_{n,p}(f;q_n;x)-f(x)=\frac{x(1-x)}{2}f''(x)$$

eşitliği geçerlidir(Ren and Zeng 2013).

Kanıt

$f\in C^2[0,1+p]$ ve $x\in[0,1]$ olsun. Her $t\in[0,1+p]$ için Taylor Formülünden

$r(t,x)\in C[0,1+p]$

ve

$$\lim_{n\to\infty} r(t,x)=0$$

olmak üzere

$$f(t)-f(x)=f'(x)(t-x)+\frac{f''(x)}{2}(t-x)^2+r(t,x)(t-x)^2$$

eşitliği geçerlidir. Lemma 4.2.1 den

$$\tilde{S}_{n,p}(f;q_n;x)-f(x)=\frac{f''(x)}{2}\tilde{S}_{n,p}((t-x)^2;q_n;x)+\tilde{S}_{n,p}(r(t,x)(t-x)^2;q_n;x) \qquad (4.14)$$

eşitliği yazılabilir. Her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{t\to x} r(t,x)=0$$

olduğundan bir $\delta>0$ vardır öyle ki

$t\in U_x(\delta)=\{t|t\in[0,1+p]\ ve\ |t-x|<\delta\}$ olduğunda

$|r(t,x)|<\varepsilon$ olur.

$$\lambda_\delta(t,x)=\begin{cases}1, & |t-x|\ge\delta\\ 0, & |t-x|<\delta\end{cases}$$

olarak alınırsa bu durumda

$$|r(t,x)(t-x)^2|\le\varepsilon(t-x)^2+\lambda_\delta(t,x)|r(t,x)|(t-x)^2$$

$$\left|\tilde{S}_{n,p}(r(t,x)(t-x)^2;q_n;x\right|\le\varepsilon\tilde{S}_{n,p}((t-x)^2;q_n;x)+\tilde{S}_{n,p}(\lambda_\delta(t,x)|r(t,x)|(t-x)^2;q_n;x)$$

bulunur. $[0,1+p]\setminus U_x(\delta)$ kompakt olduğundan

$r(t,x)$, $[0,1+p]$ üzerinde sınırlıdır.

Böylece bir $L>0$ sabiti vardır öyle ki her $t\in[0,1+p]$ için

$$\lambda_\delta(t,x)|r(t,x)|(t-x)^2\leq L(t-x)^4$$

olur. Buradan

$$\left|\tilde{S}_{n,p}(r(t,x)(t-x)^2;q_n;x\right|\leq \varepsilon\tilde{S}_{n,p}((t-x)^2;q_n;x)+L\tilde{S}_{n,p}((t-x)^4;q_n;x)$$

eşitsizliği geçerlidir.

$\varepsilon>0$ keyfi olduğundan Lemma 4.2.3 den

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}\left|\tilde{S}_{n,p}(r(t,x)(t-x)^2;q_n;x\right|=0$$

ve böylece

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}\tilde{S}_{n,p}(r(t,x)(t-x)^2;q_n;x)=0 \qquad (4.15)$$

eşitlikleri geçerlidir.

(4.14), (4.15) ve Lemma 4.2.3 den istenilen gösterilmiş olur.

SONUÇ

Bu tezde Voronovskaya tipli teoremi sağlayan bazı doğrusal pozitif operatörler tanıtılarak ve bu operatörlerin klasik anlamda yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Daha sonra farklı yakınsama türlerine göre yaklaşım özelliklerini sağlayan operatörler için Voronovskaya tipli teoremler verilmiştir. Son olarak bazı q_operatörler için Voronovskaya tipli yaklaşım teoremleri incelenmiştir.

Bu çalışma ile literatürde asimptotik anlamda yaklaşıma incelenmemiş operatörler için yaklaşım araştırmaların boşluğuna dikkat çekilmiştir. Gelişmekte olan q_analiz yardımıyla yeni tanımlanacak q_operatörler için Voronovskaya tipli yaklaşım özelliklerinin araştırılması yönünde yol gösterici bir çalışma ortaya konulmuştur.

KAYNAKLAR

Andrews G E, Askey R and Roy R (1999) *Special Functions*, Cambridge University Press, 1-70.

Adıgüzel H (2012) Ağırlıklı Uzaylarda Bazı Lineer Pozitif Operatörler, *Yüksek Lisans Tezi*, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara, 73 s.

Akdağ S (2016) Weighted Equi-Statistical Convergence of the Korovkin Type Approximation Theorems. *Results Math*, 72: 1073-1085.

Altomare F and Campite M (1994) *Korovkin-Type Approximation Theory and Its Applications*, Walter de Gruyter, Berlin, Newyork, pp. 141-180.

Aral A, Inoan D and Rasa I (2014) On the Generalization Szasz-Mirakyan Operators. *Results in Mathematic*, 65: 441-452.

Balcerzark M, Dems K and Komisarski A (2007) Statistical Convergence and Ideal Convergence For Sequences Of Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 328: 715-729.

Bernstein S N (1912) Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee sur le calculdes probabilities. *Communications de la Societe Mathematique de Kharkow*, 2 (13): 1-2.

Canatan R ve Doğru O (2012) Statistical approximation properties of a generalization of positive linear operators. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 5 (1): 75-87.

Canatan R (2014) Genelleştirilmiş bir lineer pozitif operatör dizisinin istatistiksel yaklaşım özellikleri. *Doktora Tezi*, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara, 54 s.

Ciupa A (2003) Approximation by a generalized Szasz type operator. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 5(4): 413-424.

Ciupa A (2003) Voronovskaya Therom for a Positive Linear operator. *Soochow Journal of Mathematics*, 31(3): 375-387.

Coşkun E (2002) *Analiz I*, 1.Basım, ISBN: 975-6674-06-7, Alp Yayınevi, Ankara, 349 s.

Derriennic M (1981) Approximation de functions integrables sur $[0,1]$ par des polynomes de Bernstein modifies. *Journal Approximation Theory*, 31: 325-343.

Ditzian Z and Ivanov K (1981) Bernstein Type Operators and Their Derivates. *Journal of Approximation*, 56: 72-84

Doğru O (2008) Approximation properties of a generalization of positive linear operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 342: 161-170.

Durrmeyer J L (1967) Une formule d'inversion de la transformée de laplace: Applications la théorie des moments. *these de 3e cycle, Faculté des Sciences de I'Université de Paris.*

Firlej B Rempulska L (1997) Approximation of functions of several variables by some operators of the Szasz-Mirakyan type. *Fasciculi Mathematici*, 15-27, 65-79.

Gadjiev A D (1974) The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets and theorems analogues to that of P. P. Korovkin. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 218: 1001-1004.

Gadjiev A D (1976) Theorems of the type of PP Korovkin's theorems. *Math Zametki*, 20: 781-786.

Hacısalihoğlu H ve Hacıyev A (1995) *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*. A.Ü.F.F Döner Sermaye Yayınları, Ankara, 1-16.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Kahvecibaşı İ (2014) $[-1,1]$ aralığında Bernstein-Kantorovich operatörlerinin yaklaşım özellikleri. *Yüksek Lisans Tezi,* Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Şanlıurfa, 63 s.

Kantorovich L V (1930) Sur Certain Developpements Suivant Les Polynomes De La Forme De S. Bernstein. CR Academia URSS, 2(1): 563-568, 595-600.

Karakuş S (2009) Pozitif lineer operatörlerin eş-istatistiksel yakınsaklığı ve Korovkin tipi teroremler. *Doktora Tezi,* Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Samsun, 61 s.

Korovkin P P (1953) Doklady Akademii Nauk SSSR (N.S.), “On convergence of linear positive operators in the space of continous functions”, 90: 961-964.

Korovkin P P (1960) *Linear Operators and Approximation Theory.* Hidustan Publishing Corp.(İndia), Delhi.

Mahmudov N I (2010) On q −Parametric Szasz-Mirakjan Operators. Mediterr. *Journal of Mathematic,* 7: 297-311.

Niven I and Zuckerman H S (1980) *An Introduction to the Theory of Numbers.* John Walley and Sons, 4th ed. New York.

Rempulska L and Skorupka M (1995) The Voronovskaya theorem for some operators of the Szasz-Mirakyan type. *Le Mathematiche.* 50: 2, 251-261.

Ren M and Zeng X (2013) On Statistical Approximation Properties of Modified q −Bernstein-Schurer Operators. *Bulletin of the Korean Mathematical Society,* 50(4): 1145-1156.

Rudin W (1991) *Functional Analysis*, King sport Press, Inc. 6p., United States of America, 86-97.

Szasz O (1950) Generalization of S. Bernstein’s polynomials to the infinite interval. *Journal of Research of the National Bureau of Standards,* 45: 239-245.

Voronovskaya E (1932) Determination de la forme asymptotiqued'approximation des fonctions par les polynomez de M.Bernstein. *C R Academia Science URSS,* 79-85.

Walczak Z (2004) Bernstein-Durrmeyer type operators. *Acta Mathematica Universitatis Ostraviensis*, 12: 65-72.

ÖZGEÇMİŞ

Huriye Aldemir 1992 yılında Aydın'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Aydın'da tamamladı. 2010 yılında Söke Şehit Emre Acar Cumhuriyet Anadolu Lisesinden mezun oldu. 2010 yılında ZKÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde öğrenime başladı. 2014 yılında mezun olduktan sonra BEÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans programına kabul edildi.

Halen BEÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programını sürdürmektedir.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Cumhuriyet Mah.422 Sokak no:1/10

İncirliova/AYDIN

Tel : (539) 303 18 09

E-posta: huriyealdemir@gmail.com