T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

YAKIN-HALKALARIN E-ASAL İDEALLERİ

Fatma Münevver YİĞİTER

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Yozgat 2011

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

YAKIN-HALKALARIN E-ASAL İDEALLERİ

Fatma Münevver YİĞİTER

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Yozgat 2011

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 7011130005 numaralı öğrencisi Fatma Münevver Yiğiter'in hazırladığı **"Yakın-Halkaların E-asal İdealleri"** başlıklı YÜKSEK LİSANS TEZİ ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 06/06/2011 pazartesi günü saat 13:00'te yapılmış, tezin onayına OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Emin AYGÜN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN(Danışman)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 24.06.2011 tarih ve 07 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

24./06./20.11..

Enstitü Müdürü

(Unvanı, Adı Soyadı)

Yrd. Doç. Dr. Mustafa EROL
Bozok Üniversitesi
Fen Bil. Enst. Müdür V.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET……………………………………………………………………………… iii

ABSTRACT…………………………………………………………………….. iv

TEŞEKKÜR…………………………………………………………………….. v

KISALTMALAR VE SEMBOLLER………………………………………………… vi

1. GİRİŞ………………………………………………………………………… 1

2. TEMEL BİLGİLER…………………………………………………………… 3

2.1. Temel Tanım ve Özellikler…………………………………………………3

2.2. N-gruplar……………………………………………………………………7

2.3. Alt Yapılar…………………………………………………………………..9

2.4.Homomorfizm ve İdealler…………………………………………………... 10

3. YAKIN-HALKALARIN ASAL VE PRİMİTİF İDEALLERİ…………………… 19

3.1. 0-asal İdealler………………………………………………………………. 19

3.1.1. Yarı-asal İdealler…………………………………………………... 21

3.2. 1-asal İdealler……………………………………………………………..23

3.3. 2-asal İdealler……………………………………………………………..25

3.4. 3-asal İdealler……………………………………………………………… 28

3.5. Tam asal İdealler…………………………………………………………… 29

3.6. E-asal İdealler………………………………………………………………. 30

3.7. N-grup Tipleri……………………………………………………………….34

3.8. E-asallığın Birimli ve Basit Yakın-halkalarla İlişkisi………………………36

3.9. E-asal Yakın-cisimler ve Planar Yakın-halkalar……………………………37

4. YAKIN-HALKALARDA ASALLIK KAVRAMININ MALONE AŞİKAR YAKIN-HALKALAR ÜZERİNE UYGULAMALARI…………………………………….. 40

SONUÇ…………………………………………………………………….. 47

KAYNAKLAR………………………………………………………………. 48

ÖZGEÇMİŞ……………………………………………………………….. 50

YAKIN HALKALARIN E-ASAL İDEALLERİ

Fatma Münevver YİĞİTER

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2011; Sayfa:50

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci ve ikinci bölümlerde çalışmayla ilgili literatür ve temel bilgiler verildi. Üçüncü bölümde e-asal yakın-halkaların, diğer yakın-halka çeşitleriyle bazı ilişkileri irdelendi. Yakın-halkalarda farklı tipteki asallık ve primitiflik kavramları arasındaki ilişkiler incelendi. Ayrıca e-asal ve planar (düzlemsel) yakın-halkaların ve yakın-cisimlerin bağlantıları verildi.

Orijinal bir çalışmadan oluşan dördüncü bölümde, yakın-halkalarda farklı asallık yapılarının asallığın Malone aşikar yakın-halkalar üzerine uygulamaları verildi. Yakın-halkaların e-asal, 3-asal ve tam asal idealleri üzerinde LSD, RDS, sağ değişme ve sol değişme özelliklerinin Malone aşikar yakın-halkalarda durumları üzerine yeni sonuçlar elde edildi.

Anahtar Kelimeler: E-asallık, LSD, Malone Aşikar Yakın-Halka, RSD, Tam Asallık, Yakın-Halka, 3-asallık.

EQUIPRIME IDEALS OF NEAR-RINGS

Fatma Münevver YİĞİTER

Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2011; Page:50

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Akın Osman ATAGÜN

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. The literature and basic informations about the study have been given in the first and second chapters. In the third chapter, some relations between equiprime near-rings and other kinds of prime near-rings have been examined. The relations between the concepts primeness and primitivity have been investigated. Furthermore, the connections between equiprime and planar near-rings and near-fields have been given.

In the fourth chapter, which consists of an original study, applications of different primeness concepts in near-rings to Malone trivial near-rings have been given. New results have been obtained the effects of properties LSD, RSD, right permutable and left permutable on equiprime, 3-prime and completely prime ideals of near-rings on Malone trivial near-rings.

Keywords: C-prime, Equiprime, LSD, Malone Trivial Near-Ring, Near-Ring, RSD, 3-prime.

TEŞEKKÜR

Yakın Halkaların E-asal İdealleri adlı tez çalışmamda değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN' e bilgileriyle ve desteğiyle beni aydınlattığı için ve bu tezin oluşmasında geçen süreçte bana pozitif bakış açısıyla rehber olduğu için teşekkür ederim.

Tezimin oluşmasında katkısından dolayı Yrd. Doç. Dr. Emin AYGÜN' e teşekkür ederim.

Yardımlarından ve manevi desteklerinden ötürü Araştırma görevlisi Funda TAŞDEMİR' e ve Öğretim görevlisi Aslıhan SEZGİN' e teşekkürlerimi sunarım.

Yaşamımın her anında özveriyle beni destekleyen ebeveynime ve kardeşime teşekkür ederim.

KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ

N	:	Yakın-halka
N_o	:	N yakın-halkasının 0-simetrik kısmı
N_c	:	N yakın-halkasının sabit kısmı
Γ	:	N -grup
$M(\Gamma)$	:	Γ ’dan Γ ’ya tüm fonksiyonların yakın-halkası
$M_o(\Gamma)$	:	Γ ’da sıfırı koruyan tüm fonksiyonların yakın-halkası
$M_c(\Gamma)$	:	Γ ’da tüm sabit fonksiyonların yakın-halkası
N_d	:	N yakın-halkasının dağılmalı kısmı
R	:	Halka
$Hom(N,M)$	:	N ’den M ’ye tüm yakın-halka homomorfizmlerinin cümlesi
0_Γ	:	Γ ’nın sıfır elemanı
$(0:\Gamma)$	:	Γ ’nın sıfırlayanı
(X)	:	X cümlesi tarafından üretilen ideal
$(X)_l$	:	X cümlesi tarafından üretilen sol ideal
$(X)_N$	:	X cümlesi tarafından üretilen N -alt grup
N/I	:	Bölüm yakın-halkası
$D(N)$	:	Dağıtıcı cümle
LSD	:	Sol iç dağılma özelliği
RSD	:	Sağ iç dağılma özelliği

1. GİRİŞ

Yakın-halka kavramından ilk kez, 1905 yılında Dickson [9] bahsetmiştir. Yakın-halkalar, halkaların bir genellemesidir. Çünkü toplama işlemin değişmeli olması gerekli değildir ve daha da önemlisi sadece tek taraftan dağılma kuralı geçerlidir.

Yakın-halkaların asal idealleri üzerine ilk çalışmalar, Van der Walt [20], Laxton [15], Ramakotaiah [17], Beidleman [2] ve Ramakotaiah ve Rao [18] tarafından yapılmıştır.

N bir yakın-halka ve I, N' nin bir ideali olsun.

(a) Eğer A ve B N' nin $AB \subseteq I$ olacak şekildeki idealleri ise, $A \subseteq I$ veya $B \subseteq I$ dır.

(b) Eğer $x, y \in N$ için $xNy \subseteq I$ ise, $x \in I$ veya $y \in I$ olur.

Halkalar veya yarı-grupların asal idealleri üzerine yapılan çalışmalarda, (a) ve (b) koşullarının denk olması, kolaylık açısından önemlidir. Ancak bu koşullar, yakın-halkalar üzerinde denk değillerdir. Ramakotaiah ve Rao [18], (a) koşulunu sağlayan I idealine N yakın-halkasının 0-tipinde asal ideali, (b) koşulunu sağlayan ideale ise 1-tipinde asal ideal adını vermişlerdir. Literatürde bunlar 0-asal ve 3-asal ideal olarak karşımıza çıkmaktadır. Holcombe [14], 1-asal ve 2-asal ideal tanımlarını vermiştir. Booth, Groenewald ve Veldsman [6], halkalardaki asallığın yeni bir genelleştirmesi olan e-asal (equiprime) ideal kavramını tanımlamıştır. Reddy ve Murty [19], yakın-halkaların tam asal ideallerini çalışmışlardır.

Asal ideal tanımları arasındaki ilişkiler yeni çalışmalara konu olmaya devam etmektedir. N bir yakın-halka ve I, N' nin bir ideali olsun. Bu durumda I, e-asal ise 3-asal, 3-asal ise 2-asal ve 1-asal ise 0-asaldır. N sıfır-simetrik iken, 2-asal ise 1-asaldır. Ayrıca I tam asal ise 3-asaldır. Bunların tersleri, N yakın-halkasının sıfır-simetrik olması durumunda dahi doğru değildir [4].

Bu yüksek lisans tezinde, ilk olarak e-asallık kavramının diğer yakın-halka türleriyle ilişkisi incelenmiştir. Ayrıca planar yakın-halka ve yakın cisim kavramlarının e-asallıkla nasıl irtibatlı olduğu gösterilmiştir.

Son bölümde e-asal, 3-asal ve c-asal yakın-halka türlerinin; LSD, RSD, sağ değişme ve sol değişme özellikleri altında Malone aşikar yakın-halkalara uygulamaları incelenmiştir. 0-simetrik, dağılmalı ve medial yakın-halkaların farklı asallık kavramlarıyla birlikte Malone aşikar yakın-halkalarla ilişkisi gösterilmiş ve örneklerle desteklenmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, yakın-halkalar için gerekli temel bilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak yapılar verilecektir. İlk baskısı 1977 ve yenilenmiş baskısı 1983 yıllarında yapılan Günter Pilz'e ait "Near-rings" [16] kitabı, bu bölüm için taban olması açısından temel kaynak olarak gösterilebilir.

2.1. Temel Tanım ve Özellikler

Yakın-halkalar, halkaların bir genellemesidir. Halkalardan ayrılan noktaları; bir yakın-halkada ilk işlem değişmeli olmak zorunda değildir ve ikinci işlemin birinci işlem üzerine tek yönlü dağılma özelliği olması yeterlidir. Bu tanım açık olarak aşağıdaki gibi verilebilir:

Tanım 2.1.1. ([16]) Bir N cümlesi, "+" ve "." şeklinde gösterilen iki ikili işlem ile aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $(N,+,.)$ üçlüsüne bir yakın-halka denir.

a) $(N,+)$ değişmeli olması gerekmeyen bir grup,

b) $(N,.)$ bir yarı grup,

c) $\forall x, y, z \in N$ için $(x+y).z = x.z + y.z$

Burada c) şıkkında sağdan dağılma özelliği verildiğinden, bu şartları sağlayan $(N,+,.)$ üçlüsüne bir sağ yakın-halka denir. Eğer c) şıkkı yerine,

$$\forall x, y, z \in N \text{ için } x.(y+z) = x.y + x.z$$

alınırsa, bu şartları sağlayan $(N,+,.)$ üçlüsüne bir sol yakın-halka denir.

Yani, dağılma özelliğinin yönü, yakın-halkanın sağ veya sol olmasını belirler.

Bu çalışmada, kullanılan her yakın-halka terimi bir sağ yakın-halkayı ifade edecektir. Bazı yakın-halka örnekleri aşağıdadır.

Örnek 2.1.2. $(\Gamma,+)$ herhangi bir grup olsun.

$$M(\Gamma) = \{\, f : \Gamma \to \Gamma \mid f \text{ bir fonksiyon}\}$$

ile tanımlanan bu cümle, fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri altında bir yakın-halkadır.

Örnek 2.1.3. $(N,+)$ bir grup ve $\forall x, y \in N$ için çarpma işlemi;

$$xy = \begin{cases} x, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

ile tanımlanırsa, bu işlemler altında N bir yakın-halkadır. Bu yakın-halka literatürde, bazen, aşikar yakın-halka adıyla karşımıza çıkmaktadır.

Örnek 2.1.4. Her grup için bir yakın-halka elde edilebilir. Gerçekten, eğer $(N,+)$ grubu üzerinde ikinci işlem, $\forall x, y \in N$ için,

$$xy = 0$$

ile tanımlanırsa, $(N,+,\cdot)$ bir yakın-halkadır.

Örnekler 2.1.5. $(\Gamma,+)$ herhangi bir grup ve "0_Γ" ile bu grubun etkisiz elemanı gösterilsin. Bu durumda, fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri altında aşağıdakiler birer yakın-halkadır.

a) $M_0(\Gamma) = \{ f : \Gamma \to \Gamma \mid f(0_\Gamma) = 0_\Gamma \}$

b) $M_c(\Gamma) = \{ f : \Gamma \to \Gamma \mid f \text{ sabit} \}$

c) $M_c^0(\Gamma) = \{ f_\gamma : \Gamma \to \Gamma \mid \gamma \in \Gamma \text{ ve } f_\gamma(\delta) = \begin{cases} 0_\Gamma & ,\delta = 0 \\ \gamma & ,\delta \neq 0 \end{cases} \}$

Özellikler 2.1.6. ([16]) N bir yakın-halka ise aşağıdaki özellikler vardır.

a) $\forall x \in N$ için, $0x = 0$ dır.

b) $\forall x, y \in N$ için, $(-x)y = -xy$ dir.

İspat : a) $\forall x \in N$ için, sağdan dağılma özelliğinden,

$$0x = (0+0)x = 0x + 0x$$

ve dolayısıyla $0x = 0$ bulunur.

b) $\forall x, y \in N$ için, yine sağdan dağılma özelliği kullanılarak,

$$(-x)y = (0-x)y = 0y - xy = 0 - xy = -xy$$

elde edilir.

Not : Bir N yakın-halkasında, her zaman, $\forall x, y \in N$ için $x0 = 0$ ve $x(-y) = -xy$ sağlanmayabilir. Örnek 2.1.2'de tanımlanan $M(\Gamma)$ yakın-halkasında, $f, g \in M(\Gamma)$ için,

$$f \circ 0 = 0$$

olması f 'nin orjinden geçmesiyle ve

$$f \circ (-g) = -(f \circ g)$$

olması ise f 'nin bir tek fonksiyon olması ile mümkündür.

Tanım 2.1.7. ([16]) N bir yakın-halka olsun.

a) $N_0 = \{n \in N \mid n0 = 0\}$ cümlesine N yakın-halkasının 0-simetrik kısmı,

b) $N_c = \{n \in N \mid n0 = n\} = \{n \in N \mid \forall n' \in N \text{ için } nn' = n\}$ cümlesine N yakın-halkasının sabit kısmı denir.

N_0 ve N_c 'de birer yakın-halkadır.

Örnek 2.1.8. ([16]) $(M(\Gamma))_0 = M_0(\Gamma)$ ve $(M(\Gamma))_c = M_c(\Gamma)$ dır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}(M(\Gamma))_0 &= \{f \in M(\Gamma) \mid f \circ 0 = 0\} \\ &= \{f \in M(\Gamma) \mid f(0) = 0\} \\ &= M_0(\Gamma)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(M(\Gamma))_c &= \{f \in M(\Gamma) \mid f \circ 0 = f\} \\ &= \{f \in M(\Gamma) \mid f \text{ sabit}\} \\ &= M_c(\Gamma)\end{aligned}$$

dır.

$N = N_0$ ise N yakın-halkasına 0-simetrik ve $N = N_c$ ise N yakın-halkasına sabit yakın-halka denir. Örnek 2.1.8'den görüleceği gibi, $M_0(\Gamma)$ bir 0-simetrik ve $M_c(\Gamma)$ bir sabit yakın-halkadır.

Teorem 2.1.9. ([8]) Bir N yakın-halkası için $N = N_0 + N_c$ dir.

İspat: $n \in N$ için,

$$[n-(n0)]0 = [n+((-n)0)]0 = n0 + ((-n)0)0 = n0 + (-n)0 = 0$$

Dolayısıyla,

$$n-(n0) \in N_0$$

dır. Aynı zamanda,

$$n0 \in N_c$$

olduğu görülebilir. O halde,

$$n = [n-(n0)] + (n0)$$

olduğundan ispat tamamdır.

$(G,+)$ bir grup, $(N,+)$ ve $(K,+)$'da iki alt grubu olsun. Eğer, $N \cap K = \{0\}$, $N + K = G$ ve $(N,+)$ alt grubu $(G,+)$'da normal ise, $(G,+)$ grubuna $(N,+)$ alt grubunun $(K,+)$ alt grubuyla bir yarı-direkt çarpımı adı verilir.

Sonuç 2.1.10. ([8]) Bir $(N,+,.)$ yakın-halkası için, $(N,+)$ grubu, $(N_0,+)$'nın $(N_c,+)$ ile bir yarı-direkt çarpımıdır.

İspat: $x \in N_0 \cap N_c$ olsun. Bu durumda,

$$x = n0$$

olacak şekilde $n \in N$ vardır ve

$$x0 = 0$$

dır. O halde,

$$0 = x0 = (n0)0 = n(00) = n0 = x$$

yani, $N_0 \cap N_c = \{0\}$ dır. Teorem 2.1.9'dan $N = N_0 + N_c$ dir. Son olarak, $(N_0,+)$'nın $(N,+)$'da normal olduğunu gösterelim. Eğer $m \in N_0$ ve $y \in N$ ise, bu durumda,

$$(y+m-y)0 = (y0) + (m0) + (-y)0 \qquad (1)$$

burada,

$$m0 = 0$$

olduğundan, (1) ifadesi,

$$= (y0) + (-y)0 = 0$$

halini alır. Bu ise, $(N_0,+)$ 'nın $(N,+)$ 'da normal olduğunu gösterir.

Tanım 2.1.11 ([16]) $(N,+,.)$ bir yakın-halka olsun.

a) Eğer $d \in N$ ve $\forall x, y \in N$ için,

$$d(x+y) = dx + dy$$

oluyorsa, $d \in N$ 'ye bir dağılmalı eleman denir. N yakın-halkasının tüm dağılmalı elemanlarının cümlesi N_d ile gösterilir.

b) Eğer $(N,+)$ değişmeli ise N 'ye bir abelyen yakın-halka, $(N,.)$ değişmeli ise, N 'ye bir komutatif yakın-halka, $(N,.)$ birimli ise N 'ye birimli bir yakın-halka denir. Eğer $N = N_d$ ise, N 'ye bir dağılmalı yakın-halka adı verilir.

c) Eğer $(N - \{0\},.)$ bir grup ise, N 'ye bir yakın-cisim denir.

2.2. N-Gruplar

Halkalarda modül kavramının, yakın-halkalara aktarılmasıyla oluşan N-grup, yani N üzerinde yakın-modül kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 2.2.1. ([16]) $(\Gamma,+)$ bir grup ve N bir yakın-halka olsun.

$$\begin{array}{rcl} \mu : N \times \Gamma & \to & \Gamma \\ (n,\gamma) & \to & n\gamma \end{array}$$

alalım. Eğer $\forall x, y \in N$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$(x+y)\gamma = x\gamma + y\gamma$$

ve

$$(xy)\gamma = x(y\gamma)$$

şartları sağlanıyorsa, (Γ, μ) ikilisine bir N-grup, yani N üzerinde yakın-modül denir. Kısaca, N^{Γ} ile gösterilir. Eğer N, birimi 1 olan birimli bir yakın-halka ise, $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$1\gamma = \gamma$$

şartını sağlayan Γ N-grubuna, bir üniter N-grup denir.

Örnekler 2.2.2. a) N bir yakın-halka olsun.

$$\begin{aligned} \mu : N \times N &\to N \\ (x, y) &\to xy \end{aligned}$$

altında $(N,+)$ bir N-gruptur. Bu N-grup, kısaca N^N ile gösterilir.

b) Γ bir grup olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \mu : M(\Gamma) \times \Gamma &\to \Gamma \\ (f, \gamma) &\to f(\gamma) \end{aligned}$$

altında, Γ bir $M(\Gamma)$-gruptur. Gerçekten, $\forall f, g \in M(\Gamma)$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$(f+g)\gamma = (f+g)(\gamma) = f(\gamma) + g(\gamma) = f\gamma + g\gamma$$

ve

$$(fg)\gamma = (fg)(\gamma) = f(g(\gamma)) = f(g\gamma)$$

sağlanır.

N-grup kavramıyla ilgili bazı temel özellikler aşağıdadır.

Özellikler 2.2.3. N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Bu durumda,

a) $\forall \gamma \in \Gamma$ için, $0\gamma = 0_\Gamma$,

b) $\forall \gamma \in \Gamma$ ve $\forall x \in N$ için, $(-x)\gamma = -x\gamma$,

c) $\forall x \in N_0$ için, $x0_\Gamma = 0_\Gamma$,

d) $\forall \gamma \in \Gamma$ ve $\forall n \in N_c$ için, $n\gamma = n0_\Gamma$ dır.

İspat a) $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$0\gamma = (0+0)\gamma = 0\gamma + 0\gamma$$

ve dolayısıyla $0\gamma = 0_\Gamma$ dır.

b) $\forall \gamma \in \Gamma$ ve $\forall x \in N$ için,

$$(-x)\gamma = (0-x)\gamma = 0\gamma - x\gamma = 0_\Gamma - x\gamma = -x\gamma$$

dır.

c) $\forall x \in N_0$ için,

$$x0_\Gamma = x(00_\Gamma) = (x0)0_\Gamma = 00_\Gamma = 0_\Gamma$$

dır.

d) $\forall \gamma \in \Gamma$ ve $\forall n \in N_c$ için,

$$n\gamma = (n0)\gamma = n(00_\Gamma) = n0_\Gamma$$

elde edilir.

2.3. Alt Yapılar

Tanım 2.3.1. N bir yakın-halka ve $(M,+)$ $(N,+)$ 'nın bir alt grubu olsun. Eğer, $\forall m_1, m_2 \in M$ için $m_1 m_2 \in M$ sağlanıyorsa, M 'ye N 'nin bir alt yakın-halkası denir.

Örnek 2.3.2. N_0 ve N_c, N yakın-halkasının alt yakın-halkalarıdır. Gerçekten, $\forall x, y \in N_0$ için,

$$(x - y)0 = x0 - y0 = 0 - 0 = 0$$

yani, $(N_0,+)$ $(N,+)$ 'nın bir alt grubudur. $\forall x, y \in N_0$ için,

$$(xy)0 = x(y0) = x0 = 0$$

dır. O halde $N_0 N_0 \subseteq N_0$ olur. Şimdi, $\forall x, y \in N_c$ için,

$$(x - y)0 = x0 - y0 = x - y$$

yani, $x - y \in N_c$ olur. Bu ise, $(N_c,+)$ grubunun $(N,+)$ 'nın bir alt grubu olduğunu gösterir. $\forall x, y \in N_c$ için,

$$(xy)0 = x(y0) = xy$$

dır. O halde $N_c N_c \subseteq N_c$ elde edilir.

Tanım 2.3.3. N bir yakın-halka ve Γ bir N -grup olsun. Γ 'nın

$$N\Delta \subseteq \Delta$$

şartını sağlayan, bir Δ alt grubuna, Γ 'nın bir N -alt grubu denir ve $\Delta \leq_N \Gamma$ ile gösterilir.

2.4. Homomorfizm ve İdealler

Tanım 2.4.1. N ve M iki yakın-halka ve $h : N \to M$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in N$ için,

$$h(x+y) = h(x) + h(y)$$

ve

$$h(xy) = h(x)h(y)$$

şartları sağlanıyorsa, h dönüşümüne bir yakın-halka homomorfizmi denir.

Tanım 2.4.2. N bir yakın-halka, Γ ve Ψ iki N -grup olsun. Bu durumda, eğer $h : \Gamma \to \Psi$ dönüşümü, $\forall \gamma, \delta \in \Gamma$ için,

$$h(\gamma + \delta) = h(\gamma) + h(\delta)$$

ve

$$h(n\gamma) = nh(\gamma)$$

şartlarını sağlıyorsa, h dönüşümüne bir N -homomorfizm denir.

Bu tanımlarla beraber, monomorfizm, epimorfizm, izomorfizm ve otomorfizm kavramları için, yakın-halka teorisinde farklı bir tanım yoktur. Eğer N yakın-halkasından M yakın-halkasına bir monomorfizm, yani birebir homomorfizm, varsa N yakın-halkası M 'ye gömülebilirdir denir. Aynı tanımlar, N -gruplar için de geçerlidir.

Önerme 2.4.3.([8]) N ve M iki yakın-halka ve $h : N \to M$ yakın-halka homomorfizmi olsun. Bu durumda,

a) $h(N)$ görüntüsü, M 'nin bir alt yakın-halkasıdır.

b) Eğer T , M 'nin bir alt yakın-halkası ise, bu taktirde $h^{-1}(T)$ 'de N 'nin bir alt yakın-halkasıdır.

c) $h(N_0) \subseteq M_0$ dır.

d) $h(N_c) \subseteq M_c$ dir.

e) Eğer h bir izomorfizm ise, h^{-1}'de bir izomorfizmdir.

İspat a) $h(N)$'nin M'nin bir alt grubu olduğu açıktır. Şimdi, $a = h(x), b = h(y) \in h(N)$ alalım. O halde,

$$ab = h(x)h(y) = h(xy) \in h(N)$$

olur. Bu ise, $h(N)$'nin, M'nin bir alt yakın-halkası olduğunu gösterir.

b) T M'nin bir alt yakın-halkası olsun. $h^{-1}(T)$'nin N'nin bir alt grubu olduğu açıktır. Eğer, $h(x), h(y) \in T$ ise,

$$h(xy) = h(x)h(y) \in T$$

yani,

$$xy \in h^{-1}(T)$$

olur. Dolayısıyla $h^{-1}(T)$ N'nin bir alt yakın-halkasıdır.

c) $\forall n_0 \in N_0$ için,

$$h(n_0)0_M = h(n_0)h(0_N) = h(n_0 0_N) = h(0_N) = 0_M$$

olur. Bu ise, $h(N_0) \subseteq M_0$ olduğu anlamına gelir.

d) $\forall n_c \in N_c$ için,

$$h(n_c)0_M = h(n_c)h(0_N) = h(n_c 0_N) = h(n_c)$$

elde edilir. Buradan, $\forall n_c \in N_c$ için, $h(n_c) \in M_c$, yani $h(N_c) \subseteq M_c$ sonucuna ulaşılır.

e) $h : N \to M$ bir izomorfizm olsun. Bu durumda, $h^{-1} : M \to N$ bir grup izomorfizmidir. Şimdi, $u, v \in M$ alalım. Bu durumda, $h(x) = u$ ve $h(y) = v$ olacak şekilde tek $x, y \in N$ elemanları vardır. O halde,

$$h^{-1}(uv) = h^{-1}(h(x)h(y))$$

$$= h^{-1}(h(xy))$$

$$= xy$$

$$= h^{-1}(h(x))h^{-1}(h(y))$$

$$= h^{-1}(u)h^{-1}(v)$$

olur. Bu ise, ispatı tamamlar.

Örnek 2.4.4. N bir yakın-halka ve Γ bir N -grup olsun. Bu durumda, $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$\begin{array}{rcl} h_\gamma : N & \to & \Gamma \\ n & \to & n\gamma \end{array}$$

dönüşümü, bir N -homomorfizmdir.

Tanım 2.4.5.([16]) N bir yakın-halka ve I N 'nin bir normal alt grubu olsun. Bu durumda, eğer,

a) $IN \subseteq I$

b) $\forall x, y \in N$ ve $\forall i \in I$ için, $x(y+i) - xy \in I$

şartları sağlanıyorsa, I 'ya N yakın-halkasının bir ideali denir ve $I < N$ ile gösterilir. Eğer, sadece a) şartı sağlanıyorsa I N 'nin bir sağ ideali, sadece b) şartı sağlanıyorsa I N 'nin bir sol ideali adını alır ve sırasıyla $I <_r N$ ve $I <_l N$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.6. ([16]) N bir yakın-halka ve Γ bir N -grup olsun. Eğer Γ 'nın bir Δ normal alt grubu, $\forall \gamma \in \Gamma$, $\forall \delta \in \Delta$ ve $\forall n \in N$ için,

$$n(\gamma + \delta) - n\gamma \in \Delta$$

şartını sağlıyorsa, Δ 'ya Γ 'nın bir ideali denir ve $\Delta <_N \Gamma$ ile gösterilir.

Not: a) Bir N yakın-halkasının sol idealleri ile N^N 'nin idealleri çakışıktır.

b) N bir yakın-halka ve $I < N$ ise, N/I bölüm yakın-halkası, bölüm halkasında olduğu gibi,

$$N/I = \{n + I \mid n \in N\}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer olarak, Γ bir N -grup ve $\Delta <_N \Gamma$ için, Γ/Δ bölüm N -grubu tanımı verilebilir.

c) $\{0\}$ ve N , N yakın-halkasının idealleridir. Bunlara N 'nin aşikar idealleri denir. Benzer şekilde, $\{0_\Gamma\}$ ve Γ , N yakın-halkasının Γ N -grubunun aşikar idealleridir.

d) N ve M iki yakın-halka ve $h \in Hom(N,M)$ ise,

$$çekh = \{n \in N \mid h(n) = 0_M\}$$

cümlesine h homomorfizminin çekirdeği denir.

Tanım 2.4.7.([16]) Eğer N yakın-halkasının, bir M alt yakın-halkası için, $MN \subseteq M$ ve $NM \subseteq M$ şartları sağlanıyorsa, M N yakın-halkasının bir invaryant alt yakın-halkasıdır denir. Burada N 'nin yönüne göre M sağ ya da sol invaryant alt yakın-halka adını alır.

Örnek 2.4.8.([16]) N bir yakın-halka olsun. Bu durumda,

a) $N_0 <_l N$ dir, fakat $N_0 < N$ olmak zorunda değildir.

b) N_c N 'nin bir invaryant alt yakın-halkasıdır, fakat ne sağ ne de sol ideali olmak zorunda değildir.

Bunların doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

a) $\forall x, y \in N$ ve $n \in N_0$ için,

$$(x+n-x)0 = x0+n0-x0 = x0-x0 = 0$$

yani, N_0 N 'nin bir normal alt grubudur. Şimdi, $\forall x, y \in N$ ve $n \in N_0$ için,

$$[x(y+n)-xy]0 = x(y0+n0)-xy0 = xy0-xy0 = 0$$

olur. Bunun anlamı $\forall x, y \in N$ ve $n \in N_0$ için,

$$x(y+n)-xy \in N_0$$

olmasıdır. Bu ise $N_0 <_l N$ olduğunu gösterir. Şimdi, $N_0 < N$ olmak zorunda olmadığını göstermek için, bir örnek yeterlidir. R reel sayılar cümlesi ve $N = M(R)$

olsun. $1 \in M(R)$ ile birim dönüşüm gösterilirse, $1 \in N_0 = M_0(R)$ dir. $\phi \in M(R)$ dönüşümü,

$$\begin{aligned} \phi : R &\to R \\ x &\to 1_R \end{aligned}$$

ile tanımlansın. Bu durumda,

$$(1 \circ \phi)(0) = 1(1_R) = 1_R$$

yani,

$$1 \circ \phi \notin M_0(R) = N_0$$

olur. Bu ise, $M_0(R)$ 'nin $M(R)$ 'nin bir ideali olmadığını gösterir.

b) $\forall x \in N$ ve $\forall n \in N_c$ için,

$$(xn)0 = x(n0) = xn$$

yani, $NN_c \subseteq N_c$ dir. Yine, $\forall x \in N$ ve $\forall n \in N_c$ için,

$$(nx)0 = n0 = n = nx$$

olduğundan, $N_c N \subseteq N_c$ olur. O halde N_c N 'nin bir invaryant alt yakın-halkasıdır. N_c N 'nin genelde ne sağ ne de sol idealidir, çünkü $(N_c,+)$ $(N,+)$ 'nın genelde bir normal alt grubu değildir. Örneğin, $(\Gamma,+)$ abelyen olmayan bir grup ve $\gamma, \delta \in \Gamma$ elemanları $\gamma + \delta \neq \delta + \gamma$ olacak şekilde seçilsin. Şimdi, bir f_γ dönüşümü

$$\begin{aligned} f_\gamma : \Gamma &\to \Gamma \\ x &\to \gamma \end{aligned}$$

ile tanımlansın. Bu durumda, $f_\gamma \in M_c(\Gamma)$ 'dır. $1 \in M(\Gamma)$ birim dönüşüm ise, bu durumda,

$$(1 + f_\gamma - 1)(0_\Gamma) = 0_\Gamma + \gamma - 0_\Gamma = \gamma$$

olur, fakat

$$(1 + f_\gamma - 1)(\delta) = \delta + \gamma - \delta \neq \gamma$$

dır. Bu ise,

$$1+f_{\gamma}-1 \notin M_c(\Gamma)$$

olduğunu gösterir. Buradan, $M_c(\Gamma)$, $M(\Gamma)$'nın bir normal alt grubu değildir. O halde, $M_c(\Gamma)$'nın $M(\Gamma)$'da normal olması için gerek ve yeter şart Γ'nın bir abel grubu olmasıdır.

Özellikler 2.4.9. ([16]) N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Bu durumda;

a) $L <_l N$ ise $N_0 L \subseteq L$ dir.

b) $N = N_0$ olması için gerek ve yeter şart N yakın-halkasının her bir sol idealinin N^N'nin bir N-alt grubu olmasıdır.

c) $N = N_0$ ise, Γ N-grubunun her Δ ideali, Γ'nın bir N-alt grubudur.

d) $\forall \gamma \in \Gamma$ için, $N\gamma \leq_N \Gamma$ dır. Yani, $\forall \gamma \in \Gamma$ için, $N\gamma$ Γ N-grubunun bir N-alt grubudur.

e) $\forall \Delta \leq_N \Gamma$ için, $N0_{\Gamma} = N_c 0_{\Gamma} \subseteq \Delta$ dır. Dolayısıyla, $N0_{\Gamma} = N_c 0_{\Gamma}$ Γ N-grubunun tüm N-alt grupları içerisinde en küçük olanıdır.

Tanım 2.4.10. ([16]) N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. N'nin (Γ'nın) aşikar olmayan ideali yoksa, N'ye (Γ'ya) basittir denir. Eğer Γ'nın $N0_{\Gamma}$ ve Γ dışında N-alt grubu yoksa, Γ'ya N-basittir denir.

$\{0\}$ ideali, bir N yakın-halkasının tüm ideallerinin cümlesinde daima minimal olduğundan, aşağıdaki tanımlar halka teorisinde olduğu gibidir.

Tanım 2.4.11. ([16]) N bir yakın-halka olsun. N'nin tüm sıfırdan farklı ideallerinin cümlesinde minimal olan ideale N'nin minimal ideali denir.

Benzer olarak, minimal sağ ve sol ideal tanımları verilebilir. Bu tanımların dualleri maksimal ideal tanımlarıdır.

Tanım 2.4.12. ([16]) N bir yakın-halka, Γ bir N-grup, Δ_1 ve Δ_2 Γ'nın herhangi iki alt cümlesi olsun. Bu durumda,

$$(\Delta_1 : \Delta_2)_N = \{n \in N \mid n\Delta_2 \subseteq \Delta_1\}$$

ile verilir. $\gamma \in \Gamma$ için, kısalık açısından, $(\{\gamma\} : \Delta) = (\gamma : \Delta)$ alınacaktır.

$$(0_\Gamma : \Delta)_N = \{n \in N \mid n\Delta \subseteq \{0_\Gamma\}\}$$

cümlesine $\Delta \subseteq \Gamma$'nın sıfırlayanı denir. Herhangi bir karışıklık içermeyen durumlarda, bu cümle $(0 : \Delta)$ ile gösterilecektir.

Özellikler 2.4.13. ([16]) N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Bu durumda;

a) Eğer Δ_1 Γ'nın herhangi bir alt grubu (normal alt grubu, N-alt grubu, ideali) ise, $(\Delta_1 : \Delta_2)$ cümlesi de, N^N'nin bir alt grubu (normal alt grubu, N-alt grubu, ideali) olur. Burada Δ_2 Γ'nın herhangi bir alt cümlesidir.

b) $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$(0 : \gamma) <_l N$$

dir.

c) $\forall \Delta \leq_N \Gamma$ için,

$$(0 : \Delta) < N$$

dir.

d) Δ, Δ_i $(i \in I)$ Γ'nın alt cümleleri olsunlar. Bu durumda,

$$\bigcap_{i \in I} (\Delta_i : \Delta) = (\bigcap_{i \in I} \Delta_i : \Delta)$$

ve

$$\bigcup_{i \in I} (\Delta_i : \Delta) \subseteq (\bigcup_{i \in I} \Delta_i : \Delta)$$

dır.

e) $\Delta \subseteq \Gamma$ ise,

$$(0 : \Delta) = \bigcap_{\delta \in \Delta} (0 : \delta) \text{ dır.}$$

f) N yakın-halkasının, herhangi iki Γ ve Γ' N-grupları N-izomorfik ise, bu durumda,

$$(0_\Gamma : \Gamma) = (0_{\Gamma'} : \Gamma')$$

dır.

Tanım 2.4.14. ([16]) N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Bu durumda, eğer $(0_\Gamma : \Gamma) = 0$ ise, Γ 'ya bir faithful N-grup denir.

Özellikler 2.4.15. ([16]) N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Eğer, Γ N 'nin bir faithful N-grubu ise, bu durumda;

a) Eğer Γ abelyen bir grup ise, N yakın-halkası da abelyendir.

b) Eğer $\forall n \in N$ ve $\forall \gamma, \delta \in \Gamma$ için,

$$n(\gamma + \delta) = n\gamma + n\delta$$

oluyorsa, bu taktirde $N = N_d$ dir.

Teorem 2.4.16. ([12]) Her N yakın-halkası için, N yakın-halkası $M(\Gamma)$ yakın-halkasına gömülebilir olacak şekilde en az bir Γ grubu vardır.

İspat: Γ, $(N,+)$ grubunu ihtiva eden bir grup olsun. $x \in N$ için,

$$\begin{aligned} f_x : \Gamma &\rightarrow \Gamma \\ \gamma &\rightarrow \begin{cases} x\gamma & ,\gamma \in N \\ x & ,\gamma \notin N \end{cases} \end{aligned}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda, $\forall x, y \in N$ için,

$$f_x + f_y = f_{x+y}$$

ve

$$f_x \circ f_y = f_{xy}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. O halde,

$$\begin{aligned} h : N &\rightarrow M(\Gamma) \\ x &\rightarrow f_x \end{aligned}$$

dönüşümü bir yakın-halka homomorfizmidir. Eğer

$$h(x) = h(y)$$

ise,

$$f_x = f_y$$

dir. Özel olarak, $\forall \gamma \in \Gamma - N$ için,

$$x = f_x(\gamma) = f_y(\gamma) = y$$

elde edilir. Buradan, h dönüşümü bir yakın-halka monomorfizmi, yani N yakın-halkası $M(\Gamma)$ yakın-halkasına gömülebilirdir.

Bu teoremin bir çok kullanışlı sonucu vardır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Sonuç 2.4.17. ([16]) N bir yakın-halka olsun.

a) Eğer N abelyen ise, N yakın-halkası $M(\Gamma)$ yakın-halkasına gömülebilir olacak şekilde bir Γ abel grubu vardır.

b) Eğer N sonlu ise, N yakın-halkası $M(\Gamma)$ yakın-halkasına gömülebilir olacak şekilde bir Γ sonlu grubu vardır.

c) Eğer N sıfır-simetrik ise, N yakın-halkası $M_0(\Gamma)$ yakın-halkasına gömülebilir olacak şekilde bir Γ grubu vardır.

d) Eğer N sabit bir yakın-halka ise, N yakın-halkası $M_c(\Gamma)$ yakın-halkasına gömülebilir olacak şekilde bir Γ grubu vardır.

3. YAKIN-HALKALARIN ASAL VE PRİMİTİF İDEALLERİ

Van der Walt [20] ve Ramakotaiah [17] ilk kez yakın-halkalar için asal ideal kavramından bahsetmiştir.

N bir yakın-halka ve $A, B \subseteq N$ olsun. Bu durumda,

$$AB = \{ ab \mid a \in A, b \in B \}$$

ile tanımlanmıştır. Buradan bir n doğal sayısı için, A^n tanımı açıktır. N bir yakın-halka ve $A, B < N$ olsun. Bu durumda, AB çarpımı bir ideal olmayabilir. Hatta bu çarpım, $(N,+)$ grubunun bir alt yarı grubu dahi olmak zorunda değildir.

3.1. 0-Asal İdealler

Tanım 3.1.1. ([20]) N bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Eğer $\forall I, J < N$ için, $IJ \subseteq P$ olması, $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda P'ye N yakın-halkasının bir 0-asal ideali denir.

N bir yakın-halka ve $A \subseteq N$ olsun. (A) ile N'nin A cümlesi tarafından üretilen ideali gösterilmiştir. Kısalık açısından, bir $n \in N$ için, $(\{n\})$ yerine (n) gösterimi kullanılmıştır.

Aşağıdaki önerme 0-asal ideal kavramının bazı denkliklerini vermektedir.

Önerme 3.1.2. ([20]) N bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

a) P bir asal idealdir.

b) $\forall I, J < N$ için, $(IJ) \subseteq P$ olması, $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ olmasını gerektirir.

c) $\forall i, j \in N$ için, $i \notin P$ ve $j \notin P$ ise, $(i)(j) \not\subset P$ dir.

d) $\forall I, J < N$ için, $I \supset P$ ve $J \supset P$ ise, $IJ \not\subset P$ dir.

e) $\forall I, J < N$ için, $I \not\subset P$ ve $J \not\subset P$ ise, $IJ \not\subset P$ dir

İspat a)$\Leftrightarrow$ b) : $P < N$ asal ve $\forall I, J < N$ için, $(IJ) \subseteq P$ olsun.

$IJ \subseteq (IJ) \subseteq P$

ve P asal olduğundan, Tanım 3.1.1'den $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ dir. Dolayısıyla b) $\Rightarrow$a) durumu da elde edilmiş olur. a) $\Leftrightarrow$e)'nin ispatı da yine Tanım 3.1.1'den açıktır.

a)$\Rightarrow$c) : $P < N$ asal ve $(i)(j) \subseteq P$ olsun. Bu durumda, P asal olduğundan $(i) \subseteq P$ veya $(j) \subseteq P$ dir. Dolayısıyla $i \in P$ veya $j \in P$ elde edilir.

c)$\Rightarrow$d) : Kabul edelim ki c) sağlansın ve $I \supset P$ ve $J \supset P$ olacak şekilde $I, J < N$ bulunsun. $i \in I - P$ ve $j \in J - P$ alalım. Bu durumda,

$$(i)(j) \not\subset P$$

ve dolayısıyla

$$IJ \not\subset P$$

elde edilir.

d)$\Rightarrow$e) : Kabul edelim ki (d) sağlansın ve $\forall I, J < N$ için, $I \not\subset P$ ve $J \not\subset P$ olsun. $i \in I - P$ ve $j \in J - P$ alalım. Bu durumda,

$$(i) + P \supset P$$

ve

$$(j) + P \supset P$$

dir. O halde (d)'den,

$$((i) + P)((j) + P) \not\subset P$$

dir. Dolayısıyla,

$$(i' + p)(j' + p') \notin P$$

olacak şekilde $\exists i' \in (i), \exists j' \in (j)$ ve $\exists p, p' \in P$ vardır. Buradan,

$$i'(j' + p') - i'j' + i'j' + p(j' + p') \notin P$$

olur. Fakat $P < N$ olduğundan,

$$i'(j' + p') - i'j' \in P$$

ve

$$p(j' + p') \in P$$

dir. Bu durumda,

$$i'j' \notin P$$

olmalıdır. Bu ise,

$$IJ \not\subset P$$

olduğunu gösterir.

Tanım 3.1.3. ([10]) N bir yakın-halka olsun. Eğer N 'nin sıfır ideali asal ise N 'ye bir asal yakın-halka denir.

Örnek 3.1.4. ([16]) Eğer N bir sabit yakın-halka ($N = N_c$) ise, bu taktirde $(N,+)$ 'nın her normal alt grubu bir asal idealdir. O halde her bir sabit yakın-halka, bir asal yakın-halkadır.

Önerme 3.1.5. ([16]) N bir yakın-halka olsun. Eğer N bir basit yakın-halka ise, bu durumda N ya bir asal yakın-halka ya da bir sıfır-yakın-halkadır.

İspat: Eğer N bir basit yakın-halka ise, sıfır ve kendisinden başka ideali yoktur. O halde, asal ideallik tanımından,

$$\{0\}N = \{0\},\ \{0\}\{0\} = \{0\},\ N\{0\} = \{0\}$$

veya

$$NN = \{0\}$$

durumları olabilir. Buradan ya $\{0\}$ bir asal ideal ya da $N = \{0\}$ olduğu görülür.

3.1.1. Yarı-asal İdealler

Tanım 3.1.1.1. ([16]) N bir yakın-halka ve $I < N$ olsun. Eğer $\forall J < N$ için, $J^2 \subseteq I$ olması $J \subseteq I$ olmasını gerektiriyorsa, I 'ya N yakın-halkasının bir yarı-asal ideali denir.

Asal ideal ve yarı-asal ideal tanımlarından da görüleceği gibi, her asal ideal aynı zamanda yarı-asaldır. Aşağıdaki önerme ile yarı-asal tanımına denk kavramlar Önerme 3.1.2'ye benzer şekilde verilmiştir.

Önerme 3.1.1.2. ([16]) N bir yakın-halka ve $I < N$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

a) I bir yarı-asal idealdir.

b) $\forall J < N$ için, $(J^2) \subseteq I$ ise $J \subseteq I$ dır.

c) $\forall n \in N$ için, $(n)^2 \subseteq I$ ise $n \in I$ dır.

d) $\forall J < N$ için, $J \supset I$ ise $J^2 \not\subset I$ dır.

e) $\forall J < N$ için, $J \not\subset I$ ise $J^2 \not\subset I$ dır.

Bu önermenin ispatı, Önerme 3.1.2'nin ispatıyla benzer olduğundan ihmal edilmiştir

Tanım 3.1.1.3. ([16]) N bir yakın-halka olsun. Eğer N ’nin sıfır ideali yarı-asal ise N ’ye bir yarı-asal yakın-halka denir.

Lemma 3.1.1.4. ([10]) N bir yakın-halka ve $X \subseteq N$ olsun. Eğer N 0-simetrik, I ve P, N ’nin $XI \subseteq P$ olan idealleri ise, bu durumda $(X)I \subseteq P$ dir.

İspat: $XI \subseteq P$ ise, $X \subseteq (P:I) = \{n \in N \mid nI \subseteq P\} < N$ dir. Gerçekten, $(P:I)$ ’nın N 'nin bir normal alt grubu olduğu kolaylıkla görülebilir. Şimdi ideallik şartlarının sağlandığını gösterelim. $\forall n, n' \in N$, $\forall a \in (P:I)$ ve $\forall i \in I$ için,

$$[n(n'+a) - nn']i = n(n'i + ai) - n(n'i)$$

burada $ai \in P$ ve P, N ’nin ideali olduğundan,

$$[n(n'+a) - nn']i \in P$$

yani,

$$n(n'+a) - nn' \in (P:I)$$

dır. Bu $(P:I)$ ’nın bir sol ideal olduğunu gösterir. Şimdi, $\forall n \in N$, $\forall a \in (P:I)$ ve $\forall i \in I$ için,

$$(an)i = a(ni)$$

burada, $I < N$ ve N 0-simetrik olduğundan,

$$ni = n(i+0) - n0 \in I$$

o halde,

$$(an)i = a(ni) \in P$$

yani,

$$an \in (P:I)$$

dır. O halde $(P:I)$ N yakın-halkasının bir idealidir. Dolayısıyla,

$$(X) \subseteq (P:I)$$

yani,

$$(X)I \subseteq P$$

dir.

Teorem 3.1.1.5. ([10]) N 0-simetrik bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Bu durumda P ’nin asal ideal olması için gerek ve yeter şart $a(b) \subseteq P$ olacak şekilde ki $\forall a, b \in N$ için $a \in P$ veya $b \in P$ olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki, P asal ve $a,b \in N$ için $a(b) \subseteq P$ olsun. Bu durumda Lemma 3.1.1.8'den,

$$(a)(b) \subseteq P$$

dir. Bu durumda, P asal olduğundan $(a) \subseteq P$ veya $(b) \subseteq P$ olur. O halde buradan, $a \in P$ veya $b \in P$ elde edilir.

Kabul edelim ki $a(b) \subseteq P$ olacak şekilde ki $\forall a,b \in N$ için $a \in P$ veya $b \in P$ olsun. $a(b) \subseteq P$ ise yine Lemma 3.1.1.4'den

$$(a)(b) \subseteq P$$

dir. Burada kabul ile birlikte $(a)(b) \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ olma durumu karşımıza çıkar. O halde Önerme 3.1.2'den P asaldır.

3.2. 1-Asal İdealler

Tanım 3.2.1. ([14]) N bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Eğer N yakın-halkasının A ve B sol idealleri için, $AB \subseteq P$ olması $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ olmasını gerektiriyorsa, P'ye N'nin bir 1-asal ideali denir.

Lemma 3.2.2. N bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Bu durumda P 1-asal ise, 0-asaldır.

İspat: $P < N$ 1-asal ve $A, B < N$ için, $AB \subseteq P$ olsun. A ve B aynı zamanda N yakın-halkasının sol idealleri ve P 1-asal olduğundan, Tanım 3.2.1'den $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$, yani P 0-asaldır.

Tanım 3.2.3. ([10]) N bir yakın-halka olsun. Eğer N'nin sıfır-ideali 1-asal ise N'ye 1-asal yakın-halka denir.

Lemma 3.2.2 ile 1-asallığın 0-asallığı gerektirdiği verilmişti. Aşağıdaki örnekle 0-asallığın 1-asallığı gerektirmediği gösterilebilir.

Örnek 3.2.4. ([7]) $(\Gamma,+)$ bir sonlu grup ve $\emptyset \neq \Delta$ Γ'nın aşikar olmayan bir alt grubu olsun.

$$M_0(\Gamma) = \{ f : \Gamma \to \Gamma \mid f(0) = 0 \}$$

yakın-halkasını düşünelim.

$$K = \{ f \in M_0(\Gamma) \mid f(\Delta) \subseteq \Delta \}$$

alınırsa, K $M_0(\Gamma)$ 'nın bir alt yakın-halkasıdır. K 'nın kendisinden ve sıfırdan farklı tek ideali,

$$A = (0:\Delta)_K = \{k \in K \mid k\Delta = 0\}$$

dır. $A^2 \neq 0$ olduğundan, K 0-asal yakın-halkadır. K 'nın kendisinden farklı tek 1-asal ideali A 'dır. Dolayısıyla, K 'nın sıfır-ideali 1-asal değil, yani K 1-asal bir yakın-halka değildir.

Aşağıda, 1-asal yakın-halkalar için bir örnek verilmiştir.

Örnek 3.2.5. ([7]) N, Klein-4-grup $\{0,1,2,3\}$ üzerinde, $\forall x, y \in N$ için, ikinci işlemi

$$xy = \begin{cases} x & , y = 3 \\ 0 & , y \neq 3 \end{cases}$$

ile tanımlanan bir yakın-halka olsun. N 'nin tüm sol idealleri, $\{0\}$ ve N 'dir. $N^2 \neq 0$ olduğundan, $\{0\}$ N 'nin 1-asal ideali, yani N 1-asal bir yakın-halkadır.

Lemma 3.2.6. ([10]) N bir yakın-halka, $X \subseteq N$, $I <_l N$ ve $P < N$ olsun. Eğer $XI \subseteq P$ ise $(X)_l I \subseteq P$ dir. Burada $(X)_l$, N yakın-halkasının $X \subseteq N$ tarafından üretilen sol idealini göstermektedir.

İspat: $XI \subseteq P$ ise, $X \subseteq (P:I) = \{n \in N \mid nI \subseteq P\} <_l N$ dir. Gerçekten, $(P:I)$ 'nın N 'nin bir normal alt grubu olduğu kolaylıkla görülebilir. Şimdi sol ideallik şartının sağlandığını gösterelim. $\forall n, n' \in N$, $\forall a \in (P:I)$ ve $\forall i \in I$ için,

$$[n(n'+a) - nn']i = n(n'i + ai) - n(n'i)$$

burada $ai \in P$ ve $P < N$ olduğundan,

$$n(n'+a) - nn' \in (P:I)$$

elde edilir. Bu ise, $(P:I) <_l N$ olduğu anlamına gelir. O halde

$$(X)_l \subseteq (P:I)$$

yani,

$$(X)_l I \subseteq P$$

elde edilir.

Teorem 3.2.7. ([10]) N bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Bu durumda, P 'nin 1-asal olması için gerek ve yeter şart $a(b)_l \subseteq P$ olacak şekilde ki $\forall a, b \in N$ için, $a \in P$ veya $b \in P$ olmasıdır.

İspat: P 1-asal ve $a, b \in N$ için $a(b)_l \subseteq P$ olsun. Lemma 3.2.6'dan,

$$(a)_l (b)_l \subseteq P$$

dir. P 1-asal olduğundan, $(a)_l \subseteq P$ veya $(b)_l \subseteq P$ dır. Dolayısıyla $a \in P$ veya $b \in P$ elde edilir. Şimdi kabul edelim ki, $a(b)_l \subseteq P$ olacak şekilde ki $\forall a, b \in N$ için, $a \in P$ veya $b \in P$ olsun. Yine Lemma 3.2.6'dan,

$$(a)_l (b)_l \subseteq P$$

dir. O halde $(a)_l (b)_l \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ elde edilmiş olur. Kabul edelim ki, A ve B N yakın-halkasının $A \supset P$ ve $B \supset P$ olacak şekilde iki sol ideali olsun. $a' \in A - P$ ve $b' \in B - P$ alalım. Bu durumda,

$$(a')_l (b')_l \not\subseteq P$$

ve dolayısıyla

$$AB \not\subseteq P$$

elde edilir. O halde P 1-asaldır.

3.3. 2-Asal İdealler

Tanım 3.3.1. ([11]) N bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Eğer N 'nin $AB \subseteq P$ olacak şekilde ki her A ve B N-alt grupları için, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa, P 'ye N 'nin bir 2-asal ideali denir.

Eğer N 'nin sıfır-ideali 2-asal ise, N 'ye bir 2-asal yakın-halka adı verilir.

Lemma 3.3.2. ([7]) N 0-simetrik bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Eğer P 2-asal bir ideal ise, bu durumda P 1-asaldır.

İspat: N 0-simetrik, $P < N$ 2-asal ve $A, B <_l N$ için $AB \subseteq P$ olsun. N yakın-halkası 0-simetrik olduğunda, N 'nin her sol idealinin, aynı zamanda N 'nin bir N-alt grubu olduğunu gösterelim. $A <_l N$ için, sol ideallik tanımından, $(A,+)$ $(N,+)$ 'nın bir alt grubudur. Şimdi, $NA \subseteq A$ olduğunu göstermeliyiz. $A <_l N$ olduğundan, $\forall n \in N$ ve $\forall a \in A$ için,

$$na = n(a+0) - n0 \in A$$

dır. Dolayısıyla $A \leq_N N$ dir. O halde, $AB \subseteq P$ ve $A, B \leq_N N$ dir. P 2-asal olduğundan, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. O halde, P 1-asaldır.

N yakın-halkasının 0-simetrik olma şartı Lemma 3.3.2'de ihmal edilemez. $P < N$ 0-simetrik olmayan bir N yakın-halkasının, 2-asal bir ideali olsun. Bu durumda P 1-asal olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnekle bunu gösterelim:

Örnek 3.3.3. ([7]) N Klein-4-grup üzerinde, çarpma işlemi aşağıdaki tablo ile verilen bir yakın-halka olsun.

.	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	0	0	0	2
3	1	1	1	3

Bu durumda N'nin tüm N-alt grupları N ve $I = \{0,1\}$ dir. $I^2 \neq \{0\}$ olduğundan, N 2-asal bir yakın-halkadır. Fakat, $J = \{0,2\} <_l N$ ve $J^2 = \{0\}$, dolayısıyla N 1-asal bir yakın-halka değildir.

Bu durumun tersi genelde doğru değildir. Yani, 0-simetriklik durumu olsa dahi, bir yakın-halkada 1-asallık 2-asallığı gerektirmez.

Örnek 3.3.4. ([7]) N, Klein-4-grup $\{0,1,2,3\}$ üzerinde, $\forall x, y \in N$ için, ikinci işlemi

$$xy = \begin{cases} x, & y = 3 \\ 0, & y \neq 3 \end{cases}$$

ile tanımlanan bir yakın-halka olsun. Örnek 3.2.5'den N yakın-halkası 1-asaldır. $I = \{0,1\}$ N'nin $I^2 = \{0\}$ olan bir N-alt grubudur. Dolayısıyla, N 2-asal bir yakın-halka değildir.

Lemma 3.3.5. ([7]) N bir yakın-halka, $X \subseteq N$ sol invaryant ($NX \subseteq X$), $A \subseteq N$ ve $P < N$ olsun. Eğer, $AX \subseteq P$ ise $(A)X \subseteq P$ dir.

İspat: $AX \subseteq P$ ise, $A \subseteq (P : X)_N$ dir. $(P : X)_N < N$ olduğunu gösterelim. $\forall n, n' \in N$, $\forall a \in (P : X)_N$ ve $\forall x \in X$ için,

$$[n(n'+a) - nn']x = n(n'x + ax) - n(n'x) \in P$$

dir, çünkü $ax \in P$ ve $P < N$ dir. O halde,

$$n(n'+a) - nn' \in (P : X)_N$$

dir. Şimdi, $\forall n \in N$, $\forall a \in (P : X)_N$ ve $\forall x \in X$ için, $NX \subseteq X$ ve $P < N$ olduğundan,

$$anx = a(nx) \in P$$

olur. Yani, $(P : X)_N N \subseteq (P : X)_N$ elde edilir. Dolayısıyla, $(P : X)_N < N$ dir. O halde, $(A) \subseteq (P : X)_N$ ve buradan $(A)X \subseteq P$ elde edilir.

N bir yakın-halka ve $X \subseteq N$ olsun. N yakın-halkasının X tarafından üretilen N-alt grubu $(X)_N$ ile gösterilecektir.

Lemma 3.3.6. ([10]) N 0-simetrik bir yakın-halka, $X \subseteq N$, $A \leq_N N$ ve $P < N$ olsun. Eğer, $XA \subseteq P$ ise, $(X)_N A \subseteq P$ dir.

İspat: $XA \subseteq P$ olduğundan, $X \subseteq (P : A)_N$ dir. $(P : A)_N \leq_N N$ olduğunu gösterelim. $\forall u, v \in (P : A)_N$ ve $\forall a \in A$ için,

$$(u - v)a = ua - va \in P$$

olduğundan,

$$u - v \in (P : A)_N$$

yani, $(P : A)_N$ N nin bir alt grubudur. Şimdi, $\forall u \in (P : A)_N$, $\forall n \in N$ ve $\forall a \in A$ için,

$$(nu)a = n(ua) = np$$

olacak şekilde en az bir $p \in P$ vardır. Burada $P < N$ ve N 0-simetrik olduğundan,

$$np = n(p + 0) - n0 \in P$$

yani,

$$(nu)a \in P$$

olur. O halde,

$$N(P : A)_N \subseteq (P : A)_N$$

dir. Dolayısıyla, $(P : A)_N \leq_N N$ elde edilir. Buradan $(X)_N \subseteq (P : A)_N$, yani $(X)_N A \subseteq P$ sonucuna ulaşılır.

Teorem 3.3.7. ([10]) N 0-simetrik bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Bu durumda, P nin 2-asal olması için gerek ve yeter şart $a(b)_N \subseteq P$ olacak şekilde $a,b \in N$ için, $a \in P$ veya $b \in P$ olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki, P 2-asal ve $a,b \in N$ için, $a(b)_N \subseteq P$ olsun. Lemma 3.3.6 dan,

$$(a)_N (b)_N \subseteq P$$

dir. Burada P 2-asal olduğundan, $(a)_N \subseteq P$ veya $(b)_N \subseteq P$, yani $a \in P$ veya $b \in P$ elde edilir. Şimdi, $a(b)_N \subseteq P$ olacak şekilde $a,b \in N$ için, $a \in P$ veya $b \in P$ olsun. Kabul altında, Lemma 3.3.6'dan $(a)_N (b)_N \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ olur. N yakın-halkasının $A \supset P$ ve $B \supset P$ olan iki N-alt grubunu alalım. $a' \in A - P$ ve $b' \in B - P$ olacak şekilde, a' ve b' elemanları vardır. Bu durumda, $(a')_N (b')_N \not\subseteq P$ ve dolayısıyla, $AB \not\subseteq P$ elde edilir. O halde P 2-asaldır.

Lemma 3.3.8. N 0-simetrik bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Bu durumda, P nin 2-asal olması için gerek ve yeter şart $(a)_N (b)_N \subseteq P$ olacak şekilde $a,b \in N$ için, $a \in P$ veya $b \in P$ olmasıdır.

3.4. 3-Asal İdealler

Tanım 3.4.1. ([10]) N bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Eğer, $aNb \subseteq P$ olacak şekildeki $\forall a,b \in N$ için, $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa, P ye N nin bir 3-asal ideali denir. Eğer N nin sıfır-ideali 3-asal ise, N ye bir 3-asal yakın-halka denir.

Önerme 3.4.2. ([7]) N 0-simetrik bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. P'nin 3-asal olması için gerek ve yeter şart P'nin 2-asal olmasıdır.

İspat: $P < N$ 3-asal ve $a,b \in N$ için $aNb \subseteq P$ olsun. Lemma 3.3.8 den yola çıkarak;

$b \notin P$ ve P, 3-asal olduğundan $bNb \not\subset P$ elde edilir.

$bNb \subseteq (b)_N N(b)_N \not\subset P$ olması P'nin 2-asal olduğunu kanıtlar.

Şimdi $P < N$ 2-asal olsun. $aNb \subseteq P$ olacak şekilde $a,b \in N$ alalım.

Lemma 3.3.6'dan $(a)_N Nb \subseteq P$ alınır.

$(a)_N (b)_N \subseteq (a)_N Nb \subseteq P$ den $a \in P$ veya $b \in P$ elde edilir. Böylece P, 3-asaldır.

Sonuç 3.4.3. N 0-simetrik bir yakın-halka ve $P < N$ 3-asal olsun. Bu durumda P 1-asal ve dolayısıyla 0-asaldır.

İspat: Önerme 3.4.2, Lemma 3.3.2 ve Lemma 3.2.2 kullanılarak ispat görülür.

Bir N yakın-halkasının bir 2-asal ideali, aynı zamanda 3-asal olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnek bunu kanıtlar.

Örnek 3.4.4. ([7]) N $Z_3 = \{0,1,2\}$ grubu üzerinde çarpma işlemi $\forall x, y \in Z_3$ için,

$$xy = \begin{cases} x, & y = 2 \\ 0, & y \neq 2 \end{cases}$$

ile tanımlanan bir yakın-halka olsun. Bu durumda N nin tüm N -alt grupları sadece $\{0\}$ ve N dir. $N^2 \neq \{0\}$ olduğundan, N 2-asal bir yakın-halkadır. Fakat,

$$1N1 = \{0\}$$

dolayısıyla N bir 3-asal yakın-halka değildir.

3.5. Tam-Asal İdealler

Tanım 3.5.1. ([4]) N bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Eğer $ab \in P$ olacak şekildeki $\forall a, b \in N$ için, $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa, P ye N nin bir tam asal ideali denir. Eğer N yakın-halkasının sıfır-ideali tam asal ise, N ye bir tam asal yakın-halka denir.

Tam asallık kavramı "2-tipinde asal ideal" adıyla ilk kez 1979 yılında tanımlanmıştır [18].

Örnek 3.5.2. ([7]) $(N,+)$ mertebesi ≥ 3 olan bir grup olsun ve N üzerinde çarpma işlemi, $\forall x, y \in N$ için,

$$xy = \begin{cases} x, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu durumda, N yakın-halkasının sıfır-ideali düşünülür ve çarpma işleminin tanımı göz önüne alınırsa, $xy = 0$ olacak şekilde $\forall x, y \in N$ için, $x = 0$ veya $y = 0$ olduğu görülür. O halde N bir tam asal yakın-halkadır.

Önerme 3.5.3. N bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Eğer P tam asal ise 3-asaldır.

İspat: $a, b \in N$ için $aNb \subseteq P$ olsun. O halde

$$aab \in P$$

dir. Burada P tam asal olduğundan $a \in P$ veya $b \in P$ elde edilir. Dolayısıyla P 3-asaldır.

3.6. E-Asal İdealler

E-asal idealler ilk olarak 1990 yılında tanımlanmış olup bir halka üzerinde e-asallık ile asallık kavramı birbirine denktir [6].

Tanım 3.6.1. ([6]) N bir yakın-halka olsun. Aşağıdaki koşullar altında N ye bir e-asal yakın-halka adı verilir.

a) Sıfırdan farklı $\forall x, y \in N$ için, $xNy \neq 0$ ve

b) Eğer $x, y \in N$ ve $0 \neq A \; N$ nin bir invaryant alt grubu ise, $\forall a \in A$ için $ax = ay$ iken $x = y$.

Eğer $P < N$ ve N/P bir e-asal yakın-halka ise, P ye N nin bir e-asal ideali denir.

Aşağıdaki lemma ile, e-asallık için alternatif bir tanım verilmiştir.

Lemma 3.6.2. ([6]) N bir yakın-halka olsun. Bu durumda, aşağıdakiler denktir:

a) N bir e-asal yakın-halkadır.

b) (i) Sıfırdan farklı $\forall x, y \in N$ için, $xNy \neq 0$

(ii) Eğer $x, y \in N$, $0 \neq a \in N$ ve $\forall n \in N$ için, $anx = any$ ise $x = y$ dir.

c) Eğer $x, y \in N$, $0 \neq a \in N$ ve $\forall n \in N$ için, $anx = any$ ise $x = y$ dir.

İspat a)$\Rightarrow$b): N bir e-asal yakın-halka ise, Tanım 3.6.1'den, $x, y \in N$, $0 \neq a \in N$ ve $\forall n \in N$ için, $anx = any$ ise $x = y$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a \neq 0$ ve N e-asal olduğundan $aNa \neq 0$, dolayısıyla $aN \neq 0$ dır. Şimdi, tümevarım yöntemi kullanılarak, A_k şu şekilde tanımlansın: $A_0 = aN$ ve eğer A_{k-1} tanımlıysa,

$$A_k = \left\{ \sum_i \delta_i u_i \;\middle|\; \delta_i = \pm 1, u_i \in A_{k-1} \right\} \cup \left\{ nu \;\middle|\; n \in N, u \in A_{k-1} \right\}$$

olsun. $A = \bigcup A_k$, N nin bir invaryant alt grubudur ve $0 \neq aN \subseteq A$ dır. $\forall u \in A$ için, $ux = uy$ dir. N bir e-asal yakın-halka olduğundan Tanım 3.6.1'den $x = y$ dir.

b)$\Rightarrow$a): $0 \neq A \; N$ yakın-halkasının bir invaryant alt grubu ve kabul edelim ki $x, y \in N$ ve $\forall a \in A$ için $ax = ay$ olsun. $a \neq 0$ seçelim. A invaryant olduğundan, $\forall n \in N$ için $an \in A$ ve dolayısıyla $anx = any$ dir. O halde $x = y$ elde edilir.

c)$\Rightarrow$b): Öncelikle belirtelim ki c) şartı 0-simetrikliği gerektirir. Gerçekten, eğer $a \in N$ ve $a0 \neq 0$ ise, bu durumda,

$$(a0)n(a0) = (a0)n0$$

olması c) den $a0 = 0$ çelişkisini getirir. O halde N 0-simetriktir. Şimdi kabul edelim ki $x \neq 0$ için $xNy = 0$ olsun. Bu durumda $\forall n \in N$ için,

$$xny = 0 = xn0$$

ve buradan $y = 0$ elde edilir.

Tanım 3.6.1 ve Lemma 3.6.2'den N yakın-halkasının e-asal idealleri için aşağıdaki karakterizasyon elde edilir.

Sonuç 3.6.3. ([6]) N bir yakın-halka ve $P < N$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

a) P N nin bir e-asal idealidir.

b) Eğer $a \in N - P$, $x, y \in N$ ve $\forall n \in N$ için $anx - any \in P$ ise $x - y \in P$ dir.

Lemma 3.6.4. ([6]) N bir e-asal yakın-halka ise, 0-asaldır.

İspat: N bir e-asal yakın-halka ve $0 \neq A, B < N$ olsun. Bu durumda, $0 \neq a \in A$ ve $0 \neq b \in B$ için $anb \neq 0$ olacak şekilde en az bir $n \in N$ vardır. $anb \in AB$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $AB \neq 0$ dır. O halde Önerme 3.1.2 d) den N bir 0-asal yakın-halkadır.

Lemma 3.6.2 c) $\Rightarrow$ b) ispatından, herhangi bir e-asal yakın-halkanın aynı zamanda 0-simetrik olduğu görüldü. Aşağıdaki teorem e-asal yakın-halkaların diğer bir karakterizasyonunu vermektedir.

Teorem 3.6.5. ([11]) N bir yakın-halka olsun. Bu durumda, aşağıdakiler denktir:

a) N bir e-asal yakın-halkadır.

b) N nin her $0 \neq A$ sağ invaryant $(AN \subseteq A)$ alt grubu için, eğer $x, y \in N$ ve $\forall a \in A$ için, $ax = ay$ oluyorsa, $x = y$ dir.

c) N nin her A invaryant alt grubu için, eğer $x, y \in N$ ve $\forall a \in A$ için, $ax = ay$ oluyorsa, $x = y$ dir.

İspat a)$\Rightarrow$b) : N bir e-asal yakın-halka ve $0 \neq A$ N nin bir sağ invaryant alt grubu olsun. Kabul edelim ki, $x, y \in N$ ve $\forall a \in A$ için $ax = ay$ olsun. $0 \neq b \in A$ alalım.

$bN \subseteq A$ olduğundan $\forall n \in N$ için $bnx = bny$ dir. O halde N e-asal olduğundan $x = y$ elde edilir.

b) $\Rightarrow$ **c) :** İnvaryantlık, sağ invaryantlığı gerektirdiğinden ispatın bu yönü açıktır.

c) $\Rightarrow$ **a) :** $0 \neq a \in N$, $x, y \in N$ ve $\forall n \in N$ için $anx = any$ olsun. Öncelikle $N_c = 0$ yani N nin 0-simetrik olduğunu gösterelim. Eğer $N_c \neq 0$ ise, N_c N nin bir invaryant alt grubudur ve $\forall r, s \in N$, $\forall c \in N_c$ için,

$$cr = c = cs$$

dir. Fakat c) den, bu durum $r = s$ olmasını gerektirir ki, bu elbette bir çelişkidir. Dolayısıyla $N_c = 0$ yani N 0-simetriktir. Şimdi $aN \neq 0$ olduğunu gösterelim. Eğer $aN = 0$ ise, $(a)N = 0$ dır. N 0-simetrik olduğundan, (a) N nin bir invaryant alt grubudur. Üstelik $\forall b \in (a)$ ve $\forall k, l \in N$ için,

$$bk = 0 = bl$$

dır. O halde c) den $k = l$ olmalıdır ki, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $aN \neq 0$ dır. Şimdi Lemma 3.6.2 a) $\Rightarrow$ b) nin ispatındaki gibi, $A_0 = aN$ ve eğer A_{k-1} tanımlıysa,

$$A_k = \left\{ \sum_i \delta_i u_i \;\middle|\; \delta_i = \pm 1, u_i \in A_{k-1} \right\} \cup \left\{ nu \;\middle|\; n \in N, u \in A_{k-1} \right\}$$

olsun. $A = \bigcup A_k$ N nin bir invaryant alt grubudur ve $0 \neq aN \subseteq A$ dır. $\forall u \in A$ için, $ux = uy$ dir. O halde c) den $x = y$ elde edilir.

Lemma 3.6.2'den biliyoruz ki, eğer N bir e-asal yakın-halka ise, $0 \neq x, y \in N$ için $xNy \neq 0$, dolayısıyla N 3-asaldır.

Bir e-asal yakın-halkanın aynı zamanda 0-simetrik ve 3-asal olduğu belirtilmişti. Şimdi bunun aksinin doğru olmadığı aşağıdaki örnekle verilebilir.

Örnek 3.6.6. ([7]) $(N,+)$, $|N| \geq 3$ olan bir grup olsun ve N üzerinde çarpma işlemi, $\forall x, y \in N$ için,

$$xy = \begin{cases} x, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

ile tanımlansın. $\forall x \in N$ için $x0 = 0$ olduğundan, N 0-simetrik bir yakın-halkadır. $0 \neq x, y \in N$ ve $x \neq y$ alalım. Bu durumda eğer $n \neq 0$ ise,

$$xnx = xny = x$$

ve eğer $n = 0$ ise,

$$xnx = xny = 0$$

o halde $\forall n \in N$ için,

$$xnx = xny$$

dir. Fakat $x \neq y$ olduğundan, N bir e-asal yakın-halka değildir.

Herhangi bir N yakın halkasının sabit kısmı N_C,N nin e-asal I idealini içerir.Özellikle eğer N e-asal yakın halka ise $N_C = \{0\}$ yani N sıfır simetriktir.

Önerme 3.6.7. ([21]) Keyfi bir N yakın halkasının her e-asal I ideali 3-asaldır.

İspat: $a, b \in N$ için $aNb \subseteq I$ olsun. $a \in I$ ise açıktır. $a \notin I$ alalım. $N_c \subseteq I$ dır. Çünkü $I < N$ olduğundan $IN \subseteq I$ ve $N_c \subseteq N$ dır. $N_C \subseteq I$ olduğundan $anb - an0 \in I$ dır. Böylece $b - 0 \in I$ yani $b \in I$. Dolayısıyla I , 3-asal idealdir.

Önerme 3.6.8. ([21]) Keyfi bir N yakın halkasının e-asal I ideali 1-asaldır.

İspat: A ve B, N yakın halkasının $AB \subseteq I$ olacak şekildeki sol idealleri olsun. $A \not\subset I$ ve $a \in A \backslash I$ alalım. $n \in N$ ise $N = N_0 + N_c$ olduğundan $n = n_c + n_0$ olacak şekilde $n_c \in N_c$ ve $n_0 \in N_0$ vardır.

$\forall b \in B$ için

$$anb - an0 = a(n_c + n_0 b) - an_0 b + an_0 b - an0 \in I$$

dır. Çünkü $A_C \subseteq N_C \subseteq I$, $I < N$ ve $AN_0 B \subseteq AB \subseteq I$ dır. Buradan $\forall b \in B$ için $b \in I$ yani $B \subseteq I$ elde edilir.

Önerme 3.6.9. ([21]) N bir yakın halka, $I < N$ e-asal ideal ve A, N nin invaryant alt grubu olsun. Bu durumda $A \cap I$, A yakın-halkasının e-asal idealidir.

İspat: N bir yakın halka, $I < N$ e-asal ideal ve A, N nin invaryant alt grubu olsun. $u \in A \backslash (A \cap I)$ ve $\forall a \in A$ için $uax - uay \in A \cap I$ olacak şekilde $x, y \in A$ alalım. Farz edelim ki, $x - y \notin A \cap I$ olsun. $x, y \in A$ olduğundan $x - y \notin I$ dır. I , N nin e-asal ideali olduğundan, $unx - uny \notin I$ olacak şekilde bir $n \in N$ vardır. Aynı yöntemle $um(unx) - um(uny) \notin I$ olacak şekilde bir $m \in N$ bulabiliriz. Fakat A, N nin invaryant alt grubudur ve $u \in A$ dır. Böylece $u(mun)x - u(mun)y \in A \cap I$ istenen çelişkiyi verir.

0-simetrik yakın-halkalardaki idealler invaryant olduğundan aşağıdaki sonucu alırız:

Sonuç 3.6.10. ([21]) e-asal N yakın-halkasının invaryant alt grubu A olsun. Bu durumda A e-asal yakın-halkadır. Özel olarak $A < N$ ise de bu durum geçerlidir.

3.7. N-grup Tipleri

2. Bölüm'de bir N yakın-halkası için N-grup kavramı tanımlanmıştı. Bu kesimde, 0-, 1-, 2-, ve 3-tipinde N-gruplar tanımlanacak, temel özellikleri ve birbirleriyle ilişkileri verilecektir. Bunlar tarafından belirlenen primitif idealler, bazı sık kullanılan özellikleri, kendileri ve asal idealler ile ilişkileri sunulacaktır.

Tanım 3.7.1. ([16]) N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun.

a) Eğer $\exists\gamma \in \Gamma$ için $N\gamma = \Gamma$ ise, Γ ya γ tarafından monojeniktir denir.

b) Eğer Γ monojenik ve $\forall\gamma \in \Gamma$ için $N\gamma = \Gamma$ veya $N\gamma = 0_\Gamma$ ise, Γ ya strongly monojenik N-grup denir.

Özellikler 2.4.9 e) ile, bir N yakın-halkasının bir Γ N-grubu için, $N0_\Gamma$ nın Γ nın tüm N-alt grupları içerisinde en küçük olanı olduğu verilmişti. Özellikler 2.4.9 d) den $\forall\gamma \in \Gamma$ için $N\gamma \leq_N \Gamma$ dır. O halde, eğer Γ bir strongly monojenik N-grup ise, $N0_\Gamma = \{0_\Gamma\}$ veya $N0_\Gamma = \Gamma$ olduğu görülebilir [16].

Tanım 3.7.2. ([10]) N bir yakın-halka ve Γ bir monojenik N-grup olsun. Bu durumda,

a) Eğer Γ nın $\{0_\Gamma\}$ ve kendisinden başka ideali yoksa, Γ ya 0-tipinde bir N-grup denir.

b) Eğer Γ strongly monojenik ve $\{0_\Gamma\}$ ve kendisinden başka ideali yoksa, Γ ya 1-tipinde bir N-grup denir.

c) Eğer Γ nın $\{0_\Gamma\}$ ve kendisinden başka N-alt grubu yoksa, Γ ya 2-tipinde bir N-grup denir.

d) Eğer Γ 2-tipinde ve $\forall\gamma_1,\gamma_2 \in \Gamma$, $\forall n \in N$ için $n\gamma_1 = n\gamma_2$, olması $\gamma_1 = \gamma_2$ olmasını gerektiriyorsa, Γ ya 3-tipinde bir N-grup denir.

Önerme 3.7.3. ([16]) N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Bu durumda, Γ 2-tipinde $\Rightarrow$ 1-tipinde $\Rightarrow$ 0-tipindedir.

İspat: Γ 2-tipinde ise, $\{0_\Gamma\}$ ve kendisinden başka N-alt grubu yoktur. $\forall\gamma \in \Gamma$ için, $N\gamma$ Γ nın bir N-alt grubu olduğundan, $N\gamma = \{0_\Gamma\}$ veya $N\gamma = \Gamma$ yani, Γ strongly monojeniktir. Eğer $\Delta <_N \Gamma$ ise, Γ aynı zamanda bir N_0-grup olduğundan, Özellikler 2.4.9 c) den Δ aynı zamanda Γ nın bir N-alt grubudur. O halde Γ nın $\{0_\Gamma\}$ ve kendisinden başka ideali yoktur. Dolayısıyla Γ 1-tipindedir. Aşikar olarak, Tanım 3.7.3 den Γ 0-tipindedir.

Tanım 3.7.4. ([10]) N bir yakın-halka ve $I < N$ olsun. v=0,1,2,3 için eğer $I = (0_\Gamma : \Gamma)_N$ olacak şekilde v-tipinde bir Γ N-grubu varsa, I ya N nin bir v-primitif ideali denir. Eğer bu Γ N-grubu faithful ise, N ye bir v-primitif yakın-halka adı verilir.

[14]'de v=0,1,2 için bir N yakın-halkasının her v-primitif idealinin aynı zamanda v-asal olduğu ispatlanmıştır. Aşağıdaki önerme ile, 0-simetrik bir N yakın-halkasında her 3-primitif idealin aynı zamanda 3-asal olduğu verilmiştir.

Önerme 3.7.5. ([10]) N 0-simetrik bir yakın-halka ve $I < N$ olsun. Eğer I 3-primitif ideal ise, 3-asaldır.

İspat: Farz edelim ki $I < N$ 3-primitif ve $a,b \in N$ için $aNb \subseteq I$ olsun. I 3-primitif olduğundan, $I = (0_\Gamma : \Gamma)_N$ olacak şekilde 3-tipinde bir Γ N-grubu vardır. $aNb \subseteq I$ olduğundan,

$$NaNb \subseteq NI \subseteq I$$

dır. 3-tipinde her N-grup, Tanım 3.7.2 d) den aynı zamanda 2-tipindedir. O halde her 3-primitif ideal aynı zamanda 2-primitif ve dolayısıyla 2-asaldır. $\forall a \in N$ için $Na \leq_N N$ ve I 2-asal olduğundan, $NaNb \subseteq I$ iken ya $Na \subseteq I$ ya da $Nb \subseteq I$ dır. Buradan $Na\Gamma = 0_\Gamma$ ya da $Nb\Gamma = 0_\Gamma$ olur. $Na\Gamma = 0_\Gamma$ olsun. Bu durumda $\forall n \in N$ için $na\Gamma = n0_\Gamma$ ve Γ 3-tipinde bir N-grup olduğundan $a\Gamma = 0_\Gamma$ yani, $a \in I$ elde edilir. O halde I bir 3-asal idealdir.

Lemma 3.7.6. ([6]) N bir 0-simetrik 3-primitif yakın-halka olsun. Bu durumda N e-asaldır.

İspat: N bir 3-primitif yakın-halka olduğundan, bir faithful 3-tipinde Γ N-alt grubu vardır. Kabul edelim ki, $0 \neq x, y \in N$ olsun. Γ faithful olduğundan $y\gamma \neq 0$ olacak şekilde bir $\gamma \in \Gamma$ vardır. Dolayısıyla,

$$N y\gamma \neq 0_\Gamma$$

dır. Çünkü, Γ 3-tipinde olduğundan 2-tipinde, yani strongly monojenik ve Γ'nın $\{0_\Gamma\}$ ve Γ dışında N-alt grubu yoktur. $Ny\gamma$ Γ'nın bir N-alt grubu olduğundan $Ny\gamma = \Gamma$ dır. Γ faithful olduğundan,

$$xNy\gamma \neq 0_\Gamma$$

ve buradan

$$xNy \neq 0$$

dır. Şimdi $0 \neq A$ N yakın-halkasının herhangi bir invaryant alt grubu olsun. [13, Lemma 3]'den Γ 3-tipinde bir faithful A-gruptur. Şimdi, farz edelim ki $\forall a \in A$ ve $x, y \in N$ için $ax = ay$ olsun. Bu durumda $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$ax\gamma = ay\gamma$$

dır. Γ 3-tipinde bir A-grup olduğundan,

$$x\gamma = y\gamma$$

dır. Buradan,

$$x\gamma - y\gamma = (x - y)\gamma = 0_\Gamma$$

ve Γ bir faithful N-grup olduğundan,

$$x - y = 0$$

yani $x = y$ dir. O halde Teorem 3.6.5'den N bir e-asal yakın-halkadır.

Örnek 3.7.7. ([6]) (N,+) , p tek asal olmak üzere p mertebeli devirli grup olsun. Aşağıdaki çarpma işlemiyle tanımlanan N yakın-halkasını alalım:

$$ab = \begin{cases} a, & b \neq 0 \\ 0, & b = 0 \end{cases}$$

N, 2-primitif, e-asal olmayan, 0-simetrik ,3-asal, D.C.C.N bir yakın halkadır.

3.8. E-asallığın Birimli ve Basit Yakın-halkalarla İlişkisi

Bir G grubu için birimli basit $M_0(G)$ yakın-halkası e-asaldır. Bütün birimli basit yakın-halkalar 3-asaldır fakat 2-primitif olmak zorunda değildir.

Eğer N birimli yakın-halkasının aşikar olmayan invaryant alt grubu yoksa, N e-asal yakın-halkadır. Gerçekten, $0 \neq a \in N$ alalım ve farz edelim ki $x, y \in N$ ve $\forall n \in N$

için $anx = any$ olsun. Bu durumda $A := \{b \in N \mid bnx = bny, \forall n \in N\}$ N nin sıfırdan farklı invaryant alt grubudur. Çünkü $(A,+) < (N,+)$ dır.

(D.C.C) şartını sağlayan her birimli basit N yakın-halkası 2-primitiftir [21]. Dolayısıyla N 3-primitif ve Lemma 3.7.6 'dan N e-asaldır.

Bir N yakın-halkasındaki sol birim $(0:N)_N = \{0\}$ sağlanırsa çift yönlü birim olur. Yakın-halka 3-asal olsa bile bu sağ birim için geçerli bir durum değildir.

Önerme 3.8.1. ([21]) Bir e-asal N yakın-halkasının tek yönlü birimi e olsun. Bu durumda e yakın-halkanın birimidir.

İspat: Eğer e sol birimse $(0:N)_N = \{0\}$ dır. Farz edelim ki e sağ birim olsun fakat sol birim olmasın. Böylece bazı $0 \neq m \in N$ için $em \neq m$ dir. N e-asal olduğundan, $mnm \neq mn(em)$ olacak şekilde bir $n \in N$ vardır. Fakat e sağ birim olduğundan $mn(em) = m(ne)m = mnm$ çelişkisini elde ederiz.

3.9. E-asal Yakın-halkalar, Yakın-cisimler ve Planar Yakın-halkalar

Her yakın-cisim e-asaldır. [16] den birimli her planar yakın-halkanın yakın-cisim olduğunu biliyoruz. Burada birimli olma koşulu yakın-halka e-asal ise gerekli değildir.

Tanım 3.9.1. ([16]) N bir yakın-halka ve $a,b \in N$ olsun.

$$a \equiv b :\Leftrightarrow \forall n \in N : na = nb$$

bağıntısı N üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu durumda a ve b sağ denk çarpanlar olarak adlandırılır.

Tanım 3.9.2. ([16]) N bir yakın-halka olsun. Eğer $\left| N/\equiv \right| \geq 3$ ve $xa = xb + c$, $(a \neq b)$ eşitliği N de bir tek çözüme sahipse, N ye planar yakın-halka denir.

Önerme 3.9.3. ([16]) Her planar yakın-halka 0-simetriktir.

İspat: $n \in N$ ve $a \in N^*$ alalım. Burada $A = \{n \in N \mid n \equiv 0\}$ ve $N^* = N \setminus A$ dır. 0 ve $n0$, $xa = x0 + 0$ nin çözümüdür. Buradan $n0 = 0$ elde edilir. Yani N planar yakın-halkası sıfır-simetriktir.

Bir N yakın-halkası yakın-cisim olması için gerek ve yeter şart N nin sıfırdan farklı dağılmalı eleman içermesi ve her $0 \neq x \in N$ için $Nx = N$ olmasıdır. N e-asal yakın-halka ise sıfırdan farklı dağılmalı eleman şartı gereksizdir.[16]

Önerme 3.9.4. ([21]) Bir N yakın-halkasının yakın-cisim olması için gerek ve yeter şart N 'nin e-asal ve her $0 \neq x \in N$ için $Nx = N$ olmasıdır.

İspat: N e-asal ve her $0 \neq x \in N$ için $Nx = N$ olsun. $\forall a,b \in N^*$ için $b^{'}b = a$ ve $a^{'}a = b^{'}$ olacak şekilde $\exists a^{'}, b^{'} \in N^*$ vardır. Böylece $a^{'}(ab) = (a^{'}a)b = b^{'}b = a \neq 0$ yani $ab \neq 0$ elde edilir. Dolayısıyla N sıfır bölensiz yakın-halkadır.

$0 \neq x \in N$ alalım ve $ex = x$ olacak şekilde $e \in N$ seçelim. $\forall n \in N$ için $(ne - n)x = 0$ ve N sıfır bölensiz olduğundan $ne = n$ dir. e sağ birim olduğundan Önerme 3.8.1'den e, N yakın-halkasının birimidir. Sonuç olarak N sıfırdan farklı dağılmalı bir elemana sahiptir. Böylece N bir yakın-cisimdir.

Önerme 3.9.5. ([21]) Her e-asal planar yakın-halka bir yakın-cisimdir.

İspat: Planar yakın-halka tanımından,

$$a \equiv b :\Leftrightarrow \forall n \in N : na = nb$$

elde edilir. Eğer N e-asal yakın-halka ise

$$a \equiv b \Leftrightarrow a = b$$

yazılabilir. Gerçekten, eğer $a \equiv b$ ise, bu durumda $\forall n \in N$ için

$$(a-b)na = ana - bna = anb - bnb = (a-b)nb$$

elde edilir. Buradan $(a-b)na = (a-b)nb$ alınır. Böylece $a = b$ dir.

$n \in N$, $0 \neq x \in N$ için $\exists m \in N$ vardır öyle ki $nx = m$ dir. Çünkü N planar yakın-halka olduğundan $yx = y0 + m$ nin N de tek çözümü vardır. O halde $Nx = N$ ve dolayısıyla N bir yakın cisimdir.

E-asal olan dağılmalı yakın-halka, asal halkadır. Bu bizi aşağıdaki sonuca ulaştırır: Eğer N dağılmalı bir yakın-halka ve $(0:N) = \{0\}$ ise bu durumda N bir halkadır.

Burada **i)** $(N,+)$ değişmeli grup

ii) $(N,.)$ yarı grup

iii) $\forall x,y,z \in N$ için $x(y+z) = xy + xz$ ve $(x+y)z = xz + yz$

özellikleri sağlanır.

$\forall x,y \in N$ için $x + y = y + x$ olduğunu gösterelim. $\forall n \in N$ için

$(x+y)n = xn + yn = yn + xn = (y+x)n$

$\forall n \in N$ için $\left((x+y)-(y+x)n\right) = 0$

$(x+y)-(y+x) \in (0:N)$

$(x+y)-(y+x)=0$

$x+y=y+x$

Sonuç 3.9.6. ([21]) Bir N yakın-halkasının yakın-cisim olması için gerek ve yeter şart e-asal ve N -basit olmasıdır.

Yukarıdaki iki sonuçta e-asal olma durumu 3-asallıkla yer değiştiremez. Aşağıdaki örnek bunu kanıtlar:

Örnek 3.9.7. ([6]) p tek asal olmak üzere p mertebeli bir devir grubu üzerinde aşağıdaki çarpma işlemiyle inşa edilen N yakın-halkasını düşünelim(p>2) :

$$ab=\begin{cases} a, & b\neq 0 \\ 0, & b=0 \end{cases}$$

$\forall 0\neq x\in N$ için ve $\forall n\in N$ için $nx=n$ dir. N 3-asaldır fakat yakın-cisim değildir.

Tanım 3.9.8. ([16]) N bir yakın-halka olsun. Eğer $\forall a,b,n\in N$ için $ab=0$ iken $anb=0$ oluyorsa, N 'ye bir IFP yakın-halka denir.

Bir 3-asal IFP yakın-halkanın sıfırdan farklı sıfır böleni yoktur yani sıfır bölensizdir. Bununla birlikte N sonlu, 3-asal, IFP yakın-halka ise N yakın-cisim olmak zorunda değildir.

Önerme 3.9.10. ([21]) N sonlu bir yakın-halka olsun. N 'nin yakın-cisim olması için gerek ve yeter şart e-asal ve IFP olmasıdır.

İspat: Eğer N e-asal ve IFP ise bu durumda, N sıfır bölensizdir. N sonlu olduğundan her $0\neq x\in N$ için $Nx=N$ dir. Önerme 3.9.4 den N yakın-cisimdir.

Önerme 3.9.11. ([16]) N bir 0-simetrik yakın-halka olsun. N 'nin sıfırdan farklı nilpotent elemanı yoksa N bir IFP yakın-halkadır.

İspat: N bir 0-simetrik yakın-halka olsun. $x,y\in N$ için $xy=0$ ise bu durumda $yxyx=y0x=0$ dır. Böylece $(yx)^2=0$ dır. Buradan $yx=0$ elde edilir.

$$\forall n\in N \text{ için } (xny)^2=xnyxny=0$$

$$xny=0$$

olduğundan N bir IFP yakın-halkadır.

Sonuç 3.9.12. ([21]) N sonlu bir yakın-halka olsun. N 'nin yakın-cisim olması için gerek ve yeter şart e-asal ve sıfırdan farklı nilpotent elemanı olmamasıdır.

4. YAKIN-HALKALARDAKİ ASALLIĞIN MALONE AŞİKAR YAKIN-HALKALARA UYGULAMALARI

Tanım 4.1. ([21]) $|G| \geq 2$ grubu üzerinde aşağıdaki çarpma işlemiyle tanımlanan M yakın-halkasını ve $S \subseteq G \setminus \{0\}$ cümlesini alalım:

$$ab = \begin{cases} a, & b \in S \\ 0, & b \notin S \end{cases}$$

Bu durumda M yakın-halkasına Malone aşikar yakın-halka denir.

Tanım 4.2. ([5]) N bir yakın-halka olsun. $\forall a,b,c \in N$ için,

$$abc = acb \text{ (sırasıyla } abc = bac)$$

sağlanıyorsa N yakın-halkasına sağ değişmeli (sırasıyla sol değişmeli) yakın-halka denir.

Eğer $\forall a,b,c,d \in N$ için

$$abcd = acbd$$

sağlanıyorsa N 'ye medial yakın-halka denir

Birkenmeier ve Heatherly [5] bunları 'üç özellikler' olarak adlandırmıştır. Yakın-halkalardaki sağ değişme özelliği için 'zayıf komutatif' söz grubu seçilmiştir.[15]

Tanım 4.3. ([3]) N bir yakın-halka olsun. $\forall a,b,c \in N$ için

$$abc = abac$$

sağlanıyorsa N 'ye sol iç dağılmalı(LSD),

$$abc = acbc$$

sağlanıyorsa N 'ye sağ iç dağılmalı(RSD) yakın-halka denir.

Önerme 4.4. N bir Malone aşikar yakın-halka olsun. Bu durumda N bir sağ iç dağılmalı (RSD) yakın-halkadır.

İspat: N bir Malone aşikar yakın-halka ve $a,b,c \in N$ olsun.

$$abc = \begin{cases} ab, & c \neq 0 \\ 0, & c = 0 \end{cases} = \begin{cases} a, & b \neq 0 \quad ve \quad c \neq 0 \\ 0, & b = 0 \quad ve \quad c = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$acbc = \begin{cases} acb, & c \neq 0 \\ 0, & c = 0 \end{cases} = \begin{cases} ac, & b \neq 0 \quad ve \quad c \neq 0 \\ 0, & b = 0 \quad ve \quad c = 0 \end{cases} = \begin{cases} a, & c \neq 0 \quad ve \quad b \neq 0 \\ 0, & c = 0 \quad ve \quad b = 0 \end{cases}$$

(2)

Böylece $abc = acbc$ dir. (1) ve (2) den N bir RSD yakın-halkadır.

Önerme 4.5. N bir Malone aşikar yakın-halka olsun. Bu durumda N bir 3-asal yakın-halkadır.

İspat: Kabul edelim ki N bir Malone aşikar yakın-halka, $\forall a,b \in N$ için $aNb = 0$ ve $a \neq 0$ olsun. Bu durumda $\forall n \in N$ için $anb = 0$ dır. Özel olarak $n = a$ için $aab = 0$ dır. Malone aşikar yakın-halka tanımı $a \neq 0$ olması $b = 0$ olmasını gerektirir. Böylece N bir 3-asal yakın-halkadır.

Önerme 4.6. N bir Malone aşikar yakın-halka olsun. Bu durumda N bir sol iç dağılmalı(LSD) yakın-halkadır.

İspat: N bir Malone aşikar yakın-halka ve $a,b,c \in N$ olsun.

$$abc = \begin{cases} ab, & c \neq 0 \\ 0, & c = 0 \end{cases} = \begin{cases} a, & b \neq 0 \quad ve \quad c \neq 0 \\ 0, & b = 0 \quad ve \quad c = 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$abac = \begin{cases} aba, & c \neq 0 \\ 0, & c = 0 \end{cases} = \begin{cases} ab, & a \neq 0 \quad ve \quad c \neq 0 \\ 0, & a = 0 \quad ve \quad c = 0 \end{cases} = \begin{cases} a, & b \neq 0 \quad ve \quad c \neq 0 \\ 0, & b = 0 \quad ve \quad c = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Böylece $abc = abac$ dir. (3) ve (4) den N bir LSD yakın-halkadır.

Önerme 4.7. ([21]) N 3-asal ve sağ iç dağılmalı bir yakın-halka olsun. Bu durumda N bir Malone aşikar yakın-halkadır.

Aşağıdaki önerme ile Önerme 4.7'nin tersinin de doğru olduğu kanıtlanmıştır:

Önerme 4.8. N yakın-halkasının 3-asal ve sağ iç dağılmalı yakın-halka olması için gerek ve yeter şart N ' nin Malone aşikar yakın-halka olmasıdır.

İspat: N 3-asal ve RSD olsun. Önerme 4.7' den N bir Malone aşikar yakın-halkadır. Tersine N bir Malone aşikar yakın-halka olsun. Önerme 4.4. ve Önerme 4.5' den N 3-asal ve RSD yakın-halkadır.

Sonuç 4.9. N e-asal ve sağ iç dağılmalı bir yakın-halka olsun. Bu durumda N bir Malone aşikar yakın-halkadır.

İspat: N e-asal yakın-halka olduğundan 3-asaldır. Önerme 4.7' den N bir Malone aşikar yakın-halkadır.

Sonuç 4.10. N bir Malone aşikar yakın-halka olsun. Bu durumda N 3-asal ve LSD yakın-halkadır.

İspat: Önerme 4.5 ve Önerme 4.6' dan açıktır.

Eğer N bir LSD yakın-halka ise Malone aşikar yakın-halka olmak zorunda değildir.

Aşağıdaki örnek bunu kanıtlar:

Örnek 4.11. Toplama ve çarpma işlemi aşağıdaki tablolarla verilen $N = \{0,1,2,3\}$ yakın-halkasını alalım. Bu yakın-halka LSD ve sol değişmelidir fakat 3-asal ve Malone aşikar yakın-halka değildir.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

.	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	0	2	2
3	0	0	2	2

Önerme 4.12. N LSD ve sağ değişmeli bir yakın-halka olsun. Eğer N c-asal ise bu durumda N bir Malone aşikar yakın-halkadır.

İspat: Kabul edelim ki $b \neq 0$ ve $c \neq 0$ olsun. N LSD ve sağ değişmeli bir yakın-halka olduğundan $\forall a,b,c \in N$ için,

$$abc = acb = acab = acacb = acabc = acbc$$

dir. Böylece $abc = acbc$ elde edilir. $(ab - acb)c = 0$ dır. N c-asal olduğundan $ab - acb = 0$ veya $c = 0$ dır.
$c \neq 0$ olduğundan $ab - acb = 0$ yani $(a - ac)b = 0$ dır. N'nin c-asal ve $b \neq 0$ olması göz önünde bulundurulursa $a - ac = 0$ yani $a = ac$ bulunur. Böylece N bir Malone aşikar yakın-halkadır.

Sonuç 4.13. N bir Malone aşikar yakın-halka olsun. Bu durumda N bir e-asal yakın-halka değildir.

İspat: N bir Malone aşikar yakın-halka olsun. $0 \neq a,b \in N$ ve $a \neq b$ alalım. Bu durumda eğer $n \neq 0$ ise,

$$ana = anb = a$$

ve eğer $n = 0$ ise,

$$ana = anb = 0$$

o halde $\forall n \in N$ için,

$$ana = anb$$

dir. Fakat $a \neq b$ olduğundan, N bir e-asal yakın-halka değildir.

Örnek 4.14. ([16]) N Klein-4 grup üzerinde aşağıdaki çarpma işlemiyle verilen bir yakın-halka olsun. N bir Malone aşikar yakın-halkadır fakat e-asal değildir.

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	a	a
b	0	b	b	b
c	0	c	c	c

Önerme 4.15. N bir RSD c-asal yakın-halka olsun. Bu durumda N bir Malone aşikar yakın-halkadır.

İspat: Kabul edelim ki N bir RSD c-asal bir yakın-halka ve $\forall a,b \in N$ için $b \neq 0$ olsun. N RSD olduğundan,

$$abb = abbb$$

dir. Buradan,

$$(ab - abb)b = 0$$

elde edilir. N c-asal olduğundan,

$$ab - abb = 0 \text{ veya } b = 0$$

dır. $b \neq 0$ olduğundan $ab - abb = 0$ yani $(a - ab)b = 0$

dır. N c-asal olduğundan,

$$a - ab = 0$$

dır. Buradan $a = ab$ yani N bir Malone aşikar yakın-halkadır.

Önerme 4.16. N bir Malone aşikar yakın-halka olsun. Bu durumda N bir c-asal yakın-halkadır.

Örnek 4.17. C-asal olan $N = (Z_3,+,.)$ halkasını alalım. N bir Malone aşikar yakın-halka değildir.

Bu örnekle aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 4.18. N bir c-asal yakın-halka olsun. Bu durumda N bir Malone aşikar yakın-halka olmak zorunda değildir.

Önerme 4.19. N, $|N| \geq 3$ olan bir yakın-halka olsun. Bu durumda N'nin dağılmalı, c-asal ve medial olması Malone aşikar yakın-halka olmasını gerektirmez.

İspat: Kabul edelim ki $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olsun. N medial olduğundan, $\forall a,b \in N$ için

$$abab = aabb$$

dır. Buradan

$$(aba - aab)b = 0$$

dır.

N c-asal olduğundan, $aba - aab = 0$ veya $b = 0$ elde edilir. $b \neq 0$ kabulü ve N, dağılmalı olduğundan $a(ba - ab) = 0$ elde edilir. $a \neq 0$ olduğundan $ab = ba$ dır. Böylece N bir Malone aşikar yakın-halka değildir.

Açıktır ki, N yakın-halkası $|N| \geq 3$ olan komutatif bir yakın-halka ise, bu durumda N bir Malone aşikar yakın-halka değildir. Aşağıdaki önerme $|N| \geq 3$ olan c-asal, sol değişmeli yakın-halkanın Malone aşikar yakın-halka olmayacağını gösterir.

Önerme 4.20. N c-asal, sol değişmeli ve $|N| \geq 3$ olan yakın-halka olsun. Bu durumda N bir komutatif yakın-halkadır dolayısıyla Malone aşikar yakın-halka değildir.

İspat: Kabul edelim ki $\forall a,b,c \in N$ için, $c \neq 0$ ve $a \neq b$ olsun. N sol değişmeli olduğundan,

$$abc = bac$$

dır. Yani

$$(ab - ba)c = 0$$

dır. N c-asal olduğundan, $ab - ba = 0$ veya $c = 0$ dır. $c \neq 0$ olduğundan $ab = ba$ dır. Böylece N bir komutatif yakın-halkadır ve $a \neq b$ olduğundan N bir Malone aşikar yakın-halka değildir.

$N = N_d$ ve N sağ değişmeli olsa bile N bir Malone aşikar yakın-halka olmak zorunda değildir.

Gerçekten, her komutatif halka aynı zamanda komutatif yakın-halkadır. Bu halkalar $N = N_d$ yi sağlar ve sağ değişmelidir fakat Malone aşikar yakın-halka değildir. Ayrıca 3-asallık ve sağ değişmeli olma özelliği de Malone aşikar yakın-halka olmayı gerektirmez. Aşağıdaki örnek bunu kanıtlar:

Örnek 4.21. ([1]) Aşağıdaki tablo ile verilen $N=(Z_6\ ,+,.)$ sağ değişmeli yakın-halkasını alalım. $P=\{0,3\}$ ideali Z_6'nın 3-asal idealidir. Dolayısıyla Z_6/P 3-asal yakın-halkadır. Açıktır ki, Z_6/P 3-asal, sağ değişmelidir ve Malone aşikar yakın-halka değildir.

.	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	3	1	5	3	1	5
2	0	2	4	0	2	4
3	3	3	3	3	3	3
4	0	4	2	0	4	2
5	3	5	1	3	5	1

Önerme 4.22. N bir sıfır-simetrik, LSD ve c-asal yakın-halka olsun. Bu durumda N bir Malone aşikar yakın-halkadır.

İspat: Kabul edelim ki $a\neq 0$ ve $b\neq 0$ olsun. N bir LSD yakın-halka olduğundan $abb=abab$ dır. Buradan $(ab-aba)b=0$ elde edilir. N c-asal olduğundan,

$$ab-aba=0 \text{ veya } b=0$$

dır. $b\neq 0$ kabul edildiğinden,

$$ab-aba=0$$

yazılır. Bu durumda $ab=aba$ dır.

$$baba=babaa=baaa$$

ve buradan

$$baa=baaa$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$(b-ba)aa=0$$

dır. N c-asal olduğundan ve $a\neq 0$ kabulünden $b-ba=0$ yazılır. Böylece $b=ba$ elde edilir.

Önerme 4.23. N bir Malone aşikar yakın-halka olsun. Bu durumda N bir Boolean yakın-halkadır.

İspat: N bir Malone aşikar yakın-halka olsun. $\forall a\in N$ için

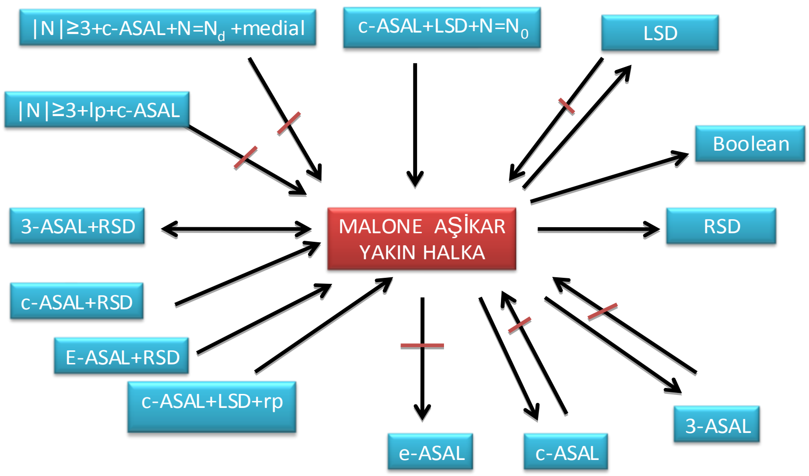
$$a^2 = aa = \begin{cases} a, & a \neq 0 \\ 0, & a = 0 \end{cases}$$

dır. Bu ise ispatı tamamlar.

SONUÇ

Halkaların bir genellemesi olan yakın-halkaların asal idealleri üzerine yapılan çalışmalarda 0-asal, 1-asal, 2-asal, 3-asal, e-asal, tam asal kavramları tanımlanmıştır. N bir yakın-halka ve I , N 'nin bir ideali olsun. Bu durumda I , e-asal ise 3-asal, 3-asal ise 2-asal ve 1-asal ise 0-asaldır. N sıfır-simetrik iken, 2-asal ise 1-asaldır. Ayrıca I tam asal ise 3-asaldır. Bunların tersleri, N yakın-halkasının sıfır-simetrik olması durumunda dahi doğru değildir.

Ayrıca e-asallığın birimli ve basit yakın-halkalarla ilişkisi hakkında önermeler verildi. Bir N yakın-halkasının yakın-cisim olması için N 'nin e-asal ve N -basit olması gerektiği sonucuna ulaşıldı. Malone aşikar yakın-halkalar LSD, RSD, c-asal ve 3-asal yakın-halkadır fakat e-asal yakın-halka değildir. N yakın-halkasının 3-asal ve RSD yakın-halka olması için gerek ve yeter şart N 'nin Malone aşikar yakın-halka olmasıdır. N c-asal, sol değişmeli ve $|N| \geq 3$ olan bir yakın-halka ise N komutatif yakın-halkadır dolayısıyla Malone aşikar yakın-halka değildir.



KAYNAKLAR

1. Atagün, A. O., Aygün, E., Altındiş, H., S-special near-rings, J. Inst. Math. Comp.Sci. (Math. Ser.), 19, 205-210, 2006.
2. Beidleman, J., Strictly Prime Distributively Generated Near-rings, Math. Z., 100, 97-105, 1967.
3. Birkenmeier, G., Heatherly, H., and Kepka T., Rings with left self distributive multiplication, Acta Math. Hungar., 60, 107-114, 1992.
4. Birkenmeier, G., Heatherly, H., and Lee, E., Prime Ideals and Prime Radicals in Near-rings, Mh. Math., 117, 179-197, 1994.
5. Birkenmeier, G., Heatherly, H., Medial near-rings, Mh. Math.,107, 89-110, 1989.
6. Booth, G. L., Groenewald, N. J., and Veldsman, S., A Kurosh-Amitsur Prime Radical for Near-rings, Comm. Algebra, 18, 3111-3122, 1990.
7. Booth, G. L., Groenewald, N. J., Different Prime Ideals in Near-rings II, Rings and Radicals (B. J. Gardner, Liu Shaoxue, R. Wiegandt (eds.)), Shijiazhaung 1994, Pitman Res. Notes Math., 346, 131-139, 1996.
8. Clay, J. R., Near-rings Geneses and Applications, Oxford, New York, Tokyo, 1992.
9. Dickson, L. E., Definitions of a Group and a Field by Independent Postulates, Trans. Amer. Math. Soc., 6, 198-204, 1905.
10. Groenewald, N. J., Different Prime Ideals in Near-rings, Comm. Algebra, 19(10), 2667-2675, 1991.
11. Groenewald, N. J., Prime Near-rings and Special Radicals, East-West J. of Math., 3(2), 147-162, 2001.
12. Heatherly, H. E., Malone, J. J., Some Near-ring Embeddings, Quart. J. Math., Oxford Ser. 20, 81-85, 1969.
13. Holcombe, W. L. M., A Hereditary Radical For Near-rings, Studia Sci. Hungar., 17, 453-456, 1982.
14. Holcombe, W. L. M., Primitive Near-rings, Doctoral Dissertation, University of Leeds, 1970.
15. Laxton, R. R., Prime Ideals and The Ideal Radical of a Distributively Generated Near-ring, Math. Z., 83, 8-17, 1964.

16. Pilz, G., Near-rings, 2nd Ed., Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland, 1983.
17. Ramakotaiah, D., Radicals for Near-rings, Math. Z., 97, 45-56, 1967.
18. Ramakotaiah, D., Rao, G. K., On IFP Near-rings, J. Austral. Math. Soc., 27, 365-370, 1979.
19. Reddy, Y. V., Murty, C. V. L. N., Semi-symmetric Ideals in Near-rings, Indian J. Pure and Appl. Math., 16, 17-21, 1985.
20. Van der Walt, A. P. J., Prime Ideals and Nil Radicals in Near-rings, Arch. Math., 15, 408-414, 1964.
21. Veldsman, S., On Equiprime Near-Rings, Comm. Algebra, 20(9), 2569-2587, 1992.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Yozgat'ta doğan Fatma Münevver YİĞİTER ilk öğrenimini Yozgat Sakarya İlköğretim Okulu'nda, lise öğrenimini Yozgat Anadolu Lisesi'nde tamamladı.

2004 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı. Şubat 2009'da iyi derece ile buradan mezun oldu.
Eylül 2009'da Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim dalında yüksek lisans yapmaya başladı.

İletişim Bilgileri

Adres : Medrese Mah. Saray Apt. No:9

66100   YOZGAT

Telefon: (354) 212 98 68

Cep: (505) 458 77 86

E-posta: munevveryigiter@hotmail.com