T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

LİNEER FARK DENKLEMLERİ VE ONLARIN ÇÖZÜM METODLARI ÜZERİNE

Selçuk AKYOL

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2011

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

LİNEER FARK DENKLEMLERİ VE ONLARIN ÇÖZÜM METODLARI ÜZERİNE

Selçuk AKYOL

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2011

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 7011130001 numaralı öğrencisi Selçuk AKYOL'un hazırladığı "**Lineer Fark Denklemleri ve Onların Çözüm Metodları Üzerine**" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezi ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 09/06/2011 Perşembe günü saat 13:00'te yapılmış, tezin onayına OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ömer AKIN

Üye : Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV (Danışman)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun …24.06.2011… tarih ve 07… sayılı kararı ile onaylanmıştır.

24/06/2011

Enstitü Müdürü

Yrd. Doç. Dr. Mustafa EROL
Bozok Üniversitesi
Fen Bil. Enst. Müdür V.

İÇİNDEKİLER

LİNEER FARK DENKLEMLERİ VE ONLARIN ÇÖZÜM METODLARI ÜZERİNE

Selçuk AKYOL

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2011; Sayfa: 82

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mammad Mustafayev

ÖZET

Bu tezde, lineer fark denklemlerinin çözüm metodları ele alındı, incelendi ve öğrenildi. Bunun için öncelikle lineer fark denklemlerinin esas anlamları, tanımları ve buradaki işlemlerde kullanılan gerekli temel kavramlar ve teoremler verildi. Tezde genel olarak lineer homojen fark denklemleri, lineer homojen olmayan fark denklemleri, n. mertebeden lineer homojen fark denklemleri ve n. mertebeden lineer homojen olmayan fark denklemleri ele alınıp incelendi. Lineer homojen olmayan fark denklemlerinin çözümünün bulunması için Lagrange'nin sabitlerin varyasyonu metodu uygulandı. Özel olarak sabit katsayılı lineer homojen fark denklemleri ve sabit katsayılı lineer homojen olmayan fark denklemleri ve bu denklemlerin çözümünün bulunması için z- dönüşümü metodunun uygulanması ele alındı.

Anahtar Kelimeler: Lineer Fark Denklemleri, z-Dönüşümleri, Sabitlerin Varyasyonu Metodu, Sabit Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklemleri, n. Mertebeden Lineer Homojen Fark Denklemleri

LINEAR DIFFERENCE EQUATIONS AND ABOUT SOLUTION METHODS

Selçuk AKYOL

Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Maths
Master of Science Thesis

2011; Page: 82

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ABSTRACT

In this thesis, the solving methods of linear differential equations are focused on, studied and learned. To achieve these, first the meanings, definitions and the basic concepts and theorems of linear differential equations being necessary are given. In general, this thesis focuses on linear homogeneous differential equations, linear non-homogeneous differential equations, linear homogeneous differential equations and linear non- homogeneous differential equations which are at level n are all studied. to find the solution of linear non-homogeneous differential equations, Langrange's "variations of the constants" method has been used. Especially, to study linear homogeneous differential equations which have constant exponents and linear non- homogeneous differential equations which have constant exponents, and to find their solutions, application of z- tranformation method is focused on.

Keywords: Linear Differential Equations, z- Transformations, Variations of the Constants Method, Linear Homogeneous Differential Equations Which Have Constant Exponents, Linear Homogeneous Differential Equations Which Are at Level n.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve alakasını kesmeyen, ortaya çıkan her türlü bilimsel problemin çözümünde yardımlarını gördüğüm tez danışmanım Prof. Dr. Mammad Mustafayev'e, bölüm başkanımız Yrd. Doç. Dr. Akın Osman Atagün'e, hocalarım Yrd. Doç. Dr Abdullah Sönmezoğlu ile Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali Tandoğan'a, kaynak temininde yardımcı olan Prof. Dr. Ömer Akın'a; ayrıca bana daima destek olan eşim Fatmana Akyol'a teşekkürü bir borç bilirim.

1. GİRİŞ

Fark denklemleri çok sayıda uygulamalı bilimlerde karşımıza çıkmaktadır [4]. Biyolojide, kimyada, fizikte, uygulamalı matematikte sık sık kullanılmaktadır [3]. Özellikle bu denklemlere bio-sistem teorisinde daha çok karşılaşılır [2].

Bu çalışmada esas amaç; lineer fark denklemlerinin ele alınıp incelenmesi, çözüm metodlarının öğrenilmesi ve geliştirilmesidir.

Bu çalışmada; 1. bölümde lineer fark denklemlerinin esas anlamları, tanımları ve buradaki işlemlerde kullanılan gerekli temel kavramlar ve teoremler verildi. Lineer homojen fark denklemleri, lineer homojen olmayan fark denklemleri, n. mertebeden lineer homojen fark denklemleri ve n. mertebeden lineer homojen olmayan fark denklemleri ele alınıp incelenecek. 2. bölümde sabit katsayılı fark denklemlerinin z-dönüşümü ile çözüm metodlarının bulunması incelendi. Son bölümde ise lineer fark denklem sistemleri ele alınıp çözüm metodları incelendi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Fonksiyonun Verilmiş Noktada Sonlu Farkının Tanımı

$f(t)$ fonksiyonunun ve adım olarak adlandırılan pozitif h sayısının verildiğini var sayalım. Aşağıdaki

$$\Delta f(t) = f(t+h) - f(t) \tag{2.1}$$

ifadesine $f(t)$ fonksiyonunun t noktasındaki **birinci sonlu farkı** veya **birinci mertebeden sonlu farkı** denir [1]. Δ'da **ileri-fark operatörü** olarak adlandırılır. Benzer şekilde yüksek mertebeden sonlu farklar da tanımlanır. Mesela

$$\Delta^2 f(t) = \Delta(\Delta f(t)) \; .$$

(2.1) formülünü iki kez uygulayarak ikinci mertebeden sonlu fark için

$$\Delta^2 f(t) = [f(t+2h) - f(t+h)]\text{-}[f(t+h) - f(t)] = f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)$$

formülünü buluruz. Uygun olarak $n-1$. mertebeden $\Delta^{n-1} f(t)$ sonlu farkı tanımlanmış olduğunda n. mertebeden sonlu fark $\Delta(\Delta^{n-1} f(t))$ gibi tanımlanır. $f(t)$ fonksiyonunun n. mertebeden $\Delta^n f(t)$ sonlu farkı için

$$\Delta^n f(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(t+kh) \tag{2.2}$$

formülü doğrudur. Burada

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \; .$$

(2.1) formülü matematiksel tümevarım yöntemiyle kolaylıkla ispatlanır.

(2.2) formülü ile $f(t)$ fonksiyonunun n. mertebeden sonlu farkı $f(t)$ fonksiyonunun $t, t+h, ..., t+nh$ noktalarındaki değerlerinin yardımıyla hesaplanır. Dikkate alalım ki, $f(t)$ fonksiyonunun $t+nh$ noktasındaki $f(t+nh)$ değerini de bu fonksiyonun t noktasındaki sonlu farkının yardımıyla ifade etmek mümkündür. Bunu göstermek için $\Delta^0 f(t) = f(t)$ alalım. O zaman

$$f(t+h) = f(t) + \Delta f(t) = \Delta^0 f(t) + \Delta^1 f(t)$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu işlemleri ardışık olarak devam ettirerek

$$f(t+nh) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k f(t)$$

formülünü buluruz. Bu formül matematiksel tümevarım yönteminin uygulanmasıyla kolaylıkla elde edilir.

2.2. Lineer Fark Denkleminin Tanımı

$$a_0(t)\Delta^n x(t) + a_1(t)\Delta^{n-1} x(t) + ... + a_n(t)\Delta^0 x(t) = F(t) \tag{2.3}$$

şeklindeki denkleme n. mertebeden **lineer fark denklemi** denir. Bu denklemde $x(t)$ aranan bilinmeyen fonksiyon $a_0(t), a_1(t), ..., a_n(t)$ ve $F(t)$ verilmiş fonksiyonlardır.

(2.2) formülünü kullanarak (2.3) denklemini

$$c_0(t)x(t+nh) + c_1(t)x(t+(n-1)h) + ... + c_n(t)x(t) = F(t) \tag{2.4}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemde $c_0(t) \neq 0$ ve $c_n(t) \neq 0$ şartları sağladığında n sayısına (2.4) denkleminin mertebesi denir.

(2.4) denkleminde $c_n(t) \equiv 0$ olduğunda bu denklem serbest değişkenin lineer değişimi ile daha küçük mertebeden denkleme getirilebilir. Gerçekten de (2.4) denkleminde

$$c_n(t) \equiv c_{n-1}(t) \equiv ... \equiv c_{n-k+1}(t) \equiv 0$$

olduğunu, ama $c_{n-k}(t) \neq 0$ olduğunu varsayalım. O zaman serbest değişkenin $t^{'} = t + kh$ değişimini yaparak (2.4) denklemini $n-k$ mertebeden denkleme dönüştürebiliriz.

(2.4) denkleminde h=1 alırsak ve (2.4) denkleminin her yanını $c_0(t)$ fonksiyonuna bölersek bu denklemi

$$x(t+n) + p_1(t)x(t+n-1) + ... + p_n(t)x(t) = f(t) \tag{2.5}$$

şekle getirmiş oluruz. Bu denklemde $p_n(t) \neq 0$ olduğunu varsayarız.

(2.5) denklemini sağlayan sürekli $x(t)$ fonksiyonuna (2.5) denkleminin **sürekli çözümü** denir.

(2.5) denkleminde aranan $x(t)$ fonksiyonunun $t, t+1, ..., t+n$ noktalarındaki değerleri bulunduğundan bu denklemin çözümü, uzunluğu n sayısından küçük olmayan aralıkta tanımlanması gerekir.

2.3. Lineer Fark Denklemlerinin Çözümlerinin Varlığı ve Tekliği Teoremi

Bir t_0 sayısının verildiğini varsayalım. O zaman $[t_0, t_0+n]$ aralığına başlangıç aralık denir. $[t_0, t_0+n]$ başlangıç aralığını E_{t_0} ile gösterelim, yani $E_{t_0} = [t_0, t_0+n]$ olsun.

Lineer fark denklemleri için aşağıdaki varlık ve teklik teoremi doğrudur.

Teorem 2.1. Başlangıcı $[t_0, t_0+n]$ aralığında tanımlanmış sürekli $\varphi(t)$ başlangıç fonksiyonunun verildiğini ve bu fonksiyonun

$$\varphi(t_0+n) + p_1(t_0)\varphi(t_0+n-1) + ... + p_n(t_0)\varphi(t_0) = f(t_0) \tag{2.6}$$

eşitliğini sağladığını varsayalım. (2.5) denklemindeki $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonlarının $[t_0, T]$, $T > t_0 + n$ aralığında sürekli fonksiyonlar olduklarını varsayalım. O zaman (2.5) denkleminin başlangıç $[t_0, t_0+n]$ aralığında başlangıç

$\varphi(t)$ fonksiyonu ile çakışan $[t_0, T]$ aralığında (2.5) denklemini sağlayan sürekli çözümü vardır ve bu çözüm tektir.

İspat:

$$x(t+n) = -p_1(t)x(t+n-1) - ... - p_n(t)x(t) + f(t) \quad (2.7)$$

denklemini (2.5) denkleminden buluruz. (2.7) denklemini $t_0 \le t \le t_0 + 1$ aralığında ele alırsak

$$x(t+n) = -p_1(t)\varphi(t+n-1) - ... - p_n(t)\varphi(t) + f(t) \quad (2.8)$$

buluruz. (2.8) formülü (2.5) denkleminin $[t_0 + n, t_0 + n + 1]$ aralığında sürekli olan çözümünü belirler. Çözümün $t_0 + n$ noktasında sürekli olması (2.6) şartından alınır.

Burada kullandığımız yöntemle (2.5) denkleminin $[t_0 + n, t_0 + n + k]$ aralığında sürekli çözümünün bulunduğunu varsayalım. O zaman $t_0 + k \le t \le t_0 + k + 1$ aralığında (2.7) eşitliğinin sağ yanındaki ifadede tüm fonksiyonlar sürekli fonksiyon olur. Bu yüzden $t_0 + k \le t \le t_0 + k + 1$ aralığında (2.7) formülü ile (2.5) denkleminin $[t_0 + n + k, t_0 + n + k + 1]$ aralığında sürekli çözümü bulunur. Her bir aralıkta (2.7) formülü ile bulunan ve başlangıç aralıkta $\varphi(t)$ başlangıç fonksiyonuyla çakışan çözüm tek olarak bulunduğundan; bu yöntemle bulunan çözüm tek olur.

Bu teoremin ispatında kullandığımız metoda **adımlar metodu** denir. Bu metodla verilmiş başlangıç fonksiyona nazaran (2.5) denkleminin çözümü bulunabilir.

2.4. Lineer Fark Denklemlerinin Diskret Çözümleri

(2.5) denkleminin sürekli çözümünden başka diskret çözümleri de ele alınır. (2.5) denkleminin t_0 noktasına uygun $x_0, x_1, ..., x_k, ...$ sayıları k=0,1,2,… için

$$x_{n+k} + p_1(t_0 + k)x_{n+k-1} + ... + p_n(t_0 + k)x_k = f(t_0 + k) \quad (2.9)$$

denklemini sağladığında $x_0, x_1, ..., x_k, ...$ dizisine (2.5) denkleminin **diskret(kesikli) çözümü** denir. $t_0, x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ sayılar verildiğinde (2.5) denkleminin diskret çözümleri dizisinin tek olarak bulunduğu açıktır. $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ sayılarına $x_0, x_1, ..., x_k, ...$ çözümünün **başlangıç değerleri** denir. t_0 noktasına **başlangıç nokta** denir.

(2.9) bağlantısı $x_n, x_{n+1}, ...$ değerlerinin bulunması için rekkurent formül olur. $x(t)$ fonksiyonu (2.5) denkleminin sürekli çözümü olduğunda $x(t_0),\ x(t_0+1), ...,\ x(t_0+k), ...$ değerler dizisi (2.5) denkleminin diskret çözümü olur. Diskret çözümü de $x(t)$ fonksiyonu şeklinde yazmak olur. Ama bu halde $x(t)$ fonksiyonu yalnız $T = \{t_0, t_0+1, ..., t_0+k, ...\}$ noktaları kümesinde tanımlanmış olur. Burada $T_0 = \{t_0, t_0+1, ..., t_0+n-1\}$ kümesine **başlangıç küme** denir.

(2.5) denkleminin $x(t)$ diskret çözümü belli olduğunda ve bu çözümün $t = t_0$ başlangıç noktasında $x_0, x_1, x_2 ..., x_{n-1}$ değerlerini aldığı belli olursa o zaman $\varphi(t_0+k) = x_k$, k =0,1,2,…,n-1 eşitliklerini sağlayan bir sürekli $\varphi(t)$ fonksiyonu alarak, $x(t)$ diskret çözümü ile $t_0 + k$, $k = 0,1,2,\dots$ noktalarında (2.5) denkleminin diskret çözümü ile çakışan sürekli çözümünü bulabiliriz.

3. n. MERTEBEDEN LİNEER FARK DENKLEMLERİ

3.1. n. Mertebeden Lineer Homojen Fark Denklemleri

3.1.1. n. Mertebeden Lineer Homojen Fark Denklemleri ve Uygun Lineer Fark Operatörünün Tanımı ve Özellikleri

Aşağıdaki

$$x(t+n)+p_1(t)x(t+n-1)+...+p_n(t)x(t)=0 \tag{3.1.1}$$

denklemine (2.5) denkleminin **lineer homojen fark denklemi** denir. Bu denklemin sol yanını

$$L(x)\equiv x(t+n)+p_1(t)x(t+n-1)+...+p_n(t)x(t) \tag{3.1.2}$$

şeklinde gösterirsek (3.1.1) denklemini kısaca $L(x)=0$ şeklinde yazabiliriz.

$L(x)$ 'e **lineer fark operatörü** denir [5].

Lineer fark operatörü aşağıdaki iki esas özelliğe sahiptir.

Sonuç 3.1.1. Sabit çarpan, lineer operatörden lineer operatör işaretinin dışına alınabilir:

$$L(cx)\equiv cL(x) \quad .$$

Gerçektende,

$$L(cx)\equiv(cx(t+n))+p_1(t)(cx(t+n-1))+...+p_n(t)(cx(t))\equiv$$
$$c[x(t+n)+p_1(t)x(t+n-1)+...+p_n(t)x(t)]\equiv c.L(x) \quad .$$

Sonuç 3.1.2. Keyfi alınmış iki $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ fonksiyonları için

$$L(x_1+x_2)\equiv L(x_1)+L(x_2)$$

eşitliği sağlanır.

Gerçektende,

$$L(x_1+x_2)\equiv(x_1(t+n)+x_2(t+n))+p_1(t)(x_1(t+n-1)+x_2(t+n-1))+\ldots+$$
$$p_n(t)(x_1(t)+x_2(t))\equiv\ [x_1(t+n)+p_1(t)x_1(t+n-1)+\ldots+p_n(t)x_1(t)]$$
$$+[x_2(t+n)+p_1(t)x_2(t+n-1)+\ldots+p_n(t)x_2(t)]\equiv L(x_1)+L(x_2)\ .$$

$L(x)$ lineer operatörünün Sonuç 3.1.1 ve Sonuç 3.1.2 özelliklerinden

$$L\left(\sum_{i=1}^{m}c_ix_i\right)\equiv\sum_{i=1}^{m}c_iL(x_i)$$

sonucu alınır. Burada c_i keyfi sabit sayılar, $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ise keyfi alınmış fonksiyonlardır.

Lineer L operatörünün burada gösterdiğimiz özelliklerine dayanarak lineer homojen fark denklemlerinin çözümleri hakkında aşağıdaki teoremleri yazıp ispatlayalım.

Teorem 3.1.1. $x_1(t)$ fonksiyonu lineer homojen $L(x)=0$ denkleminin çözümü olduğunda, keyfi c sabiti için $cx_1(t)$ fonksiyonu da bu denklemin çözümü olur.

İspat: $L(x_1)\equiv 0$ olduğu verilmiş, $L(cx_1)\equiv 0$ olduğunu ispatlamamız gerekir.

L operatörünün Sonuç 3.1.1 özelliğini kullanarak

$$L(cx_1)\equiv cL(x_1)\equiv 0$$

buluruz.

Teorem 3.1.2. $L(x)=0$ denkleminin $x_1(t)$**,** $x_2(t)$ çözümlerinin $x_1(t)+x_2(t)$ toplamı da bu denklemin çözümü olur.

İspat: $L(x_1)\equiv 0$ ve $L(x_2)\equiv 0$ olduğu verilmiştir. $L(x_1+x_2)\equiv 0$ olduğunu ispatlamamız gerekir. L operatörünün Sonuç 3.1.2 özelliğini kullanarak

$$L(x_1+x_2)\equiv L(x_1)+L(x_2)\equiv 0$$

olduğunu buluruz.

Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2'den aşağıdaki sonuç bulunur.

Sonuç 3.1.3. $L(y)=0$ denkleminin $x_1(t), x_2(t),..., x_m(t)$ çözümlerinin keyfi sabit $c_1, c_2,..., c_m$ sayıları için

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+...+c_mx_m(t)$$

lineer kombinasyonu da bu denklemin çözümü olur.

Teorem 3.1.3. $p_1(t), p_2(t),..., p_n(t)$ reel katsayılı $L(x)=0$ denkleminin

$$x(t)=u(t)+iv(t)$$

şekilli kompleks değerli çözümü olduğunda, bu $x(t)$ çözümünün reel kısmı $u(t)$ ve sanal kısmı $v(t)$ fonksiyonları ayrı ayrı bu $L(x)=0$ denkleminin çözümü olurlar.

İspat:

$$L(u(t)+iv(t))\equiv 0$$

olduğu verilmiştir. $L(u)\equiv 0$ ve $L(v)\equiv 0$ olduğunu ispatlamamız gerekir.

L operatörünün Sonuç 3.1.1 ve Sonuç 3.1.2 özelliklerini kullanarak

$$L(u+iv)\equiv L(u)+iL(v)\equiv 0$$

olduğunu buluruz. Kompleks sayının sıfıra eşit olmasından, bu sayının reel ve sanal kısmının sıfıra eşit olması alınır, $L(u)\equiv 0$ ve $L(v)\equiv 0$ olduğu bulunur.

3.1.2. n. Mertebeden Lineer Fark Denklemlerinin Genel Çözümü

Şimdi (3.1.1) denkleminin aşağıdaki

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t_0)=x_{10}, x_1(t_0+1)=x_{11},..., x_1(t_0+n-1)=x_{1,n-1}, \\ x_2(t_0)=x_{20}, x_2(t_0+1)=x_{21},..., x_2(t_0+n-1)=x_{2,n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(t_0)=x_{n0}, x_n(t_0+1)=x_{n1},..., x_n(t_0+n-1)=x_{n,n-1}. \end{array}\right\} \quad (3.1.3)$$

başlangıç şartlarını sağlayan $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$ çözümünü ele alalım. $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$ fonksiyonlarının aşağıdaki determinantını tanımlayalım:

$$V(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_1(t+1) & ... & x_1(t+n-1) \\ x_2(t) & x_2(t+1) & ... & x_2(t+n-1) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_n(t) & x_n(t+1) & ... & x_n(t+n-1) \end{vmatrix}. \quad (3.1.4)$$

Bu determinantı, (3.1.1) denkleminin Wronskii determinantı veya Wronskiyan'ı olarak adlandıralım.

Tanım 3.1.1. Aşağıdaki eşitlikle tanımlanan

$$V(t_0)=\begin{vmatrix} x_{10} & x_{11} & ... & x_{1,n-1} \\ x_{2o} & x_{21} & ... & x_{2,n-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n0} & x_{n1} & ... & x_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

determinantı sıfırdan farklı olduğunda (3.1.1) denkleminin (3.1.3) başlangıç şartlarını sağlayan $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$ çözümüne (3.1.1) denkleminin temel çözümü denir.

Teorem 3.1.4. $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$ fonksiyonları sistemi (3.1.1) denkleminin temel çözümü olduğunda, (3.1.1) denkleminin keyfi $x(t)$ çözümü

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+...+c_nx_n(t) \quad (3.1.5)$$

lineer birleşimi şeklinde olur. (3.1.5) açılımında $c_1, c_2,..., c_n$ keyfi sabitlerdir.

İspat: Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2 gereğince

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+...+c_nx_n(t)$$

lineer birleşiminin keyfi alınmış $c_1,c_2,...,c_n$ katsayıları için (3.1.1) denkleminin çözümü olduğu görülür. Burada biz $c_1,c_2,...,c_n$ katsayılarının öyle değerlerini bulalım ki, $x(t)$ çözümünün ve $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+...+c_nx_n(t)$ çözümünün başlangıç değerleri çakışsın. Bunun için aşağıdaki lineer cebirsel denklemler sistemini $c_1,c_2,...,c_n$ katsayılarına göre çözmemiz gerekir:

$$\left.\begin{array}{l} c_1x_{10}+c_2x_{20}+...+c_nx_{n0}=x(t_0), \\ c_1x_{11}+c_2x_{21}+...+c_nx_{n1}=x(t_0+1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1x_{1,n-1}+c_2x_{2,n-1}+...+c_nx_{n,n-1}=x(t_0+n-1). \end{array}\right\} . \qquad (3.1.6)$$

Teoremin hipotezi gereğince bu sistemin determinantı $V(t_0)$ sıfırdan farklıdır. Bu yüzden de (3.1.6) sisteminin tek çözümü vardır. Bu bize gösterir ki, T_0 başlangıç kümesinde

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+...+c_nx_n(t)$$

eşitliği sağlanır. (3.1.1) denkleminin çözümünün tekliği teoreminden (3.1.5) eşitliğinin tüm T kümesinde sağlandığı bulunur.

Tanım 3.1.2. (3.1.1) denkleminin temel çözümler sistemi $x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)$ fonksiyonları aşağıdaki

$$\begin{array}{l} x_1(t_0)=1, x_1(t_0+1)=0,..., x_1(t_0+n-1)=0, \\ x_2(t_0)=0, x_2(t_0+1)=1,..., x_2(t_0+n-1)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n(t_0)=0, x_n(t_0+1)=0,..., x_n(t_0+n-1)=1. \end{array}$$

başlangıç şartlarını sağladığında (3.1.1) denkleminin bu $x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)$ temel çözümüne **normal temel çözümü** denir. $t=t_0$ başlangıç noktasında

$x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ fonksiyonları sistemi (3.1.1) denkleminin normal temel çözümleri sistemi olduğunda, (3.1.1) denkleminin keyfi $x(t)$ çözümü

$$x(t) = x(t_0)x_1(t) + x(t_0+1)x_2(t) + ... + x(t_0+n-1)x_n(t)$$

şeklinde gösterilir. Bu açılımın doğruluğu, (3.1.6) sisteminde $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ sisteminin normal temel çözümler sistemi olduğu dikkate alınarak gösterilir.

3.1.3. n. Mertebeden Lineer Fark Denkleminin Temel Çözümler Sisteminin Wronskiyan Determinantının Sıfırdan Farklı Olması

Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 3.1.5. $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ fonksiyonları sisteminin (3.1.1) denkleminin temel çözümü olduğu ve $t \in T$ için $p_n(t) \neq 0$ sağlansın. O zaman her bir $t \in T$ için $V(t) \neq 0$ sağlanır.

İspat: Bu teoremi ispatlamak için tümevarım yöntemini uygulayalım. Teoremin hipotezi gereğince $V(t) \neq 0$. $V(t) \neq 0$ olduğunu kabul edip $V(t+1) \neq 0$ ifadesini ispatlayalım. $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ fonksiyonları (3.1.1) denkleminin çözümü olduğundan aşağıdaki sistemi buluruz.

$$\begin{gathered}
p_1(t)x_1(t+n-1) + p_2(t)x_1(t+n-2) + ... + p_n(t)x_1(t) = -x_1(t+n), \\
p_1(t)x_2(t+n-1) + p_2(t)x_2(t+n-2) + ... + p_n(t)x_2(t) = -x_2(t+n), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
p_1(t)x_n(t+n-1) + p_2(t)x_n(t+n-2) + ... + p_n(t)x_n(t) = -x_n(t+n).
\end{gathered}$$

Bu sistem $p_1(t), p_2(t), ..., p_n(t)$ için lineer sistemdir. Bu sistemin $p_n(t)$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde buluruz:

$$p_n(t) = -\frac{\begin{vmatrix} x_1(t+n-1) & \dots & x_1(t+1) & x_1(t+n) \\ x_2(t+n-1) & \dots & x_2(t+1) & x_2(t+n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n(t+n-1) & \dots & x_n(t+1) & x_n(t+n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1(t+n-1) & x_1(t+n-2) & \dots & x_1(t) \\ x_2(t+n-1) & x_2(t+n-2) & \dots & x_2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n(t+n-1) & x_n(t+n-2) & \dots & x_n(t) \end{vmatrix}}.$$

Bu sonuncu eşitlikten aşağıdaki $V(t+1)$ eşitliğini buluruz:

$$V(t+1) = (-1)^n p_n(t) V(t)$$

$t \in T$ için teoremin şartına göre $p_n(t) \neq 0$ olduğundan ve varsayımımıza göre $V(t) \neq 0$ aldığımızdan, bu eşitliğin her bir $t \in T$ için $V(t+1) \neq 0$ olduğu ispatlanmış olur. Böylece her bir $t \in T$ için $V(t) \neq 0$ olduğu ispatlanmış olur.

3.1.4. n. Mertebeden Lineer Fark Denkleminin Çözümleri İle İlgili Teoremler

Tanım 3.1.3. T kümesinde tanımlanmış $f_1(t), f_2(t),..., f_n(t)$ fonksiyonları için tümü aynı anda sıfıra eşit olmayan öyle $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sabit sayıları bulunursa ve her bir $t \in T$ için

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + ... + \alpha_n f_n(t) = 0 \tag{3.1.7}$$

eşitliği sağlandığında, $f_1(t), f_2(t),..., f_n(t)$ fonksiyonları sistemi $t \in T$ kümesinde lineer bağımlıdır denir. T kümesinde (3.1.7) eşitliği yalnız ve yalnız $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ için sağlandığında, $f_1(t), f_2(t),..., f_n(t)$ fonksiyonları sistemi T kümesinde lineer bağımsızdır denir.

Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 3.1.6. (3.1.1) denkleminin (3.1.3) başlangıç şartlarını sağlayan $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$ çözümlerinin T kümesinde lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart, bu çözümler sisteminin başlangıç T_0 kümesinde lineer bağımlı olmalarıdır. Tümü sıfır olmayan öyle $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sabit sayıları için,

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + ... + \alpha_n x_n(t) = 0$$

eşitliği T_0 başlangıç kümesinde sağlandığında, bu lineer bağımlılık aynı $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sabit sayılarıyla tüm T kümesinde sağlanacaktır.

İspat: Gerekliliğin İspatı**.** T_0 kümesi T kümesinin alt kümesi olduğundan, $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ fonksiyonlar sistemi T kümesinde lineer bağımlı olduğunda; T kümesinin her bir alt kümesinde de lineer bağımlı olur. Böylece $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ fonksiyonlar sisteminin T kümesinde lineer bağımlı olmalarından, bu fonksiyonların T_0 başlangıç kümesinde de lineer bağımlı oldukları bulunur.

Yeterliliğin ispatına gelince, $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ fonksiyonlarının T_0 kümesinde lineer bağımlı olduklarını varsayalım. Bu o demektir ki, T_0 kümesindeki $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ fonksiyonlarından birini diğerlerinin lineer birleşimi şeklinde yazabiliriz. Genelliği bozmadan α_n katsayısının sıfırdan farklı olduğunu, yani $\alpha_n \neq 0$ olduğunu varsayalım. O zaman T_0 kümesinde

$$\left.\begin{aligned} x_{no} &= \beta_1 x_{10} + \beta_2 x_{20} + ... + \beta_{n-1} x_{n-1,0}, \\ x_{n1} &= \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{21} + ... + \beta_{n-1} x_{n-1,1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n,n-1} &= \beta_1 x_{1,n-1} + \beta_2 x_{2,n-1} + ... + \beta_{n-1} x_{n-1,n-1}. \end{aligned}\right\} \quad (3.1.8)$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada

$$\beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_n}, \; i = 1, 2, ..., n-1 \; .$$

(3.1.8) eşitliklerinin birincisini $p_n(t_0)$, ikincisini $p_{n-1}(t_0)$,…, n-cisini $p_1(t_0)$ sayısıyla çarpıp taraf tarafa toplayalım. O zaman

$$p_1(t_0)x_{n,n-1} + p_2(t_0)x_{n,n-2} + ... + p_n(t_0)x_{no} =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i (p_1(t_0)x_{i,n-1} + p_2(t_0)x_{i,n-2} + ... + p_n(t_0)x_{i0}) \ . \qquad (3.1.9)$$

buluruz. Burada $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$ fonksiyonları (3.1.1) denkleminin çözümleri olduklarından, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$-x_{i,n} = p_1(t_0)x_{i,n-1} + p_2(t_0)x_{i,n-2} + ... + p_n(t_0)x_{i,o}, \ i = 1,2,...,n \ . \qquad (3.1.10)$$

Bu yüzdende (3.1.9) eşitliğini

$$-x_{n,n} = \beta_1 x_{1n} + \beta_2 x_{2n} + ... + \beta_{n-1} x_{n-1,n}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitlikten ve (3.1.8) eşitliğinden $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$ fonksiyonlarının $T_1 = \{t_0, t_0 + 1,..., t_0 + n\}$ kümesinde aynı $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$ sabitleriyle lineer bağımlı oldukları bulunur. Bir daha dikkat edelim ki, buradaki $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$ sabit sayıları T_0 kümesine uygun olan katsayılardır.

Şimdi varsayalım ki, biz $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$ fonksiyonlarının

$$T_k = \{t_0, t_0 + 1,..., t_0 + k + n - 1\}$$

kümesinde aynı $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$ katsayılarıyla lineer bağımlı olduklarını gösterdik.

O zaman (3.1.10) eşitliği yerine aşağıdaki

$$-x_{i,n+k} = p_1(t_0 + k)x_{i,n+k-1} + p_2(t_0 + k)x_{i,n+k-2} + ... + p_n(t_0 + k)x_{i,k}$$

eşitliğini kullanabiliriz. Benzer şekilde işlemleri yaparak $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$ fonksiyonlarının $T_{k+1} = \{t_0, t_0 + 1,..., t_0 + k + n\}$ kümesinde aynı $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$

katsayıları ile lineer bağımlı olduklarını gösterebiliriz. Böylece T kümesindeki $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$ fonksiyonlarının T_0 kümesinde lineer bağımlılıkta kullanılmış aynı $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$ katsayıları ile lineer bağımlı olduklarını göstermiş oluruz.

Teorem 3.1.7. (3.1.1) denkleminin $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$ çözümlerinin temel sistem oluşturmaları için gerek ve yeter şart, bu fonksiyonların T kümesinde lineer bağımsız olmalarıdır.

İspat: $V(t_0)$ determinantının satırlarının lineer bağımsız olmaları için gerek ve yeter şart, bu determinantın sıfırdan farklı olmasıdır. Teorem 3.1.6 gereğince, bu şart (3.1.1) denkleminin $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$ çözümlerinin T kümesinde lineer bağımsız olmaları için gerek ve yeter şarttır.

3.2. n. Mertebeden Lineer Homojen Olmayan Fark Denklemleri

3.2.1. n. Mertebeden Lineer Homojen Olmayan Fark Denklemlerinin Çözümleri ve Çözümlerinin Bazı Özellikleri

n. mertebeden lineer homojen olmayan

$$x(t+n) + p_1(t)x(t+n-1) + ... + p_n(t)x(t) = f(t) \tag{2.5}$$

fark denklemini ele alalım. Bu denklemde $f(t) \equiv 0$ aldığımızda, bu (2.5) denklemine uygun homojen

$$x(t+n) + p_1(t)x(t+n-1) + ... + p_n(t)x(t) = 0$$

denklemine dönüşür. (3.1.2) eşitliği ile tanımlanan $L(x)$ fark operatörünü kullanarak (2.5) denklemini kısaca

$$L(x) = f(t)$$

şeklinde yazabiliriz. Lineer operatörün iki esas

$$L(cx) = cL(x)$$

ve

$$L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2)$$

özelliklerini kullanarak aşağıdaki özellikleri gösterelim.

Sonuç 3.2.1. $x_1(t)$ fonksiyonu homojen $L(x) = 0$ denkleminin çözümü, $\tilde{x}(t)$ fonksiyonu ise homojen olmayan $L(x) = f(t)$ denkleminin çözümü olduğunda, $x_1(t) + \tilde{x}(t)$ toplamı homojen olmayan $L(x) = f(t)$ denkleminin çözümü olur.

İspat:

$$L(x_1 + \tilde{x}) = L(x_1) + L(\tilde{x})$$

olduğundan ve

$$L(x_1) \equiv 0,\ L(\tilde{x}) \equiv f(t)$$

olduğundan,

$$L(x_1 + \tilde{x}) \equiv f(t)$$

olur.

Sonuç 3.2.2. $x_i(t),\ i = 1, 2, ..., m$ fonksiyonları uygun olarak

$$L(x) = f_i(t),\ i = 1, 2, ..., m$$

denklemlerinin çözümleri olduklarında $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ keyfi sabit sayılar olmak üzere

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + ... + \alpha_m x_m(t)$$

fonksiyonu

$$L(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(t)$$

denkleminin çözümü olur.

İspat:

$$L\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right)\equiv\sum_{i=1}^{m}L(\alpha_i x_i)\equiv\sum_{i=1}^{m}\alpha_i L(x_i)\,,$$

ama

$$L(x_i)\equiv f_i(t)$$

olduğundan

$$L\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right)\equiv\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(t)$$

olduğu bulunur. Lineer homojen olmayan denklemlerin bu özelliğine onların **süper- pozisyon prensibi** denir.

Sonuç 3.2.3.

$$L(x)=U(t)+iV(t)$$

denkleminde $p_1(t), p_2(t),..., p_n(t)$ ve $U(t), V(t)$ fonksiyonları reel fonksiyonlar olduklarında ve

$$x(t)=u(t)+iv(t)$$

fonksiyonu

$$L(x)=U(t)+iV(t)$$

denkleminin çözümü olduğunda çözümün $u(t)$ reel kısmı ve $v(t)$ sanal kısmı uygun olarak

$$L(x) = U(t)$$

ve

$$L(x) = V(t)$$

denklemlerinin çözümü olur.

İspat: Burada

$$L(u + iv) \equiv U(t) + iV(t)$$

ve ya

$$L(u) + iL(v) = U(t) + iV(t)$$

şeklinde yazabiliriz. Kompleks sayıların eşitliği kuralından burada eşitliğin ayrı ayrı reel kısımları reel kısmına, sanal kısımları da sanal kısmına eşit olur, yani

$$L(u) \equiv U(t), \;\; L(v) \equiv V(t) \;\; .$$

Böylece sonuç ispatlanmış oldu.

3.2.2. n. Mertebeden Lineer Homojen Olmayan Fark Denklemlerinin Genel Çözümü Hakkında Teorem

Teorem 3.2.1. $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ fonksiyonlarının $T = \{t_0, t_0 + 1, ..., t_0 + k, ...\}$ kümesinde tanımlandığını ve (3.1.1) denkleminin temel çözümü olduğunu varsayalım. O zaman homojen olmayan (2.5) denkleminin başlangıç noktası t_0 olmasıyla genel çözümü

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + ... + c_n x_n(t) + \tilde{x}(t) \qquad (3.2.1)$$

şeklinde gösterilir. Burada $c_1, c_2, ..., c_n$ keyfi sabit sayılar, $\tilde{x}(t)$ fonksiyonu homojen olmayan (2.5) denkleminin herhangi bir çözümüdür.

İspat: Burada

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)$$

toplamı homojen $L(x)=0$ denkleminin çözümü, $\tilde{x}(t)$ ise homojen olmayan

$$L(x) = f(t)$$

denkleminin bir özel çözümü olduğundan homojen olmayan fark denkleminin sonuç 3.1.1 özelliğinden

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t) + \tilde{x}(t)$$

toplamının $L(x) = f(t)$ denkleminin çözümü olduğu bulunur. Şimdi bu çözümün homojen olmayan fark denklemin genel çözümü olduğunu gösterelim. Bunun için burada

$$x(t_0) = x_0, x(t_0+1) = x_1, ..., x(t_0+n-1) = x_{n-1}$$

olduğunu varsayalım. $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ sistemi $L(x)=0$ homojen denkleminin temel çözümü olduğundan $V(t_0)$ determinantı sıfırdan farklıdır. Bu yüzden $c_1, c_2, ..., c_n$ katsayıları için aşağıdaki cebirsel lineer homojen olmayan denklemin tek çözümü olur:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 x_{10} + c_2 x_{20} + ... + c_n x_{n0} + \tilde{x}(t_0) = x_0, \\ c_1 x_{11} + c_2 x_{21} + ... + c_n x_{n1} + \tilde{x}(t_0+1) = x_1, \\ .... \\ c_1 x_{1,n-1} + c_2 x_{2,n-1} + ... + c_n x_{n,n-1} + \tilde{x}(t_0+n-1) = x_{n-1}. \end{array}\right\} .$$

Bu ise onu gösterir ki, $x(t)$ çözümü T_0 kümesinde (3.2.1) şeklinde gösterilebilir. Çözümün tekliğinden bu (3.2.1) açılımının T kümesinde de doğru olduğu alınır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

3.2.3. n. Mertebeden Lineer Homojen Olmayan Fark Denklemlerinin Bir Özel Çözümünün Bulunmasında Sabitlerin Varyasyonu Metodunun Uygulanması

Homojen (3.1.1) denkleminin $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ temel çözümü belli olduğunda, homojen (3.1.1) denkleminin genel çözümünün

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + ... + c_n x_n(t)$$

olduğunu gösterdik. Homojen olmayan (2.5) denkleminin bir özel çözümü sabitlerin varyasyonu metoduyla

$$\tilde{x}(t) = c_1(t) x_1(t) + c_2(t) x_2(t) + ... + c_n(t) x_n(t)$$

şeklinde aranır. Bu yöntemle (2.5) denkleminin bir bilinmeyen $\tilde{x}(t)$ çözümünün bulunması n tane $c_1(t), c_2(t), ..., c_n(t)$ bilinmeyen fonksiyonların bulunmasına getirilmiş olur. Bu bilinmeyen $c_1(t), c_2(t), ..., c_n(t)$ fonksiyonları öyle seçilir ki,

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\ x_i(t)$$

lineer birleşimi (2.5) denkleminin çözümü olur. Bilinmeyen fonksiyonların sayısı n olduğundan bu fonksiyonlar üzerine

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\ x_i(t)$$

toplamının (2.5) denkleminin çözümü olmasından başka $n-1$ tane de ek şart konulabilir. O zaman $c_1(t), c_2(t), ..., c_n(t)$ fonksiyonlarının bulunması için n tane şart almış oluruz.

Burada

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\ x_i(t)$$

toplamı için farkları yazdığımızda $c_i(t)$ fonksiyonlarının sabit sayılar gibi alınması şartından $c_i(t)$ fonksiyonları için aşağıdaki $n-1$ şart yazılır:

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n} c_i(t+n-1)x_i(t+n-1)=\sum_{i=1}^{n} c_i(t)x_i(t+n-1),\\ \sum_{i=1}^{n} c_i(t+n-2)x_i(t+n-2)=\sum_{i=1}^{n} c_i(t)x_i(t+n-2),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum_{i=1}^{n} c_i(t+1)x_i(t+1)=\sum_{i=1}^{n} c_i(t)x_i(t+1).\end{array}\right\}. \qquad (3.2.2)$$

Bu şartlara ilave olarak

$$\tilde{x}(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\ x_i(t)$$

toplamının (2.5) denkleminin çözümü olması şartından da

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(t+n)\ x_i(t+n)+p_1(t)\sum_{i=1}^{n} c_i(t+n-1)\ x_i(t+n-1)+\ldots+$$

$$p_n(t)\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\ x_i(t)=f(t) \qquad (3.2.3)$$

şartı bulunur. (3.2.2) ve (3.2.3) denklemler sisteminden $c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t)$ fonksiyonlarının bulunması için önce bu denklemlerde bazı değişimler yapalım.

Önce (3.2.2) denkleminin birinci denkleminde t serbest değişkenini $t+1$ değişkeni ile değiştirelim. O zaman

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(t+n)\ x_i(t+n)=\sum_{i=1}^{n} c_i(t+1)\ x_i(t+n)$$

buluruz. Sonra

$$c_i(t+1)=c_i(t)+\Delta c_i(t)$$

olduğundan

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(t+n)\ x_i(t+n)=\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\ x_i(t+n)+\sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(t)\ x_i(t+n)$$

buluruz. Bu sonuncu eşitliği ve (3.2.2) eşitliklerini kullanarak (3.2.3) denklemini aşağıdaki şekle dönüştürelim:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(t) x_i(t+n) + c_1(t)[x_1(t+n) + p_1(t)x_1(t+n-1) + \ldots + p_n(t)x_1(t)] + \ldots +$$
$$c_n(t)[x_n(t+n) + p_1(t)x_n(t+n-1) + \ldots + p_n(t)x_n(t)] = f(t)\,.$$

$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ fonksiyonları (3.1.1) denkleminin çözümleri olmalarından dolayı bu eşitliğin sol yanında kare parantez içerisindeki ifadelerin her biri sıfıra eşit olur. Sonuçta bu denklem

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(t)\; x_i(t+n) = f(t) \qquad (3.2.4)$$

şekline getirilmiş olur. Şimdi (3.2.2) sisteminde benzer işlemler yapalım.

(3.2.2) sisteminin sonuncu denklemini

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(t)\; x_i(t+1) = 0$$

şeklinde yazalım. Sonra ise bu denklemde t değişkenini $t+1$ ile değiştirelim. Bulunmuş denklemi (3.2.2) sisteminin son denkleminden önceki denklemden taraf tarafa çıkaralım. O zaman

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(t)\; x_i(t+2) = 0$$

buluruz. Aynı şekilde işlemleri devam ettirerek

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(t)\; x_i(t+3) = 0,$$

....

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(t)\ x_i(t+n-1) = 0.$$

eşitlikleri bulunur. Tüm bu denklemleri (3.2.4) denklemi ile birlikte bir sistem şeklinde yazarak aşağıdaki denklemler sistemini buluruz:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(t) x_i(t+1) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(t) x_i(t+2) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(t) x_i(t+n-1) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(t) x_i(t+n) = f(t). \end{array}\right\} . \tag{3.2.5}$$

(3.2.5) sistemi Δc_i bilinmeyenlerine göre lineer homojen olmayan cebirsel denklemler sistemidir. Bu sistemin determinantı $V(t+1)$ determinantıdır. $p_n(t) \neq 0$ olduğunda Teorem 3.1.5'e göre T kümesinde $V(t)$ determinantı sıfırdan farklı olur. Bu yüzdende (3.2.5) sisteminden $\Delta c_1(t),\ \Delta c_2(t), ...,\ \Delta c_n(t)$ bilinmeyenlerinin tek

$$\Delta c_1(t) = \varphi_1(t),\ \Delta c_2(t) = \varphi_2(t), ...,\ \Delta c_n(t) = \varphi_n(t) \tag{3.2.6}$$

çözümü bulunur. Bu eşitliklerin sağ yanlarında olan $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t), ...,\ \varphi_n(t)$ fonksiyonları belli fonksiyonlardır. $c_i(t)$ fonksiyonlarına t_0 noktasında başlangıç değerler vererek, mesela

$$c_i(t_0) = 0,\ \ i = 1, 2, ..., n$$

başlangıç şartları vererek (3.2.6) denklemlerinden $c_i(t)$ fonksiyonlarını

$$c_i(t_0+k)=\sum_{v=0}^{k-1}\varphi_i(t_0+v)$$

gibi buluruz. (2.5) denkleminin özel $\tilde{x}(t)$ çözümü aşağıdaki şekilde bulunmuş olur:

$$\tilde{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i(t)\ x_i(t) \quad .$$

3.3. Sabit Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklemleri

3.3.1. Sabit Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklemlerinin Karakteristik Denklemi ve Genel Çözümünün Bulunması Yöntemi

n. mertebeden sabit katsayılı lineer homojen fark denklemini, yani

$$a_0x(t+n)+a_1x(t+n-1)+...+a_nx(t)=0 \tag{3.3.1}$$

denklemini ele alalım. Bu denklemde $a_0,a_1,...,a_n$ katsayıları verilmiş, sabit sayılardır. Bu denklemin çözümünü

$$x=z^t$$

şeklinde arayalım. Burada z belirsiz aranan bir sayıdır. $x=z^t$ çözümünü (3.3.1) denkleminde yerine yazıp sonra a_0z^t çarpımıyla sadeleştirirsek, aranan z parametresine göre aşağıdaki n. dereceden cebirsel denklemi buluruz:

$$z^n+p_1z^{n-1}+...+p_n=0 \tag{3.3.2}$$

Bulduğumuz bu (3.3.2) denklemine (3.3.1) denkleminin **karakteristik denklemi** ve bu denklemin sol yanındaki

$$Q(z)=z^n+p_1z^{n-1}+...+p_n$$

polinomuna (3.3.1) denkleminin **karakteristik polinomu** denir.

(3.3.2) denkleminin reel ve tekrarlanmayan farklı $z_1,z_2,...,z_n$ köklerinin olduğunu varsayalım. Bu halde (3.3.1) denkleminin n tane

$$x_1 = z_1^{\,t}, x_2 = z_2^{\,t}, ..., x_n = z_n^{\,t}$$

çözümleri bulunur. Bu çözümlerin lineer bağımsız fonksiyonlar olduklarını gösterelim. Bunu göstermek için aksini farz edelim. Varsayalım ki, öyle $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sabit sayıları hep birden sıfır olmasın ve

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| > 0\right)$$

şartı sağlansın. Yani $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sayılarının tümü aynı anda sıfıra eşit değildir ve

$$\alpha_1 z_1^{\,t} + \alpha_2 z_2^{\,t} + ... + \alpha_n z_n^{\,t} = 0$$

denklemi her bir $t \in T$ için sağlanır. Sabit katsayılı denklem halinde bu sonuncu eşitliğin her bir t doğal sayısı için sağlanacağı Teorem 3.1.6'dan bulunur. Önce biz burada α_i katsayıları sıfırdan farklı olan $z_1, z_2, ..., z_n$ köklerinden modülü en büyük olan kökün z_k olduğunu varsayalım. O zaman tüm doğal t sayıları için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\alpha_1 \left(\frac{z_1}{z_k}\right)^t + \alpha_2 \left(\frac{z_2}{z_k}\right)^t + ... + \alpha_n \left(\frac{z_n}{z_k}\right)^t = 0.$$

$\alpha_i \neq 0$ şartını sağlayan $i \neq k$ sayıları için

$$\left|\frac{z_i}{z_k}\right| < 1$$

ve

$$\lim_{t \to \infty} \left(\frac{z_i}{z_k}\right)^t = 0$$

olduğundan, var sayımımıza göre $\alpha_k \neq 0$ olduğundan sonsuz küçülenlerin toplamının sıfırdan farklı bir sayıya eşit olduğu bulunur.

Şimdi sıfırdan farklı α_i katsayılarına karşılık gelen z_i^t köklerinin en büyük ve en küçüklerinin modülce birbirine eşit olanlarının (işaretçe bunlar farklı olur) durumunu ele alalım. Bu köklerden en büyüğü z_k, en küçüğünün ise z_j olduğunu var sayalım. Bu halde her bir t doğal sayısı için aşağıdaki eşitliğin sağlandığı görülür:

$$\alpha_1\left(\frac{z_1}{z_k}\right)^t + \alpha_2\left(\frac{z_2}{z_k}\right)^t + \ldots + \alpha_j(-1)^t + \ldots + \alpha_n\left(\frac{z_n}{z_k}\right)^t = 0 \quad .$$

j 'ye eşit olmayan veya k 'ya eşit olmayan herbir i için

$$\left|\frac{z_i}{z_k}\right| < 1$$

ve

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{z_i}{z_k}\right)^t = 0$$

olduğundan, üstte yazdığımız eşitlikte $t \to \infty$ şartında limite geçtiğimizde

$$\lim_{t\to\infty} \alpha_i(-1)^t + \alpha_k = 0$$

bulunur. Bunun ise $\alpha_i \neq 0$ ve $\alpha_k \neq 0$ için mümkün olamadığı açıktır. Böylece, biz $z_1^t, z_2^t, \ldots, z_n^t$ fonksiyonlarının $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sayılarının reel ve farklı iken, lineer bağımsız olduklarını ispatladık. Bu yüzden (3.3.1) denkleminin bu şartlarda genel çözümü

$$x(t) = c_1 z_1^t + c_2 z_2^t + \ldots + c_n z_n^t$$

şeklinde yazılır. Burada $c_1, c_2, \ldots, c_n$ keyfi sabitlerdir.

3.3.2. Sabit Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklemlerinin Genel Çözümünün Bulunmasına Dair Örnekler

Örnek 3.3.1.

$$x(t+2)-3x(t+1)+2x(t)=0$$

denkleminin genel çözümünde verilmiş denklemin karakteristik denklemi

$$z^2-3z+2=0$$

şeklinde yazılır. Bu denklemin kökleri

$$z_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2};\ z_1=1,\ z_2=2$$

şeklinde bulunur. Bu yüzden de verilmiş denklemin genel çözümü

$$x(t)=c_1+c_2 2^t$$

şeklinde olur.

Şimdi (3.3.2) karakteristik denkleminin kompleks kökünün

$$z=\alpha+i\beta$$

olduğunu varsayalım. (3.3.2) denkleminin $p_1, p_2,..., p_n$ katsayıları reel olduklarından dolayı eşlenik

$$\bar{z}=\alpha-i\beta$$

sayısı da (3.3.2) karakteristik denkleminin kökü olur.

$$w(t)=u(t)+iv(t)$$

$L(w)=0$ denkleminin çözümü olduğunda, $u(t)$ reel ve $v(t)$ sanal kısımları da bu $L(w)=0$ denkleminin çözümü olduğunu Teorem 3.1.3'ten hatırlayalım. Bu yüzden de kompleks değerli

$$w=(\alpha+i\beta)^t$$

çözümüne iki tane reel çözüm karşılık gelecektir. Bu çözümleri bulmak için $\alpha + i\beta$ kompleks sayısını trigonometrik şekilde yazalım:

$$\alpha + i\beta = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \ . \tag{3.3.3}$$

Bu yüzden de

$$(\alpha + i\beta)^t = r^t(\cos t\varphi + i\sin t\varphi) \ .$$

olur. Böylece, (3.3.2) denkleminin

$$\alpha \pm i\beta$$

karakteristik sayılarına karşılık gelen reel çözümleri

$$u(t) = r^t \cos t\varphi, \ \ v(t) = r^t \sin t\varphi \tag{3.3.4}$$

olur. Burada

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \ \ \varphi = arctg\frac{\beta}{\alpha} \ .$$

Eşlenik

$$\overline{w} = (\alpha - i\beta)^t$$

çözümüne karşılık gelen reel çözümler $u(t)$ ve $-v(t)$ olduğuna dikkat edelim. Burada kompleks eşlenik çözüm, yeni lineer bağımsız çözüm vermiyor.

Örnek 3.3.2.

$$x(t+2) + 2x(t+1) + 4x(t) = 0$$

denkleminin genel çözümünü bulalım. Denklemin karakteristik denklemi

$$z^2 + 2z + 4 = 0$$

olur. Bu denklemin kökleri

$$z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

olur. Buradan da

$$r = 2,\ \varphi = \frac{5\pi}{3}$$

olduğu bulunur. Bu yüzden denklemin genel çözümü

$$x(t) = c_1 2^t \cos\frac{5\pi}{3} t + c_2 2^t \sin\frac{5\pi}{3} t$$

olur. Şimdi burada karakteristik denklemin tekrarlanan köklerinin olduğu durumda, (3.3.2) denkleminin çözümlerinin bulunması metodunu verebilmemiz için, z -dönüşümü olarak adlandırılan dönüşümün kısaca teorisini vermemiz gerekir. Zira, bu halde (3.3.2) denkleminin çözümünün bulunmasında z -dönüşümü uygulanır.

4. SABİT KATSAYILI LİNEER FARK DENKLEMLERİNİN Z-DÖNÜŞÜMÜNÜN UYGULANMASIYLA ÇÖZÜM METODU

4.1. Diskret Değişkenli Noktalarda Tanımlanmış Fonksiyonların z-Dönüşümü ve Bazı Özellikleri

$t = 0,1,2,...$ noktalarında tanımlanmış $f(t)$ fonksiyonunun verildiğini varsayalım. $f(t)$ fonksiyonunun z-dönüşümü diye, z kompleks değişkenli

$$\tilde{F}(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) z^{-t} \tag{4.1}$$

eşitliği ile tanımlanan $\tilde{F}(z)$ fonksiyonuna denir. Bu dönüşüm sembolik olarak

$$f(t) \doteqdot \tilde{F}(z)$$

şeklinde gösterilir [9]. (4.1) formülünün sağ yanı $\tilde{F}(z)$ fonksiyonunun Laurent açılımıdır. Bu Laurent serisinin düzgün kısmı, yalnız $f(0)$ terimiyle sağlanır. Bu yüzden (4.1) serisinin yakınsaklık bölgesi merkezi koordinat başlangıcında olan bir K dairesinin dışını oluşturur. Aşağıdaki teorem de bu dairenin yarıçapı hakkındadır.

Teorem 4.1. $f(t),\ t = 0,1,2,...$ fonksiyonu için $t \geq 0$ oldukça

$$|f(t)| < Mq^t \tag{4.2}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $M > 0$ ve $q > 0$ sayıları varsa, o zaman (4.1) eşitsizliği ile tanımlanan seri, $|z| > q$ bölgesinde yakınsak olur.

İspat: Teoremi ispatlamak için

$$\sum_{t=0}^{\infty} f(t) u^t$$

kuvvet serisini ele alalım. Bu seri

$$\sum_{t=0}^{\infty} Mq^t u^t = M\sum_{t=0}^{\infty}(qu)^t$$

serisi ile majorantlanır. Bu majorant seri

$$|qu| < 1$$

veya

$$|u| < \frac{1}{q}$$

için yakınsaktır. Buradan da $|z| > q$ için (4.1) serisinin yakınsak olduğu görülür.

Sonuç 4.1.

$$0 \le t < +\infty$$

aralığında tanımlanmış sürekli değişkenli $f(t)$ fonksiyonu için $M > 0$ ve s_0 sayıları var ve $0 \le t < +\infty$ için

$$|f(t)| \le Me^{s_0 t}$$

şartı sağlanırsa, o zaman $f(t)$ fonksiyonunun $t = 0,1,2,...$ noktaları için (4.1) serisi

$$|z| > e^{s_0}$$

bölgesinde yakınsak olur.

Teorem 4.2 (Ters z -dönüşümü)**.** $\tilde{F}(z)$ fonksiyonunu

$$f(t),\ \ t = 0,1,2,...$$

fonksiyonunun z -dönüşümü olduğunu ve (4.1) serisinin bir K dairesi dışında yakınsak olduğunu varsayalım. O zaman

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\tilde{F}(z)z^{t-1}dz \qquad (4.3)$$

formülü doğrudur. Burada Γ eğrisi K dairesini içine alan keyfi çember olup, integralleme saat ibresinin hareketinin aksi yönünde alınır.

İspat: (4.1) serisi $\tilde{F}(z)$ fonksiyonunun Laurent serisi olduğundan; (4.3) formülü Laurent serisinin katsayılarını veren formüldür. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.3 (Açılım teoremi)**.** $\tilde{F}(z)$ fonksiyonunun $t=0,1,2,...$ noktalarında tanımlanmış $f(t)$ fonksiyonunun z-dönüşümü olduğunu ve z_k noktalarının $\tilde{F}(z)$ fonksiyonunun tüm singüler noktaları olduğunu varsayalım. O zaman

$$f(t)=\sum_k \operatorname*{Res}_{z_k}\left[\tilde{F}(z)z^{t-1}\right] \qquad (4.4)$$

formülü doğrudur.

İspat: (4.1) serisi Γ çemberinin içine yerleşen K dairesinin dışında yakınsak olduğundan $\tilde{F}(z)$ fonksiyonunun tüm singüler noktaları Γ çemberinin içinde yerleşirler. Bu yüzden Rezidü hakkındaki esas teoreme karşılık olarak aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\tilde{F}(z)z^{t-1}dz=\sum_k \operatorname*{Res}_{z_k}\left[\tilde{F}(z)z^{t-1}\right]$$

olur. Burada eşitliğin sol yanındaki toplam, Γ çemberinin içindeki integral altındaki fonksiyonun tüm singüler noktaları üzerinden alındığına dikkat edelim. Buradan da Teorem 4.2 gereğince ele aldığımız teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 4.2. Özel halde $\tilde{F}(z)$ fonksiyonunun tüm singüler noktaları kutup noktaları olursa ve $k=1,2,...,m$ olmak üzere n_k, z_k kutup noktasının tekrarlanma sayısı ise, o zaman

$$f(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(n_k-1)!}.\lim_{z\to z_k}\frac{d^{n_k-1}}{dz^{n_k-1}}\left[(z-z_k)^{n_k}\tilde{F}(z)z^{t-1}\right] \qquad (4.5)$$

olur. $\tilde{F}(z)$ fonksiyonunun yalnız sade kutup noktaları olduğunda, yani

$$\tilde{F}(z)=\frac{A(z)}{B(z)}$$

$$A(z_k)\neq 0,\ \ B(z_k)=0,\ \ B'(z_k)\neq 0,\ k=1,2,...,m$$

olduğunda, o zaman $f(t)$ fonksiyonu

$$f(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{A(z_k)}{B'(z_k)}z_k^{\ t-1} \qquad (4.6)$$

şeklinde gösterilir. Bu sonucun ispatı (4.4) formülündeki Rezidünün hesaplanmasına karşılık olarak aşağıdaki

$$\operatorname*{Res}_{z_0} F(z)=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m F(z)\right]$$

ve

$$\operatorname*{Res}_{z_0}\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{A(z_0)}{B'(z_0)}$$

formüllerinin dikkate alınmasıyla ispatlanır.

Teorem 4.4 (Öteleme teoremi)**.** $\tilde{F}(z)$ fonksiyonu, $f(t)$ fonksiyonunun z - dönüşümü olsun. O zaman

$$f(t+k) \;\; =\!\bullet\bullet \;\; z^k\tilde{F}(z)-\left[f(0)z^k+f(1)z^{k-1}+...+f(k-1)z\right] \qquad (4.7)$$

formülü doğrudur. Gerçekten de, z -dönüşümünün tanımından aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$f(t+k) \fallingdotseq \sum_{t=0}^{\infty} f(t+k)z^{-t} = z^k \sum_{t=0}^{\infty} f(t+k)z^{-t-k} = z^k\left[\tilde{F}(z) - \sum_{t=0}^{k-1} f(t)z^{-t}\right] =$$

$$z^k\tilde{F}(z) - \left[f(0)z^k + f(1)z^{k-1} + \ldots + f(k-1)z\right] \quad .$$

Teorem 4.5 (Lineerlik teoremi)**.** $\tilde{F}(z)$ ve $\tilde{\Phi}(z)$ fonksiyonlarını sırasıyla $f(t)$ ve $\varphi(t)$ fonksiyonlarının z -dönüşümleri olduklarını varsayalım. O zaman keyfi α ve β kompleks sayıları için

$$\alpha f(t) + \beta\varphi(t) \fallingdotseq \alpha\tilde{F}(z) + \beta\tilde{\Phi}(z) \tag{4.8}$$

formülü geçerlidir.

İspat: z -dönüşümünün tanımından

$$\alpha f(t) + \beta\varphi(t) \fallingdotseq \sum_{t=0}^{\infty} \alpha f(t) + \beta\varphi(t) \; z^{-t} = \alpha\sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t} + \beta\sum_{t=0}^{\infty}\varphi(t)z^{-t} = \alpha\tilde{F}(z) + \beta\tilde{\Phi}(z)$$

bulunur. Buradan da (4.8) formülü ortaya çıkar.

Teorem 4.6 (Bürünme hakkında teorem)**.** $\tilde{F}_i(z)$ fonksiyonunu, uygun olarak $f_i(t)$ fonksiyonunun z -dönüşümü olduğunu varsayalım. O zaman

$$\sum_{k=0}^{t} f_1(k) f_2(t-k) \fallingdotseq \tilde{F}_1(z)\tilde{F}_2(z) \tag{4.9}$$

formülü doğrudur.

İspat: $\tilde{F}_1(z)$ ve $\tilde{F}_2(z)$ fonksiyonlarının ifadelerini birbiriyle çarparak

$$\tilde{F}_1(z)\tilde{F}_2(z) = \left(\sum_{t=0}^{\infty} f_1(t)z^{-t}\right)\left(\sum_{t=0}^{\infty} f_2(t)z^{-t}\right) = \sum_{t=0}^{\infty} z^{-t} \sum_{k=0}^{t} f_1(k) f_2(t-k)$$

buluruz. Bu eşitlikten de (4.9) eşitliği bulunur.

Teorem 4.7 (Dönüşümün izdüşümünün diferensiyellenmesi hakkında teorem)**.**

$\tilde{F}(z)$, $f(t)$ fonksiyonunun z-dönüşümü olsun.

O zaman

$$-tf(t) \;\underset{\bullet\bullet}{=}\!\bullet\bullet\; z\frac{d\tilde{F}(z)}{dz} \tag{4.10}$$

olur.

İspat: (4.1) eşitliğinin her yanını z değişkenine göre diferensiyelleyerek aşağıdaki formülü buluruz:

$$\frac{d\tilde{F}(z)}{dz} = \sum_{t=0}^{\infty} f(t)\left[-tz^{-t-1}\right] = z^{-1}\sum_{t=0}^{\infty} -tf(t)\; z^{-t}.$$

Bu eşitliğin her yanını z değişkeni ile çarparak

$$z\frac{d\tilde{F}(z)}{dz} = \sum_{t=0}^{\infty} -tf(t)\; z^{-t}$$

eşitliğini buluruz. Bu eşitlikle teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 4.3. $\tilde{F}(z)$ fonksiyonu, $f(t)$ fonksiyonunun z-dönüşümü olduğunu var sayalım. O zaman aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$(-1)^k t^k f(t) \;\underset{\bullet\bullet}{=}\!\bullet\bullet\; \underbrace{z\frac{d}{dz}\left\{z\frac{d}{dz}\left[z...z\frac{d}{dz}\tilde{F}(z)\right]\right\}}_{k}\;. \tag{4.11}$$

İspat: k kez (4.10) formülünü uygulayarak (4.11) formülünü buluruz.

Teorem 4.8 (Limit değerler hakkında teorem)**.** $\tilde{F}(z)$ fonksiyonu, $f(t)$ fonksiyonunun z-dönüşümü olsun. O zaman aşağıdaki

$$\lim_{z\to\infty}\tilde{F}(z) = f(0) \tag{4.12}$$

eşitliği doğrudur. Buna ilave olarak sonlu

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$$

limiti olduğunda

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\tilde{F}(z) = f(\infty) \tag{4.13}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $\tilde{F}(z)$ fonksiyonunun

$$\tilde{F}(z) = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \ldots$$

açılımından $z \to \infty$ iken

$$\lim_{z\to\infty} \tilde{F}(z) = f(0)$$

eşitliği bulunur.

Şimdi (4.13) eşitliğini ispatlayalım.

Teorem 4.4'ten

$$z\tilde{F}(z) - zf(0) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t+1)z^{-t}$$

eşitliğini buluruz. Bu eşitliğin her yanından $\tilde{F}(z)$ ve $\tilde{F}(z)$'nin (4.1) ifadesini çıkarırsak

$$(z-1)\tilde{F}(z) - zf(0) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t+1)z^{-t} - \sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t}$$

eşitliğini veya

$$(z-1)\tilde{F}(z)-zf(0)=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{t=0}^{n} f(t+1)z^{-1}-\sum_{t=0}^{n} f(t)z^{-1}\right]$$

eşitliğini buluruz. Bu sonuncu eşitliğin her yanından $z \to 1$ iken limit alsak ve limitlerin sırasının yerlerini değiştirsek

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\tilde{F}(z)-f(0)=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{t=0}^{n} f(t+1)-\sum_{t=0}^{n} f(t)\right]=\lim_{n\to\infty}\; f(n+1)-f(0)\; = f(\infty)-f(0)$$

buluruz. Bu eşitlikten (4.13) eşitliği bulunur. Bu da ispatı istenendir.

4.2.Bazı Özel Fonksiyonların z - Dönüşümlerinin Hesaplanması

Şimdi burada ispatlanmış teoremleri uygulayarak bazı temel fonksiyonların z -dönüşümlerini bulalım [6].

(4.1) formülünde $f(t)\equiv 1$ alırsak ve geometrik serinin toplamının bulunması formülüne karşılık

$$1 \risingdotseq \frac{z}{z-1} \tag{4.14}$$

buluruz. Dönüşümün diferansiyellenmesi hakkındaki teoremi (4.14) formülüne uygulayarak

$$-t \risingdotseq z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)=-\frac{z}{(z-1)^2}$$

formülü, buradan da

$$t \risingdotseq \frac{z}{(z-1)^2}$$

formülü bulunur. (4.11) formülünü kullanarak

$$t^2 \;\bullet\!\!=\!\!\bullet\; \frac{z}{(z-1)^2}+\frac{2z}{(z-1)^3},$$

$$t^3 \;\bullet\!\!=\!\!\bullet\; \frac{z}{(z-1)^2}+\frac{6z}{(z-1)^3}+\frac{6z}{(z-1)^4}$$

formüllerini ve genel olarak

$$t^k \;\bullet\!\!=\!\!\bullet\; (-1)^k \underbrace{z\frac{d}{dz}\left\{z\frac{d}{dz}\left[z...z\frac{d}{dz}\frac{z}{z-1}\right]\right\}}_{k} \tag{4.15}$$

formülü bulunur. (4.15) formülündeki diferansiyelleme işlemlerini yaptığımızda

$$t^k \;\bullet\!\!=\!\!\bullet\; z\left[\frac{\alpha_1}{(z-1)^2}+\frac{\alpha_2}{(z-1)^3}+...+\frac{\alpha_k}{(z-1)^{k+1}}\right] \tag{4.16}$$

şekilli formül bulunur. Bu formüldeki $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ parametreleri sabit sayılardır. Şimdi

$$\tilde{F}(z)=\frac{z\lambda^k}{(z-\lambda)^{k+1}}$$

fonksiyonunun ters z -dönüşümünü bulalım.

Teorem 4.3'ten

$$f(t)=\operatorname*{Res}_{z=\lambda}\left[\frac{z\lambda^k}{(z-\lambda)^{k+1}}z^{t-1}\right].$$

Burada (4.5) formülünü kullanarak

$$f(t)=\frac{\lambda^k}{k!}.\lim_{z\to\lambda}\frac{d^k}{dz^k}z^t$$

buluruz. Bu formülde $t\geq k$ olduğunda

$$f(t)=\frac{t!}{k!(t-k)!}\lambda^t=C_t^k\lambda^t\,,$$

$t<k$ şartında ise $f(t)\equiv 0$ olur. $t<k$ olduğunda $C_t^k=0$ için

$$C_t^k\lambda^t \;\underset{\bullet\bullet}{=\bullet\bullet}\; \frac{z\lambda^k}{(z-\lambda)^{k+1}} \tag{4.17}$$

olur. (4.17) formülünde $k=0$ ve $\lambda=e^{\omega}$ alırsak

$$e^{\omega t} \;\underset{\bullet\bullet}{=\bullet\bullet}\; \frac{z}{z-e^{\omega}} \tag{4.18}$$

bulunur. (4.17) formülünde $\lambda=1$ alırsak

$$C_t^k \;\underset{\bullet\bullet}{=\bullet\bullet}\; \frac{z}{(z-1)^{k+1}} \tag{4.19}$$

olduğunu buluruz. (4.18) formülünü ve

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z$$

Euler formülünü kullanarak, yani

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \ \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

eşitliklerini kullanarak aşağıdaki formüllerin doğruluğunu gösterebiliriz:

$$\cos\omega t \;\underset{\bullet\bullet}{=\bullet\bullet}\; \frac{z(z-\cos\omega)}{z^2-2z\cos\omega+1},\ \sin\omega t \;\underset{\bullet\bullet}{=\bullet\bullet}\; \frac{2\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1},$$

$$ch\omega t \risingdotseq \frac{z(z-ch\omega)}{z^2-2z\,ch\omega+1},\; sh\omega t \risingdotseq \frac{2sh\omega}{z^2-2z\,ch\omega+1}\ .$$

t tam değerler almadığı halde, mesela $s=0,1,2,...$ sayıları için

$$(s+\varepsilon)T$$

gibi değerler aldığında, burada ε ve T verilmiş pozitif sayılardır. Bu durumda z -dönüşümü aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$f((s+\varepsilon)T) \risingdotseq \sum_{s=0}^{\infty} f((s+\varepsilon)T)z^{-s}\ .$$

$\varepsilon=0$ durumunda ise aşağıdaki formül bulunur:

$$f(sT) \risingdotseq \sum_{s=0}^{\infty} f(sT)z^{-s}\ . \tag{4.20}$$

Şimdi biz z -dönüşümünü uygulayarak sabit katsayılı fark denklemlerinin çözüm metotlarını ele alalım.

4.3. Sabit Katsayılı Homojen Fark Denklemlerinin z -Dönüşümü İle Çözümü

Burada başlangıç nokta olarak $t_0=0$ alalım. (3.3.1) denkleminin $x(t)$ çözümünün z -dönüşümünü $\tilde{X}(z)$ ile gösterelim. (3.3.1) denkleminin $x(t)$ çözümünün

$$x(0)=x_0, x(1)=x_1,...,x(n-1)=x_{n-1} \tag{4.21}$$

başlangıç şartlarını sağladığını varsayalım. Teorem 4.4 öteleme teoremini ve (4.21) başlangıç şartlarını kullanarak

$$x(t+n) \risingdotseq z^n\tilde{X}(z)-(x_0z^n+x_1z^{n-1}+...+x_{n-1}z) \tag{4.22}$$

formülünü buluruz. Burada (4.22) formülünü kullanarak (3.3.1) denkleminin her yanına z-dönüşümünü uyguladığımızda $\tilde{X}(z)$ dönüşümü için aşağıdaki denklemi buluruz:

$$a_0\left[z^n\tilde{X}(z)-(x_0z^n+x_1z^{n-1}+...+x_{n-1}z)\right]+a_1\left[z^{n-1}\tilde{X}(z)-(x_0z^{n-1}+x_1z^{n-2}+...+x_{n-2}z)\right]$$
$$+...+a_n\tilde{X}(z)=0 \;.$$

Bu denklemi $\tilde{X}(z)$ fonksiyonuna göre çözerek

$$\tilde{X}(z)=\frac{z\left[x_0(a_0z^{n-1}+a_1z^{n-2}+...+a_{n-1})+x_1(a_0z^{n-2}+a_1z^{n-3}+...+a_{n-2})+...+x_{n-1}a_0\right]}{a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_n} \tag{4.23}$$

formülünü buluruz. $\tilde{X}(z)$ fonksiyonunun ters z-dönüşümü (3.3.1) denkleminin (4.21) şartlarını sağlayan çözümü olacaktır.

Bu çözümün yapısını inceleyelim. Bunun için (4.23) formülünü aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\tilde{X}(z)=\frac{zP(z)}{Q(z)} \;. \tag{4.24}$$

Bu formülde $P(z)$ ve $Q(z)$ polinomlardır ve $P(z)$ polinomunun derecesi $Q(z)$ polinomunun derecesinden küçüktür. $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ kesrini basit kesirlerin toplamına açarak

$$\tilde{X}(z)=z\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{A_{i1}}{z-z_i}+\frac{A_{i2}}{(z-z_i)^2}+...+\frac{A_{i,\alpha_i}}{(z-z_i)^{\alpha_i}}\right]=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{zA_{ij}}{(z-z_i)^j} \tag{4.25}$$

buluruz. Burada z_i sayıları $Q(z)$ polinomunun sıfırlarıdır. Şimdi (4.25) eşitliğinin her yanından ters z-dönüşümüne geçersek ve ters dönüşümünün lineerlik özelliğini kullanırsak $x(t)$ çözümü için aşağıdaki formülü buluruz:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{A_{ij}}{(z_i)^{j-1}}z_i^{\,t}C_t^{\,j-1} \tag{4.26}$$

Örnek 4.1.

$$x(t+3)-5x(t+2)+8x(t+1)-4x(t)=0$$

denkleminin

$$x(0)=0,\quad x(1)=2,\quad x(2)=1$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü bulalım. (4.23) formülünü uygulayarak

$$\tilde{X}(z)=\frac{z[2(z-5)+1]}{z^3-5z^2+8z-4}=\frac{2z^2-9z}{(z-1)(z-2)^2}$$

buluruz. Bulduğumuz bu ifadeyi basit kesirlere açarsak

$$\tilde{X}(z)=-\frac{7z}{z-1}+\frac{7z}{z-2}-\frac{5z}{(z-2)^2}$$

eşitliğini buluruz. Buradan ters z-dönüşümüne geçsek ve (4.17) formülünü kullansak problemin çözümü

$$x(t)=-7+7.2^t-\frac{5}{2}.2^t t$$

şeklinde bulunur. $\tilde{X}(z)$ fonksiyonunun ters z-dönüşümü bulunurken

$$x(t)=\sum_k \operatorname*{Res}_{z_k}\left[\tilde{X}(z)z^{t-1}\right] \tag{4.27}$$

formülü de kullanılır. Bu formülün sağ yanındaki toplam, $\tilde{X}(z)$ fonksiyonun singüler noktaları üzere alınır.

Örnek 4.2.

$$x(t+2)-5x(t+1)+6x(t)=0$$

denkleminin

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 2$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü bulalım. (4.23) formülünü kullanarak

$$\tilde{X}(z) = \frac{z[(z-5)+2]}{z^2 - 5z + 6} = \frac{z}{z-2}$$

buluruz. (4.27) formülünü kullanarak

$$x(t) = \operatorname*{Res}_{2} \left[\frac{z^t}{z-2} \right] = 2^t$$

eşitliğini buluruz.

4.4. Sabit Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklemlerinin Temel Çözümleri İçin Bir Yöntem

Burada biz (3.3.1) denkleminin karakteristik denkleminin köklerini bilerek bu denklemin temel çözümünün bulunması metodunu göstereceğiz.

(3.3.2) karakteristik denkleminin z_1 kökü α_1 katlı, z_2 kökü α_2 katlı,..., z_k kökü ise α_k katlı ise

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = n \quad .$$

O zaman

$$z_1^{\,t}, tz_1^{\,t}, ..., t^{\alpha_1 - 1} z_1^{\,t}, ..., z_k^{\,t}, tz_k^{\,t}, ..., t^{\alpha_k - 1} z_k^{\,t}$$

fonksiyonlar sistemi (3.3.1) denkleminin temel çözümü olur ve (3.3.1) denkleminin genel çözümü

$$x(t) = \sum_{j=1}^{k} (c_{0j} + c_{1j} t + ... + c_{\alpha_j - 1, j} t^{\alpha_j - 1}) \; z_j^{\,t}$$

şeklinde bulunur. Bunu ispatlamak için önce m. dereceden keyfi alınmış $P_m(t)$ polinomunun t değişkeni tam değerler aldığında bu polinomun

$$P_m(t) = b_0 C_t^0 + b_1 C_t^1 + \ldots + b_m C_t^m \tag{4.28}$$

şeklinde olduğunu gösterelim. (4.28) açılımında

$$C_t^k = \frac{t!}{k!(t-k)!}$$

ve

$$b_0, b_1, \ldots, b_m$$

sabit sayılar olup aşağıdaki yöntemle bulunur.

Burada,

$$\Delta C_t^k = C_{t+1}^k - C_t^k = C_t^{k-1} \ . \tag{4.29}$$

olduğuna dikkat edelim. Gerçekten de,

$$\Delta C_t^k = \frac{(t+1)t(t-1)\ldots(t-k+2)}{k!} - \frac{t(t-1)\ldots(t-k+1)}{k!} = \frac{t(t-1)\ldots(t-k+2)}{(k-1)!} = C_t^{k-1} \ .$$

Δ operatörünü, (4.28) eşitliğine ardışık olarak m kez uygulayarak

$$\left.\begin{aligned} &\Delta P_m(t) = b_1 C_t^0 + b_2 C_t^1 + \ldots + b_m C_t^{m-1}, \\ &\Delta^2 P_m(t) = b_2 C_t^0 + b_3 C_t^1 + \ldots + b_m C_t^{m-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Delta^m P_m(t) = b_m C_t^0. \end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

eşitliklerini buluruz.

(4.28) ve (4.30) eşitliklerinde $t = 0$ alırsak

$$b_0 = P_m(0),\ b_1 = \Delta P_m(0), \ldots,\ b_m = \Delta^m P_m(0)$$

eşitliğini buluruz. Şimdi $z_1, z_2, \ldots, z_k$ sırasıyla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ katlı aşağıdaki

$$Q(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$$

polinomunun tekrarlanan kökleri olsun. Şimdi burada her bir z_i köküne (3.3.1) denkleminin lineer bağımsız olan

$$z_i^t, tz_i^t, ..., t^{\alpha_i - 1} z_i^t \tag{4.31}$$

çözümler grubunun karşılık geldiğini gösterelim.

$$0 < m < \alpha_i - 1$$

için

$$t^m = b_0 C_t^0 + b_1 C_t^1 + ... + b_m C_t^m \tag{4.32}$$

olacak şekilde $b_0, b_1, ..., b_m$ katsayıları bulunsun. Burada ispatı devam ettirmek için önce aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır.

Lemma 4.1.

$$b(p) = B_0 p^{n-1} + B_1 p^{n-2} + ... + B_{n-1}$$

ifadesi $n-1$. mertebeden keyfi katsayılı bir polinom olsun. O zaman $a_0 \neq 0$, $a_1, a_2, ..., a_n$ sayıları verildiğinde

$$b(p) = x_o(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + ... + a_{n-1}) + x_1(a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + ... + a_{n-2}) + ... + x_{n-1} a_0$$

sağlanacak şekilde $x_o, x_1, ..., x_{n-1}$ sayıları bulunur. Bu açılımdaki $x_o, x_1, ..., x_{n-1}$ sayıları tek olarak bulunur.

İspat: $b(p)$ için yazılmış iki ifadeyi birbirine eşitleyip $x_o, x_1, ..., x_{n-1}$ aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$p^{n-1} a_0 x_o + p^{n-2}(a_1 x_o + a_0 x_1) + ... + (a_{n-1} x_o + a_{n-2} x_1 + ... + a_0 x_{n-1}) = B_0 p^{n-1} + B_1 p^{n-2} + ... + B_{n-1}.$$

Aynı dereceli terimlerin katsayılarını birbirine eşitleyerek $x_o, x_1, ..., x_{n-1}$ sayılarının bulunması için aşağıdaki rekkurent denklemler sistemini buluruz:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 x_o = B_0, \\ a_1 x_o + a_0 x_1 = B_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1} x_o + a_{n-2} x_1 + ... + a_0 x_{n-1} = B_{n-1}. \end{array}\right\} .$$

$\alpha_0 \neq 0$ olduğundan bu sistem her zaman çözülebilendir ve sisteminin tek çözümü vardır. Bu lemmayı uygulayarak öyle başlangıç $x_o, x_1, ..., x_{n-1}$ sayıları bulunur ki, (4.23) formülünün sağ yanındaki kesrin payının derecesi n sayısından küçük olmayan polinomun z ile çarpımına eşit olacaktır. Bu yüzden de $x_o, x_1, ..., x_{n-1}$ sayılarını

$$\tilde{X}(z) = z \sum_{j=0}^{m} \frac{b_j z_i^j}{(z - z_i)^{j+1}} \tag{4.33}$$

seçebiliriz. Bunun için (4.23) formülündeki $x_o, x_1, ..., x_{n-1}$ sayıları (4.23) kesrinin payı

$$z \sum_{j=0}^{m} b_j z_i^j (z - z_1)^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} ... (z - z_i)^{\alpha_{i-j-1}} ... (z - z_k)^{\alpha_k} \tag{4.34}$$

olacak şekilde seçilmelidir. $z_i^t, tz_i^t, ..., t^{\alpha_{i-1}} z_i^t$ şeklindeki çözümlerin lineer bağımsızlığı, farklı kökler için yaptığımız yöntemle ispatlanır. Böylece (3.3.1) sisteminin uygun $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$. mertebeden katlı karakteristik sayıları $z_1, z_2, ..., z_k$ olduğunda, o zaman (3.3.1) denkleminin genel çözümü

$$x(t) = \sum_{j=1}^{k} (c_{0j} + c_{1j} t + ... + c_{\alpha_j, j} t^{\alpha_j - 1})\ z_j^t \tag{4.35}$$

şeklinde bulunur. (3.3.1) denkleminin karakteristik (3.3.2) denklemi α_j katlı kompleks

$$z_j = \mu_j + i\gamma_j$$

kökü olduğunda

$$\bar{z}_j = \mu_j - i\gamma_j$$

eşlenik sayısı da (3.3.2) denkleminin α_j mertebeden tekrarlanan kökü olur. Sade kompleks kök olduğu hale uygun olarak $z_j = \mu_j + i\gamma_j$ köküne karşılık (3.3.1) sisteminin $2\alpha_j$ sayıda lineer bağımsız reel

$$\left.\begin{array}{l} r_j^t \cos\omega_j t + tr_j^t \cos\omega_j t, ..., t^{\alpha_j - 1} r_j^t \cos\omega_j t \\ r_j^t \sin\omega_j t + tr_j^t \cos\omega_j t, ..., t^{\alpha_j - 1} r_j^t \cos\omega_j t \end{array}\right\} \tag{4.36}$$

çözümleri olur. Burada

$$r_j = \sqrt{\mu_j^{\,2} + \gamma_j^{\,2}},\ \omega_j = arctg\frac{\gamma_j}{\mu_j}\ .$$

Aşağıda birkaç örneği ele alalım:

Örnek 4.3.

$$x(t+3) + 7x(t+2) + 15x(t+1) + 9x(t) = 0$$

denkleminin genel çözümünü bulalım.

Verilmiş denklemin karakteristik denklemi

$$z^3 + 7z^2 + 15z + 9 = 0$$

olur. Bu denklemin kökleri

$$z_1 = -1,\ \ z_{2,3} = -3$$

şeklinde bulunur. Bu yüzden verilmiş fark denkleminin genel çözümü

$$x(t) = c_1(-1)^t + (c_2 + c_3 t)(-3)^t$$

şeklinde bulunur.

Örnek 4.4. Aşağıdaki

$$x(t+4) + 2x(t+2) + x(t) = 0$$

denkleminin genel çözümünü bulalım. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$z^4 + 2z^2 + 1 = 0$$

ile verilir. Bu denklemin kökleri

$$z_{1,2} = +i, \quad z_{3,4} = \overline{z_{1,2}} = -i$$

olur. Bu yüzden verilmiş denklemin genel çözümü aşağıdaki şekildedir:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)\cos\frac{\pi}{2}t + (c_3 + c_4 t)\sin\frac{\pi}{2}t \ .$$

Örnek 4.5. Karakteristik denkleminin kökleri

$$z_{1,2} = -1, \quad z_{3,4} = 2, \quad z_{5,6,7,8} = 1 + i\sqrt{3}$$

ile verilen fark denkleminin genel çözümünü aşağıdaki şekilde yazarız:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)(-1)^t + (c_3 + c_4 t)2^t + 2^t\left[(c_5 + c_6 t)\cos\frac{\pi}{3}t + (c_7 + c_8 t)\sin\frac{\pi}{3}t\right] .$$

4.5. n. Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homojen Olmayan Fark Denklemleri

Sabit katsayılı lineer homojen olmayan

$$a_0 x(t+n) + a_1 x(t+n-1) + \ldots + a_n x(t) = f(t) \qquad (4.37)$$

denkleminin

$$x(0)=x_0,\, x(1)=x_1, ..., x(n-1)=x_{n-1} \tag{4.38}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemini ele alalım.

(4.37) denkleminin her yanına z-dönüşümünü uygulayarak (4.23) denklemine uygulanan benzer yöntemle $\tilde{X}(z)$ dönüşümü için aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\tilde{X}(z)=\frac{\tilde{F}(z)+z\left[x_0(a_0z^{n-1}+a_1z^{n-2}+...+a_{n-1})+x_1(a_0z^{n-2}+a_1z^{n-3}+...+a_{n-2})+...+x_{n-1}a_0\right]}{a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_n}. \tag{4.39}$$

(4.39) ifadesi ile bulunmuş $\tilde{X}(z)$ dönüşümünün ters z-dönüşümünü bulmak için Teorem 4.3 açılım teoremini kullanarak aşağıdaki formül bulunur:

$$x(t)=\sum_k \operatorname*{Res}_{z_k}\left[\tilde{X}(z)z^{t-1}\right]. \tag{4.40}$$

Bu formüldeki toplam, $\tilde{X}(z)$ fonksiyonunun tüm singüler noktaları üzerindendir.

Bu formülün uygulanmasına ait örnekler verelim.

Örnek 4.6.

$$x(t+2)-5x(t+1)+6x(t)=1$$

denkleminin

$$x(0)=0,\; x(1)=0$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü bulalım.

(4.39) formülünü kullanmak için $\tilde{X}(z)$ fonksiyonunu

$$\tilde{X}(z)=\frac{\dfrac{z}{z-1}}{z^2-5z+6}=\frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

şeklinde yazalım. O zaman (4.40) formülünü kullanarak

$$x(t) = \sum_k \operatorname{Res}_{z_k} \frac{z^t}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{1}{2} - 2^t + \frac{1}{2} 3^t .$$

buluruz. (4.37) denkleminin sıfır başlangıç şartını sağlayan çözümünü bulmak için Teorem 4.6'yı kullanabiliriz. (4.37) denklemine sıfır başlangıç şartlarında z -dönüşümünü uygulayarak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\tilde{X}(z) = \tilde{F}(z)\tilde{K}(z) \quad .$$

Burada

$$\tilde{K}(z) = \frac{1}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n} \quad .$$

$\tilde{K}(z)$ fonksiyonunun ters z -dönüşümünü $k(t)$ ile gösterirsek, o zaman

$$\tilde{F}(z)\tilde{K}(z)$$

çarpımının ters z -dönüşümünü, bürünme teoremine karşılık olarak

$$x(t) = \sum_{n=0}^{t} f(n)\, k(t-n) \qquad (4.41)$$

buluruz. Böylece, (4.41) formülü ile bulunan $x(t)$ fonksiyonu (4.37) denkleminin sıfır başlangıç şartlarını sağlayan çözümü olur.

Şimdi (4.37) denkleminin sağ yanı

$$f(t) = (b_0 + b_1 t + ... + b_m t^m) q^t \qquad (4.42)$$

şeklinde olan hali ele alalım. (4.37) denkleminin sağ yanındaki $f(t)$ fonksiyonu (4.42) şeklinde olduğunda bu denklemin bir özel çözümünün bulunması yöntemini gösterelim:

Bunun için (4.37) denkleminin

$$Q(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n \tag{4.43}$$

karakteristik polinomunun köklerinin belli olduğunu ve bu $z_1, z_2, ..., z_k$ köklerinin uygun olarak $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ mertebeden katlı olduğunu varsayalım. Bu şartlar sağlandığında (4.37) denkleminin

$$x(t) = t^{\alpha}(B_0 + B_1 t + ... + B_m t^m) q^t$$

şeklinde özel çözümü olur. Burada q sayısı (3.3.2) karakteristik denkleminin $z_1, z_2, ..., z_k$ karakteristik kökleri ile çakıştığında $\alpha = 0$ alınır. Ama $q = z_i$ olduğunda $\alpha = \alpha_i$, yani α sayısı z_i karakteristik kökün katlılığına eşit olarak alınır.

Bunları göstermek için, önce aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 4.2. q sayısı karakteristik (4.43) polinomunun hiçbir kökü ile çakışmadığında (4.37) denkleminin sağ yanı (4.42) şeklinde olduğunda; onun özel bir çözümünün z-dönüşümü

$$\tilde{X}(z) = z\left[\frac{A_1}{z-q} + \frac{A_2}{(z-q)^2} + ... + \frac{A_{m+1}}{(z-q)^{m+1}}\right]$$

şeklinde bulunur. Ama q sayısı (4.43) karakteristik polinomunun α_i mertebeden katlı z_i kökü ile çakıştığında, (4.42) sağ yanlı (4.37) denkleminin bir özel çözümünün z-dönüşümü

$$\tilde{X}(z) = z\left[\frac{A_1}{(z-z_i)^{\alpha_i+1}} + \frac{A_2}{(z-z_i)^{\alpha_i+2}} + ... + \frac{A_{m+1}}{(z-z_i)^{\alpha_i+m+1}}\right]$$

şeklinde bulunur.

İspat: (4.42) sağ yanlı homojen olmayan (4.37) denkleminin sıfır başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü ele alalım. (4.39) formülünden

$$\tilde{X}(z)=\frac{z\left[\dfrac{b_0}{z-q}+\dfrac{b_1}{(z-q)^2}+...+\dfrac{b_m m!}{(z-q)^{m+1}}\right]}{a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_n}=z\frac{b_0(z-q)^m+b_1(z-q)^{m-1}+...+b_m m!}{(z-q)^{m+1}(a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_n)}$$

buluruz. q sayısı karakteristik denklemin hiçbir $z_1, z_2, ..., z_k$ kökü ile çakışmadığında $\tilde{X}(z)$ çözümü

$$\tilde{X}(z)=\sum_{i=1}^{k} z\left(\frac{A_{1i}}{z-z_i}+\frac{A_{2i}}{(z-z_i)^2}+...+\frac{A_{\alpha_i,i}}{(z-z_i)^{\alpha_i}}\right)+...+z\left(\frac{A_1}{z-q}+\frac{A_2}{(z-q)^2}+...+\frac{A_{m+1}}{(z-q)^{m+1}}\right)$$

şeklinde basit kesirlere ayrılır. Buradaki α_i sayısı z_i kökünün katlılığıdır. Bu eşitliğin sağ yanındaki birinci toplam, homojen denklemin çözümünün z -dönüşümü olduğunda onu atarsak

$$z\left(\frac{A_1}{z-q}+\frac{A_2}{(z-q)^2}+...+\frac{A_{m+1}}{(z-q)^{m+1}}\right)$$

ifadesinin (4.42) sağ yanlı homojen olmayan (4.37) denkleminin sıfır başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün z -dönüşümü olduğunu buluruz.

Şimdi q sayısının (3.3.2) karakteristik denkleminin bir z_j kökü ile çakıştığını var sayalım. O zaman (4.39) formülüne dayanarak, (4.42) sağ yanlı homojen olmayan (4.37) denkleminin z -dönüşümünü aşağıdaki şekilde buluruz:

$$\tilde{X}(z)=z\frac{b_0(z-z_j)^m+b_1(z-z_j)^{m-1}+...+b_m m!}{a_0(z-z_1)^{\alpha_1}...(z-z_{j-1})^{\alpha_{j-1}}(z-z_j)^{\alpha_{j+m+1}}(z-z_{j+1})^{\alpha_{j+1}}...(z-z_k)^{\alpha_k}}.$$

Bu eşitliği aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\tilde{X}(z)=\sum_{i=1}^{k} z\left[\frac{A_{1i}}{z-z_i}+\frac{A_{2i}}{(z-z_i)^2}+...+\frac{A_{\alpha_i,i}}{(z-z_i)^{\alpha_i}}\right]$$

$$+...+z\left[\frac{A_1}{(z-z_j)^{\alpha_{j+1}}}+\frac{A_2}{(z-z_j)^{\alpha_{j+2}}}+...+\frac{A_{m+1}}{(z-z_j)^{\alpha_j+m+1}}\right].$$

Buradan da birinci toplamı atarak, homojen olmayan (4.37) denkleminin (4.42) sağ yanlı olduğu ve q karakteristik denkleminin z_j karakteristik kökü ile çakıştığı haldeki $x(t)$ çözümünün z -dönüşümü için aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$z\left[\frac{A_1}{(z-z_j)^{\alpha_j+1}}+\frac{A_2}{(z-z_j)^{\alpha_j+2}}+\ldots+\frac{A_{m+1}}{(z-z_j)^{\alpha_j+m+1}}\right].$$

(4.17) formülünden

$$C_t^k \lambda^t \doteqdot \frac{z\lambda^k}{(z-\lambda)^{k+1}}$$

bulunur ki, q sayısı karakteristik (3.3.2) denkleminin hiçbir $z_1, z_2, \ldots, z_k$ kökü ile çakışmadığında, homojen olmayan (4.37) denkleminin (4.42) sağ yanlı halde

$$x(t) = A_1 q^t + A_2 q^t t + \ldots + \frac{A_{m+1}}{q^m} q^t C_t^m$$

şeklinde, yani

$$x(t) = (b_0 + b_1 C_t^1 + \ldots + b_m C_t^m) q^t$$

çözümü vardır. Burada

$$b_0 + b_1 C_t^1 + \ldots + b_m C_t^m$$

m dereceli polinom olduğundan

$$b_0 + b_1 C_t^1 + \ldots + b_m C_t^m = B_0 + B_1 t + \ldots + B_m t^m$$

olur. Böylece q sayısı karakteristik denklemin her bir kökü ile çakışmadığından homojen olmayan (4.37) denkleminin (4.42) sağ yanlı halde

$$x(t) = (B_0 + B_1 t + \ldots + B_m t^m) q^t \tag{4.44}$$

şeklinde bir çözümü vardır. $q = z_i$ halinde homojen olmayan

$$x(t) = \frac{z_i^{\,t}}{z_i^{\alpha_i}}\left[A_1 C_t^{\alpha_i} + \frac{A_2}{z_i} C_t^{\alpha_i+1} + \ldots + \frac{A_{m+1}}{z_i^{\,m}} C_t^{\alpha_i+m} \right]$$

denkleminin, yani

$$x(t) = \left[b_0 + b_1 C_t^1 + \ldots + b_{\alpha_i+m} C_t^{\alpha_i+m} \right] z_i^{\,t}$$

denklemi veya daha da açık şekilde yazarsak

$$x(t) = (B_0 + B_1 t + \ldots + B_{\alpha_i+m} t^{\alpha_i+m}) z_i^{\,t}$$

denklemi şeklinde çözümü vardır. Burada

$$x_1(t) = (B_0 + B_1 t + \ldots + B_{\alpha_i-1} t^{\alpha_i-1}) z_i^{\,t}$$

homojen denklemin çözümü olduğundan bu halde homojen olmayan (4.37) denkleminin (4.42) sağ yanlı sıfır başlangıç şartlarını sağlayan çözümü

$$x(t) = t^{\alpha_i}(D_0 + D_1 t + \ldots + D_m t^m) z_i^{\,t} \tag{4.45}$$

şeklinde bulunur. Verilmiş problemleri çözerken, yani (4.37) denkleminin sağ yanı (4.42) şeklinde verilen bu denklemin özel çözümünü bulmak istediğimizde, özel çözümü ya (4.44) ya da (4.45) şeklinde arayacağız. Sonra q^t ifadesini sadeleştirdikten sonra t'nin aynı dereceli katsayılarını birbirine eşitleyip B_i veya D_i katsayılarının bulunması için lineer cebirsel denklemler sistemini buluruz.

Örnek 4.7.

$$x(t+2) - 4x(t+1) + 4x(t) = t2^t$$

denklemini çözelim.

Verilmiş denklemin karakteristik denklemi

$$z^2 - 4z + 4 = 0$$

şeklindedir. Bu denklemin kökleri

$$z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2$$

olur. Karakteristik denklemin $z = 2$ kökü 2-nci mertebeden tekrarlandığında, verilmiş denklemin kökü $z_{1,2} = 2$ ve $q = 2$ çakıştığından; bu denklemin özel çözümünü

$$x(t) = t^2 (B_0 + B_1 t) 2^t$$

şeklinde arayalım. Bu çözümü denklemde yerine yazıp ve 2^t ifadesiyle sadeleştirsek

$$4\left[B_0(t+2)^2 + B_1(t+2)^3\right] - 8\left[B_0(t+1)^2 + B_1(t+1)^3\right] + 4\left[B_0(t)^2 + B_1(t)^3\right] = t$$

eşitliğini buluruz. t'nin katsayılarını ve serbest terimlerini karşılaştırarak

$$24B_1 = 1, \; B_0 + 3B_1 = 0$$

eşitliklerini buluruz. Buradan da

$$B_0 = -\frac{1}{8}, \; B_1 = \frac{1}{24}$$

olduğunu buluruz. Böylece verilmiş denklemin genel çözümü

$$x(t) = (c_0 + c_1 t) 2^t + t^2 \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{24} t \right) 2^t$$

şeklinde bulunur.

(4.44) formülünde q sayısı genelde kompleks sayı da olabilir. Bu yüzden Sonuç 3.2.3 özelliğini kullanarak (4.37) denkleminin sağ yanı

$$f(t) = r^t \; A(t) \cos \omega t + B(t) \sin \omega t$$

şeklinde bir fonksiyon olduğu hal içinde çözüm yöntemi verilebilir. Böylece (4.37) denkleminin sağ yanı

$$f(t) = r^t \; A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t$$

şeklinde olduğunda homojen olmayan (4.37) denkleminin özel çözümünü

$$x(t) = t^{\alpha} r^t \; C(t)\cos\omega t + D(t)\sin\omega t$$

şeklinde aramak gerekir. Burada $A(t)$ ve $B(t)$ polinomlardır. Burada $C(t)$ ve $D(t)$, dereceleri $A(t)$ ve $B(t)$ polinomlarından derecesi büyük olan polinomun derecesine eşit belirsiz katsayılı polinomlardır. α sayısı (3.3.2) karakteristik denkleminin karakteristik

$$z = re^{i\omega}$$

kökünün tekrarlanma derecesine eşittir. $z = re^{i\omega}$ sayısı (3.3.2) karakteristik denkleminin kökü olmadığı halde $\alpha = 0$ almak gerekir.

Örnek 4.8. $L(x) = f(t)$ fark denkleminin karakteristik denkleminin köklerinin

$$z_{1,2,3} = 3, \;\; z_{4,5,6,7} = \sqrt{3} \pm i$$

olduğunu ve bu denklemde

$$f(t) = t3^t + t^2 2^t \cos\frac{\pi}{6}t + t2^t \sin\frac{\pi}{6}t + te^t$$

şeklinde olduğunu varsayalım. Bu denklemin özel çözümünü

$$\tilde{x}(t) = t^3(B_0 + B_1 t)3^t + t^2 2^t \left[(B_2 + B_3 t + B_4 t^2)\cos\frac{\pi}{6}t + (B_5 + B_6 t + B_7 t^2)\sin\frac{\pi}{6}t \right]$$

şeklinde aramamız gerekir. O zaman verilmiş denklemin genel çözümü

$$x(t) = (c_0 + c_1 t + c_2 t^2)3^t + 2^t \left[(c_3 + c_4 t)\cos\frac{\pi}{6}t + (c_5 + c_6 t)\sin\frac{\pi}{6}t \right] + \tilde{x}(t)$$

şeklinde bulunur.

5. LİNEER FARK DENKLEM SİSTEMİ

5.1. Lineer Fark Denklem Sistemi için Tanımlar ve Genel Özellikler

Burada önce n. mertebeden lineer fark denklemini, lineer fark denklemleri sistemi şeklinde yazalım.

Bu amaçla n. mertebeden lineer, homojen olmayan

$$x(t+n)+p_1(t)x(t+n-1)+...+p_n(t)x(t)=f(t)$$

denklemini ele alalım. Bu denklemi birinci mertebeden n tane lineer fark denklemleri sistemi şeklinde yazalım. Bunun için

$$z_1(t)=x(t),\ z_2(t)=x(t+1),...,\ z_n(t)=x(t+n-1)$$

eşitlikleriyle yeni değişkenler ilave edelim. Bu eşitlikleri kullanarak

$$z_1(t+1)=z_2(t), z_2(t+1)=z_3(t),..., z_{n-1}(t+1)=z_n(t)$$

eşitliklerini yazabiliriz. (2.5) denklemini de yeni değişkenlerle

$$z_n(t+1)=-P_1(t)z_1(t)-...-P_n(t)z_n(t)+f(t)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitlikleri bir denklem sistemi şeklinde yazarsak aşağıdaki lineer fark denklemleri sistemini buluruz:

$$\left.\begin{aligned} &z_1(t+1)=z_2(t),\\ &z_2(t+1)=z_3(t),\\ &......................\\ &z_{n-1}(t+1)=z_n(t),\\ &z_n(t+1)=-p_1(t)z_1(t)-...-p_n(t)z_n(t)+f(t). \end{aligned}\right\} . \qquad (5.1)$$

Birinci mertebeden lineer fark denklemleri sistemi genel olarak

$$\left.\begin{aligned}
x_1(t+1) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t),\\
x_2(t+1) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \ldots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n(t+1) &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t).
\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

şeklinde yazılır. (5.1) denkleminin, (5.2) denkleminin özel hali olduğu açıktır.

(5.2) denklemi matris şeklinde

$$x(t+1) = A(t)x(t) + f(t) \tag{5.3}$$

olarak yazılır. Burada $x(t)$ ve $f(t)$ n koordinatlı sütun vektör fonksiyonlardır:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

$A(t)$ ise $n \times n$ boyutlu matris fonksiyon olup aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

(5.3) denklemini sağlayan sürekli $x(t)$ vektör fonksiyonuna bu denklemin **sürekli çözümü** denir [8].

t_0 sayısının verildiğini varsayalım. $[t_0, t_0+1]$ aralığına **başlangıç aralığı** denir ve E_{t_0} gibi de gösterilir.

Teorem 5.1. Başlangıç

$$E_{t_0} = [t_0, t_0+1]$$

aralığında sürekli, başlangıç $\varphi(t)$ vektör fonksiyonunun verildiğini ve bu vektör fonksiyonunun

$$\varphi(t_0+1) = A(t_0)\varphi(t_0) + f(t_0) \tag{5.4}$$

şartını sağladığını, $A(t)$ matrisinin ve $f(t)$ vektör fonksiyonunun

$$[t_0, T] \ \ (T > t_0 + 1)$$

aralığında sürekli olduklarını varsayalım. O zaman $[t_0, T]$ aralığındaki (5.3) denkleminin E_{t_0} başlangıç aralığında başlangıç $\varphi(t)$ vektör fonksiyonu ile çakışan bir tek sürekli $x(t)$ çözümü vardır.

İspat: Burada

$$t_0 + 1 \le t + 1 \le t_0 + 2$$

eşitsizliği sağlandığında

$$t_0 \le t \le t_0 + 1$$

eşitsizliği de sağlanır ve E_{t_0} aralığında (5.3) denkleminin çözümü $\varphi(t)$ fonksiyonuna eşit olduğundan, $t_0 \le t \le t_0 + 1$ aralığında

$$x(t+1) = A(t)\varphi(t) + f(t)$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlikle çözümü $[t_0 + 1, t_0 + 2]$ aralığında tanımlamış olduk.

(5.4) şartından çözümün $t_0 + 1$ noktasında sürekli olduğu alınır. Bu yöntemle $x(t)$ çözümünün $[t_0 + k - 1, t_0 + k]$ aralığında tanımlanmış olduğunu varsayalım. O zaman

$$x(t+1) = A(t)x(t) + f(t)$$

denkleminden çözüm, $[t_0 + k, t_0 + k + 1]$ aralığında tanımlanmış olur. Her bir adımda çözüm (5.3) eşitliği ile tek olarak tanımlandığından, başlangıç aralıkta $\varphi(t)$ fonksiyonu ile çakışan çözüm tek olur. Böylece teorem ispatlandı.

Şimdi (5.3) denkleminin diskret (kesitli) çözümünü tanımlayalım.

Aşağıdaki

$$x_{k+1} = A(t_0 + k)x_k + f(t_0 + k) \tag{5.5}$$

denkleminin $x_0, x_1, ..., x_k, ...$ çözümleri dizisine (5.3) denkleminin t_0 noktasına karşılık gelen **diskret çözümü** denir. Başlangıç x_0 vektörü verildiğinde diskret çözümün tek olarak tanımlandığı açıktır. x_0 verildiğinde (5.5) eşitliği; $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ dizisinin bulunması için rekkurent formül olur. $x(t)$ sürekli fonksiyonu (5.3) denkleminin sürekli çözümü olduğunda, o zaman

$$x(t_0),\ x(t_0 + 1), ...,\ x(t_0 + k), ... \tag{5.6}$$

dizisi (5.3) denkleminin diskret çözümü olur. (5.3) denkleminin diskret çözümünü de biz $x(t)$ fonksiyonu şeklinde göstereceğiz. Ama bu fonksiyonun diskret çözüm olduğu halde yalnız

$$T = \{t_0, t_0 + 1, ..., t_0 + k, ...\}$$

kümesinde tanımlanmış olduğu unutulmamalıdır ve biz diskret çözümü

$$x(t_0 + k) = x_k$$

şeklinde işaret edeceğiz (göstereceğiz).

5.2. Lineer Homojen Fark Denklem Sistemi

Lineer homojen fark denklemleri sistemi vektör-matris şeklinde

$$x(t + 1) = A(t)x(t) \tag{5.7}$$

gibi yazılır. Burada

$$L(x) = x(t+1) - A(t)x(t)$$

lineer fark operatörü tanımlamakla (5.7) denklemini kısaca

$$L(x) = 0$$

şeklinde yazabiliriz. L operatörü içinde Teorem 3.1.2 ve Teorem 3.1.4 sağlanır. (5.7) denkleminin

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t_0) = x_1^0 = (x_{11}^0, x_{21}^0, ..., x_{n1}^0)^{\mathrm{T}}, \\ x_2(t_0) = x_2^0 = (x_{12}^0, x_{22}^0, ..., x_{n2}^0)^{\mathrm{T}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n(t_0) = x_n^0 = (x_{1n}^0, x_{2n}^0, ..., x_{nn}^0)^{\mathrm{T}}. \end{array}\right\} \tag{5.8}$$

şartlarını sağlayan $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ çözümlerini ele alalım.

Burada

$$(x_{1i}^0, x_{2i}^0, ..., x_{ni}^0)^{\mathrm{T}}$$

vektörün transpozesini gösterir. Sütunları bu $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ vektörlerinden oluşan

$$W(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

matrisini ele alalım.

Tanım 5.1. Burada $W(t)$ matrisinin $t = t_0$ noktasındaki $|W(t_0)|$ determinantı sıfırdan farklı olduğunda, yani

$$|W(t_0)| = \begin{vmatrix} x_{11}^0 & x_{12}^0 & \cdots & x_{1n}^0 \\ x_{21}^0 & x_{22}^0 & \cdots & x_{2n}^0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}^0 & x_{12}^0 & \cdots & x_{nn}^0 \end{vmatrix} \neq 0$$

şartı sağlandığında, homojen (5.7) denkleminin (5.8) başlangıç şartlarını sağlayan $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ çözümleri sistemine bu denklemin **temel çözümleri sistemi** denir.

Teorem 5.2. $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ sistemi (5.7) denkleminin temel çözümleri sistemi olduğunda, (5.7) denkleminin keyfi $\tilde{x}(t)$ çözümü

$$\tilde{x}(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + ... + c_n x_n(t) \tag{5.9}$$

şeklinde gösterilir. Burada $c_1, c_2, ..., c_n$ keyfi sabit sayılardır.

İspat: Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.gereğince

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + ... + c_n x_n(t)$$

Lineer birleşiminin keyfi $c_1, c_2, ..., c_n$ sabit katsayıları için (5.7) denkleminin çözümü olduğu görülür. $c_1, c_2, ..., c_n$ katsayılarının öyle değerlerini bulalım ki, $\tilde{x}(t)$ çözümünün ve $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + ... + c_n x_n(t)$ çözümünün başlangıç t_0 noktasındaki değerleri çakışsın. Bunun için aşağıdaki lineer cebirsel denklemler sistemini $c_1, c_2, ..., c_n$ katsayılarına karşılık çözmemiz gerekir:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 x_{11}^0 + c_2 x_{12}^0 + ... + c_n x_{1n}^0 = \tilde{x}_1(t_0), \\ c_1 x_{21}^0 + c_2 x_{22}^0 + ... + c_n x_{2n}^0 = \tilde{x}_2(t_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1 x_{n1}^0 + c_2 x_{n2}^0 + ... + c_n x_{nn}^0 = \tilde{x}_n(t_0). \end{array}\right\} . \tag{5.10}$$

Bu sistemin determinantı $|W(t_0)|$ olduğundan ve teoremin şartına göre bu determinant sıfırdan farklı olduğundan (5.10) denkleminin tek çözümü vardır. Buradan da

$$\tilde{x}(t_0)=c_1x_1(t_0)+c_2x_2(t_0)+...+c_nx_n(t_0)$$

eşitliğinin sağlandığı bulunur. Bu eşitliğin sağlanmasından ve (5.7) denkleminin çözümünün tekliği teoreminden (5.9) açılımının tüm T kümesinde sağlandığı bulunur.

Teorem 5.3. $x_1(t),\ x_2(t),...,\ x_n(t)$ sisteminin (5.7) denkleminin temel çözümler sistemi olduğu, $A(t)$ matrisinin determinantının da

$$T=\{t_0,t_0+1,...,t_0+k,...\}$$

kümesinde sıfırdan farklı olduğunu varsayalım. O zaman $W(t)$ matrisinin determinantı da T kümesinde sıfırdan farklı olur.

İspat: $W(t)$ matrisinin sütunları (5.7) denkleminin çözümleri olduğundan aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$W(t+1)=A(t)W(t) \tag{5.11}$$

Buradan da $|W(t_0)|\neq 0$ ve $t\in T$ için, $|A(t)|\neq 0$ şartlarından $t\in T$ için $|W(t)|\neq 0$ bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 5.4. (5.7) denkleminin (5.8) şartını sağlayan $x_1(t),\ x_2(t),...,\ x_n(t)$ çözümlerinin T kümesinde lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart, bu çözümlerin $t=t_0$ noktasında lineer bağımlı olmalarıdır.

Tümü sıfıra eşit olmayan öyle $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ sabit sayıları varsa ve

$$\alpha_1x_1(t_0)+\alpha_2x_2(t_0)+...+\alpha_nx_n(t_0)=0 \tag{5.12}$$

eşitliği sağlanırsa, o zaman bu eşitlik her bir $t\in T$ için de sağlanır, yani

$$\alpha_1x_1(t)+\alpha_2x_2(t)+...+\alpha_nx_n(t)=0 \tag{5.13}$$

eşitliği her bir $t\in T$ için doğrudur.

İspat: (5.13) eşitliği her bir $t \in T$ için sağlandığında, özel halde $t = t_0$ için (5.12) eşitliği bulunur. Buradan da teorem için gereklilik ispatlanmış olur. Şimdi yeterliliği ispatlayalım. (5.12) eşitliği sağlanacak şekilde tümü sıfır olmayan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sabit sayıları olduğunu varsayalım. Yani $k = 0$ olduğunda

$$\alpha_1 x_1(t_0 + k) + \alpha_2 x_2(t_0 + k) + ... + \alpha_n x_n(t_0 + k) = 0 \tag{5.14}$$

eşitliği sağlansın. Şimdi (5.14) eşitliğinin keyfi k için sağlandığını varsayalım. (5.14) eşitliğinin $(k+1)$ için de sağlanacağını ispatlayalım.

(5.7) eşitliğinden

$$\begin{aligned} x_1(t_0 + k + 1) &= A(t_0 + k)x_1(t_0 + k), \\ x_2(t_0 + k + 1) &= A(t_0 + k)x_2(t_0 + k), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(t_0 + k + 1) &= A(t_0 + k)x_n(t_0 + k). \end{aligned}$$

eşitliklerini buluruz. Yazdığımız bu eşitliklerin birincisini α_1 sayısıyla, ikincisini α_2 sayısıyla,…, n-cisini ise α_n sayısıyla çarpıp taraf tarafa toplarsak ve (5.14) eşitliğini de dikkate alırsak

$$\alpha_1 x_1(t_0 + k + 1) + \alpha_2 x_2(t_0 + k + 1) + ... + \alpha_n x_n(t_0 + k + 1) = \alpha_1 A(t_0 + k)x_1(t_0 + k) +$$
$$\alpha_2 A(t_0 + k)x_2(t_0 + k) + ... + \alpha_n A(t_0 + k)x_n(t_0 + k) =$$
$$A(t_0 + k)[\alpha_1 x_1(t_0 + k) + \alpha_2 x_2(t_0 + k) + ... + \alpha_n x_n(t_0 + k)] = 0$$

buluruz. Buradan da teoremin ispatlanmış olduğu görülür.

Teorem 5.5. (5.7) denkleminin $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ çözümleri sisteminin, bu denklemin temel çözümleri sistemini oluşturması için gerek ve yeter şart, bu çözümler sisteminin T kümesinde lineer bağımsız sistem oluşturmasıdır.

İspat: $|W(t_0)|$ determinantının sütunlarının lineer bağımsız olmaları için gerek ve yeter şart, bu determinantın sıfırdan farklı olmasıdır. Teorem 5.4 gereğince, bu şart aynı zamanda (5.7) denkleminin $x_1(t),\ x_2(t),...,\ x_n(t)$ çözümlerinin tüm T kümesinde lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart oluşturur.

5.3. Lineer Homojen Olmayan Fark Denklem Sistemi

Lineer homojen olmayan fark denklemleri sistemi matris şeklinde

$$x(t+1) = A(t)x(t) + f(t)$$

olarak yazılır. Bu denklemde $f(t) = 0$ aldığımızda

$$x(t+1) = A(t)x(t)$$

homojen denklemini bulmuş oluruz. (5.7) denklemine, (5.3) denklemine karşılık gelen **homojen denklem** denir. Homojen olmayan (5.3) denkleminin genel çözümünün yapısı aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 5.6. $x_1(t),\ x_2(t),...,\ x_n(t)$ sisteminin homojen (5.7) denkleminin temel çözümler sistemi olduğunu, $\tilde{x}(t)$ fonksiyonunun ise homojen olmayan (5.3) denkleminin herhangi bir özel çözümü olduğunu varsayalım. O zaman homojen olmayan (5.3) denkleminin genel çözümü

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + ... + c_nx_n(t) + \tilde{x}(t) \tag{5.15}$$

şeklindedir. Burada $c_1, c_2, ..., c_n$ keyfi sabit sayılardır.

İspat: Genelde homojen olmayan sabit katsayılı lineer denklemin iki çözümünün farkına karşılık gelen homojen denklemin çözümü olduğu açıktır. Böylece $x(t) - \tilde{x}(t)$ farkı homojen (5.7) denkleminin çözümü olur. O zaman Teorem 5.2 gereğince $x(t) - \tilde{x}(t)$ çözümünü

$$x(t) - \tilde{x}(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + ... + c_nx_n(t)$$

şeklinde gösterebiliriz. Bu açılım (5.15) açılımının eşdeğeridir.

5.4. Lineer Homojen Olmayan Fark Denklem Sisteminin Özel Çözümünün Sabitlerin Varyasyonu Metodu ile Bulunması Yöntemi

(5.7) homojen denkleminin temel $x_1(t),\ x_2(t), ...,\ x_n(t)$ çözümler sisteminin $W(t)$ matrisi belli olduğunda, homojen olmayan (5.3) denkleminin bir özel $\tilde{x}(t)$ çözümü, sabitlerin varyasyonu metodunun uygulanmasıyla bulunabilir. Homojen olmayan (5.3) denkleminin çözümünü

$$x(t) = W(t)\ c(t) \tag{5.16}$$

şeklinde arayalım. Burada $c(t)$ aranan vektör fonksiyondur. (5.16) ifadesini (5.3) denkleminde yerine yazarsak

$$W(t+1)\ c(t+1) = A(t)\ W(t)\ c(t) + f(t)$$

buluruz. Burada

$$W(t+1) = A(t)\ W(t)$$

olduğunu dikkate alırsak

$$W(t+1)\ \ c(t+1) - c(t)\ \ = f(t)$$

buluruz.

$A(t)$ matrisinin $T = \{t_0, t_0+1, ..., t_0+k, ...\}$ kümesinde determinantının her bir $t \in T$ için sıfırdan farklı olduğunu ($|A(t)| \neq 0$) varsayalım. O zaman Teorem 5.3 gereğince her bir $t \in T$ için $|W(t)| \neq 0$ olur. Bu yüzden de ters $W^{-1}(t+1)$ matrisi vardır. Sonuncu eşitliğin her yanını soldan $W^{-1}(t+1)$ matrisi ile çarparak

$$c(t+1) - c(t) = W^{-1}(t+1)\, f(t) \tag{5.17}$$

buluruz. Keyfi $c(t_0) = c_0$ vektörü alarak (5.17) denkleminden $c(t)$ vektör fonksiyonunu bulalım. Ardışık olarak

$$c(t_0+1)=c_0+W^{-1}(t_0+1)\,f(t_0),$$

$$c(t_0+2)=c(t_0+1)+W^{-1}(t_0+2)\,f(t_0+1),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$c(t_0+k)=c(t_0+k-1)+W^{-1}(t_0+k)\,f(t_0+k-1) \quad .$$

eşitliklerini yazalım. Böylece $t=t_0+k$ alırsak

$$c(t)=c_0+\sum_{i=1}^{t}W^{-1}(t_0+i)\;f(t_0+i-1)$$

eşitliğini buluruz. Biz özel bir çözüm aradığımızdan $c_0=0$ alabiliriz. $c(t)$ için $c_0=0$ halinde bulduğumuz ifadeyi (5.16) ifadesinde yerine yazarsak

$$\tilde{x}(t)=W(t)\sum_{i=1}^{t}W^{-1}(t_0+i)\;f(t_0+i-1)$$

veya

$$\tilde{x}(t)=\sum_{i=1}^{t}W(t)W^{-1}(t_0+i)\;f(t_0+i-1)$$

eşitliğini buluruz. Böylece, homojen olmayan (5.3) denkleminin genel çözümü için

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\ldots+c_nx_n(t)+\sum_{i=1}^{t}W(t)W^{-1}(t_0+i)f(t_0+i-1)$$

formülü bulunur.

5.5. Sabit Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklem Sistemleri

Önce sabit katsayılı lineer homojen fark denklem sistemlerini ele alalım:

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t+1)=\alpha_{11}x_1(t)+\alpha_{12}x_2(t)+\ldots+\alpha_{1n}x_n(t),\\ x_2(t+1)=\alpha_{21}x_1(t)+\alpha_{22}x_2(t)+\ldots+\alpha_{2n}x_n(t),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_n(t+1)=\alpha_{n1}x_1(t)+\alpha_{n2}x_2(t)+\ldots+\alpha_{nn}x_n(t). \end{array}\right\} \quad . \qquad (5.18)$$

(5.18) denklem sisteminin çözümlerini

$$x_1 = \gamma_1 z^t,\ x_2 = \gamma_2 z^t, ...,\ x_n = \gamma_n z^t \tag{5.19}$$

şeklinde arayalım. Burada $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ ve z sabit sayılardır. Bu sayıları (5.19) fonksiyonları (5.18) denklemler sisteminin çözümü olacak şekilde (5.18) sisteminde yerine yazıp z^t ifadesiyle sadeleştirerek aşağıdaki lineer cebirsel denklem sistemini buluruz:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1 z = \alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + ... + \alpha_{1n}\gamma_n, \\ \gamma_2 z = \alpha_{21}\gamma_1 + \alpha_{22}\gamma_2 + ... + \alpha_{2n}\gamma_n, \\ \text{..} \\ \gamma_n z = \alpha_{n1}\gamma_1 + \alpha_{n2}\gamma_2 + ... + \alpha_{nn}\gamma_n. \end{array}\right\} .$$

Bu sistemi aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha_{11} - z)\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + ... + \alpha_{1n}\gamma_n = 0, \\ \alpha_{21}\gamma_1 + (\alpha_{22} - z)\gamma_2 + ... + \alpha_{2n}\gamma_n = 0, \\ \text{..} \\ \alpha_{n1}\gamma_1 + \alpha_{n2}\gamma_2 + ... + (\alpha_{nn} - z)\gamma_n = 0. \end{array}\right\} . \tag{5.20}$$

Bu denklem sistemi, lineer homojen cebirsel denklem sistemi olduğundan, bu sistemin sıfırdan farklı $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ çözümünün olması için gerek ve yeter şart bu sistemin determinantının sıfıra eşit olmasıdır. Yani

$$\begin{vmatrix} (\alpha_{11} - z) & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & (\alpha_{22} - z) & ... & \alpha_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & (\alpha_{nn} - z) \end{vmatrix} = 0 \tag{5.21}$$

şartının sağlanmasıdır.

(5.21) denklemine (5.18) sisteminin **karakteristik denklemi** denir.

Şimdi (5.21) denkleminin n tane farklı reel $z_1, z_2, ..., z_n$ köklerinin olduğunu varsayalım. $z_1, z_2, ..., z_n$ köklerini (5.20) denkleminde yerine yazarak (5.20) denkleminin sıfırdan farklı $\gamma_{1i}, \gamma_{2i}, ..., \gamma_{ni}$ köklerini bulalım. Böylece, karakteristik (5.21) denkleminin z_i köküne (5.18) sisteminin

$$x_{1i} = \gamma_{1i} z_i^t, \; x_{2i} = \gamma_{2i} z_i^t, ..., \; x_{ni} = \gamma_{ni} z_i^t \qquad (5.22)$$

çözümleri karşılık gelir. Karakteristik denklemin farklı $z_1, z_2, ..., z_n$ köklerine karşılık (5.18) sisteminin çözümlerinin lineer bağımsız oldukları kolaylıkla gösterilebilir. Bu yüzden, bu çözümler sistemi (5.18) denklem sisteminin temel çözümleri sistemi olur. (5.18) sisteminin genel çözümü aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1\gamma_{11} z_1^t + c_2\gamma_{12} z_2^t + ... + c_n\gamma_{1n} z_n^t, \\ x_2 &= c_1\gamma_{21} z_1^t + c_2\gamma_{22} z_2^t + ... + c_n\gamma_{2n} z_n^t, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= c_1\gamma_{n1} z_1^t + c_2\gamma_{n2} z_2^t + ... + c_n\gamma_{nn} z_n^t. \end{aligned}$$

Örnek 5.1.

$$\left.\begin{aligned} x(t+1) &= -x(t) - 2y(t), \\ y(t+1) &= 3x(t) + 4y(t). \end{aligned}\right\}$$

sisteminin genel çözümünü bulalım.

Sistemin karakteristik denklemini

$$\begin{vmatrix} -1-z & -2 \\ 3 & 4-z \end{vmatrix} = 0$$

veya

$$-(1+z)(4-z) + 6 = 0$$

şeklinde yazarız. Bu denklemin kökleri $z_1 = 1, \; z_2 = 2$ olur. Bu halde (5.20) sistemi aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\left.\begin{aligned} -(1+z)\gamma_1 - 2\gamma_2 &= 0, \\ 3\gamma_1 + (4-z)\gamma_2 &= 0. \end{aligned}\right\} .$$

Bu denklemde $z_1 = 1$ alırsak, ikinci denklem birincisinin aynısı olduğundan $\gamma_{11} = 1$ alarak $\gamma_{21} = -1$ olduğunu buluruz. $z_2 = 2$ yazıp $\gamma_{12} = 1$ alarak $\gamma_{22} = -\frac{3}{2}$ olduğunu buluruz. Böylece, verilmiş sistemin genel çözümü

$$x(t) = c_1 + c_2 2^t, \quad y(t) = -c_1 - \frac{3}{2} c_2 2^t$$

şeklinde bulunur. (5.21) karakteristik denkleminin kökleri kompleks sayı da olabilir, yani

$$z_j = p + iq$$

şeklinde de olabilir. O zaman uygun olarak (5.18) sisteminin çözümleri

$$x_1 = \gamma_1 z_j^t, x_2 = \gamma_2 z_j^t, \dots, x_n = \gamma_n z_j^t$$

kompleks fonksiyonlar olur. $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ katsayıları (5.20) sisteminin $z = z_j$ karakteristik sayısına karşılık gelen çözümüdür. z_j kompleks sayı olduğundan $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ sayıları da genelde kompleks sayılar olur. Üstte gösterildiği gibi kompleks çözümün reel ve sanal kısımları (5.18) sisteminin reel çözümleri olur.

Örnek 5.2.

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) - \sqrt{3} y(t), \\ y(t+1) &= \sqrt{3} x(t) + y(t). \end{aligned}$$

sisteminin genel çözümünü bulalım.

Verilmiş sistemin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 1-z & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1-z \end{vmatrix} = 0$$

şeklinde olur. Bu denklemin kökleri

$$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}i$$

olur. (5.20) sisteminde $z = 1 + \sqrt{3}i$ alarak aşağıdaki sistemi yazalım:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{3}i\gamma_1 - \sqrt{3}\gamma_2 = 0, \\ \sqrt{3}\gamma_1 - \sqrt{3}i\gamma_2 = 0. \end{array}\right\} .$$

Bu sistemin ikinci denklemi, birincisinin her yanını $i = \sqrt{-1}$ sayısına çarpmakla bulunur. Burada $\gamma_1 = \sqrt{3}i$ alalım. O zaman $\gamma_2 = 1$ olduğu bulunur. Verilen sistemin kompleks çözümü

$$x = \sqrt{3}i(1+\sqrt{3}i)^t, \;\; y = (1+\sqrt{3}i)^t$$

veya trigonometrik şekilde yazarsak

$$x(t) = \sqrt{3}i2^t\left(\cos\frac{\pi}{3}t + i\sin\frac{\pi}{3}t\right), \;\; y(t) = 2^t\left(\cos\frac{\pi}{3}t + i\sin\frac{\pi}{3}t\right)$$

şeklinde bulunur. Bu çözümlerin reel ve sanal kısımlarını ayırarak iki çözüm buluruz:

$$x_1 = -\sqrt{3}2^t\sin\frac{\pi}{3}t, \;\; y_1 = 2^t\cos\frac{\pi}{3}t, \;\; x_2 = \sqrt{3}2^t\cos\frac{\pi}{3}t, \;\; y_2 = 2^t\sin\frac{\pi}{3}t.$$

Böylece verilmiş sistemin genel çözümü aşağıdaki şekilde olur:

$$x = -c_1\sqrt{3}2^t\sin\frac{\pi}{3}t + c_2\sqrt{3}2^t\cos\frac{\pi}{3}t, \;\; y = c_1 2^t\cos\frac{\pi}{3}t + c_2 2^t\sin\frac{\pi}{3}t \; .$$

5.6. Sabit Katsayılı Lineer Homojen Olmayan Fark Denklem Sistemleri

Şimdi lineer homojen olmayan fark denklem sistemini ele alalım:

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t+1) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + ... + a_{1n}x_n(t) + f_1(t), \\ x_2(t+1) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + ... + a_{2n}x_n(t) + f_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n(t+1) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + ... + a_{nn}x_n(t) + f_n(t). \end{array}\right\} . \qquad (5.23)$$

(5.23) sisteminin çözümünü bulmak için z-dönüşümünü uygulayalım. $\tilde{X}_1(z),\ \tilde{X}_2(z),...,\ \tilde{X}_n(z)$ ile çözümün $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$ koordinatlarının z-dönüşümünü, $\tilde{F}_1(z),\ \tilde{F}_2(z),...,\ \tilde{F}_n(z)$ ile $f_1(t),\ f_2(t),...,\ f_n(t)$ fonksiyonlarının z-dönüşümünü gösterelim.

(5.23) sisteminin

$$x_1(0) = x_1^0,\ x_2(0) = x_2^0,...,\ x_n(0) = x_n^0 \tag{5.24}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün bulunmasının istendiğini varsayalım.

(5.24) şartlarını kullanarak aşağıdaki z-dönüşümlerini yazalım:

$$x_1(t+1) \risingdotseq z\left[\tilde{X}_1(z) - x_1^0\right],\ x_2(t+1) \risingdotseq z\left[\tilde{X}_2(z) - x_2^0\right],...,$$

$$x_n(t+1) \risingdotseq z\left[\tilde{X}_n(z) - x_n^0\right] .$$

Aşağıdaki işaretlemeleri kabul edelim:

$$\varphi_1(z) = -\left[\tilde{F}_1(z) - zx_1^0\right], \left[\tilde{F}_2(z) - zx_2^0\right],...,\ \varphi_n(z) = -\left[\tilde{F}_n(z) - zx_n^0\right] .$$

(5.23) sisteminin her yanından z-dönüşümüne geçersek $\tilde{X}_1,\ \tilde{X}_2,...,\ \tilde{X}_n$ bilinmeyenleri için aşağıdaki homojen olmayan lineer, cebirsel denklem sistemini buluruz:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - z)\tilde{X}_1 + a_{12}\tilde{X}_2 + ... + a_{1n}\tilde{X}_n = \varphi_1(z), \\ a_{21}\tilde{X}_1 + (a_{22} - z)\tilde{X}_2 + ... + a_{2n}\tilde{X}_n = \varphi_2(z), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\tilde{X}_1 + a_{n2}\tilde{X}_2 + ... + (a_{nn} - z)\tilde{X}_n = \varphi_n(z). \end{array}\right\} . \tag{5.25}$$

Bu sistemi çözüp $\tilde{X}_1,\ \tilde{X}_2,...,\ \tilde{X}_n$ çözümlerinin ters z-dönüşümünü bularak (5.23) sisteminin çözümünü buluruz. (5.25) sisteminin çözümü Kramer formülleri ile de bulunabilir:

$$\tilde{X}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ \tilde{X}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ldots,\ \tilde{X}_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}\ .$$

Burada Δ, (5.25) sisteminin determinantıdır. $\Delta_j\,(j = 1,2,\ldots,n)$ determinantı sistemin yardımcı determinantı olup, Δ determinantında j numaralı sütunu (5.25) sisteminin sağ yanı ile değiştirilerek bulunur.

Örnek 5.3.

$$\left.\begin{aligned} x(t+1) &= 4x(t) - y(t) + 1, \\ y(t+1) &= x(t) + 2y(t). \end{aligned}\right\}$$

sisteminin

$$x(0) = x_0,\ \ y(0) = y_0$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü z -dönüşümünün uygulanmasıyla bulalım. Verilmiş sistemde z -dönüşümüne geçerek

$$\begin{aligned} z\tilde{X} - x_0 z &= 4\tilde{X} - \tilde{Y} + \frac{z}{z-1}, \\ z\tilde{Y} - y_0 z &= \tilde{X} + 2\tilde{Y}. \end{aligned}$$

veya

$$\left.\begin{aligned} (4-z)\tilde{X} - \tilde{Y} &= -x_0 z - \frac{z}{z-1}, \\ \tilde{X} + (2-z)\tilde{Y} &= -y_0 z. \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemini buluruz.

Bu sistemi çözersek

$$\tilde{X} = \frac{z\left(x_0 + \frac{1}{4}\right)}{z-3} - \frac{z\left(y_0 - x_0 - \frac{1}{2}\right)}{(z-3)^2} - \frac{1}{4}\frac{z}{z-1},$$

$$\tilde{Y} = \frac{z\left(y_0 - \frac{1}{4}\right)}{z-3} - \frac{z\left(y_0 - x_0 - \frac{1}{2}\right)}{(z-3)^2} + \frac{1}{4}\frac{z}{z-1}$$

buluruz. Burada

$$C_t^k \lambda^t \doteqdot \frac{z\lambda^k}{(z-\lambda)^{k+1}}$$

formülü kullanılarak

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{1}{4}\right)3^t - \frac{1}{3}\left(y_0 - x_0 - \frac{1}{2}\right)t3^t - \frac{1}{4},\;\; y(t) = \left(y_0 - \frac{1}{4}\right)3^t - \frac{1}{3}\left(y_0 - x_0 - \frac{1}{2}\right)t3^t + \frac{1}{4}$$

bulunur.

Şimdi $z_1, z_2, ..., z_k$ sayılarının karakteristik

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - z & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - z & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - z \end{vmatrix} = 0 \tag{5.26}$$

denklemine karşılık gelen $a_1.,a_2.,...,a_k.$ mertebeden katlı çözümleri olsun. O zaman

$$\Delta = (-1)^n (z - z_1)^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} ...(z - z_k)^{\alpha_k}$$

şeklinde olur. Eğer homojen denklemi ele alırsak, o zaman

$$\tilde{F}_j(z) \equiv 0, \quad j = 1, 2, ..., n$$

olur. Sistem homojen olduğundan da

$$\varphi_j(z) = x_j^0 z, \quad j = 1, 2, ..., n$$

şeklinde bulunur. Bu yüzden $\Delta_j = P_j(z)$ olur. Burada $P_j(z)$ derecesi n sayısını aşmayan polinom olur. Böylece, lineer homojen fark denklem sistemi halinde

$$\tilde{x}_j(z) = \frac{P_j(z)}{\Delta}, \quad j = 1, 2, ..., n$$

eşitliği bulunur. $\tilde{X}_j(z)$ fonksiyonunun bu ifadesini basit kesirlere ayırırsak

$$\tilde{X}_j(z) = z\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{A_{1j}}{z - z_i} + \frac{A_{2j}}{(z - z_i)^2} + ... + \frac{A_{\alpha_i, j}}{(z - z_i)^{\alpha_i}}\right]$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikten ters z -dönüşümüne geçersek

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^{k}\left[A_{1j} + \frac{A_{2j}}{z_i}t + ... + \frac{A_{\alpha_i, j}}{z_i^{\alpha_i - 1}}C_t^{\alpha_i - 1}\right]z_i^t$$

eşitliğini buluruz. Burada C_t^m ifadesi t'nin m dereceli polinomu olduğundan homojen lineer fark denklem sisteminin çözümünün her bir $x_j(t)$ bileşeni

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^{k} P_{i_j}(t) z_i^t \tag{5.27}$$

şeklinde bulunur. Burada $P_{i_j}(t)$ polinomunun derecesi $\alpha_i - 1$ sayısını aşmıyor ve α_i sayısı karakteristik (5.26) denkleminin z_i kökünün katlılığıdır.

SONUÇ

Bu çalışmada lineer homojen fark denklemleri, lineer homojen olmayan fark denklemleri, n. mertebeden lineer homojen fark denklemleri ve n. mertebeden lineer homojen olmayan fark denklemleri, sabit katsayılı lineer homojen fark denklemleri ve sabit katsayılı lineer homojen olmayan fark denklemlerinin ayrı ayrı çözümlerinin bulunuşu adım adım gösterildi ve ispat edildi. Lineer homojen olmayan fark denklemlerinin çözümünün bulunması için Lagrange'nin sabitlerin varyasyonu metodu kullanıldı.

Sabit katsayılı lineer homojen fark denklemleri ve sabit katsayılı lineer homojen olmayan fark denklemleri ve bu denklemlerin çözümlerinin bulunması için z-dönüşümü metodunun uygulanması ele alındı ve z-dönüşümünün yakınsaklığı, ters dönüşümü, açılımı, ötelenmesi, lineerliği, bürünmesi, izdüşümünün diferansiyellenmesi, limit değerleri tek tek incelendi.

Sabit katsayılı lineer homojen fark denklemleri ve sabit katsayılı lineer homojen olmayan fark denklemleri gösterildikten sonra bu denklemlerin oluşturdukları sistemler ve ayrı ayrı çözümleri ele alındı. Böylece lineer fark denklemleri en basit şekilde bu tez çalışmasında gösterilmiş oldu.

KAYNAKLAR

1. Abramov, S.A., Rational Solutions of Linear Differantial and Difference Equations with Polynomial Coefficients, Zh. Vychisl. Mat., Mat Fiz 29(11), 1611-1620, 1989.

2. Akın, Ö., Nümerik Analiz, Ankara Üniversitesi Yayın no: 149, Ankara, 1998.

3. Akın, Ö., Bulgak, H., Lineer Fark Denklemleri ve Kararlılık Teorisi, Selçuk Üniversitesi, Konya, 2000.

4. Çatal, S., Cebirsel Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemlerin Fark Denklemleri ile Çözümü", DEÜ Mühendislik Fakültesi Fen ve Mühendislik Dergisi, İzmir, 6(1), 129-138, 2004.

5. Gelfond, A.O., İsçisleniye Koneçnıx raznostey, Gostexizdat, 1952.

6. Gnoenskiy, L. C., Kamenskiy, G.A., Elsgols, L. E., Matematiçeskiye Osnovı Teorii Upravlyaemıx Sistem İzd " Nauka " Fizmatgiz, Moskova, 1969.

7. Kaczonek, T., Oscilatory Second Order Linear Difference Equations and Riccati Equations, Siam J. Math Aral, 18(1), 54-63, 1985.

8. Mkusinskıy, R., Operasyonnıye İsçisleniye, 1951.

9. Mustafayev, M. İ., Finitnıye Upravleniye dlya Sistemı, Opisıvayemoy v Koneçnıx Raznostyax S Postoyannımi Koeffisieçtami Mat. Dokl. Resp. Konf. Mol. Uçyonıx Po Mat. İ Mex., AN, Azerb. SSR, 1975.

10. Tuzik, A. I., Solvability of a Discrete Equations of Convolution Type with Variable Coefficients, Differantsial'nye Urauniya, 25(8), 1462-1464, 1989.

Ek 1: Diskret Orjinaller ve Onların Argümentinin Tam Değerlerinde z - izdüşümü (Laurent Açılımı)

No	$f(t)$	$\tilde{F}(z)$
1	1	$\frac{z}{z-1}$
2	t	$\frac{z}{(z-1)^2}$
3	$e^{\omega t}$	$\frac{z}{z-e^{\omega}}$
4	$\cos\omega t$	$\frac{z\ \ z-\cos\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$
5	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$
6	$ch\omega t$	$\frac{z\ \ z-\mathrm{c}h\omega}{z^2-2z\,\mathrm{c}h\omega+1}$
7	$sh\omega t$	$\frac{z\,\mathrm{s}h\omega}{z^2-2z\,\mathrm{c}h\omega+1}$
8	$C_t^k\lambda^t$	$\frac{z\lambda^k}{(z-\lambda)^{k+1}}$
9	C_t^k	$\frac{z}{(z-1)^{k+1}}$

Kaynak: Mustafayev, M. İ., Finitnıye Upravleniye dlya Sistemı, Opisıvayemoy v Koneçnıx Raznostyax S Postoyannımi Koeffisieçtami Mat. Dokl. Resp. Konf. Mol. Uçyonıx Po Mat. İ Mex., AN, Azerb. SSR, 1975.

Ek 2: Diskret Orjinaller ve Onların Argümentinin $s+\varepsilon\ T$ ve sT, $s=0,1,2,...$ değerlerindeki z-izdüşümleri (Laurent Açılımı)

No	$f((s+\varepsilon)T)$ $f(sT)$	$\tilde{F}(z,T,\varepsilon)$ $\tilde{F}(z,T)$
1	1	$\dfrac{z}{z-1}$
2	$(s+\varepsilon)T$	$T\dfrac{z}{(z-1)^2}+\varepsilon T\dfrac{z}{z-1}$
3	sT	$T\dfrac{z}{(z-1)^2}$
4	$e^{\omega\ s+\varepsilon\ T}$	$\dfrac{ze^{\omega\varepsilon T}}{z-e^{\omega T}}$
5	$e^{\omega sT}$	$\dfrac{z}{z-e^{\omega T}}$
6	$\cos\omega(s+\varepsilon)T$	$\dfrac{z^2\cos\omega T\varepsilon - z\cos\omega T(1-\varepsilon)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
7	$\cos\omega sT$	$\dfrac{z^2 - z\cos\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\sin\omega(s+\varepsilon)T$	$\dfrac{z^2\sin\omega T\varepsilon + z\sin\omega T(1-\varepsilon)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\sin\omega sT$	$\dfrac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$

Kaynak: Mustafayev, M. İ., Finitnıye Upravleniye dlya Sistemı, Opisıvayemoy v Koneçnıx Raznostyax S Postoyannımi Koeffisieçtami Mat. Dokl. Resp. Konf. Mol. Uçyonıx Po Mat. İ Mex., AN, Azerb. SSR, 1975.

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Denizli'de doğan Selçuk AKYOL, orta ve lise öğrenimini sırasıyla Büyük konak Atatürk İlköğretim Okulu ve Nazilli Anadolu Öğretmen Lisesinde tamamlamıştır. 2002 yılında kazandığı Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünü 2008 yılında başarıyla bitirmiştir.

2009 yılında yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başlamıştır. Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV danışmanlığında hazırladığı "Lineer Fark Denklemleri ve Çözüm Metodları Üzerine" başlıklı tezine devam etmektedir.

2009 yılından beri Bozok Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde eğitimine devam etmekte olan Selçuk AKYOL, evli ve 1 çocuk babasıdır.

İletişim Bilgileri

Adres: Aşık Veysel mah. 364. Sok. 4/8 Mamak/ANKARA

06630 ANKARA

Telefon: (312) 389 82 76

E-posta: selcuk_akyol23@hotmail.com