T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRLER VE ONLARIN GREEN FONKSİYONUNUN İNŞASI ÜZERİNE

Murat İCİK

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2012

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRLER VE ONLARIN GREEN FONKSİYONUNUN İNŞASI ÜZERİNE

Murat İCİK

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2012

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 70111310004 numaralı öğrencisi Murat İCİK'in hazırladığı"Lineer Diferansiyel Operatörler ve Onların Green Fonksiyonunun İnşası Üzerine" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezi ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 08/05/2012 Salı günü saat 11:00'te yapılmış, tezin onayına OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Üye : Prof. Dr. Mammad I. MUSTAFAYEV (Danışman)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 23/5/2012 tarih ve 5 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

23/5/2012

Enstitü Müdürü

(Ünvanı, Adı Soyadı)

Doç. Dr. Hidayet ÇETİN
Bozok Üniversitesi
Fen Bil.Enst.Müdürü

İÇİNDEKİLER

LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRLER VE ONLARIN GREEN FONKSİYONUNUN İNŞASI ÜZERİNE

Murat İCİK

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2012; Sayfa: 93

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ÖZET

Bu çalışmada, Lineer Diferansiyel Operatörler ve Onların Green Fonksiyonunun İnşası anlatıldı, önce gerekli olan temel tanımlardan Lineer uzay, Reel lineer uzay, Kompleks lineer uzay, Lineer bağımlı eleman, Lineer bağımsız eleman, Lineer manifold (lineer uzayda alt uzay), Lineer operatör, Lineer diferansiyel ifade, sınır şartları ve lineer diferansiyel operatörün tanımları yapıldı. Farklı farklı sınır şartlarında $l(y)$ diferansiyel ifadesi farklı farklı L operatörleri doğurduğu anlatıldı. Ters operatörün genel tanımı anlatılarak ters operatörün özellikleri ile ilgili lemmaların ispatı incelendi. Lineer diferansiyel operatörler için Green fonksiyonunun tanımı yapılarak bir lineer diferansiyel operatörün Green fonksiyonunun inşası yöntemi ve parametre bulunduran sınır değer problemlerinin integral denkleme getirilmesi anlatıldı ve örnekler çözüldü.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel İfade, Sınır Şartları, Lineer Diferansiyel Operatör, Green Fonksiyonu, Green Fonksiyonunun İnşası

ADDITION TO THE LINEAR DIFFERENTIAL OPERATORS AND THEIR CONSTRUCTION OF GREEN'S FUNCTION

Murat İCİK

Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Maths
Master of Science Thesis

2012; Page: 93

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ABSTRACT

In this study, Linear Differential Operators and Differential Operators Construction of Green's Function was described. The necessary basic definitions -the linear space of real linear space, the complex linear space, linear-dependent element, independent of linear elements, linear manifold (subspace linear space), linear operator, linear differential expression, boundary conditions and linear differential Description of the operator were explained.It is also explained that L (y) differential expression in different boundary conditions born different L operators. After explaining the general description of the inverse operator , lemmas related to features of the inverse operator were proved. Green function for linear differential operators was defined and the construction of green fuction of a linear differential operator and the introduction of integral equation of boundary value problems containing a parameter have been defined and described and also examples have been solved.

Keywords: Differential expression, since the boundary conditions, the linear differential operator, Green function, Green function construction

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve alakasını kesmeyen, ortaya çıkan her türlü bilimsel problemin çözümünde yardımlarını gördüğüm tez danışmanım Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV'e, bölüm başkanımız Yrd. Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN'e, hocalarım Yrd. Doç. Dr Abdullah SÖNMEZOĞLU ile Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN'a, ayrıca bana her zaman destek olan eşim Nilgün Neşe İCİK ve çocuklarım Engin Güray ile İlayda İkbal' a sonsuz teşekkür ederim.

ŞEKİLLER LİSTESİ

SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$[a,b]$	:	Kapalı Reel Sayı Aralığı
$C_{[a,b]}$	:	$[a,b]$ Aralığında Tanımlanmış Sürekli Fonksiyonların Uzayı
$C^n_{[a,b]}$	:	$[a,b]$ Aralığında Tanımlanmış n.Mertebeden Diferansiyellenebilen Sürekli Fonksiyonların Uzayı
D(A)	:	A operatörünün Tanım Bölgesi
$R(A)$	:	A operatörünün Değerler Bölgesi
detU	:	U matrisinin Determinantı
$l(y)$	:	Diferansiyel İfade
L	:	Lineer Operatör
L^{-1}	:	L Operatörünün Tersi Olan Operatör
$\overline{z(x)}$	:	$z(x)$ Fonksiyonunun Kompleks Eşleniğini
L^*	:	L Operatörünün Eşlenik Operatörü
$U_\gamma(y) = 0$	:	Homojen Lineer Sınır Şartları
$G(x,\xi)$	:	Green Fonksiyonu
$y^{(n-2)}(x)$	:	*y(x)* Fonksiyonunun *x* e göre (*n-2*). Mertebeden Türevi
$\{\delta_n(x)\}$	:	Fonksiyonel Dizi
δ	:	Delta İşareti
$G(x,\xi,\lambda)$	:	λ Parametresine Bağlı Green Fonksiyonu
Sin	:	Sinüs Fonksiyonu
Cos	:	Kosinüs Fonksiyonu
Sin h	:	Hiperbolik Sinüs Fonksiyonu
Cos h	:	Hiperbolik Kosinüs Fonksiyonu
$\sum$	:	Toplam Sembolü

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, Lineer Diferansiyel Operatörler ve Onların Green Fonksiyonunun İnşası anlatıldı önce gerekli olan temel tanımlardan Lineer uzay, Reel lineer uzay, Kompleks lineer uzay, lineer bağımlı eleman, lineer bağımsız eleman, lineer manifold (lineer uzayda alt uzay), lineer operatör, lineer diferansiyel ifade, sınır şartları ve lineer diferansiyel operatörün tanımları yapıldı. Farklı farklı sınır şartlarında $l(y)$ diferansiyel ifadesi farklı farklı L operatörleri doğurduğu anlatıldı. Ters operatörün genel tanımı anlatılarak ters operatörün özellikleri ile ilgili lemmaların ispatı incelendi. Lineer diferansiyel operatörler için Green fonksiyonunun tanımı yapılarak bir lineer diferansiyel operatörün Green fonksiyonunun inşası yöntemi ve parametre bulunduran sınır değer problemlerinin integral denkleme getirilmesi anlatıldı ve örnekler çözüldü.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Lineer Diferansiyel Operatörün Tanımı ve Esas Özellikleri

2.1.1 Lineer Uzay

x, y, z, ... Elemanlarından oluşan bir E kümesini ele alalım bu küme de cebirsel elemanların toplamını yani $\forall x, y \in E$ aldığımızda $x + y \in E$ ve $\forall x \in E$ elemanı için λ skaler sayısıyla çarpımının da λx ∈ E tanımlandığını kabul edelim bu işlemler aşağıdaki şartları sağladığında E kümesine Lineer *Uzay* denir.

1) $x + y = y + x$
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$
3) $\exists\ 0 \in E\ ve\ \forall x \in E\ için\ \ x + 0 = x$
4) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
5) $1x = x\ \ ve\ \ 0x = \ 0$
6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu y$

Burada ki λ ve μ sayıları reel sayı olduğunda lineer uzaya; *Reel Lineer Uzay*, kompleks sayılar olduğunda ise *Kompleks Lineer Uzay* olarak adlandırılır. Lineer uzayda $(-1)x = -x$ biçiminde gösterilir ve $-x$ elemanına x elemanı nın eksi elemanı denir. $x + (-x) = 1(x) + (-1)x = (1 - 1)x = 0x = 0$ olduğundan iki elemanın farkı işlemi şu şekilde tanımlanır, $x - y = x + (-1)y$ biçimindedir.

Örnek 2.1. $[a, b]$ Aralığında tanımlanmış sürekli fonksiyonun kümesi, fonksiyonun toplamına ve skaler sayıyla çarpımına göre lineer uzay oluşturur. Gerçekten de iki sürekli fonksiyonun toplamı da süreklidir. Bir skaler sayıyla çarpımı da süreklidir. $[a, b]$ aralığında tanımlanmış tüm sürekli fonksiyonların lineer uzayı $C_{[a,b]}$ şeklinde gösterilir. $[a, b]$ aralığında tanımlanmış n. mertebeye kadar (n.mertebeden türev dahil olmak üzere) diferansiyellenen fonksiyonların kümesinde bu fonksiyonların toplamını ve skaler sayıyla çarpımını tanımladığımızda bu kümede lineer uzay olur, n.kez sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonların toplamı da, skaler sayıyla çarpımı da n.kez sürekli diferansiyellenebilirdir. Bu lineer uzay ise $C^n_{[a,b]}$ biçiminde gösterilir. Lineer uzayda elemanların lineer bağımlılığı ve lineer bağımsızlığı da tanımlanabilir E lineer uzay olsun $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ bu uzaydan alınmış elemanlar ve $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ skaler sayılar olsun $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ toplamına $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ elemanlarının lineer kombinasyonu denir.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

eşitliği;

a) Tümü sıfıra eşit olmayan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, sayıları için sağlanıyorsa bir başka ifade ile $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ eşitliğini sağlayan *en az bir tane sıfırdan farklı* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ sayısı bulabiliyorsak $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ elemanlarına *Lineer Bağımlı* elemanlar denir.

b) $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ eşitliği yalnız ve yalnız $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ değerleri için sağlandığında $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ elemanlarına *Lineer Bağımsız* elemanlar denir. Lineer E uzayında m – sayıda lineer bağımsız eleman var ama bu uzayda m+1 sayıda alınmış tüm elemanlar lineer bağımlı olduğundan lineer E uzayına *m-boyutlu lineer uzay* denir. n boyutlu lineer E uzayında n sayıda lineer bağımsız olan her bir vektörler sistemine bu uzayda *baz* denir. Her n doğal sayısı için lineer E uzayında n sayıda lineer bağımsız eleman bulunursa bu uzaya *sonsuz boyutlu lineer uzay* denir.

Örnek 2.2. $C_{[a,b]}$ uzayı sonsuz boyutlu lineer uzaydır.Bu uzayda $1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n, \ldots$ fonksiyonlar sistemini alalım $\forall n \in N$ için $1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n \in C_{[a,b]}$ elemanları $[a, b]$ aralığında lineer bağımsız elemanlar olur.

Örnek 2.3. $C_{[a,b]}^n$ uzayı sonsuz boyutlu lineer uzaydır. Çünkü $\{t^m\}_{m=0}^{m=\infty} \subset C_{[a,b]}^n$ olmasından dolayı bu uzay sonsuz boyutlu lineer uzaydır

2.1.2. Lineer Manifold

E herhangi bir lineer uzay ve $\tilde{E}$ bu uzaydan alınmış bir küme olsun $\forall x, y \in \tilde{E}$ için bu elemanların lineer kombinasyonları yani keyfi α ve β sayıları için $\alpha x + \beta y$

lineer kombinasyonu da $\tilde{E}$ kümesinin elemanı olduğunda $\tilde{E}$ kümesine lineer E uzayında *Lineer Manifold* denir. Lineer manifolda *Alt Uzay* da denir.

2.1.3. Lineer Operatör

E herhangi bir lineer uzay ve D bu uzaydan alınmış bir alt küme olsun D kümesinden aldığımız her eleman belirli bir kuralla E uzayındaki bir y elemanına karşı getirildiğinde D kümesinde bir A operatörü tanımlanmış demektir ve bu y=A(x) şeklinde gösterilir. D kümesine ise A operatörünün tanım bölgesi denir. D(A) veya D_A biçiminde gösterilir. A: D → E şeklinde ki A operatörünün değerler kümesi $R(A)$ aşağıdaki biçiminde gösterilir.

$$R(A) = \{\, y = A(x);\ \ x \in D_A \quad ve \quad y \in E \ \}$$

Varsayalım ki D(A), A operatörünün tanım bölgesi ve D(F), de F operatörünün tanım bölgesi olmak üzere A ve F operatörleri verilmiş olsun D(A) ⊂ E ve D(F) ⊂ E D(A) = D(F) = D olduğundan $\forall x \in$ D(A) için F(x) = A(x) eşitliği sağlandığında bu operatörlere eşit operatörler denir ve F = A ile gösterilir. D(A) ⊂ D(F) olduğunda ve $\forall x \in$ D(A) için F(x) = A(x) eşitliği sağlandığında F operatörüne A operatörünün D(F) kümesine genişletilmesi denir. A operatörüne ise F operatörünün D(A) kümesine kısıtlanması denir. A operatörünün tanım bölgesi D(A) ⊂ E lineer E uzayında lineer manifold oluştursun bu A operatörü için $\forall x, y \in$ D(A) aldığımızda;

$$\mathrm{A}(x + y) = \mathrm{A}(x) + \mathrm{A}(y)$$

eşitliği ile $\forall x \in$D(A) ve keyfi λ sayısı için,

$$\mathrm{A}(\lambda x) = \lambda \mathrm{A}(x)$$

eşitliği sağlandığında A operatörüne *Lineer Operatör* denir. A operatörü lineer operatör olduğunda A(x) ifadesi sadece Ax şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1. Her bir lineer operatörün değerler bölgesi de lineer manifold dur

İspat: $y_1, y_2 \in R(A)\ ve\ \lambda_1, \lambda_2$ skaler sayılar olduklarını varsayalım $Ax_1 = y_1$ ve $Ax_2 = y_2$ eşitliklerini sağlayan $x_1, x_2 \in D(A)$ alalım şu halde A operatörünün lineer olduğunu da kullanarak;

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 \, A x_2 = A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

eşitliğini yazabiliriz bu eşitlikte $(\lambda_1 \, x_1 + \lambda_2 \, x_2) \in D(A)$ elemanının $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ elemanına dönüştüğü görülür böylece $(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \in R(A)$ olduğu için $R(A)$ bölgesi lineer manifold olur böylece teorem ispatlanmış olur. Biz burada sadece lineer operatörleri ele alacağız.

2.1.4. Lineer Diferansiyel İfade

Aşağıdaki şekilde tanımlanmış;

$$l(y) = P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + P_n(x) \qquad (2.1)$$

eşitliğine lineer diferansiyel ifade denir. Burada ki $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... , $P_n(x)$ fonksiyonlarına bu diferansiyel ifadenin katsayıları denir. Bu fonksiyonlar $[a, b]$ aralığında tanımlanmış fonksiyonlardır (2.1) ifadesindeki en yüksek mertebeli terimin mertebesine, (2.1) diferansiyel ifadesinin mertebesi denir. Burada $\frac{1}{P_0(x)}$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... , $P_n(x)$ fonksiyonlarının $[a, b]$ aralığında tanımlanmış sürekli fonksiyonlar oldukları varsayılır. Diferansiyel ifadede $y(x)$ fonksiyonunun n mertebeden türevini gösteren n sayısına diferansiyel ifadenin mertebesi denir. Dikkate alalım ki (2.1) diferansiyel ifadesi $C^n_{[a,b]}$ uzayında tanımlanmıştır. Böylece l operatörü $l : C^n_{[a,b]} \rightarrow C_{[a,b]}$ dönüşen lineer bir operatördür. Yani her bir $y \in C^n_{[a,b]}$ için $l(y) \in C_{[a,b]}$ olur. Böylece $l(y)$ ifadesinin $C^n_{[a,b]}$ de tanımlanmış değerleri $C_{[a,b]}$ olan bir lineer operatör olduğu görülür. Bu operatörü ileride L_1 ile göstereceğiz. l lineer operatör olduğundan aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$l(y_1 + y_2) = l(y_1) + l(y_2)$$

$$l(\lambda y) = \lambda l(y)$$

2.1.5. Sınır Şartları

$y = y(x)$ fonksiyonunun $x = a$ ve $x = b$ noktasındaki kendisinin ve (n–1) inci mertebeye kadar (n–1 inci mertebe dahil) türevlerinin değerlerini uygun olarak;

$$y(a) = y_a\,, y'(a) = y'_a\ ,\ \ y''(a) = y''_a\,, \ldots.\,, y^{(n-1)}(a) = y_a^{(n-1)} \tag{2.2}$$

$y(b) = y_b\,, y'(b) = y'_b\ ,\ \ y''(b) = y''_b\,, \ldots.\,, y^{(n-1)}(b) = y_b^{(n-1)}$ Şeklinde gösterelim. Böylece $y_a\,, y'_a\,,\ y''_a\ ,\ \ldots\ , y_a^{(n-1)}\ ,\ y_b\ ,\ y'_b\ ,\ y''_b,\ \ldots\ , y_b^{(n-1)}$ değişkenlerinin lineer kombinasyonunu (lineer formunu) $U(y)$ ile gösterelim;

$$U(y) = \alpha_0\, y_a + \alpha_1\, y'_a + \cdots + \alpha_{n-1}\, y_a^{(n-1)} + \beta_0\, y_b + \beta_1\, y'_b + + \beta_{n-1}\, y_b^{(n-1)} \tag{2.3}$$

Şeklinde yazılan lineer formunu ele alalım. Buradaki

$$\alpha_0,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \qquad \text{ve} \qquad \beta_{0,}\ \ \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$$

(2.3) eşitliğinin katsayılarıdır. Bu şekildeki (2.3) lineer formundan m tanesinin, yani $U_1(y)\,, U_2(y),\ U_3(y), \ldots, U_m(y)$ lineer formlarının verildiğini varsayalım,

$$U_\gamma(y) = \alpha_0^\gamma y_a + \ldots + \alpha_{n-1}^\gamma\, y_a^{(n-1)} + \beta_0^\gamma\, y_b + \beta_1^\gamma\, y_b' + \cdots + \beta_{n-1}^\gamma\, y_b^{(n-1)} \tag{2.4}$$

$(\gamma = 1,2,3,4, \ldots m\ )$ Şeklinde lineer formlar yazabiliriz

$$U_\gamma(y) = 0 \qquad \gamma = 1,2,3,4, \ldots \tag{2.5-a}$$

(2.5-a) sınır şartlarının açık şekli aşağıdaki gibi yazılır,

$$U_1(y) \equiv \alpha_0^1 y_a + \alpha_1^1\, y_a^1 + \cdots + \alpha_{n-1}^1\, y_a^{(n-1)} + \beta_0^1 y_b + \beta_1^1\, y_b^1 + \cdots + \beta_{n-1}^1 y_b^{(n-1)} = 0$$

$$U_1(y) \equiv \alpha_0^2 y_a + \alpha_1^2\, y_a^1 + \cdots + \alpha_{n-1}^2\, y_a^{(n-1)} + \beta_0^2 y_b + \beta_1^2\, y_b^1 + \cdots + \beta_{n-1}^2 y_b^{(n-1)} = 0$$

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

$$U_1(y) \equiv \alpha_0^m y_a + \alpha_1^m\, y_a^1 + \cdots + \alpha_{n-1}^m\, y_a^{(n-1)} + \beta_0^m y_b + \beta_1^m\, y_b^1 + \ldots + \beta_{n-1}^m y_b^{(n-1)} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^{\gamma}\, y_a^{(k)} + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k^{\gamma}\, y_b^{(k)} = 0 \tag{2.5-b}$$

(2.5-a) veya (2.5-b) eşitliklerine sınır şartları denir. (2.5-a) veya (2.5-b) şartlarında aldığımız fonksiyonları $C_{[\mathrm{a},b]}^{n}$ uzayından alırız. Bu uzay $[a,b]$ aralığında tanımlanmış n. mertebeye kadar (n. mertebede dâhil) tüm türevleri var ve sürekli fonksiyonların lineer uzayı olduğundan veya kümesi olduğundan (2.5-a) ve (2.5-b) şartlarında aldığımız fonksiyonların her biri $[a,b]$ aralığında n. mertebeden sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. $C_{[a,b]}^{n}$ uzayından alınmış, (2.5-a) ve (2.5-b) şartlarını sağlayan tüm $y\ (x) \in C_{[a,b]}^{n}$ fonksiyonların kümesini $\mathcal{D}$ ile gösterelim böylece $\mathcal{D}$ kümesi;

$$\mathcal{D} = \{\, y\,(x) \in C_{[a,b]}^{n};\ U_{\gamma}(y) = 0 \quad ve \quad \gamma = 1,2,3,4,\dots m \tag{2.6}$$

Şeklinde yazılabilir. Özel olarak $y(x)$ fonksiyonlarının $U_{\gamma}(y) = 0 \quad \gamma = 1,2,3,4,\dots m$ sınır şartlarını sağladığını istemediğimizden $\mathcal{D} = C_{[a,b]}^{n}$ olur. (2.1) lineer diferansiyel ifadesini ve (2.5-a) eşitliğindeki şartlarla (2.6) eşitliği ile tanımlanan bir $\mathcal{D}$ manifoldundan keyfi bir y $(x) \in \mathcal{D}$ elamanını alıp (2.1) ifadesinde y'nin yerine yazdığımızda $l(y\,) = U(x)$ fonksiyonunu elde ederiz. (2.1) diferansiyel ifadesindeki $\mathrm{P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x), \dots P_n(x)}$ Fonksiyonlarını $[a,b]$ aralığında tanımlanmış sürekli fonksiyonlar olduğu varsayımından $U(x)$ fonksiyonu da $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyon olur. Böylece burada $\mathcal{D}$ kümesinden $C_{[a,b]}$ uzayına bir operatör tanımlamış oluruz. Bu dönüşümü $l(y\,) = U$ biçiminde gösteririz. Burada tanımladığımız operatörü L ile gösterelim Ly = $U \quad \forall y \in \mathcal{D}$ için,

$$\mathrm{L} : \mathcal{D} \ \rightarrow\ C_{[a,b]}$$

dönüştüren bir lineer operatördür. Bu lineer operatörün tanım bölgesi $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathrm{L})$ olur. Bu L lineer operatörü, (2.1) lineer diferansiyel ifadesi ve (2.5-a) sınır şartları yardımıyla inşa edildiğinde bu L operatörüne *"Lineer Diferansiyel Operatör"* denir. Çoğu zaman L lineer diferansiyel operatörüne, (2.1) lineer diferansiyel ifadesinin ve

(2.5-a) sınır şartlarının doğurduğu operatör denir. (2.6) ifadesinde (2.5-b) sınır şartları olmadığı zaman $\mathcal{D} = C^n_{[a,b]}$ olur. Bu durumda diferansiyel operatörü, (2.1) lineer diferansiyel ifadesi doğurur. Bu lineer diferansiyel operatörü L_1 ile gösterilir. L_1 Operatörünün tanım bölgesi $\mathcal{D}(\mathrm{L}_1) = C^n_{[a,b]}$ olur. Burada dikkat edelim ki farklı farklı (2.5) veya (2.5-b) sınır şartlarında (2.1) diferansiyel ifadesi farklı farklı L operatörleri doğurur. Bu L operatörlerinin tanım bölgesi $\mathcal{D}(L_1) = C^n_{[a,b]}$ ve her bir $y \in \mathcal{D}(L)$ için $\mathrm{L}(y) = L_1(y)$ eşitliği sağlanır. Fakat operatörünün uygun $\mathcal{D}(L)$ bölgelerine kısıtlanmaları olan L operatörlerinin ele alınıp incelenmelerinin bazı pratik problemlerin çözümünde çok büyük önemi ve faydaları vardır. Bu nedenle,(2.1) lineer diferansiyel ifadesinin ve (2.5-a) şartlarının doğurdukları farklı farklı L operatörlerinin ayrı ayrı ele alınıp incelenmesi gerekir. Burada $U_1(y$, $U_2(y), U_3(y), \dots, U_m(y)$ lineer formlarından bazıları diğerlerinin lineer kombinasyonları şeklinde gösterilebilecek şekilde verilebilir. Böyle formlara uygun yazılmış (2.5-a) sınır şartları diğer formlara uygun yazılmış sınır şartlarının sonucu olurlar. Bu nedenle verilmiş sınır şarlarından bazılarının atılması gerekir. Bu nedenlerden dolayı $U_\gamma(y)$ formlarının önceden lineer bağımsız olduklarını bilmemiz gerekir.

$$U_1(y), U_2(y), \dots , U_m(y)$$

Lineer formlarının lineer bağımsız olması için lineer formların katsayılarından oluşan (A⁝B) matrisinin rankının m sayısına eşit olması gerekir, yani lineer formların *m* sayısına eşit olması gerekir diğer bir ifadeyle rank(A⁝B) = *m* olmalıdır. Burada;

$$(A\vdots B) = \begin{pmatrix} \alpha_0^1\ \alpha_1^1\ \alpha_2^1 \dots \alpha_{n-1}^1 & \beta_0^1\ \beta_1^1\ \beta_2^1 \dots & \beta_{n-1}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_0^m\ \alpha_1^m\ \alpha_2^m \dots \alpha_{n-1}^m & \beta_0^m\ \beta_1^m\ \beta_2^m \dots & \beta_{n-1}^m \end{pmatrix} \qquad (2.7)$$

Özel halde m = 2n *ise* bir başka ifadeyle sınır şartlarının sayısı m = 2n olduğunda ve rank (A⁝B) = 2n şartı sağlandığında uygun olarak (2.5-a) sınır şartları aşağıdaki şekilde yazılır

$$y_a = y'_a = y''_a = \cdots = y_a^{(n-1)} = y_b = y'_b = y''_b = \cdots = y_b^{(n-1)} = 0 \qquad (2.8)$$

$l(y)$ lineer diferansiyel ifadesinin ve (2.8) sınır şartlarının doğurduğu diferansiyel operatörü L_0 ile göstereceğiz.

2.1.6. Homojen Sınır Değer Problemi

Aşağıdaki

$$l(y) = \mathrm{P}_0(\mathrm{x})\mathrm{y}^{(\mathrm{n})} + \mathrm{P}_1(\mathrm{x})\mathrm{y}^{(\mathrm{n}-1)} + \mathrm{P}_2(\mathrm{x})\mathrm{y}^{(\mathrm{n}-2)} + \cdots + \mathrm{P}_\mathrm{n}(\mathrm{x})\mathrm{y} = 0 \qquad (2.9)$$

homojen lineer diferansiyel denkleminin;

$$U_\gamma(y) = 0 \qquad \gamma = 1,2,3,4,\dots m \qquad (2.10)$$

homojen lineer sınır şartlarını sağlayan $C^n_{[a,b]}$ uzayında bulunan y (x) çözümünün bulunması problemine homojen sınır değer problemi denir. (2.9) ve (2.10) homojen sınır değer probleminin (2.10) sınır şartını (2.5-b) gibi daha açık şekilde de ifade edebiliriz. (2.1) diferansiyel ifadesinin ve (2.10) homojen lineer sınır şartlarının doğurduğu lineer diferansiyel operatörü L ile gösterelim. Bu durumda (2.9) ve (2.10) homojen sınır değer problemini çözmek için burada tanımladığımız L operatörünün $\mathcal{D}(L)$ tanım bölgesinden öyle bir y$(x) \in \mathcal{D}(L)$ fonksiyonunu bulalım ki bu fonksiyon L operatörünü sıfıra dönüştürsün yani $Ly \equiv 0$ olur. Böylece (2.9) ve (2.10) homojen sınır değer problemini çözmek $L\, y \equiv 0$ şartını sağlayan y $(x) \in \mathcal{D}(L)$ fonksiyonunun bulunmasına getirilmiş olur. Dikkate alalım ki her bir lineer homojen sınır değer probleminin en az bir tane sıfıra eşit olan $y \equiv 0$ çözümünün olduğu aşikâr dır. Lineer homojen (2.9) ve (2.10) sınır değer probleminin aynen sıfıra eşit olan $y(x) \equiv 0$ çözümüne bu problemin "*trivial*" çözümü denir. Fakat bu (2.9) ve (2.10) homojen sınır değer probleminin trivial olmayan, yani aynen sıfıra eşit olmayan çözümü de olabilir. Şimdi biz burada Lineer homojen (2.9) ve (2.10) sınır değer probleminin trivial olmayan, yani aynen sıfıra eşit olmayan çözümünün varlığının şartlarını belirleyelim. Bunun için n-mertebeli lineer homojen, (2.9) diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri sistemi,

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), y_3 = y_3(x)\, , y_4 = y_4(x), \dots, y_{n-1} = y_{n-1}(x),\ y_n = y_n(x)$$

biçiminde gösterelim şu halde (2.9) denkleminin genel çözümünü

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x) + \cdots + c_ny_n(x) \qquad (2.11)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradaki $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ katsayıları keyfi sabit sayılardır sınır şartları lineer olduğundan dolayı (2.9) ve (2.10) lineer homojen sınır değer probleminin çözümü de (2.11) şeklinde olacaktır. (2.9) denkleminin (2.11) şeklinde bulunan genel çözümünü (2.10) sınır şartlarında y fonksiyonunun yerine yazarak (2.11) formundaki $c_1, c_2, c_3, \dots c_n$ katsayılarının aşağıdaki şartları sağlaması gerekir.

$$\left.\begin{array}{r} c_1U_1(y_1) + c_2U_1(y_2) + c_3U_1(y_3) + \dots + c_nU_1(y_n) = 0 \\ c_1U_2(y_1) + c_2U_2(y_2) + c_3U_3(y_3) + \cdots + c_nU_3(y_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ c_1U_m(y_1) + c_2U_m(y_2) + c_3U_m(y_3) + \cdots + c_nU_m(y_n) = 0 \end{array}\right\} \qquad (2.12)$$

Böylece (2.11) formülü ile bulunan $y(x)$ fonksiyonunun (2.9) denklemini sağlamasıyla birlikte bu fonksiyonun (2.10) sınır şartlarını da sağlaması için (2.11) formülündeki $c_1, c_2, c_3, \dots c_n$ katsayıları (2.12) lineer homojen cebirsel denklemler sisteminin çözümü olması gerekir. (2.12) sisteminin matrisini U ile gösterelim o halde (2.12) sisteminin U matrisini için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz;

$$U = \begin{pmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) \dots. & U_1(y_{n-1}) & U_1(y_n) \\ & \vdots & & \vdots & \vdots \\ U_m(y_1) & U_m(y_2) & U_m(y_3) \dots & U_{m-1}(y_{n-1}) & U_m(y_n) \end{pmatrix} \qquad (2.13)$$

(2.12) sisteminin (2.13) eşitliği ile tanımlanan U matrisinsin rankını r ile gösterelim O zaman (2.12) sisteminin $c_1, c_2, c_3, \dots c_n$ Sabitlerine göre n-r sayıda bağımsız çözümler sistemi olur. Bu nedenle (2.9)-(2.10) homojen lineer sınır değer probleminin (2.11) şeklinde n-r sayıda trivial olmayan lineer bağımsız çözümleri olur. Böylece, uygun olarak biz (2.9)-(2.10) lineer homojen sınır değer probleminin çözümünün varlığı ile ilgili aşağıdaki lemmaları ispatlamış olduk

Lemma 2.1. (2.13) matrisinin rankı r olduğunda (2.9) - (2.10) lineer homojen sınır değer probleminin *n-r* sayıda (2.11) biçiminde lineer bağımsız çözümleri vardır.

Lemma 2.2.

a) (2.9)-(2.10**)** lineer homojen sınır değer probleminin trivial olmayan çözümünün olması için gerek ve yeter şart (2.13) matrisinin rankının (2.1) diferansiyel ifadesinin *n* mertebesinden küçük olmalıdır.
b) (2.10) homojen sınır şartlarındaki, şartların m sayıs (2.1) diferansiyel ifadesinin mertebesini gösteren n sayısından küçük olduğunda, yani $m < n$ şartı sağlandığında (2.9)-(2.10**)** lineer homojen sınır değer probleminin trivial olmayan çözümü vardır
c) (2.10) homojen sınır şartlarındaki, şartların m sayısı (2.9) diferansiyel ifadesinin mertebesini gösteren *n* sayısına eşit olduğunda, yani $m = n$ şartı sağlandığında (2.9)-(2.10**)** lineer homojen sınır değer probleminin trivial olmayan çözümünün olması için gerek ve yeter şart (2.13) quadratik matrisinin (bu halde U matrisi quadratik matris olur) determinantının sıfıra eşit olmasıdır.

Burada dikkate alalım ki (2.13) matrisinin rankı (2.9) diferansiyel denkleminin lineer bağımsız (fundamental) çözümlerini $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x), \dots , y_n(x)$ Sisteminin seçimine bağlı değildir. Gerçektende (2.9) diferansiyel denkleminin lineer bağımsız $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x), \dots , y_n(x)$ çözümleri sistemini (2.9) diferansiyel denkleminin başka bir lineer bağımsız $\widetilde{y_1(x)}$, $\widetilde{y_2(x)}$, $\widetilde{y_3(x)}$, … ,$\widetilde{y_n(x)}$ çözümleri sistemi ile değiştirdiğimizde bu değişim aşağıdaki lineer dönüşümle gerçekleştirilir.

$$\widetilde{y_i(x)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j\,(x) \quad ; \; i = 1,2,3, \dots n \tag{2.14}$$

Bu lineer dönüşümün matrisinin determinantı sıfırdan farklı olur. Böylece, bu dönüşümde (2.13) eşitliği ile tanımlanan U matrisi (2.14) dönüşümünün A=$(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ matrisi ile çarpıldığında ve detA $\neq 0$ şartı sağlandığında (2.14) dönüşümünde U matrisinin rankı sabit kalır. (2.13) matrisinin rankına (2.9)-(2.10) lineer homojen sınır değer probleminin rankı denir. Burada dikkate alalım ki ele aldığımız (2.9)-(2.10) lineer homojen sınır değer problemi aşağıdaki şekilde genelleştirilir. $U_1(y)$, $U_2(y)$, $U_3(y), \dots , U_n(y)$ ifadeleri $C_{[a,b]}^{n}$ uzayında tanımlanmış lineer bağımsız sürekli lineer fonksiyoneller sistemi olduklarını varsayalım.

$l(y)$ ise (2.1) eşitliği ile tanımlanan n mertebeli lineer diferansiyel ifade olduğunu varsayalım O zaman homojen lineer (2.9) diferansiyel denkleminin (2.10) lineer homojen şartlarını sağlayan y $(x) \in C^{n}_{[a,b]}$ çözümünün bulunması problemine genelleştirilmiş homojen sınır değer problemi denir. Bu kısımda (2.9) ve (2.10) lineer homojen sınır değer problemi için alınan sonuçlar genelleştirilmiş homojen (2.9) ve (2.10) sınır değer problemleri içinde geçerlidir.

2.1.7. Lagrange Formülü, Adjoint (Dual, Eşlenik) Diferansiyel İfade

Burada,

$$l(y) = P(x)\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n(x)y$$

diferansiyel ifadesinin $P_k(x)$, $k = 0,1,\dots,n$ katsayılarının uygun olarak, $(n-k)$ mertebeli türevi de dahil olmasıyla $[a,b]$ aralığında $P_k(x)$ fonksiyonunun $(n-k)$ mertebeye dek tüm türevleri var ve her birinin $[a,b]$ aralığında sürekli olduklarını varsayalım. $y(x)$ ve $z(x)$ fonksiyonlarının $C^{(n)}_{[a,b]}$ uzayından alınmış keyfi fonksiyonlar olduklarını varsayalım. Aşağıdaki integrali ele alalım;

$$\int_a^b P_{n-k}(x)\overline{z(x)}y^{(k)}(x)\,dx$$

Bu integraldeki $\overline{z(x)}$ fonksiyonu $z(x)$ fonksiyonunun kompleks eşleniğini gösterir. Ele aldığımız üstteki integralde k kez, kısmi integrasyon formülünü uyguladığımızda

$$\int_a^b P_{n-k}(x)\overline{z(x)}y^{(k)}(x)\,dx$$

integrali aşağıdaki gibi olur.

$$\left[P_{n-k}(x)\overline{z(x)}y^{(k-1)}(x)\right]_{x=a}^{x=b} + (-1)^k \int_a^b \left(P_{n-k}(x)\overline{z(x)}\right)^{(k)} y(x)\,dx \tag{2.15}$$

Bu (2.15) eşitliğinde $k = n, k = n-1, \dots, k = 0$ olacak şekilde aldığımızda aşağıdaki eşitlikleri buluruz,

$$\int_a^b P_{n-1}(x)\overline{z(x)}y'(x)\,dx = \left[P_{n-1}(x)\overline{z(x)}y(x)\right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \left(P_{n-1}(x)\overline{z(x)}\right)' y(x)\,dx$$

$$\int_a^b P_n(x)\overline{z(x)}y(x)\,dx = \int_a^b \left(P_n(x)\overline{z(x)}\right)y(x)\,dx$$

Bulduğumuz bu eşitlikleri taraf tarafa topladığımızda aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$\int_a^b l(y)\overline{z(x)}\,dx = \mathcal{P}(\eta,\zeta) + \int_a^b y(x)\overline{l^*(z)}\,dx \tag{2.16}$$

Burada,

$$l(y) = P(x)y^{(n)}(x) + P_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + P_n(x)y(x) \tag{2.17}$$

$$l^*(z) = (-1)^n\left(\overline{P_0(x)}z(x)\right)^{(n)} + \cdots + \overline{P_n(x)}z(x) \tag{2.18}$$

$$\eta = \left(y_a, y_a', \dots, y_a^{(n-1)}, y_b, y_b', \dots, y_b^{(n-1)}\right)$$

$$\zeta = \left(z_a, z_a', \dots, z_a^{(n-1)}, z_b, z_b', \dots, z_b^{(n-1)}\right)$$

Olmak üzere $\mathcal{P}(\eta,\zeta)$ fonksiyonu uygun olarak,

$$y_a, y_a', \dots, y_a^{(n-1)}, y_b, y_b', \dots, y_b^{(n-1)}$$

$$z_a, z_a', \dots, z_a^{(n-1)}, z_b, z_b', \dots, z_b^{(n-1)}$$

Değişkenlerinin bilineer formudur. (2.18) formülü ile tanımlanan $l^*(z)$ diferansiyel ifadesine, (2.17) formülü ile tanımlanan diferansiyel ifadenin eşlenik (goşma,dual) diferansiyel ifadesi denir. (2.16) formülüne Lagrange formülü denir.

$$\int_a^b l(y)\overline{z(x)}\,dx$$

integrali için yaptığımız işlemleri uygun olarak;

$$\int_a^b l^*\big(z(x)\big)\overline{y(x)}\,dx$$

integrali için benzer şekilde uygulayarak aşağıdaki formülü buluruz:

$$\int_a^b l^*\big(z(x)\big)\overline{y(x)}\,dx = Q(\eta,\zeta) + \int_a^b z(x)\overline{l\big(y(x)\big)}\,dx \tag{2.19}$$

Bu formülde $Q(\eta,\zeta)$ ifadesi η ve ζ vektörlerinin uygun olarak koordinatlarının bilineer formudur. (2.19) formülünden $l(y)$ diferansiyel ifadesinin uygun olarak $l^*(z)$ diferansiyel ifadesine eşlenik diferansiyel ifade olduğu bulunur. Başka bir ifade ile $l(y)$ ve $l^*(y)$ diferansiyel ifadeleri biribirine eşleniktirler, yani

$$\big(l^*(y)\big)^* = l^{**}(y) = l(y) \tag{2.20}$$

Böylece, (2.17) ve (2.18) eşitlikleriyle tanımlanan $l(y)$ ve $l^*(y)$ diferansiyel ifadeleri biribirine eşleniktirler (dualdirler).Eşlenik diferansiyel $l^*(y)$ ifadesine (2.18) formülünün uygulanmasıyla eşlenik diferansiyel ifadenin aşağıdaki özellikleri bulunur.

$$(l_1 + l_2)^* = {l_1}^* + {l_2}^*$$

ve

$$(\lambda l)^* = \bar{\lambda} l^* \tag{2.21}$$

Özel halde burada;

$$l^*(y) \equiv l(y)$$

eşitliği sağlandığında $l(y)$ diferansiyel ifadesine özeşlenik (kendi kendisine eşlenik) diferansiyel ifade denir. (2.20) ve (2.21) formüllerini kullanarak aşağıdaki Lemma kolaylıkla ispatlanır:

Lemma 2.3.

a) Özeşlenik diferansiyel ifadelerinin toplamı da özeşlenik diferansiyel ifadedir.
b) Özeşlenik diferansiyel ifadenin reel λ skaler sayısıyla çarpımından oluşan diferansiyel ifade de özeşlenik diferansiyel ifadedir. Şimdi biz burada tüm özeşlenik diferansiyel ifadelerin genel şeklini bulalım. Aşağıdaki lemma doğrudur.

Lemma 2.4. Her bir özeşlenik diferansiyel ifade aşağıdaki şekildeki diferansiyel ifadelerin toplamı şeklinde gösterilir.

$$l_{2\vartheta}(y) = \left(P(x)y^{(\vartheta)}(x)\right)^{\vartheta}$$

$$l_{2v-1}(y) = \frac{1}{2}\left[\left(iP(x)y^{(\vartheta-1)}(x)\right)^{\vartheta} + \left(iP(x)y^{(\vartheta)}(x)\right)^{\vartheta-1}\right] \quad , \quad i^2 = -1$$

Bu diferansiyel ifadelerdeki $P(x)$ fonksiyonu yalnız reel değerler alan ve gereken mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyondur.

İspat: Bu lemmayı ispatlamak için önce aşağıdaki integralleri ele alalım;

$$\int_a^b l_{2\vartheta}\big(y(x)\big)\overline{z(x)}dx \qquad ve \qquad \int_a^b l_{2\vartheta-1}\big(y(x)\big)\overline{z(x)}dx$$

Bu integrallerin her birine kısmi integrasyon formüllerini uygulayarak $l_{2\vartheta}(y)$ ve $l_{2\vartheta-1}(y)$ diferansiyel ifadelerinin her birinin özeşlenik diferansiyel ifadeler olduğu kolaylıkla görülür. Bu yüzden de, Lemma2.3. e dayanarak $l_{2\vartheta}(y)$ ve $l_{2\vartheta-1}(y)$ diferansiyel ifadelerinin toplamlarının özeşlenik diferansiyel ifade olduğunu ispatlamış oluruz. Şimdi tersine, (2.17) diferansiyel ifadesinin özeşlenik diferansiyel ifade olduğunu varsayalım. Özeşlenik. $l(y)$ diferansiyel ifadesinin $l_{2\vartheta}(y)$ ve $l_{2\vartheta-1}(y)$ şeklindeki özeşlenik diferansiyel ifadelerin toplamı şeklinde gösterildiğini ispatlayalım. Böylece, şarta göre

$$l(y) \equiv l^*(y)$$

özdeşliği sağlanır. Burada $l^*(y)$ ifadesi aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$l^*(y) = (-1)^n\left(\overline{P_0(x)}y\right)^{(n)} + (-1)^{n-1}\left(\overline{P_1(x)}y\right)^{(n-1)} + \ldots + \overline{P_n(x)}y$$
$$= (-1)^n\overline{P_0(x)}y^{(n)} + \left[(-1)^n n\bar{P}_0'(x) + (-1)^{n-1}\overline{P_1(x)}\right]y^{(n-1)} + \cdots$$

Burada,

$$l(y) = l^*(y)$$

eşitliğini kullanarak,

$$P_0(x) = (-1)^n\overline{P_0(x)} \tag{2.22}$$

eşitliğini buluruz. Şimdi biz burada n sayısının önce çift sayı olduğunu varsayalım. O zaman (2.23) eşitliğinden, $P_0(x) = \overline{P_0(x)}$ eşitliği bulunur. Böylece, n sayısı çift sayı yani $n = 2\mu$ şeklinde ve (2.17) diferansiyel ifadesi özeşlenik olduğunda $P_0(x)$ katsayısının yalnız reel değerler alan fonksiyon olması gerekir. Şimdi biz burada, (2.17) diferansiyel ifadesinden özeşlenik diferansiyel ifade olan,

$$l_{2\mu}(y) = \left(P_0(x)y^{(\mu)}\right)^{(\mu)} = P_0(x)y^{(n)} + \mu P_0'(x)y^{(n-1)} + \cdots$$

ifadesini çıkaralım O zaman biz $(n-1)$ dereceli özeşlenik

$$l(y) - l_{2\mu}(y)$$

diferansiyel ifadesini buluruz. Şimdi de n sayısının tek sayı olduğunu varsayalım, yani $n = 2\mu - 1$ şeklinde doğal sayı olsun. O zaman bu hal için (2.23) eşitliğinden;

$$P_0(x) = -\overline{P_0(x)}$$

eşitliği bulunur. Bulduğumuz bu eşitliğin sağlanması için $P_0(x)$ fonksiyonu , $P(x)$ yalnız reel değerler almak üzere burada;

$$P_0(x) = i.P(x)$$

Şeklindedir. (2.17) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} l_{2\mu-1}(y) &= \frac{1}{2}\Big[\big(iP(x)y^{(\mu-1)}\big)^{(\mu)} + \big(iP(x)y^{(\mu)}\big)^{(\mu-1)}\Big] \\ &= iP(x)y^{(2\mu-1)} + \frac{1}{2}niP'(x)y^{(2\mu-2)} + \cdots \\ &= P_0(x)y^{(n)} + \frac{1}{2}nP_0'(x)y^{(n-1)} + \cdots \end{aligned}$$

özeşlenik diferansiyel ifadesini çıkarırsak derecesi $(n-1)$ sayısına eşit olan

$$l(y) - l_{2\mu-1}(y)$$

şeklinde özeşlenik diferansiyel ifadesini bulmuş oluruz. Buradaki kullandığımız işlemleri bu şekilde devam ettirirsek, yani (2.17) diferansiyel ifadesinden ardışık olarak özeşlenik $l_{2\mu}(y)$ ve $l_{2\mu-1}(y)$ şeklinde diferansiyel ifadeleri çıkararak sonuçta sıfır dereceli (mertebeli) özeşlenik,

$$l_0(y) = P(x)y$$

ifadesini buluruz. Böylece, bu şekildeki işlemler sonucunda özeşlenik sıfır mertebeli ifade buluruz. Bu ifade üstte gösterdiğimiz $l_0(y) = P(x)y$ ifadesi ile çakışır. Bu ifade de, $P(x)$ fonksiyonu, reel değerli fonksiyon olur. Bununla da Lemma 2.4 ispatlanmış olur. Özel halde, yani (2.17) diferansiyel ifadesi reel katsayılı özeşlenik diferansiyel ifadesi olduğunda, o zaman (2.17) diferansiyel ifadesinde $l_{2\mu-1}(y)$ şeklinde diferansiyel ifadeler bulunamazlar. Bu nedenle de reel katsayılı (2.17) özeşlenik diferansiyel ifadeleri için aşağıdaki lemma doğru olur.

Lemma 2.5. Her bir reel katsayılı özeşlenik diferansiyel ifade mutlaka çift mertebeli diferansiyel ifadedir ve bu diferansiyel ifade;

$$l(y) = \big(P_0(x)y^{(\mu)}\big)^{(\mu)} + \big(P_1(x)y^{(\mu-1)}\big)^{(\mu-1)} + \cdots + \big(P_{\mu-1}(x)y'\big)' + P_\mu(x)y$$

şeklinde gösterilir. Bu açılımdaki $P_0(x)$, $P_1(x), \cdots, P_\mu(x)$ fonksiyonları reel değerli, reel değişkenli fonksiyonlardır.

2.1.8. Eşlenik Sınır Şartları, Eşlenik Operatörler

Burada $u_1, u_2, \ldots, u_m$ lineer formlarının ve

$$y_a\,, y_a'\,, \dots\,, y_a^{(n-1)}, \qquad y_b\,, y_b'\,, \dots\,, y_b^{(n-1)}$$

değişkenlerinin lineer bağımsız formları olduklarını varsayalım. Burada $m < 2n$ halinde $u_1\,, u_2\,, \dots\,, u_m$ formlarına öyle yeni $u_{m+1}\,, u_{m+2}\,, \dots\,, u_{2n}$ lineer formlarını ilave ederek $2n$ tane

$$u_1\,, u_2\,, \dots\,, u_{2n}$$

lineer formları sistemine tamlaştıralım ki bu $u_1\,, u_2\,, \dots\,, u_{2n}$ sistemi lineer bağımsız sistem olsun. $u_1\,, u_2\,, \dots\,, u_{2n}$ formları lineer bağımsız olduklarından,

$$y_a\,, y_a'\,, \dots\,, y_a^{(n-1)}, \qquad y_b\,, y_b'\,, \dots\,, y_b^{(n-1)}$$

değişkenlerini $u_1\,, u_2\,, \dots\,, u_{2n}$ formlarının lineer kombinasyonları şeklinde ifade edebiliriz. $y_a\,, y_a'\,, \dots\,, y_a^{(n-1)}$, $y_b\,, y_b'\,, \dots\,, y_b^{(n-1)}$ değişkenlerinin $u_1\,, u_2\,, \dots\,, u_{2n}$ formlar ile ifade edilmiş lineer kombinasyonlarını;

$$\int_a^b l(y)\overline{z(x)}\,dx = P(\eta,\zeta) + \int_a^b y(x)\overline{l^*(z)}\,dx$$

Lagrange formülündeki $P(\eta,\zeta)$ bilineer formunda;

$$y_a\,, y_a'\,, \dots\,, y_a^{(n-1)}, \qquad y_b\,, y_b'\,, \dots\,, y_b^{(n-1)}$$

değişkenlerini uygun olarak yerlerine yazalım. O zaman $\mathcal{P}(\eta,\zeta)$ ifadesi $u_1\,, u_2\,, \dots\,, u_{2n}$ değişkenlerinin lineer homojen formu olur. $\mathcal{P}(\eta,\zeta)$ için bulunmuş olan bu ifadede $u_1\,, u_2\,, \dots\,, u_{2n}$ değişkenlerinin katsayılarına uygun olarak $z_a\,, z_a'\,, \dots\,, z_a^{(n-1)}$, $z_b\,, z_b'\,, \dots\,, z_b^{(n-1)}$değişkenlerinin lineer homojen formları olurlar. Bu formları uygun olarak $v_{2n}\,, v_{2n-1}\,, \dots\,, v_1$ şeklinde gösterelim. O zaman Lagrange formülünü aşağıdaki şekilde yazabiliriz. Lagrange formülündeki $v_1\,, v_2\,, \dots\,, v_{2n}$ formlarının da uygun olarak lineer bağımsız oldukları ispatlanır.

$$\int_a^b l[y(x)]\overline{z(x)}\,dx = u_1 v_{2n} + u_2 v_{2n-1} + \cdots u_{2n} v_1 + \int_a^b y(x)\overline{l^*[z(x)]}\,dx \tag{2.23}$$

Aşağıdaki

$$v_1 = 0, v_2 = 0\,, \dots, v_{2n-m} = 0 \tag{2.24}$$

sınır şartlarına (ve bu şartlara denk olan sınır şartlarına)

$$u_1 = 0, u_2 = 0\,, \dots, u_m = 0 \tag{2.25}$$

sınır şartlarının eşlenik sınır şartları denir. Sınır şartları kendi eşleniğine eşdeğer(denk) olduğunda bu sınır şartlarına özeşlenik sınır şartları (kendi kendisine eşlenik olan sınır şartları) denir. $l^*(y)$ diferansiyel ifadesinin ve (2.24) sınır şartlarının doğurduğu diferansiyel operatöre, $l(y)$ diferansiyel ifadesinin ve (2.25) sınır şartlarının doğurduğu diferansiyel L operatörünün eşlenik operatörü denir ve L^* ile gösterilir. (2.23) formülünden ve (2.24) ve (2.25) sınır şartlarından L ve L^* operatörleri için aşağıdaki bağıntı bulunur.

$$\int_a^b L\,y(x).\overline{z(x)}\,dx = \int_a^b y(x)\overline{L^* z(x)}\,dx$$

$$(y,z) = \int_a^b y(x).\overline{z(x)}\,dx \tag{2.26}$$

skaler çarpım gösterimini kullandığımızda (2.26) eşitliğini kısa olarak;

$$(Ly,z) = (y,L^* z) \tag{2.27}$$

şeklinde yazabiliriz. L^* eşlenik operatörünün tanımından aşağıdaki sonuç bulunur: $l(y)$ diferansiyel ifadesinin ve (2.25) sınır şartlarının doğurduğu L operatörünün özeşlenik operatör olması için gerek ve yeter şart $l(y)$ diferansiyel ifadesinin ve (2.25)sınır şartlarının uygun olarak özeşlenik olmalarıdır L operatörü özeşlenik operatör olduğunda (2.27) formülü aşağıdaki şekilde yazılır,

$$(Ly, z) = (y, Lz) \tag{2.28}$$

2.1.9. Eşlenik Sınır Değer Problemi

L^* Operatörünün L operatörüne eşlenik operatör olduğunu varsayalım. O zaman

$$L^*z = 0 \tag{2.29}$$

homojen sınır değer problemine

$$Ly = 0 \tag{2.30}$$

homojen sınır değer probleminin eşlenik sınır değer problemi denir. (2.29) sınır değer problemi detaylı bir şekilde

$$l^*(z) = 0 \tag{2.31}$$

homojen diferansiyel denkleminin

$$V_\vartheta(z) = 0 \quad , \quad \vartheta = 1,2, \dots , 2n - m \tag{2.32}$$

homojen sınır şartlarını sağlayan aşikar olmayan çözümünün bulunması problemidir. Burada $l^*(z)$ diferansiyel ifadesi L operatörünü doğuran $l(y)$ diferansiyel ifadesinin eşlenik diferansiyel ifadesidir. (2.32) şartları ise L operatörünü doğuran $u_1(y) = 0, u_2(y) = 0 , \dots , u_m(y) = 0$ sınır şartlarına eşlenik olan şartlardır.Şimdi biz burada (2.31) probleminin r rankı ile (2.30) problemine eşlenik olan

$$L^*z = 0$$

probleminin r' rankı arasında bağlantı bulalım. Bu amaçla n mertebeli adi türevli lineer homojen,

$$l^*(z) \equiv (-1)^n\left(\overline{P_0(x)}z\right)^{(n)} + (-1)^{n-1}\left(\overline{P_1(x)}z\right)^{(n-1)} + \cdots + \overline{P_n(x)}z = 0$$

denkleminin lineer bağımsız $z_1 = z_1(x)\,, z_2 = z_2(x)\,, \dots, z_n = z_n(x)$ çözümleri olduklarını varsayalım. O zaman (2.31) ve (2.32) sınır değer probleminin matrisi

$$V = \begin{bmatrix} V_1(z_1) & V_1(z_2) & \cdots & V_1(z_n) \\ V_2(z_1) & V_2(z_2) & \cdots & V_2(z_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{2n-m}(z_1) & V_{2n-m}(z_2) & \cdots & V_{2n-m}(z_n) \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

şeklinde yazılır. V matrisinin rankını r' ile gösterelim, yani $r' = rank(V)$ O zaman burada uygun olarak $r' < n$ şartı sağlandığında (2.31) ve (2.32) sınır değer probleminin $n - r'$ sayıda lineer bağımsız çözümleri olur. Şimdi (2.23) Lagrange formülünde (2.30) denkleminin aşikar olmayan her hangi bir $y = y(x)$ çözümünü ve (2.31) homojen lineer diferansiyel denkleminin lineer bağımsız,

$$z_1(x)\,, z_2(x)\,, \dots, z_n(x)$$

çözümlerinden birini, mesela $z_\vartheta = z_\vartheta(x)$ çözümünü $z = z(x)$ fonksiyonu olarak alalım. O zaman (2.23) Lagrange formülündeki integraller sıfıra dönüşürler ve (2.30) denkleminin aşikar olmayan çözümü olan $y = y(x)$ fonksiyonu da

$$u_1(y) = 0,\ u_2(y) = 0\,, \dots\,, u_m(y) = 0$$

sınır şartlarını sağladığından dolayı (2.23) Lagrange formülü bu şartlarda aşağıdaki şekli alır;

$$u_{m+1}(y)V_{2n-m}(z_\vartheta) + u_{m+2}(y)V_{2n-(m+1)}(z_\vartheta) + \cdots + u_{2n}(y)V_1(z_\vartheta) = 0$$

Bu eşitlik de sırası ile $\vartheta = 1,2, \dots, n$ aldığımızda

$$u_{m+1}(y)\,, u_{m+2}(y)\,, \dots\,, u_{2n}(y)$$

lineer formlarının bulunması için aşağıdaki lineer homojen cebirsel denklemler sistemi,

$$\left.\begin{array}{c} u_{m+1}(y)V_{2n-m}(z_1)+\ u_{m+2}(y)V_{2n-(m+1)}(z_1)+\cdots+\ u_{2n}(y)V_1(z_1)=0 \\ u_{m+1}(y)V_{2n-m}(z_2)+\ u_{m+2}(y)V_{2n-(m+1)}(z_2)+\cdots+\ u_{2n}(y)V_1(z_2)=0 \\ \vdots\vdots\vdots \\ u_{m+1}(y)V_{2n-m}(z_n)+\ u_{m+2}(y)V_{2n-(m+1)}(z_n)+\cdots+\ u_{2n}(y)V_1(z_n)=0 \end{array}\right\} \quad (2.34)$$

Biçimindedir. Bu (2.34) sisteminin en azından $n-r$ sayıda bağımsız çözümleri vardır. Bunlar mesela,

$$u_{m+1}(y_j)\,,u_{m+2}(y_j)\,,\dots\,,u_{2n}(y_j) \quad , \quad j=1,2,\dots,n-r$$

çözümleri olabilir buradaki $y_1(x)\,,y_2(x),y_3(x),y_4(x),\dots,y_{n-r}(x)$ fonksiyonları (2.30) denkleminin lineer bağımsız çözümleri sistemidir.Böylece (2.34) sisteminin matrisinin rankı $2n-m-(n-r)=n-m+r$ sayısını aşamaz. Ancak (2.34) sisteminin matrisi (2.33) eşitliği ile tanımlanmış V matrisinin satır ve sütunlarının yerlerinin değiştirilmesinden alınan matristir. Bu yüzdende (2.34) matrisinin rankı V matrisinin r' rankı ile çakışır. Buradan da,

$$r'\leq n-m+r \quad (2.35)$$

eşitsizliğini buluruz. (2.35) eşitsizliğinin yalnız eşitlik olduğu durumu ispatlayalım, burada ele aldığımız $L(y)=0$ ve $L^*(z)=0$ sınır değer problemleri birbirleriyle karşılıklı eşlenik olduklarından, buradaki işlemlerde sınır değer problemlerinin rollerini değiştirebiliriz. Bu yüzden de bu değişimi yaptığımızda r' ve r parametreleri de rollerini değiştirmiş olacaktır. m sayısı uygun olarak $2n-m$ sayısı ile rollerini değiştirir. Böylece,

$$r\leq n-(2n-m)+r'$$

eşitsizliğinden,

$$r\leq m-n+r' \quad (2.36)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (2.36) ve (2.37) eşitsizliklerinden ise

$$r'\leq n-m+r \quad (2.37)$$

eşitliğini buluruz. Böylece biz aşağıdaki lemmaları ispatlamış olduk.

Lemma 2.6. (2.30) sınır değer probleminin rankı r , (2.29) sınır değer probleminin rankı olan r' sayısı ile uygun olarak eşleniktiktir ve $r' = n - m + r$ eşitliği vardır. Özel halde burada $m = n$ olduğunda (2.37) formülünden $r' = r$ eşitliği elde edilir.

Lemma 2.7. Lineer bağımsız sınır şartlarının sayısı diferansiyel ifadenin derecesine eşit olduğunda sınır değer probleminin rankı eşlenik sınır değer probleminin rankı ile çakışır.

Lemma 2.8. Lineer bağımsız sınır şartlarının sayısı diferansiyel ifadenin derecesine eşit olduğunda uygun homojen sınır değer probleminin yalnız aşikar çözümü olursa, o zaman bu problemin eşlenik sınır değer probleminin de yalnız aşikar çözümü vardır.

2.2 Diferansiyel Operatörün Karakteristik Değerleri ve Karakteristik Fonksiyonları

Burada ilk önce karakteristik değer ve karakteristik fonksiyonu tanımlayalım.

2.2.1. Karakteristik Değerlerin ve Karakteristik Fonksiyonların Tanımı

$$Ly = \lambda y \qquad (2.38)$$

denklemini ele alalım bu denklemde L lineer operatör, λ ise skaler değerli parametredir. λ parametresinin bir $\lambda = \lambda_0$ değerinde L operatörünün tanım bölgesi $\mathcal{D}(L)$ kümesinde

$$Ly_0 = \lambda_0 y_0 \qquad (2.39)$$

eşitliği sağlanacak şekilde $y_0(x) \not\equiv 0$ fonksiyonu bulunursa ,λ parametresinin $\lambda = \lambda_0$ değerine L operatörünün karakteristik değeri ve uygun olarak $y_0(x)$ fonksiyonuna ise L operatörünün $\lambda = \lambda_0$ karakteristik değerine uygun karakteristik fonksiyonu veya karakteristik denklemi denir. L operatörünün (2.1) ifadesiyle

$$\left.\begin{aligned} u_1(y) &\equiv \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k y_a^{(k)} + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k y_b^{(k)} = 0 \\ u_2(y) &\equiv \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^2 y_a^{(k)} + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k^2 y_b^{(k)} = 0 \\ &\vdots \\ u_m(y) &\equiv \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^m y_a^{(k)} + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k^m y_b^{(k)} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.40}$$

(2.40) sınır şartlarının lineer diferansiyel operatörü olduğunu var sayalım. L Operatörünün her bir karakteristik $y(x)$ fonksiyonu uygun olarak L operatörünün

$$\mathcal{D}(L) = \left\{ y(x) \in \mathbb{C}_{[a,b]}^{n}\colon\ u_\vartheta(y) = 0\,, \qquad \vartheta = 1,2,\dots,m \right\}$$

tanım bölgesinde olduğundan bu operatörün karakteristik fonksiyonları (2.40) sınır şartlarını sağlaması gerekir. Artık L operatörünün tanımından,

$$Ly = l(y)$$

eşitliğinin de sağlanması gerektiğinden (2.39) eşitliği L diferansiyel operatörü için,

$$l(y) = \lambda y \tag{2.41}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece L diferansiyel operatörünün karakteristik değerleri λ parametresinin öyle değerleridir ki, bu değerlerde, homojen,

$$\left.\begin{aligned} &l(y) = \lambda y \\ &u_\vartheta(y) = 0\,, \quad \vartheta = 1,2,\dots,m \end{aligned}\right\} \tag{2.42}$$

sınır değer probleminin aşikar olmayan çözümü vardır. Bu aşikâr olmayan çözümler λ parametresinin bu değerlerine uygun karakteristik fonksiyonlardır. Dikkate alalım ki, aynı bir λ karakteristik değerine uygun farklı karakteristik fonksiyonların lineer kombinasyonu da bu λ parametresinin bu değerlerine uygun karakteristik fonksiyon olur. Gerçekten de sıfıra eşit olmayan $y_1(x), y_2(x) \in \mathcal{D}(L)$ fonksiyonları için λ parametresinin $\lambda = \lambda_0$ değerinde

$$Ly_1 = \lambda_0 y_1$$

ve

$$Ly_2 = \lambda_0 y_2$$

eşitlikleri sağlandığı zaman keyfi alınmış c_1 ve c_2 sabit sayıları için,

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = \lambda_0(c_1y_1 + c_2y_2)$$

Eşitliği sağlanır. Bu ise yukarıda söylenilen fikrin ispatıdır. Burada verilmiş λ sayısında (2.1) diferansiyel ifadesinin $(x) \neq 0$, $P_1(x), \dots , P_n(x)$ Katsayıları $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olduklarında

$$L(y) = \lambda y \tag{2.43}$$

denkleminin n sayıda lineer bağımsız çözümü olduğundan görülür ki aynı bir karakteristik λ sayısına uygun olan karakteristik fonksiyonların (karakteristik vektörlerin) kümesi sonlu boyutlu olursa bu uzayın boyutu $l(y)$ diferansiyel ifadesinin n mertebesini aşamaz. Verilmiş bir karakteristik λ sayısında, bu karakteristik sayıya uygun olan karakteristik fonksiyonların lineer uzayının boyutu (2.42) sınır değer probleminin verilmiş karakteristik λ sayısına uygun lineer bağımsız çözümlerinin sayısına eşittir. Bu sayıya λ karakteristik sayısının tekrarlanma veya katlanma mertebesi denir. Şimdi biz burada L lineer diferansiyel operatörünün karakteristik değerlerinin varlığı için şart belirleyelim. Gereken şartı bulmak için (2.43) diferansiyel denkleminin

$$y_j^{(\vartheta-1)}(a,\lambda) = \begin{cases} 0 \ , \ j \neq \vartheta \\ 1 \ , \ j = \vartheta \end{cases} \quad , \qquad j, \vartheta = 1,2,3, \dots, n \tag{2.44}$$

başlangıç şartlarını sağlayan lineer bağımsız (fundamental) çözümler sistemini

$$y_1(x,\lambda) \ , \ y_2(x,\lambda) \ , \dots \ , y_n(x,\lambda) \tag{2.45}$$

ele alalım, lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri hakkındaki genel teoremlerden görülür ki, x bağımsız değişkeni $[a, b]$ aralığından alınmış her bir değerinde (2.45) çözümlerinin her biri λ parametresinin (tüm kompleks değerlerinde) tam analitik fonksiyonları olurlar. Lemma (2.2) ‘deki sonuçlara dayanarak (2.42) sınır değer probleminin,

$$U = \begin{bmatrix} u_1(y_1) & u_1(y_2) & \cdots & u_1(y_n) \\ u_2(y_1) & u_2(y_2) & \cdots & u_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_m(y_1) & u_m(y_2) & \cdots & u_m(y_n) \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

matrisinin $r = rank(U)$ rankının $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin derecesi(mertebesi) olan n sayısından küçük olduğu halde aşikar olmayan çözümü olduğunu görüyoruz. Dikkate alalım ki $m < n$ şartı sağlandığında $r < n$ şartı da sağlanır. Böylece, $r < n$ şartı sağlandığında λ parametresinin her bir değerinde (2.44) sınır değer probleminin aşikar olmayan çözümü olur. Buradan da $m < n$ şartı sağlandığında λ parametresinin her bir değerinin L diferansiyel operatörünün karakteristik değeri olduğu görülür. $m \geq n$ Olduğunda, yani böyle bir şart sağlandığında (2.46) eşitliği ile tanımlanan U matrisinin $r = rank(U)$ rankının η sayısından küçük olması için gerek ve yeter şart U matrisinin n mertebeli tüm determinantlarının her birinin sıfıra eşit olmalarıdır. Fakat dikkate alalım ki, bu determinantların her biri λ parametresinin tam analitik fonksiyonlarıdır. Bu yüzden de yalnız aşağıdaki haller mümkün olur:

1. U Matrisinin n mertebeli tüm determinantlarının her biri aynen sıfıra eşittir. Bu halde λ parametresinin her bir değeri, daha önce gösterdiğimiz hale uygun olarak, karakteristik değer olur.

2. U Matrisinin n mertebeli determinantlarından en azından bir tanesi denk olarak sıfıra eşit değildir. Bu şart sağlandığında bu determinantın yalnız sıfırları karakteristik değerler olur ki, bu değerlerde U matrisinin n mertebeli determinantlarının her biri sıfıra dönüşmüş olsun.

Burada dikkate alalım ki denk olarak (aynen) sıfıra eşit olmayan tam analitik fonksiyon ya hiçbir noktada sıfıra dönüşmüyor, yani tam fonksiyonun ya sıfırı yok, ya da tam fonksiyonun sayılabilir çoklukta sıfırları vardır ve tam fonksiyonun sıfırlarının sonlu limit noktası olamaz, tüm bu hallerin her birini toparlayarak aşağıdaki alternatifi yazalım;

Lemma 2.9. Her bir diferansiyel L operatörü için yalnız aşağıdaki haller mümkündür;

Her bir λ sayısı L diferansiyel operatörünün karakteristik değeridir ve diferansiyel operatörünün karakteristik değerleri kümesi sayılabilirdir ve bu operatörün karakteristik değerler dizisinin sonlu limit noktası yoktur(özel halde L diferansiyel operatörünün karakteristik değerler kümesi boş da olabilir).

Dikkate alalım ki, $m = n$ hali en önemli ve ilginç bir haldir. Bu yüzden de bundan sonra, genelde bu hali ele alacağız. $m = n$ halinde (2.46) eşitliği ile tanımlanan U matrisi $n \times n$ boyutlu kuadratik(kare) matris olur, bu halde U matrisinin determinantını $\Delta(\lambda)$ ile gösterirsek:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} u_1(y_1) & u_1(y_2) & \cdots & u_1(y_n) \\ u_2(y_1) & u_2(y_2) & \cdots & u_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_m(y_1) & u_m(y_2) & \cdots & u_m(y_n) \end{vmatrix} \tag{2.47}$$

şeklindedir. $\Delta(\lambda)$ Determinantı λ parametresinin tam analitik fonksiyonudur. $\Delta(\lambda)$ Determinantına L diferansiyel operatörünün (aynı zamanda (2.42) sınır değer probleminin) karakteristik determinantı denir. Üstte yapılmış araştırmaların sonuçları $m = n$ hali için aşağıdaki şekilde ifade edilir:

Lemma 2.10. L diferansiyel operatörünün $m = n$ halinde karakteristik değerleri $\Delta(\lambda)$ fonksiyonun sıfırlarından oluşur. $\Delta(\lambda)$ Fonksiyonu aynen sıfıra eşit olduğunda her bir λ sayısı L diferansiyel operatörünün karakteristik değeri olur. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu aynen sıfıra dönüşmediğinde L diferansiyel operatörünün karakteristik değerleri sayılabilirden fazla değildir ve bu karakteristik değerler dizisinin sonlu limit noktası yoktur.

Özel halde $\Delta(\lambda)$ fonksiyonun sıfırı olmadığında, L diferansiyel operatörünün karakteristik değeri yoktur. L diferansiyel operatörünün λ karakteristik değeri $\Delta(\lambda)$

fonksiyonun tekrarlanan(katlı) köküde olabilir. Bu hal için aşağıdaki lemma doğrudur.

Lemma 2.11. $\lambda = \lambda_0$ sayısı $\Delta(\lambda)$ karakteristik determinantının ϑ mertebeden tekrarlanan kökü olursa λ_0 karakteristik değerinin tekrarlanma mertebesi ϑ sayısını aşmaz.

İspat: r sayısı $\Delta(\lambda_0)$ determinantına uygun U matrisinin rankı olduğunda λ_0 karakteristik değerinin tekrarlanma sayısı (mertebesi) $n - r$ sayısına eşit olur. diğer yandan determinantın diferansiyellenmesi kuralına esasen, $\lambda = \lambda_0$ noktasında $\Delta(\lambda)$ determinantının $(n - r - 1)$ mertebeye dek tüm türevleri ($(n - r - 1)$ mertebeli türevleri de dahil) sıfıra dönüşürler. λ_0 sayısı $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun ϑ tekrarlanma katsayılı kökü olduğunda

$$(n - r - 1) \leq \vartheta - 1$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikten,

$$(n - r) \leq \vartheta$$

eşitsizliği bulunur. Özel halde $\vartheta = 1$ olduğunda $n - r \leq 1$ olur. Diğer yandan $n - r \geq 1$ eşitsizliğide sağlandığından ve $\Delta(\lambda_0) = 0$ olduğundan $\vartheta = 1$ hali için $n - r = 1$ eşitliğini buluruz, böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Lemma 2.12. λ_0 sayısı $\Delta(\lambda)$ karakteristik determinantının sadece sıfırı olduğunda L diferansiyel operatörünün λ_0 karakteristik değerinin tekrarlanma mertebesi 1 sayısına eşit olur. L Operatörünün karakteristik $\lambda = \lambda_0$ değeri $\Delta(\lambda)$ karakteristik determinantının sade sıfırı olduğunda, bu λ_0 karakteristik değerine L diferansiyel operatörünün sade karakteristik değeri denir.

2.2.2 Eşlenik Operatörlerin Karakteristik Değerleri Ve Karakteristik Fonksiyonları Arasında Bağıntı

Burada $n = m$ olduğunu varsayalım. O zaman aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 2.2. λ_0 sayısı L operatörünün ϑ_0 mertebeden tekrarlanan (katlı) karakteristik değeri olduğunda, uygun olarak $\overline{\lambda_0}$ sayısı eşlenik L^* operatörünün ϑ_0 mertebeden tekrarlanan (katlı) karakteristik değeri olur.

İspat: L operatörünün, $l(y)$ diferansiyel ifadesinin ve $u_\vartheta(y) = 0$, $\vartheta = 1,2, \dots, n$ sınır şartlarının doğurduğu lineer diferansiyel operatör olduğunu varsayalım. L^* operatörünün ise $l^*(y)$ diferansiyel ifadesinin ve $v_\vartheta(y) = 0$, $\vartheta = 1,2, \dots, n$ sınır şartlarının doğurduğu lineer diferansiyel operatör olduğunu varsayalım. Burada;

$$l_1(y) = l(y) - \lambda_0 y$$

aldığımız zaman $l_1(y)$ diferansiyel ifadesinin eşlenik diferansiyel ifadesi,

$$l_1^*(y) = l^*(y) - \overline{\lambda_0} y$$

eşitliği ile tanımlanmış olacaktır. Şimdi $\lambda = \lambda_0$ sayısının L operatörünün ϑ_0 mertebeden tekrarlanan karakteristik değeri olduğunu varsayalım. O zaman bu şartlarda

$$l_1(y) = 0$$

$$u_\vartheta(y) = 0\,, \qquad \vartheta = 1,2, \dots, n$$

sınır değer probleminin ϑ_0 sayıda lineer bağımsız çözümü vardır. O zaman Lemma 1.7'ye esasen $n = m$ şartında verilmiş sınır değer probleminin r rankı ile eşlenik sınır değer probleminin r' rankı çakıştığından dolayı eşlenik

$$l_1^*(y) = 0$$

$$v_\vartheta(y) = 0\,, \qquad \vartheta = 1,2, \dots, n$$

sınır değer probleminde ϑ_0 sayıda lineer bağımsız çözümü olacaktır. Bu ise $\overline{\lambda_0}$ sayısının L^* operatörünün ϑ_0 mertebeden tekrarlanan kökü olduğunu gösterir. Hatırlatalım ki $y(x)$ ve $z(x)$ fonksiyonları için $(y, z) = 0$ şartı sağlandığında yani,

$$(y, z) = \int_a^b y(x)\overline{z(x)}dx = 0$$

şartı sağlandığında $y(x)$ ve $z(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında ortogonaldır denir ve $y \perp z$ ile gösterilir.

Teorem 2.3. λ sayısının L operatörünün karakteristik değeri $y = y(x)$ fonksiyonu ise L operatörünün λ karakteristik değerine uygun karakteristik fonksiyonu olduğunu ve μ sayısının ise eşlenik L^* operatörünün karakteristik değeri olduğunu, $z = z(x)$ fonksiyonunun ise, L^* operatörünün bu μ karakteristik değerine uygun karakteristik fonksiyonu olduğunu varsayalım, Burada $\lambda \neq \bar{\mu}$ şartınında sağlandığını varsaydığımızda, $(y,z) = 0$ şartı sağlanır.

İspat: Teoremin şartlarını dikkate alırsak , $Ly = \lambda y \;\; ve \;\; L^*z \;\; = \;\; \mu z$ bu eşitlikleri dikkate alarak uygun olan aşağıdaki eşitlikleri buluruz:

$$(Ly,z) = (\lambda y,z) = \lambda(y,z)$$

$$(y,L^*z) = (y,\mu z) = \bar{\mu}(y,z)$$

Burada L ve L^* eşlenik operatörler olduklarından

$$(Ly,z) = (y,L^*z)$$

eşitliği sağlanır. Üstteki eşitlikleri taraf tarafa çıkararak ve sonuncu eşitliği kullanarak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz.

$$(\lambda - \bar{\mu})(y,z) = 0$$

$\lambda \neq \bar{\mu}$ Şartından $(y,z) = 0$ elde edilir.

2.2.3 Özeşlenik Operatörlerin Karakteristik Değerleri Ve Karakteristik Fonksiyonları

Teorem 2.4. Öz eşlenik operatörlerin tüm karakteristik değerleri reel sayılardır.

İspat: L öz eşlenik operatör olsun,

$$(Ly,z) = (y,Lz)$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlikte $z = y$ aldığımızda

$$(Ly, y) = (y, Ly)$$

eşitliğini buluruz. Diğer yandan

$$(y, Ly) = \overline{(Ly, y)}$$

eşitliği doğrudur. Bu eşitlikten de (Ly, y) sayısının kendi eşleniğine eşit olduğu görülür. Buradan da (Ly, y) sayısının reel sayı olduğu bulunmuş olur. Şimdi λ sayısı L operatörünün karakteristik değeri $y = y(x)$ fonksiyonu ise L operatörünün λ karakteristik değerine uygun karakteristik fonksiyonu olduğunu varsayalım. O zaman (2.43) eşitliğini kullanarak

$$(Ly, y) = \lambda(y, y)$$

eşitliğini buluruz. Burada $(y, y) > 0$ ve (Ly, y) reel sayı olduğundan

$$\lambda = \frac{(Ly, y)}{(y, y)}$$

karakteristik sayısının reel sayı olduğunu buluruz. Teorem 2.3 ve Teorem 2.4 den aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 2.5. Öz eşlenik operatörün farklı karakteristik değerine uygun karakteristik fonksiyonları karşılıklı olarak ortogonal olurlar.

Dikkate alalım aynı bir $\lambda = \lambda_0$ karakteristik değerine uygun karakteristik

$$y_1(x)\, , y_2(x), \dots\, , y_n(x)$$

fonksiyonlarını karşılıklı olarak çift çift ortogonal olarak seçebiliriz. Bunun için aynı bir $\lambda = \lambda_0$ karakteristik değerine uygun karakteristik fonksiyonların lineer uzayında ortogonal baz seçmemiz gerekir. Bu ortogonal baz öz eşlenik L operatörünün aynı bir karakteristik değerine uygun ortogonal karakteristik fonksiyonu olurlar.

2.2.4. Karakteristik Değerlerin Bulunması Problemine Örnekler

Örnek 2.4.

$$l(y) = -y''$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$y(0) = y(1)$$

$$y'(0) = y'(1)$$

sınır şartlarının doğurduğu lineer diferansiyel operatörün karakteristik değerlerini ve fonksiyonlarını bulalım,

Çözüm: Aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım:

$$-y'' = \lambda y \tag{2.48}$$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= y(1) \\ y'(0) &= y'(1) \end{aligned}\right\} \tag{2.49}$$

(2.49) denkleminin genel çözümü;

$$y(x) = A\, cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\, sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) \tag{2.50}$$

şeklinde yazılır. Bu çözümdeki A ve B katsayıları keyfi sabit sayılardır. (2.50) genel çözümündeki A ve B katsayılarını öyle seçelimki (2.49) sınır şartları da sağlansın. Bu amaçla (2.50) çözümünün x değişkenine göre türevini alalım,

$$y'(x) = -A\sqrt{\lambda}\, sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\sqrt{\lambda}\, cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) \tag{2.51}$$

(2.50) ve (2.51) ifadelerini (2.49) sınır şartlarında dikkate alırsak A ve B katsayıları için aşağıdaki denklem sistemini buluruz.

$$\left.\begin{aligned} &A\left(cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) - 1\right) + Bsin\left(\sqrt{\lambda}x\right) = 0 \\ &A\left(-\sqrt{\lambda}\, sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right) + B\left(\sqrt{\lambda}cos\left(\sqrt{\lambda}\right) - \sqrt{\lambda}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.52}$$

(2.52) denklemi A ve B katsayılarına göre homojen cebirsel lineer denklem sistemidir. Bu sistemin A ve B bilinmeyenlerine göre aşikar olmayan çözümünün olması için (2.52) sisteminin

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} cos(\sqrt{\lambda}) - 1 & sin(\sqrt{\lambda}x) \\ -\sqrt{\lambda}\, sin(\sqrt{\lambda}x) & \sqrt{\lambda}(cos(\sqrt{\lambda}) - 1) \end{vmatrix} \tag{2.53}$$

determinantının sıfıra eşit olması gerek ve yeter şarttır. Böylece

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} cos(\sqrt{\lambda}) - 1 & sin(\sqrt{\lambda}x) \\ -\sqrt{\lambda}\, sin(\sqrt{\lambda}x) & \sqrt{\lambda}(cos(\sqrt{\lambda}) - 1) \end{vmatrix} = 0$$

veya

$$\sqrt{\lambda}\left(1 - \cos(\sqrt{\lambda})\right) = 0 \tag{2.54}$$

dır. Böylece (2.48)-(2.49) sınır değer probleminin karakteristik değerleri

$$\lambda_n = (2\pi n)^2 \ , \ n = 0,1,2, \ldots \tag{2.55}$$

sayıları olur. Burada her bir (uygun olarak) λ_n , $n = 0,1,2, \ldots$ Karakteristik değerlerine iki tane lineer bağımsız

$$Cos(2\pi nx) \, , \ Sin(2\pi nx) \ , \ n = 1,2, \ldots \tag{2.56}$$

karakteristik fonksiyonları karşılık gelir. Böylece $n = 0,1,2, \ldots$ olmak üzere her bir λ_n sayısı $l(y) = -y'$ diferansiyel ifadesinin ve (2.49) şartlarının doğurduğu L diferansiyel operatörünün iki katlı karakteristik değeridir. Ama $n = 0$ için $\lambda_0 = 0$ karakteristik değerine $y_0(x) \equiv 1$ karakteristik fonksiyonu uygun olur. Bu yüzden de tanıma esasen $\lambda_0 = 0$ karakteristik değeri L operatörünün bir katlı karakteristik değeridir. Böylece L operatörünün karakteristik değerleri;

$$\lambda_0 = 0 \ , \ \lambda_n = (2\pi n)^2, \quad n = 1,2, \ldots$$

sayıları, bu karakteristik değerlere uygun karakteristik fonksiyonları,

$$y_0(x) = 1,$$

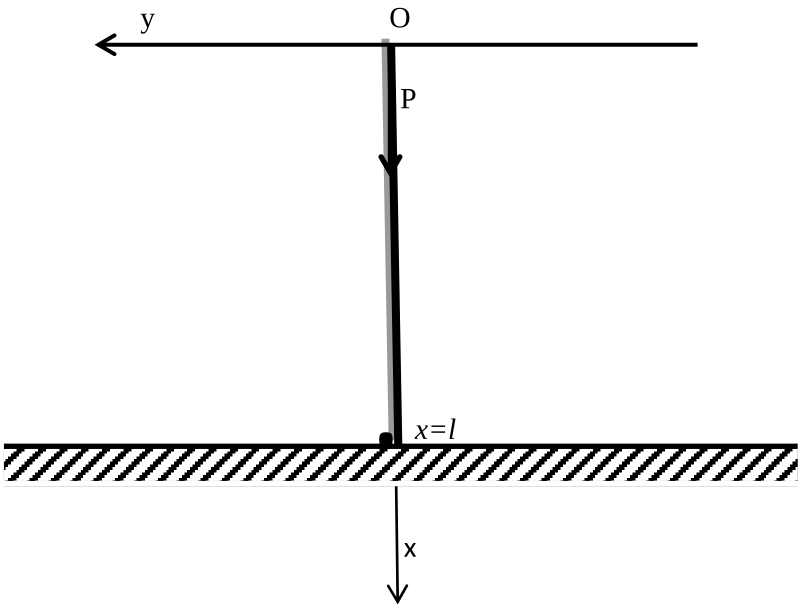
$$y_n^{(1)}(x) = cos(2\pi nx)$$

$$y_n^{(2)}(x) = sin(2\pi nx)$$

fonksiyonlarıdır.

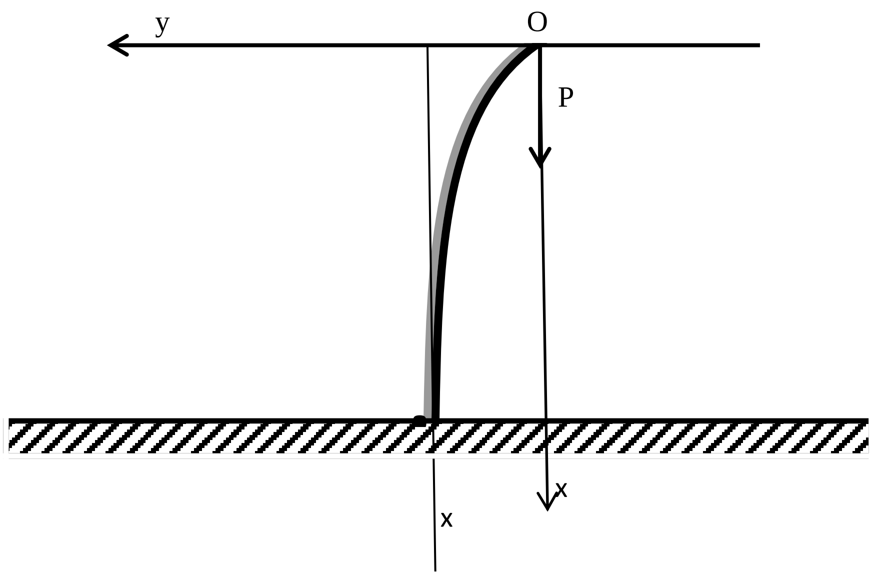
Örnek 2.5.

Bir ucu sabitleştirilmiş diğer ucu serbest olan çubuğun boyca deformasyonu probleminin spektral probleme getirilmesi, $x = 0$ ucu serbest olan, ama $x = l$ ucu sabitleştirilmiş l uzunluklu çubuğu ele alalım,



Şekil 2.1 Çubuğun Boyca Deformasyonu

çubuğun serbest $x = 0$ ucuna $x = 0$ noktasında çubuğun ekseni üzerine yöneltilmiş ve çubuğu l ucuna doğru sıkıştıran P kuvveti yüklenmiştir. P kuvvetinin küçük değerlerinde çubuğun doğrusal şekli bozulmaz. Böylece p kuvvetinin küçük değerleri için çubuğun doğrusal şekli kararlı olarak bozulmadan durur. Ancak öyle kritik bir P_0 değeri bulunurki , $P > P_0$ eşitsizliğini sağlayan P kuvvetleri için çubuğun doğrusal şekli bozularak yay halini alıyor. Çubuğun başlangıç eğilme anını ele alalım. Başka bir deyimle çubuğun doğrusal durumundan az saptığından sonraki denge durumunu ele alalım.



Şekil 2.2 Çubuğun Başlangıç Eğilmesi

Bu hal için çubuğun deformasyona uğramış şeklinin denklemi aşağıdaki biçimde yazılır.

$$\mathrm{P}y = -EIy'' \tag{2.57}$$

Buradaki I çubuğun enine kesitinin aksial momentumudur, E Young modülüdür. (2.57) denkleminin sol ve sağ yanındaki ifadeler çubuğun x koordinatlı noktasının kesitindeki eğme momentumunun ifadeleridir. Çubuğun en sade fiziksel halini ele alalım. Mesela, çubuğun fiziksel özelliklerine nazaran homojen olduğunu, enine kesitinin her bir noktada sabit olduğunu varsayalım. Bu şartlarda $EI = sabit$ olur. Bu şartlar sağlandığında,

$$\lambda = \frac{P}{EI}$$

alalım. O zaman bu şartlarda (2.49) denklemini aşağıdaki şekilde yazalım,

$$-y'' = \lambda y \tag{2.58}$$

Şekil 2.2' de görüldüğü gibi $y(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki sınır şartlarının sağlanması gerekir:

$$y(0) = 0 \quad , \quad y'(l) = 0 \tag{2.59}$$

(2.58) denkleminin genel çözümünü,

$$y(x) = A\,cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\,sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

(2.59) şartlarının birincisinde yerine yazdığımızda $A = 0$ buluruz. İkinci şarttan ise,

$$\Delta(\lambda) = \sqrt{\lambda}\,cos\left(\sqrt{\lambda}\,l\right) = 0$$

elde ederiz. $\lambda_0 = 0$ halinde (2.58)-(2.59) probleminin aşikar çözümü alındığından bu problemde $\lambda_0 = 0$ karakteristik değer değildir. Fakat aşağıdaki denklemin,

$$\mathrm{Cos}\left(\sqrt{\lambda}\,\mathrm{l}\right) = 0$$

$$\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2l}\pi\right)^2 \quad , \quad n = 1,2,\dots$$

çözümleri (2.58)-(2.59) probleminin karakteristik değerleri olur. Bu karakteristik değerlere uygun karakteristik fonksiyonları ise,

$$y_n(x) = B_n\,Sin\left(\frac{2n-1}{2l}\pi x\right)$$

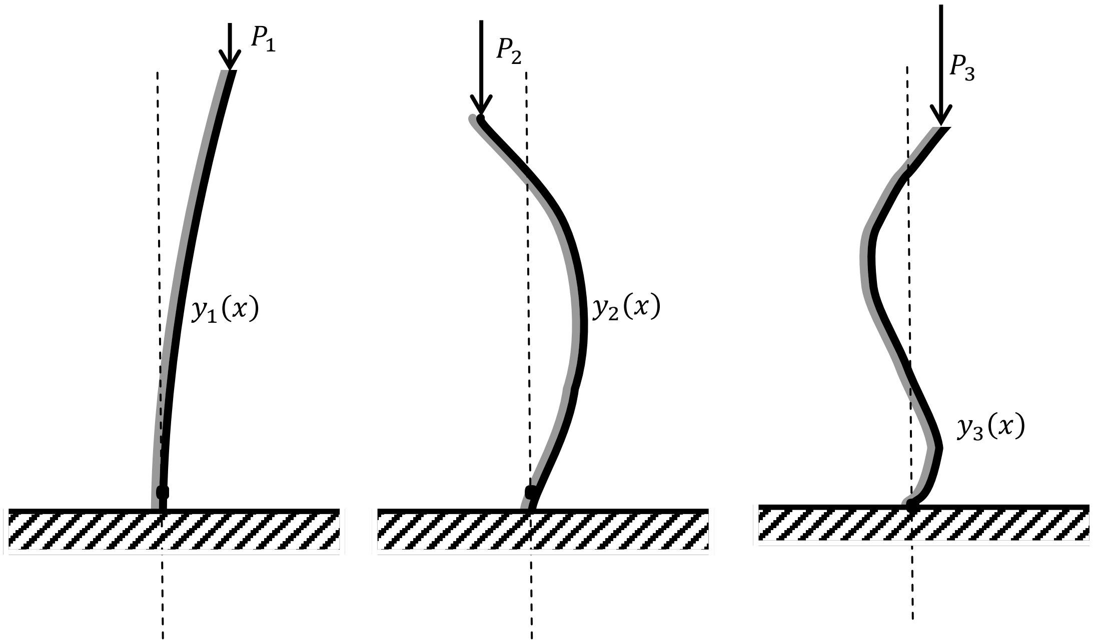
olur. Burada B_n ler keyfi sabit sayılardır. Bulduğumuz karakteristik değerleri kullanarak verilmiş çubuk için

$$\mathrm{P}_n = EI\left(\frac{2n-1}{2l}\pi\right)^2$$

Kritik yükleri buluruz. Buradan da kritik P_n yüklerine uygun, olan çubuğun,

$$y_n(x) = Sin\left(\frac{2n-1}{2l}\pi x\right)$$

denge durumlarını buluruz. Denge durumları Şekil 2.3 teki gibidir.



Şekil 2.3 Çubuğun Denge Durumları

3. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN GREEN FONKSİYONU

3.1. Ters Operatörün Genel Tanımı

Varsayalım ki bize A ve B operatörleri verilmiş olsun. A operatörünün tanım bölgesi D_A değerler bölgesi R_A olsun. B operatörü ise $B: R_A \to D_A$ dönüştüren operatör olsun. $\forall x \in D_A$ için $B(Ax) = x$ eşitliği sağlandığında B operatörüne A operatörünün ters operatörü denir ve A^{-1} gibi gösterilir. Burada ki A ve B operatörleri lineer operatörlerde olmayabilir, böylece $\forall x \in D_A$ için,

$$A^{-1}(Ax) = x \tag{3.1}$$

eşitliği sağlandığında A^{-1} operatörüne A operatörünün ters operatörü denir. Aşağıdaki lemmalar doğrudur.

Lemma 3.1. A operatörünün tersi A^{-1} operatörü olduğundan A^{-1} operatörünün de ters operatörü vardır ve $(A^{-1})^{-1} = A$ olur.

İspat: A operatörünün ters operatörü olduğundan tanıma esasen her bir $x \in D_A$ için $A^{-1}(Ax) = x$ eşitliği sağlanır. Bu eşitliğin her yanını soldan A operatörü ile çarpalım. O zaman; $A \cdot A^{-1}(Ax) = Ax$ olur. Burada $Ax = y \in R_A = x \in D(A^{-1})$ için,

$$A(A^{-1}y) = y \tag{3.2}$$

$\forall y \in R_A$ için doğrudur. Buradan da $A = (A^{-1})^{-1}$ olduğu açıktır.

Lemma3.2. A operatörü lineer operatör olduğunda, A operatörünün tersi A^{-1} operatörü varsa , A^{-1} operatörü de lineer operatör olur.

İspat: $\forall x_1, x_2 \in D_A$ ve $\forall \alpha_1, \alpha_2$ sayıları için; $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$ bu şart sağlandığında A operatörüne Lineer operatördür denir. $A^{-1}: R_A \to D_A$ A^{-1} operatörünün lineer operatör olduğunu göstermek için keyfi alınmış

$\forall y_1, y_2 \in D(A^{-1}) = R_A$, $\forall \lambda_1, \lambda_2$ sayıları için (3.2) eşitliğini kullanarak, aşağıdaki eşitliği $A(\lambda_1 A^{-1} y_1 + \lambda_2 A^{-1} y_2) = \lambda_1 A A^{-1} y_1 + \lambda_2 A A^{-1} y_2 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ elde ederiz. Bu biçimdeki $\forall y_1, y_2 \in D(A^{-1}) = R_A$ $\forall \lambda_1, \lambda_2$ sayıları için

$$A(\lambda_1 A^{-1} y_1 + \lambda_2 A^{-1} y_2) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

eşitliğini buluruz bu eşitlikten ise

$$\lambda_1 A^{-1} y_1 + \lambda_2 A^{-1} y_2 = A^{-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece A^{-1} operatörünün lineer operatör olduğunu göstermiş olduk.

Lemma 3.3. Lineer A operatörünün tersinin olması için gerek ve yeter şart,

$$Ax = 0 \tag{3.3}$$

denkleminin yalnız ve yalnız “ trivial ” yani aynen sıfır çözümünün olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$: gerekliliğin ispatı) Varsayalım ki A operatörünün A^{-1} operatörü vardır. Gösterelim ki (3.3) denkleminin yalnız trivial çözümü vardır. Bunu göstermek için (3.3) denkleminin her iki tarafını A^{-1} ile çarpalım.

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}0$$

$$A^{-1}(Ax) = 0 \Rightarrow x = 0$$

bulunur.

$\Leftarrow$**:** (yeterliliğin ispatı) Varsayalım ki (3.3) denkleminin yalnız $x = 0$ çözümü vardır. Bu durumda gösterelim ki $\forall y \in R_A$ için

$$Ax = y \tag{3.4}$$

denkleminin tek bir tane $x \in D_A$ çözümü olduğunu gösterelim. Aksini farz edelim. Varsayalım ki bu denklemin ikinci bir $x' \in D(A)$ çözümü olsun o zaman

$$Ax' = y \tag{3.5}$$

eşitliğide sağlanır (3.4) ve (3.5)eşitliklerini taraf tarafa çıkarırsak, $A(x-x')=0 \Rightarrow x-x'=0 \Rightarrow x=x'$ olduğunu buluruz. Böylece ispatladık ki $Ax=y$ denkleminin tek bir tane çözümü vardır. Şimdi biz $\forall y \in R_A$ elemanına karşı $Ax=y$ denkleminin tek $x \in D_A$ çözümünü karşı getirelim. Bu yöntemle biz A operatörünün tersi olan A^{-1} operatörünü tanımlamış oluruz. Böylece $Ax=0$ denkleminin yalnız $x=0$ trivial çözümü olduğunda A operatörünün tersi olan A^{-1} operatörü vardır bunu Lemma 3.3 de ispatladık.

3.2. Lineer Diferansiyel Operatörün Tersinin Bulunması Problemi

Lineer diferansiyel L operatörünü

$$l(y) = P_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n(x) \tag{3.6}$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$U_\gamma \equiv \sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_k^\gamma y_a^{(k)} + \beta_k^\gamma) = 0\,, \quad \gamma = 1,2,3,\dots n \tag{3.7}$$

sınır şartlarının doğurduğu lineer diferansiyel operatör olduğunu varsayalım. Uygun homojen sınır değer probleminin yalnız trivial $y(x) \equiv 0$ çözümünün olduğunu varsayalım. Öyle bir şart bulmalıyız ki homojen lineer *n* mertebeli (3.6) diferansiyel denkleminin homojen (3.7) şartlarını sağlayan yalnız sıfır (trivial) çözümünün olduğunu garanti etsin. Dikkate alalım ki (3.6) diferansiyel denkleminde $P_0(x) \neq 0$, $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ katsayıları [a,b] aralığında sürekli fonksiyonlar olduklarında (3.6) denkleminin [a,b] aralığında lineer bağımsız olan n tane $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ çözümleri sistemi olur. Bu denklemin genel çözümü,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \tag{3.8}$$

şeklinde bulunur. Burada $c_1, c_2, ..., c_n$ keyfi sabit sayılardır. Böylece (3.6) lineer kombinasyonunun (3.7) şartlarını da sağlaması gerekir. (3.8) denklemini (3.7) şartlarında yerine yazalım. O zaman;

$$U = \begin{pmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & \dots U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_2) & \dots U_2(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & U_n(y_3) & \dots U_n(y_n) \end{pmatrix} = \left\| U_i(y_j) \right\| \qquad i,j = 1,2,3,\dots,n$$

matrisinin rankı *n* sayısına eşittir. Böylece, buradaki şart yani L(y) = 0 denkleminin yalnız trivial çözümü olduğunda $\det U \neq 0$ şartı sağlanır yani;

$$det\left\| U_i(y_j) \right\| \neq 0$$

Bu şart sağlandığında L operatörünün L^{-1} tersi vardır ve bulunabilir. Biz gösterdik ki L^{-1} operatörü de lineer operatördür. L^{-1} Operatörünün tanım bölgesi L operatörünün değerler bölgesi ile çakışır. Burada esas problem L^{-1} ters operatörünü açık şekilde (formülle) inşa etmektir. Biz burada L^{-1} operatörünün sürekli çekirdekli integral operatör olduğunu göstereceğiz. Bu integral operatörün çekirdeğine L diferansiyel operatörünün *Green Fonksiyonu* denir.

3.3. Green Fonksiyonunun İnşası

(3.6) ifadesinin ve (3.7) sınır şartlarının doğurduğu L diferansiyel operatörünün Green Fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlayan $G(x,\xi)$ fonksiyonuna denir. $G(x,\xi)$ Fonksiyonu [a,b] aralığında alınmış her x ve ξ değişkenleri için hem $G(x,\xi)$ fonksiyonunun kendisi hem de $G(x,\xi)$ fonksiyonunun x değişkenine göre (n–2). mertebeye kadar ((n–2). mertebede dâhil olmak üzere) tüm türevleri $G'_x(x,\xi), G''_{xx}(x,\xi), \dots, G^{(n-2)}_{xx\dots x}(x,\xi)$ türevleri x ve ξ değişkenlerinin $a \leq x,\xi \leq b$ aralığında alınmış her bir değerinde sürekli fonksiyonlarıdır. [a,b] aralığında keyfi alınmış ve değişmez sağlanan her bir ξ için $[a,\xi)$ ve $(\xi,b]$ aralıklarında $G(x,\xi)$ fonksiyonunun $[a,\xi)$ ve $(\xi,b]$ aralıklarında (n–1) ve n.mertebeden x değişkenine göre sürekli olan $G^{(n-1)}_{xx\ldots x}(x,\xi)$ ve $G^{(n)}_{xx\ldots x}(x,\xi)$ mertebeden türevleri vardır. Ama $G(x,\xi)$ fonksiyonunun (n–1) - inci mertebeden x'e göre türevi $x=\xi$ noktasında

Birinci çeşit süreksizdir ve sıçrayışı $\dfrac{1}{P_0(\xi)}$ sayısına eşittir. Yani,

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi+0,\xi)-\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi-0,\xi)=\frac{1}{P_0(\xi)}$$

eşitliği doğrudur. $G(x,\xi)$ her bir $[a,\xi)$ ve $(\xi,b]$ aralıklarında, (3.6) denkleminin çözümüdür. Yani $\ell(G)=0$ denklemini $[a,\xi)$ ve $(\xi,b]$ aralıklarında sağlıyor ve $G(x,\xi)$ fonksiyonu (3.7) sınır şartlarını sağlıyor.

Teorem 3.1. $Ly=0$ denklemini yalnız trivial (aynen sıfır) $y(x)=0$ çözümü olduğundan başka deyimle, (3.6) denkleminin (3.7) sınır şartlarını sağlayan yalnız trivial çözümü olduğunda L diferansiyel operatörünün tek bir tane $G(x,\xi)$ Green fonksiyonu vardır.

İspat: Bu teoremi ispatlamak için (3.6) diferansiyel denkleminin [a,b] aralığında lineer bağımsız olan n tane $y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)$ çözümleri sistemini ele alalım. Dikkate alalım ki bu diferansiyel denklemde $P_0(x)\neq 0$ olmak üzere $P_0(x), P_1(x), P_2(x),..., P_n(x)$ fonksiyonları [a,b] aralığında sürekli fonksiyonlar olduğunda bu diferansiyel denklemin [a,b] aralığında n- tane lineer bağımsız çözümleri olur. O zaman bu diferansiyel denklemin genel çözümü, (3.8) şeklinde yazılır. Burada $c_1, c_2,\ldots,c_n$ keyfi sabit sayılardır. Green fonksiyonunun üçüncü özelliğinde denir ki $G(x,\xi)$ fonksiyonu $[a,\xi)$ ve $(\xi,b]$ aralıklarında $\ell(G)=0$ denklemini sağlıyor. Bu nedenle;

$$G(x,\xi)=\begin{cases} a_1y_1(x)+a_2y_2(x)+\ldots+a_ny_n(x), & a\le x<\xi \\ b_1y_1(x)+b_2y_2(x)+\ldots+b_ny_n(x), & \xi<x\le b \end{cases}$$

Green fonksiyonunun birinci özelliğinden $G(x,\xi)$ ve $G'(x,\xi), G''_{xx}(x,\xi),\ldots,G^{(n-2)}_{xx\ldots x}(x,\xi)$ tüm türevleri [a,b] aralığında süreklidir. Özel halde $x=\xi$ noktasında da sürekli olduğundan,

$$a_1y_1(\xi) + a_2y_2(\xi) + \dots + a_ny_n(\xi) - [\, b_1y_1(\xi) + b_2y_2(\xi) + \dots + b_ny_n(\xi)\,] = 0$$

$$\left[a_1y_1'(\xi) + a_2y_2'(\xi) + \dots + a_ny_n'(\xi)\right] - [\, b_1y_1'(\xi) + b_2y_2'(\xi) + \dots + b_ny_n'(\xi)\,] = 0$$

....

....

$$\left[a_1y_1^{(n-2)}(\xi)+a_2y_2^{(n-2)}(\xi)+\dots+a_ny_n^{(n-2)}(\xi)\right]-[b_1y_1^{(n-2)}(\xi)+b_2y_2^{(n-2)}(\xi)+\dots+b_ny_n^{(n-2)}(\xi)]=0$$

eşitlikleri yazılır. Burada Green Fonksiyonunun aşağıdaki,

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi+0,\xi)-\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi-0,\xi)=\frac{1}{P_0(\xi)}$$

şartından uygun olarak,

$$\left[a_1y_1^{(n-1)}(\xi)+a_2y_2^{(n-1)}(\xi)+\dots+a_ny_n^{(n-1)}(\xi)\right]-[b_1y_1^{(n-1)}(\xi)+b_2y_2^{(n-1)}(\xi)+\dots+b_ny_n^{(n-1)}(\xi)]=-\frac{1}{P_0(\xi)}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada,

$$\left.\begin{array}{c} b_1-a_1=c_1 \\ b_2-a_2=c_2 \\ \vdots \\ b_n-a_n=c_n \end{array}\right\}$$

ile gösterirsek o zaman $c_1,c_2,\dots,c_n$ sayılarının bulunması için aşağıdaki lineer cebirsel denklemler sistemini bulmuş oluruz.

$$\left.\begin{array}{l} y_1(\xi)c_1 + y_2(\xi)c_2 + \dots + y_n(\xi)c_n = 0 \\ y_1'(\xi)c_1 + y_2'(\xi)c_2 + \dots + y_n'(\xi)c_n = 0 \\ y_1''(\xi)c_1 + y_2''(\xi)c_2 + \dots + y_n''(\xi)c_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n-2)}(\xi)c_1 + y_2^{(n-2)}(\xi)c_2 +.+ y_n^{(n-2)}(\xi)c_n = 0 \\ y_1^{(n-1)}(\xi)c_1 + y_2^{(n-1)}(\xi)c_2 +..+ y_n^{(n-1)}(\xi)c_n = 0 \end{array}\right\}$$

denklemleri sistemini buluruz. Bu cebirsel denklemler sisteminin determinantını yazalım.

$$W=\begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & y_n(\xi) \\ y_1^{'}(\xi) & y_2^{'}(\xi) & y_n^{'}(\xi) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & y_2^{(n-2)}(\xi) & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ y_1^{(n-1)}(\xi) & y_2^{(n-1)}(\xi) & y_n^{(n-1)}(\xi) \end{vmatrix} \neq 0$$

Bu determinant $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots, y_n(x)$ fonksiyonlarının *Wronskii Determinantı* veya *wronskiyanı* denir. $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots, y_n(x)$ fonksiyonları *n* mertebeli bir diferansiyel denklemin [a,b] aralığında lineer bağımsız çözümlerinin wronskii determinantı olduğunda bu determinant [a,b] aralığının hiçbir noktasında sıfıra dönüşemez. Sistemin determinantı sıfırdan farklı ise bu sistemin tek bir tane çözümü vardır. Bu çözüm Cramer yöntemi ile de bulunabilir. Böylece;

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= b_1 - a_1 \\ c_2 &= b_2 - a_2 \\ &\vdots \\ c_n &= b_n - a_n \end{aligned}\right\}$$

eşitliklerinde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ değerlerini hesapladık şimdi biz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ katsayılarını bulalım. Eğer biz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ lerin de tek olarak bulunduğunu göstersek o zaman $G(x,\xi)$ fonksiyonunun tekliğini de göstermiş oluruz. Aynı zaman da inşasını da vermiş oluruz. $b_1, b_2, \ldots, b_n$ katsayılarını bulmak için Green fonksiyonunun $U_\nu(y)=0$, $\nu=1,2,\ldots,n$ sınır şartlarını sağlaması, özelliğini kullanırız. Bunu kullanmak için $U_\nu(y)$ ifadelerini iki ifadenin toplamı şeklinde gösterelim.

$$U_\nu(y)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k^\nu y_a^{(k)}+\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k^\nu y_b^{(k)}=0 \;, \quad \nu=1,2,\ldots,n$$

$$U_{\nu\,a}(y)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k^{\nu}y_a^{(k)}$$
$$U_{\nu\,b}(y)=\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k^{\nu}y_b^{(k)}$$

Böylece

$$U_{\nu}(y)=U_{\nu\,a}(y)+U_{\nu\,b}(y)$$

şeklinde yazabiliriz.

$$U_{\nu}(G)=0 \quad \nu=1,2,\ldots,n$$

$$U_{\nu}(G)=U_{\nu\,a}(G)+U_{\nu\,b}(G)=\sum_{i=1}^{n}a_iU_{\nu\,a}(y_i)+\sum_{i=1}^{n}b_iU_{\nu\,b}(y_i)$$

Burada,

$$\left.\begin{aligned} a_1&=b_1-c_1\\ a_2&=b_2-c_2\\ &\vdots\\ a_n&=b_n-c_n \end{aligned}\right\}$$

alalım. Yani

$$a_i=b_i-c_i$$

olur. Böylece buluruz ki,

$$U_{\nu}(G)=\sum_{i=1}^{n}b_iU_{\nu}(y_i)-\sum_{i=1}^{n}c_iU_{\nu\,a}(y_i)=0$$

dır. Buradan $b_1,b_2,\ldots,b_n$ katsayılarının bulunması için aşağıdaki cebirsel denklemler sistemini elde etmiş oluruz.

$$\left.\begin{array}{l}
b_1U_1(y_1)+b_2U_1(y_2)+\ldots+b_nU_1(y_n)=\sum_{i=1}^{n}c_iU_{1a}(y_i)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
b_1U_2(y_1)+b_2U_2(y_2)+\ldots+b_nU_2(y_n)=\sum_{i=1}^{n}c_iU_{2a}(y_i)\\
b_1U_n(y_1)+b_2U_n(y_2)+\ldots+b_nU_n(y_n)=\sum_{i=1}^{n}c_iU_{na}(y_i)
\end{array}\right\}$$

cebirsel denklemler sistemini elde ederiz. Bu sistemin determinantı

$$Ly=0$$

Denkleminin yalnız trivial çözümü olduğundan sıfırdan farklıdır. Bu nedenle bu sonuncu sistemin tek bir $b_1,b_2,\ldots,b_n$ çözümleri vardır.

$$a_i=b_i-c_i$$

eşitliklerinden de $a_1,a_2,\ldots,a_n$ katsayıları tek olarak bulunur. Böylece L diferansiyel operatörünün Green fonksiyonunun varlığını ve tekliğini ispatlamış olduk.

3.4. Green Fonksiyonu Uygulaması İle Diferansiyel Operatörlerin Tersinin Bulunması

Şimdi varsayalım ki $Ly=0$ denkleminin yalnız trivial çözümü $y(x)\equiv 0$ olsun, O zaman L operatörünün ters operatörü vardır ve $\forall f(x)\in R(L)$ için $y(x)=L^{-1}f$ eşitliği doğrudur. Şimdi biz burada $y=L^{-1}f$ eşitliğinin her yanını soldan L ile çarptığımızda

$$Ly=f \tag{3.9}$$

Denklemini buluruz. (3.6)-(3.7) eşitliğinden görüyoruz ki L operatörünün tersini bulmak için biz (3.6) diferansiyel denkleminin (3.7) şartlarını sağlayan çözümünü bulmamız gerekir. Böylece biz burada [a,b] aralığında tanımlanmış her bir sürekli $f(x)\in C_{[a,b]}$ fonksiyonu için (3.6)-(3.7) probleminin çözümünü Green fonksiyonunun yardımı ile nasıl çözüldüğünü ve bununla da L diferansiyel operatörünün bu operatörün Green fonksiyonunun yardımı ile ters L^{-1} operatörünün inşa edilmesi yöntemini burada göstereceğiz.

Teorem 3.2. [a,b] aralığında tanımlanmış her bir sürekli $f(x) \in C_{[a,b]}$ fonksiyonu için $Ly = f$ denkleminin çözümü vardır ve bu $y = y(x)$ çözümü $Ly = 0$ denkleminin yalnız trivial $y(x) \equiv 0$ çözümü olduğunda $Ly = f$ denkleminin $y = y(x)$ çözümü;

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi \tag{3.10}$$

formülü ile bulunur. L^{-1} operatörü ise

$$y = L^{-1} f = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi \tag{3.11}$$

dır. (3.10) ve (3.11) formüllerinde $G(x,\xi)$ fonksiyonu L operatörünün Green fonksiyonudur.

İspat: Bu teoremi ispatlamak için (3.10) formülü ile tanımlanan y(x) fonksiyonunun (3.6) denklemini ve (3.7) sınır şartlarını sağladığını göstermemiz yeterlidir. Bunu göstermek için ise (3.10) formülü ile tanımlanan y(x) fonksiyonunun $y'(x), y''(x), ..., y^{(n-2)}(x), y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)$ türevlerini hesaplayıp (3.6) denkleminde ve (3.7) sınır şartlarında yerine yazıp bu fonksiyonun (3.6) denklemini ve (3.7) şartlarını sağladığını gösterdiğimizde teorem ispatlanmış olur. $G(x,\xi)$ fonksiyonunun kendisi ve x değişkenine göre (n–2). mertebeye kadar ((n–2). mertebe dahil) tüm türevleri $[a,b]$ aralığında tanımlanmış her bir x ve ξ değerlerinde sürekli fonksiyon olduklarından (3.10) formülünde integral altında (n-2) kez x değişkenine göre diferansiyellemek mümkündür. Bu nedenle;

$$y^{(\gamma)} = \int_a^b \frac{\partial^\gamma G(x,\xi)}{\partial x^\gamma} f(\xi)d\xi\,,\ \ \gamma = 1,2,3,\ldots(n-2) \tag{3.12}$$

eşitlikleri doğrudur. (3.10) formülü ile tanımlanan y(x) fonksiyonu ve (3.12) formülleri ile tanımlanan türevleri $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olurlar. Burada,

$$\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}$$

fonksiyonu $x = \xi$ noktasında süreksizdir. Bu nedenle $y^{(n-1)}(x)$ ve $y^{(n)}(x)$ türevlerini hesaplamak için,

$$y^{(n-2)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}} f(\xi)d\xi$$

formülü ile bulunan $y^{(n-2)}(x)$ fonksiyonunu aşağıdaki biçimde gösterelim;

$$y^{(n-2)}(x) = \int_a^x \frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}} f(\xi)d\xi + \int_x^b \frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}} f(\xi)d\xi$$

Bu eşitliğin sağ tarafında integral altında bulunan,

$$\frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}} \tag{3.13}$$

fonksiyonu (*a*,*x*) ve (*x*,*b*) aralıklarında süreklidir. Bu nedenle bu eşitliğin her iki tarafı *x* değişkenine göre diferansiyellediğimizde aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\begin{aligned} y^{(n-1)}(x) \ \ = \ \ & \int_a^x \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)d\xi + \left[\frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}\right]_{\xi=x-0} f(x) \\ & + \int_x^b \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)d\xi - \left[\frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}\right]_{\xi=x+0} f(x) \end{aligned} \tag{3.14}$$

(3.13) ifadesinin türevinin $x = \xi$ noktasında sürekli olduğundan (3.14) eşitliğinin sağ tarafındaki integral dışında kalan terimlerin toplamının sıfır olduğunu görürüz. Bu nedenle (3.14) eşitliği aşağıdaki şekli alır.

$$y^{(n-1)}(x) = \int_a^x \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)d\xi + \int_x^b \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)d\xi \tag{3.15}$$

(3.15) eşitliğini aşağıdaki şekilde de yazabiliriz.

$$y^{(n-1)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)d\xi \tag{3.16}$$

Yukarıda yaptığımız benzer işlemleri (3.15) eşitliğine uyguladığımızda yani (3.15) eşitliğinin her iki yanını x e göre bir kez daha diferansiyellediğimizde ve Green fonksiyonunun;

$$\left[\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{\xi=x-0} - \left[\frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}\right]_{\xi=x+0} = \frac{1}{P_0(x)}$$

özelliğinden,

$$y^{(n)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^{n}G(x,\xi)}{\partial x^{n}} f(\xi)d\xi + \frac{1}{P_0(x)} f(x) \tag{3.17}$$

formülü elde ederiz. Burada dikkate alalım ki, $U_\gamma(y),\ \gamma = 1,2,\dots,n$ ifadelerine *y(x)* fonksiyonunun ve bu fonksiyonun $y'(x),\ y''(x),\dots,y^{(n-1)}(x)$ türevlerinin $x=a$ ve $x=b$ noktalarındaki değerleri dahildir. Bundan dolayı (3.10), (3.12) ve (3.16) formüllerini ve $U_\gamma(G),\ \gamma = 1,2,\dots,n$ özelliğini kullanarak aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını buluruz.

$$U_\gamma(y) = \int_a^b U_\gamma(G)\, f(\xi)d\xi \equiv 0,\ \ \gamma = 1,2,\dots,n$$

Bununla burada (3.10) formülü ile tanımladığımız y=*y(x)* fonksiyonunun (3.7) sınır şartlarını sağladığını göstermiş olduk. Şimdi (3.10) formülü ile tanımladığımız y=*y(x)* fonksiyonunun *l(y)* = *f(x)* denklemini sağladığını gösterelim bunu göstermek için, (3.6) diferansiyel ifadesinde *y(x)* fonksiyonunun ve $y'(x),\ y''(x),\dots,y^{(n)}(x)$ türevlerinin uygun olarak (3.10), (3.12), (3.16) ve (3.17) formülleri ile verilen ifadelerini yerlerine yazdığımızda (3.6) diferansiyel ifadesi için aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$l(y) = \int_a^b l(G)\, f(\xi)d\xi + f(x)$$

$G(x,\xi)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığından keyfi alınmış fakat sabit olan her bir $\xi \in [a,b]$ için (a,ξ) ve (ξ,b) aralıklarında $l(y) = 0$ denklemini x değişkeninin fonksiyonu olarak sağladığından, yani integral altındaki $l(G) \equiv 0$ olduğundan (3.9) eşitliğinin (3.10) formülü ile tanımlanan *y(x)* fonksiyonu için sağlandığını buluruz. Böylece teorem tam olarak ispatlanmış oldu.

3.4.1. İntegral Operatör

Aşağıdaki,

$$Kf = \int_a^b K(x,\xi)\ f(\xi)d\xi \tag{3.18}$$

eşitliği ile tanımlanan K operatörüne integral operatör denir. Burada $a \le\ x,\xi \le b$ bölgesinde tanımlanmış x ve ξ değişkenlerine bağlı $K(x,\xi)$ fonksiyonuna K integral operatörünün çekirdeği denir. (3.10) eşitliğinden L^{-1} ters operatörünün $G(x,\xi)$ çekirdekli integral operatör olduğu görülür.

Şimdi de aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım,

$$l(y) = f(x) \tag{3.19}$$

$$U_\gamma(y) = \beta_\gamma\,,\ \gamma = 1,2,3,\dots n \tag{3.20}$$

Buradaki $\beta_{1,}\,\beta_{2,}\ \beta_{3,\dots}\,\beta_n$ ifadeleri önceden verilmiş sabit sayılardır. (3.19)-(3.20) sınır değer probleminin çözümünü bulmak için önce aşağıdaki,

$$l(y) = 0 \tag{3.21}$$

denkleminin,

$$U_\gamma(y) = \delta_{k\gamma}\,,\ \ \gamma = 1,2,3,\dots n \tag{3.22}$$

Sınır şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemini inceleyelim. Buradaki $\delta_{k\gamma}$ sayısı Kronekker sabiti olup

$$\delta_{k\gamma} = \begin{cases} 1\,, & k = \gamma \\ 0\,, & k \neq \gamma \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlanan sabit sayıdır. (3.21)-(3.22) sınır değer problemini çözmek için (3.21) denkleminin genel çözümünü

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

biçiminde aldığımızda bu çözümdeki $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ katsayılarını öyle seçmeliyiz ki

$$r_k(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

fonksiyonu, (3.21) - (3.22) sınır değer probleminin çözümü olsun. Şu halde (3.19)-(3.20) sınır değer probleminin çözümü;

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi)\ f(\xi)d\xi + \sum_{k=1}^{n} \beta_k\, r_k(x)$$

formülü ile bulunur.

3.5 Green Fonksiyonunun İnşasına Ait Örnekler

$Ly = f$ diferansiyel denkleminde L operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunun olması için gerek ve yeter şart, $Ly = 0$ homojen denkleminin yalnız $y(x) \equiv$

trivial çözümünün olması olduğunu gösterdik. Bu teoremde aynı zamanda Green fonksiyonunun inşası gösterildi. L operatörünün Green fonksiyonu inşa edildiğin de L operatörünün tersi olan L^{-1} operatörü $y = L^{-1}f = \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi$ şeklinde gösterilir. Green fonksiyonunun özellikleri aşağıdaki gibi idi;

1. $G(x,\xi)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun x değişkenine göre $G'_x(x,\xi), G''_{xx}(x,\xi),\ldots,G^{(n-2)}_{xx\ldots x}(x,\xi)$ türevleri $a \le x,\xi \le b$ aralığında x ve ξ değişkenlerinin sürekli fonksiyonlarıdır.

2. [a,b] aralığında keyfi alınmış ve değişmez sağlanan her bir ξ için $[a,\xi)$ ve $(\xi,b]$ aralıklarında $G(x,\xi)$ fonksiyonunun x değişkenine göre sürekli olan $G^{(n-1)}_{xx\ldots x}(x,\xi)$ ve $G^{(n)}_{xx\ldots x}(x,\xi)$ mertebeden türevleri vardır. Ama G fonksiyonunun (n–1) - inci mertebeden x ‘e göre türevi birinci çeşit süreksizdir ve sıçrayışı $\frac{1}{P_0(\xi)}$ sayısına eşittir.

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi+0,\xi)-\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi-0,\xi)=\frac{1}{P_0(\xi)}$$

eşitliği doğrudur. $G(x,\xi)$ fonksiyonu $[a,\xi)$ ve $(\xi,b]$ aralıklarında, (3.21) denkleminin çözümüdür. Yan $\ell(G)=0$ denklemini $[a,\xi)$ ve $(\xi,b]$ aralıklarında sağlıyor ve $G(x,\xi)$ fonksiyonu sınır şartlarını sağlıyor.

Örnek 3.1.

$$l(y) = -y''$$

diferansiyel denklemini

$$U_1(y) = y(0) = 0 \text{ ve } U_2(y) = y(1) = 0$$

sınır şartlarının doğurduğu L diferansiyel operatörünün Green fonksiyonunu inşa edelim. Bu L operatörünün Green fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart L(y) = 0 denkleminin y (x) = 0 çözümünün olmasıdır. $-y'' = 0$ denkleminin, y (0) = 0 ve y (1) = 0 ise $y_1(x) = 1$ ve $y_2(x) = x$ ifadeleri bu denklemin lineer bağımsız çözümler sistemidir.

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$-y'' = 0 \text{ ise} \quad y(x) = c_2 x + c_1$$

$$y(0) = c_1 = 0 \text{ ve } y(1) = c_2 = 0$$

olduğundan bu operatörün Green fonksiyonu vardır ve tektir o halde şimdi bu operatörün Green fonksiyonunu inşa edelim,

$$-\frac{d^2G}{dx^2} = 0 \text{ ve } x \neq \xi$$

Olduğundan L operatörünün Green fonksiyonunun genel şekli aşağıdaki şekilde yazılır.

$$G(x,\xi) = \begin{cases} a_1 1 + a_2 x & 0 \le x < \xi \\ \\ b_1 1 + b_2 x & \xi < x \le 1 \end{cases}$$

Green fonksiyonu $x = \xi$ noktasında sürekli olduğundan

$$b_1 1 + b_2 \xi - (a_1 1 + a_2 \xi) = 0$$

$$(b_1 - a_1)1 + (b_2 - a_2)\xi = 0$$

burada$b_1 - a_1 = c_1$ve $b_2 - a_2 = c_2$ aldığımızda $c_1 + c_2\xi = 0$ Green fonksiyonunun türevi $x = \xi$ noktasında süreksiz olduğundan $b_2 - a_2 = c_2 = -1$ dir. O halde $c_1 + c_2\xi = 0$ eşitliğinde $c_2 = -1$ değerini yerine yazarsak $c_1 - \xi = 0$ dan $c_1 = \xi$ olur ve bu eşitliklerden a_1 ve a_2 değerleri hesaplanır, $a_1 = b_1 - \xi$ ve $a_2 = b_2 + 1$ olur bu değerleri,

$$G(x,\xi)=\begin{cases} a_1 1+a_2x & 0\le x<\xi \\ b_1 1+b_2x & \xi<x\le 1\end{cases}$$

fonksiyonunda yerlerine yazdığımızda

$$G(x,\xi)=\begin{cases} (b_1-\xi)\,1+(\,b_2+1)x\ ; & 0\le x<\xi \\ b_1 1+b_2x\ ; & \xi<x\le 1\end{cases}$$

elde edilir Green fonksiyonu sınır şartlarını sağladığından

$$G(0,\xi)=\ b_1-\xi\ =\ 0 \text{ ise } b_1\ =\ \xi$$

$$G(1,\xi)=\ b_1+\ b_2=0\quad ise\quad b_2=-\,b_1=-\,\xi$$

$$b_2=-\,\xi$$

$$a_1=\ b_1-\xi\ \ =\xi-\xi=0$$
$$a_1=0$$

$$a_2=\ b_2+1=-\xi+1=1-\xi$$

olur. $a_1, a_2,\ b_1, b_2$ için bulduğumuz bu değerleri green fonksiyonunun ifadesinde yerine yazılırsa verilen problemin;

$$G(x,\xi)=\begin{cases} (1-\xi)x\ ; & 0\le x<\xi \\ (1-x)\xi\ ; & \xi<x\le 1\end{cases}$$

Green fonksiyonu elde edilir.

Örnek 3.2.

$$l(y)=-\,y''$$

ifadesinin ve

$$U_1(y)=y\,(0)=0,\quad U_2(y)=y'\,(1)=0$$

sınır şartlarının doğurduğu L diferansiyel operatörünün Green fonksiyonunu inşa edelim.

$$l(y) = -\,y'' = 0$$

diferansiyel denkleminin lineer bağımsız

$$y_1(x) = 1 \text{ ve } y_2(x) = x$$

çözümleri sistemini alalım burada

$$-\,y'' = 0$$

denkleminin

y (0) = 0 ve y' (1) = 0

şartlarını sağlayan çözümünün bulunması probleminin yalnız trivial çözümü vardır.

$$l(y) = -\,y'' = 0$$

diferansiyel denkleminin genel çözümü $y(x) = c_1 x + c_2$ olduğundan

y (0) = c_2 = 0 ve $y'(1) = c_1 = 0$ olur.

$$l(y) = -\,y'' = 0$$

diferansiyel denkleminin yalnız trivial çözümü vardır. Bu nedenle ele aldığımız L diferansiyel operatörünün $G(x,\xi)$ green fonksiyonu vardır ve tektir. $G(x,\xi)$ green fonksiyonunun genel şekli ise aşağıdaki gibidir;

$$G(x,\xi) = \begin{cases} a_1 1 + a_2 x & 0 \le x < \xi \\ b_1 1 + b_2 x & \xi < x \le 1 \end{cases}$$

$G(x,\xi)$ green fonksiyonunun $x = \xi$ noktasında sürekli olması şartından

$$b_1 1 + b_2 \xi - (a_1 1 + a_2 \xi) = 0$$

$$(b_1 - a_1)1 + (b_2 - a_2)\xi = 0$$

eşitliğini ve $G(x,\xi)$ green fonksiyonunun $x = \xi$ noktasında türevinin süreksiz olduğu şartından $b_2 - a_2 =$ -1 buluruz burada $b_1 - a_1 = c_1$ ve $b_2 - a_2 = c_2$ aldığımız $c_1\, ve\ c_2$ için şu eşitlikleri yazarız, $c_1 + c_2\xi = 0 \ \ ve \ \ c_2 = -1$ bu eşitliklerden $c_1 = \xi$ ve $c_2 = -1$ bulunur.

Buradan $b_1 - a_1 = c_1$ eşitliğinden $a_1 = b_1 - c_1 = b_1 - \xi$ bulunur ve $b_2 - a_2 = c_2$ eşitliğinden de $a_2 = b_2 - c_2 = b_2 + 1$ bulunur $a_1 = b_1 - \xi$ ve $a_2 = b_2 + 1$ değerlerinin $G(x,\xi)$ yerlerine yazdığımızda,

$$G(x,\xi) = \begin{cases} (b_1 - \xi)\, 1 + (\, b_2 + 1)x \ ; & 0 \le x < \xi \\ \\ b_1 1 + b_2 x & ; \quad \xi < x \le 1 \end{cases}$$

elde edilir. Green fonksiyonunun

$$U_1(G) = G|_{x=0} = 0 \text{ ve } U_2(G) = \frac{d}{dx}G\Big|_{x=1} = 0$$

şartlarını sağladığından $U_1(G) = 0$ şartından $G(0,\xi) = b_1 - \xi = 0$ ise $b_1 = \xi$ ve $U_2(G) = 0$ şartından da $b_2 = 0$ bulunur. Bulduğumuz bu değerleri $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunun ifadesinde yerine yazdığımızda L diferansiyel operatörünün Green fonksiyonunu aşağıdaki şekilde yazabiliriz;

$$G(x,\xi) = \begin{cases} x\ ; & 0 \le x < \xi \\ \\ \xi\ ; & \xi < x \le 1 \end{cases}$$

Örnek 3.3.

$$l(y) = y'' + y$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$U_1(y) = y\,(0) = 0,\ U_2(y) = y(\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

sınır şartlarının doğurduğu L diferansiyel operatörünün Green fonksiyonunu inşa edelim.

$$l(y) = y'' + y = 0$$

denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 Sinx + c_2 Cosx$$

şeklindedir. Burada $y_1(x) = Sinx$ ve $y_2(x) = Cosx$ fonksiyonları $y'' + y = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleridir. Ly = 0 denkleminin yalnız trivial çözümü vardır. Gerçekten L operatörü için,

$$U = \begin{pmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Sin\,0 & Cos0 \\ Sin\frac{\pi}{2} & Cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det U = -1 \neq 0$$

olduğundan Ly=0 denkleminin yalnız trivial çözümü vardır. Bu nedenle L operatörü için Green fonksiyonu vardır ve tektir. L operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunun genel şekli;

$$G(x,\xi) = \begin{cases} a_1 Sinx + a_2 Cosx & ; \ 0 \leq x < \xi \\ b_1 Sinx + b_2 Cosx & ; \ \xi < x \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

şeklindedir. Green fonksiyonu $x = \xi$ noktasında sürekli olduğundan

$$(b_1 - a_1)Sin\xi + (b_2 - a_2)Cos\xi = 0$$

eşitliğini buluruz. $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunun türevinin $x = \xi$ noktasın da süreksiz olması şartından ise $(b_1 - a_1)Cos\xi - (b_2 - a_2)Sin\xi = 1$ eşitliğini yazabiliriz bu eşitlikte $b_1 - a_1 = c_1$ ve $b_2 - a_2 = c_2$ aldığımızda $c_1\ ve\ c_2$ katsayılarını hesaplamak için aşağıdaki sistemi buluruz;

$$c_1 Sin\xi + c_2 Cos\xi = 0$$

$$c_1\, Cos\xi - c_2 Sin\xi = 1$$

bu sistemde birinci denklemi $Cos\xi$ ikinci denklemi $Sin\xi$ ile çarpıp birinciden ikinciyi çıkarırsak $c_2 = -\,Sin\xi$ buluruz bulduğumuz bu değeri birinci denklemde yerine yazdığımızda $c_1 = Cos\xi$ buluruz şimdi de $b_1 - a_1 = c_1$ ise $a_1 = b_1 - c_1$ ve $b_2 - a_2 = c_2$ ise $a_2 = b_2 - c_2$ elde edilir. $c_1 = Cos\xi$ ve $c_2 = -Sin\xi$ değerlerini yerine yazdığımızda $a_1 = b_1 - Cos\xi$ ve $a_2 = b_2 + Sin\xi$ eşitliklerini elde ederiz bu değerleri $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunda yerlerine yazalım;

$$G(x,\xi) = \begin{cases} (b_1 - Cos\xi\ )\ Sinx + \ (b_2 + \ Sin\xi\ )Cosx\ ; & 0 \le x < \xi \\ b_1 Sinx + b_2 Cosx & ;\ \xi < x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$G(x,\xi)$ Green fonksiyonu

$$\mathrm{U}_1(\mathrm{y}) = \mathrm{y}(0) = 0\ ,\ \mathrm{U}_2(\mathrm{y}) = y(\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

sınır şartlarını sağladığından,

$$U_1(G) = G(0,\xi) = b_2 + Sin\xi = 0 \text{ ise } b_2 = -Sin\xi$$

$$U_2(G) = G\left(\frac{\pi}{2},\xi\right) = b_1 = 0$$

bulunur hesapladığımız b_1 ve b_2 katsayılarını $G(x,\xi)$ fonksiyonunda yerine yazdığımızda L lineer diferansiyel operatörünün Green fonksiyonunu aşağıdaki şekilde elde ederiz;

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -Cos\xi Sinx & ;\ 0 \le x < \xi \\ -Sin\xi Cosx & ;\ \xi < x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Örnek 3.4.

$$l(y) = y'' - y$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$\mathrm{U}_1(\mathrm{y}) = \mathrm{y}(0) = 0 \text{ ve } \mathrm{U}_2(\mathrm{y}) = \mathrm{y}(1) = 0$$

sınır şartlarının doğurduğu L lineer diferansiyel operatörünün Green fonksiyonunu inşa edelim bunun için,

$$l(y) = y'' - y = 0$$

diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri sistemini bulalım bu amaçla $y'' - y = 0$ diferansiyel denkleminin karakteristik denklemini yazalım $y'' - y = 0$ diferansiyel denkleminin karakteristik denklemi $k^2 - 1 = 0$ dır. Bu denklemin kökleri $k_1 = 1$ ve $k_2 = -1$ olduğundan $y'' - y = 0$ diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri $y_1(x) = e^x$ ve $y_2(x) = e^{-x}$ olur $y'' - y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümü ise lineer bağımsız çözümlerin lineer birleşimi olan

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

Şeklindedir. L lineer diferansiyel operatörü için U matrisini yazalım

$$U = \begin{pmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e & e^{-1} \end{pmatrix}$$

$$detU = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e & e^{-1} \end{vmatrix} = e^{-1} - e \neq 0$$

olduğundan Ly=0 denkleminin yalnız trivial çözümü vardır. Bu nedenle L diferansiyel operatörünün Green fonksiyonu vardır ve tektir, L lineer diferansiyel operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunun genel şekli aşağıdaki gibi yazabiliriz;

$$G(x,\xi) = \begin{cases} a_1 e^x + a_2 e^{-x} & ; \ 0 \leq x < \xi \\ b_1 e^x + b_2 e^{-x} & ; \ \xi < x \leq 1 \end{cases}$$

Green fonksiyonunun$x = \xi$ noktasında sürekli olduğundan

$$(b_1 - a_1)e^{\xi} + (b_2 - a_2)e^{-\xi} = 0$$

eşitliğini elde ederiz. $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunun türevinin $x = \xi$ noktasın da süreksiz olması şartından ise

$$(b_1 - a_1)e^{\xi} - \ (b_2 - a_2)e^{-\xi} = 1$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan

$$b_1 - a_1 = c_1 \ \text{ve} \ b_2 - a_2 = c_2$$

aldığımızda c_1 ve c_2 hesaplamak için aşağıdaki denklemler sistemini elde ederiz;

$$c_1\, e^{\xi} \ + \ c_2\, e^{-\xi} = 0$$

$$c_1 \ e^{\xi} \ - \ c_2\, e^{-\xi} = 1$$

bu denklem sisteminden $c_1 \ = \frac{1}{2} e^{-\xi}$ ve $c_2 = -\frac{1}{2} \ e^{\xi}$ değerlerini buluruz $G(x,\xi)$ Green fonksiyonu $G(0,\xi) = 0$ ve $G(1,\xi) = 0$ sınır şartlarını sağladığından

$$a_1 + a_2 = 0$$
$$b_1 e + b_2 e^{-1} = 0$$

$$b_1 - a_1 = \frac{1}{2} e^{-\xi}$$
$$b_2 - a_2 = -\frac{1}{2} \ e^{\xi}$$

Olduğundan bu eşitliklerden $a_1,\ a_2$ ve $b_1,\ b_2$katsayılarını bulalım

$$b_1 - a_1 = \frac{1}{2} e^{-\xi}$$

eşitliğinin her iki tarafını e çarpalım

$$eb_1 - ea_1 = \frac{1}{2} e^{1-\xi}$$

elde ettiğimiz bu son iki eşitliği taraf tarafa topladığımızda;

$$eb_1 + e^{-1}b_2\text{-}(ea_1 + e^{-1}a_2) = \frac{1}{2}(e^{1-\xi} - \ e^{-(1-\xi)})$$

veya

$$ea_1 + e^{-1}a_2 = -\frac{1}{2}(e^{1-\xi} - \ e^{-(1-\xi)}),\ \ a_1 + a_2 = 0$$

eşitliklerini elde ederiz. Buradan $a_1 = -a_2$ olur.

$$ea_1 + e^{-1}a_2 = -\tfrac{1}{2}(e^{1-\xi} - e^{-(1-\xi)})$$

eşitliğinde a_1 yerine $-a_2$ yazdığımızda

$$a_2(e^{-1} - \mathrm{e}) = -\frac{1}{2}\,(e^{1-\xi} - e^{-(1-\xi)})$$

eşitliğini elde ederiz bu eşitliği düzenlediğimizde

$$a_2(e - e^{-1}) = \frac{1}{2}(e^{1-\xi} - e^{-(1-\xi)})$$

olur.

$$2a_2 = \frac{\left(e^{1-\xi} - e^{-(1-\xi)}\right)}{(e - e^{-1})} = \frac{Sin\,h(1-\xi)}{Sin\,h(1)}$$

ise

$$a_2 = \frac{Sin\,h(1-\xi)}{2Sin\,h(1)}$$

bulunur, $a_1 = -a_2$ olduğundan

$$a_1 = -\frac{Sin\,h(1-\xi)}{2Sin\,h(1)}$$

olduğunu hesaplarız.

$$b_1 = a_1 + \frac{1}{2}e^{-\xi}$$

ise

$$b_1 = \frac{1}{2}e^{-\xi} - \frac{Sin\,h(1-\xi)}{2Sin\,h(1)}$$

olur.

$$b_2 = a_2 - \frac{1}{2}\ e^{\xi}$$

olduğu için,

$$b_2 = \frac{Sin\,h(1-\xi)}{2Sin\,h(1)} - \frac{1}{2}\ e^{\xi}$$

olduğu bulunur. a_1 , a_2 , b_1 , b_2 katsayıları için bulduğumuz bu değerleri $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunun genel ifadesinde yerine yazdığımızda L lineer diferansiyel operatörünün Green fonksiyonunu;

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{Sinh(x)Sinh(\xi-1)}{Sinh(1)} & ;\ 0 \le x < \xi \\[2ex] \dfrac{Sinh(\xi)Sinh(x-1)}{Sinh(1)} & ;\ \xi < x \le 1 \end{cases}$$

şeklinde inşa etmiş oluruz.

4. EŞLENİK OPERATÖRÜN GREEN FONKSİYONU

L diferansiyel operatörünün tersi bulunduğunda L diferansiyel operatörünün eşleniği olan L^* operatörünün de tersi vardır. Bu nedenle eşlenik L^* operatörünün de Green fonksiyonu var ve tektir. Eşlenik L^* diferansiyel operatörünün Green fonksiyonunu $H(x,\xi)$ ile gösterelim şimdi burada L diferansiyel operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonu ile eşlenik L^* diferansiyel operatörünün Green fonksiyonunu $H(x,\xi)$ arasında ne gibi bağıntı olduğunu bulalım, bunun için,

$$\mathrm{L}\varphi = f \text{ ve } \mathrm{L}^* \ \psi = g \tag{4.1}$$

alalım,

$$L\varphi = f \text{ için } \varphi = L^{-1}f \tag{4.2}$$

ve

$$\mathrm{L}^* \ \psi = g \quad \text{için} \quad \psi = \mathrm{L}^{*-1}\, g \tag{4.3}$$

olur. Şimdi, L ve L^*operatörlerinin eşlenik operatörler olduklarını kullanarak aşağıdaki eşitliği yazalım,

$$(L\varphi \,, \psi) = (\varphi, \ L^* \ \psi) \tag{4.4}$$

(4.4) eşitliğinden,

$$L\varphi = f \ , \ \psi = \mathrm{L}^{*-1}\, g \ , \varphi = L^{-1}f \text{ ve } \mathrm{L}^* \ \psi = g \tag{4.5}$$

(4.5) ifadesini kullanarak şu eşitliği yazabiliriz

$$(L^{-1}f \ , \ g) = (f, \ \mathrm{L}^{*-1}\, g) \tag{4.6}$$

(4.6) eşitlikğinden eşlenik operatörlerin ters operatörlerinin de eşlenik operatör oldukları görülür bu eşitliği daha açık şekilde yazdığımızda her bir $f(x)$ ve $g(x)$ sürekli fonksiyonları için aşağıdaki eşitliğin sağlandığını görürüz, bu formüldeki $\overline{H(x,\xi)}$ ifadesi L^* diferansiyel operatörünün Green fonksiyonu olan $H(x,\xi)$ fonksiyonunun kompleks eşleniğidir.

$G(x,\xi)$ fonksiyonu ise L diferansiyel operatörünün Green fonksiyonudur.

$$\int_a^b \int_a^b G(x,\xi) f(\xi)\, \overline{g(x)} dx d\xi = \int_a^b \int_a^b \overline{H(x,\xi)} f(\xi)\, \overline{g(x)} dx d\xi \tag{4.7}$$

böylece (4.7) eşitliği her bir $f(x)$ ve $g(x)$ sürekli fonksiyonları için sağlandığından aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$G(x,\xi) = \overline{H(x,\xi)} \tag{4.8}$$

(4.8) eşitliğini sağlayan $G(x,\xi)$ ve $H(x,\xi)$ çekirdeklerine eşlenik çekirdeklerde denir. Böylece aşağıda yazacağımız lemmanın doğru olduğunu göstermiş olduk.

Lemma 4.1. Eşlenik diferansiyel operatörlerin Green fonksiyonları da eşleniktir. Şimdi de L diferansiyel operatörünün öz eşlenik diferansiyel operatör olduğunu varsayalım yani; L= L* olduğunu varsayalım şu halde öz eşlenik operatörler için $H(x,\xi) \equiv G(x,\xi)$ olduğu aşikârdır. Öz eşlenik L diferansiyel operatörünün Green fonksiyonu (4.1) eşitliğine göre,

$$G(x,\xi) = \overline{G(x,\xi)} \tag{4.9}$$

(4.9) eşitliğini sağlar bu eşitliği sağlayan çekirdeklere *Hermit* çekirdeği denir. Böylece öz eşlenik diferansiyel operatörler için aşağıdaki Lemma nın doğruluğunu göstermiş olduk.

Lemma 4.2. Öz eşlenik diferansiyel operatörlerin Green fonksiyonu *Hermit* çekirdeği olur.

5. PARAMETRE BULUNDURAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ VE PARAMETRE BULUNDURAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİN İNTEGRAL DENKLEMLERE GETİRİLMESİ

5.1. Parametre Bulunduran Sınır Değer Problemi

Pratik problemlerin çözümünde sık sık aşağıdaki şekilde parametre bulunduran sınır değer problemleri ile karşılaşırız;

$$l(y)= \lambda . y + f(x) \;, \tag{5.1}$$

$$U_\gamma(y) = 0 \quad , \gamma = 1,2,3,\dots,n \tag{5.2}$$

Buradaki (5.1) diferansiyel ifadesi ve (5.2) lineer formları aşağıdaki eşitliklerle de tanımlanabilir

$$l(y) = P_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n(x) \tag{5.3}$$

$$U_\gamma \equiv \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k^\gamma \, y_a^{(k)} + \beta_k^\gamma) = 0 \,, \quad \gamma = 1,2,3,\dots n \tag{5.4}$$

burada ki λ parametredir. $f(x)$ ise x değişkenine bağlı bir fonksiyondur. L lineer diferansiyel operatör (5.3) diferansiyel ifadesinin ve (5.4) sınır şartlarının doğurduğu lineer diferansiyel operatör olduğunu varsayalım. O zaman (5.1) diferansiyel denkleminin (5.4) sınır şartlarını sağlayan çözümünün bulunmasını aşağıda ki operatör denklemin çözümünün bulunması biçiminde yazabiliriz,

$$Ly= \lambda . y + f(x) \tag{5.5}$$

burada özel halde $f(x) \equiv 0$ olduğunda (5.5) homojen operatör denkleme dönüşür,

$$Ly = \lambda y \tag{5.6}$$

(5.6) operatör denklemi aşağıdaki homojen lineer diferansiyel denklemin homojen lineer sınır şartlarındaki çözümünün bulunması problemine equivalent dir.

$$l(y) = \lambda . y \tag{5.7}$$

$$U_\gamma(y) = 0 \quad , \gamma = 1,2,3, \dots , n \tag{5.8}$$

Burada dikkate alalım ki (5.6) denklemi ve bu denkleme equivalent olan (5.7)-(5.8) sınır değer problemi homojen sınır değer problemi olup lineer denklemlerdir. $y(x) \equiv 0$ trivial çözümü her bir λ için bu denklemlerin çözümüdür. Fakat λ parametresinin bazı değerlerinde (5.6) operatör denkleminin ve uygun (5.7)-(5.8) sınır değer probleminin trivial olmayan çözümleri de olabilir. λ Parametresinin (5.6) operatör denkleminde ki ve (5.7)-(5.8) sınır değer probleminde ki üstte gösterdiğimiz değerlerine L operatörünün (ve uygun olarak (5.7)-(5.8) sınır değer probleminin) karakteristik değerleri ve bu karakteristik değerlere uygun (5.6) denkleminin trivial olmayan çözümlerine (uygun olarak (5.7)-(5.8) sınır değer probleminin ve bu karakteristik değerlere uygun trivial olmayan çözümlerine de) karakteristik fonksiyonları denir. Diferansiyel L operatörünün ve uygun olarak (5.7)-(5.8) sınır değer probleminin karakteristik değerlerinin ve karakteristik fonksiyonlarının bulunması problemi lineer diferansiyel operatörler teorisinin en önemli problemlerindendir. Bu problemin çözümü parametre bulunduran sınır değer problemlerinin integral denklemlere getirilmesi ile kolaylaştırılabilir.

5.2. Parametre Bulunduran Sınır Değer Probleminin İntegral Denkleme Getirilmesi

Burada, (5.3) diferansiyel ifadesi ve (5.8) sınır şartlarının doğurduğu L operatörünün tersinin L^{-1} olduğunu varsayalım, $G(x,\xi)$ fonksiyonuda L diferansiyel operatörünün Green fonksiyonu olsun şu halde, (5.5) denkleminin her yanını soldan L^{-1} operatörü ile çarparak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\mathrm{y} = \lambda \mathrm{L}^{-1}\mathrm{y} + g \tag{5.9}$$

$$g = L^{-1} f \tag{5.10}$$

L diferansiyel operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunu kullanarak (5.9) operatör denklemini ve uygun olarak g elemanının (5.10) eşitliği ile tanımlanan ifadesini daha açık biçimde aşağıdaki gibi yazabiliriz,

$$\mathrm{y(x)} = \lambda \int_{a}^{b} G(x,\xi) y(\xi) d\xi \ + g(x) \tag{5.11}$$

$$g(x) = \int_{a}^{b} G(x,\xi) f(\xi) d\xi \tag{5.12}$$

y(x) aranan fonksiyonun bulunması için bulduğumuz (5.11) denklemi ikinci çeşit *Fredholm* denklemidir. (5.1) ve (5.2) sınır değer probleminin çözümünün bulunması problemi, (5.11) ve (5.12) ikinci çeşit integral denklemin çözümünün bulunması problemleri equivalent problemlerdir. Böylece burada aşağıda yazacağımız lemmayı ispatlamış olduk.

Lemma 5.1. (5.1) diferansiyel ifadesi ve (5.2) sınır şartlarının doğurduğu L lineer diferansiyel operatörünün Green fonksiyonu olan $G(x,\xi)$ bulunduğunda parametre sağlayan homojen olmayan lineer (5.1) diferansiyel denkleminin (5.2) sınır şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemi (5.11) integral denkleminin (5.12) formülü ile bulunan $g(x)$ fonksiyonununda çözümünün bulunması problemine equivalentdir. Özel halde $f(x) \equiv 0$ olduğunda (5.6) homojen lineer diferansiyel denkleminin homojen (5.2) sınır şartlarını sağlayan trivial olmayan çözümlerinin bulunması problemi uygun olarak homojen,

$$\mathrm{y(x)} = \lambda \int_{a}^{b} G(x,\xi) y(\xi) d \tag{5.13}$$

lineer integral denkleminin trivial olmayan çözümlerinin bulunması problemine equivalentdir. (5.12) integral denklemini $G(x,\xi)$ çekirdeği sürekli çekirdek olduğundan bu homojen (5.12) integral denklemine, integral denklemler teorisinde belirli olan *Fredholm* teorisi uygulanabilir. Fredholm teorisinden yazabiliriz ki, sürekli çekirdekli (5.13) integral denkleminin, sayılabilirden fazla olmayan sayıda, sonlu limit noktası olmayan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots \lambda_{n,} \ldots$, Karakteristik sayıları bulunur. (5.11) homojen olmayan integral denkleminin, bu denklemdeki λ parametresinin karakteristik değerlerinden farklı her bir $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1,2,3,\ldots$ değerlerinde denklemin keyfi sürekli g *(x)* sağ yanı için çözümü vardır ve (5.11) denkleminin $\lambda \neq \lambda_n$ için çözümü,

$$y(x) = \lambda \int_a^b \Gamma(x, \xi, \lambda) y(\xi) d\xi + g(x) \tag{5.14}$$

formülü ile bulunur. Bu formüldeki $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ fonksiyonu $G(x, \xi)$ çekirdeğinin rezolventidir. $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ fonksiyonunun inşası *Fredholm* integral denklemler teorisinde verilir. $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ Fonksiyonu $[a, b]$ aralığında alınmış ve sabit olan x ve ξ değerleri için λ parametresinin meramorf (iki tam fonksiyonun orantısı şeklinde gösterilen) fonksiyonu olur. Bu meramorf. $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ fonksiyonunun kutup noktaları (polyusları) (5.12) integral denkleminin karakteristik değerleri olur. Böylece buradan aşağıdaki sonucu yazabiliriz;

Lemma 5.1. *l(y)=0* denkleminin (5.2) sınır şartlarını sağlayan çözümünün yalnız trivial (aşikar) çözüm olduğunda,

a) Homojen (5.7)- (5.8) sınır değer probleminin sonlu limit noktası olmayan ve sayılabilirden fazla olmayan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_{n,} \ldots$ Karakteristik sayıları bulunur.
b) λ parametresinin $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_{n,} \ldots$, karakteristik değerlerinden farklı $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1,2,3,\ldots$ değerlerin de homojen olmayan,
c) (5.1)-(5.2) sınır değer probleminin $[a, b]$ aralığında sürekli olan her bir $f(x)$ fonksiyonu için çözümü vardır. Dikkat edelim ki bu sonuç lineer integral denklemlerin *Fredholm* integral denklemler teorisinden faydalanarak yazdık. Bu sonuca önceki kısımlarda verilmiş sonuçlara dayanarak ta bulabilirdik.

Örnek 5.1.

$$y'' + y = \lambda y + f(x) \tag{5.15}$$

diferansiyel denkleminin,

$$y(0) = 0 \quad \text{ve} \quad y'(1) = 0 \tag{5.16}$$

sınır şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemini, bu probleme equivalent olan lineer integral denklemin çözümünün bulunması problemine getirilmesini gösterelim. Bunun için $l(y) = y'' + y$ diferansiyel ifadesinin ve (5.16) sınır şartlarının doğurduğu L diferansiyel operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunu inşaa edelim. Bunun için önce Ly = 0 denkleminin yalnız trivial çözümünün olduğunu gösterelim, burada

$$y'' + y = 0 \tag{5.17}$$

Denkleminin

$$y_1(x) = Sinx \quad \text{ve} \quad y_2(x) = Cosx$$

lineer bağımsız çözümleri sistemi olduğundan (5.17) denkleminin genel çözümü,

$$y(x) = c_1 Sinx + c_2 Cosx \tag{5.18}$$

şeklindedir. (5.16) sınır şartlarından

$$y(0) = c_2 = 0$$

$$y'(1) = c_1\, Cos1 = 0$$

$Cos1 \neq 0$ olduğundan $c_1 = 0$ olur.

Böylece, Ly = 0 denkleminin yani, (5.17) denkleminin ve (5.16) sınır değer probleminin yalnız trivial çözümü vardır. Ly=0 denkleminin yalnız trivial çözümü olduğundan L diferansiyel operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunu var ve tektir. L diferansiyel operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunu $[0,\xi)$ ve $(\xi, 1]$ Aralığında homojen (5.17) denkleminin çözümü olduğundan ve (5.17) denkleminin genel çözümü $y(x) = c_1 Sinx + c_2 Cosx$ şeklinde olduğu için L diferansiyel operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunu aşağıdaki şekilde arayalım

$$G(x,\xi) = a_1 Sinx + a_2 Cosx \qquad 0 \leq x < \xi \qquad (5.19)$$

$$G(x,\xi) = b_1 Sinx + b_2 Cosx \qquad \xi < x \leq 1 \qquad (5.20)$$

$G(x,\xi)$ Green fonksiyonunun $x = \xi$ noktasında sürekli olduğundan aşağıdaki eşitliği elde ederiz;

$$(b_1 - a_1)Sin\xi + (b_2 - a_2)Cos\xi \qquad (5.21)$$

$G(x,\xi)$ Green fonksiyonunun x değişkenine göre türevinin $x = \xi$ noktasında ki değeri,

$$\frac{1}{P_0(\xi)} = 1$$

ifadesine eşit olan sıçrayışa sahip olması şartından ise;

$$(b_1 - a_1)Cos\xi - (b_2 - a_2)Sin\xi \qquad (5.22)$$

eşitliğini elde ederiz. burada

$$c_1 = b_1 - a_1 \qquad (5.23)$$

$$c_2 = b_2 - a_2 \qquad (5.24)$$

biçiminde alalım şu halde (5.21) ve (5.22) denklemlerinden c_1 ve c_2 parametrelerini bulmak için aşağıdaki denklemler sistemini elde ederiz,

$$c_1 \text{Sin}\,\xi + c_2 Cos\xi = 0$$

$$c_1 Cos\xi - c_2 \text{Sin}\,\xi = 1$$

bu denklem sisteminden c_1 ve c_2 bilinmeyenlerini hesapladığımızda

$$c_1 = Cos\xi \quad \text{ve} \quad c_2 = -\text{Sin}\,\xi \qquad (5.25)$$

eşitliklerini buluruz bu değerleri (5.23) ve (5.24) eşitliklerinde yerine yazdığımızda

$$a_1 = b_1 - c_1 = b_1 - Cos\xi \quad \text{ve} \quad a_2 = b_2 - c_2 = b_2 + \text{Sin}\,\xi$$

eşitliklerini buluruz a_1 ve a_2 için bulduğumuz bu değerleri,

$$a_1 = b_1 - Cos\xi \tag{5.26}$$

$$a_2 = b_2 + \text{Sin}\,\xi \tag{5.27}$$

Green fonksiyonunun (5.19) ifadesinde yerine yazdığımızda Green fonksiyonu,

$$G(x,\xi) = (b_1 - Cos\xi\,)Sinx + (\,b_2 + \text{Sin}\,\xi)Cosx \qquad 0 \le x < \xi$$

$$G(x,\xi) = b_1 Sinx + b_2 Cos \qquad \xi < x \le 1$$

L diferansiyel operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunu $y(0) = 0$ ve $y'(1) = 0$ sınır şartlarını da sağlaması gerektiğinden aşağıdaki eşitlikleri elde edebiliriz

$$G(0,\xi) = b_2 + \text{Sin}\,\xi = 0 \text{ ve } G'_x(1,\xi) = b_1 Cos1 - b_2 \text{Sin}\,1 = 0$$

bu eşitliklerden

$$b_2 + \text{Sin}\,\xi = 0 \quad \text{ise} \quad b_2 = -\,\text{Sin}\,\xi \tag{5.28}$$

$$b_1 = \frac{-\text{Sin}\,1\text{Sin}\,\xi}{Cos1} \tag{5.29}$$

değerlerini buluruz b_1 ve b_2 için bulduğumuz (5.28) ile (5.29) değerlerini (5.26) ve (5.27) eşitliklerinde yerlerine yazdığımız da

$$a_1 = \frac{-\text{Sin}\,1\text{Sin}\,\xi}{Cos1} - Cos\xi = \frac{-Cos(\,\xi - 1)}{Cos1}$$

$$a_2 = b_2 + \text{Sin}\,\xi = -\,\text{Sin}\,\xi + \text{Sin}\,\xi = 0$$

hesapladığımız a_1 , a_2 , b_1 ve b_2 katsayılarını $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunun,

$$G(x,\xi) = a_1 Sinx + a_2 Cosx \qquad 0 \leq x < \xi$$

$$G(x,\xi) = b_1 Sinx + b_2 Cosx \qquad \xi < x \leq 1$$

ifadelerinde yerlerine yazdığımızda $G(x,\xi)$ Green fonksiyonu aşağıda ki şekilde olur.

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{SinxCos(\xi - 1)}{Cos1} , & 0 \leq x < \xi \\ -\dfrac{\mathrm{Sin}\xi Cos(x-1)}{Cos1} , & \xi < x \leq 1 \end{cases}$$

elde ettiğimiz $G(x,\xi)$' nin kullanılmasıyla, (5.15) - (5.16) sınır değer problemi bu probleme equivalent olan,

$$y(x) = \lambda \int_0^1 G(x,\xi) y(\xi) d\xi + g(x)$$

integral denkleminin

$$g(x) = \int_0^1 G(x,\xi) f(\xi) d\xi$$

şartında çözümünün bulunması problemine dönüştürülmüş oldu.

6. L – λI DİFERANSİYEL OPERATÖRÜNÜN GREEN FONKSİYONU

L operatörü,

$$l(y) = P_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n(x) \qquad (6.1)$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$U_\gamma(y)U_\gamma \equiv \sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_k^\gamma\, y_a^{(k)} + \beta_k^\gamma) = 0\,, \quad \gamma = 1,2,3,\dots n \qquad (6.2)$$

sınır şartlarının doğurduğu lineer diferansiyel operatör olsun I birim operatör , λ nın bir parametre olduğunu varsayalım, burada L–λI operatörünün Green fonksiyonunun inşaa edilmesi metodunu gösterelim. Bir başka ifade ile L – λI operatörünün tersinin bulunması metodunu verelim. L–λI operatörünün, Green fonksiyonu inşa edildiğinde $(\mathrm{L} - \lambda\mathrm{I})^{-1}$ ters operatörü inşa edilmiş olur. Bu nedenle burada L – λI operatörünün Green fonksiyonunun inşa edilmesi çok önemli bir problemdir.

L – λI operatörünün Green fonksiyonunu inşa etmek için;

$$l(y) = \lambda\, \mathrm{y} \qquad (6.3)$$

homojen diferansiyel denkleminin,

$$y_j^{(\gamma-1)}(q,\lambda) = \begin{cases} 1, & \gamma = j \\ 0, & \gamma \neq j \end{cases} \qquad j,\gamma = 1,2,3,\dots n \qquad (6.4)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümleri sistemini uygun olarak,

$$y_\gamma = y_\gamma(x,\lambda) \quad ,\gamma = 1,2,3,\dots n \qquad (6.5)$$

ile gösterelim (6.3)-(6.4) başlangıç değer problemlerinin

$$y_1 = y_1(x,\lambda)\,,\ y_2 = y_2(x,\lambda),\ \ y_3 = y_3(x,\lambda), \dots,\ y_n = y_n(x,\lambda)$$

çözümleri sistemine (6.3) diferansiyel denkleminin normalleştirilmiş fundamental çözümler sistemi veya normalleştirilmiş lineer bağımsız çözümler sistemi denir. şimdi burada homojen olmayan,

$$l(y) - \lambda y = f(x) \tag{6.6}$$

denkleminin genel çözümünü bulmak için Lagrange sabitlerinin varyasyonu metodunu uygulayarak (6.6) denkleminin iki şekilde genel çözümünü bulalım,

$$y(x) = \sum_{\gamma=1}^{n} C_\gamma^{(1)} y_\gamma(x,\lambda) + \int_a^x \Big(\sum_{\gamma=1}^{n} \frac{W_\gamma(\xi).y_\gamma(x,\lambda)}{W(\xi)P_0(\xi)}\Big) f(\xi)d\xi \tag{6.7}$$

$$y(x) = \sum_{\gamma=1}^{n} C_\gamma^{(2)} y_\gamma(x,\lambda) - \int_x^b \Big(\sum_{\gamma=1}^{n} \frac{W_\gamma(\xi).y_\gamma(x,\lambda)}{W(\xi)P_0(\xi)}\Big) f(\xi)d\xi \tag{6.8}$$

(6.7)-(6.8) formüllerinde $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \dots, C_n^{(1)}$ ve $C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, C_3^{(2)}, \dots, C_n^{(2)}$ katsayıları uygun olarak seçilen keyfi sabit sayılardır. $W(\xi)$ ise uygun olarak (6.5) çözümler sisteminin $x = \xi$ noktasındaki *wronskianı* olup,

$$W(\xi) = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)}(\xi) & y_2^{(n-1)}(\xi) \dots & y_n^{(n-1)}(\xi) \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & y_2^{(n-2)}(\xi) \dots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1(\xi) & y_2(\xi) \quad \dots & y_n(\xi) \end{vmatrix} \tag{6.9}$$

biçiminde tanımlanan determinanttır. $W_1(\xi), W_2(\xi), \dots, W_n(\xi)$ fonksiyonları $W(\xi)$ Wronskii determinantının birinci satır elemanlarının, yani (6.9) determinantındaki birinci satırda bulunan $y_1^{(n-1)}(\xi), y_2^{(n-1)}(\xi), \dots, y_n^{(n-1)}(\xi)$ elemanlarının cebirsel tamamlayıcılarıdır. (6.6) denkleminin genel çözümü için bulduğumuz (6.7) ve (6.8) eşitliklerini taraf tarafa toplayıp 2 ye böldüğümüz zaman (6.6) denkleminin genel çözümünü,

$$y(x) = \sum_{\gamma=1}^{n} C_\gamma\, y_\gamma(x,\lambda) + \int_a^b g(x,\xi)\ f(\xi)d\xi \tag{6.10}$$

Biçimindedir. Bu formüldeki $C_1,\ C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 \dots C_{n-1}, C_n$ katsayıları keyfi sabit sayılardır, $g(x,\xi)$ fonksiyonu ise aşağıdaki şekilde tanımlanan bir fonksiyondur.

$$g(x,\xi) = \pm\frac{1}{2W(\xi)P_0(\xi)}\begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) & \dots & y_n(x,\lambda) \\ y_1^{(n-2)}(x,\xi) & y_2^{(n-2)}(x,\xi) & \dots & y_n^{(n-2)}(x,\xi) \\ y_1^{(n-3)}(x,\xi) & y_2^{(n-3)}(x,\xi) & \dots & y_n^{(n-3)}(x,\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1(\xi,\lambda) & y_2(\xi,\lambda) & \dots & y_n(\xi,\lambda) \end{vmatrix}$$

bu eşitlikteki “+“ işareti $x > \xi$ eşitsizliği, “-“ işareti ise $x < \xi$ eşitsizliği sağlandığında alınır. (6.10) eşitliğindeki keyfi sabit olan $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4\ \dots\ C_n$ katsayılarını öyle seçelim ki (6.6) denkleminin (6.10) biçiminde bulduğumuz genel çözümü (6.2) sınır şartlarını sağlasın bir başka ifade ile (6.6) denkleminin (6.10) biçimindeki genel çözümünde bulunan $C_1,\ C_2,\ C_3, \dots\ C_n$ keyfi sabit sayılarını öyle seçelim ki (6.6) denkleminin(6.2) sınır şartlarını sağlayan çözümünü bulalım. Bunun için aşağıdaki eşitliğin sağlanması gerekir.

$$\sum_{j=1}^{n} C_j\, U_\gamma(y_j) + \int_a^b U_\gamma(g)\, f(\xi)d\xi = 0 \qquad \gamma = 1, 2, 3, \dots, n \tag{6.11}$$

eşitliklerindeki $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_{4,}\ \dots, C_n$ Katsayılarının bulunması için homojen olmayan lineer denklemler sistemidir. (6.9) Sisteminden $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4, \dots\ C_n$ sabitlerini bulup (6.10) eşitliğinde yerine yazdığımızda (6.6) denkleminin(6.2) sınır şartlarını sağlayan çözümünü aşağıdaki formülle bulunur.

$$\mathrm{y(x)} = \int_{a}^{b} G(x,\xi,\lambda) y(\xi) d\xi \tag{6.12}$$

bu formüldeki $G(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonu $\mathrm{L} - \lambda\,\mathrm{I}$ diferansiyel operatörünün Green fonksiyonu olup aşağıdaki gibi hesaplanır,

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{(-1)^n}{\Delta(\lambda)} H(x,\xi,\lambda) \tag{6.13}$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} u_1(y_1) & u_1(y_2) & u_1(y_3) & \dots & u_1(y_n) \\ u_2(y_1) & u_2(y_2) & u_2(y_3) & \dots & u_2(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n(y_1) & u_n(y_2) & u_n(y_3) & \dots & u_n(y_n) \end{vmatrix} \tag{6.14}$$

$$H(x,\xi,\lambda) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) & \dots & y_n(x) & g(x,\xi) \\ u_1(y_1) & u_1(y_2) & u_1(y_3) & \dots & u_1(y_n) & u_1(g) \\ u_2(y_1) & u_2(y_2) & u_2(y_3) & \dots & u_2(y_n) & u_2(g) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n(y_1) & u_n(y_2) & u_n(y_3) & \dots & u_n(y_n) & u_n(g) \end{vmatrix} \tag{6.15}$$

Burada λ sayısı L diferansiyel operatörünün karakteristik değeri olmadığında, λ parametresinin bu değeri için $\Delta(\lambda) \neq 0$ olur. Bu nedenle λ sayısı L diferansiyel operatörünün karakteristik değeri olmadığında (6.10) ve (6.11) formüllerinin anlamı olur. Böylece, aşağıdaki lemmayı ispatlamış olduk,

Lemma 6.1 $\mathrm{L} - \lambda\mathrm{I}$ operatörünün Green fonksiyonunu (6.13), (6.14), (6.15), (6.9) ve (6.11) formülleri ile tanımlanır.

Örnek 6.1.

$$-y'' - \lambda^2 y = f(x)$$

denklemini

$$y(0) = 0 \; ve \;\; y(1) = 0$$

sınır şartlarını sağlayan sınır değer probleminin $G(x, \xi, \lambda)$ Green fonksiyonunu inşa edelim ve problemin çözümünü bulalım;

$$-y'' = \lambda^2 y \tag{6.16}$$

diferansiyel denkleminin,

$$y_1(0) = 1 \,, \;\; y_1{}'(0) = 0 \text{ ve } y_2(0) = 0 \,, \; y_2{}'(0) = 1$$

başlangıç şartlarını sağlayan $y_1 = y_1(x, \lambda)$, $y_2 = y_2(x, \lambda)$ fundamental çözümler sistemini bulalım (6.16) diferansiyel denkleminin genel çözümü aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$y(x) \;= c_1 Cos\, \lambda x + c_2 Sin\, \lambda x$$

$$y_1(0) = 1 \;\;, \;\; y_1{}'(0) = 0$$

sınır şartlarından $c_1 = 1$ ve $c_2 = 0$ olduğu bulunur buradan,

$$y_1 = y_1(x, \lambda) = Cosx$$

$$y_2(0) = 0 \,, \; y_2{}'(0) = 1$$

şartlarının sağlanmasından ise $c_1 = 0$ ve

$$c_2 = \frac{1}{\lambda}$$

bulunur, bulduğumuz bu değerleri genel çözümde yerine yazdığımızda,

$$y_2 = y_2(x, \lambda) = \frac{Sin\, \lambda x}{\lambda}$$

demekki (6.16) diferansiyel denkleminin normallaştırılmış fundamental çözümler sistemi;

$$y_1(x, \lambda) = Cos\lambda x$$

ve

$$y_2(x,\lambda) = \frac{Sin\,\lambda x}{\lambda}$$

olur. Şimdi de ele aldığımız problem için fundamental $g(x,\xi)$ çözümünü bulalım $g(x,\xi)$ aşağıdaki formül yardımı ile hesaplanır,

$$g(x,\xi) = \pm\frac{1}{2W(\xi)P_0(\xi)}\begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) \\ y_1(\xi,\lambda) & y_2(\xi,\lambda) \end{vmatrix}$$

ele aldığımız problem için $P_0(\xi) = -1\ ve$

$$W(\xi) = \begin{vmatrix} y'_1(\xi,\lambda) & y'_2(\xi,\lambda) \\ y_1(\xi,\lambda) & y_2(\xi,\lambda) \end{vmatrix}$$

$$W(\xi) = y'_1(\xi,\lambda)y_2(\xi,\lambda) - y_1(\xi,\lambda)\,y'_2(\xi,\lambda)$$

$W(\xi) = -1$ böylece, $P_0(\xi)W(\xi) = (-1)(-1) = 1$ bulunur şimdi de

$$\begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) \\ y_1(\xi,\lambda) & y_2(\xi,\lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Cos\,\lambda x & \dfrac{Sin\,\lambda x}{\lambda} \\ Cos\,\lambda\xi & \dfrac{Sin\,\lambda\xi}{\lambda} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda}(\,Cos\,\lambda x Sin\,\lambda\xi - Sin\,\lambda x Cos\,\lambda\xi\,) = -\frac{1}{\lambda}(Sin\,\lambda x Cos\,\lambda\xi - Cos\,\lambda x Sin\,\lambda\xi)$$

$$-\frac{1}{\lambda}Sin\,\lambda(x-\xi) = \frac{1}{\lambda}Sin\lambda(\xi - x)$$

eşitliklerini kullanarak aşağıdaki şekilde $g(x,\xi)$ fonksiyonunu yazabiliriz,

$$g(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\lambda}Sin\lambda(\xi-x), & \xi<x\\[2ex] -\dfrac{1}{2\lambda}Sin\lambda(\xi-x), & x<\xi\end{cases}$$

$$G(x,\xi,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}H(x,\xi,\lambda)$$

formülünde ki $\Delta(\lambda)$ determinantının eşitini hesaplayalım,

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}1 & 0\\ Cos\,\lambda & \dfrac{Sin\,\lambda}{\lambda}\end{vmatrix}=\frac{Sin\lambda}{\lambda}$$

şimdi de $H(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonunu hesaplayalım;

$$H(x,\xi,\lambda)=\begin{vmatrix}y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) & g(x,\xi)\\ u_1(y_1) & u_1(y_2) & u_1(g)\\ u_2(y_1) & u_2(y_2) & u_2(g)\end{vmatrix}$$

$$H(x,\xi,\lambda)=\begin{vmatrix}Cos\,\lambda x & \dfrac{Sin\,\lambda x}{\lambda} & g(x,\xi)\\ 1 & 0 & -\dfrac{1}{2\lambda}Sin\lambda\xi\\ Cos\,\lambda & \dfrac{Sin\,\lambda}{\lambda} & \dfrac{1}{2\lambda}Sin\lambda(\xi-1)\end{vmatrix}$$

bu determinantın sonucunu hesaplayıp,

$$G(x,\xi,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}H(x,\xi,\lambda)$$

eşitliğinde yerine yazdığımızda,

$$G(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{Sin\,\lambda x Sin\,\lambda(1-\xi)}{\lambda\,Sin\,\lambda.}, & 0\leq x<\xi\\[2ex] \dfrac{Sin\lambda\xi Sin\,\lambda(1-x)}{\lambda\,Sin\,\lambda}, & \xi<x\leq 1\end{cases}$$

Green fonksiyonunu elde ederiz.

7. δ -FONKSİYONU VE δ -FONKSİYONUNUN KULLANILMASI İLE GREEN FONKSİYONUNUN İNŞAASI

7.1. δ-Fonksiyonu

Analiz derslerinde fonksiyonel dizilerin yakınsaklık çeşitlerini görmüştük. Örneğin (a,b) aralığında tanımlanmış,

$$u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),\ u_4(x), \ldots.\ u_n(x) \tag{7.1}$$

fonksiyonel dizisinin düzgün yakınsaklığı, orta quadratik yakınsaklığı, zayıf yakınsaklığı v.b. yakınsaklık çeşitlerini biliyoruz, hatırlayalım ki, (7.1) fonksiyonel dizisi için keyfi $\varepsilon > 0$ sayısını aldığımızda öyle N$>$ 0 bulunursa $n$$>$ N şartını sağlayan her *n* doğal sayısı , her bir *p* = 1,2,3, … doğal sayıları ve $x \in (a, b)$ için,

$$\left|u_{n+p}(x) - u_n(x)\right| < \varepsilon \tag{7.2}$$

eşitsizliği sağlandığında (7.1) fonksiyonel dizisi (a, b) aralığında *düzgün yakınsaktır* denir. (7.1) fonksiyonel dizisi için keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı alındığında öyle bir N$>$ 0 bulunursa bulunursa *n*$>$ N şartını sağlayan her *n* doğal sayısı, her bir *p*=1,2,3, … doğal sayıları için,

$$\int_a^b \left|u_{n+p}(x) - u_n(x)\right|^2 dx < \varepsilon \tag{7.3}$$

(7.3) eşitsizliği sağlandığında, (7.1) fonksiyonel dizisi (a, b) aralığında *orta quadratik* yakınsakdır denir. (7.1) fonksiyonel dizisi için, (a, b) aralığında sürekli olan keyfi *f(x)* fonksiyonları için sayısal,

$$\int_a^b f(x).u_n(x)\,dx\,, \qquad n = 1,2,3, \ldots \tag{7.4}$$

(7.4) dizisi yakınsak dizi olduğunda (7.1) fonksiyonel dizisi (a, b) aralığında *zayıf yakınsaktır* denir. Yakınsak dizilerin her bir hali için dizinin limiti tanımlanır. Burada önemli bir durumla karşılaşılabilir, örneğin (a, b) aralığında sürekli olan fonksiyonlar sınıfını ele aldığımızı varsayalım (7.1) fonksiyonel dizisinin her bir teriminin,(a, b) aralığında sürekli olan fonksiyonlar olduklarını varsayalım. O zaman (7.1) fonksiyonel dizisi (a, b) aralığında düzgün yakınsak olduğunda bu dizinin limiti de (a, b) aralığında sürekli fonksiyon olur. Yani bu halde (7.1) fonksiyonel dizisinin limiti de dizinin elemanlarının dâhil olduğu (a, b) aralığında sürekli olan fonksiyonlar sınıfına dahil olur. (7.1) fonksiyonel dizisi ortalama yakınsak veya zayıf yakınsak olduğunda bu özellik sağlanmayabilir. Fakat yakınsak dizilerin limitleri bu dizilerin dahil olduğu sınıfa, dahil olmadığı hallerde ele alınmış dizinin dahil olduğu sınıf öyle genişletilir ki bu sınıfta yakınsak dizilerin limitleri genişletilmiş sınıfa dahil olur burada dikkate alalım ki; genişletilmiş sınıf ele alınmış sınıfın elemanlarından ve yakınsak dizilerin limitlerinden oluşur. Verilmiş sınıfın genişletilmesi, Reel sayılar teorisinde irrasyonel sayıya equivalent rasyonel sayılar dizisinin bir sınıfı gibi tanımlanır. Şimdi burada zayıf yakınsak anlamında limit fonksiyon tanımladığımızda bir başka ifade ile zayıf yakınsak anlamda limit eleman tanımladığımızda $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizileri equivalent oldukları halde bu dizilerin aynı limit elamanı (limit fonksiyonu) vardır denir. Dikkate alalım ki $\{u_n - v_n\}$ sıfıra zayıf yakınsadığında, yani (a, b) aralığında sürekli olan *f(x)* fonksiyonu için,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\big(u_n(x) - v_n(x)\big)dx = 0 \tag{7.5}$$

(7.5) eşitliği sağlandığında $u_n(x)$ ve $v_n(x)$ dizilerine zayıf equivalent diziler denir. Şimdi de aşağıdaki yöntemle özel bir dizinin tanımlanmasını ele alalım;

Reel eksenden keyfi bir $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ noktası alalım. $\varepsilon_n > 0$ sayısı alalım, $(x_0 - \varepsilon_n, x_0 + \varepsilon_n)$ aralığının dışında sıfıra eşit olan ve $(x_0 - \varepsilon_n, x_0 + \varepsilon_n)$ aralığında negatif olmayan $\{\delta_n(x)\}$ fonksiyonlar dizisini ele alalım ve $\{\delta_n(x)\}$ dizisinin aşağıdaki şartları sağladığını varsayalım,

1. $n \to \infty$ şartından $\varepsilon_n \to 0$
2. $a < x_0 < b$ ve her bir n doğal sayısı için;

$$\int_a^b \delta_n(x)dx = 1 \quad (7.6)$$

Yukarıdaki iki şartı sağlayan $\{\delta_n(x)\}$ fonksiyonel dizisine x_0 noktasının lokal normallaştırılmış dizisi denir. $\{\delta_n(x)\}$ dizisi zayıf yakınsak dizidir, $\{\delta_n(x)\}$ dizisinin limit elemanına x_0 noktasının $\delta -$ fonksiyonu denir ve $\delta(x_0, x)$ şeklinde gösterilir. $\{u_n(x)\}$ dizisi (a, b) aralığında zayıf yakınsadığında ve $u(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında $\{u_n(x)\}$ dizisinin zayıf limiti olmakla, $\{u_n(x)\}$ dizisinin dahil olduğu sınıfa dahil olmadığı zaman $f(x)u(x)$ çarpımının integrali aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\int_a^b f(x)u(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\big(u_n(x) - v_n(x)\big)dx \quad (7.7)$$

eşitliğinden aşağıdaki eşitlik yazılabilir,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\delta_n(x)dx = \int_a^b f(x)\delta(x_0, x)dx = f(x_0) \quad (7.8)$$

(7.8) eşitliği δ-fonksiyonunun tanımı gibi alınır.

7.2. δ-Fonksiyonunun Fourier Serisine Açılımı

$\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sisteminin $[a,b]$ aralığında tanımlanmış reel değerli fonksiyonların ortonormal tam sistemi olduğunu varsayalım, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sisteminin fonksiyonları için,

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad (7.9)$$

olmak üzere,

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\, dx \tag{7.10}$$

(7.9) eşitliği sağlandığında $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi $[a,b]$ aralığında ortonormal sistem oluşturur denir. $[a,b]$ aralığında tanımlanmış *f(x)* fonksiyonlarının bir W sınıfını ele alalım. W sınıfından alınmış her bir f*(x)* fonksiyonunun $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal sistemi üzere Fourier serisi $[a,b]$ aralığında f*(x)* fonksiyonunun kendisine yakınsadığında, yani;

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f, \varphi_n)\, \varphi_n(x) = f(x) \tag{7.11}$$

$$(f, \varphi_n) = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \tag{7.12}$$

(7.11)-(7.12) açılımı her bir $f(x) \in W$ için sağlandığında $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi W sınıfında tam sistem oluşturur denir. $\delta(x, x_0)$ fonksiyonunun $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ tam ortonormal sistemi üzere Fourier serisine açılımını bulalım. Bunun için $\delta(x, x_0)$ fonksiyonunun $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi üzere,

$$\delta(x, x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)\, \varphi_n(x) \tag{7.13}$$

(7.13) şeklinde açıldığını varsayalım bu açılımdaki $a_n(x_0)$ katsayıları aranan katsayılardır. $a_n(x_0)$ katsayılarını bulmak için, (7.2) eşitliğinin her iki tarafını $\varphi_n(x)$

fonksiyonu ile çarpıp ortogonal oldukları $[a,b]$ aralığında integralleyelim. O zaman $(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$ eşitliğini kullanarak $a_n(x_0)$ katsayıları için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz,

$$a_n(x_0) = \int_a^b \delta(x, x_0)\, \varphi_n(x) dx \tag{7.14}$$

(7.14) eşitliğinin sağ yanında $\delta(x, x_0)$ fonksiyonunun tanımını kullanarak,

$$a_n(x_0) = \varphi_n(x_0) \tag{7.15}$$

(7.15) eşitliği bulunur Burada $\delta(x, x_0)$ fonksiyonunun $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi üzere aşağıdaki açılımı buluruz,

$$\delta(x, x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_0)\, \varphi_n(x) \tag{7.16}$$

(7.16) açılımından $\delta(x, x_0)$ fonksiyonunun aşağıdaki simetriklik aksiyomunu sağladığı bulunur.

$$\delta(x, x_0) = \delta(x_{0,} x) \tag{7.17}$$

özel halde (7.17) fonksiyonunun aşağıdaki açılımlarını yazabiliriz,

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty} Cos\frac{n\pi}{l}(x - x_0) \quad , \qquad -l \leq x \leq l$$

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2.l}\sum_{n=-\infty}^{\infty} l^{i.\frac{n\pi}{l}(x-x_0)}, \qquad -l \leq x \leq l$$

$$\delta(x - x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} Sin\frac{n\pi}{l}x_0 Sin\frac{n\pi}{l}x \qquad 0 \leq x \leq l$$

burada $\delta(x, x_0)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulalım, Fourier dönüşümünün tanımına göre;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, x_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} dx = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x_0} \tag{7.18}$$

(7.18) eşitliğini buluruz. Bu eşitliği ters Fourier dönüşümünü kullanarak aşağıdaki biçimde yazabiliriz;

$$\delta(x, x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x_0}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x - x_0)}\, \mathrm{d}\omega \tag{7.19}$$

(7.19) eşitliğini elde ederiz. Buradan da,

$$\delta(x, x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} Cos\, \omega(x - x_0)\mathrm{d}\omega \tag{7.20}$$

(7.20) açılımını buluruz.

7.3. $\boldsymbol{\delta}$-Fonksiyonunun Uygulanmasıyla L Diferansiyel Operatörünün ve L-$\boldsymbol{\lambda}$I Diferansiyel Operatörünün Green Fonksiyonlarının İnşası

L operatörünü,

$$l(y) = P_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n(x) \tag{7.21}$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$U_\gamma(y) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k^\gamma\, y_a^{(k)} + \beta_k^\gamma) = 0\,, \quad \gamma = 1,2,3, \dots n \tag{7.22}$$

(7.22) sınır şartlarının doğurduğu lineer diferansiyel operatör olduğunu varsayalım ve L operatörünün tek bir tane $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunun olduğunu farz edelim. O zaman,

$$\mathrm{L}y = f \tag{7.23}$$

operatör denkleminin, yani uygun olarak,

$$l(y) = f(x) \tag{7.24}$$

diferansiyel denkleminin (7.22) sınır şartlarını sağlayan çözümü,

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi \tag{7.25}$$

formülü ile bulunur. Burada (7.24) denkleminde özel olarak f(x) = $\delta(x,\eta)$ aldığımızda (7.25) eşitliğinden,

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi)\delta(\xi,\eta) \mathrm{d}\xi = \mathrm{G}(x,\eta) \tag{7.26}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikten görüyoruz ki, L operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonu (7.24) ve (7.22) sınır değer probleminin veya uygun olarak (7.23) operatör denkleminin *f(x)* = $\delta(x,\xi)$ alındığındaki çözümüdür. Şimdi de lineer diferansiyel L operatörünün karakteristik $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n, \ldots$. Tekrarlanmayan, pozitif reel sayı ve $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ şartlarını sağladıklarını ve bu karakteristik değerlere uygun L operatörünün $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$,…. karakteristik fonksiyonlarının $[a,b]$ aralığında ortonormal tam sistem oluşturduklarını varsayalım, o zaman $\delta(x,\xi)$ fonksiyonu için,

$$\delta(x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\xi)\, \varphi_n(x) \tag{7.27}$$

açılımını yazabiliriz. (2.27) açılımını kullanarak L operatörünün Green fonksiyonunu bulalım bunun için (7.23) denkleminde f (x) = $\delta(x, \xi)$ alalım (7.27) açılımından (7.23) denklemini aşağıdaki şekilde yazarız,

$$L(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\xi)\, \varphi_n(x) \tag{7.28}$$

(7.28) denkleminin çözümünü,

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\xi)\, \varphi_n(x) \tag{7.29}$$

şeklinde arayalım (7.29) açılımında $c_n(\xi)$ katsayıları aranan katsayılardır. (7.28) denkleminin (7.29) çözümünü (7.28) de yerine yazdığımızda ve L $\varphi_n = \lambda_n . \varphi_n$, $n \in N^+$ eşitliklerini kullandığımızda aşağıdaki eşitliği yazabiliriz,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n . c_n(\xi) .\ \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\xi) .\ \varphi_n(x) \tag{7.30}$$

(7.30) eşitliğini elde ederiz bu eşitliğin her iki tarafını $\varphi_m(x)$ fonksiyonu ile çarpıp, sonrada $[a, b]$ aralığında x değişkenine göre integral alırsak ve (7.9) ve (7.10) eşitliğini de kullandığımızda

$$\lambda_m c_m(\xi) = \varphi_m(\xi), \quad m = 1,2,3 \ldots. \tag{7.31}$$

(7.31) eşitliklerini elde ederiz. Buradan da aranan $c_m(\xi)$ aşağıdaki gibi hesaplarız.

$$c_m(\xi) = \frac{\varphi_m(x)}{\lambda_m}\ ,\ m = 1,2,3 \ldots \tag{7.32}$$

(7.32) eşitliğinden bulduğumuz bu $c_m(\xi)$ katsayılarını (7.29) eşitliğinde yerine yazdığımızda ve (7.26) eşitliğini de dikkate alarak L operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunu aşağıdaki şekilde buluruz,

$$G(x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\xi)\,\varphi_n(x)}{\lambda_n} \tag{7.33}$$

benzer işlemlerle $Ly = \lambda y + f$ operatör denklemi içinde yaparak $L - \lambda I$ operatörünün $G(x,\xi,\lambda)$ Green fonksiyonu için aşağıdaki eşitliği buluruz,

$$G(x,\xi,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\xi)\,\varphi_n(x)}{\lambda_n - \lambda} \quad , \qquad (\lambda_n \neq \lambda) \tag{7.34}$$

Örnek 7.1.

$$-y'' = f(x), \;\; 0 < x < 1$$

diferansiyel denkleminin y (0) = y (1) = 0 sınır şartlarını sağlayan çözümünün bulunması probleminin $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunu inşa edelim, bu problemdeki $f(x)$ fonksiyonu $0 < x < 1\, aral$ığ$ında$ tanımlanmış önceden verilmiş bir fonksiyondur. $l(y) = -y''$ diferansiyel ifadesinin ve y (0) = y (1) = 0 sınır şartlarının doğurduğu L diferansiyel operatörünün, λ_n karakteristik değerleri ve bu karakteristik değerlere uygun $\varphi_n(x)$ karakteristik fonksiyonları aşağıdaki sınır değer probleminin çözümüdür.

$$-\frac{d^2\,\varphi_n}{dx^2} = \lambda_n . \varphi_n$$

ve

$$\varphi_n(0) = \;\varphi_n(1) = 0$$

probleminin çözümünden;

$$\lambda_n = n^2\pi^2 \quad , \quad n = 1,2,3,4, \ldots$$

ve

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2}Sin(n\pi x), \;\; n = 1,2,3, \ldots$$

eşitliklerini elde ederiz, bu eşitliklerden de L operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonu

$$G(x,\xi) = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Sin(n\pi x)Sin(n\pi\xi)}{n^2}$$

şeklindedir.

SONUÇ

Bu çalışmada, Lineer Diferansiyel Operatörler ve Onların Green Fonksiyonunun İnşası anlatıldı önce gerekli olan temel tanımlardan, Lineer uzay, reel lineer uzay, kompleks lineer uzay, lineer bağımlı eleman, lineer bağımsız eleman, lineer manifold (lineer uzayda alt uzay), lineer operatör, lineer diferansiyel ifade, sınır şartları ve lineer diferansiyel operatörün tanımları yapıldı. Farklı farklı sınır şartlarında $l(y)$ diferansiyel ifadesi farklı farklı L operatörleri doğurduğu anlatıldı. Ters operatörün genel tanımı anlatılarak ters operatörün özellikleri ile ilgili lemmalar ispatlandı. Lineer diferansiyel operatörler için Green fonksiyonunun tanımı yapılarak bir lineer diferansiyel operatörün Green fonksiyonunun inşası yöntemi ayrı ayrı incelendi. Parametre bulunduran sınır değer problemleri integral denkleme getirilerek çözümleri kolaylaştırıldı.

KAYNAKLAR

1. Collatz,L., Eıgenvertaufgaben Mıt. Technıschen Anwendungen Geest Portıg 1963.

2. Dunford,N. , Schwartz J.T., Linear Operators-I. General Theory, Interscience Publishers, Inc. , New York, 1957.

3. Hassani.S., Foundations of Mathematical Physıcs U.S.A Mexico of Canada 1991.

4. Kamke, E., Differential Gleichungen Lösungsmethoden Leıpzıg, 1959.

5. Naymark,M.A., Lineyniye differansialniye operatorı Moskova 1969.

6. Roach,G., Green's Functions.Second Edition London Van Nostrand Reinhold, 1970.

7. Rubinstein,Z.A., Cours in Ordinary and Parial Differential Equations, Newyork 1969.

8. Stakgold,I., Green's Functions and Boundary value Problems New York, Wiley-Interscince,1979.

ÖZGEÇMİŞ

1975 yılında Yozgat'ta doğan Murat İCİK, İlk, orta ve lise öğrenimini sırasıyla Yozgat Erkekli köyü İlkokulu, Ankara Keçiören Kalaba Ortaokulu ve Ankara Keçiören Kalaba Lisesinde tamamlamıştır. 1996 yılında kazandığı Kırıkkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2000 yılında başarıyla bitirmiştir.

Eylül 2010 yılında yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başladı. Prof. Dr. Mammad MUSTAFYEV danışmanlığında hazırladığı "Lineer Diferansiyel Operatörler ve Onların Green Fonksiyonunun İnşası Üzerine" Başlıklı tezi ile Yüksek Lisans öğrenimine devam etmektedir.

2000 yılından beri M.E.B bağlı sırasıyla Pazarcık İ.Ö.O ,Akdağmadeni Ticaret Meslek Lisesi, 75.Yıl Milli Piyango Anadolu Lisesi , Erdoğan Akdağ Anadolu Öğretmen Lisesi, Kırıkkale Fen Lisesi ve Halen Akdağmadeni Anadolu Öğretmen Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır. Evli ve iki çocuk babasıdır

İletişim Bilgileri

Adres: Emek Mah. Şht. İsmail Açıkgöz Cad. Aksan Huzur Sitesi F-Blok No: 10 / 4

AKDAĞMADENİ/YOZGAT

66300 YOZGAT

Telefon: (505) 388 42 84

E-posta: murat7566@mynet.com