T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

HİLBERT UZAYINDA OPERATÖR DENKLEMLERİN VARYASYON METODLARI İLE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Saim Zafer İBİŞ

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mammad I. MUSTAFAYEV

Yozgat 2012

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

HİLBERT UZAYINDA OPERATÖR DENKLEMLERİN VARYASYON METODLARI İLE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Saim Zafer İBİŞ

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mammad I. MUSTAFAYEV

Yozgat 2012

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 7011130012 numaralı öğrencisi Saim Zafer İBİŞ'in hazırladığı "Hilbert Uzayında Operatör Denklemlerin Varyasyon Metodları İle Çözüm Yöntemleri" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezi ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 08/05/2012 Salı günü saat 13:00'da yapılmış, tezin onayına OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Mammad I. MUSTAFAYEV (Danışman)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 23/5/2012 tarih ve 5 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

23/5/2012

Enstitü Müdürü

Doç. Dr. Hidayet ÇETİN

(Ünvanı, Adı Soyadı)

Bozok Üniversitesi

Fen Bil.Enst.Müdürü

İÇİNDEKİLER

HİLBERT UZAYINDA OPERATÖR DENKLEMLERİN VARYASYON METODLARI İLE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Saim Zafer İBİŞ

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2012; Sayfa: 97

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mammad I. MUSTAFAYEV

ÖZET

Bu çalışmada Hilbert uzayında verilmiş operatör denklemlerin varyasyon metodlarının uygulanması ile yaklaşık çözüm yöntemleri gösterildi. Burada önce bazı anlam ve tanımlar örneklerle gösterildi. Sonra şartlı ekstremum problemi ele alındı. Burada ikinci mertebeli adi türevli lineer diferansiyel denklemler için ve Laplace ve Poisson denklemleri için lineer sınır değer problemleri varyasyon probleme getirildi. Ritz metodu kullanılarak ikinci mertebeli adi türevli diferansiyel denklemlerin, Schturm-Liouville sınır değer probleminin, Laplace denklemi için Dirichlet probleminin, Ritz metodunun uygulanmasıyla yaklaşık çözümlerinin bulunması gösterildi. Son bölümde, reel ve kompleks Hilbert uzayında verilmiş operatör denklemlerin, eşdeğer varyasyon probleme getirilmesi ele alındı ve Ritz metodu kullanılarak yaklaşık çözümün bulunması gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Hilbert Uzayı, Diferansiyellenebilir Fonksiyoneller, Varyasyon, Ritz Metodu, Operatör Denklem.

THE SOLUTION METHODS OF OPERATOR EQUATIONS WITH VARIATION METHODS ON HILBERT SPACES

Saim Zafer İBİŞ

Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2012; Page: 97

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Mammad I. MUSTAFAYEV

ABSTRACT

In this study applying of variation methods of given operator equations on Hilbert spaces and approximate solving methods wieved. Than conditionally extremum problem discussed. İn here for second order derivative Linear diferantial equation and for Laplace and Poisson equations linear boundary value problems reduced variation problems. Using Ritz method finding methods of approximate solves of second order derivative Linear diferantial equation, Schturm-Liouville boundary value problem, Dirichlet problem for laplace eqation, wieved. In final chapter given operator equations which are on real and complex hilbert space discussed reducing to equivalent variation problems, finding methods of approximate solves wieved using Ritz method.

Key words: Hilbert Spaces, Differentiable Functionals, Variation, Ritz Method, Operator Equation.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve alakasını kesmeyen, ortaya çıkan her türlü bilimsel problemin çözümünde yardımlarını gördüğüm tez danışmanım Prof. Dr. Mammad Mustafayev'e, bölüm başkanımız Yrd. Doç. Dr. Akın Osman Atagün'e, yüksek lisans süresi boyunca desteklerini esirgemeyen bölüm hocalarımız Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali Tandoğan ve Yrd. Doç. Dr. Abdullah Sönmezoğlu'na teşekkürü bir borç bilirim.

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$C\left[a,b\right]$	:	$[a,b]$ aralığında tanımlı, sürekli fonksiyonların lineer normlu uzayı
$C^k\left[a,b\right]$	:	$[a,b]$ aralığında tanımlı, k mertebeden sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonların lineer ve normlu uzayı
$\lVert x \rVert$	:	x elemanının normu
D(F)	:	F operatörünün tanım bölgesi
$\overline{S_1}(0)$	:	Kapalı birim yuvar
A^{-1}	:	A operatörünün tersi
D(A)	:	A operatörünün tanım bölgesi
$s(y)$	:	Yay uzunluğu formülü
Δf	:	Laplace operatörü
(u,v)	:	u ve v operatörünün skaler çarpımı
Ly	:	Lineer operatör
$u\vert_{\Gamma}$	:	u fonksiyonunun Γ sınırındaki değeri
$\inf\limits_{\lVert u \rVert}$	:	u normuna göre infiremum
$\min\limits_{u \in H} F(u)$	:	$F(u)$ fonksiyonunun $u \in H$ noktasındaki minimum değeri
$\overline{Span\{\varphi_i\}_{i=}^{n}}$	:	$\varphi_i \;\; i=1,2,...,n$ fonksiyonlarının kapanışı
$a \approx b$	:	a yaklaşık olarak b ’ye eşittir

1. GİRİŞ

Bu çalışmada Hilbert uzayında verilmiş operatör denklemlerin varyasyon metodlarının uygulanması ile yaklaşık çözüm yöntemleri gösterildi. İkinci mertebeli adi türevli lineer diferansiyel denklemler için ve Laplace ve Poisson denklemleri için lineer sınır değer problemleri varyasyon probleme getirildiği gösterildi.

Burada dikkate alalım ki, Matematiksel fiziğin problemleri, esneklik teorisi ve hidrodinamiğin problemleri vs. diferansiyel denklemlerin sınır değer ve başlangıç değer problemlerinin çözümüne getirilir. Bu yüzden ele alınan bu konu aktüal (güncel) ve pratik uygulamaları olan bir konudur. Böylece birçok hallerde genel olarak pratik problemlerin çözümü Hilbert uzayında yazılmış

$$Au = f$$

şekilli operatör denklemlerin çözümlenmesine getirilir. Bu tezde burada bu denklemde A lineer operatör olup, tanım bölgesi $D(A)$ lineer manifold olmakla H Hilbert uzayında her yerde yoğun, yani

$$\overline{D(A)} = H$$

şartını sağlayan operatördür. Denklemin sağ yanındaki f elemanı H Hilbert uzayından alınmış, verilmiş belli elemandır. u ise $D(A)$ tanım bölgesinde olmakla aranan elemandır.

Matematik fizikte ele alınan pratik problemlerde uygun A operatörü adeta belli sınır şartlarını sağlayan fonksiyonlar kümesinde tanımlanmış lineer diferansiyel operatör olur. Önce burada $Au = f$ denkleminde A operatörünün pozitif belirli olduğu hâl ele alındı. Sonra H kompleks Hilbert uzayı olduğu halde ve A operatörü simetrik, pozitif, pozitif belirli olduğu halleri ele alındı.

Bu hallerde $Au = f$ denkleminin yaklaşık çözümünün varyasyon metodla bulunması yöntemi gösterildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Fonksiyonelin ve Operatörün Tanımı

Burada biz önce bize ileride gerekecek olan fonksiyonel analizin bazı tanım ve sonuçlarını verelim.

Tanım 2.1.1. K kümesi $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ değişkenlerinin $y=y(x)$ fonksiyonlarının kümesi olduğunu varsayalım. K kümesinden alınmış her bir $y(x)\in K$ fonksiyonuna belli bir I kuralı ile I sayısını karşı tutan $I(y(x))$ dönüşümüne $y(x)$ fonksiyonuna bağlı <u>fonksiyonel</u> denir. Böylece $I(y(x))$ fonksiyoneli fonksiyona bağlı fonksiyondur. $I(y(x))$ fonksiyonelinin tanımlandığı $K=\{y(x)\}$ fonksiyonlar sınıfına $I(y)$ fonksiyonelinin <u>tanım bölgesi</u> veya <u>verilme bölgesi</u> denir. Tanım bölgesinden alınan $y(x)\in K$ fonksiyonu ise <u>mümkün fonksiyon</u> diye adlandırılır.

Örnek 2.1.1. $K=\{y(x)\}$ kümesi $x=0$ noktasında diferansiyellenen fonksiyonların kümesi olduğunu varsayalım. O zaman aşağıdaki eşitlikle tanımlanan

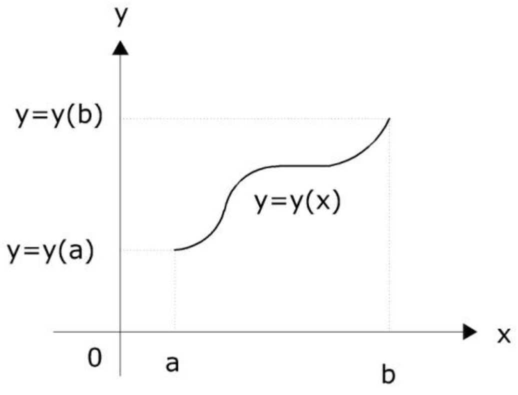
$$k=y'(0)$$

sayısı $y(x)\in K$ fonksiyonuna bağlı bir fonksiyoneldir. Bu fonksiyonelin tanım bölgesi K kümesidir.

Örnek 2.1.2. $[a,b]$ aralığında tanımlanmış ve bu aralıkta sürekli diferansiyellenen (yani $[a,b]$ aralığının her bir noktasında $y'(x)$ türevi var ve $y'(x)$ türevi de $[a,b]$ aralığında sürekli olan) fonksiyonların $C_{[a,b]}$ sınıfını ele alalım. $x=a$, $y=b$ noktalarını birleştiren $y=y(x)$ eğrisinin, s eğri yayının uzunluğu $K=C'_{[a,b]}$ kümesinde tanımlanmış fonksiyonel olur. Bu fonksiyonelin aşağıdaki formülle tanımlandığını biz matematik analizden,

$$s(y)=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

formülü ile tanımlandığını biliyoruz. (Bkz: Şekil 1.1.)

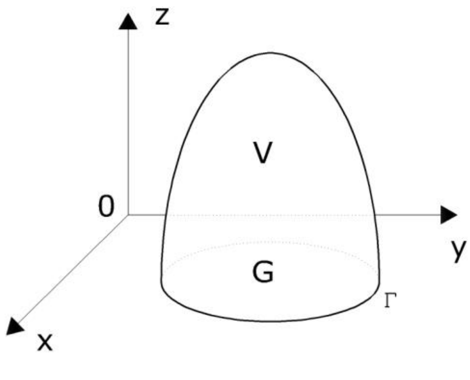


Şekil 2.1 Eğri yayının uzunluğu

Örnek 2.1.3. K kümesi olarak $X0Y$ düzleminin kapalı $\overline{G}$ bölgesinde tanımlanmış ve bu bölgenin $\Gamma = \partial G$ sınırında sıfıra dönüşen ve kapalı $\overline{G}$ bölgesinde sürekli olan ve negatif olmayan, yani her bir $(x, y) \in \overline{G}$ için $f(x, y) \geq 0$ şartını sağlayan fonksiyonların kümesi olduğunu var sayalım. O zaman,

$$V(f) = \iint_G f(x, y)dx$$

integrali geometrik olarak hacim göstermekle $f(x, y) \in K$ fonksiyonuna bağlı bir fonksiyoneldir. (Bkz: Şekil 1.2.)



Şekil 2.2 $f(x, y) \geq 0$ şartını sağlayan $\overline{G}$ bölgesinin hacmi

Tanım 2.1.2. K kümesinden alınmış her bir $u \in K$ ve her bir $v \in K$ için bu fonksiyonların $u + v$ toplamı da $u + v \in K$ ve α keyfi sabit sayı olmakla αu çarpımı için de $\alpha u \in K$ şartları sağlandığında K kümesi lineer olarak adlandırılır.

Mesela; a) polinomlar kümesi, b) $[a,b]$ aralığında tanımlanmış sürekli fonksiyonların kümesi, c) bölgenin sınırında sıfıra dönüşen fonksiyonların kümesi vs. lineer kümelerdir.

Tanım 2.1.3. Fonksiyonların K lineer kümesinde tanımlanmış $I = I(y)$ fonksiyonelini ele alalım. Fonksiyonların lineer K kümesinden alınmış keyfi $u, v \in K$ için ve keyfi alınmış α, β sayıları için

$$I(\alpha u + \beta v) = \alpha I(u) + \beta I(v)$$

eşitliği sağlandığında $I = I(y)$ fonsiyoneline lineer fonksiyoneldir denir. Mesela Örnek 2.2.1'de ele aldığımız

$$k = y'(0)$$

fonksiyoneli $C'_{[-1,1]}$ sınıfında lineer fonksiyoneldir.

Tanım 2.1.4. $y(x)$ fonksiyonlarının bir $K\{y(x)\}$ fonksiyonları kümesi ve $z(x)$ fonksiyonlarının bir $R\{z(x)\}$ fonksiyonları kümelerinin verildiğini varsayalım. (Burada z fonksiyonları başka bir $t = (t_1, t_2, ..., t_m)$ değişkenlerine bağlı da olabilir). Burada her bir $y(x) \in K$ fonksiyonuna karşı belli bir L kuralı ile tek bir $z(x) \in R\{z(x)\}$ fonksiyonu karşı getirildiğinde o zaman $K\{y(x)\}$ fonksiyonlar kümesinde L operatörü tanımlanmıştır denir. Bu sembolik olarak,

$$z = Ly \text{ veya } z = L(y)$$

şeklinde gösterilir. $y = y(x)$ fonksiyonlarının bu $K\{y(x)\}$ kümesine L operatörünün tanım bölgesi denir. $y(x) \in K$ fonksiyonlarına mümkün fonksiyonlar denir.

Örnek 2.1.4. $K = \{y(x)\}$ kümesi $[a,b]$ aralığında tanımlanmış sürekli diferansiyellenen $C'_{[a,b]}$ fonksiyonlar sınıfı olduğunu varsayalım. O zaman $\frac{d}{dx}$ türev alma işlemini operatör gibi ele alabiliriz. Bu operatöre diferansiyelleme operatörü denir.

$$y'(x) = \frac{d}{dx} y(x)$$

Genel halde $P_i(x) \in C_{[a,b]}$, $i = 0,1,2,...,n$ ve $P_0 \neq 0$ olmak üzere her bir $y(x) \in C_{[a,b]}^{(n)}$ fonksiyonu için

$$z = Ly = P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + ... + P_n(x)y \tag{2.1}$$

eşitliği $K = C_{[a,b]}^{(n)}$ sınıfında tanımlanmış değerleri $z(x) \in C_{[a,b]}$ sınıfında olan lineer diferansiyel operatördür. Her bir $y(x) \in C_{[a,b]}^{(n)}$ aldığımızda (2.1) eşitliği ile tanımlanan işlemlerin sonucunda bulunan $z(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyon olur. Mesela,

$$L(y) = y'' + y$$

olarak tanımlarsak, o zaman

$$L(1) = 1;\ L(x) = x;\ L(x^2) = 2 + x^2;\ L(e^x) = 2e^x;$$

$$L(\sin x) = 0 \text{ vs.}$$

n mertebeli lineer diferansiyel

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + ... + P_n(x)y = f(x) \tag{2.2}$$

denklemini ele alalım. Bu denklemde $f(x)$ fonksiyonu ve $P_0(x), P_1(x), ..., P_n(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında tanımlanmış sürekli olan fonksiyonlar olmakla önceden verilmiş fonksiyonlar olduklarını varsayalım. $y(x) \in C_{[a,b]}^{(n)}$ fonksiyonu ise aranan fonksiyon olsun. (2.1) eşitliği ile tanımlanmış lineer diferansiyel Ly diferansiyel operatörünü kullanarak (2.2) diferansiyel denklemini kısaca

$$Ly = f(x) \tag{2.3}$$

şeklinde yazabiliriz.

Örnek 2.1.5. G kümesi $x0y$ düzleminde bir bölge olduğunu K ise G bölgesinde tanımlanmış ikinci mertebeye dek (ikinci mertebe de dâhil olmakla) sürekli diferansiyellenen fonksiyonların $K = \{u(x,y)\}$ kümesi olduğunu yani, $u(x,y) \in C^{(2)}(G)$ olduğunu varsayalım. O zaman $u = u(x,y)$ fonksiyonlarının bu K kümesinde

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

formülü ile tanımlanan Δu operatörüne Laplace operatörü denir. Bu operatörü G bölgesinde tanımlanmış sürekli $f(x,y)$ fonksiyonuna (burada $f(x,y)$ belli önceden verilmiş fonksiyondur) eşitleyerek

$$\Delta u = f(x,y) \tag{2.4}$$

Poisson denklemini alırız. Özel halde $f(x,y) \equiv 0$ aldığımızda biz

$$\Delta u = 0 \tag{2.5}$$

Laplace denklemini alırız. Böylece, adi türevli ve kısmi türevli diferansiyel denklemleri, genel olarak diferansiyel denklemleri biz operatör denklemler gibi ele alabiliriz.

Tanım 2.1.5. L operatörünün tanım bölgesi K lineer küme olduğunda ve her bir $u,v \in K$ fonksiyonları için ve her bir α, β sayıları için $L(\alpha u + \beta v) = \alpha Lu + \beta Lv$ eşitliği sağlandığında L operatörüne lineer operatör denir. W bölgesinde tanımlanmış reel değerli $u(x)$, $v(x)$ fonksiyonlarının $K = \{u\}$ kümesini ele alalım. $u,v \in K$ fonksiyonları için

$$(u,v) = \int_W uv\,dW$$

sayısına u ve v fonksiyonlarının skaler çarpımı denir.

Dikkate alalım ki, u ve v fonksiyonları çok değişkenli fonksiyonlar olduklarında $\int_W$ integralı çok katlı integral olur.

Tanım 2.1.6. Lineer L operatörü için her bir $u,v \in K$ için

$$(Lu,v) = (u,Lv) \tag{2.6}$$

eşitliği sağlandığında L operatörüne özeşlenik operatör denir. Bundan ilave her bir $u \in K$ için

$$(Lu,u) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanırsa ve

$$(Lu,u)=0$$

eşitliği yalnız ve yalnız $u\equiv 0$ halinde sağlandığında L operatörüne pozitif operatör denir.

Örnek 2.1.6. Aşağıdaki lineer diferansiyel operatörü ele alalım.

$$Ly=-y''$$

Bu operatörün tanım bölgesinin

$$K=\left\{y\in C^{(2)}_{[0,1]} : y(0)=0, y'(1)=0\right\}$$

eşitliği ile tanımlanan K kümesi olsun. $u,v\in K$ buluruz:

$$\int_0^1 (vLu-uLv)dx=\int_0^1 (-vu'+uv'')dx$$

$$=(uv'-vu')\Big|_0^1=0$$

olduğundan

$$\int_0^1 vLudx=\int_0^1 uLvdx$$

yani

$$(Lu,v)=(u,Lv)$$

eşitliği sağlanır. Böylece burada ele aldığımız L operatörü özeşlenik operatörüdür. $u\equiv 0$ için $(Lu,u)=0$ olduğu açıktır. $u\in K$, $u\neq 0$ için

$$(Lu,u)=\int_0^1 uLudx$$

$$-\int_0^1 uu''dx=-uu'\Big|_0^1+\int_0^1 u'^2dx>0$$

olduğundan burada ele aldığımız L diferansiyel operatörü pozitif operatördür.

2.2. Fonksiyonlar için Şartlı Ekstremum Problemi

$$u = f(x, y, z, t) \tag{2.7}$$

fonksiyonunun ve

$$F(x, y, z, t) = 0 \tag{2.8}$$

$$G(x, y, z, t) = 0 \tag{2.9}$$

denklemlerinin verildiğini varsayalım.

$P_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ noktası (2.8) ve (2.9) denklemlerini sağladığını varsayalım. P_0 noktasının bir komşuluğunun tüm (x, y, z, t) noktalarının (2.8), (2.9) denklemini sağladığını varsayalım. P_0 noktasının bu komşuluğunun noktaları için

$$f(x, y, z, t) \leq f(x_0, y_0, z_0, t_0) \tag{2.10}$$

eşitsizliği sağlandığında P_0 noktasında $f(P)$ fonksiyonu <u>şartlı maksimum değer alır</u> denir. Ama

$$f(x, y, z, t) \geq f(x_0, y_0, z_0, t_0) \tag{2.11}$$

eşitliği sağlandığında P_0 noktasında $f(P)$ fonksiyonu <u>nispi(şartlı) minimum değer alır</u> denir. $f(x, y, z, t)$, $F(x, y, z, t)$ ve $G(x, y, z, t)$ fonksiyonlarının $P_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ noktasının bir komşuluğunda tüm argümentlerine göre kısmi türevleri olduklarını varsayalım. $P_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ noktasında

$$\begin{pmatrix} F'_x & F'_y & F'_z & F'_t \\ G'_x & G'_y & G'_z & G'_t \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

matrisinin rankının 2'ye eşit(beraber) olduğunu varsayalım. Mesela

$$J = \begin{vmatrix} F'_z & F'_t \\ G'_z & G'_t \end{vmatrix} \tag{2.13}$$

determinantının sıfırdan farklı olduğunu varsayalım. Bu şart sağlandığında (2.8)-(2.9) denklemlerinden

$$
\left.\begin{array}{l} z = \varphi(x, y) \\ t = \psi(x, y) \end{array}\right\} \tag{2.14}
$$

eşitlikleri bulunur. φ ve ψ fonksiyonları (2.8)-(2.9) denklemlerinin tanımladığı gayrıaşikar (açık olmayan) fonksiyonlarıdır. (2.8)-(2.9) denklemleri ile (2.14) eşitlikleri equivalent eşitliklerdir. z ve t için bulduğumuz bu ifadeleri (2.7) eşitliği ile verilmiş $u = f(x, y, z, t)$ fonksiyonunda z ve t nin yerine yazdığımızda

$$
u = f\left(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)\right) \tag{2.15}
$$

fonksiyonunu bulmuş oluruz. Bu yöntemle (2.7), (2.8)-(2.9) şartlı ekstremum problemi (2.15) karmaşık(mürekkep) fonksiyonun şartsız(mutlak) ekstremum problemine getirlimiş olur. Şimdi biz burada $P_0\left(x_0, y_0, z_0, t_0\right)$ noktasının (ekstremum noktasının) bulunması için başka bir yöntemde gösterelim. Böylece, $f(x, y, z, t)$ fonksiyonun $P_0\left(x_0, y_0, z_0, t_0\right)$ noktasında şartlı ekstremumunun olduğunu (2.15) karmaşık fonksiyonunun ise $M_0(x_0, y_0)$ noktasında mutlak ekstremumunun olduğunu varsayalım. O halde (2.15) fonksiyonunun x ve y değişkenlerine göre kısmi türevleri ve bu fonksiyonun diferansiyeli $M_0(x_0, y_0)$ noktasında sıfıra dönüşürler. Yani

$$
df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0 \tag{2.16}
$$

Burada dz ve dt (2.14) fonksiyonlarının diferansiyelleridir. Bu diferansiyeller $M_0(x_0, y_0)$ noktasında hesaplanır. Ama $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$ kısmi türevleri P_0 noktasında hesaplanır ve

$$
\varphi(x_0, y_0) = z_0, \ \psi(x_0, y_0) = t_0 . \tag{2.17}
$$

(2.16) eşitliğinin sol yanındaki dz ve dt diferansiyellerinden azad olmak için (2.8) ve (2.9) eşitliklerini diferansiyelleyelim. O zaman buluruz:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial F}{\partial x}dx+\dfrac{\partial F}{\partial y}dy+\dfrac{\partial F}{\partial z}dz+\dfrac{\partial F}{\partial t}dt=0\\ \dfrac{\partial G}{\partial x}dx+\dfrac{\partial G}{\partial y}dy+\dfrac{\partial G}{\partial z}dz+\dfrac{\partial G}{\partial t}dt=0\end{array}\right\} \tag{2.18}$$

(2.18) denklemlerinden dz ve dt diferansiyellerini dx ve dy diferansiyelleri cinsinden ifade edip (2.16) eşitliğinde yerine yazarak

$$Adx+Bdy=0 \tag{2.19}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada dx ve dy diferansiyelleri keyfi olduklarından (2.19) eşitliğinden

$$\left.\begin{array}{l}A=0\\ B=0\end{array}\right\} \tag{2.20}$$

gerek şartlarını buluruz. (2.20) eşitliklerinden $M_0(x_0,y_0)$ noktası bulunur. (2.20) eşitlikleri gerek şatlardır.

2.3. Şartlı Ekstremum Problemini Çözmek için Lagrange'n Belirsiz Katsayılar Metodu

Lagrange metodunu göstermek için (2.18) denklemlerinden birincisini λ parametresine, ikincisini μ parametresine çarpıp, taraf tarafa toplanırsa ve sonucunda (2.16) eşitliği ile taraf tarafa toplanırsa aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}+\mu\frac{\partial G}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}+\mu\frac{\partial G}{\partial y}\right)dy+$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}+\mu\frac{\partial G}{\partial z}\right)dz+\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\lambda\frac{\partial F}{\partial t}+\mu\frac{\partial G}{\partial t}\right)dt=0 \tag{2.21}$$

Burada dz ve dt gayrıaşikar (2.14) fonksiyonlarının diferansiyelleridir. Şimdi burada λ ve μ parametrelerini öyle seçelim ki, dz ve dt diferansiyellerinin katsayıları sıfıra dönüşsünler:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial z}+\lambda\dfrac{\partial F}{\partial z}+\mu\dfrac{\partial G}{\partial z}=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial t}+\lambda\dfrac{\partial F}{\partial t}+\mu\dfrac{\partial G}{\partial t}=0.\end{array}\right\} \tag{2.22}$$

Bu durumda (2.21) eşitliği aşağıdaki şekli alır:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}+\mu\frac{\partial G}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}+\mu\frac{\partial G}{\partial y}\right)dy=0\,. \qquad (2.23)$$

dx ve dy diferansiyelleri keyfi olduklarından (2.23) eşitliğinden buluruz:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}+\mu\frac{\partial G}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}+\mu\frac{\partial G}{\partial y}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (2.24)$$

Böylece x_0, y_0, z_0, t_0 koordinatlarını bulmak için (2.22) ve (2.24) denklemler sistemini bulmuş oluruz. (2.22) ve (2.24) şartlarını yazmak için yardımcı

$$\Phi = f + \lambda F + \mu G \qquad (2.25)$$

fonksiyonunu inşaa ederler. (2.25) Lagrange fonksiyonunun yardımı ile (2.22) ve (2.24) denklemleri aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=0\,,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}=0\,,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}=0\,,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}=0\,.$$

Lagrange metodu da gerek şartlarının yazılışına getirmiş olur. Burada

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}=F(x,y,z,t)=0\,,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}=G(x,y,z,t)=0\,.$$

şeklinde yazılır.

Örnek 2.3.1. $$u = xyzt$$

fonksiyonunun

$$x+y+z+t=\mu c$$

şartında ekstremumunu bulun.

Çözüm:

$$\Phi = xyzt + \lambda(x + y + z + t - \mu c)$$

yardımcı fonksiyonunu yazalım.

$$\Phi'_x = yzt + \lambda = 0,$$

$$\Phi'_y = xzt + \lambda = 0,$$

$$\Phi'_z = xyt + \lambda = 0,$$

$$\Phi'_t = xyz + \lambda = 0,$$

$$\Phi_\lambda = x + y + z + t - \mu c = 0$$

Bu eşitliklerden

$$yzt = xzt = xyt = xyz$$

olduğunu ve

$$x = y = z = t = c$$

eşitliğini buluruz. Biz burada çok değişkenli fonksiyonlar için şartlı ekstremum problemini yazdık ve bu problemin üç çözüm yöntemini gösterdik.

2.4. Fonksiyoneller İçin Ekstremum Problemi

Burada $y(x)$ fonksiyonlarının $K = \{y(x)\}$ kümesinde tanımlanmış

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}[y(x)] \tag{2.26}$$

fonksiyonelini ele alalım. (2.26) fonksiyonelinin ekstremum değerinin bulunması problemine (yani en büyük ve en küçük değerinin bulunması problemine) varyasyon problem denir. Dikkate alalım ki, $y_0(x) \in K$ fonksiyonuna yeterince yakın $y(x) \in K$ fonksiyonları için

$$\mathrm{I}(y) \geq \mathrm{I}(y_0)$$

eşitsizliği sağlandığında $y_0(x)$ fonksiyonunda $\mathrm{I}(y)$ fonksiyoneli local minimum değer alır denir. Ancak,

$$\mathrm{I}(y) \le \mathrm{I}(y_0)$$

eşitsizliği sağlandığına ise $y_0(x)$ fonksiyonunda $\mathrm{I}(y)$ fonksiyoneli local maksimum değer alır denir.

Örnek 2.4.1. Aşağıdaki

$$s(y) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$$

fonksiyonelinin

$$y(a) = A,\ y(b) = B$$

şartındaki ekstremum probleminde (minimum değerinin bulunması problemi) $M(a, A)$ ve $N(b, B)$ noktalarını birleştiren $y = y(x) \in C^1_{[a,b]}$ eğrilerinden en küçük uzunluklu eğrinin bulunması istenir. Bu problemin çözümü $M(a, A)$ ve $N(b, B)$ noktalarını birleştiren doğru parçası olur:

$$y_o(x) = A + \frac{B - A}{b - a}(x - a)$$

ve

$$s_{\min} = \sqrt{(b - a)^2 + (B - A)^2}$$

olur.

2.5. Şartlı Ekstremum için Varyasyon Problemi

Şartlı ekstremum problemi aşağıdaki gibidir.

2.5.1. Şartlı Ekstremum Problemi

Normlu X uzayında tanımlanmış diferansiyellenen $F(y)$ ve $G(y)$ fonksiyonellerinin verildiğin varsayalım. c_0 ise verilmiş sabit bir sayı olsun. $F(y)$ fonksiyonelinin

$$G(y) = c_0$$

şartının sağlanmasıyla ekstremum problemini ele alalım. Bu problem aşağıdaki gibi gösterilir.

$$F(y) \to ekstremum\ , \tag{2.27}$$

$$G(y) = c_0 \tag{2.28}$$

$F(y)$ fonksiyonelinin (2.28) şartının sağlanmasıyla ele alınan bu (2.27)-(2.28) problemine <u>şartlı ekstremum problemi</u> denir.

Teorem 2.5.1.1. y_0 noktasının $F(y)$ fonksiyonelinin $G(y) = c_0$ şartında ekstremum probleminin ekstremum noktası olduğunu varsayalım. y_0 noktasının $G(y)$ fonksiyonelinin stasionar noktası olmadığını farz edelim. Yani $\delta G(y_0, h) \neq 0$ şartının sağlandığını varsayalım. O zaman y_0 noktası

$$F(y) - \lambda G(y_0) \tag{2.29}$$

fonksiyonelinin stasionar noktası olur. Burada λ sabit sayıdır.

İspat: $\delta G(y_0, h) = 0$ şartını sağlayan her bir $h \in X$ için

$$\delta F(y_0, h) = 0$$

şartının sağlandığı açıktır. O halde her bir $h \in X$ için

$$\delta F(y_0, h) = \lambda \delta G(y_0, h)$$

eşitliğini bir sabit λ sayısı için sağlandığını yazabiliriz. Bu eşitlikten de

$$\delta(F - \lambda G)(y_0, h) = 0$$

yazılır. Böylece y_0 noktasının bir λ sayısında

$$F - \lambda G$$

fonksiyonelinin stasionar noktası olduğu görülür. Böylece (2.27)-(2.28) şartlı ekstremum probleminin ekstremum noktaları ya

$$H = F - \lambda G \tag{2.30}$$

fonksiyonelinin stasionar noktaları arasında, ya da $G(y)$ fonksiyonelinin stasionar noktaları arasındadır. Şimdi daha genel şartlı ekstremum problemini ele alalım:

Lineer normlu X uzayının bir $M \subset X$ lineer Affin manifoldunda diferansiyellenen $F(y)$ ve $G_1(y), G_2(y), ..., G_n(y)$ fonksiyonellerinin ve $c_1, c_2, ..., c_n$ sabit sayılarının verildiğini varsayalım. $F(y)$ fonksiyonelinin $M \subset X$ affin manifoldunda

$$G_1(y) = c_1,\ G_2(y) = c_2,\ \dots,\ G_n(y) = c_n$$

şartlarında ekstremum problemini ele alalım. Bu şartlı ekstremum problemini sembolik olarak aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$F(y) \to \underset{y \in M}{extremum} \tag{2.31}$$

$$G_i(y) = c_i,\ i = 1,2,...,n \tag{2.32}$$

Teorem 2.5.1.2. $F(y)$ fonksiyonelinin $y_0 \in M$ noktasında

$$G_1(y) = c_1,\ G_2(y) = c_2,\ \dots,\ G_n(y) = c_n \tag{2.33}$$

şartlarının sağlanılmasıyla ekstremum değer aldığını ve y_0 noktasının

$$G_1(y),\ G_2(y),\ \dots,\ G_n(y)$$

fonksiyonellerinin stasionar noktası olmadığını ve

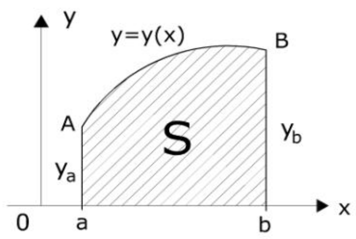
$$\delta G_1(y_0, h),\ \delta G_2(y_0, h),\ \dots,\ \delta G_n(y_0, h)$$

fonksiyonellerinin lineer bağımsız olduklarını varsayalım. O zaman y_0 noktası bir $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sayılarında

$$H = F - \lambda_1 G_1 - \lambda_2 G_2 - ... - \lambda_n G_n \tag{2.34}$$

fonksiyonelinin stasionar noktası olur. Bu teoremin uygulanması ile bir örneği ele alalım.

Örnek 2.5.1.1. Uzunluğu ℓ sayısına eşit olan öyle $y = y(x)$ eğrisi bulun ki, bu eğri ile ve $y = 0$, $x = a$ ve $y = b$ doğruları ile sınırlanmış eğrisel trapezin S alanı en büyük olsun. (Bkz: Şekil 1.3.)



Şekil 2.3 $x = a$ ve $y = b$ ile sınırlanmış eğrisel trapezin S alanı

Bu problemde eğrinin verilmiş ℓ uzunluğunun $A(a, y_a)$ ve $B(b, y_b)$ noktalarını birleştiren doğrunun uzunluğundan büyük olduğu yani;

$$\ell > \sqrt{(b-a)^2 - (y_a - y_b)^2}$$

$$y_a = y(a)\,,\ y_b = y(b)$$

şartlarının sağlandığını varsayılır.

Çözüm: Bu problem aranan trapezin alanını ifade eden

$$F(y) = \int_a^b y(x)dx \tag{2.35}$$

fonksiyonelinin

$$y_a = y(a)\,,\ y_b = y(b) \tag{2.36}$$

sınır şartlarında ve $y = y(x)$, $a \le x \le b$ eğrisinin uzunluğunu ifade eden

$$G(y) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx = \ell \tag{2.37}$$

şartındaki şartlı ekstremum probleminin incelenmesine getirilir.

(2.35)-(2.36)-(2.37) şartlı ekstremum problemini çözmek için aşağıdaki yardımcı

$$H = F(y) - \lambda G(y) = \int_a^b \left[y - \lambda\sqrt{1 + (y')^2} \right] dx \tag{2.38}$$

fonksiyonelin ekstremallarını bulmamız gerekir. Bunun için (2.38) fonksiyonelinin Euler denklemini yazalım:

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 1 - \lambda \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0$$

Bu denklemin her yanını x değişkenine göre bir defa integrallersek:

$$\lambda \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = x - c_1 \tag{2.39}$$

diferansiyel denklemini buluruz. Bu denklemi çözmek için denklemdeki

$$y' = tgt \tag{2.40}$$

değişimi yapalım. Burada:

$$dy = y'dx \tag{2.41}$$

formülünü de kullanalım. Burada (2.39) eşitliğinde (2.40) değişimini yaparsak

$$x = \lambda \frac{tgt}{\sqrt{1+(tgt)^2}} + c_1 \tag{2.42}$$

alırız. Bu eşitlikten dx diferansiyeli için

$$dx = \left(\lambda \frac{tgt}{\sqrt{1+(tgt)^2}} \right)' dt \tag{2.43}$$

ifadesini buluruz. (2.43) ve (2.40) eşitliklerini (2.41) formülünde dikkate alarak buluruz:

$$dy = tgt \left(\lambda \frac{tgt}{\sqrt{1+(tgt)^2}} \right)' dt = \lambda \sin(t) dt$$

veya

$$dy = \lambda \sin(t) dt \tag{2.44}$$

Buradan

$$y - c_2 = -\lambda \cos t \tag{2.45}$$

(2.42) eşitliğinden de

$$x - c_1 = -\lambda \sin t \tag{2.46}$$

denklemini alırız. (2.45) ve (2.46) aranan eğrinin parametrik denklemidir. (2.45) ve (2.46) parametrik denkleminden t parametresini yok etsek, aranan eğrinin

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \lambda^2$$

aşağıdaki denklemini buluruz. Bu eğri merkezi $O(c_1, c_2)$ noktasında yarıçapı λ olan çemberler ailesidir. Buradaki c_1, c_2, λ sabitleri

$$y(a) = y_a,\ y(b) = y_b \text{ ve}$$

$$\int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx = \ell$$

şartlarının kullanılmasıyla bulunur. Böylece aranan eğri bir çember kısmı olur.

2.6. Sınır Değer Problemlerinin Varyasyon Metodla Çözümünün Esas Teoremleri

Sınır değer problemlerin varyasyon metodla çözümünün esas teoremlerini vermeden önce homojen sınır şartlı homojen olmayan operatörleri aşağıdaki şeklide gösterelim.

2.6.1. Homojen Sınır Şartlı Homojen Olmayan Operatör Denklemler

Sınırı $\Gamma = \partial G$ olan G bölgesinde sürekli katsayılı adi veya kısmi türevli lineer diferansiyel denklemin verildiğini varsayalım. Bu denklemin G bölgesinin $\Gamma = \partial G$ sınırında lineer homojen sınır şartlarını sağlayan y çözümünün bulunması probleminin verildiğini varsayalım. Bu denklemin sol yanını fonksiyonların bir K kümesinde tanımlanmış, yani $G + \Gamma$ kapalı bölgesinde gerekli mertebeden sürekli türevleri olan ve Γ sınırında ise verilmiş sınır şartlarını sağlayan fonksiyonların bu K kümesinde tanımlanmış lineer diferansiyel L operatörü gibi ele alabiliriz. Böylece, bu yöntemle ele aldığımız lineer diferansiyel denklem için sınır değer probleminin çözümünü aşağıdaki

$$Ly = f(p) \tag{2.47}$$

operatör denkleminin

$$R(y) = 0 \tag{2.48}$$

sınır şartını sağlayan çözümünün bulunması problemine getirilir. Burada p serbest değişkenleri gösterir, $f(p)$ önceden verilmiş belli fonksiyon olup, bu fonksiyonun sürekli fonksiyon olduğunu varsayarız. $y \in K$ aranan fonksiyondur ve Γ sınırında (2.48)sınır şartını sağlar. R ise lineer fonksiyonel veya Γ sınırında verilmiş ve derecesi L diferansiyel operatörünün derecesinden küçük olan lineer diferansiyel operatördür. Dikkate alalım ki, homojen olmayan

$$Ly = f(p) \tag{2.49}$$

operatör denkleminin

$$R(y) = \varphi(p)\,, \ p \in \Gamma \tag{2.50}$$

homojen olmayan sınır şartlı sınır değer problemi

$$y = z + y_1$$

dönüşümü ile homojen sınır şartlı operatör denkleme getirilir. Burada $\varphi(p)$ Γ sınırında tanımlanmış önceden verilmiş belli fonksiyondur. z fonksiyonu yeni aranan fonksiyon ve y_1 fonksiyonu yeterince sürekli diferansiyellenen ve (2.50) sınır şartını sağlayan fonksiyondur:

$$R(y_1) = \varphi(p)\,.$$

O halde aranan z fonksiyonu aşağıdaki

$$Lz = f(p) - Ly_1$$

operatör denkleminin

$$R[z] = 0$$

sınır şartını sağlayan çözümü olur.

2.6.2. (2.47)-(2.48) Sınır Değer Probleminin Çözümünün Tekliği hakkında Teorem

(2.47)-(2.48) sınır değer probleminin çözümü için aşağıdaki teklik teoremi doğrudur.

Teorem 2.6.2.1. K sınıfında tanımlanmış özeşlenik ve pozitif L lineer operatörünün verildiğini varsayalım. Bu şartları sağlayan L operatörü (2.47) operatör denkleminin (2.48) sınır şartlarını sağlayan çözümü K sınıfında varsa, o halde bu çözüm tektir.

İspat: Bu teoremi ispatlamak için aksini farz edelim. (2.47)-(2.48) probleminin iki farklı y_1 ve y_2 çözümlerinin olduğunu varsayalım. Yani y_1 ve y_2 fonksiyonları için

$$Ly_1 = f(p),\ R[y_1] = 0 \tag{2.51}$$

ve

$$Ly_2 = f(p),\ R[y_2] = 0 \tag{2.52}$$

eşitlikleri sağlanır.

O zaman (2.51) eşitliği ile (2.52) eşitliklerini taraf-tarafa çıksak ve L operatörünün ve R fonksiyonelinin lineerliğini kullanarak buluruz:

$$L(y_1 - y_2) = 0,\ R[y_1 - y_2] = 0,\ y_1, y_2 \in K \tag{2.53}$$

Burada (2.53) eşitliklerinden birincisinin her yanını soldan $y_1 - y_2$ farkına skaler olarak çarparsak buluruz:

$$\left(L(y_1 - y_2), y_1 - y_2\right) = 0 \tag{2.54}$$

Şarta göre L operatörü K sınıfında pozitif olduğunda ve $(y_1 - y_2) \in K$ olduğundan (2.54) eşitliğinden

$$y_1 - y_2 \equiv 0$$

olduğu bulunur. Buradan da $y_1 \equiv y_2$ olduğunu buluruz. Teorem ispatlandı.

2.6.3. (2.47)-(2.48) Sınır Değer Probleminin Bir Equivalent Varyasyon Problemine Getirilmesi

Sınır değer problemlerinin varyasyon metodla çözümünde bizim ele aldığımız hale uygun olarak (2.47)-(2.48) sınır değer probleminin çözümünün bulunması problemi K sınıfında tanımlanmış

$$F(y) = (Ly, y) - 2(f, y) \equiv \int_w (Ly - 2f)y dw \tag{2.55}$$

fonksiyonelinin K sınıfında minimumunu veren $y \in K$ fonksiyonunun bulunmasına getirilir. (2.47)-(2.48) probleminin çözümünün bulunması problemi ile K sınıfında (2.55) fonksiyoneline minimum değer veren $y \in K$ fonksiyonunun bulunması problemlerinin equivalent(eşdeğer) oldukları gösterilir.

Teorem 2.6.3.1. L operatörünün K sınıfında tanımlanmış özeşlenik, pozitif lineer operatör olduğunu varsayalım. $F(y)$ fonksiyonelinin (2.55) eşitliği ile tanımlanmış fonksiyonel olduğunu varsayalım. Homojen sınır şartlı (2.47)-(2.48) sınır değer probleminin y_0 çözümü olduğunda, o zaman bu y_0 çözümü $F(y)$ fonksiyoneline minimum değer verir.

Tersine, K sınıfında (2.55) fonksiyoneline minimum değer veren $y_0 \in K$ fonksiyonu bulunduğunda, o zaman bu y_0 fonksiyonu (2.47) denkleminin de çözümü olur.

İspat: i) y_0 fonksiyonunun (2.47)-(2.48) sınır değer probleminin çözümü olduğunu varsayalım. Yani

$$Ly_0 = f(p) \text{ ve } R[y_0] = 0$$

eşitliklerinin sağlandığını varsayalım. (2.55) fonksiyonelinde $f(p)$ fonksiyonunu Ly_0 ifadesiyle değiştirelim. O zaman buluruz:

$$F(y) = (Ly, y) - 2(Ly_0, y) \tag{2.56}$$

Bu yüzden de L operatörünün özeşlenik olduğunu, yani

$$\left(Ly_o, y\right) = \left(y_o, Ly\right) = \left(Ly, y_0\right)$$

eşitliğini kullanarak buluruz ki:

$$\begin{aligned} F(y) &= (Ly, y) - (Ly, y_0) - (Ly_0, y) \\ &= (Ly, y - y_0) - [(Ly_0, y) - (Ly_0, y_0)] - (Ly_0, y_0) \\ &= (Ly, y - y_0) - (Ly_0, y - y_0) - (Ly_0, y_0) \\ &= (L(y - y_0), (y - y_0)) - (Ly_0, y_0) \end{aligned} \tag{2.57}$$

(2.57) formülünün sağ yanındaki yalnız birinci hariç toplamı değişkendir. $\left(y - y_0\right) \in K$ olduğundan ve L operatörünün pozitif olmasından

$$\left(L(y - y_0), (y - y_0)\right) \geq 0$$

Böylece (2.57) formülünden görüyoruz ki, $F(y)$ fonksiyoneli yalnız ve yalnız

$$\left(L(y - y_0), (y - y_0)\right) = 0$$

eşitliğini sağlayan y fonksiyonlarında minimum değerini alır. Buradan da L operatörünün pozitif olması tanımından

$$y - y_0 \equiv 0$$

yani

$$y \equiv y_0$$

halinde alınır. Dikkate alalım ki (2.57) formülünden $F(y)$ fonksiyonelinin en küçük değeri

$$F_{\min}(y) = -\left(Ly_0, y_0\right)$$

olur.

ii. Şimdi (2.55) fonksiyoneline minimum değer veren $y_0 \in K$ fonksiyonunun olduğunu varsayalım. y_0 fonksiyonu $F(y)$ fonksiyoneline minimum değer verdiğinden y_0 fonksiyonuna yeterince yakın olan $y_1 \in K$ fonksiyonları için

$$F(y_1) - F(y_0) \geq 0$$

Burada

$$\eta = (y_1 - y_0) \in K$$

olur. α sayısal parametre olmak üzere

$$y = y_0 + \alpha\eta \tag{2.58}$$

Fonksiyonları ailesini ele alalım. Her bir α parametresi için $y \in K$ olduğu açıktır. $|\alpha|$'nın yeterince küçük değerleri de

$$\Delta F = F(y) - F[y_0] \geq 0$$

eşitliğinin sağlandığı da açıktır. (2.55) formülüne dayanarak aşağıdaki dönüşümleri yapalım.

$$\Delta F = (Ly, y) - 2(f, y) - (Ly_0, y_0)$$

$$= (Ly, y) - 2(Ly_0, y) + 2(Ly_0 - f, y) - 2(Ly_0 - f, y_0) + (Ly_0, y_0)$$

$$= (Ly, y) - 2(Ly_0, y) + 2(Ly_0 - f, y - y_0) + (Ly_0, y_0) \geq 0 \tag{2.59}$$

Burada biz (2.57) dönüşümünü ve (2.58) formülünü kullanarak buluruz ki:

$$\Delta F = (L(y - y_0), (y - y_0)) - (Ly_0, y_0) + 2(Ly_0 - f, y - y_0) + (Ly_0, y_0)$$

$$= \alpha^2 (L\eta, \eta) + 2\alpha(Ly_0 - f, \eta) \geq 0 \tag{2.60}$$

(2.60) eşitsizliğinin sol yanı α parametresine bağlı quadrat (kare) üçterimlidir. Bu üçterimli işaretini değiştirmiyor. Bu quadrat üçterimliye uygun quadrat denklemin reel kökleri olmadığından bu ifadenin diskriminantı pozitif olamaz yani:

$$(Ly_0 - f, \eta)^2 - (L\eta, \eta)0 \leq 0$$

buradan da

$$(Ly_0 - f, \eta)^2 \leq 0$$

buradan ise her bir $\eta \in K$ için

$$\left(Ly_0 - f, \eta\right) = 0$$

eşitliğinin sağlandığını buluruz. Böylece, her bir $\eta \in K$ için

$$\int_w \left(Ly_0 - f\right)\eta dw = 0 \tag{2.61}$$

eşitliğini buluruz. (2.61) eşitliğinde η fonksiyonu K sınıfından keyfi alındığından $Ly_0 - f = 0$ olduğunu, yani $Ly_0 = f$ olur. Böylece y_0 fonksiyonu (2.47)-(2.48) probleminin çözümüdür.

3. LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN LİNEER SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN VARYASYON PROBLEME GETİRİLMESİ

Lineer diferansiyel denklemler için lineer sınır değer problemlerin varyasyon probleme getirilmesini ikinci mertebeli adi türevli diferansiyel denklemler ve Poisson ve Laplace denklemleri için aşağıda ayrı ayrı velirmiştir.

3.1. İkinci Mertebeli Adi Türevli Lineer Diferansiyel Denklemler için Lineer Sınır Değer Problemlerinin Varyasyon Probleme Getirilmesi

Aşağıdaki ikinci mertebeli adi türevli

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = \Phi(x) \tag{3.1}$$

diferansiyel denkleminin

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A \\ \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = B \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

lineer sınır şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemini ele alalım. Burada $P(x)$, $Q(x)$ ve $\Phi(x)$ fonksiyonları önceden verilmiş $[a,b]$ aralığında tanımlanmış sürekli fonksiyonlardır. $\alpha_1, \alpha, \beta_1, \beta, A, B$ sabit sayılardır ve

$$|\alpha_1| + |\alpha| \neq 0, \; |\beta_1| + |\beta| \neq 0$$

şartlarının sağlandığını varsayalım. (3.1)-(3.2) problemini equivalent varyasyon probleme getirmek için önce (3.1) denklemini özeşlenik diferansiyel operatörlü denklem şeklinde yazalım. Bunun için ise (3.1) denkleminin her yanını pozitif

$$p(x) = e^{\int_a^x P(x)dx}$$

fonksiyonuna çarpalım. O zaman (3.1) denklemini aşağıdaki şeklinde yazabiliriz:

$$p(x)y''(x) + p(x)P(x)y'(x) + p(x)Q(x)y = p(x)\Phi(x) \tag{3.3}$$

Burada

$$p'(x) = e^{\int_a^x P(x)dx} P(x) = p(x)P(x)$$

eşitliği kullanarak biz (3.3) denklemini aşağıdaki şekilde yazalım.

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)y'\right]+q(x)y=f(x)\ . \tag{3.4}$$

Bu denklemde

$$p(x)>0\,;\ q(x)=p(x)Q(x)\,;\ f(x)=p(x)\Phi(x)$$

olur. (3.4) şekilli ikinci mertebeli diferansiyel denkleme <u>ikinci mertebeli özeşlenik lineer diferansiyel denklem</u> denir. Aşağıdaki

$$Ly=-\frac{d}{dx}\left[p(x)y'\right]-q(x)y \tag{3.5}$$

eşitliği ile lineer diferansiyel Ly operatörünü tanımlayarak (3.4) diferansiyel denklemini

$$Ly=-f(x) \tag{3.6}$$

operatör denklemine getirmiş oluruz. Bu denklemde, $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları $\left[a,b\right]$ aralığında sürekli fonksiyonlardır. Önce (3.2) sınır şartlarının homojen sınır şartları olduğunu varsayalım. Yani (3.2) sınır şartlarında $A=B=0$ halini ele alalım. O zaman:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 y'(a)+\alpha y(a)=0\\ \beta_1 y'(b)+\beta y(b)=0\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

sınır şartlarının verildiğini ve

$$|\alpha_1|+|\alpha|\neq 0 \text{ ve } |\beta_1|+|\beta|\neq 0$$

şartlarının sağlandığını varsayalım. Burada genelliği bozmadan $\alpha_1\geq 0$ ve $\beta_1\geq 0$ sağlandığını da varsayalım. Bu şartlarda lineer diferansiyel L operatörünün ikinci mertebeye dek (ikinci mertebe de dahil olmak üzere) $\left[a,b\right]$ aralığında sürekli diferansiyellenen (yani $y(x)\in C^{(2)}_{[a,b]}$ olan) ve $\left[a,b\right]$ aralığının sınırında homojen (3.7) sınır şartlarını sağlayan fonksiyonların $K=\{y\}$ sınıfında (L operatörünün) özeşlenik olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için keyfi $u,v\in K$ fonksiyonlarını alalım. Bu fonksiyonlar için (3.5) formülünü kullanarak buluruz

$$(Lu,v)-(Lv,u)=\int_a^b\left\{-v\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)u'\right)+q(x)u\right]+u\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)v'\right)+q(x)v\right]\right\}dx$$

$$=\int_a^b\left[p(x)(uv''+vu'')+p'(x)(uv'-vu')\right]dx$$

$$=\int_a^b\frac{d}{dx}\left[p(x)(uv'-vu')\right]dx$$

$$=p(x)(uv'-vu')\Big|_a^b$$

$$=p(b)w(b)-p(a)w(a) \tag{3.8}$$

burada

$$w(x)=\begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x)\end{vmatrix} \tag{3.9}$$

$u(x),v(x)\in K$ fonksiyonları homojen (3.7) şartlarını sağlar, yani mesela

$$\alpha_1 u'(a)+\alpha u(a)=0$$

$$\alpha_1 v'(a)+\alpha v(a)=0$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitliklerde ya $\alpha_1\neq 0$ ya da $\alpha\neq 0$ olduğundan

$$u'(a)=-\frac{\alpha}{\alpha_1}u(a),\ v'(a)=-\frac{\alpha}{\alpha_1}v(a)$$

ya da

$$u(a)=-\frac{\alpha_1}{\alpha}u'(a),\ v(a)=-\frac{\alpha_1}{\alpha}v'(a)$$

şeklinde de ifade edebiliriz. Bu yüzden de

$$w(a)=0$$

olur. Benzer şekilde

$$w(b)=0$$

olduğu ispatlanır.

Böylece (3.8) formülünden, sonuncu eşitlikleri kullanarak

$$(Lu,v)-(Lv,u)=0$$

yani her bir $u,v \in K$ için

$$(Lu,v)=(Lv,u)$$

eşitliğinin sağlandığını ispatlamış oluruz. Böylece (3.5) formülü ile tanımlanmış L operatörünün $K=\{y\}$ sınıfında özeşlenik operatör olduğunu ispatladık. Şimdi hangi şartlarda bu L operatörünün pozitif operatör olduğunu gösterelim. Keyfi $y \in K$ fonksiyonunu alalım. Bu $y=y(x)$ fonksiyonu için buluruz ki:

$$(Ly,y)=-\int_a^b \left\{\frac{d}{dx}[p(x)y']+q(x)y\right\} y dx \tag{3.10}$$

Bu (3.10) formülünün birinci terimini parça-parça integrasyon formülünü uygulayarak (Ly,y) çarpımı için aşağıdaki ifadeyi buluruz.

$$(Ly,y)=-\,p(x)yy'\Big|_a^b+\int_a^b \left[p(x)y'^2-q(x)y^2\right]dx \tag{3.11}$$

Bu ifadede $p(x)>0$ olduğundan (3.11) ifadesinden görüyoruz ki, L operötörü aşağıdaki şartlar sağlandığında, pozitif operatör olacaklardır:

$$q(x)\le 0, \text{ her bir } x\in[a,b] \tag{3.12}$$

ve

$$y(a)y'(a)\ge 0,\; y(b)y'(b)\le 0 \tag{3.13}$$

Dikkate alalım ki, varsayımımıza göre $\alpha_1 \ge 0$ ve $\beta_1 \ge 0$ şartları sağlandığından (3.7) sınır şartlarından (3.13) şartlarının sağlanması için, bu şartların (3.13) şartlarının

$$\alpha \le 0,\; \beta \ge 0 \tag{3.14}$$

şartlarına equivalent olduğu görülür. Böylece, Teorem 2.6.3.1'i uygulayarak buluruz ki, (3.12) ve (3.14) şartlarının sağlanmasıyla (3.6)-(3.7) sınır değer probleminin çözümünün bulunması problemi K sınıfında

$$F(y)=(Ly,y)+2(f,y) \tag{3.15}$$

fonksiyonelinin minimumunun bulunması problemine equivalent olduğunu buluruz. (3.11) formülünü kullanarak $L(y)$ fonksiyoneli için aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$F(y) = p(a)y(a)y'(a) - p(b)y(b)y'(b) +$$

$$+\int_a^b \left[p(x)y'^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y\right]dx \ . \tag{3.16}$$

Özel halde $\alpha_1 > 0$ ve $\beta_1 > 0$ şartları sağlandığında $F(y)$ fonksiyoneli için bu şartlar sağlandığında aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$F(y) = -\frac{\alpha}{\alpha_1}p(a)y^2(a) - \frac{\beta}{\beta_1}p(b)y^2(b)$$

$$+\int_a^b \left[p(x)y'^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y\right]dx \ . \tag{3.17}$$

Başka özel haller için benzer şekilde $F(y)$ fonksiyoneli için uygun ifadeler bulunur.

Şimdi (3.6) denkleminin homojen olmayan (3.2) sınır şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemini ele alalım. Bu hal için de (3.12) ve (3.14) şartlarının sağlandığını varsayalım. (3.2) şartlarını sağlayan $y(x) \in C^{(2)}_{[a,b]}$ sınıfında L operatörü genelde özeşlenik ve pozitif operatör olmayabilir. Bu yüzden de Teorem 2.6.3.1'i burada L operatörü için direk uygulayamayız. Şimdi $z = z(x) \in C^{(2)}_{[a,b]}$ fonksiyonunun (3.2) şartlarını sağladığını, yani

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 z'(a) + \alpha z(a) = A \\ \beta_1 z'(b) + \beta z(b) = B \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

şartlarının sağlandığını varsayalım. $y = y(x)$ (3.6) denkleminin (3.2) şartlarını sağlayan çözümü olduğunu varsayalım. O zaman

$$u = y - z \tag{3.19}$$

Eşitliği ile tanımlandığımız $u = u(x)$ fonksiyonu aşağıdaki homojen sınır şarları sağlar:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 u'(a) + \alpha u(a) = 0 \\ \beta_1 u'(b) + \beta u(b) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

$u = u(x)$ fonksiyonu

$$Lu = L(y) - L(z)$$

denkleminin çözümü olur, yani

$$Lu = -f(x) - L(z) \qquad (3.21)$$

Böylece, $u \in K$ olur. böylece, Teorem 2.6.3.1'e esasen Lu operatörünün K sınıfında özeşlenik ve pozitif olduğu görülür. Bu yüzden de (3.20)-(3.21) sınır değer probleminin $u = u(x)$ çözümü

$$F(u) = (Lu, u) + 2\big(f(x) + Lz, u\big)$$

fonksiyoneline minimum değer verir. (3.11) formülünü $F(u)$ fonksiyoneline uygulayarak buluruz:

$$F(u) = p(a)u(a)u'(a) - p(b)u(b)u'(b)$$

$$+\int_a^b \left[p(x)u'^2 + q(x)u^2 + 2\big(f(x) + Lz\big)u\right]dx \qquad (3.22)$$

Burada biz (3.19) eşitliğini kullanarak (3.6) denkleminin (3.2) sınır şartlarını sağlayan $y(x)$ çözümünün aşağıdaki fonksiyonele minimum değer verdiğini buluruz:

$$F_1(y) = p(a)[y(a) - z(a)][y'(a) - z'(a)] - p(b)[y(b) - z(b)][y'(b) - z'(b)]$$

$$+\int_a^b \left[p(x)(y' - z')^2 - q(x)(y - z)^2 + 2\big(f(x) + Lz\big)(y - z)\right]dx$$

$$= p(a)[y(a) - z(a)][y'(a) - z'(a)] - p(b)[y(b) - z(b)][y'(b) - z'(b)]$$

$$+\int_a^b \left[p(x)y'^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y\right]dx + \int_a^b \left[p(x)z'^2 - q(x)z^2 + 2f(x)z\right]dx$$

$$+2\int_a^b \left[-p(x)y'z' + q(x)y.z + (y - z)Lz\right]dx \qquad (3.23)$$

burada parça-parça integrasyon formülünü kullanarak buluruz:

$$\int_a^b (y-z)Lzdx = -\int_a^b (y-z)\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)z'\right)+q(x)z\right]dx$$

$$= -(y-z)\,p(x)z'\Big|_a^b + \int_a^b \left[p(x)z'\left(y'-z'\right) - q(x)z(y-z)\right]dx$$

$$= p(a)\left[y(a)-z(a)\right]z'(a) - p(b)\left[y(b)-z(b)\right]z'(b) +$$

$$+\int_a^b \left[p(x)z'\left(y'-z'\right) - q(x)z(y-z)\right]dx$$

Burada $\int_a^b (y-z)Lzdx$ integralı için bulduğumuz bu ifadeyi (3.23) formülünde kullanarak ve küçücük sadeleştirmeler yaparak $F_1(y)$ fonksiyoneli için aşağıdaki fonksiyoneli buluruz:

$$F_1(y) = p(a)\left[y(a)-z(a)\right]\left[y'(a)+z'(a)\right] - p(b)\left[y(b)-z(b)\right]\left[y'(b)+z'(b)\right] +$$

$$+\int_a^b \left[p(x)y'^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y\right]dx \text{ -}$$

$$\text{-}\int_a^b \left[p(x)z'^2 - q(x)z^2 + 2f(x)z\right]dx \tag{3.24}$$

Şimdi $\alpha_1 > 0$ ve $\beta_1 > 0$ olduğunu varsayalım. Bu şartların sağlanmasıyla (3.2) sınır şartlarından buluruz:

$$y'(a) = \frac{A-\alpha y(a)}{\alpha_1}, \qquad z'(a) = \frac{A-\alpha z(a)}{\alpha_1}$$

ve

$$y'(b) = \frac{B-\beta y(b)}{\beta_1}, \qquad z'(b) = \frac{B-\beta z(b)}{\beta_1}$$

Bu ifadeleri (3.24) formülünde kullanarak $F_1(y)$ fonksiyoneli için aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$F_1(y) = \frac{p(a)}{\alpha_1}\left[2Ay(a) - \alpha y^2(a)\right] - \frac{p(b)}{\beta_1}\left[2By(b) - \beta y^2(b)\right] +$$

$$+\int_a^b \left[p(x)y'^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y\right]dx \text{ -}$$

$$-\left\{\frac{p(a)}{\alpha_1}\left[2Az(a) - \alpha z^2(a)\right] - \frac{p(b)}{\beta_1}\left[2Bz(b) - \beta z^2(b)\right] +\right.$$

$$\left. +\int_a^b \left[p(x)z'^2 - q(x)z^2 + 2f(x)z\right]dx\right\} \quad (3.25)$$

(3.25) formülünde $\{.\}$ parantez içerisindeki ifade $y(x)$ fonksiyonunun değişmesinden dolayı değişmediğinden $F_1(y)$ fonksiyonelinin minimum problemi yerine aşağıdaki eşitlikle tanımlanan $\Phi(y)$ fonksiyonelinin minimum problemini ele alabiliriz.

$$\Phi(y) = \frac{p(a)}{\alpha_1}\left[2Ay(a) - \alpha y^2(a)\right] - \frac{p(b)}{\beta_1}\left[2By(b) - \beta y^2(b)\right]$$

$$+\int_a^b \left[p(x)y'^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y\right]dx \quad (3.26)$$

Böylece (3.6)-(3.2) sınır değer problemi (homojen olmayan (3.2) sınır değerli sınır değer problemi) (3.12) ve (3.14) şartlarının sağlanmasıyla K_1 (uygun sınır şartlarını sağlayan fonksiyonlar) (3.26) formülü ile tanımlanan fonksiyonelinin varyasyon problemine equivalent olduğunu buluruz.

Not 3.1.1. $\alpha_1 = 0$ ve $\beta_1 \neq 0$ olduğunda, o zaman

$$y(a) = z(a) = \frac{A}{\alpha}$$

olduğu bulunur. Bu yüzden de bu durum da (3.24) formülünü kullanarak $\Phi(y)$ fonksiyoneli yerine

$$\Phi(y) = \frac{p(b)}{\beta_1}\left[2By(b) - \beta y^2(b)\right] + \int_a^b \left[p(x)y'^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y\right]dx$$

fonksiyonelini alabiliriz.

Not 3.1.2. $\alpha_1 = 0$ ve $\beta_1 = 0$ olduğunda $\Phi(y)$ fonksiyoneli yerine

$$\Phi(y) = \int_a^b \left[p(x)y'^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y \right] dx$$

fonksiyonelini alabiliriz.

3.2. Poisson ve Laplace Denklemleri İçin Sınır Değer Problemlerinin Varyasyon Probleme Getirilmesi

Aşağıdaki

$$-\Delta u = f(x, y) \tag{3.27}$$

Poisson denkleminin verildiğini varsayalım. Bu denklemde

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{ve} \quad f(x) \in C(G)$$

Burada (3.27) denkleminin kapalı $\overline{G} = G + \Gamma$ bölgesinde sürekli olan ve G bölgesinin $\partial G = \Gamma$ sınırında

$$u\big|_{\Gamma} = \varphi(P) \tag{3.28}$$

sınır şartını sağlayan çözümünün bulunmasının istendiğini varsayalım. Burada $P = (x, y)$ ve $\varphi(P)$ fonksiyonunun Γ sınırında sürekli ve verilmiş fonksiyon olduğunu varsayalım. Burada önce $\varphi(P) \equiv 0$ olduğunu varsayalım, yani

$$u\big|_{\Gamma} = 0 \tag{3.29}$$

Böylece, (3.27) Poisson denkleminin homojen (3.29) sınır şartını sağlayan çözümünün bulunması problemini ele alalım. Burada biz kapalı $\overline{G}$ bölgesinde kendisinin ve birinci ve ikinci mertebeli kısmi türevlerinin sürekli olan fonksiyonların Γ sınırında sıfıra dönüşen fonksiyonların $K = \{u(x)\}$ sınıfında

$$Lu = -\Delta u$$

Operatörünün simetrik ve pozitif olduğunu gösterelim. Bunun için K sınıfından keyfi bir $u \in K$ ve $v \in K$ fonksiyonlarını alalım. Aşağıdaki ifadeyi inşaa edelim.

$$(Lu,v)-(Lv,u)=\iint_G\left[-v\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)+u\left(\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}\right)\right]dxdy$$

$$=\iint_G\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

Burada biz

$$\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_\Gamma Pdx+Qdy$$

formülü ve

$$u\big|_\Gamma=0 \text{ ve } v\big|_\Gamma=0$$

şartlarını kullanarak buluruz ki:

$$(Lu,v)-(Lv,u)=\int_\Gamma\left[-\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx+\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy\right]=0 \qquad (3.30)$$

Böylece

$$(Lu,v)=(Lv,u)$$

olduğunu buluruz. Bu eşitlikten de L operatörünün özeşlenik olduğu görülür.

Şimdi $Lu=-\Delta u$ operatörünün $K=\{u(x,y)\}$ sınıfında pozitif operatör olduğunu gösterelim. Böylece, her bir $u\in K$ için buluruz ki:

$$(Lu,u)=-\iint_G u\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)dxdy$$

$$=-\iint_G\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy+\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

Bu eşitliğin sağ yanındaki birinci integrale Green formülünü uygularsak ve $u(x,y)$ fonksiyonunun $u\big|_\Gamma=0$ olması şartını kullanırsak buluruz:

$$(Lu,u) = -\int_\Gamma \left(-u\frac{\partial u}{\partial y}dx + u\frac{\partial u}{\partial x}dy \right) + \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dxdy$$

$$= \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dxdy \tag{3.31}$$

yani her bir $u \in K$ için

$$(Lu,u) = (-\Delta u, u) \geq 0$$

$(Lu,u) = 0$ olduğunda (3.31) formülünden

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

olduğunu, buradan da $u(x,y) = c$ olduğunu buluruz. (3.29) sınır şartını kullanarak

$$u(x,y) = 0$$

olduğu bulunur.

Böylece, $Lu = -\Delta u$ operatörü K sınıfında pozitif operatördür. Bu sonuçlardan biz (3.27) denkleminin (3.29) homojen sınır şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemi için Teorem 2.6.3.1'in şartları sağlanır. Bu yüzden bu sınır değer probleminin çözümünün bulunması problemi K sınıfında

$$F(u) = (Lu,u) - 2(u,f) \tag{3.32}$$

Fonksiyonelinin varyasyon probleminin çözümünün bulunması problemine equivalenttir. (3.31) formülünü kullanarak buluruz:

$$F(u) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2fu \right] dxdy \tag{3.33}$$

Şimdi biz (3.27) denkleminin homojen olmayan (3.28) sınır şartını sağlayan çözümünün bulunması problemini ele alalım. Burada $K_1 = \{u(x,y)\}$ fonksiyonlar sınıfı olarak $C^2(\overline{G})$ sınıfından alınmış (3.28) sınır şartlarını sağlayan

$$K_1 = \{u \in C^{(2)}(\overline{G}) : u|_\Gamma = \varphi(p)\}$$

sınıfını ele alalım.

Aşağıdaki

$$v(x,y) = u(x,y) - z(x,y)$$

eşitliği ile $v(x,y)$ fonksiyonunu dahil edelim. Burada $u(x,y)$ fonksiyonu sınır şartını sağlayan çözümüdür. O zaman $v = v(x,y)$ fonksiyonu $\Gamma = \partial G$ sınırında homojen

$$v\big|_{\Gamma} = 0 \tag{3.34}$$

sınır şartını sağlayan fonksiyon olur. Çünkü biz burada $z = z(x,y) \in C^{(2)}\left(\overline{G}\right)$ fonksiyonunun (3.28) sınır şartını sağladığını varsayarız. O halde $v = v(x,y)$ fonksiyonu (3.34) şartını sağlamakla birlikte

$$Lv = Lu - Lz = f(P) - Lz \tag{3.35}$$

denkleminin çözümü olur. Burada

$$Lz = -\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

belli fonksiyondur. $v = v(x,y)$ fonksiyonu (3.35) denkleminin (3.34) homojen sınır şartını sağlayan çözümü olduğundan bu fonksiyon

$$F(v) = (Lv, v) - 2(v, f(p) - Lz) \tag{3.36}$$

fonksiyoneline minimum değer verir. (3.36) fonksiyonelinde $v = u - z$ olduğunu ve L operatörünün lineer operatör olduğunu dikkate alarak buluruz:

$$\begin{aligned} F[u-z] = F_1(u) &= (L(u-z), u-z) - 2(u-z, f(p) - Lz) \\ &= (Lu,u) - 2(u,f) + (u,Lz) - (z,Lu) + 2(z,f) - (Lz,z) \end{aligned} \tag{3.37}$$

(3.37) formülünün sonuncu iki toplananı (terimi) aranan $u = u(x,y)$ fonksiyonuna bağlı olmadığından (3.37) fonksiyoneline minimum değer veren $\bar{u} = \bar{u}(x,y)$ fonksiyonu aşağıdaki fonksiyoneli minimallaştıracaktır:

$$F_2(u) = (Lu,u) - 2(u,f) + [(Lz,u) - (Lu,z)] \tag{3.38}$$

(3.38) fonksiyonelini de $z(x,y)$ fonksiyonuna bağlı olmayan fonksiyonelle değiştirmek olur. Gerçekten de (3.30) formülünde kullanılmış olan dönüşümü kullanarak buluruz:

$$(Lz,u)-(Lu,z)=\iint_G (z\Delta u - u\Delta z)dx$$

$$=\int_\Gamma \left[-\left(z\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx+\left(z\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial z}{\partial x}\right)dy\right]$$

$$=\int_\Gamma \left(z\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial z}{\partial n}\right)ds$$

Burada $\vec{n}$ vektörü Γ yüzeyinin dış normalidir ve

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dx}{ds},\ \frac{\partial z}{\partial n}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dx}{ds}$$

Burada

$$z\big|_\Gamma = u\big|_\Gamma = \varphi(x)$$

olduğundan buluruz:

$$(Lz,u)-(Lu,z)=\int_\Gamma \varphi(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\frac{\partial z}{\partial n}\right)ds \tag{3.39}$$

Diğer yandan (3.31) formülünü kullanarak buluruz:

$$(Lu,u)=-\int_\Gamma u\frac{\partial u}{\partial n}ds+\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=$$

$$=-\int_\Gamma \varphi(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}ds+\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy \tag{3.40}$$

(3.39) ve (3.40) formüllerini (3.38) formülünde kullanarak buluruz:

$$F_2(u)=\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2fu\right]dxdy-\int_\Gamma \varphi(x,y)\frac{\partial z}{\partial n}ds \tag{3.41}$$

$F_2(u)$ fonksiyonelinin (3.41) formülündeki sonuncu toplananı u fonksiyonuna bağlı olmadığından, (3.1)-(3.2) sınır değer probleminin çözümünün bulunması problemi aşağıdaki fonksiyonel için varyasyon problemine equivalenttir, yani

$$\Phi(u) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2\,fu \right] dxdy \tag{3.42}$$

fonksiyonelinin K_1 fonksiyonlar sınıfında minimumunun bulunması problemine equivalenttir. Özel halde bu (3.42) fonksiyonelinde ve (3.27) denkleminde $f = f(x, y) \equiv 0$ aldığımızda

$$\Delta u = 0 \tag{3.43}$$

Laplace denklemi için

$$u\big|_\Gamma = \varphi(x, y) \tag{3.44}$$

Dirichlet problemini alırız. Bu problemin çözümü u fonksiyonu

$$\Phi(u) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy$$

Dirichlet integralını minimalleştiren fonksiyondur.

4. VARYASYON PROBLEMİN YAKLAŞIK ÇÖZÜM METODLARI

Varyasyon problemin yaklaşık çözüm metodları aşağıda gösterilmiştir.

4.1. Genel Hâl için Ritz Metodu

Ritz metodu varyasyon problemlerin yaklaşık çözümünün bulunması metodudur.

Ritz metodunun açıklamasını

$$F(u) = (Lu, u) - 2(f, u) \tag{4.1}$$

fonksiyonelinde gösterelim. (4.1) fonksiyonelinin bir lineer $K = \{u\}$ fonksiyonlar kümesinde tanımlanmış olduğunu ve L operatörünün pozitif lineer operatör olduğunu ve f fonksiyonunun önceden verilmiş sürekli fonksiyon olduğunu varsayalım. K sınıfının fonksiyonlarının lineer sınır şartlarını

$$R(u) = \varphi(p) \tag{4.2}$$

şartlarının sağlandığını varsayalım. Burada R belli lineer fonksiyonel ve φ verilmiş sabit bir sayı ya da fonksiyon olduğunu varsayalım.

$$R(u_0) = \varphi(p) \tag{4.3}$$

sınır şartını sağlayan fonksiyon olduğunu, $u_1(p), u_2(p), \ldots, u_n(p)$ fonksiyonlarının ise homojen

$$R(u_i) = 0, \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{4.4}$$

Sınır şartlarını sağlayan fonksiyonlar olduklarını varsayalım. Aşağıdaki lineer kombinasyonunu ele alalım:

$$u(p; c_1, c_2, \ldots, c_n) = u_0(p) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(p) \tag{4.5}$$

Bu lineer kombinasyon (4.3) sınır şartını sağlar. Gerçekten de:

$$R(u) = R(u_0) + \sum_{i=1}^{n} c_i 0 = \varphi(p)$$

Bu yüzden de $u(p;c_1,c_2,...,c_n)$ lineer kombinasyonu her bir keyfi alınmış $c_1,c_2,...,c_n$ sabitleri için $u(p;c_1,c_2,...,c_n)\in K$ olur. (4.1)-(4.2) varyasyon probleminin yaklaşık çözümü (4.5) lineer kombinasyonu şeklinde arayalım. Bunun için $u(p;c_1,c_2,...,c_n)$ fonksiyonunu (4.1) fonksiyonelinde u fonksiyonunun yerine yazalım. O zaman

$$F(u)=\Phi(c_1,c_{2,}...,c_n) \tag{4.6}$$

fonksiyonunu buluruz. (4.6) eşitliğinde Φ fonksiyonu $c_1,c_2,...,c_n$ değişkenlerine bağlı belli fonksiyondur. $c_1,c_2,...,c_n$ sabitlerini öyle seçelim ki, $F(u)$ fonksiyoneli minimum değer almasın. Bu $F(u)$ fonksiyonelinin minimum değer alması için $c_1,c_2,...,c_n$ aşağıdaki denklemler sisteminin çözümü olması gerek şarttır:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial\Phi}{\partial c_1}=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial c_2}=0,\\ \quad\cdots\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial c_n}=0.\end{array}\right\}$$

Böylece (4.1)-(4.2) varyasyon problemi yaklaşık olarak n değişkenli $\Phi(c_1,c_{2,}...,c_n)$ fonksiyonunun ekstremumunun bulunması problemine getirilmiş olur. Φ fonksiyonunun değişkenlerinin sayısını artırdıkça (4.5) formülü ile bulunan yaklaşık çözümler dizisi (4.1)-(4.2) varyasyon probleminin çözümüne yaklaşır. Biz diğer kısımlarda (ileride) ayrı-ayrı varyasyon problemlerin yaklaşık olarak çözümünü ele alacağız.

4.2. İkinci Mertebeli Adi Türevli Lineer Diferansiyel Denklemler için Sınır Değer Probleminin Uygun Varyasyon Problemine Ritz Metodunun Uygulanması ile Yaklaşık Çözümü

Lineer diferansiyel

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)y'\right]+q(x)y=f(x) \tag{4.7}$$

denkleminin

$$y(a)=A,\ y(b)=B \tag{4.8}$$

sınır şartlarını sağlayan çözümün bulunması probleminin yaklaşık çözümü uygun varyasyon problemin yaklaşık çözümünün bulunması yöntemiyle çözelim. Burada $p(x), q(x), f(x) \in C_{[a,b]}, p(x) > 0$ her bir $x \in [a,b]$ için şartlarının sağlandığını varsayalım. Not 3.1.2'ye dayanarak (4.7)-(4.8) sınır değer probleminin çözümünün bulunması problemi

$$F(y) = \int_a^b \left[p(x)y'^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y \right] dx \tag{4.9}$$

fonksiyonelinin $y(x) \in C_{[a,b]}^{(2)}$ sınıfında (4.8) şartlarının sağlanması ile varyasyon probleminin çözümün bulunmasına equivalenttir. (4.9) fonksiyonelinin (4.8) şartlarında varyasyon probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için Ritz metodunu uygulayalım. Önce

$$u_0(a) = A, \ u_0(b) = B$$

Şartlarını sağlayan $u_o(x)$ fonksiyonunu seçelim. Sonra ise

$$u_i(a) = u_i(b) = 0, \ i = 1,2,...,n$$

şartlarını sağlayan $u_1(x), u_2(x),..., u_n(x)$ fonksiyonlarını seçelim. Bu şartları sağlayan

$$u_0(x), u_1(x),..., u_n(x)$$

fonksiyonlarını seçtikten sonra ele aldığımız (4.9) fonksiyonelinin ekstremalını

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x) \tag{4.10}$$

toplamı şeklinde arayalım. Burada $c_1, c_2,..., c_n$ keyfi alınmış sabit sayılardır. (4.10) şeklindeki $y(x)$ fonksiyonun verilmiş sınır şartını sağladığı açıktır, yani

$$y(a) = A, \ y(b) = B$$

şartları sağlanır. Şimdi $c_1, c_2,..., c_n$ katsayılarını öyle seçelim ki, (4.10) formülü ile tanımlanan y(x) fonksiyonu (4.9) fonksiyoneline ekstremum değer versin. (4.10) ifadesini (4.9) formülünde yerine yazarak buluruz:

$$F(y)=\int_a^b \left\{ p(x)\left[u_0'(x)+\sum_{i=1}^{n} c_i u_i'(x)\right]^2 - q(x)\left[u_0(x)+\sum_{i=1}^{n} c_i u_i'(x)\right]^2\right.$$

$$\left. +2f(x)\left[u_0(x)+\sum_{i=1}^{n} c_i u_i'(x)\right]\right\}dx \equiv \psi(c_1,c_2,...,c_2)$$

Burada $\psi(c_1,c_2,...,c_2)$ fonksiyonu $c_1,c_2,...,c_n$ değişkenlerinin quadratik (kare) fonksiyonudur. Diferansiyellenen $\psi(c_1,c_2,...,c_2)$ fonksiyonunun bir $(c_1,c_2,...,c_2)$ değerinde ekstremumunun olması için gerek şart $c_1,c_2,...,c_n$ değişkenlerinin aşağıdaki denklemler sistemini sağlamasıdır:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \psi}{\partial c_1}=0, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial c_2}=0, \\ \quad ... \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial c_n}=0. \end{array}\right\} \tag{4.11}$$

(4.11) denklemler sistemi $c_1,c_2,...,c_n$ bilinmeyenlerine nazaran cebirsel denklemler sistemidir. Denklemlerin sayısı arananların sayısına eşittir. (4.11) denklemler sistemini çözüp, problemin çözümünü yaklaşık olarak (4.10) şeklinde buluruz. Probleminin iyi şekilde çözümü $u_0(x),u_1(x),...,u_n(x)$ fonksiyonlarının seçimine çok bağlıdır.

Örnek 4.2.1. $y''+(1+x^2)y+1=0$ denkleminin
$y(-1)=y(1)=0$ şartını sağlayan çözümünü bulunuz.

Çözüm: $u_0(x),u_1(x),...,u_n(x)$ koordinat fonksiyonlarını

$$u_0(x)=0;$$

$$u_1(x)=1-x^2;$$

$$u_2(x)=1-x^4;$$

$$\cdots$$

$$u_n(x)=1-x^{2n}$$

şeklinde seçelim. Sadelik için yalnız üç tane koordinat fonksiyonu alalım ve $y(x)$ fonksiyonunu

$$y(x) = c_1\left(1 - x^2\right) + c_2\left(1 - x^4\right) \tag{4.12}$$

şeklinde arayalım. Verilmiş denklemde

$$p(x) = 1,\ q(x) = 1 + x^2,\ f(x) = -1$$

olur. Bu denkleme uygun diferansiyel operatörün özeşlenik olduğu açıktır. Bu denklem için $F(y)$ fonksiyoneli

$$F(y) = \int_{-1}^{1}\left[y'^2 + \left(1 + x^2\right)y^2 - 2y\right]dx$$

şeklinde yazılır. Bu fonksiyonelde y fonksiyonunu (4.12) formülü ile tanımlanan y fonksiyonu ile değiştirelim. O zaman buluruz:

$$F(y) = \int_{-1}^{1}\left\{ \left(2c_1x + 4c_2x^3\right)^2 - \left(1 + x^2\right)\left[c_1\left(1 - x^2\right) + c_2\left(1 - x^4\right)\right]^2 \right.$$

$$\left. - 2\left[c_1\left(1 - x^2\right) + c_2\left(1 - x^4\right)\right] \right\}dx$$

$\dfrac{\partial F}{\partial c_1}$ ve $\dfrac{\partial F}{\partial c_2}$ türevlerini $F(y)$ integralını diferansiyelleyerek buluruz ve aşağıdaki ifadeleri buluruz:

$$\frac{\partial F}{\partial c_1} = \int_{-1}^{1}\left\{ 4x\left(2c_1x + 4c_2x^3\right) - \left(1 + x^2\right).2.\left(1 - x^2\right)\left[c_1\left(1 - x^2\right) + c_2\left(1 - x^4\right)\right] - 2\left(1 - x^2\right) \right\}dx$$

$$= 8\left(\frac{38}{105}c_1 + \frac{4}{9}c_2 - \frac{1}{3}\right);$$

$$\frac{\partial F}{\partial c_2} = \int_{-1}^{1}\left\{ 8x^3\left(2c_1x + 4c_2x^3\right) - 2\left(1 + x^2\right)\left(1 - x^4\right)\left[c_1\left(1 - x^2\right) + c_2\left(1 - x^4\right)\right] - 2\left(1 - x^4\right) \right\}dx$$

$$= 8\left(\frac{4}{9}c_1 + \frac{2488}{3645}c_2 - \frac{2}{5}\right).$$

Bu türevleri sıfıra eşitleyerek c_1, c_2 parametrelerine nazaran aşağıdaki lineer cebirsel denklemler sistemini buluruz:

$$\left.\begin{aligned} \frac{38}{105}c_1 + \frac{4}{9}c_2 &= \frac{1}{3} \\ \frac{4}{9}c_1 + \frac{2488}{3649}c_2 &= \frac{2}{5} \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemi çözerek buluruz ki:

$$c_1 = 0{,}988,\ c_2 = -0{,}054$$

c_1 ve c_2 için bulduğumuz bu değerleri (4.12)'da yerine yazarak aranan çözümü yaklaşık olarak

$$y(x) = 0{,}934 - 0{,}0988x^2 + 0{,}054x^4 \tag{4.13}$$

yaklaşık çözümünü buluruz.

4.3. Schturm–Liouville Sınır Değer Probleminin Ritz Metodunun Uygulanmasıyla Yaklaşık Çözümü

Homojen ve eşlenik

$$[p(x)y']' + [q(x) + \lambda\rho(x)]y = 0 \tag{4.14}$$

diferansiyel denkleminin

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

homojen sınır şartlarını sağlayan homojen sınır değer problemini ele alalım. Burada $p(x) > 0$, $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$; $p(x), q(x), \rho(x)$ fonksiyonlar, λ ise parametredir.

$y(x) \equiv 0$ fonksiyonu (4.14) diferansiyel denkleminin (4.15) sınır şartlarını sağlayan çözümdür. Ama (4.14)-(4.15) sınır değer probleminin trivial olmayan (aynen $y(x) \equiv 0$ olmayan) çözümünün bulunması hem pratik hem de teorik açıdan çok önemlidir. (4.14) homojen denkleminin homojen (4.15) sınır şartlarını sağlayan trivial olmayan çözümünün bulunması problemine <u>Schturm-Liouville problemi</u> denir. λ parametresinin bu değerlerine, (4.14)-(4.15) probleminin <u>karakteristik değerleri</u> veya Schturm-Liouville probleminin <u>karakteristik sayıları</u> denir. Bu karakteristik değere uygun (4.14)-(4.15) probleminin trivial olmayan çözümlerine karakteristik fonksiyonlar veya karakteristik çözümler denir.

Şimdi biz burada sadelik için (4.14) denkleminin

$$y(a) = 0,\ y(b) = 0 \tag{4.16}$$

sınır şartlarını sağlayan sınır değer problemini ele alalım. Burada Ritz metodunun uygulanması ile bu (4.14) denkleminin (4.16) şartlarındaki Schturm-Liouville probleminin yaklaşık çözümünün bulunabilindiğini gösterelim. Bunun için bu bölümde (4.14) denklemine uygun olan aşağıdaki fonksiyoneli ele alalım:

$$F(y) = \int_a^b \left\{ p(x)y'^2 - [q(x) + \lambda\rho(x)]y^2 \right\} dx \tag{4.17}$$

Bu (4.17) fonksiyoneline ekstremum değer veren ve

$$y(a,\lambda) = 0,\ y(b,\lambda) = 0$$

sınır şartlarını sağlayan $y = y(x,\lambda)$ fonksiyonunun bulunması problemini ele alalım. Bu fonksiyonelde olan λ parametresinin o değerleri ki, ele aldığımız bu varyasyon probleminin trivial olmayan çözümleri bulunur. Bu çözümler ele aldığımız Schturm-Liouville probleminin uygun olarak karakteristik sayıları ve karakteristik çözümleri olur. Ele aldığımız bu varyasyon problemin aradığımız $y = y(x,\lambda)$ çözümünü koordinat fonksiyonlarının lineer kombinasyonu şeklinde arayalım:

$$y = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + ... + c_2u_2(x) \tag{4.18}$$

Burada $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$ koordinat fonksiyonlarının

$$u_i(a) = u_i(b) = 0,\ i = 1,2,...,n$$

şartlarını sağladıklarını varsayarız. Burada (4.16) şartları homojen olduklarından $u_o(x) = 0$ aldık. (4.18) ifadesini (4.17) fonksiyonelinde aranan $y = y(x,\lambda)$ fonksiyonunun yerine yazarak ve bazı işlemleri yaparak aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$F(y) = \psi(c_1, c_2, ...c_n)$$

Burada ψ fonksiyonu $c_1, c_2,...c_n$ değişkenlerinin guadratik formu (ikinci dereceli lineer homojen fonksiyon) olur. $c_1, c_2,...c_n$ katsayılarını ψ fonksiyonunun ekstremum şartlarından (ekstremum için gerek şartlardan) buluruz. Bu ψ fonksiyonunun ekstremumu için gerek şartlar lineer homojen cebirsel denklemler sistemi verir:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Psi}{\partial c_1} = 0, \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial c_2} = 0, \\ \quad \cdots \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial cn} = 0. \end{array}\right\} \tag{4.19}$$

Homojen (4.19) sisteminin trivial olmayan $c_1, c_2,...c_n$ çözümlerinin olması için gerek ve yeter şart (4.19) sisteminin $\Delta(\lambda)$ determinantının sıfıra eşit olmasıdır. Böylece, karakteristik değerleri bulmak için n-dereceli cebirsel

$$\Delta(\lambda) = 0 \tag{4.20}$$

denklemini buluruz. (4.20) denklemine Schturm-Liouville probleminin <u>karakteristik denklemi</u> denir. (4.20) karakteristik denklemini çözerek biz n tane $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n$ karakteristik değerlerini buluruz. $c_1, c_2,...c_n$ katsayılarını bulmak için her bir karakteristik λ_i değerini (4.19) sisteminde λ parametresinin yerine yazıp bu sistemin uygun trivial olmayan çözümünü buluruz. Karakteristik

$$y = y(x, \lambda_j), \; j = 1,2,..., n$$

fonksiyonları (4.18) formülünde $c_1, c_2,...c_n$ katsayılarının yerine (4.19) sisteminin $\lambda = \lambda_j$ halindeki uygun çözümlerini yazarak bulunur. Dikkate alalım ki, Ritz metodu ile sonlu sayıda yaklaşık olarak karakteristik değerler ve karakteristik fonksiyonlar bulunur. Ama karakteristik değerler ve karakteristik fonksiyonlar sonsuz sayıda olabilir. n sayısını yeterince büyük almakla hem bulunan karakteristik değerlerin ve karakteristik fonksiyonların sayısı artar, hem de hatayı küçültmüş oluruz.

Örnek 4.3.1. $$y'' + \lambda y = 0 \tag{4.21}$$

$$y(0) = 0, y(1) = 0 \tag{4.22}$$

Schturm-Liouville probleminin Ritz metodunun uygulanması ile birinci iki karakteristik değerini ve uygun iki karakteristik fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: Verilmiş (4.21) denklemi (4.17) fonksiyoneli

$$F(y) = \int_0^1 \left(y'^2 - \lambda y^2\right)dx \tag{4.23}$$

şeklinde yazılır. (4.22) sınır şartlarını sağlayan koordinat fonksiyonlarını

$$u_1(x) = x(1-x)\,;\; u_2(x) = x^2(1-x)$$

şeklinde seçelim. $y = y(x,\lambda)$ ekstremalını

$$y = c_1\left(x - x^2\right) + c_2\left(x^2 - x^3\right) \tag{4.24}$$

şeklinde arayalım. Burada c_1, c_2 sabit sayılardır ve her ikisi de aynı zamanda sıfıra eşit olamaz ($c_1^2 + c_2^2 > 0$ şartı sağlanmalı). (4.24) ifadesini (4.23) fonksiyonelinde yerine yazarak buluruz:

$$F(y) = \int_0^1 \left\{ \left[c_1(1-2x) + c_2\left(2x - 3x^2\right)\right]^2 - \lambda\left[c_1\left(x - x^2\right) + c_2\left(x^2 - x^3\right)\right]^2 \right\} dx$$

$F(y)$ fonksiyoneli için bulduğumuz bu ifadeyi c_1 ve c_2 parametrelerine nazaran diferansiyelleyerek buluruz ki:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial c_1} &= \int_0^1 \Big\{ (1-2x)\left[c_1(1-2x) + c_2\left(2x - 3x^2\right)\right] \\ &\quad - \lambda\left(x - x^2\right)\left[c_1\left(x - x^2\right) + c_2\left(x^2 - x^3\right)\right] \Big\}dx \\ &= \left(\frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{6}c_2\right) - \lambda\left(\frac{1}{30}c_1 + \frac{1}{60}c_2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial c_2} &= \int_0^1 \Big\{ \left(2x - 3x^2\right)\left[c_1(1-2x) + c_2\left(2x - 3x^2\right)\right] \\ &\quad - \lambda\left(x^2 - x^3\right)\left[c_1\left(x - x^2\right) + c_2\left(x^2 - x^3\right)\right] \Big\}dx \\ &= \left(\frac{1}{6}c_1 + \frac{2}{15}c_2\right) - \lambda\left(\frac{1}{60}c_1 + \frac{1}{105}c_2\right)\end{aligned}$$

Burada $\frac{\partial F}{\partial c_1}$ ve $\frac{\partial F}{\partial c_2}$ türevlerini sıfıra eşitleyerek aşağıdaki sistemi buluruz:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}c_2+\frac{1}{6}c_2\right)\left(1-\frac{\lambda}{10}\right)=0 \\ \frac{1}{6}c_1\left(1-\frac{\lambda}{10}\right)+\frac{2}{15}c_2\left(1-\frac{\lambda}{14}\right)=0 \end{aligned}\right\}$$

veya

$$\left.\begin{aligned} (2c_1+c_2)\left(1-\frac{\lambda}{10}\right)=0 \\ 5c_1\left(1-\frac{\lambda}{10}\right)+4c_2\left(1-\frac{\lambda}{14}\right)=0 \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

(4.25) sisteminin trivial olmayan c_1, c_2 çözümünün olması gerek ve yeter şart bu sistemin determinantının sıfıra eşit olmasıdır. (4.25) sisteminin determinantını sıfıra eşitleyerek aşağıdaki karakteristik denklemi buluruz:

$$\begin{vmatrix} 2\left(1-\frac{\lambda}{10}\right) & \left(1-\frac{\lambda}{10}\right) \\ 5\left(1-\frac{\lambda}{10}\right) & 4\left(1-\frac{\lambda}{14}\right) \end{vmatrix}=0$$

Bu determinantı açarak ve sadeleştirmeler yaparak buluruz:

$$\left(1-\frac{\lambda}{10}\right)\left(3-\frac{\lambda}{10}\right)=0 \tag{4.26}$$

Bu denklemden yaklaşık olarak aşağıdaki karakteristik değerleri buluruz:

$$\lambda_1=10,\ \lambda_2=42 \tag{4.27}$$

c_1, c_2 katsayılarını (4.25) sisteminden buluruz. $\lambda=\lambda_1=10$ aldığımızda (4.25) sisteminin

$$c_1=c,\ c_2=0$$

çözümünü buluruz. Burada c keyfi sabit sayıdır. Böylece $\lambda=\lambda_1=10$ karakteristik değerine uygun karakteristik fonksiyon

$$y_1 \approx c\left(x - x^2\right) \ (c \neq 0)$$

(4.25) sisteminde $\lambda = \lambda_2 = 42$ alarak c_1 ve c_2 katsayılarının bulunması için aşağıdaki sistemi buluruz:

$$\left.\begin{aligned} 2c_1 + c_2 &= 0 \\ 16c_2 - 8c_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemi çözerek buluruz:

$$c_1 = c,\ c_2 = -2c$$

Burada c keyfi sabit $c \neq 0$ şartın sağlayan sabit sayıdır. Böylece (4.24) formülünde bu değerleri dikkate alarak $\lambda = \lambda_2 = 42$ karakteristik değerine uygun karakteristik fonksiyonu

$$y_2 \approx c\left(x - 3x^2 + 2x^3\right) \ (c \neq 0)$$

şeklinde buluruz. Ele aldığımız (4.21)-(4.22) Schturm-Liouville problemini dakik çözümü bize beli olup bu problemin karakteristik değerleri

$$\lambda_n = n^2\pi^2,\ n = 1,2,3,...$$

uygun karakteristik fonksiyonları ise

$$y_n = c\sin(n\pi\ x),\ n = 1,2,3,...$$

fonksiyonlarıdır. Burada $c \neq 0$ olan sabit sayıdır. Buradan özel olarak buluruz:

$$\lambda_1 = \pi^2 = 9{,}87 \text{ ve } \lambda_2 = 4\pi^2 = 39{,}48$$

4.4. Laplace Denklemi için Dirichlet Probleminin Ritz Metodunun Uygulanmasıyla Yaklaşık Çözümü

Burada

$$\Delta u = 0 \ \left(x, y\right) \in G \tag{4.28}$$

Laplace denkleminin

$$u\big|_{\Gamma} = f(x, y) \tag{4.29}$$

Sınır şartını sağlayan çözümünün bulunmasının Dirichlet probleminin yaklaşık olarak çözümünün Ritz metodunun uygulanması ile bulunması yöntemini gösterelim.

Burada G sonlu bölge Γ ise bu bölgenin sınırıdır ve $f(x,y)$ fonksiyonu Γ sınırında tanımlanmış sürekli fonksiyondur.

$$F(y)=\iint_G \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy \tag{4.30}$$

fonksiyonelinin $\overline{G}=G+F$ kapalı bölgesinde ikinci mertebeye dek (ikinci mertebede dahil olmakla) sürekli diferansiyellenen $C^{(2)}(\overline{G})$ sınıfında (4.29) sınır şartlarını sağlayan $K=\{u\}$ fonksiyonlar kümesinde varyasyon problemine equivalent olduğunu (eşdeğer olduğunu) gösterdik. Şimdi lineer bağımsız koordinat fonksiyonlarını inşaa edelim. Burada

$$u_0(x,y),u_1(x,y),...,u_n(x,y)\in C^{(2)}(\overline{G})$$

koordinat fonksiyonları

$$u_0(x,y)\big|_\Gamma = f(x,y)$$

$$u_i(x,y)\big|_\Gamma = 0\,,\ i=1,2,...,n$$

şartlarını sağlayan fonksiyonlardır. O zaman

$$\varphi(x,y)=u_0(x,y)+\sum_{i=1}^{n}c_i u_i(x,y) \tag{4.31}$$

lineer kombinasyon keyfi alınmış $c_1,c_2,...c_n$ sabitlerinde $K=\{u\}$ fonksiyonlar sınıfında dahil olur. (4.31) eşitliğini $c_0=1$ alarak kısaca

$$\varphi(x,y)=\sum_{i=0}^{n}c_i u_i(x,y) \tag{4.32}$$

şeklinde de yazabiliriz. Şimdi (4.32) ifadesini (4.30) fonksiyonelinde $u(x,y)$ fonksiyonunun yerine yazarak buluruz:

$$F(\varphi)=\iint_G \left[\left(\sum_{i=0}^{n}c_i\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2+\left(\sum_{i=0}^{n}c_i\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2\right]dxdy \tag{4.33}$$

Şimdi $c_1, c_2, ...c_n$ katsayılarını öyle seçelim ki, $F(\varphi)$ fonksiyoneli, seçilmiş $c_1, c_2, ...c_n$ değerlerinde, minimum değer alsın. Bunun için aşağıdaki şartların sağlanması gerek şarttır.

$$\frac{\partial}{\partial c_j} F(\varphi) = 2\iint_G \left[\left(\sum_{i=0}^{n} c_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x} + \left(\sum_{i=0}^{n} c_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) \frac{\partial u_j}{\partial y} \right] dxdy = 0 , \quad j = 1,2,...,n \quad (4.34)$$

veya

$$\left.\begin{array}{l} [u_0, u_1] + c_1[u_1, u_1] + ... + c_n[u_n, u_1] = 0 \\ [u_0, u_2] + c_1[u_1, u_2] + ... + c_n[u_n, u_2] = 0 \\ \quad ... \\ [u_0, u_n] + c_1[u_1, u_n] + ... + c_n[u_n, u_n] = 0 \end{array}\right\} \quad (4.35)$$

burada

$$[u_i, u_j] = \iint_G \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{\partial u_j}{\partial y} \right) dxdy$$

ve

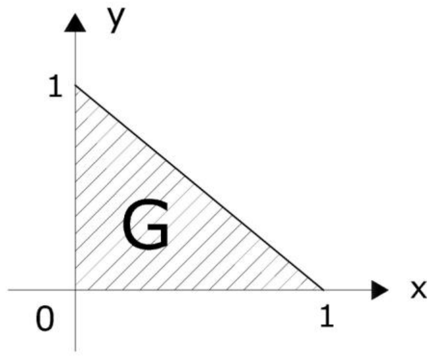
$$[u_i, u_j] = [u_j, u_i] \quad (4.36)$$

Eşitliği her bir $i, j = 1,2,...,n$ için sağlanır. Lineer cebirsel (4.35) sisteminden $c_1, c_2, ...c_n$ katsayıları bulunur. Bu $c_1, c_2, ...c_n$ çözümünü (4.31) eşitliğinde yerlerine yazarak bulduğumuz $\varphi(x, y)$ fonksiyonu (4.28)-(4.29) Dirichlet probleminin yaklaşık çözümü olur. Bu metodun hatasının küçüklüğü $u_k(x, y)$ koordinat fonksiyonlarının seçimi ve n sayısına bağlıdır.

Örnek 4.4.1. $G: x > 0, y > 0$, $x + y < 1$ bölgesinde (Bkz: Şekil 1.4.) Laplace denklemini sağlayan $\partial G = \Gamma$ sınırında, yani $\Gamma: x = 0, y = 0; x + y = 1$ sınırında

$$u|_{\Gamma} = x^2 + y^2 \quad (4.37)$$

şartını sağlayan $u(x, y) \in C^{(2)}(\overline{G})$ çözümünü bulun.



Şekil 4.1 x=0, y=0 x+y=1 denklemlerinin sınırladığı alan

Çözüm: Burada koordinat fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde seçelim:

$$u_0(x,y) = x^2 + y^2,$$

$$u_1(x,y) = xy(1-x-y),$$

$$u_2(x,y) = x^2 y(1-x-y),$$

$$u_3(x,y) = xy^2(1-x-y),$$

$$\dots$$

verilmiş problemin yaklaşık çözümünü aşağıdaki lineer kombinasyon şeklinde arayalım:

$$\varphi(x,y) = x^2 + y^2 + c_1 xy(1-x-y) + c_2 x^2 y(1-x-y) + c_3 xy^2(1-x-y) \qquad (4.38)$$

$\varphi(x,y)$ fonksiyonu keyfi alınmış c_1, c_2, c_3 sabitlerinde (4.37) sınır şartlarını sağlar. (4.35) cebirsel denklemler sistemini yazmamız gerekir. Bu cebirsel sistemi yazıp aldığımız sistemi çözerek c_1, c_2, c_3 katsayılarını bulmamız gerekir. (4.35) sistemini yazmak için $\lfloor u_i, u_j \rfloor$, $i, j = 1,2,3$ katsayılarını hesaplamamız gerekir. Bu katsayıların değerleri Tablo 1.1.'de verilmiştir.

Tablo 4.1 Aranan katsayıların değerleri

J	$[u_0, u_j]$	$[u_1, u_j]$	$[u_2, u_j]$	$[u_3, u_j]$
1	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{90}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{252}$
2	$-\frac{1}{90}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{3}{1120}$	$\frac{1}{70}$
3	$-\frac{1}{90}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{3}{1120}$

Bu tabloyu kullanarak c_1, c_2, c_3 katsayılarının bulunması için aşağıdaki lineer sistemi buluruz:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{90}c_1 + \frac{1}{252}c_2 + \frac{1}{252}c_3 &= \frac{1}{30} \\ \frac{1}{252}c_1 + \frac{3}{1120}c_2 + \frac{1}{70}c_3 &= \frac{1}{90} \\ \frac{1}{252}c_1 + \frac{1}{70}c_2 + \frac{3}{1120}c_3 &= \frac{1}{90} \end{aligned}\right\} \tag{4.39}$$

(4.39) sistemini çözerek

$c_1 = \frac{3031}{997} \approx 3{,}0401$; $c_2 = c_3 = -\frac{56}{997} = -0{,}0562$ değerleri buluruz. c_1, c_2, c_3 için bulduğumuz bu değerleri (4.38) formülünde yerine yazarak ele aldığımız problemin yaklaşık çözümünü aşağıdaki şekilde buluruz:

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + xy(1 - x - y)[3{,}0401 - 0{,}0562(x + y)]$$

5. HİLBERT UZAYINDA OPERATÖR DENKLEMLERİN VARYASYON METODLARININ UYGULANMASI İLE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde Hilbert uzayında verilmiş operatör denklemlerin varyasyon metodların uygulanmasıyla çözümünün mümkünlüğü gösterilecektir.

5.1. Önsöz

Matematiksel fiziğin problemleri, esneklik teorisi ve hidrodinamiğin problemleri vs. diferansiyel denklemlerin sınır değer ve başlangıç değer problemlerinin çözümüne getirilir. Böylece birçok hallerde pratik problemlerin çözümü Hilbert uzayında yazılmış

$$Au = f \tag{5.1}$$

şekilli operatör denklemlerin çözümlenmesine getirilir. Bu denklemde A lineer operatör olup, tanım bölgesi $D(A)$ lineer manifold olmakla H Hilbert uzayında her yerde yoğun, yani

$$\overline{D(A)} = H$$

Şartını sağlayan operatördür. Denklemin sağ yanındaki f elemanı H Hilbert uzayından alınmış verilmiş belli elemandır. u ise $D(A)$ tanım bölgesinde olmakla aranan elemandır.

Matematik fizikte ele alınan pratik problemlerde uygun A operatörü adeta belli sınır şartlarını sağlayan fonksiyonlar kümesinde tanımlanmış lineer diferansiyel operatör olur. Önce biz (5.1) denkleminde A operatörü pozitif belirli olduğu hâli ele alacağız. Sonra H kompleks Hilbert uzayı olduğu halde ve A operatörü simetrik, pozitif, pozitif belirli olduğu halleri ele alacağız. Burada önce H Hilbert uzayının reel Hilbert uzayı olduğunu varsayacağız. Sonra H kompleks Hilbert uzayı olduğu halde ve A operatörü simetrik, pozitif, pozitif belirli olduğu halleri ele alacağız. Bu hallerde (5.1) denkleminin çözümünün varyasyon metodla bulunması yöntemini göstereceğiz.

Daha sonra A operatörü simetrik olmadığı hali ele alıp, varyasyon metodunun böyle hallerde (5.1) denkleminin çözümünün bulunmasına nasıl uygulandığını göstereceğiz. Böylece, önce H Hilbert uzayının reel Hilbert uzayı olduğu ve A operatörü pozitif belirli operatör olduğunu varsayalım ve bazı koşulların sağlanmasıyla (5.1) denkleminin çözümünün bulunması probleminin belli bir fonksiyonelin minimumunun bulunması problemine getirilmesini gösterelim.

5.2. Reel Hilbert Uzayında Verilmiş Operatör Denklemin Eşdeğer Varyasyon Problemin Çözümüne Getirilmesi

Burada biz (5.1) operatör denkleminin çözümünün bulunması probleminin aşağıdaki

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f)) \qquad (5.2)$$

fonksiyonelin minimumunun bulunması problemine getirildiği ve (5.2) fonksiyonelinin minimumunun bulunması probleminde (5.1) operatör denkleminin çözümünün bulunması problemine getirildiğinin mümkün olduğunu göstereceğiz.

Bunun için biz burada (5.1) denkleminde olan A operatörünün burada kendi kendisine eşlenik (öz eşlenik) olduğunu varsayalım. Bu o demektir ki, keyfi alınmış $u, v \in H$ için,

$$(Au, v) = (u, Av)$$

eşitliği sağlanır. Dikkate alalım ki, burada ve (5.2) fonksiyonelindeki (ξ, ξ) işareti H Hilbert uzayındaki skaler çarpımın işaretidir.

Öz eşlenik A operatörü için

$$m_A = \inf_{\|u\|=1} (Au, u) = m > 0$$

Şartı sağlandığında A operatörüne <u>pozitif belirli operatör</u> denir. Pozitif belirli A opertörü için her bir $u \in H$ için,

$$(Au, u) \geq m_A \|u\|^2 \ . \qquad (5.3)$$

Eşitsizliği sağlandığından ve $m_A > 0$ olduğundan

$$(Au, u) = 0$$

yani $Au \perp u$ yalnız $u = 0$ olduğunda mümkün olur. Bundan ilave (5.3) eşitsizliğinden ve

$$|(Au, u)| \leq \|Au\|\|u\|$$

Cauchy eşitsizliğinden

$$m_A\|u\|^2 \leq \|Au\|\|u\|$$

eşitsizliği bulunur. Bu sonuncu eşitsizlikten ise keyfi $u \in H$ için,

$$m_A\|u\| \leq \|Au\|$$

eşitsizliğini buluruz. Bu sonuncu eşitsizlikten lineer operatörlerin tersinin varlığı hakkındaki teoreme esasen ele aldığımız bu A operatörünün A^{-1} ters operatörü vardır ve bu ters operatörün normu,

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m_A}$$

eşitsizliği sağlanır. Buna göre de bu halde (5.1) denkleminin her bir $f \in H$ elemanı için tek bir $u_0 \in H$ çözümü vardır.

$$u_0 = A^{-1} f \ .$$

Böylece, (5.2) fonksiyonelinde $f \in H$ elemanı değişmez sağlandığında ve A operatör olduğunda aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 5.2.1. A operatörünü pozitif belirli öz eşlenik operatör olduğunda verilmiş $f \in H$ elemanı için $u_0 \in H$ elemanının (5.1) denkleminin çözümü olması için gerek ve yeter şart (5.2) eşitliği ile tanımlanan $F(u)$ fonksiyonelinin $u = u_0$ noktasında en küçük değer almasıdır.

İspat: $\Rightarrow$ Keyfi $u_0, v \in H$ elemanları ve keyfi reel α sayısı için yazalım:

$$F(u_0 + \alpha v) = \big(A(u_0 + \alpha v), u_0 + \alpha v\big) - 2(u_0 + \alpha v, f)$$

$$= (Au_0, u_0) + \alpha(Av, u_0) + \alpha(Au_0, v) + \alpha^2(Av, v) - 2(u_0, f) - 2\alpha(f, v)$$

Burada

$$(Av, u_0) = (v, Au_0) = (Au_0, v)$$

eşitliğini dikkate alarak buluruz:

$$F(u_0 + \alpha v) = F(u_0) + 2\alpha(Au_0 - f, v) + \alpha^2 (Av, v) \tag{5.4}$$

Şimdi u_0 elemanı (5.1) denkleminin çözümü olduğunda (5.4) eşitliğinden $\alpha = 1$ alınmasıyla buluruz:

$$F(u_0 + v) = F(u_0) + (Av, v) \geq F(u_0)\,. \tag{5.5}$$

Ama H Hilbert uzayında her bir $u \in H$ elemanı $u = u_0 + v$ şeklinde gösterilebildiğinden keyfi $u \in H$ için

$$F(u) \geq F(u_0)$$

eşitsizliğini buluruz. Bu ise u_0 noktasının $F(u)$ fonksiyonelinin H Hilbert uzayında minimum noktası olmasının tanımıdır.

Şimdi bu teoremin ikinci kısmını ispatlayalım.

$\Leftarrow$ u_0 noktasının $F(u)$ fonksiyonelinin H uzayında minimum noktası olduğunu varsayalım.

O zaman keyfi $v \in H$ ve keyfi α sayısı için

$$F(u_0 + \alpha v) \geq F(u_0)$$

Bu ise; bu eşitsizlikte keyfi alınmış ama sabit (değişmez) sağlanan $v \in H$ için $F(u_0 + \alpha v)$ fonksiyoneli α değişkeninin fonksiyonu olur ve bu fonksiyon $\alpha = 0$ noktasında minimum değer alır. O zaman

$$F(u_0 + \alpha v) = \varphi(\alpha)$$

fonksiyonunun α parametresine göre türevi $\alpha = 0$ noktasında sıfıra eşit olur:

$$\varphi'(\alpha)\big|_{\alpha=0} = 0\,,\ \varphi'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} F(u_0 + \alpha v)$$

türevini (5.4) eşitliğine göre hesaplayarak buluruz:

$$\frac{d}{d\alpha}F(u_0+\alpha v)\bigg|_{\alpha=0}=2(Au_0-f,v)=0$$

Yani $Au_0-f\perp v$. Burada v keyfi alındığından

$$Au_0-f=0$$

olduğu alınır. Bu ise u_0 elemanının (5.1) denkleminin çözümü olduğunu gösterir.

Böylece, ispatladık ki, (5.2) fonksiyoneline minimum değer veren tek u_0 elemanı (5.1) denkleminin çözümüdür. Dikkate alalım ki, $u_n\in H$ elemanlar dizisi için

$$\lim_{n\to\infty}F(u_n)=\min_{u\in H}F(u)$$

eşitliği sağlandığında $\{u_n\}$ dizisine $F(u)$ fonksiyonelinin minimallaştırıcı dizisi denir.

Teorem 5.2.2. A pozitif belirli öz eşlenik operatör olduğunda (5.2) fonksiyonelinin her bir minimallaştırıcı dizisi $\{u_n\}$ uygun olarak (5.1) denkleminin u_0 çözümüne yakınsar.

İspat: u_0 elemanının (5.1) denkleminin çözümü olduğunu varsayalım. O zaman (5.5) eşitsizliğinde

$$v=u_n-u_0$$

alalım. O zaman

$$F(u_n)=F(u_0)+\left(A(u_n-u_0),u_n-u_0\right)\geq F(u_0)$$

Ama $F(u_0)=\min_{u\in H}F(u)$ olduğundan ve $\{u_n\}$ minimallaştırıcı dizi olduğundan

$$F(u_n)\to F(u_0)$$

olur. Bu yüzdende üstteki sonuncu eşitsizlikten

$$\left(A(u_n-u_0),u_n-u_0\right)\to 0$$

A operatörü pozitif belirli olduğundan

$$\|u_n-u_0\|^2\leq\frac{1}{m_A}\left(A(u_n-u_0),u_n-u_0\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin $n \to \infty$ şartında sağ yanı sıfıra yakınsadığından sol yanı da sıfıra yakınsar.

$$\|u_n - u_0\| \to 0 .$$

Bu ise u_n dizisinin Hilbert uzayında u_0 elemanına yakınsamasının tanımıdır. Böylece $u_n \to u_0$.

5.2.1. Reel Hilbert Uzayında Verilmiş Operatör Denklemlerin Ritz Metodu

Bu kısımda (5.2) fonksiyonelinin minimumunun yaklaşık çözümünü bulmak için Ritz metodunu uygulayalım. Bunun için H Hilbert uzayından lineer bağımsız ve tam olan keyfi,

$$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$$

elemanlar sistemini seçelim. Hatırlatalım ki, $x \in H$ elemanı için ve her bir i için $x \perp \varphi_i$ şartından $x = 0$ alındığında $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ elemanlar sistemi H Hilbert uzayında tam sistem oluşturur denir. Biz burada H Hilbert uzayının sonsuz boyutlu ve separabel uzay olduğunu farz ederiz. Keyfi n doğal sayısı alalım ve değişmez sağlayalım. $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ elemanlarının lineer kombinasyonlar kümesinin kapanışını H_n ile gösterelim, yani;

$$\overline{Span\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}} = H_n$$

olsun. H_n kümesi H Hilbert uzayında alt uzay oluşturur. H_n alt uzayında $F(u)$ fonksiyoneline en küçük değer veren $u_n \in H_n$ elemanını bulalım. Dikkate alalım ki, keyfi alınmış $u_n \in H_n$ elemanlarının her biri

$$u = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + ... + \alpha_n\varphi_n$$

şeklinde olduğundan u_n elemanının bulunması problemi n sayıda $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ katsayılarının bulunmasının cebirsel bir problemine getirilir. H_n alt uzayında $F(u)$ fonksiyoneline minimum değer veren u_n elemanı bulunduğunda, bulunmuş bu $u_n \in H_n$ elemanı Ritz metodunda (5.1) operatör denkleminin yaklaşık çözümü olarak alınır. Biz burada A operatörünün pozitif belirli öz eşlenik olduğu hali ele alırız. Bu şartlarda aşağıdaki lemma doğrudur.

Lemma 5.2.1.1. H_n alt uzayında (5.2) eşitliği ile tanımlanmış $F(u)$ fonksiyoneli en küçük değerini alır.

İspat: (5.2) eşitliğinden aşağıdaki değerlendirme yapılır:

$$F(u) \geq m_A \|u\|^2 - 2\|u\|\|f\| = \|u\|\left(m_A \|u\| - 2\|f\|\right)$$

Bu eşitsizlikten görülüyor ki,

$$\|u\| > \frac{2\|f\|}{m_A}$$

eşitsizliği sağlandığında

$$F(u) > 0$$

olur. Ama $F(u)$ fonksiyonelinin (5.2) eşitliği ile tanımlanmış ifadesinden

$$F(u) = 0$$

olduğu görülür. Burada biz $F(u)$ fonksiyonelinin H_n alt uzayında en küçük değerini

$$\overline{S}(0) = \left\{ u \in H_n : \|u\| \leq \frac{2\|f\|}{m_A} \right\}$$

kapalı yuvarında alacağını belirlemiş oluruz. Sonlu boyutlu normlu uzaylarda her bir sınırlı kapalı alt küme bikompakt olduğundan bu $\overline{S}(0)$ yuvarı H_n alt uzayında bikompakt kümedir. A operatörünün sürekli operatör olmasında ve skaler çarpımın sürekli olmasından (5.2) eşitliği ile tanımlan $F(u)$ fonksiyonelinin sürekli fonksiyonel olduğu görülür. Sürekli fonksiyonel kapalı kompakt kümede en küçük ve en büyük değerini alır. Bu yüzden de $F(u)$ fonksiyoneli H_n alt uzayının $\overline{S}(0)$ yuvarında en küçük değerini ve uygun olarak H_n alt uzayında en küçük değerini alır. Bununla da Lemma ispatlanır.

H_n alt uzayında her bir $u \in H_n$ elemanı

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$$

şeklinde gösterildiğinden H_n alt uzayında $F(u)$ fonksiyoneli için aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$\begin{aligned} F(u) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (A\varphi_i), \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) - 2\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i , f \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \alpha_k \left(A\varphi_i , \varphi_k \right) - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\varphi_i , f \right) \end{aligned}$$

Böylece, $F(u)$ fonksiyoneli H_n alt uzayında $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ değişkenlerinin

$$\phi(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_i \alpha_k \left(A\varphi_i , \varphi_k \right) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\varphi_i , f \right)$$

n-değişkenli fonksiyonuna dönüşür. Bu yüzden de $F(u)$ fonksiyoneline H_n alt uzayında minimum değer veren $u \in H_n$ elemanının $u_n = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + ... + \alpha_n\varphi_n$ ifadesindeki $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ katsayıları aşağıdaki şartlardan bulunur.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0 \,, \; i = 1,2,...,n$$

veya

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(A\varphi_i , \varphi_k \right) - \left(f , \varphi_i \right) = 0$$

veya

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\varphi_i , A\varphi_k \right) = \left(f , \varphi_i \right), \; i = 1,2,...,n \tag{5.6}$$

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ katsayılarının bulunması için elde ettiğimiz bu (5.6) denklemi n denklemli lineer homojen olmayan denklemler sistemidir. (5.6) lineer cebirsel denklemler sisteminin determinantının sıfırdan farklı olduğunu gösterelim.

Bunu göstermek için (5.6) sistemine uygun lineer homojen

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\varphi_i, A\varphi_k) = 0, \; i = 1,2,...,n \tag{5.7}$$

denklemler sisteminin yalnız sıfır çözümünün olduğunu göstermek yeterlidir. Bunu göstermek için ise (5.7) sisteminin her bir denklemini aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\left(\varphi_i, A\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right)\right) = 0, \; i = 1,2,...,n$$

Bu eşitlikten görüyoruz ki, α_k $(k = 1,2,...,n)$ (5.7) sisteminin çözümü olursa, o zaman her bir $i = 1,2,...,n$ için

$$A\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \varphi_k\right) \perp \varphi_i$$

olur. Buradan da

$$A\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \varphi_k\right) \perp H_n$$

olduğu bulunur. $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \varphi_k \in H_n$ olduğundan özel halde

$$A\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \varphi_k\right) \perp \sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \varphi_k$$

olur. A operatörü pozitif belirli operatör olduğundan sonuncu şarttan da

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \varphi_k = 0$$

eşitliği bulunur. Ama $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ elemanları dizisi lineer bağımsız olduklarından $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ olduğu bulunur. Böylece, bu yöntemle biz (5.6) sisteminin determinantının sıfırdan farklı olduğunu ispatlamış olduk. Bu yüzden de (5.6) sisteminin tek bir,

$$\alpha_1^0, \alpha_2^0, ..., \alpha_n^0$$

çözümü bulunur. Bu çözüm tek olduğundan

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(0)} \varphi_i$$

elemanı $F(u)$ fonksiyoneline H_n alt uzayında en küçük değer veren eleman olur.

n sayısını değiştirerek (5.1) denkleminin

$$u_1, u_2, ..., u_n, ...$$

yaklaşık çözümler dizisini buluruz. Bu yöntemle elde edilen $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ yaklaşık çözümler dizisinin (5.1) denkleminin u_0 çözümüne yakınsadığı gösterilir. Gerçekten de, aşağıdaki teoremden doğrudur.

Teorem 5.2.1.1. (5.1) denklemindeki A operatörü pozitif belirli öz eşlenik operatör olduğunda Ritz metodu ile bulunmuş $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ yaklaşık çözümler dizisi (5.1) denkleminin u_0 çözümüne yakınsar.

İspat: Teorem 5.2.2'ye esasen bu teoremi ispatlamak için $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin $F(u)$ fonksiyonelinin minimallaştırıcı dizisi olduğunu göstermek yeterlidir. Tam lineer bağımsız $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ sistemini Gram-Schmidt ortagonalleştirme prosesi ile ortagonalleştirdiğimiz de H Hilbert uzayında ortagonal $\{\Psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ sistemi veya ortanormal $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ sistemi bulunur. Bu sistemlerin H Hilbert uzayında baz oluşturduğu gösterilir. $x_0 \in H$ elemanını $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ bazında açtığımız da,

$$x_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$$

bulunur. Burada

$$z_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

aldığımız da $z_n \in H_n$ olur. Diğer yandan $z_n \to x_0$ olur. $F(u)$ sürekli olduğundan

$$F(z_n) \to F(x_0)$$

olur. Ama

$$F(u_n) = \min_{u \in H_n} F(u),$$

$$F(u_0) = \min_{u \in H} F(u)$$

olduğundan aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$F(u_0) \le F(u_n) \le F(z_n)$$

Bu yüzden de $F(u_n) \to F(u_0)$ olduğu bulunur. Bununla teorem ispatlanmış olur.

u_n yaklaşık çözümünde hata aşağıdaki şekilde değerlendirilir:

$$v_n - u_n = A^{-1}Au_n - A^{-1}f = A^{-1}(Au_n - f)$$

buradan ise

$$\|u_n - u_0\| \le \|A^{-1}\| \|Au_n - f\| \le \frac{1}{m_A}\|Au_n - f\|$$

Örnek 5.2.1.1. Sonsuz sayıda, lineer denklemler sisteminin verildiğini varsayalım.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k = \eta_i, \; i = 1,2,...,n \tag{5.8}$$

$\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$, $\{\eta_i\} \in \ell_2$ olduğunu varsayalım. $(a_{ik})_{i,k=1}^{\infty}$ matrisi ile tanımlanan A operatörü ℓ^2 uzayını ℓ^2 uzayına dönüştüren lineer operatördür.

A operatörünün öz eşlenik operatör olması için (a_{ik}) matrisinin simetrik matris olması yeterlidir. A operatörünün pozitif belirli operatör olması için ise öyle $d > 0$ sabiti varsa ki, her bir $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$ için,

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_i\xi_k \ge d\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^2$$

eşitsizliğinin sağlanması yeterlidir.

Burada $u = \{\xi_i\}$, $f = \{\eta_i\}$ aldığımızda $F(u)$ fonksiyoneli aşağıdaki gibi yazılır:

$$F(u) = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_i\xi_k - 2\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i$$

ℓ^2 'de $\{\varphi_i\}$ sistemi olarak aşağıdaki eşitliklerle

$$e_1 = (a,0,0,...), \; e_2 = (0,1,0,...), \; \ldots$$

tanımlanan $\{e_i\}$ sistemini alalım. O zaman $u \in H_n$ elemanı

$$u = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$

şeklinde yazılır. Diğer yandan

$$\left(e_i, Ae_k\right) = a_{ik}$$

olur. $\left(f, e_i\right) = \eta_i$ olur. Böylece, (5.6) sistemi

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \xi_k = \eta_i, \; i = 1,2,...,n \tag{5.9}$$

şeklinde yazılır.

Buradan (5.9) sisteminin (5.8) sisteminin n sayısından büyük satır ve n sayısından büyük sütunlarının kesilip atılmasıyla elde edildiği görülür. Başka bir deyimle; (5.9) sistemi (5.8) sisteminin redüksiyon olunmuş sistemidir. (5.9) sisteminin $\{u_n\}$ çözümler dizisinin (5.8) sisteminin u_0 çözümüne yakınsadığı gösterilir.

5.3. Kompleks Hilbert Uzayında Verilmiş Operatör Denklemlerin Eşdeğer Varyasyon Problemin Çözümüne Getirilmesi

Burada biz (5.1) operatör denkleminin çözümünün bulunması probleminin guadratik (5.2) fonksiyonelinin A operatörünün $D(A)$ tanım bölgesinde minimum probleminin çözümüne getirildiğinin ve (5.2) fonksiyonelinin $D(A)$ bölgesindeki minimumun bulunması probleminin de (5.1) operatör denkleminin çözümünün bulunması problemine getirildiğinin mümkün olduğunu göstereceğiz. Biz bu kısımda A operatörünün öz eşlenik ve pozitif operatör olduğunu varsayacağız. A operatörünün tanım bölgesi $D(A)$ kümesi H Hilbert uzayında her yerde yoğun olduğunda ve alınmış $u, v \in D(A)$ için

$$(Au, v) = (u, Av)$$

eşitliği sağlandığında A operatörüne simetrik operatör denir. Simetrik operatör için (Au, u) sayısı reel sayı olur. Simetrik A operatörü için keyfi alınmış $u \in D(A)$ için

$$(Au, u) > 0$$

şartı sağlandığında A operatörüne <u>pozitif operatör</u> denir.

H Hilbert uzayı kompleks Hilbert uzayı olduğunda ve A operatörü öz eşlenik (simetrik) pozitif operatör olduğunda (5.1) denkleminin çözümü ile (5.2) fonksiyonelinin minimum probleminin çözümü arasındaki bağlantı aşağıdaki teoremde gösterilir.

Teorem 5.3.1. A operatörünün öz eşlenik pozitif operatör olduğunu var sayalım. $u_0 \in D(A)$ elemanının (5.1) denkleminin çözümü olduğunu, yani;

$$Au_0 = f$$

eşitliğini sağladığını var sayalım. O zaman (5.2) fonksiyonelinin $u \in D(A)$ olmak üzere $F(u)$ değerlerinden en küçüğü $F(u_0)$ değeri olur.

Tersine $u_0 \in D(A)$ elemanında (5.2) fonksiyoneli en küçük değerini aldığında, o zaman u_0 elemanı (5.1) denkleminin çözümü olur.

İspat: Önce teoremin birinci kısmını ispatlayalım. $u_0 \in D(A)$ elemanını (5.1) denklemini sağladığını var sayalım.

$$Au_0 = f$$

v elemanı $D(A)$ bölgesinden alınmış keyfi eleman olsun. O zaman $\eta = v - u_0 \in D(A)$ olur (A operatörü lineer operatör olması için $D(A)$ tanım bölgesi lineer manifold olması gerekir). Buradan da $v = u_0 + \eta$ olur. v elemanında $F(u)$ fonksiyonelinin değerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} F(v) &= (Av, v) - (v, f) - (f, v) \\ &= (A(u_0 + \eta), (u_0 + \eta)) - (u_0 + \eta, f) - (f, u_0 + \eta) \\ &= [(Au_0, u_0) - (u_0, f) - (f, u_0)] + (Au_0 - f, \eta) + (f, Au_0 - f) + (A\eta, \eta) \\ &= F(u_0) + (A\eta, \eta) \end{aligned}$$

veya

$$F(v) = F(u_0) + (A\eta, \eta)$$

Biz burada $Au_0 - f = 0$ olduğunu kullandık. A operatörü pozitif operatör olduğundan her bir $\eta \in D(A)$ için $(A\eta, \eta) > 0$ olduğundan $\forall v \in D(A)$ için

$$F(v) > F(u_0)$$

olduğu görülür. Şimdi teoremin ikinci kısmını ispatlayalım. Bunu için $u_0 \in D(A)$ elemanında (5.2) fonksiyonelinin minimum değer aldığını var sayalım. v elemanı $D(A)$ tanım bölgesinden alınmış keyfi eleman olsun. O zaman keyfi alınmış λ sayısı için $u_0 + \lambda v$ elemanı da $D(A)$ bölgesine dâhil olur. $u_0 + \lambda v \in D(A)$ $u_0 \in D(A)$ elemanında $F(u)$ fonksiyoneli en küçük değer aldığından

$$F(u_0 + \lambda v) \geq F(u_0)$$

eşitsizliği her bir $v \in D(A)$ ve her bir λ sayısı için sağlanır. Burada aldığımız λ sayısının reel sayı olduğunu var sayalım. O zaman sonuncu eşitsizlik aşağıdaki şekilde yazılır:

$$2\lambda \operatorname{Re}[(Au_0 - f, v)] + \lambda^2 (Av, v) \geq 0$$

Bu eşitsizliğin sol yanı λ parametresine göre guadratik (kare) polinomdur. Bu eşitsizliğin her bir reel a için sağlanması için bu polinomun diskriminantı pozitif olamaz. Bu yüzden de

$$[\operatorname{Re}(Au_0 - f, v)]^2 = 0$$

ya da

$$\operatorname{Re}(Au_0 - f, v) = 0$$

Sonuncu eşitsizlikte v elemanını iv elemanı ile değiştirdiğimiz de

$$Jm(Au_0 - f, v) = 0$$

yazabiliriz. Sonuncu iki eşitlikten de keyfi $v \in D(A)$ için

$$\left(Au_0 - f, v\right) = 0$$

eşitliğini buluruz. $\overline{D(A)} = H$ olduğundan ve keyfi $v \in D(A)$ için $\left(Au_0 - f, v\right) \perp v$ olduğundan

$$Au_0 - f, v = 0$$

olduğunu buluruz. Bu eşitlik ise u_0 elemanının (5.1) denkleminin çözümü olduğunu gösterir. Böylece teoremin ikinci kısmı da ispatlandı. Burada dikkate alalım ki,

$$\inf_{u \in D(A)} F(u) = F(u_0) = \left(Au_0, u_0\right) - \left(u_0, f\right) - \left(f, u_0\right)$$

$$= \left(Au_0, u_0\right) - \left(u_0, Au_0\right) - \left(Au_0, u_0\right) = -\left(Au_0, u_0\right)$$

yani

$$\inf_{u \in D(A)} F(u) = -\left(Au_0, u_0\right) = -\left(f, u_0\right)$$

Not 5.3.1. Matematiksel fiziğin birçok problemlerinde (5.2) fonksiyonelinin değeri sistemin potansiyel enerjisinin bir sabit sayıya çarpımında eşit olur. Bu yüzden de burada ele aldığımız (kullandığımız yönteme) yönteme, yani denklemin çözümünün bulunmasının bir quadratik fonksiyonelinin minimumunun bulunması ile değiştirilmesi yöntemine energetik metod da denir.

5.3.1. Kompleks Hilbert Uzayında Verilmiş Operatör Denklemlerin Ritz Metodu

Şimdi (5.1) denkleminin çözümünü bulmak için H Hilbert uzayında tam sistem oluşturan lineer bağımsız ve $D(A)$ tanım bölgesine dâhil olan

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

elemanlar sistemini alalım. Dikkate alalım ki, $x \in H$ elemanı için

$$\left(x, \varphi_i\right) = 0, \; i = 1,2,3,\ldots$$

şartından $x = 0$ alındığında $\{\varphi_i\}$ sistemi H Hilbert uzayında tam sistem oluşturur denir.

(5.1) denkleminin yaklaşık çözümünü

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \varphi_k \tag{5.10}$$

toplamı şeklinde arayalım. Burada $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, ..., a_n^{(n)}$ katsayıları bilinmeyen sabit sayılardır. (5.10) eşitliği ile tanımlanan u_n elemanını (5.2) fonksiyonelinde u elemanının yerine yazdığımızda bu fonksiyonel $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, ..., a_n^{(n)}$ parametrelerinin fonksiyonuna dönüşür. Burada $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, ..., a_n^{(n)}$ katsayıları öyle seçilir ki, $F(u_n)$ fonksiyoneli minimum değer alsın. Böylece, $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, ..., a_n^{(n)}$ katsayıları aşağıdaki minimum probleminden seçilir.

$$F(u_n) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(A\varphi_j, \varphi_k\right) a_j^{(n)} . \overline{a}_k^{(n)} - \sum_{j=1}^{n} a_j^{(n)} \left(\varphi_j, f\right) - \sum_{j=1}^{n} \overline{a_j} \left(f, \varphi_j\right) \rightarrow \min_{a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, ..., a_n^{(n)}}$$

Burada $a_k^{(n)}$ sayılarını

$$a_k^{(n)} = \alpha_k^{(n)} + i\beta_k^{(n)}$$

şeklinde yazarak $F(u_n)$ fonksiyonelini $\alpha_k^{(n)}, \beta_k^{(n)}$ reel değişkenlerinin $2n$ değişkenli fonksiyonu şeklinde gösterebiliriz. Bu $F(u_n)$ fonksiyonunun en küçük değer alması için gerek (ve yeter) şart bu fonksiyonun $2n$ tane $\alpha_k^{(n)}, \beta_k^{(n)}$ değişkenlerine nazaran birinci mertebeden tüm kısmi türevlerinin sıfıra eşit olmalarıdır:

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial \alpha_k^{(n)}} = 0, \; k = 1, 2, ..., n$$

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial \beta_k^{(n)}} = 0, \; k = 1, 2, ..., n$$

Bu denklemler sistemi aşağıdaki denklemlerden oluşan

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial \overline{a_k^{(n)}}} = 0, \; k = 1, 2, ..., n$$

sistemine equivalenttir.

Üstteki sistemlerdeki türevleri hesaplayarak aşağıdaki cebirsel denklem sistemini buluruz.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \left(A\varphi_k, \varphi_j\right) = \left(f, \varphi_j\right), \ j = 1,2,...,n \tag{5.11}$$

Burada A operatörünün öz eşlenik ve pozitif operatör olduğunu var saymıştık. Pozitif öz eşlenik operatörün A^{-1} tersi vardır ve ters A^{-1} operatörü de öz eşlenik ve pozitif olur. Bu yüzden de A operatör için tek bir tane

$$B = \sqrt{A}$$

pozitif öz eşlenik operatörü vardır. $B^{-1} = \sqrt{A^{-1}}$ operatörü de vardır. Bu operatörlerin quadratları uygun olarak A ve A^{-1} operatörlerine eşit olur: $B^2 = A$ ve $\left(B^{-1}\right)^2 = A^{-1}$, $f \in D\left(A^{-1}\right)$ olmasından $f \in D\left(\sqrt{A^{-1}}\right) = D\left(B^{-1}\right)$ olduğu bulunur. Bu yüzden de (5.11) denklemler sistemi aşağıdaki şekilde de yazılır:

$$\sum_{k=1} a_k^{(n)} \left(B\varphi_k, \varphi_j\right) = \left(B^{-1} f, B\varphi_j\right), \ j = 1,2,...,n$$

veya

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{n} \left(\Phi_k, \Phi_j\right) = \left(B^{-1} f, \Phi_j\right), \ j = 1,2,...,n$$

Burada

$$\Phi_k = B\varphi_k, \ k = 1,2,...,n \tag{5.12}$$

alınmıştır. Dikkate alalım ki, $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k, ...$ elemanlar sistemi lineer bağımsız olduğunda (5.12) eşitlikler ile tanımlanan $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n, ...$ sistemi de lineer bağımsız olur. Gerçekten de;

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \Phi_k = 0$$

eşitliğinden

$$B\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\right) = 0$$

eşitliği yazılır. Buradan da,

$$\left(B\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\right), B\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\right)\right) = \left(A\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k, \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\right) = 0$$

olduğu bulunur. Ama A operatörü pozitif operatör olduğundan $(Ax, x) = 0$ şartından $x = 0$ alındığı bellidir. Böylece

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k = 0$$

olduğu bulunur. $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k, ...$ şarta göre lineer bağımsız olduğundan

$$c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$$

olduğu bulunur. Bu ise $\{\Phi_k\}$ sisteminin lineer bağımsız olduğunun ispatıdır.

6. VARYASYON PROBLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Varyasyon problemin yaklaşık çözüm yöntemleri aşağıda verilmiştir.

6.1. Direk Metodlar

Varyasyon problemlerini çözdüğümüzde bulduğumuz diferansiyel denklemleri çözmek genelde çok zor olur. Burada alınan diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin yaklaşık çözüm metodları çözerken birçok zorluklarla karşılaşılır. Bu yüzden de varyasyon problemlerin direk yaklaşık çözüm metodları işlenip geliştirilmiştir. Varyasyon problemlerin çözüm metodlarına, genelde direk metodlar denir. Direk metodlarda varyasyon problemi sonlu değişkene bağlı bir fonksiyonun bir ekstremumu probleminin limiti gibi gösterilir. Buradaki sonu değişkenli fonksiyonun ekstremum problemi matematik analizde gösterilen metodlarla çözülür. Verilmiş varyasyon problemin çözümü bu sonlu değişkene bağlı fonksiyon için ekstremum probleminin çözümünün limiti gibi bulunur. Genelde normlu X uzayında tanımlanmış her bir $F(y)$ fonksiyonelinin sonsuz sayıda değişkene bağlı fonksiyon gibi ele almak olur. Gerçekten de, $y \in K$ elemanını X uzayında bir ortogonal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ bazı üzere Fourier serisine açarsak, yani

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$$

serisine açarsak, bu açılımın $c_n = \dfrac{(y, e_n)}{\|e_n\|^2}$, $n = 1,2,...$ Fourier katsayıları belli olduğunda $F(y)$ fonksiyoneli $c_1, c_2, ... c_n, ...$ katsayılarının fonksiyonuna dönüşür. Böylece bu yöntemle

$$F(y) = f(c_1, c_2, ... c_n, ...)$$

fonksiyonuna dönüşmüş olur. Varyasyon hesabında sonsuz değişkene bağlı fonksiyonların ekstremum problemi de ele alınır. Bu yüzden de varyasyon probleminin çözümü sonlu değişkenli fonksiyonun ekstremum probleminin çözümünün limiti gibi bulunabilir. Şimdi biz burada ilk önce varyasyon probleminin yaklaşık çözümü için Euler'in sonlu farklar metodunu ele alalım.

6.2. Euler'in Sonlu Farklar Metodu

Sonlu farklar metodunu varyasyon problemlerin yaklaşık çözümü için ilk kez Euler uygulamıştır. Bu metodu aşağıdaki varyasyon problemine uygulanması şeklinde gösterelim. Varsayalım ki,

$$F(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')dx \tag{6.1}$$

fonksiyonelinin ekstremumunun

$$y(x_0) = y_0, \; y(x_1) = y_1 \tag{6.2}$$

şartında bulunması istenir. Dikkate alalım ki, burada $F(y)$ fonksiyonelinin tanım bölgesi

$$D(F) = \{y(x) \in C^1_{[x_0,x_1]} : y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\} \tag{6.3}$$

kümesidir. Yani $F(y)$ fonksiyoneli $D(F)$ kümesinden alınmış her bir $y(x) \in D(F)$ fonksiyonunda tanımlanmıştır. Şimdi $F(y)$ fonksiyonelinin ekstremum problemini tepe noktalarının apsisleri

$$x_0 + \Delta x, \; x_0 + 2\Delta x, \; \dots, \; x_0 + (n-1)\Delta x$$

sayıları olan kırık-kırık çizgilerden (parça-parça lineer fonksiyonlardan oluşan) eğriler üzere alalım. Burada ki Δx atışının

$$\Delta x = \frac{x_1 - x_0}{n}$$

eşitliği ile tanımlanmış argüment artışıdır. Böyle parça-parça lineer sürekli eğriler üzere $F(y)$ fonksiyoneli $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ ordinatlarının $\varphi(y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ fonksiyonuna dönüşür.

Böylece $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ değişkenlerini öyle seçmek gerekir ki, $\varphi(y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ fonksiyonu ekstremum değer alsın. Bunun için $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ değişkenlerini

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0\,, \; \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 0\,, \; \ldots\,, \; \frac{\partial \varphi}{\partial y_{n-1}} = 0$$

denklemler sisteminde bulmamız gerekir. Bu sistemin çözümü bulunduktan sonra (6.1)-(6.2) varyasyon probleminin çözümünü $y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x)$ şeklinde göstermemiz gerekir. Burada biz

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_0 + k\Delta x}^{x_0 + (k+1)\Delta x} f\left(x, y, \frac{y_{k+1} y_k}{\Delta x}\right)dx$$

veya

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)\Delta x$$

şeklinde approksime ettik. Burada sonuncu eşitliğin sağ yanındaki toplam integral toplamdır.

Böylece, burada biz

$$F(y) \approx \varphi(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} y_i}{\Delta x}\right)\Delta x$$

ifadesini yazdık. Burada biz $\varphi(y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ fonksiyonunda y_i değişkenine nazaran türev aldığımızda $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = 0$ eşitliğini

$$f_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - \frac{\Delta f_{y'}}{\Delta x} = 0$$

şeklinde buluruz. Bu sonuncu denklemin her yanından $n \to \infty$ şartında limit aldığımızda

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$$

Euler denkleminin alındığı görülür. Limite geçmediğimizde $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = 0$, $i = 1,2,...,(n-1)$ denklemler sisteminin $y_n(x)$ çözümü (6.1)-(6.2) ekstremum probleminin yaklaşık çözümü olur.

Örnek 6.2.1. $F(y) = \int_0^1 (y'^2 + 2y)dx$ fonksiyonelinin $y(0) = y(1) = 0$ şartlarında minimum problemini yaklaşık olarak Euler metodu ile çözünüz.

Çözüm: $n = 5$ alalım. O zaman $\Delta x = \frac{1}{5} = 0,2$ olur.

$y_0 = y(0) = 0$; $y_1 = y(0,2)$; $y_2 = y(0,4)$; $y_3 = y(0,6)$; $y_4 = y(0,8)$; $y_5 = y(10) = 0$.

Türev $y'_k = y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}$ eşitliği ile hesaplandığından

$y'(0) = \frac{y_1 - 0}{0,2}$; $y'(0,2) = \frac{y_2 - y_1}{0,2}$, $y'(0,4) = \frac{y_3 - y_2}{0,2}$, $y'(0,6) = \frac{y_4 - y_3}{0,2}$, $y'(0,8) = \frac{0 - y_4}{0,2}$

şeklinde bulunurlar. Burada biz

$$\int_a^b f(x)dx \doteq [f(0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1})]\Delta x$$

formülünü kullanarak buluruz:

$$\varphi(y_1, y_a, y_3, y_4) = \left[\left(\frac{y_1}{0,2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{0.2}\right)^2 + 2y_1 + \left(\frac{y_3 - y_2}{0,2}\right)^2\right.$$

$$\left. + 2y_2 + \left(\frac{y_4 - y_3}{0,2}\right)^2 + 2y_3 + \left(-\frac{y_4}{0,2}\right)^2 + 2y_4\right]0,2.$$

Eşitliğini bulmuş oluruz. Buradan da aşağıdaki sistem bulunur:

$$\frac{1}{0{,}2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}=\frac{y_1}{0{,}02}-\frac{y_2-y_1}{0{,}02}+2=0\,,$$

$$\frac{1}{0{,}2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}=\frac{y_2-y_1}{0{,}02}-\frac{y_3-y_2}{0{,}02}+2=0\,,$$

$$\frac{1}{0{,}2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_3}=\frac{y_3-y_2}{0{,}02}-\frac{y_4-y_3}{0{,}02}+2=0\,,$$

$$\frac{1}{0{,}2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_4}=\frac{y_4-y_3}{0{,}02}-\frac{y_4}{0{,}02}+2=0\,.$$

Bu sistem denklemi aşağıdaki şekilde yazalım:

$$2y_1-y_2=-0{,}04\,,$$

$$-y_1+2y_2-y_3=-0{,}04\,,$$

$$-y_1+2y_3-y_4=-0{,}04\,,$$

$$-y_3+2y_2=-0{,}04\,.$$

Bu sistemi çözersek

$$y_1=-0{,}08\,;\;y_2=-0{,}12\,;\;y_3=-0{,}12\,;\;y_4=-0{,}08$$

olur. Burada ele aldığımız ekstremum probleminin çözümü

$$y(x)=\frac{x^2-x}{2}$$

Fonksiyonudur. Bu çözümün uygun noktadaki değerleri bulduğumuz $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$ çözümü ile çakışır.

6.3. Ritz Metodu

Ritz metodu varyasyon problemlerinin yaklaşık çözümünü bulmak için sık-sık kullanılan metoddur. Bu metodu

$$F(y)=\int_a^b f(x,y,y')dx \tag{6.4}$$

fonksiyonelinin

$$y(a)=0\,,\ y(b)=0 \tag{6.5}$$

şartında ekstremumunun bulunması probleminde açıklayalım.

Buradaki $F(y)$ fonksiyonelinin

$$D(F)=\left\{y(x)\in C^1_{[a,b]} : y(a)=0, y(b)=0\right\} \tag{6.6}$$

tanım bölgesinde en büyük veya en küçük değerini veren $y(x)\in D(F)$ fonksiyonunun bulunması problemini ele alalım. $\{\varphi_i(x)\}\subset D$ fonksiyonlar dizisi tam fonksiyonlar dizisi oluşturduğunu varsayalım. Yani keyfi $y(x)\in D(F)$ fonksiyonunu ve keyfi $\varepsilon>0$ sayısı aldığımızda $\{\varphi_i(x)\}$ sisteminden öyle sonlu sayıda

$$\left(\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)\right)$$

fonksiyonları sistemi seçile bilinse ki,

$$\lambda_1\varphi_1(x)+\lambda_2\varphi_2(x)+...+\lambda_n\varphi_n(x)$$

lineer kombinasyonu için

$$\left\| y-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i \right\| < \varepsilon$$

Sağlandığında $\{\varphi_i\}$ sistemi $D(F)$ bölgesinde tam sistem oluşturur denir. Burada $\|.\|$ normu $C^1_{[a,b]}$ uzayında tanımlanmış normdur. Mesela,

$$\|y\| = \max\left\{ \max_{a\le x\le b}|y(x)|, \max_{a\le x\le b}|y'(x)|\right.$$

veya

$$\|y\| = \max_{a\le x\le b}|y(x)| + \max_{a\le x\le b}|y'(x)|$$

formüllerinden biri ile tanımlanır. Burada biz daha dikkate alalım ki, $\{\varphi_i(x)\}\subset D(F)$ alındığından $\{\varphi_i(x)\}$ sistemine dahil olan her bir $\varphi_i(x)$ fonksiyonu

$$\varphi_i(a)=\varphi_i(b)=0$$

sınır şartını sağlaması gerekir. Ritz metodunda $\{\varphi_i(x)\} \subset D(F)$ sisteminin seçiminden sonra, $F(y)$ fonksiyonelinin değeri

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x) \tag{6.7}$$

fonksiyonunda hesaplanır. O zaman

$$F(y_n) = W(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$$

fonksiyonu $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ katsayılarının n değişkenli fonksiyon olur. Burada $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ parametrelerinin öyle değerini bulmak istiyoruz ki, bu değerlerde $W(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ fonksiyonu en büyük (veya en küçük) değerini alsın. Bunun için $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ parametrelerinin aranan değerlerinde

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial W}{\partial \lambda_1} = 0, \\ \dfrac{\partial W}{\partial \lambda_2} = 0, \\ \ldots \\ \dfrac{\partial W}{\partial \lambda_n} = 0 \end{array}\right\} \tag{6.8}$$

Sisteminin sağlanması gerek şarttır. Bu yöntemle bulduğumuz

$$y_n(x) = \lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) + ... + \lambda_n \varphi_n(x)$$

dizisi $F(y)$ fonksiyonelinin "minimallaştırıcı" dizisi olur. Pratik uygulamada önce n sayısı öyle seçilir ki, $F(y_n)$ sayısı yeterince küçük (veya büyük) olsun. Sonra ise (6.8) sisteminin çözümü

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$$

Sayıları bulunur. Sonuçta

$$y_n(x) = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + ... + \lambda_n \varphi_n$$

Fonksiyonu (6.4)-(6.5) ekstremum probleminin yaklaşık çözümü olur. Bu yöntemin uygulanmasında aşağıdaki notlara dikkat etmemiz gerekir:

1) Ele alınmış varyasyon probleminde sınır şartları homojen olmadığında, o zaman yeni

$$z(x) = y(x) - \varphi_0(x)$$

aranan fonksiyon seçmekle homojen olmayan şartı yeni aranan fonksiyon için homojen sınır şarta getirmekle faydalıdır. Burada dâhil edilen $\varphi_0(x)$ fonksiyonu homojen olmayan şartları sağlayan fonksiyondur. Böylece, bu yöntemle $z(x)$ aranan fonksiyonu için homojen şartlı varyasyon problemi yazılmış olur.

2) Ritz metodunun iyi sonuç vermesi için $\{\varphi_i(x)\} \subset D(F)$ sistemi tamlık şartını sağlamalıdır.

3) Ritz metodu çok değişkenli fonksiyoneller içinde uygulanır.

4) $\{\varphi_i(x)\} \subset D(F)$ sistemine Ritz metodunda koordinat fonksiyonları da denir.

Örnek 6.3.1. $F(y) = \int_0^1 \left(y'^2 + y^2 + 2xy\right)dx$ fonksiyonelinin $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ şartında minimum değerini buluruz.

Çözüm: Bu problem için koordinat fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde seçelim:

$$\varphi_1(x) = x^2 - x,\ \varphi_2(x) = x^3 - x^2,\ \dots,\ \varphi_n(x) = x^{n+1} - x^n\ ,\ \dots$$

Burada $n = 2$ alalım. Yani

$$\varphi_1(x) = x^2 - x,\ \varphi_2(x) = x^3 - x^2$$

Seçelim. O zaman

$$y_2(x) = \lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x),$$

yani

$$y_2(x) = \lambda_1(x^2 - x) + \lambda_2(x^3 - x^3).$$

uygun olarak

$$y_2'(x) = \lambda_1(2x - 1) + \lambda_2(3x^2 - 2x)$$

olur. $y_2(x)$ ve $y_2'(x)$ için bulduğumuz bu değerleri $F(y)$ fonksiyonelinde yerine uygun olarak yazdığımızda $F(y_2)$ için aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$F(y_2) = W(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{11}{30}\lambda_1^2 + \frac{11}{30}\lambda_1\lambda_2 + \frac{1}{7}\lambda_2^2 - \frac{1}{6}\lambda_1 - \frac{1}{10}\lambda_2 .$$

Bu $F(y_2) = W(\lambda_1, \lambda_2)$ fonksiyonu için

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \lambda_1} = 0 \ , \\ \dfrac{\partial W}{\partial \lambda_2} = 0 \end{cases}$$

sistemi aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\left. \begin{aligned} \frac{11}{15}\lambda_1 + \frac{11}{30}\lambda_2 &= \frac{1}{6} \ , \\ \frac{11}{30}\lambda_1 + \frac{2}{7}\lambda_2 &= \frac{1}{10} \ . \end{aligned} \right\}$$

Bu sistemi λ_1, λ_2 bilinmeyenlerine nazaran çözerek

$$\lambda_1 = \frac{69}{473}, \ \lambda_2 = \frac{7}{43}$$

değerini buluruz. Böylece yaklaşık çözüm

$$y_2(x) = \frac{773x^3 - 8x^2 - 69x}{473}$$

fonksiyonu olur.

6.4. Kantoroviç Metodu

Ritz metodunu çok değişkene bağlı yani $z = z(x_1, x_2, ..., x_n)$ şekilli fonksiyona bağlı

$$F(z) = F(z(x_1, x_2, ..., x_n))$$

Şeklindeki fonksiyoneller için uyguladığımızda koordinat fonksiyonları sistemi aşağıdaki şekilde seçilir:

$$W_1(x_1, x_2, ..., x_n), \ W_2(x_1, x_2, ..., x_n), \ \dots , \ W_m(x_1, x_2, ..., x_n), \ \dots \ .$$

Bu halde ele alınan varyasyon problemin yaklaşık çözümü

$$z_m(x_1, x_2, ... x_n) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k W_k(x_1, x_2, ..., x_n)$$

sonlu toplamı şeklinde aranır. Bu eşitliğin sağ yanındaki $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ katsayıları öyle seçilir ki, $z_m(x_1, x_2, ..., x_n)$ fonksiyonu ele alınmış varyasyon problemin yaklaşık çözümü olur. Kantoroviç metodunda da koordinat fonksiyonları sistemi

$$W_1(x_1, x_2, ..., x_n),\ W_2(x_1, x_2, ..., x_n),\ \dots,\ W_m(x_1, x_2, ..., x_n),\ \dots$$

şeklinde seçilir. Ama varyasyon probleminin çözümü

$$z_m(x_1, x_2, ... x_n) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, ..., x_n)$$

şeklinde aranır. Bu açılımdaki $\alpha_k(x_i)$ katsayıları sabit katsayılar olmayıp $x_1, x_2, ..., x_n$ serbest değişkenlerinin birine bağlı olan aranan fonksiyonlardır. Bu Kantoroviç yönteminde ele aldığımız $F(z)$ fonksiyoneli

$$z_m(x_1, x_2, ... x_n) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, ..., x_n)$$

şekilli fonksiyonlar sınıfında m sayıda bir tane x_i değişkenine bağlı

$$\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i), ..., \alpha_m(x_i)$$

fonksiyonlarının

$$\widetilde{F}\left[\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i), ..., \alpha_m(x_i)\right]$$

fonksiyoneline dönüşür. Burada aranan $\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i), ..., \alpha_m(x_i)$ fonksiyonları öyle seçilir ki, seçilmiş bu $\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i), ..., \alpha_m(x_i)$ fonksiyonları

$$\widetilde{F}\left[\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i), ..., \alpha_m(x_i)\right]$$

fonksiyoneline ekstremum değer verir. Burada belli koşulların sağlanılmasıyla bulunmuş yaklaşık $z_m(x_1, x_2, ..., x_n)$ çözümü $m \to \infty$ şartında ele alınmış varyasyon problemin dakik $z(x_1, x_2, ..., x_n)$ çözümüne yakınsar. Bu özellikli $z_m(x_1, x_2, ..., x_n)$ fonksiyonu ele alınmış varyasyon problemin yaklaşık çözümü olur. Kantoroviç metodunu Ritz metodu ila karşılaştırdığımızda Kantoroviç metodu daha dakik yaklaşık çözüm metodudur. Kantoroviç metodunun daha yüksek dakikliği, elemanları

$$z_m(x_1, x_2, ...x_n) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, ..., x_n)$$

formülü ile ifade olunan sınıf, bu açılımda $\alpha_k(x_i)$ katsayıları değişken fonksiyonlar alınabilindiğinden dolayı, elemanları sabit α_k katsayılı

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k W_k(x_1, x_2, ..., x_n)$$

açılımı ile ifade olunan sınıftan daha geniş fonksiyonel sınıf oluşturur. Bu yüzden de geniş sınıfta varyasyon problemini daha yüksek dakiklikle daha az hata ile approksime edebiliriz. Kantoroviç metodunu açıklamak için aşağıdaki özel

$$F(z) = \int_{x_0}^{x_1} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy$$

fonksiyonelini ele alalım. Ele aldığımız bu fonksiyonel alttan $y = \varphi_1(x)$ eğrisi, üstten $y = \varphi_2(x)$ eğrisi, yanlardan $x = x_0$ ve $x = x_1$ doğrularıyla sınırlanmış oxy düzlemi D bölgesinde tanımlanmış ve bu D bölgesinin $\Gamma = \partial D'$ sınırında $z(x, y)$ fonksiyonunun değerinin

$$z(x, y)\big|_{\Gamma} = \psi(x, y)$$

verilmesiyle bu fonksiyonelin ekstremum problemini incelemek gerektiğini varsayalım. Bu problem için koordinat fonksiyonlarının

$$W_1(x, y), W_2(x, y), ..., W_m(x, y), ...$$

dizisini seçelim. Uygun olarak verilmiş varyasyon probleminin çözümünü

$$z_m(x, y) = u_1(x)W_1(x, y) + u_2(x)W_2(x, y) + ... + u_m(x)W_m(x, y)$$

şeklinde arayalım. Bu açılımda $u_k(x)$ fonksiyonları aranan fonksiyonlardır. Burada $u_k(x)$ fonksiyonlarını öyle seçelim ki, $F(z)$ fonksiyoneli ekstremum değerini alsın.

Bu amaçla $z_m(x,y)$ fonksiyonunu varilmiş $F(z)$ fonksiyonelinde $z(x,y)$ fonksiyonunun yerine yazarsak buluruz:

$$F\big(z_m(x,y)\big)=\int_{x_0}^{x_1} dx+\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\left(x,y,z_m(x,y),\frac{\partial z_m}{\partial x},\frac{\partial z_m}{\partial y}\right)dy$$

Burada biz integral altındaki fonksiyon y değişkeninin belli fonksiyonunu olduğundan y değişkenine göre integralemle işlemini yapabiliriz. y değişkenine nazaran integralemle işlemi yapıldıktan sonra $F\big(z_m(x,y)\big)$ fonksiyoneli y değişkenine bağlı olmayıp aşağıdaki şekilde fonksiyonel olur:

$$F\big(z_m(x,y)\big)=\int_{x_0}^{x_1}\varphi\big(x,u_1(x),u_2(x),...,u_m(x),u_1'(x),u_2'(x),...,u_m'(x)\big)dx$$

Bu fonksiyoneldeki $u_1(x),u_2(x),...,u_m(x)$ fonksiyonları öyle seçilir ki, seçilmiş $u_1(x),u_2(x),...,u_m(x)$ fonksiyonlarında $F\big(z_m(x,y)\big)$ fonksiyoneli ekstremum değerini alır. Seçilmiş $u_1(x),u_2(x),...,u_m(x)$ fonksiyonlarında $F\big(z_m(x,y)\big)$ fonksiyonelinin ekstremum değer alması için $u_1(x),u_2(x),...,u_m(x)$ fonksiyonları $F\big(z_m(x,y)\big)$ fonksiyonelinin Euler denklemler sistemini sağlaması gerekir. Yani $u_1(x),u_2(x),...,u_m(x)$ fonksiyonlarını

$$\varphi_{u_1}-\frac{d}{dx}\varphi_{u_1'}=0,$$

$$\varphi_{u_2}-\frac{d}{dx}\varphi_{u_2'}=0,$$

$$\dots$$

$$\varphi_{u_m}-\frac{d}{dx}\varphi_{u_m'}=0$$

denklemler sisteminin çözümleri içinden seçmemiz gerekir. Bu denklemler sistemi ikinci mertebeli adi türevli diferansiyel denklemler sistemi olduklarından bu denklemler sisteminin çözümleri keyfi iki sabit sayılara bağlıdırlar. Bu denklemler sisteminin çözümlerinde iştirak eden keyfi iki sabitleri öyle seçmek gerekir ki, $x=x_0$ ve $x=x_1$ doğruları üzerinde verilmiş sınır şartlar sağlansın.

Örnek 6.4.1. Aşağıdaki

$$F(z)=\int_{-a}^{b}\int_{-b}^{b}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\right]dxdy$$

fonksiyonelinin $D=[-a,a]\text{x}[-b,b]$ dikdörtgeninde

$$z|_{\Gamma=\partial D}=0$$

Sınır şartında ekstremum probleminin Kantoroviç metodunun uygulanması ile yaklaşık çözümünü bulun.

Çözüm: Bu problemin çözümünü

$$z_1=(b^2-a^2)u(x)$$

Şeklinde arayalım. $z_1(x)$ yaklaşık çözümü $y=\pm b$ doğru parçaları üzerinde sınır şartı sağlanır. Verilmiş fonksiyonelde $z=z_1$ aldığımızda fonksiyonel aşağıdaki şekilde yazılır:

$$F(z_1)=\int_{-a}^{a}\left[\frac{16}{15}b^5u'^2+\frac{8}{3}u^2-\frac{8}{3}b^3u\right]dx$$

Bu fonksiyonelin Euler denklemi aşağıdaki şekilde yazılır:

$$u''-\frac{5}{2b^2u}=-\frac{5}{4b^2}.$$

Bu denklem ikinci mertebeli adi türevli sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklemdir. Bu denklemin bir özel çözümü

$$\tilde{u}(x)=\frac{1}{2}$$

olur. Bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$u(x)=c_1ch\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b}+c_2sh\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b}+\frac{1}{2}$$

şeklinde bulunur. Burada c_1, c_2 keyfi sabit sayılardır. c_1 ve c_2 sabitleri

$$z\big|_{x=-a}=0\,,\ z\big|_{x=b}=0$$

uygun olarak

$$u(-a)=0\,,\ u(a)=0$$

Şartlarından seçilir. Böylece burada

$$c_2=0\,,\ c_1=\frac{1}{2ch\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b}}$$

olur. Buradan da

$$u(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{ch\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b}}{ch\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b}}\right)$$

olur. Böylece verilmiş problemin yaklaşık çözümü:

$$z_1(x,y)=\frac{1}{2}\left(b^2-y^2\right)\left(1-\frac{ch\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b}}{ch\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b}}\right)$$

olur. Daha dakik çözüm bulmak için ele aldığımız ekstremum probleminin çözümünü

$$z_2(x,y)=\left(b^2-y^2\right)u_1(x)+\left(b^2-y^2\right)u_2(x)$$

şeklinde arayabiliriz.

6.5. Karakteristik Sayıların ve Karakteristik Fonksiyonların Bulunmasının Varyasyon Metodları

Aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)y'\right)+q(x)y=\lambda y\,, \tag{6.9}$$

$$y(a)=0\,,\ y(b)=0 \tag{6.10}$$

Burada $p(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında sürekli diferansiyellenen olduğu ve her bir $x \in [a.b]$ için $p(x) > 0$ şartını sağladığı varsayılır. $q(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında sürekli önceden verilmiş fonksiyon olduğunu varsayalım. (6.9) denklemine Sturm-Liouville denklemi denir. Dikkate alalım ki (6.9)-(6.10) sınır değer probleminin her bir reel veya kompleks λ sayıları için $[a,b]$ aralığında aynen sıfıra eşit olan trivial $y \equiv 0$ çözümü vardır. (6.9)-(6.10) sınır değer problemine Sturm-Liouville sınır değer problemi denir. Şimdi biz burada aşağıdaki ekstremum problemini ele alalım:

$$J(y) = \int_a^b \left(p(x)y' + q(x)y^2\right)dx \tag{6.11}$$

fonksiyonelinin (6.10) sınır şartlarını ve

$$\int_a^b y^2(x)dx = 1 \tag{6.12}$$

şartını sağlayan ekstremallarını bulun. Bu şartlı ekstremum problemidir. (6.9) denklemi bu şartlı ekstremuma uygun

$$F(y) = \int_a^b \left(p(x)y'^2 + q(x)y^2 - \lambda^2 y^2\right)dx$$

fonksiyonelinin (6.10) şartındaki Euler denklemidir. Burada λ parametresinin öyle değerleri aranır ki, bu değerlerde (6.9)-(6.10) dener değer probleminin trivial olmayan yani $x \in [a,b]$ için $y(x) \neq 0$ şartını sağlayan trivial olmayan çözümleri olsun. λ parametresinin böyle değerlerine (6.9)-(6.10) probleminin karakteristik değerleri, ve bu karakteristik değerlere uygun çözümlere ise (6.9)-(6.10) probleminin karakteristik fonksiyonları denir

$y(x)$ fonksiyonu varyasyon problemin çözümü olduğunda bu çözüm (6.12) şartının sağlanılmasından dolayı aynen sıfıra eşit olmuyor. Aynı zamanda bu $y(x)$ çözümü (6.9)-(6.10) probleminin karakteristik sayısına ve bu karakteristik değere uygun karakteristik fonksiyonuna (6.11) fonksiyonelinin (6.10) sınır şartlarında ve (6.12) şartındaki karakteristik değeri ve bu karakteristik değere uygun karakteristik fonksiyonu denir.

(6.9)-(6.10) probleminin $y(x)$ karakteristik fonksiyonu için (6.12) şartı sağlandığında bu karakteristik fonksiyona (6.9)-(6.10) probleminin normalleştirici karakteristik fonksiyonu denir. (6.11), (6.10), (6.12) varyasyon probleminin karakteristik sayılarının ve karakteristik fonksiyonlarının çok önemli olan özellikleri vardır:

1) λ_n ve λ_m sayıları (6.11) fonksiyonelinin (6.10) ve (6.12) şartlarında iki farklı karakteristik değerleri $y_n(x)$ ve $y_m(x)$ fonksiyonları bu karakteristik değerlere uygun karakteristik fonksiyonları olduklarında bu fonksiyonlar $[a,b]$ aralığında ortogonal fonksiyonlar olurlar, yani

$$\int_a^b y_n(x)y_m(x)dx = 0 \quad (m \neq n)$$

şartı sağlanır.

2) (6.11) fonksiyonelinin tüm karakteristik değerleri reel sayılardı.

3) λ_n sayısı (6.11) fonksiyonelinin karakteristik değere uygun normalleştirilmiş karakteristik fonksiyonu olduğunda, o zaman

$$J(y_n(x) = \lambda_n$$

eşitliği sağlanır.

4) Karakteristik değerlerin en küçüğü (6.11) fonksiyonelinin (6.10) ve (6.12) şartlarındaki minimum değeri olur.

Örnek 6.5.1. $$y'' + \lambda^2 y = 0$$

$$y(-1) = 0,\ y(1) = 0$$

probleminin birinci karakteristik değerini bulun.

Çözüm: Bu problemi çözmek için

$$F(y) = \int_{-1}^{1} y'^2 dx$$

fonksiyonelinin

$$y(-1) = 0, \; y(1) = 0$$

sınır şartlarında ve

$$\int_{-1}^{1} y^2(x) dx = 1$$

şartındaki şartlı ekstremum problemini

$$J(y, \lambda) = \int_{-1}^{1} \left(y'^2 - \lambda^2 y^2 \right) dx$$

fonksiyonelinin

$$y(-1) = 0, \; y(1) = 0$$

şartındaki ekstremum problemine (minimumunun bulunması problemine) getirip çözmemiz gerekir. Sonuncu problemin Euler denklemi

$$y'' + \lambda^2 y = 0$$

$$y(-1) = 0, \; y(1) = 0$$

diferansiyel denklemi olur. Bu denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$$

şeklinde yazılır. Sınır şartların sağlanmasından

$$\left. \begin{aligned} c_1 \cos \lambda - c_2 \sin \lambda = 0 \\ c_1 \cos \lambda + c_2 \sin \lambda = 0 \end{aligned} \right\} \tag{6.13}$$

sistemini buluruz. Bu sistemin c_1 ve c_2 katsayılarına nazaran sıfırdan farklı çözümünün olması için bu sistemin determinantının sıfıra eşit olması gerek ve yeter şarttır. Bu şarttan

$$\sin 2\lambda = 0$$

denklemini buluruz. Bu denklemi çözerek

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{2},\ n = 1,2,3,...$$

değerlerini buluruz. Böylece

$$\lambda_1^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

değerine uygun

$$y_1 = \cos\frac{\pi}{2}x,\ \left(\lambda_1 = \frac{\pi}{2}\right)$$

$\lambda_2 = \pi$ değerine uygun

$$y_2(x) = \sin \pi x,$$

$\lambda_3 = \frac{3}{2}\pi$ değerine uygun

$$y_3(x) = \cos\frac{3\pi}{2}x$$

karakteristik fonksiyonlarını buluruz. Şimdi çift karakteristik fonksiyonları yaklaşık olarak çift dereceli polinomlar şeklinde bulalım. Böylece burada Ritz metodunda koordinat fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde seçelim:

$$\varphi_k = x^{2k-2} - x^{2k},\ k = 1,2,...$$

J fonksiyonelini

$$y_m(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \varphi_k(x)$$

Fonksiyonları üzere minimalleştirelim. Önce,

$$J = c_1\left(\frac{8}{3} - \frac{16}{5}\lambda^2\right)$$

olur. c_1 katsayısını bulmak için

$$\frac{\partial J}{\partial c_1} = 2c_1\left(\frac{8}{3} - \frac{16}{15}\lambda^2\right) = 0$$

Burada $c_1 \neq 0$ olması gerektiğinden

$$\lambda^2 = 2{,}5\,;$$

bulunur. Şimdi

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$$

seçelim. O zaman

$$J = c_1^2\left(\frac{8}{3} - \frac{16}{15}\lambda^2\right) + 2c_1c_2\left(\frac{8}{15} - \frac{16}{105}\lambda^2\right) + c_2^2\left(\frac{88}{105} - \frac{16}{315}\lambda^2\right).$$

c_1 ve c_2 katsayıları aşağıdaki sistemden bulunur.

$$\frac{\partial J}{\partial c_1} = c_1\left(\frac{16}{3} - \frac{32}{15}\lambda^2\right) + c_2\left(\frac{16}{5} - \frac{32}{105}\lambda^2\right) = 0\,,$$

$$\frac{\partial J}{\partial c_2} = c_1\left(\frac{16}{15} - \frac{32}{15}\lambda^2\right) + c_2\left(\frac{176}{105} - \frac{32}{315}\lambda^2\right) = 0\,.$$

Bu sistemin c_1 ve c_2'ye nazaran sıfırdan farklı çözümü olması için sistemin determinantı sıfıra eşit olması gerek ve yeter şarttır.

$$\Delta(\lambda) = 0$$

şartından

$$\lambda^4 - 28\lambda^2 + 63 = 0$$

denklemini buluruz. Bu denklemi çözerek

$$\lambda_1^2 = 2{,}46744\,,\ \lambda_2^2 = 25{,}53256$$

ama dakik çözüm

$$\lambda_1^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \approx 2{,}46744\,,\ \lambda_2^2 = \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 \approx 22{,}20661$$

olur.

6.6. Karakteristik Değerlerin ve Karakteristik Fonksiyonların Bulunmasında Reley Prensibi

Aşağıdaki karakteristik değer problemini ele alalım:

$$L(y)=\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=\lambda r(x)y, \qquad (6.14)$$

$$\left.\begin{aligned} R_1(y)&=\alpha_1 y(a)+\beta_1 y'(a)=0, \quad \alpha_1^2+\beta_1^2>0,\\ R_2(y)&=\alpha_2 y(b)+\beta_2 y'(b)=0, \quad \alpha_2^2+\beta_2^2>0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.15)$$

Burada $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $r(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında tanımlanmış önceden verilmiş sürekli fonksiyonlardı ve $p(x)>0$ şartının her bir $x\in[a,b]$ için sağlandığı varsayılır. Burada

$$D=\left\{y\in C^2_{[a,b]} : R_1(y)=0, R_2(y)=0\right\} \qquad (6.16)$$

kümesini ele alalım. Bu D kümesinde, yani her bir $y\in D$ için

$$\int_a^b yL(y)dx\geq 0 \qquad (6.17)$$

Şartının sağlandığını varsayalım. (6.17) şartı sağlandığında (6.14)-(6.15) sınır değer probleminin yalnız ve reel karakteristik değerleri olur. Karakteristik değerlerin bulunması için aşağıdaki varyasyon problem ele alınır:

$y\in D$ için

$$\int_a^b r(x)y^2dx>0 \qquad (6.18)$$

şartını sağlayan $y(x)\in D$ fonksiyonlarından

$$\frac{\int_a^b yL(y)dx}{\int_a^b r(x)y^2dx} \qquad (6.19)$$

fonksiyoneline minimum değer veren $y(x)\in D$ fonksiyonunu bulun.

Var sayalım ki, $y=\psi_1(x)$ fonksiyonu burada ele aldığımız problemin çözümüdür. Yani varsayalım ki, bu $y=\psi_1(x)$ fonksiyonu (6.18) şartını sağlasın ve (6.19) fonksiyoneline minimum değer versin ve $y=\psi_1(x)\in D$. O zaman

$$\lambda_1=\min_{y\in D}\frac{\int_a^b yL(y)dx}{\int_a^b r(x)y^2dx}=\frac{\int_a^b \psi_1 L(\psi_1)dx}{\int_a^b r(x)\psi_1^2(x)dx} \tag{6.20}$$

eşitliği ile bulunan λ_1 sayısı (6.14)-(6.15) probleminin en küçük karakteristik değeri, $\psi_1(x)$ fonksiyonu ise λ_1 karakteristik değerine uygun (6.14)-(6.15) probleminin karakteristik fonksiyonu olur. Şimdi (6.18) şartının sağlandığını, $y\in D$ için ek olarak

$$\int_a^b r(x)\psi_1(x)y(x)dx=0 \tag{6.21}$$

ortogonallik şartında sağlandığını varsayalım. O zaman (6.19) fonksiyonelinin (6.18) ve (6.21) şartlarında bu (6.19) fonksiyoneline minimum değer veren bir $\psi_2(x)\in D$ çözümü olur. (6.19) fonksiyonelinin $y(x)=\psi_2(x)$ fonksiyonundaki minimum değeri olan λ_2 sayısı $\lambda_2\geq\lambda_1$ şartını sağlar ve (6.14)-(6.15) probleminin bir sonraki karakteristik değeri olur. $\psi_2(x)$ fonksiyonu ise (6.14)-(6.15) probleminin λ_2 karakteristik değerine uygun karakteristik fonksiyonu olur. Burada (6.21) şartından $\psi_2(x)$ fonksiyonunun $\psi_1(x)$ fonksiyonuna ortogonal olduğu, yani $\psi_2(x)\perp\psi_1(x)$ ortogonallik şartını sağlandığı da görülür. Şimdi varsayalım ki, (6.14)-(6.15) probleminin k sayıda

$$\lambda_1\leq\lambda_2\leq...\leq\lambda_k \qquad 6.\ (22)$$

Şartlarını sağlayan karakteristik değerleri ve bu $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$ karakteristik değerlerine uygun

$$\psi_1(x),\psi_2(x),...,\psi_k(x) \tag{6.23}$$

karakteristik fonksiyonları bulunmuştur. Bu karakteristik fonksiyonların çift-çift (6.21) ortagonallik şartını sağladığını varsayalım. O zaman (6.19) fonksiyonelinin D kümesinde (6.18) şartını ve

$$\int_a^b r(x)\psi_\nu(x)y(x)dx = 0\,,\ \nu = 1,2,...,k \tag{6.24}$$

Şartında şartlı minimum probleminin $\psi_{k+1}(x) \in D$ çözümünü bulmamız gerekir. Burada

$$\lambda_{k+1} = \min_{y\in D} \frac{\int_a^b yL(y)dx}{\int_a^b r(x)y^2dx} = \frac{\int_a^b \psi_{k+1}L(\psi_{k+1})dx}{\int_a^b r(x)\psi_{k+1}^2(x)dx} \tag{6.25}$$

olur ve $\psi_{k+1}(x)$ çözümü (6.14)-(6.15) probleminin λ_{k+1} karakteristik değerine uygun karakteristik fonksiyonu olur. Burada her bir $x \in [a,b]$ için $r(x) > 0$ şartı sağlandığında her bir $y \in D$ için

$$\lambda_1 \le \frac{\int_a^b yL(y)dx}{\int_a^b r(x)y^2dx} \tag{6.26}$$

eşitsizliği sağlanır. Birçok hallerde (6.26) şartı kullanılır. (6.26) şartına Releyprensibi denir.

Örnek 6.6.1. Reley prensibini kullanarak

$$-y'' = \lambda y\,, \tag{6.27}$$

$$y'(0) = 0\,,\ y(1) = 0 \tag{6.28}$$

sınır değer probleminin λ_1 karakteristik değerini üstten değerlendirin.

Çözüm: $y(x) = 1 - x^2 \in D = \{y \in C^2_{[0,1]} : y'(0) = 0, y'(1) = 0\}$

Bu yüzden Reley prensibini kullanarak λ_1 karakteristik değeri için aşağıdaki değerlendirmeyi yaparız:

$$\lambda_1 \le \frac{\int_a^b yL(y)dx}{\int_a^b r(x)y^2dx} = \frac{\int_a^b \left(1-x^2\right)2dx}{\int_a^b 1\left(1-x^2\right)^2 dx} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{15}} = 2{,}5$$

Ama dikkate alalım ki, (6.27)-(6.28) probleminin en küçük karakteristik değeri

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4} \approx 2{,}4674$$

olur.

Not: Bu problemi çözmek için Kantoroviç metodu da kullanılabilir.

SONUÇ

Bu çalışmada Hilbert uzayında operatör denklemlerin varyasyon metodlarının uygulanması ile çözüm yöntemleri ele alınıp öğrenildi.

İkinci mertebeli adi türevli diferansiyel denklemler ve Poisson ve Laplace denklemleri için lineer sınır değer problemlerinin varyasyon probleme getirilmesi ele alınıp öğrenildi.

Genel hal için Ritz metodu gösterilip Schturm-Liouville sınır değer problemi ve Laplace denklemi için Dirichlet probleminin Ritz metodunun uygulanması ile yaklaşık çözümleri gösterildi.

Reel ve kompleks Hilbert uzayında verilmiş operatör denklemlerin eşdeğer varyasyon probleme getirilmesi örnekler ile ele alınıp incelendi.

KAYNAKLAR

1. Collatz, L., Functionalanalyisis and Numerische Mathematik, Springer-Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1964.

2. Michlin, S.G., Variatsionnıe method v matematiçeskoy Fizike, Gostexizdat, M.1957.

3. Balakrishnan, A.V., Applied Functional Analysis, Springer-Verlag Newyork, 1976.

4. Mixlin S.G., Pryamiye Metod, Mathematic Fiziki, M.1962.

5. Elsgols, L. E., Calculus of Variations Pergamon Press, Ltd., Newyork, 1961.

6. Bliss, G.A., Lectures on the Calculus of Variations, University of Chiago Press, Chiago, 1963.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Kayseri'nin Pınarbaşı ilçesine bağlı Karahacılı Köyünde doğan Saim Zafer İBİŞ, ilköğrenimini Hacı Osman Güldüoğlu İlk Öğretim Okulunda, orta öğrenimini ise Kayseri Lisesi'nde ve yüksek öğrenimini de 2005–2009 yılları arasında Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde tamamlamıştır. Şubat 2010'da ise Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans yapmaya başlamıştır. Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV danışmanlığında hazırladığı "Hilbert Uzayında Operatör Denklemlerin Varyasyon Metodları ile Çözüm Yöntemleri" başlıklı tezine devam etmektedir.

İletişim Bilgileri

Adres: Altınoluk Mah. Ersözlü Sok. B Blok No:4/17

38050 Melikgazi/KAYSERİ

Cep: 0506 774 91 21

E-posta: saim_387@hotmail.com