T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

KISMİ TÜREVLİ LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRLER VE ONLARIN GREEN FONKSİYONUNUN İNŞASI ÜZERİNE

Fatma ARSLAN

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2012

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

KISMİ TÜREVLİ LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRLER VE ONLARIN GREEN FONKSİYONUNUN İNŞASI ÜZERİNE

Fatma ARSLAN

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2012

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 70111310003 numaralı öğrencisi Fatma ARSLAN'ın hazırladığı "Kısmi Türevli Lineer Diferansiyel Operatörler ve Onların Green Fonksiyonunun İnşası Üzerine" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezi ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 24/12/2012 Pazartesi günü saat 10:00'da yapılmış, tezin onayına OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Üye : Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV (Danışman)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 10/01/2013 tarih ve 01 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

10/01/2013

Enstitü Müdürü
Doç. Dr. Hidayet ÇETİN

İÇİNDEKİLER

KISMİ TÜREVLİ LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRLER VE ONLARIN GREEN FONKSİYONUNUN İNŞASI ÜZERİNE

Fatma ARSLAN

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2012; Sayfa: 53

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ÖZET

Bu tezde kısmi türevli lineer diferansiyel operatörlerin Green fonksiyonunun inşası problemi ele alındı incelendi ve öğrenildi. Özellikle δ-fonksiyonun özelliklerinin kullanılmasıyla kısmi türevli lineer diferansiyel denklemler için başlangıç değer , sınır değer-başlangıç değer problemlerinin Green fonksiyonunun inşa yöntemi ele alındı ve incelendi. Bu tezde δ-fonksiyonun tanımı verildi. δ-fonksiyonun Fourier serisine açılımı ve Fourier dönüşümü gösterildi. δ-fonksiyonun Fourier serisine açılımının, Fourier açılımının, Fourier dönüşümünün ve diğer özelliklerinin kullanımı ile ısı iletişimi denklemleri ve dalga denklemleri için başlangıç değer ve sınır değer-başlangıç değer problemlerinin Green fonksiyonları inşa edildi ve ele alınmış problemlerin uygun Green fonksiyonlarının yardımıyla çözümleri yazıldı.

Anahtar Kelimeler: Green fonksiyonu, δ-fonksiyon, kısmi türevli lineer diferansiyel opeatör, ısı iletişi denklem, dalga denklemi

PARTIAL LINEAR DIFFERENTIAL OPERATORS AND CONSTRUCTION OF THEIR GREEN'S FUNCTION

Fatma ARSLAN

Bozok University
Graduate School of Natural andApplied Sciences
Department of Mathematics
Master of ScienceThesis

2012; Page: 53

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ABSTRACT

In this thesis, the problem of the construction of Green’s function of partial lineer differential operators discussed, studied and learned. Especially, with the use of δ- function for the initial value of partial differential equations, boundary value problems were constructed. In this thesis, the function and the Fourier transform of δ - were shown. We constructed the Green’s functions of the boundary value and initial value problems for the wave equation and the heat equation. We used the Fourier series, Fourier transform and their propertions in these constructions. We found the solutions of each problem with the help of suitable Green’s functions.

Keywords: Green function, δ-function, partial lineer differential operators, heat equations, wave equations

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve alakasını kesmeyen, ortaya çıkan her türlü bilimsel problemin çözümünde yardımlarını gördüğüm tez danışmanım Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV'e, bölüm başkanımız Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN'e, hocalarım Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU ile Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN'a, ayrıca bana her zaman destek olan babam Gazi ARSLAN, annem Satı ARSLAN, abim İbrahim ARSLAN ve kardeşim Ramazan ARSLAN'a sonsuz teşekkür ederim.

SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$[a,b]$	:	Kapalı Reel Sayı Aralığı
$C_{[a,b]}$	:	$[a,b]$ Aralığında Tanımlanmış Sürekli Fonksiyonların Uzayı
$C^n_{[a,b]}$	:	$[a,b]$ Aralığında Tanımlanmış n.Mertebeden Diferansiyellenebilen Sürekli Fonksiyonların Uzayı
$l(y)$	:	Diferansiyel İfade
L	:	Lineer diferansiyel operatörü $\ell(u)$ diferansiyel ifadesinin ve $U_v(u)=0$ $v=1,2,\ldots\leq n$ sınır şartlarının doğurduğu operatördür
L^{-1}	:	L Operatörünün Tersi Olan Operatör
L^*	:	L Operatörünün Eşlenik Operatörü
$G(x,\xi)$	:	Green Fonksiyonu
$P^{(n-2)}(x)$	:	*P(x)* Fonksiyonunun *x* e göre (*n*-*2*). Mertebeden Türevi
$\{\delta_n(x)\}$	:	Fonksiyonel Dizi
δ	:	Delta İşareti
$G(x,\xi,\lambda)$	:	λ Parametresine Bağlı Green Fonksiyonu
sin	:	Sinüs Fonksiyonu
cos	:	Kosinüs Fonksiyonu
$\sum$	:	Toplam Sembolü
$\ell(u)$	:	Lineer diferansiyel ifadesini gösteren semboldür
$U_v(u)$	:	Lineer sınır şartlarını gösteren semboldür
I	:	Birim operatördür
$L-\lambda I$	:	Parametreye bağlı operatördür
$f*g$	:	*f(x)* ve *g(x)* fonksiyonlarının bürünmesi olup $f*g=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)g(\xi)d\xi$ formülü ile tanımlanır
λ	:	Parametredir
ξ	:	Parametredir

1. GİRİŞ

Kısmi türevli lineer diferansiyel denklemler teorisinde kısmi türevli diferansiyel denklemlerle bağlı sınır değer problemlerinin, başlangıç değer problemlerinin ve karışık sınır değer başlangıç değer problemlerinin çözümünde, dağılmış parametreli sistemlerin kontrolü teorisinde Green fonksiyonu metodu çok geniş uygulanmaktadır.

Green fonksiyonu metodunun önemini göstermek için burada, matematiksel fizik problemlerinde sık sık rastlanan lineer

$$\ell(u) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{s=0}^{n} P_{ks}\,(x,t)\,\frac{\partial^{k+s}u}{\partial t^k \partial x^s} = f(x,t), x_0 < x < x_1\,, t > t_0 \qquad (1.1)$$

diferansiyel denkleminin

$$U_v(u) = \sum_{i=0}^{1}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{n-1} a_{viks}\,\frac{\partial^{k+s}u}{\partial t^k \partial x^s}\bigg|_{x=x_i} = 0, t > t_0, v = 1,2,\ldots \le n \qquad (1.2)$$

homojen sınır şartlarını ve

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\bigg|_{t=t_0} = 0\,, \qquad x_0 < x < x_1\,, k = 0,1,2,\ldots.,m-1 \qquad (1.3)$$

sıfır başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün bulunmasının sınır değer başlangıç değer problemini ele alalım (burada a_{viks} sabit katsayılardır)

biz burada

$$\ell(u) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{s=0}^{n} P_{ks}\,(x,t)\,\frac{\partial^{k+s}u}{\partial t^k \partial x^s}$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$U_v(u) = 0 \;\;, v = 1,2,\ldots \le n$$

sınır şartlarının ve

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=t_0} = 0, k = 0,1,2, \ldots., m-1$$

başlangıç şartlarının doğurduğu kısmi türevli lineer diferansiyel operatörü L ile gösterirsek o zaman (1.1), (1.2), (1.3) sınır değer başlangıç değer problemi kısaca olarak

$$Lu = f(x,t) \tag{1.4}$$

operatör denklemi şeklinde yazılabilir. L operatörünün veya (1.1), (1.2), (1.3) probleminin G(x,ξ,t,τ) aşağıdaki

$$Lu = \delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \tag{1.5}$$

operatör denkleminin veya

$$\ell(u) = \delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \tag{1.6}$$

$$U_v(u) = 0 \ , v = 1,2, \ldots \leq n \tag{1.7}$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=t_0} = 0 \ , \ x_0 < x < x_1 \ , k = 0,1,2, \ldots., m-1 \tag{1.8}$$

sınır değer probleminin çözümüne denir.

Burada *f(x,t)* fonksiyonu yerine aldığımız $\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)$ fonksiyonu δ-fonksiyonudur. *f(x,t)* fonksiyonu $x_0 \leq x \leq x_1$, $t_0 \leq t \leq t_1$, bölgesinde (dikdörtgeninde) sürekli fonksiyon olduğunda

$$f(x,t) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} f(\xi,\tau)\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)\, d\xi d\tau \tag{1.9}$$

eşitliği sağlanır. Matematikte (1.9) eşitliği δ -fonksiyonunun tanımı olarak alınır.

L operatörünün Green fonksionu *G*(x,ξ,t,τ) belli olduğunda veya (1.1), (1.2), (1.3) probleminin çözümü

$$u(x,t) = \int_{t_0}^{t} \int_{x_0}^{x_1} G(\mathrm{x}, \xi, \mathrm{t}, \tau)\, f(\xi,\tau) d\xi d\tau \equiv L^{-1} f \qquad (1.10)$$

formülü ile bulunur.

(1.10) formülünden L operatörünün Green fonksiyonunun aynı zamanda kısmi türevli lineer diferansiyel L operatörünün tersi olan lineer integral L^{-1} operatörünün çekirdeği olduğu görülür.

(1.10) eşitliği aynı zamanda L^{-1} ters operatörünün tanımıdır.

Biz bu çalışmada δ- fonksiyonunun özelliklerini kullanarak kısmi türevli lineer diferansiyel denklemler için sınır değer başlangıç değer problemlerinin Green fonksiyonun inşa yöntemlerini öğrendik ve birçok örneklerde ele aldığımız problemlerinin Green fonksiyonlarının inşa yöntemlerini gösterdik. Öncelikle Bölüm 2' de δ- fonksiyonunun tanımı verildi ve bazı özellikleri gösterildi. Bölüm 3' de δ-fonksiyonunun uygulanmasıyla bir serbest değişkene bağlı L diferansiyel operatörünün ve L-λI diferansiyel operatörlerinin Green fonksiyonlarının inşa metodu verildi ve bu operatörlerin Green fonksiyonlarının bulunmasına ait örnek gösterildi.

Bölüm 3' de Green fonksiyonun inşası için gösterilmiş yöntem uygulanarak Bölüm 4 ve 5' de ısı iletişimi denklemi için Bölüm 6 ve 7' de ise dalga denklemleri (titreşim denklemleri) için başlangıç değer ve sınır değer başlangıç değer problemlerinin Green fonksiyonları uygun olarak inşa edilmiş ve ele alınmış problemlerinin uygun Green fonksiyonlarının yardımıyla çözümleri yazılmıştır.

2. δ-FONKSİYON

δ- fonksiyonun tanımı, δ- fonksiyonunun Fourier serisine açılımı ve δ-fonksiyonunun Fourier dönüşümü aşağıda verilmiştir.

2.1. δ-Fonksiyonun Tanımı

Matematik analizde fonksiyonel dizilerin yakınsaklığının farklı farklı çeşitleri tanımlanır.

Mesela (a,b) aralığında tanımlanmış,

$$u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),\ u_4(x), \ldots.\ u_n(x) \tag{2.1}$$

fonksiyonel dizisinin düzgün yakınsaklığı, orta quadratik yakınsaklığı, zayıf yakınsaklığı v.b. yakınsaklıkları tanımlanır.

Hatırlatalım ki , (2.1) dizisi için keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı alındığında öyle bir N> 0 bulunursa *n*> N şartını sağlayan her *n* doğal sayısı için ve her bir *p*=1,2,3, … doğal sayıları için ve her bir $x \in (a,b)$ için

$$\left|u_{n+p}(x) - u_n(x)\right| < \varepsilon \tag{2.2}$$

eşitsizliği sağlandığında (2.1) dizisi (a,b) aralığında düzgün yakınsaktır denir.

(2.1) dizisi için keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı alındığında öyle bir N> 0 bulunursa ki *n*> N şartını sağlayan her *n* doğal sayısı için ve her bir *p*=1,2,3, … doğal sayıları için

$$\int_a^b \left|u_{n+p}(x) - u_n(x)\right|^2 dx < \varepsilon \tag{2.3}$$

eşitsizliği sağlandığında (2.1) dizisi ortaquadretik yakınsaktır denir.

(2.1) dizisi için (a,b) aralığında sürekli olan her bir f(x) fonksiyonu için sayısal

$$\int_a^b f(x)u_n(x)\,dx\,, \qquad n = 1,2,3, \ldots \tag{2.4}$$

(2.4) dizisi yakınsak dizi olduğunda (2.1) fonksiyonel dizisi (a, b) aralığında zayıf yakınsaktır denir.

Yakınsak dizilerin her bir hali için uygun olarak dizinin limiti fonksiyon tanımlanır. Ama burada dizinin limiti fonksiyonu dizinin elemanlarının dahil olduğu sınıfa dahil olmayabilir. Mesela (2.1) dizisinin elemanları (a,b) aralığında sürekli olan fonksiyonlar sınıfında olduğunu varsayalım. O zaman (2.1) dizisi (a,b) aralığında düzgün yakınsak olduğunda bu dizinin limiti fonksiyonuda (a,b) aralığında sürekli fonksiyon olur. Ama (2.1) dizisi ortalama yakınsak olduğunda veya zayıf yakınsak olduğunda bu özellik genelde sağlanmıyor.

Ama yakınsak dizilerin limitleri bu dizilerin dahil olduğu sınıfa dahil olmadığında ele alınmış dizinin dahil olduğu sınıf öyle bir genişletilir ki, bu sınıfta yakınsak dizilerin limitleri genişlendirilmiş sınıfa dahil olur. Böylece genişlendirilmiş sınıf ele alınmış sınıfın elemanlarından ve bu sınıfın yakınsak dizilerinin limit fonksiyonlarından oluşmuş sınıf olur.

Burada zayıf yakınsak anlamda limit fonksiyon tanımladığımızda $\{u_n(x)\}$ ve $\{v_n(x)\}$ fonksiyonel dizileri zayıf yakınsaklık anlamda equivalent oldukları halde bu dizlerin aynı limit fonksiyonu olur.

Hatırlatalım ki, (a,b) aralığında sürekli olan her bir f(x) fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\big(u_n(x)-v_n(x)\big)dx=0 \qquad (2.5)$$

şartı sağlandığında $\{u_n(x)\}$ ve $\{v_n(x)\}$ dizileri (a,b) aralığında equivalent dizilerdir denir.

Burada aşağıdaki yöntemle $\{\delta_n(x)\}$ dizisini tanımlayalım. Reel $(-\infty, +\infty)$ ekseninden bir $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ noktasını alalım. $\varepsilon_n > 0$ sayısının yardımıyla $(x_0-\varepsilon_n, x_0+\varepsilon_n)$ aralığını tanımlayalım. $(x_0-\varepsilon_n, x_0+\varepsilon_n)$ aralığının dışında sıfıra eşit olan ve $(x_0-\varepsilon_n, x_0+\varepsilon_n)$ aralığında negatif olmayan $\{\delta_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisini ele alalım. $\{\delta_n(x)\}$ dizisinin aşağıdaki şartlarını sağladığını varsayalım:

$n \to \infty$ şartından $\varepsilon_n \to 0$

$a < x_0 < b$ ve her bir n doğal sayısı için

$$\int_a^b \delta_n(x)dx = 1 \tag{2.6}$$

olsun.

Bu şartları sağlayan $\{\delta_n(x)\}$ fonksiyonel dizisine x_0 noktasının lokal normalleştirilmiş dizisi denir.

$\{\delta_n(x)\}$ dizisi zayıf yakınsak dizidir. Gerçektende (a,b) aralığında sürekli olan keyfi f(x) fonksiyonunu alalım.

O zaman $x_0 \notin [a,b]$ aldığımızda öyle n_0 doğal sayısı bulunur ki $n > n_0$ için $\varepsilon_n < \min\{|x_0 - a|, |x_0 - b|\}$. Buradanda $n > n_0$ için $\delta_n(x) \equiv 0$, her bir $x \in [a,b]$ olduğu bulunur. Bu yüzdende $x_0 \notin [a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\delta_n(x)dx = 0 \tag{2.7}$$

olur.

Şimdi $x_0 \in (a,b)$ halini ele alalım. bu hal için öyle n_0 doğal sayısı bulunur ki, her bir $n > n_0$ için ($x_0 - \varepsilon_n, x_0 + \varepsilon_n$)$\subset [a,b]$ olur. Böylece $n > n_0$ için

$$\int_a^b f(x)\delta_n(x)dx = \int_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n} f(x)\delta_n(x)dx \tag{2.8}$$

olur. (2.8)eşitliğinin sağ yanındaki integrale orta değer teoremini uygulayarak buluruz.

$$\int_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n} f(x)\delta_n(x)dx = f(\xi_n) \int_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n} f(x)\delta_n(x)dx = f(\xi_n). \tag{2.9}$$

Burada $\xi_n \in [x_0 - \varepsilon_n, x_0 + \varepsilon_n]$ ve $n \to \infty$ şartında $\xi_n \to x_0$ olur. Bu yüzdende

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\delta_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = f(x_0) \qquad (2.10)$$

Özel halde $f(x) \equiv 1$ aldığımızda

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \delta_n(x)dx = \begin{cases} 1, x_0 \in [a,b] \\ 0, x_0 \notin [a,b] \end{cases} \qquad (2.11)$$

olduğu bulunur.

$\{\delta_n(x)\}$ dizisinin limit elemanına x_0 noktasının δ- fonksiyonu denir ve $\delta(x, x_0)$ şeklinde gösterilir.

Hatırlatalım ki $\{u_n(x)\}$ dizisi (a,b) aralığında zayıf yakınsak dizi olduğunda ve u(x) fonksiyonu (a,b) aralığında $\{u_n(x)\}$ dizisinin zayıf limiti olmakla $\{u_n(x)\}$ dizisinin dahil olduğu sınıfa dahil olmadığında , $f(x).u(x)$ çarpımının integrali aşağıdaki formülle tanımlanır.

$$\int_a^b f(x)u(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)u_n(x)dx \qquad (2.12)$$

Bu tanımdan aşağıdaki formül bulunur.

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\delta_n(x)dx = \int_a^b f(x)\delta(x, x_0)dx = f(x_0) \qquad (2.13)$$

(2.13) eşitliği δ- fonksiyonunun tanımı olarak alınır.

2.2. δ-Fonksiyonunun Fourier Serisine Açılımı, δ-Fonksiyonunun Fourier Dönüşümü

$\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sisteminin $[a,b]$ aralığında tanımlanmış reel değerli fonksiyonların ortonormal tam sistemi olduğunu varsayalım. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sisteminin fonksiyonları için

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \tag{2.14}$$

eşitliği sağlandığında $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sisteminin $[a,b]$ aralığında ortonormal sistem oluşturur denir.

$[a,b]$ aralığında tanımlanmış f(x) fonksiyonlarının W sınıfını ele alalım. W sınıfından alınmış her bir f(x) fonksiyonunun $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal sistemi üzere Fourier serisi $[a,b]$ aralığında tanımlanmış f(x) fonksiyonuna yakınsadığında, yani

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)\, \varphi_n(x) = f(x) \tag{2.15}$$

$$(f, \varphi_n) = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \tag{2.16}$$

(2.15), (2.16) açılımı her bir $f(x) \in W$ için sağlandığında $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi W sınıfında tam sistem oluşturur denir. $\delta(x, x_0)$ fonksiyonunun $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ tam ortonormal sistemi üzere Fourier serisine açılımını bulalım. Bunun için $\delta(x, x_0)$ fonksiyonunun $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi üzere,

$$\delta(x, x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)\, \varphi_n(x) \tag{2.17}$$

(2.17) şeklinde açıldığını varsayalım bu açılımdaki $a_n(x_0)$ katsayıları aranan katsayılardır. $a_n(x_0)$ katsayılarını bulmak için, (2.17) eşitliğinin her iki tarafını $\varphi_n(x)$ fonksiyonu ile çarpıp ortogonal oldukları $[a,b]$ aralığında integralleyelim. O zaman

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases} \tag{2.18}$$

eşitliğini kullanarak $a_n(x_0)$ katsayıları için aşağıdaki eşitliği buluruz.

$$a_n(x_0) = \int_a^b \delta(x, x_0)\varphi_n(x)\, dx \tag{2.19}$$

(2.19) eşitliğinin sağ yanında $\delta(x, x_0)$ fonksiyonunun (2.13) formülü ile belirlenen tanımını kullanarak

$$a_n(x_0) = \varphi_n(x_0) \tag{2.20}$$

eşitliğini buluruz.

Böylece $\delta(x, x_0)$ fonksiyonun $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ tam ortonormal sistemi üzere Fourier serisine açılımı

$$\delta(x, x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\, \varphi_n(x_0) \tag{2.21}$$

şeklinde bulunur. Bu açılımdan

$$\delta(x, x_0) = \delta(x_{0,} x) \tag{2.22}$$

eşitliği bulunur.

Özel halde $\delta(x, x_0)$ fonksiyonunun aşağıdaki açılımları yazılır:

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty} cos\frac{n\pi}{l}(x - x_0) \quad , -l \leq \ x \ \leq l \tag{2.23}$$

$$\delta(x-x_0)=\frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i.\frac{n\pi}{l}(x-x_0)}, \qquad -l\le x\le l \tag{2.24}$$

$$\delta(x-x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}sin\frac{n\pi}{l}x_0 sin\frac{n\pi}{l}x \qquad 0\le x\le l \tag{2.25}$$

Şimdi burada $\delta(x,x_0)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulalım, bu amaçla Fourier dönüşümünün tanımına dayanarak aşağıdaki eşitliği buluruz.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x,x_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}dx=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x_0} \tag{2.26}$$

Bu eşitliği ters Fourier dönüşümünde kullanarak buluruz.

$$\delta(x,x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x_0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x-x_0)}\,\mathrm{d}\omega \tag{2.27}$$

(2.27) formülünden

$$\delta(x-x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}cos\,\omega(x-x_0)\mathrm{d}\omega \tag{2.28}$$

açılımını buluruz.

3. δ-FONKSİYONUNUN UYGULANMASIYLA BİR SERBEST DEĞİŞKENE BAĞLI L DİFERANSİYEL OPERATÖRÜNÜN VE L-λI DİFERANSİYEL OPERATÖRÜNÜN GREEN FONKSİYONLARININ İNŞASI

Bu kısımda L diferansiyel operatörünün aşağıdaki eşitlikle tanımlanan

$$\ell(y) = P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y \tag{3.1}$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$U_v(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^v \, y_a^{(k)} + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k^v y_b^{(k)} = 0\,, \quad v = 1,2,3,\dots n \tag{3.2}$$

sınır şartlarının doğurduğu yalnız serbest $x \in [a,b]$ değişkenine bağlı diferansiyel operatör olduğunu varsayalım. (3.1) ifadesinde $P_0(x) \not\equiv 0$, $P_1(x),\dots,P_n(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında tanımlanmış sürekli fonksiyonlar ve önceden verilmiş fonksiyonlar olduklarını varsayarız. (3.2) sınır şartlarında α_k^v ve β_k^v katsayıları önceden verilmiş sabit katsayılardır. (3.2) sınır şartlarında

$$y_a^{(k)} = y^{(k)}(x)\big|_{x=a}\,, \qquad y_b^{(k)} = y^{(k)}(x)\big|_{x=b} \tag{3.3}$$

alınmıştır.

Burada ele aldığımız L operatörünün tek bir tane $G(x,\xi)$ Green fonksiyonun olduğunu varsayalım.

O zaman

$$Ly = f \tag{3.4}$$

operatör denkleminin, yani uygun olarak

$$\ell(y) = f(x) \tag{3.5}$$

diferansiyel denkleminin

$$U_v(y) = 0\ , v = 1,2,3, \dots n \qquad (3.6)$$

sınır şartlarını sağlayan çözümü

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi \qquad (3.7)$$

formülü ile bulunur.

(3.5) diferansiyel denkleminde

$$f(x) = \delta(x, \eta) \qquad (3.8)$$

alırsak, yani δ -fonksiyon olarak alırsak o zaman (3.7) formülünden

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi)\delta(\xi,\eta) d\xi = G(x,\eta) \qquad (3.9)$$

eşitliğini buluruz.

(3.9) eşitliğinden L operatörünün Green fonksiyonu $G(x,\xi)$ fonksiyonunun (3.5), (3.6) sınır değer probleminin veya uygun olarak (3.4) operatör denkleminin

$$f(x) = \delta(x, \xi) \qquad (3.10)$$

alındığındaki çözümüdür.

Şimdi biz burada lineer diferansiyel L operatörünün karakteristik

$$\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n, \dots . \qquad (3.11)$$

değerlerinin tekrarlanmayan karakteristik değerler olduklarını ve reel pozitif sayılar olduklarını ve

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

şartlarını sağladıklarını ve bu karakteristik değerlere uygun L operatörünün

$$L\varphi_k = \lambda_k \varphi_k \ , \ \ k = 1,2,... \tag{3.12}$$

eşitliklerini sağlayan karakteristik $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), ...,$ $\varphi_n(x)$,…. fonksiyonlarının $[a,b]$ aralığında ortonormal tam sistem oluşturduklarını varsayalım, o zaman (3.10) eşitliğindeki $\delta(x,\xi)$ fonksiyonu için,

$$\delta(x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\xi)\, \varphi_n(x) \tag{3.13}$$

açılımını yazabiliriz.

Şimdi biz burada $\delta(x,\xi)$ fonksiyonun (3.13) açılımını kullanarak L operatörünün $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunu bulalım. Bu amaçla (3.4) denkleminde $f(x) = \delta(x,\xi)$ alalım. O zaman (3.13) açılımını kullanarak (3.4) denklemini aşağıdaki şekilde yazarız:

$$L(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\xi)\, \varphi_n(x) \tag{3.14}$$

Bu (3.14) denkleminin çözümünü

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\xi)\, \varphi_n(x) \tag{3.15}$$

şeklinde arayalım. (3.15) açılımındaki $c_n(\xi)$, n=1,2,3,… katsayıları aranan katsayılardır. (3.14) denkleminin (3.15) şekilli çözümünü (3.14) denkleminde yerine yazarak ve (3.12) eşitliklerini kullanarak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, c_n(\xi)\, \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\xi)\ \varphi_n(x)$$

Bu eşitliğin her yanını $\varphi_m(x)$ fonksiyonu ile çarpıp, sonrada $[a,b]$ aralığında x değişkenine göre integral alırsak ve

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \int_a^b \varphi_n(x)\, \varphi_m(x) = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

eşitliklerini kullanarak

$$\lambda_m c_m(\xi) = \varphi_m(\xi), \quad m = 1,2,3 \ldots.$$

eşitliğini veya

$$c_m(\xi) = \frac{\varphi_m(x)}{\lambda_m} \quad , \qquad m = 1,2,3 \ldots \tag{3.16}$$

$c_m(\xi)$ katsayıları için bulduğumuz bu ifadeleri (3.15) açılımında yerlerine yazarak ve (3.9) eşitliğinde kullanarak L operatörünün $G(x, \xi)$ Green fonksiyonunu aşağıdaki şekilde buluruz.

$$G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\xi)\, \varphi_n(x)}{\lambda_n}. \tag{3.17}$$

Aynı şekilli işlemleri

$$Ly = \lambda y + f \tag{3.18}$$

operatör denklemi içinde yaparak $L - \lambda I$ operatörünün $G(x, \xi, \lambda)$ Green fonksiyonu için aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$G(x, \xi, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\xi)\, \varphi_n(x)}{\lambda_n - \lambda} \quad . \tag{3.19}$$

bu açılım $\lambda \neq \lambda_n$, n=1,2,… için sağlanır.

Örnek:

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda y + f(x) \ , \ 0 < x < 1 \tag{3.20}$$

diferansiyel denkleminin

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{3.21}$$

sınır şartlarını sağlayan çözümünün bulunması probleminin $G(x,\xi)$ Green fonksiyonunu inşa edelim, bu problemdeki $f(x)$ fonksiyonu $0 < x < 1$ aralığında tanımlanmış önceden verilmiş bir fonksiyon, λ ise parametredir. (3.20),(3.21) probleminin Green fonksiyonu inşa etmek için $\ell(y)=-y''$ diferansiyel ifadesinin ve (3.21) sınır şartlarının doğurduğu L diferansiyel operatörünün $\lambda_n, n = 1,2,\ldots$ karakteristik değerlerini ve bu karakteristik değerlere uygun $\varphi_n(x)$, $n = 1,2,\ldots$ karakteristik fonksiyonlarını aşağıdaki sınır değer problemini çözerek bulalım:

$$-\frac{d^2\varphi_n}{dx^2} = \lambda_n \varphi_n \ , \ \ n = 1,2,\ldots \tag{3.22}$$

$$\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0 \ , \qquad n = 1,2,\ldots \tag{3.23}$$

(3.22), (3.23) problemini çözerek

$$\lambda_n = n^2\pi^2 \ , \qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{3.24}$$

ve uygun olarak

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x \ , \ \ n = 1,2,3,\ldots \tag{3.25}$$

eşitliklerini buluruz.

$\varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x$, $n = 1,2,3,\ldots$ fonksiyonları sistemi $[0,1]$ aralığında ortonormal sistem oluşturur.

Böylece L operatörünün Green fonksiyonu

$$G(x,\xi) = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Sin(n\pi x)Sin(n\pi\xi)}{n^2} \tag{3.26}$$

şeklinde ve L- λI operatörünün Green fonksiyonu

$$G(x,\xi,\lambda) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{SinnxSinn\xi}{(\pi n)^2 - \lambda} \tag{3.27}$$

şeklinde bulunur.

Böylece (3.20), (3.21) sınır değer probleminin çözümünü

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi \tag{3.28}$$

şeklinde veya açık şekilde yazarsak

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)}{(\pi n)^2 - \lambda} \varphi_n(x) \tag{3.29}$$

serisi şeklinde buluruz. Burada (f, φ_n) katsayısı *f(x)* fonksiyonunun ortonormal $\{\varphi_n(x)\}$ sistemi üzere Fourier katsayısı olup

$$(f, \varphi_n) = \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\, dx \quad , \qquad n = 1,2, \dots \tag{3.30}$$

formülü ile hesaplanır ($\varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x$).

4. KISMİ TÜREVLİ LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN GREEN FONKSİYONUNUN İNŞASI ÖRNEKLERİ

Bu bölümde örnekler aşağıdaki şekilde verilmiştir.

4.1. Sonlu Uzunluklu Çubukta Isı İletişiminin Homojen Denklemi İçin Sınır Değer Başlangıç Değer Probleminin Green Fonksiyonunun İnşası

Burada aşağıdaki ısı iletişiminin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < l\,, \qquad t > 0 \tag{4.1}$$

denkleminin

$$u(0,t) = 0 \quad , \qquad u(l,t) = 0 \qquad t > 0 \tag{4.2}$$

sınır şartlarını ve

$$u(x,0) = \varphi(x)\ ,\ \ o < x < l \tag{4.3}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemini ele alalım.

(4.1) denklemi l uzunluklu çubukta ısı iletişiminin denklemidir. Bu denklemde ki a^2 katsayısı sabit sayı olup ısı iletişimi katsayısısıdır. Böylece, (4.1), (4.2), (4.3) problemine ısı iletişimi denklemi için sınır değer başlangıç değer problemi denir. Bu problemin verilmiş $\varphi(x)$ başlangıç ısı dağılımı fonksiyonu için tek bir çözümün olduğu gösterilmiştir.

(4.1), (4.2), (4.3) probleminin veya

$$l(u) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \tag{4.4}$$

diferansiyel ifadesinin ve (4.2) sınır şartlarının ve (4.3) başlangıç şartının doğurduğu L kısmi türevli lineer diferansiyel operatörün Green fonksiyonunu tezin giriş kısmında ve Bölüm-3 de gösterilmiş yönteme dayanarak inşa edelim. Bu amaçla (4.1), (4.2), (4.3) probleminin verilmiş $\varphi(x)$ fonksiyonuna uygun çözümün

$$u(x,t) = L^{-1}\varphi = \int_{o}^{l} G(x,\xi,t)\,\varphi(\xi)d\xi \qquad (4.5)$$

şeklinde gösterebildiğimizi varsayalım. Bu durumda L^{-1} ters operatörünün integral operatör olduğunu ve aradığımız $G(x,\xi,t)$ Green fonksiyonunda L^{-1} integral operatörünün çekirdeği olduğu görülür.

Şimdi biz L^{-1} integral operatörünün çekirdeğini bulalım. L^{-1} operatörünün çekirdeği olan $G(x,\xi,t)$ çekirdeğinin bulmak için $\varphi(x) = \delta(x-\xi)$ alalım.

(4.5) formülünde $\varphi(x)$ fonksiyonu yerine $\delta(x-\xi)$ fonksiyonunu aldığımızda

$$u(x,t) = G(x,\xi,t)$$

eşitliği bulunur. Bu onu gösterir ki

$G(x,\xi,t)$ fonksiyonu (4.1) denkleminin sınır şartlarını ve

$$u(x,0) = \delta(x-\xi) \qquad (4.3')$$

başlangıç sınır şartını sağlayan çözümüdür.

Burada $\delta(x-\xi)$ fonksiyonunun $[0,l]$ aralığında tam ortonormal sitem oluşturan

$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}sin\frac{n\pi}{l}x \;\; n = 1,2, \ldots.$ fonksiyonları sistemi üzere Fourier serisine açılımını alalım:

$$\delta(x-\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}sin\frac{n\pi}{l}xsin\frac{n\pi}{l}\xi \qquad (4.6)$$

uygun olarak L^{-1} operatörünün $G(x,\xi,t)$ çekirdeği de aşağıdaki şekilde arayalım.

$$G(x,\xi,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\,sin\frac{n\pi}{l}x. \qquad (4.7)$$

bu eşitlikte $A_n(t)$ katsayıları aranan katsayılardır.

$G(x,\xi,t)$ fonksiyonunu (4.7) şeklinde aradığımızda $G(x,\xi,t)$ fonksiyonunun (4.2) şartlarını sağladığı görülür.

Şimdi (4.7) açılımındaki aranan $A_n(t)$ n=1,2,… katsayılarını öyle seçelim ki (4.7) eşitliği ile bulunan $G(x,\xi,t)$ fonksiyonu (4.1) denkleminide sağlasın. $G(x,\xi,t)$ çekirdeğinin (4.1) denkleminin çözümü olması şartından

$$\sum_{n=1}^{\infty}\dot{A_n}\,(t)sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}-(a\frac{n\pi}{l})^2A_n(t)\,sin\frac{n\pi}{l}x$$

eşitliğini buluruz. Burada Fourier serisinin katsayılarının tekliği hakkındaki teoremden $A_n(t)$ katsayıları için aşağıdaki diferansiyel denklemi buluruz.

$$\dot{A_n}(t)+\left(a\frac{n\pi}{l}\right)^2A_n(t)=0 \qquad (4.8)$$

denkleminin genel çözümü

$$A_n(t)=B_ne^{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2t} \qquad (4.9)$$

şeklinde yazılır.

$A_n(t)$ katsayıları için bulduğumuz (4.9) iadesini (4.7) açılımında yerine yazdıgımızda $G(x,\xi,t)$ çekirdeği için

$$G(x,\xi,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_ne^{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2t}sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (4.10)$$

açılımını buluruz.

$G(x,\xi,t)$ fonksiyonunu (4.3′) başlangıç şartını sağlaması için

$$G(x,\xi,t)|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin\frac{n\pi}{l}x = \delta(x-\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} sin\frac{n\pi}{l} xsin\frac{n\pi}{l}\xi$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Bu sonuncu eşitlikten B_n katsayıları için aşağıdaki eşitliği buluruz.

$$B_n = \frac{2}{l} sin\frac{n\pi}{l}\xi \quad n = 1,2,... \tag{4.11}$$

böylece L^{-1} integral operatörünün $G(x,\xi,t)$ çekirdeği için aşağıdaki açılımı buluruz:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l} e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} sin\frac{n\pi}{l} xsin\frac{n\pi}{l}\xi \tag{4.12}$$

(4.12) eşitliği ile bulunan $G(x,\xi,t)$ fonksiyonu L operatörünün veya (4.1), (4.2), (4.3) probleminin Green fonksiyonudur. Böylece (4.1), (4.2), (4.3) probleminin çözümü (4.5) şeklinde gösterilir ve (4.5) formülündeki $G(x,\xi,t)$ Green fonksiyonu (4.12) formülü ile tanımlanır.

4.2. Sonlu Uzunluklu Çubukta Isı İletişiminin Homojen Olmayan Denklemi İçin Sınır Değer Başlangıç Değer Probleminin Green Fonksiyonu

(4.12) formülü ile bulduğumuz $G(x,\xi,t)$ fonksiyonunu kullanarak homojen olmayan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{4.13}$$

denkleminin

$$u(0,t) = 0\,, u(l,t) = 0 \tag{4.14}$$

sınır şartlarını ve

$$u(x,t)|_{t=0} = u(x,0) = 0 \tag{4.15}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü

$$u(x,t) = L^{-1}f = \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau \qquad (4.16)$$

formülü ile buluruz.

Bu $G(x,\xi,t-\tau)$ fonksiyonu (4.13),(4.14),(4.15) probleminin Green fonksiyonu olup

$$G(x,\xi,t-\tau) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t-\tau} sin\frac{n\pi}{l}x sin\frac{n\pi}{l}\xi \qquad (4.17)$$

formülü ile tanımlanır.

Bunu göstermek için (4.16) formülünde

$$f(x,t) = \delta(x-\xi)\delta(t-\tau)\,, \quad \tau > 0 \qquad (4.18)$$

alırsak ve δ -fonksiyonunun özelliği kullanarak

$$u(x,t) = G(x,\xi,t-\tau) \qquad (4.19)$$

eşitliğini buluruz.

Böylece, (4.13), (4.14), (4.15) probleminin çözümü (4.17) formülü ile tanımlanan $G(x,\xi,t-\tau)$ Green fonksiyonunun yardımıyla (4.16) şeklinde bulunur.

4.3. Homojen Olmayan Isı İletişimi Denklemi İçin Homojen Olmayan Sınır Değer Başlangıç Değer Probleminin Çözümünün Green Fonksiyonunun Uygulanmasıyla İfade Edilmesi

Burada biz homojen olmayan,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,, 0 < x < l\,, 0 < t \qquad (4.20)$$

denkleminin homojen olmayan

$$u(0,t) = \varkappa_1(t)\ , \qquad u(l,t) = \varkappa_2(t)\ , \qquad 0 < t \le T \qquad (4.21)$$

sınır şartlarını ve homojen olmayan

$$u(x,0) = \varphi(x)\,, \qquad 0 < x < l \tag{4.22}$$

başlangıç şartını sağlayan çözümünün bulunması problemini ele alalım.

Bu (4.20), (4.21), (4.22) problemini çözmek için aranan $u(x,t)$ fonksiyonunu

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t) \tag{4.23}$$

şeklinde arayalım. Burada $v(x,t)$ fonksiyonu belli fonksiyon olup seçim yöntemi ifadesi aşağıda gösterilecektir. $w(x,t)$ fonksiyonu yeni aranan fonksiyondur.

(4.23) açılımını (4.20) denklemide ve (4.21), (4.22) şartlarında $u(x,t)$ fonksiyonunun yerine yazdığımızda $w(x,t)$ aranan fonksiyonu için aşağıdaki sınır değer problemini buluruz.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{f}(x,t), \tag{4.24}$$

$$w(0,t) = \overline{\varkappa_1}(t)\ , \qquad w(l,t) = \overline{\varkappa_2}(t) \tag{4.25}$$

$$w(x,0) = \bar{\varphi}(x). \tag{4.26}$$

burada

$$\bar{f}(x,t) = f(x,t) - (v_t - a^2 v_{xx})$$

$$\overline{\varkappa_1}(t) = \varkappa_1(t) - v(0,t),$$

$$\overline{\varkappa_2}(t) = \varkappa_2(t) - v(l,t),$$

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - v(x,0)$$

şimdi buradaki yardımcı $v(x,t)$ fonksiyonunu öyle seçelim ki,

$$\overline{\varkappa_1}(t) = 0\,, \overline{\varkappa_2}\,(t) = 0$$

şartları sağlansın. Bunun için $v(x,t)$ fonksiyonunu

$$v(x,t) = \varkappa_1(t) + \frac{x}{l}(\varkappa_2(t) - \varkappa_1(t))$$

şeklinde seçmek yeterlidir.

O zaman $\bar{f}(x,t)$ fonksiyonu

$$\bar{f}(x,t) = f(x,t) - \left(\dot{\varkappa}_1(t) + \frac{x}{l}\big(\dot{\varkappa}_2(t) - \dot{\varkappa}_1(t)\big)\right) \qquad (4.28)$$

formülü ile,$\bar{\varphi}(x)$ fonksiyonu ise

$$\overline{\varphi}(x) = \varphi(x) - (\varkappa_1(0) + \frac{x}{l}\big(\varkappa_2(0) - \varkappa_1(0)\big) \qquad (4.29)$$

formülü ile bulunur.

Böylece yeni aranan $w(x,t)$ fonksiyonunu bulmak için homojen olmayan ısı iletişimi

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{f}(x,t) \;\; 0 < x < l \;, t > 0 \qquad (4.30)$$

denkleminin

$$w(0,t) = 0 \;, \qquad w(l,t) = 0\,, \qquad t > 0 \qquad (4.31)$$

homojen sınır şartlarını ve homojen olmayan

$$w(x,0) = \bar{\varphi}(x) \;\;, 0 < x < l \qquad (4.32)$$

başlangıç şartını sağlayan çözümünü bulmamız gerekir.

(4.30), (4.31), (4.32) sınur değer başlangıç değer probleminin çözümü aşağıdaki formülle bulunur.

$$w(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t)\bar{\varphi}(\xi)d\xi + \int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\zeta)\bar{f}(\xi)d\xi d\zeta \qquad (4.33)$$

(4.33) formülündeki $G(x,\xi,t)$ ve $G(x,\xi,t-\zeta)$ Green fonksiyonları uygun olarak (4.12) ve (4.17) formülleri ile ifade olunurlar.

Örnek: Şimdi biz burada uçları sabit sıcaklıkta sağlanan l uzunluklu çubukta ısı iletişimi problemini ele alalım. Yani burada homojen ısı iletişimin

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\ \ 0<x<l\ ,\ \ t>0 \tag{4.34}$$

denkleminin

$$u(0,t)=u_0\ ,\qquad u(l,t)=u_1\ ,\qquad t>0 \tag{4.35}$$

sınır şartlarını ve

$$u(x,0)=\varphi(x)\,,\qquad 0<x<l \tag{4.36}$$

başlangıç şartını sağlayan çözümü bulunması problemini ele alalım.

(4.35) şartındaki u_0 ve u_1 sabit sayılar olup çubuğun uçlarındaki sıcaklıkları gösterir.

(4.34), (4.35), (4.36) probleminin çözümünü

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x) \tag{4.37}$$

şeklinde arayalım. Buradaki $w(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını aşağıdaki sınır değer problemlerin çözümü olarak buluruz.

$$v''=0 \tag{4.38}$$

denkleminin

$$\left.\begin{array}{r} v(0)=u_0 \\ v(l)=u_1 \end{array}\right\} \tag{4.39}$$

sınır şartlarını sağlayan

$$v(x)=u_0+\frac{x}{l}(u_1-u_0) \tag{4.40}$$

çözümüdür.

$w(x,t)$ fonksiyonunu bulmak için ise homojen

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{4.41}$$

denkleminin homojen

$$w(0,t) = 0 \ , \qquad w(l,t) = 0 \tag{4.42}$$

sınır şartlarını ve homojen olmayan

$$w(x,0) = \varphi(x) - v(x) = \bar{\varphi}(x) \tag{4.43}$$

başlangıç şartını sağlayan çözümünü bulmamız gerekir.

(4.41), (4.42), (4.43) probleminin çözümü

$$w(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t)\bar{\varphi}(\xi)d\xi \tag{4.44}$$

formülü ile bulunur. Bu formüldeki

$G(x,\xi,t)$ fonksiyonu (4.41), (4.42), (4.43) probleminin Green fonksiyonu olup (4.12) formülü ile tanımlanır.

4.4. Sonsuz Çubukta Isı İletişimi Denklemi İçin Başlangıç Değer Probleminin Green Fonksiyonunun İnşası

Burada biz sonsuz çubukta ısı iletişiminin homojen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , -\infty < x < \infty \ \ t > 0 \, , \tag{4.45}$$

denkleminin homojen olmayan

$$u(x,0) = \varphi(x) \, , -\infty < x < \infty \tag{4.46}$$

başlangıç şartını sağlayan başlangıç değer probleminin δ-fonksiyonun kullanılmasıyla Green fonksiyonunu inşa edelim.

Böylece (4.45), (4.46) probleminin Green fonksiyonunu inşa etmek için (4.46) şartında

$$\varphi(x) = \delta(x-\xi) \tag{4.47}$$

alalım ve δ- fonksiyonunun aşağıdaki Fourier integrali açılımını kullanalım.

$$\delta(x-\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda(x-\xi)d\lambda \tag{4.48}$$

Bu yüzdende (4.45), (4.46) probleminin (4.47) eşitliğinin sağlanmasıyla $G(x,\xi,t)$ Green fonksiyonunu (4.48) açılımına uygun olarak

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A_\lambda(t)\cos\lambda(x-\xi)d\lambda \tag{4.49}$$

şeklinde arayalım.

(4.49) fonksiyonu tanıma göre (4.45) denkleminin çözümü olduğundan (4.49) ifadesinin (4.45) denkleminde u(x,t) fonksiyonunun yerine yazarsak

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \dot{A}_\lambda(t)\cos\lambda(x-\xi)d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (-\lambda^2a^2)A_\lambda(t)\cos\lambda(x-\xi)d\lambda$$

eşitliğini buluruz.

Bu eşitliğin sağlanması için

$$\dot{A}_\lambda(t) + (\lambda a)^2A_\lambda(t) = 0$$

eşitliğinin sağlanması gerekir.

Bu diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$A_\lambda(t) = A_\lambda{}^{(0)}(t)e^{-(\lambda a)^2 t}$$

şeklinde yazılır. Burada $A_\lambda{}^{(0)}$ katsayısı t değişkenine bağlı olmayan aranan katsayıdır.

$A_\lambda(t)$ katsayısı için bulduğumuz bu ifadeyi (4.49) açılımında yerine yazarak aşağıdaki ifadeyi buluruz.

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A_\lambda{}^{(0)} e^{-(\lambda a)^2 t} cos\lambda(x-\xi)d\lambda$$

Bu eşitlikteki $A_\lambda{}^{(0)}$ katsayısını öyle seçelim ki

$$G(x,\xi,t)|_{t=0} = \delta(x-\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\lambda(x-\xi)d\lambda$$

başlangıç şartında sağlasın yani

$$G(x,\xi,t)|_{t=0} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A_\lambda{}^{(0)} cos\lambda(x-\xi)d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\lambda(x-\xi)d\lambda$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Bu sonuncu eşitliğin sağlanması için

$$A_\lambda{}^{(0)} = 1$$

alınması gerekir.

Böylece (4.45), (4.46) probleminin Green fonksiyonu için

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t} cos\lambda(x-\xi)d\lambda \qquad (4.50)$$

ifadesini buluruz.

(4.50) eşitliğinin sağ yanındaki integrali hesaplayalım. Bu amaçla

$$J(t) = \int_0^\infty e^{-ax^2} costxdx \tag{4.51}$$

integralini ele alalım. (4.51) integralinde a parametresine sabit gibi bakalım. O zaman (4.51) eşitliğinin her yanından t değişkenine göre türev alırsak

$$\frac{dJ(t)}{dx} = -\int_0^\infty e^{-ax} sinxtdx = \frac{1}{2a}\int_0^\infty sintxde^{-ax}$$

eşitliğini buluruz. Bu eşitliğin sağ yanındaki integrali parça parça integrallersek aşağıdaki eşitliği buluruz.

$$\frac{dJ(t)}{dx} = \frac{1}{2a} e^{-ax^2} sintx|_0^\infty - t\frac{1}{2a}\int_0^\infty e^{-ax^2}\, costxdx = \frac{t}{2a}J(t)$$

Böylece $J(t)$ integralini bulmak için

$$\frac{dJ(t)}{dx} = \frac{t}{2a}J(t)$$

diferansiyel denklemini buluruz.

Bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$J(t) = ce^{-\frac{t^2}{4a}} \tag{4.52}$$

şeklindedir. Burada c, t ye bağlı olmayan keyfi sabittir.

(4.51) eşitliğinden

$$J(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

eşitliğini, ama (4.52) eşitliğinden

$$J(0) = c$$

eşitliğini buluruz. Böylece,

$$c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

olduğunu ve

$$J(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{t^2}{4a}}$$

eşitliğini buluruz. Böylece (4.51) integralinin değeri

$$J(t) = \int_0^\infty e^{-ax^2} costxdx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{t^2}{4a}}$$

olur. O zaman

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\lambda(x-\xi)\, e^{-(\lambda a)^2 t} d\lambda = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \tag{4.53}$$

şeklinde bulunur.

Green fonksiyonunun (4.53) ifadesini kullanarak (4.45), (4.46) probleminin çözümünü

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi) d\xi \tag{4.54}$$

şeklinde buluruz.

Not 1: (4.51) eşitliğinde t=0 aldığımızda

$$J(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

eşitliğini bulurken

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2} d\beta = \sqrt{\pi} \tag{4.55}$$

eşitliğini kullandık.

Not 2: Tamamen benzer işlemleri yaparak tüm üç boyutlu uzayda ısı iletişiminin

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), -\infty < x, y, z < +\infty \quad t > 0 \tag{4.56}$$

$$u(x, y, z, 0) = \delta(x - \xi)\delta(y - \eta)\delta(z - \zeta) \tag{4.57}$$

başlangıç şartını sağlayan Green fonksiyonunun

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2 t}} \tag{4.58}$$

şeklinde olduğunu buluruz.

(4.56) denkleminin

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z) \qquad -\infty < x, y, z < +\infty \tag{4.59}$$

başlangıç şartını sağlayan çözümü

$$u(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \eta, \zeta) G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) d\xi d\eta d\zeta \tag{4.60}$$

şeklinde bulunur.

4.5. Sonsuz Çubukta Homojen Olmayan Isı İletişimi Denklemi İçin Başlangıç Değer Probleminin Green Fonksiyonunun İnşası

Burada homojen olmayan ısı iletişimi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), -\infty < x < \infty \quad t > 0, \tag{4.61}$$

denkleminin homojen

$$u(x, 0) = 0 \ , -\infty < x < \infty \tag{4.62}$$

başlangıç şartını sağlayan çözümünün bulunması probleminin Green fonksiyonun inşa yöntemini gösterelim. Bu amaçla (4.61) denkleminin sağ yanındaki $f(x,t)$ fonksiyonunu

$$f(x,t) = \delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \ , \qquad \tau > 0 \tag{4.63}$$

şeklinde alalım.

O zaman (4.61) denklemi bu halde

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \tag{4.64}$$

şeklinde yazılır. (4.64) denkleminde $\delta(x-\xi)$ fonksiyonunun

$$\delta(x-\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\lambda(x-\xi)d\lambda \tag{4.65}$$

açılımını kullanarak (4.64) denkleminin çözümünü uygun olarak

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty u_\lambda(t)cos\lambda(x-\xi)d\lambda \tag{4.66}$$

açılımı şeklinde arayalım. $\delta(x-\xi)$ fonksiyonunun (4.65) ifadesini ve aranan $u(x,t)$fonksiyonunun (4.66) ifadesinin (4.64) denkleminde yerine yazdığımızda aranan $u_\lambda(t)$ katsayısı için aşağıdaki denklemi buluruz.

$$\dot{u_\lambda}(t) + a^2\lambda^2 u_\lambda(t) = \delta(t-\tau) \tag{4.67}$$

(4.62) başlangıç şartından (4.67) denklemi için homojen

$$u_\lambda(0) = 0 \tag{4.68}$$

başlangıç şartını buluruz.

(4.67) denklemini çözmek için bu denklemin her yanını $e^{a^2\lambda^2 t}$ çarptığımızda

$$(u_\lambda(t)e^{a^2\lambda^2 t})' = e^{a^2\lambda^2 t}\delta(t-\tau)$$

eşitliğini buluruz. Bu eşitliği t değişkenine göre 0-dan t-ye kadar integrallediğimizde ve (4.68) başlangıç şartını kullanarak aşağıdaki eşitliği buluruz.

$$e^{a^2\lambda^2 t}u_\lambda(t) = \int_0^{\mathrm{t}} e^{(\mathrm{a}\lambda)^2 s}\delta(s-\tau)\,\mathrm{ds}$$

bu eşitliğin her yanını $e^{a^2\lambda^2 t}$ fonksiyonuna bölerek

$$u_\lambda(t) = \int_0^{\mathrm{t}} e^{-a^2\lambda^2(t-s)}\delta(s-\tau)\,\mathrm{d\tau}$$

eşitliğini buluruz.

Bu eşitliğin sağ yanında δ- fonksiyonunun tanımını kullanarak $u_\lambda(t)$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeyi buluruz.

$$u_\lambda(t) = e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)} \tag{4.69}$$

$u_\lambda(t)$ fonksiyonu için bulduğumuz (4.69) ifadesini (4.66) açılımında yerine yazarak

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\,cos\lambda(x-\xi)d\lambda \tag{4.70}$$

eşitliğini buluruz.

Bu integrali önceki (4.4) kısmında hesaplamıştık. Bu (4.70) integralinin değerini kullanarak (4.61), (4.62) probleminin $G(x,\xi,t-\tau)$ Green fonksiyonu için

$$G(x,\xi,t-\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\,cos\lambda(x-\xi)d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \tag{4.71}$$

ifadesini buluruz.

Böylece

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad -\infty < x < +\infty \quad , \quad t > 0 \tag{4.72}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad -\infty < x < +\infty \quad , \quad t > 0 \qquad (4.73)$$

probleminin çözümünü,

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\,\varphi(\xi)d\xi + \int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi d\tau \qquad (4.74)$$

şeklinde buluruz.

Not 1: Burada biz benzer şekilde üç boyutlu uzayda homojen olmayan ısı iletişiminin

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t) \qquad (4.75)$$

denkleminin homojen olmayan

$$u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z) \quad -\infty < x,y,z < +\infty \qquad (4.76)$$

başlangıç şartını sağlayan çözümünü

$$u(x,y,z,\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)d\xi d\eta d\zeta$$
$$+\int_{0}^{\mathrm{t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t-\tau)d\xi d\eta d\zeta d\tau \qquad (4.77)$$

şeklinde buluruz.

Buradaki $G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)$ fonksiyonu (4.75), (4.76) probleminin Green fonksiyonu olup (4.58) formülü ile tanımlanır.

Not 2: Sınırsız levhada ısı iletişiminin homojen olmayan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \;, \qquad (-\infty < x,y < +\infty)\,, \qquad t > 0 \quad (4.78)$$

denkleminin homojen olmayan

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y) \qquad -\infty < x,y,z < +\infty \tag{4.79}$$

başlangıç şartını sağlayan çözümünün bulunması probleminin Green fonksiyonuda üstte gösterdiğimiz yöntemle bulunur ve

$$G(x,y,\xi,\eta,t)=\frac{1}{4\pi a^2 t}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}} \tag{4.80}$$

formülü ile gösterilir.

(4.78), (4.79) probleminin (4.80) Green fonksiyonunun yardımıyla aşağıdaki şekilde yazılır.

$$u(x,y,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,y,\xi,\eta,t)\,\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\,f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau \tag{4.81}$$

4.6. Yarı Sonsuz Çubukta Isı İletişimi Denklemi İçin Sınır Değer Başlangıç Değer Probleminin Green Fonksiyonunun İnşası

Burada biz yarı sonsuz çubukta ısı iletişiminin

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\ , \qquad 0<x<+\infty\,, t>0 \tag{4.82}$$

denkleminin

$$v(0,t)=0\ , \qquad t>0 \tag{4.83}$$

sınır şartını ve

$$v(x,0)=\varphi(x)\,, \qquad 0<x<+\infty \tag{4.84}$$

başlangıç şartını sağlayan çözümünün bulunması probleminin Green fonksiyonunu inşa edelim.

Bu amaçla biz burada sonsuz telde ısı iletişiminin

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \qquad 0 < x < +\infty \, , t > 0 \tag{4.85}$$

denkleminin

$$u(x,0) = \varphi(x) \, , \qquad 0 < x < +\infty \tag{4.86}$$

başlangıç şartını sağlayan çözümünün

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}\xi \tag{4.87}$$

formülünü kullanalım.

(4.87) formülünün aşağıdaki şekilde yazalım.

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} \left[\varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + \varphi(-\xi) e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi \tag{4.88}$$

(4.88) formülünde x=0 alalım. O zaman aşağıdaki eşitliği buluruz.

$$u(0,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} [\varphi(\xi) + \varphi(-\xi)] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \tag{4.89}$$

Bu (4.89) eşitliğinden kolaylıkla görüyoruz ki

$$v(0,t) = u(0,t) = 0 \tag{4.90}$$

sınır şartının sağlanması için (4.84) başlangıç şartındaki $\varphi(x)$ fonksiyonunu

$0 < x < +\infty$ aralığından $(-\infty, 0)$ aralığına kadar fonksiyon olarak devam ettirmek yeterlidir.

Yani $\varphi(x)$ fonksiyonunun

$$\varphi(-\xi) = -\varphi(\xi) \qquad 0 \leq \xi \leq +\infty \tag{4.91}$$

şartını sağlaması gerekir. O zaman (4.82), (4.83), (4.84) probleminin çözümü

$$v(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2 t}} \right] \varphi(\xi) d\xi \qquad (4.92)$$

şeklinde bulunur.

Böylece; (4.82), (4.83), (4.84) probleminin Green fonksiyonunu

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2 t}} \right] \qquad (4.93)$$

şeklinde buluruz.

Bu yüzden (4.93) eşitliğini kullanarak (4.92) çözümünü aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$v(x,t) = \int_0^{\infty} \varphi(\xi) G x, \xi, t)) d\xi \qquad (4.94)$$

uygun olarak

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad 0 < x < +\infty \ , t > 0 \qquad (4.95)$$

$$v(0,t) = 0, \qquad t > 0 \qquad (4.96)$$

$$v(x,0) = \varphi(x) \ \ 0 < x < +\infty \qquad (4.97)$$

probleminin çözümünü

$$v(x,t) = \int_0^{\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi) d\xi + \int_0^{t}\int_0^{\infty} G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) \, d\xi d\tau \qquad (4.98)$$

şeklinde buluruz.

(4.98) formülündeki $G(x,\xi,t)$ fonksiyonu (4.93) formülü ile tanımlanır

Not :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < +\infty \ , t > 0 \tag{4.99}$$

denkleminin

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \ , \qquad t > 0 \tag{4.100}$$

sınır şartını ve

$$u(x, 0) = \varphi(x) \, , \qquad 0 < x < +\infty \tag{4.101}$$

başlangıç şartını sağlayan çözümünün bulunması probleminin Green fonksiyonunun

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2 t}} \right\} \tag{4.102}$$

şeklinde olduğu bulunur.

(4.102) formülünü bulmak için (4.88) açılımını kullanarak (4.101) de verilen $\varphi(x)$ fonksiyonunu $(0, +\infty)$ aralığından $(-\infty, 0)$ aralığına çift olarak devam ettirmek yeterlidir. $\varphi(x) = \varphi(-x)$ gibi şartı sağlaması gerekir.

5. DİKDÖRTGEN ŞEKİLLİ LEVHADA ISI İLETİŞİMİ DENKLEMİ İÇİN BİRİNCİ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN GREEN FONKSİYONU

Dikdörtgen şekilli bir levhanın verildiğini ve bu levhanın $0 \leq x \leq l_1$, $0 \leq y \leq l_2$ olmak üzere xoy düzleminde yerleştiğini ve ölçülerinin l_1 ve l_2 olduğunu varsayalım.

Bu levhada ısı iletişiminin

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad 0 < x < l_1 , 0 < y < l_2 \tag{5.1}$$

denkleminin homojen

$$\left.\begin{array}{r} u(0, y, t) = 0 , u(l_1, y, t) = 0, 0 < y < l_2, t > 0 \\ u(x, 0, t) = 0, u(x, l_2, t) = 0, 0 < x < l_1, t > 0 \end{array}\right\} \tag{5.2}$$

sınır şartlarını ve homojen olmayan

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y) \ , \qquad 0 < x < l_1 \ , \qquad 0 < y < l_2 \tag{5.3}$$

başlangıç şartını sağlayan çözümünün bulunması probleminin Green fonksiyonunu inşa edelim.

Bu amaçla (5.3) başlangıç şartındaki $\varphi(x, y)$ fonksiyonunu δ-fonksiyon olarak aşağıdaki şekilde alalım.

$$\varphi(x, y) = \delta(x - \xi)\delta(y - \eta) \tag{5.4}$$

Burada $\delta(x - \xi)\delta(y - \eta)$ fonksiyonunun $[0, l_1]x[0, l_2 \,]$ dikdörtgeninde ortonormal tam sistem oluşturan

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{l_1}} sin \frac{n\pi}{l_1} x\right) . (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{l_2}} sin \frac{n\pi}{l_2} x)\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{5.5}$$

sistemi üzere Fourier serisine açılımını kullanalım.

$$\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)=\frac{4}{l_1 l_2}\sum_{n,m=1}^{\infty} sin\frac{n\pi}{l_1}xsin\frac{n\pi}{l_2}ysin\frac{n\pi}{l_1}\xi sin\frac{n\pi}{l_2}\eta \qquad (5.6)$$

uygun olarak (5.1) denkleminin (5.2) sınır şartını sağlayan

$$u(x,y,0)=\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) \qquad (5.7)$$

başlangıç şartını sağlayan çözümünü

$$u(x,y,t)=\sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m}(t)\frac{4}{l_1 l_2}sin\frac{n\pi}{l_1}xsin\frac{n\pi}{l_2}y \qquad (5.8)$$

şeklinde arayalım. (5.1) denkleminin çözümünü (5.8) şeklinde aldığımızda (5.2) sınır şartları sağlanır. (5.8) açılımında $A_{n,m}(t)$ katsayıları aranan katsayılardır. $A_{n,m}(t)$ katsayılarını bulmak için (5.8) çözümünü (5.1) denkleminde yerine yazalım. O zaman aşağıdaki eşitliği buluruz.

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\dot{A_{n,m}}(t)+\left[(\frac{an\pi}{l_1})^2+(\frac{an\pi}{l_2})^2\right]A_{n,m}(t)\right]sin\frac{n\pi}{l_1}xsin\frac{n\pi}{l_2}y=0 \qquad (5.9)$$

(5.9) eşitliğinin sağlanması için

$$\dot{A}_{n,m}(t)+\left[\left(\frac{an\pi}{l_1}\right)^2+\left(\frac{an\pi}{l_2}\right)^2\right]A_{n,m}(t)=0 \qquad (5.10)$$

eşitliğinin sağlanılması gerekir.

(5.10) denkleminin genel çözümü

$$A_{n,m}(t)=C_{n,m}e^{-\left[\left(\frac{an\pi}{l_1}\right)^2+\left(\frac{an\pi}{l_2}\right)^2\right]t} \qquad (5.11)$$

şeklinde bulunur. Burada $C_{n,m}$ keyfi sabit sayılardır.

$A_{n,m}(t)$ katsayıları için bulduğumuz (5.11) ifadelerinin (5.8) açılımında yerine yazarak (5.1) denkleminin (5.2) şartını sağlayan çözümünü

$$u(x,y,t)=\sum_{n,m=1}^{\infty} C_{n,m}e^{-\left[\left(\frac{an\pi}{l_1}\right)^2+\left(\frac{an\pi}{l_2}\right)^2\right]t}\frac{4}{l_1 l_2}sin\frac{n\pi}{l_1}xsin\frac{n\pi}{l_2}y \qquad (5.12)$$

şeklinde buluruz. (5.12) çözümündeki keyfi $C_{n,m}$ sabitlerinin öyle seçelim ki (5.12) çözümüm (5.7) başlangıç şartınıda sağlasın. Bu $C_{n,m}$ katsayılarını bulmak için (5.12) de t=0 alalım ve $\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)$ fonksiyonunun (5.6) Fourier açılımına eşitleyelim o zaman buluruz

$$u(x,y,0)=\sum_{n,m=1}^{\infty}C_{n,m}\frac{4}{l_1l_2}sin\frac{n\pi}{l_1}xsin\frac{n\pi}{l_2}y$$
$$=\sum_{n,m=1}^{\infty}(sin\frac{n\pi}{l_1}\xi sin\frac{n\pi}{l_2}\eta)\frac{4}{l_1l_2}sin\frac{n\pi}{l_1}xsin\frac{n\pi}{l_2}y \qquad (5.13)$$

Bu eşitlikten Fourier serisinin katsayılarının tekliği hakkındaki teoreme dayanarak buluruz:

$$C_{n,m}=sin\frac{n\pi}{l_1}xsin\frac{n\pi}{l_2}y \quad , \quad n,m=1,2,.. \qquad (5.14)$$

$C_{n,m}$ katsayıları için bulduğumuz bu ifadeleri (5.12) çözümünde yerlerine yazarak (5.1), (5.2), (5.3) probleminin Green fonksiyonunu aşağıdaki şekilde buluruz.

$$G(x,y,\xi,\eta,t)$$
$$=\frac{4}{l_1l_2}\sum_{n,m=1}^{\infty}e^{-\left[\left(\frac{an\pi}{l_1}\right)^2+\left(\frac{an\pi}{l_2}\right)^2\right]t}sin\frac{n\pi}{l_1}xsin\frac{n\pi}{l_2}ysin\frac{n\pi}{l_1}\xi sin\frac{n\pi}{l_2}\eta. \qquad (5.15)$$

(5.1), (5.2), (5.3) probleminin çözümünü (5.15) Green fonksiyonunu kullanarak

$$u(x,y,t)=\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}G(x,y,\xi,\eta,t)\,\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta \qquad (5.16)$$

şeklinde yazabiliriz.

Not: Burada bulduğumuz (5.15) formülü ile gösterilen $G(x,y,\xi,\eta,t)$ Green fonksiyonunun yardımıyla homojen olmayan

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)+f(x,t)\ \ 0<x<l_1\,,0<y<l_2\ \ t>0 \quad (5.17)$$

denkleminin homojen

$$\left.\begin{array}{l} u(0,y,t)=0\,, u(l_1,y,t)=0, 0<y<l_2, t>0 \\ u(x,0,t)=0, u(x,l_2,t)=0, 0<x<l_1, t>0 \end{array}\right\} \tag{5.18}$$

sınır şartlarını ve homojen olmayan

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y)\,, 0<x<l_1\,, 0<y<l_2 \tag{5.19}$$

başlangıç şartını sağlayan çözümün

$$u(x,y,t)=\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} G(x,y,\xi,\eta,t)\,\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta$$
$$+\int_0^{t}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau \tag{5.20}$$

formülü ile buluruz.

6. SONSUZ TELİN TİTREŞİMLERİ DENKLEMİ İÇİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİNİN GREEN FONKSİYONUNUN İNŞASI

Sonsuz telin serbest titreşimlerinin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , -\infty < x < \infty \ \ t > 0 \, , \tag{6.1}$$

denkleminin homojen olmayan

$$u(x,0) = \varphi(x) \ \ , \qquad -\infty < x < \infty \tag{6.2}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \ , \ \ -\infty < x < \infty \tag{6.3}$$

başlangıç şartını sağlayan çözümünün bulunması probleminin $G(x,t)$ Green fonksiyonu aşağıdaki problemin çözümü gibi tanımlanabilir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , -\infty < x < \infty \ \ t > 0 \, , \tag{6.4}$$

$$u(x,0) = 0 \ \ , \qquad -\infty < x < \infty \tag{6.5}$$

$$u_t(x,0) = \delta(x) \, , \qquad -\infty < x < \infty \tag{6.6}$$

(6.4), (6.5), (6.6) probleminin çözümü

$$G(x,t) = \frac{1}{2a}[\theta(x+at) - \theta(x-at)] \tag{6.7}$$

şeklinde bulunur. Burada (6.7) formülündeki $\theta(x)$ fonksiyonu birim fonksiyon olup aşağıdaki formülle tanımlanan fonksiyondur.

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \tag{6.8}$$

Önce burada (6.7) formülü ile tanımladığımız $G(x,t)$ fonksiyonunun (6.4), (6.5) ,(6.6) probleminin çözümü olduğunu gösterelim. Bunun için $G(x,t)$ fonksiyonunun (6.4) denklemindeki türevlerini bulalım:

$$G_x(x,t) = \frac{1}{2a}[\delta(x+at) - \delta(x-at)]$$

(burada biz birim fonksiyonun türevinin δ- fonksiyon olduğunu kullandık)

$$G_{xx}(x,t) = \frac{1}{2a}[\delta'(x+at) - \delta'(x-at)]$$

$$G_t(x,t) = \frac{1}{2a}[\delta(x+at) - \delta(x-at)]$$

böylece

$$G_{tt}(x,t) = \frac{a}{2}[\delta'(x+at) - \delta'(x-at)]$$

$G_{xx}(x,t)$ ve $G_{tt}(x,t)$ için bulduğumuz ifadeleri (6.4) denkleminde uygun olarak $u_{xx}(x,t)$ ve $u_{tt}(x,t)$ türevlerinin yerlerine yazdığımızda

$$G_{tt}(x,t) = a^2 G_{xx}(x,t)$$

eşitliğinin sağlandığını görürüyoruz (6.5) başlangıç şartını sağladığıda

$$G(x,0) = \frac{1}{2a}[\theta(x) - \theta(x)] \equiv 0$$

eşitliğinden görülür

(6.6) eşitliğinin sağlandığı (başlangıç şartının sağlandığı)

$$G_t(x,0) = \frac{1}{2}[\delta(x) + \delta(x)] \equiv \delta(x)$$

eşitliğinden görülür.

Yani (6.7) eşitliği ile tanımladığımız $G(x,t)$ fonksiyonu (6.4), (6.5), (6.6) probleminin çözümüdür.

Şimdi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{6.9}$$

denkleminin homojen olmayan

$$v(x,0) = 0 \tag{6.10}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \tag{6.11}$$

başlangıç değer probleminin çözümünün $G(x,t)$ fonksiyonun yardımıyla

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,t)\psi(\xi)d\xi = G(x,t) * \psi(x) \tag{6.12}$$

formülü ile bulunduğunu gösterelim.

Burada

$$v_{xx} = G_{xx} * \psi \ , \qquad v_{tt} = G_{tt} * \psi$$

olduğundan

$$a^2 v_{xx} - v_{tt} \equiv 0$$

$$v(x,0) = G(x,0) * \psi(x) = 0 * \psi(x) = 0$$

$$v_t(x,0) = G_t(x,0) * \psi(x) = \delta(x) * \psi(x) \equiv \psi(x)$$

olur yani (6.12) formülü ile tanımlanan *v(x,t)* fonksiyonu(6.9), (6.10), (6.11) probleminin çözümüdür.

(6.12) formülü ile tanımlanan *v(x,t)* fonksiyonunu aşağıdaki şekilde yazalım.

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,t)\psi(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi,t)\psi(x-\xi)d\xi = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds$$

Böylece (6.9), (6.10), (6.11) probleminin çözümü

$$v(x,t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds \qquad (6.13)$$

şeklinde bulundu. Bu formülle $\psi(x)$ fonksiyonunun integrallenen olduğunu varsayarız.

Şimdi $R(x,t)$ fonksiyonunun

$$R_{tt} = a^2 R_{xx}$$

$$R(x,0) = 0$$

$$R_t(x,0) = \varphi(x)$$

probleminin çözümü olduğunda

$$\omega(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} R(x,t)$$

fonksiyonunun

$$\omega_{tt} = a^2 \omega_{xx} \qquad (6.14)$$

$$\omega(x,0) = \varphi(x) \qquad (6.15)$$

$$\omega_t(x,0) = 0 \qquad (6.16)$$

probleminin çözümü olduğunu gösterelim.

Bunu göstermek için

$$R_{tt} = a^2 R_{xx}$$

eşitliğinin her yanının t değişkenine göre türevimi alalım. O zaman buluruz.

$$(R_t)_{tt} \equiv a^2 (R_t)_{xx}$$

yani

$$\omega \equiv R$$

için

$$\omega_{tt} = a^2\omega_{xx}$$

denklemini sağlar. Diğer yandan

$$\omega(x,0) = R_t(x,0) = \varphi(x)$$

$$\omega_{t(x,0)} = R_{tt}(x,0) = G_{tt}(x,0) * \varphi(x) \equiv 0$$

$\varphi(x)$ fonksiyonu sürekli fonksiyon olduğunda

$$\omega(x,t) = R_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(s)ds\right\} = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}$$

olur. Yani

$$\omega(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} \qquad (6.14)$$

fonksiyonu (6.14), (6.15), (6.16) probleminin çözümü olur.

Böylece (6.1), (6.2), (6.3) başlangıç değer probleminin çözümünü $\varphi(x)$ fonksiyonu sürekli fonksion $\psi(x)$ fonksiyonu integrallenen fonksiyon olduğunda aşağıdaki formülle

$$\begin{aligned} u(x,t) &= G_{t(x,t)*}\varphi(x) + G(x,t) * \psi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G_t(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,t)\psi(\xi)d\xi \end{aligned} \qquad (6.15)$$

formülü ile veya

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(s)ds \qquad (6.16)$$

formülü ile buluruz.

(6.15) formülünden (6.7) formülü ile tanımladığımız $G(x,t)$ fonksiyonunun (6.1), (6.2), (6.3) probleminin Green fonksiyonu olduğu görülür.

(6.1), (6.2), (6.3) probleminin (6.16) formülü ile bulunan çözümüne D'alambert çözümü (6.16) formülüne de D'alambert formülü denir.

7. SONLU TELİN TİTREŞİMLERİ DENKLEMİ İÇİN SINIR DEĞER BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİNİN GREEN FONKSİYONUNUN İNŞASI

Biz burada sonlu *l* uzunluklu telin mecburi titreşimlerinin

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)\,, \qquad a^2 = \frac{k}{\rho}\,, \qquad 0 < x < l \tag{7.1}$$

denkleminin

$$\left.\begin{aligned} u(t,0) &= 0 \\ u(l,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad t > 0 \tag{7.2}$$

sınır şartlarını ve homojen olmayan

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x) \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \qquad 0 \le x \le l \tag{7.3}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün bulunması probleminin Green fonksiyonuna inşa edelim

Bu amaçla aşağıdaki

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \tag{7.4}$$

denkleminin

$$u(t,0) = 0\,, \qquad u(l,t) = 0\,, \qquad t > 0 \tag{7.5}$$

sınır şartlarını ve

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \\ u_t(x,0) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 0 \le x \le l \tag{7.6}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü bulmamız gerekir.

(7.4), (7.5), (7.6) problemini çözmek için $\delta(x-\xi)$ fonksiyonunun

$$\delta(x-\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}sin\frac{n\pi}{l}xsin\frac{n\pi}{l}\xi \qquad (7.7)$$

açılımını kullanalım.

(7.4) denkleminin çözümünde uygun olarak aşağıdaki Fourier serisi şeklinde arayalım.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\,sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (7.8)$$

şeklinde arayalım (7.8) şeklindeki çözüm (7.5) sınır şartlarını sağlar.

(7.8) çözümündeki aranan $u_n(t)$ katsayılarını bulmak için (7.8) çözümünü (7.4) denkleminde (7.7) açılımını dikkate alırsak yerine yazalım.

O zaman aşağıdaki eşitliği buluruz.

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\,sin\frac{n\pi}{l}x\left\{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2u_n(t)-\ddot{u_n}(t)+\frac{2}{l}sin\frac{n\pi}{l}\xi\delta(t-\tau)\right\}$$

bu eşitliğin sağlanması için

$$\ddot{u_n}(t)+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2a^2u_n(t)=\frac{2}{l}sin\frac{n\pi}{l}\xi\delta(t-\tau) \qquad (7.9)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. (7.9) denklemi için (7.6) başlangıç şartlarından (7.9) denklemi için

$$u_n(0)=0\ ,\qquad \dot{u_n}(0)=0 \qquad (7.10)$$

başlangıç şartlarını buluruz.

(7.9) denkleminin (7.10) başlangıç şartlarındaki çözümünü aşağıdaki şekilde bulunur.

$$u_n(t)=\frac{2}{l}sin\frac{n\pi}{l}\xi\int_0^t\frac{l}{n\pi a}\frac{2}{l}sin\frac{n\pi a}{l}(t-s)\delta(s-\tau)\,ds \qquad (7.11)$$

(7.11) eşitliğinin sağ yanındaki integralde δ- fonksiyonunun tanımını kullanarak $u_n(t)$ çözümünü aşağıdaki şekilde buluruz.

$$u_n(t) = \frac{2}{l} sin\frac{n\pi}{l}\xi \frac{l}{n\pi a} sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau) \tag{7.12}$$

$u_n(t)$ katsayıları için bulduğumuz (7.12) ifadesinin (7.8) açılımında yerine yazarak (7.1), (7.2), (7.3) probleminin Green fonksiyonunun aşağıdaki şekilde buluruz.

$$G(x,\xi,t-\tau) = \frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} sin\frac{n\pi}{l}(t-\tau) sin\frac{n\pi}{l}x sin\frac{n\pi}{l}\xi \tag{7.13}$$

(7.13) Green fonksiyonunu kullanarak

(7.1), (7.2), (7.3) probleminin çözümünü aşağıdaki şekilde buluruz.

$$u(x,t) = \int_0^l G_t(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi + \int_0^l G(x,\xi,t)\psi(\xi)d\xi$$

$$+\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau \tag{7.14}$$

burada gösterdiğimiz yöntemle sonlu boyutlu (ölçülü) zarın, küpün, prizmanın vs cisimleri için sınır değer başlangıç değer problemleri ile bağlı titreşim denklemlerinin Green fonksiyonlarını inşa edebiliriz.

SONUÇ

Bu çalışmada δ-fonksiyonunun tanımı verildi. δ-fonksiyonun Fourier serisine açılımı ve Fourier dönüşümü gösterildi. δ-fonksiyonun Fourier serisine açılımı ve Fourier dönüşümü ve diğer özelliklerininin kullanımı ile lineer diferansiyel operatörlerin Green fonksiyonunun inşa yöntemi gösterildi. Isı iletişimi ve dalga denklemleri için başlangıç değer, sınır değer –başlangıç değer problemlerinin Green fonksiyonları inşa edildi ve uygun problemlerin çözümleri Green fonksiyonunun yardımıyla yazıldı.

KAYNAKLAR

1. Tixonov, A. N., Samarskiy A. A., Uravneniya matematiçeskoy fiziki. İzd. "Nauka" Moskova 1966.

2. Rubinstein, Z. A., Cours in Ordinary and Partial Differential Equations, Academic press New york and London 1969.

3. Hassanis, Foundations of Mathematical Physics, U.S.A., Mexico, or Canada 1991.

4. Arsenin, V. Y., Metodi Matematiçeskoy Fiziki i spesialnıye Funsii. M.:Nauka 1974.

5. Butkovskiy, A. G., Mustafayev M. I. Fundemental finite control, Budapest, Problems of Control and İnformation Theory, vol. 5(1), 71-85, 1976.

6. Butkovskiy, A. C., Strucural theory of Distributed systems Halsted Press. New york 1983.

7. Mustafayev, M. I., Fundamental finite controls for sourcelike disturbances of-general form, Avtomat. i Telemeh 1981 No., Pt.1, 17-26, Automat.Remote Control 42, 1593-1601, 1981.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Yozgat'ın Sorgun ilçesinde doğan Fatma ARSLAN, ilk, orta ve lise öğrenimini sırasıyla Sorgun Osman Çavuş İlköğretim Okulu ve Sorgun Lisesinde tamamlamıştır. 2006 yılında kazandığı Erzincan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2010 yılında başarıyla tamamlamıştır.

Eylül 2010 yılında yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başladı. Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV danışmanlığında hazırladığı "Kısmi Türevli Lineer Diferansiyel Operatörler ve Onların Green Fonksiyonu İnşası üzerine " başlıklı tezi ile Yüksek Lisans öğrenimine devam etmektedir.

İletişim Bilgileri

Adres: Ahmet Efendi Mah. Ankara Bulvarı Arslan Apt. No:126

SORGUN/YOZGAT

66700 YOZGAT

Tel: (542) 265 85 77

E-posta: fatmaarslan_66@hotmail.com