T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

NÖRLUND TOPLANABİLME METODU

Tuncer COŞKUN

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

Yozgat 2012

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

NÖRLUND TOPLANABİLME METODU

Tuncer COŞKUN

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

Yozgat 2012

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 7011030013 numaralı öğrencisi Tuncer COŞKUN'un hazırladığı "**Nörlund Toplanabilme Metodu**" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezi ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 16/01/2012 Pazartesi günü saat 11:00'da yapılmış, tezin onayına OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU (Danışman)

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 16/01/2012 tarih ve 01 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

18/01/2012

Enstitü Müdürü
Prof.Dr.Recep ŞAHİNGÖZ
Bozok Üniversitesi
Fen Bil.Enst.Müdürü
(Ünvanı, Adı, Soyadı)

NÖRLUND TOPLANABİLME METODU

Tuncer COŞKUN

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2012; Sayfa: 71

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ÖZET

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın amacı, (N,p) - Nörlund toplanabilme Metodunu incelemektir. Bu nedenle birinci bölümde; bir toplanabilme metodu olan matris dönüşümleri ile ilgili açıklamalar, ikinci bölümde ise çalışmamızda kullanılan temel tanımlar ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise; temel kavramlar ve teoremler bölümünde tanımladığımız özel bir limitleme metodu olan Np - Nörlund metodununa ait teoremlere ve ispatlara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise; Nörlund Toplanabilme Metodunun Konvolisyonu ile ilgili teoremler ve ikinci bölümde verilen teoremlere ait uygulamalar ile Cesa'ro Metodlarının Konvolisyonuna ait teoremler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Nörlund Toplanabilme, Cesa'ro Toplanabilme, Konvolisyon, Regülerlik

THE METHOD OF NÖRLUND SUMMABILITY

Tuncer COŞKUN

Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2012; Page:71

Thesis Supervisor: Assoc. Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ABSTRACT

The purpose of this study which composed of four parts, is to investigate (N,p) - Nörlund Summability Method. The descriptions of matrix transformations as a method of summability are in the first chapter, the basic definition and teorems used in this study are given in the second one.

In the third chapter; teorems and proofs are given of Np - Nörlund Method which is a summability method, described at the basic concepts and teorems part.

The convolution of teorems on Nörlund Summability Method is given in the fourth and the application on given teorems of Cesa'ro convolution are studied in the second chapter.

Keywords: Nörlund Summability, Cesa’ro Summability, Convolution, Regularity

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yaparken bana yol gösterip, her türlü yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU'na teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca benden desteklerini esirgemeyen eşime ve kızıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET .... **iii**

ABSTRACT .... **iv**

TEŞEKKÜR .... **v**

İÇİNDEKİLER .... **vi**

1. GİRİŞ **1**

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER **9**

3. NÖRLUND VE NÖRLUND TİPİ METODLAR **15**

3.1. Nörlund Metodlarının Regülerliği ve Uyumluluğu 19

3.2. Kapsama ve Denklik 27

4. NÖRLUND TOPLANABİLME METODUNUN KONVOLİSYONU **43**

4.1. Nörlund Matrislerinin Bazı Özel Sınıfları Üzerine Nörlund Metodlarının Karşılaştırılması 48

4.2. Konvekslik Sağlayan Nörlund Metodları 49

4.3. Satırları Azalan Diziler Olan Nörlund Matrisleri 50

4.4. Alt Yarı Matrise Dönüşen Değişimli Konvolisyon 59

4.5. Cesa'ro Metodlarının Konvolisyonu 64

SONUÇ **69**

KAYNAKLAR **70**

ÖZGEÇMİŞ **71**

1. GİRİŞ

$A=(a_{nk})$; $(n,\ k\in N=\{0,1...\})$ satır ve sütun sayısı sonsuz olan kompleks terimli bir matris ve U, V; bütün kompleks terimli dizilerin oluşturduğu S uzayının alt cümleleri olan

$$C_0=\left\{s=(S_k):\lim_{k\to\infty} S_k=0,\ S_k\in\mathbb{C}\right\},$$

$$C=\left\{s=(S_k):\lim_{k\to\infty} S_k\ \text{ var},\ S_k\in\mathbb{C}\right\},$$

$$\ell_p=\left\{s=(S_k):\sum_{k=0}^{\infty}|S_k|p<\infty,\ S_k\in\mathbb{C}\right\}$$

$$\ell_\infty=\left\{s=(S_k):\exists M>0 \text{ öyleki } \forall k\in N \text{ için} |S_k|\le M,\ S_k\in\mathbb{C}\right\}$$

dizi uzaylarından herhangi ikisini temsil etsin. Buradaki her bir cümle $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde birer lineer uzay olduğundan her $s=(S_n)\in U$ dizisini, $s=\begin{bmatrix}S_0\\S_1\\\vdots\end{bmatrix}$ vektörel formda yazabiliriz. Böylece $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisi ile (S_n) dizisine bildiğimiz klasik matris çarpımını uygulayarak,

$$\begin{bmatrix}a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0k} & \cdots\\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_0\\S_1\\\vdots\\S_k\\\vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}a_{0k}S_k\\ \sum_{k=0}^{\infty}a_{1k}S_k\\ \vdots\\ \sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}S_k\\ \vdots\end{bmatrix}=(A_n(s))$$

dizisini elde ederiz. Burada $\forall n\in\mathbb{N}$ için $A_n(s)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}S_k$ serilerinin yakınsak olduğunu kabul ediyoruz. Bu şekilde elde edilen $(A_n(s))$ dizisine, $s=(S_n)$ dizisinin A matrisi ile yapılan dönüşüm dizisi denir. Her $s=(S_n)\in U$ için her bir terimi bir sonsuz seri olan $\left(A_n(s)\right)$ dizileri V dizi uzayının elemanları ise, $A=\left(a_{nk}\right)$ sonsuz matrisine U dan V ye bir matris dönüşümü tanımlar denir ve $A\in\left(U,V\right)$ ile gösterilir.

Çalışmamız süresince $A=\left(a_{nk}\right)$ matrisi ile kompleks terimli bir matris ve $s=\left(S_n\right)$ dizisi de kompleks terimli bir dizi olarak alınacaktır.

Yukarıda tanımladığımız biçimde bir dönüşüm için özel dönüşümler olan matrisler yerine, neden genel bir lineer dönüşüm alınmadığı sorusu aklımıza gelebilir. Matrisleri seçişimizin nedeni, çoğu hallerde iki dizi uzayı arasındaki en genel dönüşümün bir matrisle verilebilmesindendir.

Dizilerle matris dönüşümleri arasındaki ilişki, toplanabilme teorisiyle bulunan bazı özel sonuçlarla doğmuştur. Toplanabilme teorisindeki temel amaç, Cauchy anlamındaki yakınsaklık kavramını genişletmektir. Bu durumu, Euler'in verdiği şu klasik örnekle biraz daha açıklayalım:

Euler, $(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+...$ formülünde $x=1$ alarak, $1-1+1-1+...=\frac{1}{2}$ garip sonucunu elde etti. Biz biliyoruz ki yukarıdaki formül $|x|<1$ için geçerlidir. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n=1-1+1-1...$ serisi veya kısmi toplamlar dizisi olan $s=\left(S_n\right)=(1,0,1,0,...)$ dizisi Cauchy anlamında ıraksaktır. Bu durumda bildiğimiz (Cauchy anlamındaki) yakınsaklık tanımına göre $s=(1,0,1,0,...)$ dizisinin limiti 1/2 olamaz. Euler'in yaptığı işlem garip görünmekte ise de bizim için başka bir yakınsaklık fikrini ortaya çıkarmaktadır.

Şimdi $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisinin toplamını $\left(S_n\right)=\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\right)$ dizisinin limiti olarak değil de,

$$(\sigma_n)=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{2^n}S_k\right)$$

dizisinin $n\to\infty$ için limiti olarak tanımlarsak, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisi bu yeni tanıma göre yakınsak ve limiti 1/2 olur. Gerçekten;

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_k\\ &= \frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{0}S_0+\binom{n}{1}S_1+\ldots+\binom{n}{n}S_n\right]\\ \sigma_n &= \frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{p}\right] \quad ; \quad p=\begin{cases} n & ,\ n \text{ çift}\\ n-1 & ,\ n \text{ tek}\end{cases}\\ &= \frac{1}{2^n}\cdot 2^{n-1}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

dır. Yukarıdaki işleme dikkat edilirse (σ_n) dizisi, $s=(S_n)=(1,0,1,0,\ldots)$ olmak üzere (S_n) dizisinin,

$$a_{nk}=\begin{cases}\dfrac{\binom{n}{k}}{2^n} & ,\ k\le n\\ 0 & ,\ k>n\end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış $A=(a_{nk})$ matrisiyle, başta tanımladığımız biçimde dönüşümden ibarettir. Yine başta verdiğimiz gösterimlere göre $s=(S_n)\in\ell_\infty$, $(A_n(s))\in C$ olduğundan özel bir A matrisiyle sınırlı (fakat ıraksak) bir diziyi, yakınsak bir diziye dönüştürmüş olduk. Bu durumda bizim esas amacımız ortaya çıkmış olmaktadır. Bunun için ilgili temel teoremleri Bölüm III'de vereceğiz.

Bir (S_n) dizisi ile bir s sayısını birleştirme amacını oluşturan ve bilinen yakınsaklık kavramının yerini alabilen pek çok sayıda tanım vardır. Bunların her biri daha önce ifade ettiği anlamı koruyarak diğerinden ayrılır. Yukarıdaki örnekte olduğu gibi, Cauchy anlamında ıraksak olan en az bir dizi yeni tanımla yakınsak olmaktadır. Diğer taraftan; Cauchy anlamında yakınsak olan her (S_n) dizisi, yeni tanımla da yakınsaktır. Yani;

$$\lim_{n\to\infty} S_n = s$$

ise

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n} & , \ k \le n \\ 0 & , \ k > n \end{cases}$$

olmak üzere (S_n) dizisininin A–dönüşümü olan $(\sigma_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_{nk} S_k\right)$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k \to s$$

dır. Gerçekten; (S_n) dizisi Cauchy anlamında yakınsak olduğundan,

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \ge N$ için $|S_n - s| < \varepsilon$ dır. Ayrıca

$$\sigma_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (S_k - s) + s \cdot \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tag{1.1}$$

şeklinde yazılır. $U_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (S_k - s)$ ile tanımlansın.

$$|U_n| \le \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} |S_k - s| + \frac{1}{2^n} \sum_{k=N+1}^{n} \binom{n}{k} |S_k - s|$$

$$\le \frac{1}{2^n} \cdot M \cdot \sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} + \frac{1}{2^n} \cdot \varepsilon \cdot \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} \right]; \ \left(M = \sup_k |S_k - s| < \infty \right)$$

$$|U_n| \le \frac{\sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} (M - \varepsilon)}{2^n} + \varepsilon$$

bulunur. O halde $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$ dır. Öte yandan $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ olduğu (1.1)'de kullanılırsa, $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$ elde edilir.

Böylece bu yeni tanımla Cauchy anlamında yakınsak olan her dizi yine yakınsak olmaktadır. Yani yeni tanım, bilinen yakınsaklık tanımından daha geniş bir uygulama alanına sahiptir.

İşte bu durum bize, Cauchy anlamında ıraksak olan bu tip dizileri yakınsak yapabilen ve üstelik Cauchy anlamındaki yakınsaklığı da koruyan tanımları tanımlama fikrini vermiştir.

Genel olarak, tanımlanacak yeni metodların aşağıdaki özelliklere sahip olmaları gerekir:

1) Cauchy anlamında yakınsak ve limiti s olan bir dizi, yeni metod anlamda da yakınsak olmalıdır. Özellikle aynı s limitine yakınsaması gerekir.
2) Cauchy anlamında ıraksak olan en az bir dizi, yeni metodla yakınsak olmalıdır.
3) Eğer bir (S_n) dizisine farklı iki metod uygulanır ve bu dizi bu iki metodla da yakınsak ise her iki metod için (S_n) in limiti aynı olmalıdır.

1) ve 2) koşulları temel koşullardır fakat bütün metodlar 3) koşulunu sağlamak zorunda değildir. Ancak biz bu üç koşulu sağlayan metodları ve bunlara ek olarak Cauchy anlamında yakınsak serilerin cebirsel işlemlerinin temel kurallarının; yani;

$A_1)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \cdot s$ (her sabit λ için)

$A_2)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s,\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n = t \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = s \pm t$

$A_3)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s - a_0$

aksiyomlarını sağlayan toplama metodlarını inceleyeceğiz.

Bilinen yakınsaklık tanımına göre açıklık getirilmemiş bazı problemler, yeni tanıma göre açıklığa kavuşturulmuştur.

Şöyle ki; $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ ve bu iki serinin Cauchy çarpımı $C_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ serisinin ne zaman yakınsayacağı, önemli güçlükler arz eden bir problemdir. Fakat 1890 yılında E. Cesa'ro, "Cesa'ro Teoremi" olarak bilinen Teorem 2.4'ü ispatlamıştır.

Görüldüğü gibi Cesa'ro burada Cauchy anlamında yakınsaklık tanımını kullanmamış, adına "Aritmetik Ortalama" diyeceğimiz yeni bir toplama metodu kullanmıştır.

Ünlü Alman matematikçisi O. Toeplitz (1881 – 1940) bize her toplanabilme metodunun özel bir matris dönüşümü olduğunu göstermiştir. Toeplitz, yakınsak diziler uzayını kendisine resmeden ve her bir yakınsak dizinin limitini değişmez bırakan bütün $A = (a_{nk})$ $(n, k = 0,1,...)$ sonsuz matrislerini karekterize etmiştir. Toeplitz, başta tanımladığımız biçimdeki $A_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k$ serilerinin her bir n=0,1,2,… için yakınsaması durumunda $S_k \to \ell (k \to \infty)$ olduğunda $A_n(s) \to \ell (n \to \infty)$ olması için A üzerindeki gerekli ve yeterli koşulları (Teorem 2.3) araştırmıştır. Böylece matris dönüşümleri ile toplanabilme metodları arasındaki ilişki, 1911 yıllarında 0. Toeplitz tarafından kurulmuştur.

Şimdi yukarıdaki örnekte tanımladığımız

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n} & , \quad k \le n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklindeki $A=(a_{nk})$ matrisini göz önüne alalım. Herhangi bir (S_n) dizisinin A–dönüşümü (σ_n) olmak üzere $\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k$ idi. Dolayısıyla $\sigma_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k$ dır. Bu metod, Euler metodu $(E_1 - \text{toplama metodu})$ olarak adlandırılır. Başta verilen örnekte bu metodun $(S_n)=(1,0,1,0,...)$ dizisini 1/2 ye limitlediğini görmüştük.

Aslında bu E_1- toplama metodu, adına Nörlund ortalaması diyeceğimiz başka bir toplama metodunun özel bir halidir. Şöyle ki; $((N_p)_{nk})$ ile göstereceğimiz Nörlund matrisi şu şekilde tanımlanır: $P_n = p_0 + ... + p_n \neq 0$ olmak üzere

$$(N_p)_{nk} = \begin{cases} \dfrac{p_{n-k}}{P_n} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases} \qquad n,k = 0,1,...$$

dır. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k = \binom{n}{k}$ seçilirse $P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ olacağından,

$$\begin{aligned} (N_P)_{nk} &= \begin{cases} \dfrac{p_{n-k}}{P_n} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases} \\ &= (E_1)_{nk} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise E_1- metodunun, Np–Nörlund metodunun özel bir hali olduğunu gösterir. Np–Nörlund metodu üçgensel bir matristir ($A=(a_{nk})$ matrisinde, her $k>n$ için $a_{nk}=0$ ise A matrisine “alt üçgensel matris” denir). Bu çalışmanın temel konusu olan Nörlund Ortalamaları veya toplanabilme metodu incelenecektir.

Benzer şekilde, $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi değişik şekilde seçilerek başka toplama metodlarıda elde edilir.

Ayrıca A ve B gibi iki sonsuz matrisin $C = A * B$ şeklindeki konvolisyonu Vermes (10) tarafından tanımlanmış ve Vermes (10) bu genellemenin birçok özelliğini de ispatlamıştır. Moustafa (11), Cesa'ro metodunun konvolisyonu için bazı kapsama teoremlerini elde ederek $A_1 * B_2$ 'nin değişmiş konvolisyonu $A_1 \underline{*} B_2$ şeklinde göstermiştir. $A_1 * B_2$ şeklinde ifade ettiğimiz ve alt yarı matrise dönüşen daha genel bir yaklaşım ortaya koymuştur. Cesa'ro metodunun konvolisyonu için kapsama teoremlerini elde edip değişimli konvolisyonu göstermiştir. Ayrıca A, B ve D Nörlund matrisleri olmak üzere $A * B \supseteq D$ şeklindeki Nörlund metodlarının konvolisyonu içim kapsama teoremlerini elde etmiştir.

$A \hat{*} B$ değişmeli konvolisyonu için bazı benzer teoremleri Bölüm IV'te ortaya koyacağız; bu durumda $A \hat{*} B_2 \sim D$ şeklinin denk bir sonucu da ortaya konacaktır ve Cesa'ro matrislerini özel bir durum olarak ele alarak Nörlund matrislerinin belirli sınıfları için yapılacaktır. Cesa'ro yöntemlerinin konvolisyonu üzerine iki teorem verilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Tanım 2.1. $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisi verilsin. Bir (S_n) dizisi için $\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}S_k$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$ mevcut ve s ye eşit ise (S_n) dizisi s ye A–limitlenebilir denir ve $S_n \to s(A)$ veya $\left(A-\lim_{n\to\infty} S_n = s\right)$ şeklinde gösterilir. Bu durumda A matrisine de bir "limitleme metodu" denir. Ayrıca (S_n) dizisi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplam dizisi ve (S_n) bir A–metodu ile limitlenebilirse $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi A–toplanabilir denir ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(A)$ şeklinde gösterilir. Bu takdirde A matrisine de bir "toplama metodu" denir[1].

Tanım 2.2. f(x) ve g(x) kompleks veya reel değerli fonksiyonlar ve a da sabit bir nokta olsun (a reel veya kompleks).

(i) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ise f(x) ile g(x) "asimtotik"tir denir ve $f(x) \sim g(x)(x\to a)$ şeklinde gösterilir.

(ii) $f(x) = 0(g(x))(x\to a) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \sup\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$

(iii) $f(x) = o(g(x))(x\to a) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

dır. Özellikle

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ ise } f(x) = o(1)(x\to a)$$

ve

$$\lim_{x\to a} \sup|f(x)| < \infty \text{ ise } f(x) = 0(1)(x\to a)$$

yazılır[4].

Yukarıdaki tanımlar $x \to \pm\infty$ için de geçerlidir.

Teorem 2.3. (Silverman–Toeplitz Teoremi):

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ olan (S_n) dizisi verilsin. Bu durumda $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=o}^{\infty} a_{nk}S_k = s$ olması için gerekli ve yeterli koşul

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \qquad \forall k = 0,1,2....$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=o}^{\infty} a_{nk} = 1$

iii) $\operatorname{Sup}\limits_{n} \sum\limits_{k=o}^{\infty} |a_{nk}| < M \quad (M > 0)$

olmasıdır[2].

Teorem 2.4. (Cesa’ro Teoremi):

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = B$ olsun. Bu iki serinin Cauchy çarpımı, $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k$ olmak üzere $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n$ olsun. Bu takdirde, $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k$ olmak üzere,

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T_k \to A\cdot B \quad (n\to\infty)$$

dır[8].

Tanım 2.5. Diziden diziye dönüşümleri (2.1) de sonsuz matris şeklinde ifade etmek istiyoruz.

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k}S_k \tag{2.1}$$

dır.

Burada kullanılan matrisler genel olarak satır sonlu olacaktır. Yani $k > n$ için $c_{n,k}=0$ olur. Eğer (2.1)’deki seri $\forall n$ için yakınsak ve (S_n)’de $\lim S_n = \sigma$ olacak şekilde yakınsarsa, bu durumda $S_n \to \sigma(C)$ veya $C-\lim S_n = \sigma$ dır. Eğer D ikinci bir sonsuz matris ve $S_n \to \sigma(D) \Rightarrow S_n \to \sigma(C)$ oluyorsa, bu durumda C'nin D'yi ihtiva ettiğini söyleyebiliriz ve $C \supseteq D$ yazabiliriz. Eğer her biri diğerini içeriyorsa C ve D matrislerine denk $(C \sim D)$ matrisler denir[3].

Tanım 2.6. Kısmi toplamlar dizisi $s=(S_n)$ olan $\sum_{n=o}^{\infty} a_n$ serisi verilsin. $P_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n \neq 0 \quad (n=0,1,2,\dots)$ ve

$$\sigma_n = \frac{p_n s_o + p_{n-1}s_1 + \dots + p_o s_n}{P_n} = \frac{1}{P_n}\sum_{v=o}^{n} p_{n-v}s_v$$

olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$ ise (S_n) dizisi s değerine Np veya (N,p_n)-limitlenebilir (Nörlund limitlenebilir) denir ve $S_n \to s(N_p)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca, $S_n = \sum_{v=o}^{n} a_v$ ve $S_n \to s(N_p)$ ise $\sum_{n=o}^{\infty} a_n$ serisi s ye Np–toplanabilir (Nörlund toplanabilir) denir ve $\sum_{n=o}^{\infty} a_n = s(Np)$ şeklinde gösterilir. Bu gösterim yerine $S_n \to s(N,p_n)$ veya $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s((N,p_n))$ gösterimleri de kullanılır.

Tanımdan da görüldüğü gibi, $((Np)_{nv})$ Nörlund matrisi,

$$(Np)_{nv} = \begin{cases} \dfrac{p_{n-v}}{P_n} & , \quad v \leq n \\ 0 & , \quad v > n \end{cases}$$

ile verilir.

(p_n) dizisi özel seçilmek suretiyle Nörlund metodundan, başka adlarla anılan metodlar elde edilebilir. Örneğin; her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = 1$ seçilirse $P_n = n+1$ olur ki, bu C_1-metodu (1. Mertebeden Cesa'ro metodu) olarak bilinir. C_1-metoduna aynı zamanda "Aritmetik Ortalama" da denir. Aynı şekilde özel olarak, her $n \in \mathbb{N}$ için

$p_n = \binom{n+k-1}{k-1}$, $(k > -1,\ k \in \mathbb{R})$ seçilerek $C_k -$metodu (k. mertebeden Cesa'ro metodu) elde edilmiştir. Girişte sözü edilen $E_1 -$metodu (1. Mertebeden Euler metodu) da her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = \binom{n}{v}$ seçilerek elde edilmiştir.

Bundan başka, $((Np)_{nv})$ Nörlund matrisiyle aynı yapıda olan fakat başka adlarla anılan bir takım limitleme metodları vardır. Bu tür metodlara "Nörlund Tipi Metodlar" denir[3].

Tanım 2.7. (R,p_n) veya R_p ile gösterilen Riesz metodunun tanımı şu şekildedir. Kısmi toplamlar dizisi $s = (S_n)$ olan $\sum_{n=o}^{\infty} a_n$ serisi verilsin.

$P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n \neq 0 \quad (n = 0,1,2,\ldots)$ olmak üzere

$$t_n = \frac{p_0 s_0 + p_1 s_1 + \ldots + p_n s_n}{P_n} = \frac{1}{P_n} \sum_{k=o}^{n} p_k s_k \to s\,(n \to \infty)$$

ise (S_n) dizisi s değerine Rp–limitlenebilir denir ve $S_n \to s(R_p)$ veya $S_n \to s(R, p_n)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $S_n \to s(R_p)$ ise $\sum_{r=o}^{\infty} a_n$ serisi s–ye $R_p -$ toplanabilirdir denir ve $\sum_{n=o}^{\infty} a_n = s(R_p)$ veya $s(R, p_n)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.7'den görüldüğü gibi, $((R_p)_{nk})$, matrisi,

$$(R_p)_{nk} = \begin{cases} \dfrac{p_k}{P_n} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

ile verilir. $((R_p)_{nk})$ matrisi üçgensel bir matristir[3].

Tanım 2.8. Eğer I birim matris ve $C \supseteq I$ ise, C regüler olur; yani C her yakınsak diziyi onun limit değerine dönüştürür. Çok iyi bilinir ki C'nin Regüler olması için gerek ve yeter şart:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|c_{n,k}\right| \leq M \qquad n=0,1,2,3,\ldots \tag{2.2}$$

$\forall k \in \{0,1,2,3...\}$ sabiti için

$$\lim_{n\to\infty} c_{n,k} \to 0 \tag{2.3}$$

$n \to \infty$ için

$$C_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} \to 1 \tag{2.4}$$

dir.

(2.2.)'yi sağlayan matrise K_r matrisi denir[10].

Tanım 2.9. A ve B gibi iki sonsuz matrisin C konvolisyonu

$$c_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} a_{n,i} b_{n,k-i} \quad (n,k=0,1,2,...) \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır ve kısaca C=A*B ile gösterilir.

Vermes (10), aşağıdaki özellikleri ispatlamıştır.

(i) Eğer A ve B'nin her ikisi satır sonlu veya her ikisi de K_r matrisse C de satır sonlu olur veya K_r matris olur ve sırasıyla A_n, B_n, C_n satır toplamları

$$C_n = A_n . B_n \tag{2.6}$$

koşulunu sağlar.

(ii) Eğer Ave B regüler ise C regülerdir. (2.7)

(iii) İki alt yarı (üçgen) A ve B matrislerinin konvolisyonu satır sonlu, fakat genelde bir alt yarı matris değildir. Fakat, A_1, A'nın birincisi hariç her bir satırının tekrarlanmasıyla elde ediliyorsa ve B_2, B'nin her bir satırının tekrarlanmasıyla elde ediliyorsa, bu durum da $A_1 \sim A$, $B_2 \sim B$ve $A_1 * B_2$ bir alt yarı matristir.

Nörlund toplanabilme metodu (N, r_n) aşağıdaki gibi tanımlansın. (r_n) reel ve kompleks sayılarının herhangi bir dizisi olmak üzere,

$$R_n = r_0+r_1+\ldots+r_n \neq 0 \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

olacak şekilde kabul edelim; bu durumda D =(N, r_n) matrisi

$$d_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{r_{n-k}}{R_n} & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases} \tag{2.8}$$

dır.

$(\bar{r}_n)$, $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{r}_n x^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} r^n x^n$ yakınsak olmak üzere

$$r_0 \bar{r}_0 = 1, \; r_0 \bar{r}_n + r_1 \bar{r}_{n-1} + \ldots. + r_n \bar{r}_0 = 0 \quad (n \geq 1) \tag{2.9}$$

veya $\bar{r}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{r}_n x^n = (\sum_{n=0}^{\infty} r^n x^n)^{-1} = 1/r(x)$ yazılabilir.

Örneğin;

$$r_n = A_n^{k-1} = k(k+1)\ldots\ldots.(k+n-1)/n!\,, \; r_0 = A_0^{k-1} = 1 \tag{2.10}$$

olması durumun da $R_n = A_n^k$, $\bar{r}_n = A_n^{-k-1}$, $r(x) = (1-x)^{-k}$ ve (N, r_n), (C, k) Cesa'ro matrisidir. Ayrıca çok iyi bilinmektedir ki, $r_0 > 0$, $r_n \geq 0$ olduğunda (N, r_n) regüler olması için gerek ve yeter şart

$$r_n / R_n \to 0 \tag{2.11}$$

dır[11].

Tanım 2.10. $A = (a_{nv})$ ve $B = (b_{nv})$ iki metod olsun. $S_n \to s(A)$ ve $S_n \to s'(B)$ olan her (S_n) dizisi için $s = s'$ oluyorsa "A ve B metodlarına uyumludur" denir[6].

3. NÖRLUND VE NÖRLUND TİPİ METODLAR

Bu bölümde temel kavramlar ve teoremler bölümünde tanımladığımız özel bir limitleme metodu olan Np = (N, p_n) Nörlund metodunu inceleyeceğiz.

$$(Np)_{nv} = \begin{cases} \dfrac{p_{n-k}}{P_n} & , \quad v \leq n \\ 0 & , \quad v > n \end{cases} \quad ; \quad P_n = p_o + p_1 + \ldots + p_n \neq 0 \,,$$

ile verilen $\left((Np)_{nv}\right)$ Nörlund matrisi, üçgensel matristir.

Bir $A = \left(a_{nk}\right)$ matrisi üçgensel ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{nn} \neq 0$ ise A matrisine "normal matris" denir. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $(Np)_{nn} = p_o / p_n \neq 0$ olduğundan, $\left((Np)_{nv}\right)$ matrisi normal matristir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \in \mathbb{R}$ ise, bu şekilde seçilen Np–metoduna "Reel Nörlund Metodu" denir. Benzer şekilde, her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \geq 0$ seçilirse, bu durumda Np–metoduna "Pozitif Nörlund Metodu" denir.

Şimdi Nörlund ortalamasına ilişkin bazı kuvvet serilerini inceleyeceğiz.

Np–metodu regüler ise, $\sum\limits_{n=o}^{\infty} p_n z^n$ ve $\sum\limits_{n=o}^{\infty} P_n z^n$ kuvvet serileri $|z| < 1$ için yakınsaktır. Gerçekten; 3.1'de vereceğimiz Teorem 3.1.1.'e göre, Np–metodu regüler olduğundan $p_n = o\left(P_n\right)(n \to \infty)$ dır. Buna göre,

$$\frac{P_n}{P_{n+1}} = \frac{P_{n+1} - p_{n+1}}{P_{n+1}} = 1 - \frac{p_{n+1}}{P_{n+1}} = 1 - o(1) \; (n \to \infty)$$

olduğundan $\sum\limits_{n=o}^{\infty} P_n z^n$ serisi $|z| < 1$ için yakınsaktır. O halde $P(z) = \sum\limits_{n=o}^{\infty} P_n z^n$ olsun.

Diğer taraftan, $|z| < 1$ için

$$(1 - z) P(z) = \sum_{n=o}^{\infty} P_n z^n$$

olduğundan $\sum\limits_{n=o}^{\infty} p_n z^n$ serisi de $|z|<1$ için yakınsaktır. O halde $p(z)=\sum\limits_{n=o}^{\infty} p_n z^n$ olsun. Dolayısıyla,

$$a(z)=\sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n=\frac{p(z)}{q(z)}$$

$$b(z)=\sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n=\frac{q(z)}{p(z)}$$

$$k(z)=\sum_{n=o}^{\infty} k_n z^n=\frac{1}{p(z)}$$

olarak tanımlanan serilerin her üçü de, yeteri kadar küçük |z|'ler için yakınsaktır.

Nörlund matrisi normal matris olduğundan tersi vardır. Şimdi $\left((Np)_{nv}^{-1}\right)$, $\left((Np)_{nv}\right)$ matrisinin tersini göstermek üzere ispat edeceğiz ki $\sum\limits_{n=o}^{\infty} k_n z^n=k(z)=1/p(z)$ olmak üzere,

$$\left(N_p^{-1}\right)_{nv}=\begin{cases} k_{n-v}P_v & , \quad v\le n \\ 0 & , \quad v>n \end{cases}$$

dır.

Verilen bir $\left(S_n\right)$ dizisine $\left((Np)_{nv}\right)$ matrisi uygulandığında

$$\sigma_n=\sum_{v=o}^{n}\left(N_p\right)_{nv} S_v$$

ve

$$S_n=\sum_{v=o}^{n}\left(N_p^{-1}\right)_{nv}\sigma_v$$

olur. $\sum\limits_{v=o}^{n} k_{n-v}P_v\sigma_v$ gözönüne alınırsa,

$$\sum_{v=o}^{n} k_{n-v} P_v \sigma_v = \sum_{v=o}^{n} k_{n-v} \left(\sum_{\mu=0}^{v} p_{v-\mu} S_\mu \right)$$

$$= k_n p_o s_o + k_{n-1}(p_1 s_o + p_o s_1) + \ldots + k_o (p_n s_o + p_{n-1} s_1 + \ldots + p_o s_n)$$

$$= s_o (k_n p_o + \ldots + k_o p_n) + \ldots + s_n p_o k_o$$

$$= \sum_{\mu=o}^{n} s_\mu \left(\sum_{v=\mu}^{n} k_{n-v} p_{v-\mu} \right) \tag{3.1}$$

olur. Öte yandan $k(z) \cdot p(z) = 1$ olduğundan

$$\left(\sum_{n=o}^{\infty} k_n z^n \right) \left(\sum_{n=o}^{\infty} p_n z^n \right) = 1$$

ve böylece Cauchy çarpımı ile

$$\sum_{n=o}^{\infty} \left(\sum_{v=o}^{n} k_{n-v} p_v \right) z^n = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla kuvvet serilerinin özdeşlik özelliğinden

$$\sum_{v=o}^{n} k_{n-v} p_v = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \\ 0 & , \quad n > 0 \end{cases}$$

dır. Bu son eşitlik (3.1)'de kullanılırsa

$$\sum_{v=o}^{n} k_{n-v} P_v \sigma_v = S_n \tag{3.2}$$

bulunur. Bu ise isteneni verir.

Şimdi aşağıdaki şekilde seçilen Nörlund metodu için Np–limitlenebilen dizileri karakterize edeceğiz.

Nörlund matrisini $p_o = 1$, $p_1 = -2$, $n \geq 2$ için $p_n = 0$ olarak seçelim. Bu durumda bir (S_n) dizisinin Np–dönüşümü (σ_n) olmak üzere

$$\sigma_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=o}^{n} p_{n-v} S_v = 2(S_{n-1} - S_n)$$

olur. Üstelik,

$$S_n \to s\ (n\to\infty) \Rightarrow \sigma_n \to s\ (n\to\infty)$$

olduğundan metod regülerdir. Diğer taraftan yeteri kadar küçük |z|'ler için,

$$p(z)=\sum_{n=o}^{\infty} p_n z^n = 1-2z$$

ve

$$k(z)=\frac{1}{p(z)}=\frac{1}{1-2z}=\sum_{n=o}^{\infty} 2^n z^n=\sum_{n=o}^{\infty} k_n z^n$$

dır. Kuvvet serilerinin özdeşlik teoreminden $k_n = 2^n$ ve açık olarak $k_{n-v} = 2^{n-v}$ dır. Dolayısıyla (3.2)'den

$$S_n = \sum_{v=o}^{n} 2^{n-v} P_v \sigma_v$$

$$= 2^n\left(\sigma_o - \sum_{v=1}^{n}\frac{\sigma_v}{2^v}\right) \quad (n \geq 1)$$

bulunur. Bu şekilde seçilen Nörlund metodu için Np–limitlenebilen bütün dizilerin kümesi E ile gösterilirse,

$$E=\left\{(S_n): S_n = 2^n\left(\sigma_o-\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\sigma_v}{2^v}\right)(n\geq 1),\ (\sigma_n)\ \text{yakınsak}\right\}$$

dır. Öte yandan

$$S_n - 2^n\left(\sigma_o-\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\sigma_v}{2^v}\right)=\sum_{v=n+1}^{\infty} 2^{n-v}\sigma_v \qquad (3.3)$$

dır. Ayrıca $\sigma_n \to 0\ (n\to\infty)$ ise

$$a_{nv}=\begin{cases} 2^{n-v} & , \quad v \geq n+1 \\ 0 & , \quad v < n+1 \end{cases}$$

ile tanımlanan $A=(a_{nv})$ matrisi regüler olduğundan

$$\sum_{v=n+1}^{\infty} 2^{n-v}\sigma_v \to 0\ (n\to\infty) \qquad (3.4)$$

dır. Dolayısıyla (3.3) ve (3.4) den,

$S_n \to 0(Np) \Leftrightarrow S_n = C.2^n + C_n$; C sabit, $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0$ elde edilir. Buradan açık olarak $2^n \to 0\,(Np)$ dir.

3.1. Nörlund Metodlarının Regülerliği ve Uyumluluğu

Önce Nörlund metodunun regülerlik koşullarını belirleyen aşağıdaki Teorem 3.1.1'i verelim.

Teorem 3.1.1. Np–metodunun regüler olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sum_{v=o}^{n} |p_v| = 0(P_n)\ (n \to \infty),$$

$$p_n = o(P_n)\ (n \to \infty)$$

olmasıdır[7].

İspat. "Gerekli koşul": Np–metodu regüler olsun. Bu takdirde Silverman- Teoplitz teoreminin (i) ve (ii) koşulları sağlanır.

$$\sum_{v=o}^{\infty} \left|(Np)_{nv}\right| = \sum_{v=o}^{n} \left|\frac{p_{n-v}}{P_n}\right| = \frac{1}{P_n}\sum_{v=o}^{\infty} |p_v| = 0(1)\ \ (n \to \infty)$$

$$\sum_{v=o}^{n} |p_v| = 0(P_n)\ (n \to \infty),$$

(i)'den;

$$(Np)_{nv} = \frac{p_{n-v}}{P_n} \to 0\ \ (n \to \infty,\ v\ \text{sabit})$$

$$p_n = o(P_n)\ (n \to \infty)$$

elde edilir.

"Yeter Koşul": $\sum\limits_{v=o}^{\infty} |p_v| = 0(P_n)\ (n \to \infty)$ ve $p_n = o(P_n)\ (n \to \infty)$ olsun.

$$\sum_{v=o}^{\infty} \left|(Np)_{nv}\right| = \sum_{v=o}^{n} \left|\frac{p_{n-v}}{P_n}\right| = \frac{\sum\limits_{v=o}^{n} |p_v|}{P_n} = 0(1)\ (n \to \infty)$$

$$\sum_{v=o}^{\infty}(Np)_{nv}=\sum_{v=0}^{n}\frac{p_{n-v}}{P_n}=\frac{\sum_{v=o}^{n}p_v}{P_n}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{v=0}^{\infty}(Np)_{nv}\to 1\ (n\to\infty)$$

$p_n=o(P_n)$ olduğundan,

$$\frac{p_{n-1}}{P_n}=\frac{p_{n-1}}{P_{n-1}}\cdot\frac{P_n-p_n}{P_n}\to 0\ (n\to\infty)$$

$$\frac{p_{n-2}}{P_n}=\frac{p_{n-2}}{P_{n-2}}\cdot\frac{P_n-(p_n+p_{n-1})}{P_n}\to 0\ (n\to\infty)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{p_{n-v}}{P_n}=\frac{p_{n-v}}{P_{n-v}}\cdot\frac{P_n-(p_n+\ldots+p_{n-v+1})}{P_n}\to 0\ (n\to\infty)$$

dır. Dolayısıyla Teorem 2.3'ün (iii), (ii) ve (i) koşulları sağlanır. Silverman- Teoplitz teoremine göre Np–metodu regülerdir.

Pozitif Nörlund metodunun regülerlik koşulu ise, Teorem 3.1.1'in bir sonucu olarak verilir.

Sonuç 3.1.2. Her $n\in\mathbb{N}$ için $p_n\geq 0$ seçilirse,

Np–metodu regülerdir $\Leftrightarrow$ $p_n=o(P_n)$ $(n\to\infty)$ [7].

İspat. $\displaystyle\sum_{v=o}^{\infty}\left|(Np)_{nv}\right|=\sum_{v=o}^{\infty}(Np)_{nv}=\sum_{v=o}^{n}\frac{p_{n-v}}{P_n}=1$

olduğu göz önüne alınırsa ispat açıktır.

Reel ve regüler Nörlund metodlarının uyumluluğu, aşağıda vereceğimiz Teorem 3.1.3'ün önemli bir sonucudur.

Teorem 3.1.3. Np bir reel ve regüler Nörlund metodu ve $S_n \to s(Np)$ olsun. Bu takdirde $s(z)=\sum_{n=o}^{\infty} s_n z^n$ pozitif bir yakınsaklık yarıçapına sahiptir. Bir $\varepsilon>0$ vardır öyle ki s(z) fonksiyonu $1-\varepsilon<z<1$ için regülerdir ve $\lim_{x\to 1^-}(1-x)s(x)=s$ $(1-\varepsilon<x<1)$ dır[7].

İspat. $S_n \to s(Np)$ ise $\sigma_n=\frac{1}{P_n}\sum_{v=o}^{\infty} p_{n-v}S_v \to s\ (n\to\infty)$ dır. Np–metodu regüler olduğundan $\frac{P_n}{P_{n+1}}\to 1\ (n\to\infty)$ dır. O halde

$$(1-z)\sum_{n=o}^{\infty} P_n z^n = \sum_{n=o}^{\infty} p_n z^n \quad \left(P_n = p_o+\ldots+p_n \neq 0\right)$$

eşitliği göz önüne alınırsa $\sigma_n \to s\ (n\to\infty)$ ve $\frac{P_n}{P_{n+1}}\to 1\ (n\to\infty)$ olduğundan $\sum_{n=o}^{\infty} p_n z^n$ ve $\sum_{n=o}^{\infty} P_n\sigma_n z^n$ serileri $|z|<1$ için mutlak yakınsaktır. $p(z)=\sum_{n=o}^{\infty} p_n z^n$ ve $T(z)=\sum_{n=o}^{\infty} P_n\sigma_n z^n$ olsun. Diğer taraftan, yeteri kadar küçük $|z|$ ler için Cauchy çarpımı ve $\sum_{n=o}^{\infty} k_n z^n = k(z)=\frac{1}{p(z)}$ olmak üzere $S_n=\sum_{v=o}^{n} k_{n-v}P_v\sigma_v$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{n=o}^{\infty} s_n z^n &= \sum_{n=o}^{\infty}\left(\sum_{v=o}^{n} k_{n-v}P_v\sigma_v\right)z^n\\ &=\left(\sum_{n=o}^{\infty} k_n z^n\right)\left(\sum_{n=o}^{\infty} P_n\sigma_n z^n\right)\\ &=k(z)\cdot T(z)\\ &=\frac{T(z)}{p(z)}\end{aligned}$$

elde edilir. T(z) ve p(z), $|z|<1$ için yakınsak dolayısıyla regüler olduğundan, s(z) fonksiyonu kutup noktaları dışında $|z|<1$ için regülerdir. $p(0)=p_o \neq 0$ olduğundan s(z) fonksiyonu $z=0$ da regülerdir. Öte yandan,

$$\sum_{v=o}^{n} |p_v| = 0(P_n)$$

ve

$$\frac{P_n}{P_{n+1}} \to 1 \; (n \to \infty)$$

olduğundan $\exists N \in \mathbb{N}$, $\exists \delta > 0$ öyle ki $\forall n \geq \mathbb{N}$ için

$$P_n \geq \delta > 0 \text{ veya } P_n \leq -\delta < 0 \; \left(P_n \in \mathbb{R}\right)$$

dır.

$\forall n \geq N$ için $P_n \geq \delta > 0$, $0 < 1-\varepsilon < x < 1$ ise bu durumda;

$$\sum_{v=o}^{\infty} |P_v| x^v = \sum_{v=0}^{N} |P_v| x^v + \sum_{v=N+1}^{\infty} P_v x^v$$

$$\sum_{v=o}^{\infty} |P_v| x^v = \sum_{v=o}^{N} |P_v| x^v + \sum_{v=o}^{\infty} P_v x^v - \sum_{v=o}^{N} P_v x^v$$

$$\leq \left| \sum_{v=o}^{\infty} P_v x^v \right| + 2 \sum_{v=o}^{N} |P_v| x^v$$

olur. $\forall n \geq N$ için $P_n \leq -\delta < 0$, $0 < 1-\varepsilon < 0 < 1$ ise bu durumda;

$$\sum_{v=o}^{\infty} |P_v| x^v = \sum_{v=o}^{N} |P_v| x^v - \sum_{v=N+1}^{\infty} P_v x^v$$

$$= \sum_{v=o}^{N} |P_v| x^v - \sum_{v=o}^{\infty} P_v x^v + \sum_{v=o}^{N} P_v x^v$$

$$\leq \left| \sum_{v=o}^{\infty} P_v x^v \right| + 2 \sum_{v=o}^{N} |P_v| x^v$$

dır. Sonuç olarak her iki durumda da $0 < 1-\varepsilon < x < 1$ için

$$\sum_{v=o}^{\infty} |P_v| x^v \leq \left| \sum_{v=o}^{\infty} P_v x^v \right| + 2 \sum_{v=o}^{N} |P_v| x^v$$

bulunur. Buradan,

$$\frac{\sum_{v=o}^{\infty}|P_v|x^v}{|P(x)|} \le 1 + 2\frac{\sum_{v=o}^{N}|P_v|x^v}{|P(x)|}$$

dır. $|P(x)| \to \infty \left(x \to 1^-\right)$ olduğundan

$$\frac{\sum_{v=o}^{\infty}|P_v|x^v}{|P(x)|} \le 1 + o(1) \left(x \to 1^-\right)$$

dır. Ayrıca $0 < 1-\varepsilon < x < 1$ için $(1-x)\ P(x) = p(x)$ olduğundan

$$(1-x)s(x) = (1-x)\frac{T(x)}{p(x)}$$

$$= \frac{T(x)}{P(x)}$$

$$= \frac{\sum_{v=o}^{\infty} P_v \sigma_v x^v}{P(x)}$$

dır. $a_v(x) = \dfrac{P_v x^v}{P(x)} \quad (0 < 1-\varepsilon < x < 1)$ olmak üzere

$$(1-x)s(x) = \sum_{v=o}^{\infty} a_v(x)\sigma_v \ \ (0 < 1-\varepsilon < x < 1)$$

dır. Şimdi $\sigma_n \to s\ (n \to \infty)$ olduğundan $A = \left(a_v(x)\right)$ in koşulları sağladığı gösterilirse ispat biter.

(iii) $\dfrac{\sum_{v=o}^{\infty}|P_v|x^v}{|P(x)|} \le 1 + o(1) \left(x \to 1^-\right)$'den

$$\sum_{v=o}^{\infty} |a_v(x)| = \sum_{v=o}^{\infty}\left|\frac{P_v x^v}{P(x)}\right| = 0(1) \left(x \to 1^-\right)$$

(ii) $\displaystyle\sum_{v=o}^{\infty} a_v(x) = \sum_{v=o}^{\infty}\frac{P_v x^v}{P_x} = 1$

(i) $\quad P_v x^v = o\left(\sum_{n=o}^{\infty} P_n x^n\right)$

olduğundan

$$a_v(x) \to 0 \left(x \to 1^-, \ v \ \text{sabit}\right)$$

dır.

O halde $\lim_{x \to 1^-} (1-x)s(x) = s \ (0 < 1-\varepsilon < x < 1)$ dır.

Teorem 3.1.4. Her regüler ve reel Nörlund metodları uyumludur[7].

İspat. Np ve Nq herhangi iki regüler ve reel Nörlund metodu olsun. Bir (S_n) dizisi için

$$S_n \to s(Np) \ \text{ve} \ S_n \to s'(Nq) \Rightarrow s = s'$$

olduğu gösterilirse ispat biter. Teorem 3.1.3'ye göre,

$$S_n \to s(Np) \ \text{ise} \ \lim_{x \to 1^-} (1-x)s(x) = s$$

$$S_n \to s'(Nq) \ \text{ise} \ \lim_{x \to 1^-} (1-x)s(x) = s'$$

dır. Bu ikisinden $s = s'$ elde edilir.

Regüler ve pozitif Nörlund metotlarının uyumlu olmaları, aşağıda vereceğimiz lemmanın bir sonucu olarak kolayca görülür.

Lemma 3.1.5. Np ve Nq regüler, pozitif Nörlund metodu ve $r_n = \sum_{v=o}^{n} p_{n-v} q_v$ olmak üzere Nr–metodunu tanımlansın. Bu durum da Nr–metodu regülerdir ve $S_n \to s(Np)$ ise $S_n \to s(Nr)$ dır[7].

İspat . Önce Nr–metodunun regüler olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} R_n &= r_o + r_1 + \ldots + r_n \\ &= p_o q_o + (p_1 q_o + p_o q_1) + \ldots + (p_n q_o + p_{n-1} q_1 + \ldots + p_o q_n) \\ &= q_o(p_o + p_1 + \ldots + p_n) + q_1(p_o + \ldots + p_{n-1}) + \ldots + q_n p_o \end{aligned}$$

$$= q_o P_n + q_1 P_{n-1} + \ldots + q_n P_o$$

$$= \sum_{v=o}^{n} q_{n-v} P_v \tag{3.1.1}$$

dır. Diğer taraftan $R_n \sim P_n Q_n \ (n \to \infty)$ olduğu kolayca görülür. O halde,

$$\frac{r_n}{P_n Q_n} = \frac{1}{P_n Q_n} \cdot \sum_{v=o}^{n} P_{n-v} q_v < \sum_{v=o}^{n} \frac{p_{n-v}}{P_n} \cdot \frac{q_v}{Q_v}$$

olur. Np ve Nq metodları regüler olduğundan

$$(Np)_{nv} = \begin{cases} \dfrac{p_{n-v}}{P_n} & , \quad v \le n \\ 0 & , \quad v > n \end{cases}$$

olmak üzere $\left((Np)_{nv}\right)$ matrisi regüler ve Sonuç 3.1.2'den $q_n = o(Q_n) \ (n \to \infty)$ dır. Dolayısıyla

$$\frac{r_n}{R_n} \sim \frac{r_n}{P_n Q_n} \to 0 \ (n \to \infty)$$

elde edilir. Yine Sonuç 3.1.2'den Nr–metodu regülerdir.

Şimdi $S_n \to s(Np)$ ise $S_n \to s(Nr)$ olduğunu gösterelim.

$$S_n \to s(Np) \ \text{ise} \ \sigma_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=o}^{n} p_{n-v} S_v \to s \ (n \to \infty)$$

dır.

$$H_n = \frac{1}{R_n} \sum_{v=o}^{n} r_{n-v} S_v$$

olarak tanımlayalım.

$$H_n = \frac{r_o s_n + r_1 s_{n-1} + \ldots + r_n s_n}{R_n}$$

$$= \frac{1}{R_n} \left[\left(p_o q_o s_n + (p_1 q_o + p_0 q_1) S_{n-1} + \ldots + (p_0 q_n + \ldots + p_n q_o) S_o \right) \right]$$

$$= \frac{1}{R_n} \left[q_o (p_0 s_n + p_1 s_{n-1} + \ldots + p_n s_o) + \ldots + q_{n-1} (p_o s_1 + p_1 s_o) + q_n p_o s_o \right]$$

$$=\frac{1}{R_n}\left[q_oP_n\sigma_n+\ldots+q_{n-1}P_1\sigma_1+q_nP_o\sigma_o\right]$$

$$=\frac{1}{R_n}\sum_{v=o}^{n}q_{n-v}P_v\sigma_v$$

dır.

$$C_{nv}=\begin{cases}\dfrac{q_{n-v}P_v}{R_n} & , \quad v\le n\\ 0 & , \quad v>n\end{cases}$$

olmak üzere $H_n=\sum_{v=o}^{n}C_{nv}\sigma_v$ olarak yazılır. $\sigma_n\to s\ (n\to\infty)$ olduğundan (C_{nv}) matrisinin regüler olduğu gösterilirse $\lim_{n\to\infty}H_n=s$ elde edilir.

Her $n\in\mathbb{N}$ için $p_n\ge 0$ ve $q_n\ge 0$ olduğundan $C_{nv}\ge 0$ dır. Dolayısıyla (3.1.1) kullanılarak,

$$\sum_{v=o}^{\infty}\left|C_{nv}\right|=\sum_{v=o}^{\infty}C_{nv}=\frac{\sum_{v=o}^{n}q_{n-v}P_v}{R_n}=1$$

elde edilir. Böylece koşullar sağlanır.

$$C_{nv}=\frac{q_{n-v}P_v}{q_nP_o+q_{n-1}P_1+\ldots+q_{n-v}P_{n-v}+\ldots+q_oP_n}$$

$$\le\frac{q_{n-v}P_v}{q_{n-v}P_v+q_{n-v-1}P_{v+1}+\ldots+q_oP_n}$$

$$\le\frac{q_{n-v}P_v}{p_o\left(q_{n-v}+q_{n-v-1}+\ldots+q_o\right)}$$

$$=\frac{q_{n-v}P_v}{Q_{n-v}p_o}$$

dır. N_q-metodu regüler olduğundan

$$C_{nv}\le\frac{q_{n-v}}{Q_{n-v}}\cdot\frac{P_v}{p_o}\to 0\ \left(n\to\infty,\ v\ \text{sabit}\right)$$

dır. Dolayısıyla (C_{nv}) matrisi regülerdir. O halde $S_n\to s\left(N_r\right)$ elde edilir.

Teorem 3.1.6. Regüler ve pozitif Nörlund metodları uyumludur[7].

İspat. Np ve Nq pozitif ve regüler herhangi iki Nörlund metodu olsun. Bunlar yardımıyla $r_n = \sum_{v=o}^{n} p_{n-v} q_v$ Nr–Nörlund metodunu tanımlayalım. Bu takdirde Lemma 3.1.5'den,

$$S_n \to s(N_p) \Rightarrow S_n \to s(Nr)$$

ve benzer şekilde

$$S_n \to s'(Nq) \Rightarrow S_n \to s'(Nr)$$

dir. O halde $s = s'$ elde edilir.

3.2. Kapsama ve Denklik

Bu kısımda "kapsama" ve "denklik" kavramlarını tanıtıp, Nörlund metodunun bu kavramlarla ilgili özelliklerini vereceğiz. $A = (a_{nv})$ ve $B = (b_{nv})$ iki metod olsun. Eğer $S_n \to s(A)$ olan her (S_n) dizisi için, $S_n \to s'(B)$ oluyorsa bu durumda "B metodu A yı kapsar" denir ve $A \subseteq B$ şeklinde gösterilir. Eğer $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ oluyorsa "A ve B metodlarına denktir" denir ve $A \approx B$ (veya $A \equiv B$) şeklinde gösterilir. Burada şunu ayrıca belirtelim ki, $A \subseteq B$ fakat A ve B metodları denk değilse bu takdirde "B metodu A dan daha kuvvetlidir" (veya "A metodu B den daha zayıftır") denir.

İki matrisin değişik şekilde çarpımları tanımlanabilir. Bunlardan bir tanesi aşağıdaki gibidir. Bu çarpıma "alışılmış matris çarpımı" diyeceğiz.

$A = (a_{nk})$, $B = (b_{nk})$ iki matris olsun.

$$C_{nk} = \sum_{i=o}^{\infty} a_{ni} b_{ik} \quad (n,\ k = 0,1,\ldots)$$

olmak üzere tanımlanan $C=(C_{nk})$ matrisine A ile B nin çarpımı denir ve $A\cdot B=C$ şeklinde gösterilir. Burada her bir $n\in\mathbb{N}$ için $\sum_{i=o}^{\infty} a_{ni}b_{ik}$ serilerinin yakınsak olduğu kabul edilmiştir.

Şimdi Teorem 3.2.1'de $A\subseteq B$ olması için gerekli ve yeterli koşulları vereceğiz.

Teorem 3.2.1. $A=(a_{nk})$ normal ve $B=(b_{nk})$ üçgensel matris olsun. Bu takdirde A metodunun B tarafından kapsanması için gerekli ve yeterli koşul $C=B\cdot A^{-1}$ matrisinin yakınsaklık koruyan matris olmasıdır[7].

İspat. "Gerekli Koşul" : $A\subseteq B$ olsun. Bu takdirde bir (S_n) dizisi için $S_n\to s(A)$ ise $S_n\to s'(B)$ dır. Buna göre,

$$\sigma_n=\sum_{k=o}^{n} a_{nk}S_k \to s\,(n\to\infty)$$

ve

$$\tau_n=\sum_{k=o}^{n} b_{nk}S_k \to s'\,(n\to\infty)$$

dır. A bir normal matris olduğundan $A^{-1}=(a'_{nk})$ ters matrisi vardır. Buradan,

$$\sigma_n=\sum_{k=o}^{n} a_{nk}S_k \text{ ise } S_n=\sum_{k=o}^{n} a'_{nk}S_k$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}\tau_n &= \sum_{k=o}^{n} b_{nk}S_k\\ &= \sum_{k=o}^{n} b_{nk}\left(\sum_{i=o}^{k} a'_{ki}\sigma_i\right)\\ &= b_{no}(a'_{oo}\sigma_o)+b_{n1}(a'_{1o}\sigma_o+a'_{11}\sigma_1)+\dots+b_{nn}(a'_{no}\sigma_o+a'_{n1}\sigma_1+\dots+a'_{nn}\sigma_n)\\ \tau_n &= \sigma_o(b_{no}a'_{oo}+b_{n1}a'_{1o}+\dots+b_{nn}a'_{nn})+\sigma_1(b_{n1}a'_{11}+b_{n2}a'_{21}+\dots+b_{nn}a'_{nn})\\ &\quad +\dots+\sigma_n b_{nn}a'_{nn}\end{aligned}$$

$$=\sigma_o\left(\sum_{k=o}^{n} b_{nk}a'_{ko}\right)+\sigma_1\left(\sum_{k=1}^{n} b_{nk}a'_{k1}\right)+\ldots+\sigma_n b_{nn}a'_{nn}$$

$$=\sum_{i=o}^{n}\sigma_i\left(\sum_{k=i}^{n} b_{nk}a'_{ki}\right)$$

dır. $B=(b_{nk})$ ve $A^{-1}=(a'_{nk})$ matrislerine alışılmış matris çarpımı uygulanırsa,

$$c_{ni}=\sum_{k=1}^{n} b_{nk}a'_{ki}$$

olmak üzere $B\cdot A^{-1}=C=(c_{ni})$ dır. O halde,

$$\tau_n=\sum_{i=o}^{n} c_{ni}\sigma_i$$

olarak yazılır. Böylece, $\sigma_n\to s(n\to\infty)$ ve $\tau_n\to s'(n\to\infty)$ olduğundan $C=(c_{ni})$ matrisi yakınsaklık korur.

"Yeterli Koşul": $C=B\cdot A^{-1}$ matrisi yakınsaklık korusun. Bu durumda $A\subseteq B$ olduğunu gösterelim:

Bir (S_n) dizisi için $S_n\to s(A)$ olsun. Bu takdirde

$$\sigma_n=\sum_{k=o}^{n} a_{nk}S_k\to s(n\to\infty)$$

dır. $(c_{nk})=C=BA^{-1}$ matrisi yakınsaklık koruduğundan

$$\sum_{k=o}^{n} c_{nk}\sigma_k\to s'(n\to\infty)$$

dır. O halde ispat için

$$\sum_{k=o}^{n} c_{nk}\sigma_k=\sum_{k=o}^{n} b_{nk}S_k=\tau_n$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\sum_{k=o}^{n} c_{nk}\sigma_k=\sum_{k=o}^{n}\left(\sum_{i=k}^{n} b_{ni}a'_{ik}\right)\sigma_k$$

$$=\left(\sum_{i=o}^{n} b_{ni}a'_{io}\right)\sigma_o+\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ni}a'_{i1}\right)\sigma_1+...+b_{nn}a'_{nn}\sigma_n$$

$$=\left(b_{no}a'_{oo}\sigma_o+b_{n1}a'_{1o}\sigma_o+...+b_{nn}a'_{no}\sigma_o\right)+(b_{n1}a'_{11}\sigma_1+b_{n2}a'_{21}\sigma_1+$$

$$+...+b_{nn}a'_{n1}\sigma_1+...+b_{nn}a'_{n1}\sigma_1)+...+b_{nn}a'_{nn}\sigma_n$$

$$=b_{n0}(a'_{n0}\sigma_0)+b_{n1}(a'_{10}\sigma_0+a'_{11}\sigma_1)+...+b_{nn}(a'_{n0}\sigma_0+a'_{n1}\sigma_1+...+a'_{nn}\sigma_n)$$

$$=b_{no}S_o+b_{n1}S_1+...+b_{nn}S_n$$

$$=\sum_{k=o}^{n} b_{nk}S_k=\tau_n$$

Teorem 3.2.1'i reel ve regüler Nörlund metotlarının denkliğini veren Teorem 3.2.4'ün ispatında kullanacağız. Bundan sonra A yerine Np, B yerine Nq–metotlarını alarak kapsama ve denklik kavramlarıyla ilgili teoremler vereceğiz.

Teorem 3.2.2. Np ve Nq herhangi iki regüler Nörlund metodu olsun. Bu takdirde $\sum_{n=o}^{\infty} b_n z_n=b(z)=\dfrac{q(z)}{p(z)}$ olmak üzere, $S_n\to s(Np)$ olduğunda $S_n\to s(Nq)$ olması için gerekli ve yeterli koşul,

a) $|b_o||P_n|+|b_1||P_{n-1}|+...+|b_n||P_o|\le HQ_n$

olacak şekilde n den bağımsız bir H sayısının var olması

b) $b_n=o(Q_n)(n\to\infty)$

olmasıdır[7].

İspat. "Gerekli Koşul": $S_n\to s(Np)$ olduğunda $S_n\to s(N_q)$ olsun. Bu takdirde (S_n) dizisinin Np ve Nq dönüşümleri, sırasıyla (σ_n) ve (τ_n) olmak üzere,

$$\sigma_n=\frac{1}{P_n}\sum_{k=o}^{n} p_{n-k}S_k\to s\ (n\to\infty)$$

ve

$$\tau_n=\frac{1}{Q_n}\sum_{k=o}^{n} q_{n-k}S_k\to s\ (n\to\infty)$$

dır. Ayrıca Np ve Nq metotları regüler olduğundan $\sum_{n=o}^{\infty} Q_n \tau_n z^n$ ve $\sum_{n=o}^{\infty} P_n \sigma_n z^n$ serileri $|z|<1$ için yakınsaktır. O halde $|z|<1$ için $s(z)=\sum_{n=o}^{\infty} S_n z^n$ olmak üzere Cauchy çarpımı kullanılarak,

$$\begin{aligned}\sum_{n=o}^{\infty} Q_n \tau_n z^n &= \sum_{n=o}^{\infty}\left(\sum_{k=o}^{n} q_{n-k} S_k\right) z^n \\ &= \left(\sum_{n=o}^{\infty} q_n z^n\right)\left(\sum_{n=o}^{\infty} S_n z^n\right) \\ &= q(z).s(z)\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $|z|<1$ için,

$$\sum_{n=o}^{\infty} P_n \tau_n z^n = p(z)\cdot s(z)$$

elde edilir. Dolayısıyla $|z|<1$ için

$$\begin{aligned}\sum_{n=o}^{\infty} Q_n \tau_n z^n &= q(z)\cdot s(z) \\ &= \frac{q(z)}{p(z)}\cdot p(z)\cdot s(z) \\ &= \left(\sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n\right)\left(\sum_{n=o}^{\infty} P_n \sigma_n z^n\right) \\ &= \sum_{n=o}^{\infty}\left(\sum_{k=o}^{n} b_{n-k} P_k \sigma_k\right) z^n\end{aligned}$$

ve kuvvet serilerinin özelliğinden,

$$Q_n \tau_n = \sum_{k=o}^{n} b_{n-k} P_k \sigma_k$$

bulunur.

$$c_{nk} = \begin{cases} \dfrac{b_{n-k} P_k}{Q_n} & , \quad k \le n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

olmak üzere $\tau_n = \sum_{k=o}^{n} c_{nk}\sigma_k$ olarak yazılır. $\sigma_n \to s(n\to\infty)$ ve $\tau_n \to s(n\to\infty)$ olduğundan (c_{nk}) matrisi regülerdir. O halde Teorem 2.3'e göre (iii) ve (i) koşulları sağlanır. (iii) koşuluna göre;

$$\sum_{k=o}^{\infty} |c_{nk}| = \sum_{k=o}^{n} |b_{n-k}||P_k| = 0(Q_n)\ (n\to\infty)$$

bulunur ve a) koşulu sağlanır. Teorem 2.3'ün (i) koşuluna göre; $Q_{n-k} \sim Q_n\left(n\to\infty,\ k\ \text{sabit}\right)$ olduğu göz önüne alınırsa sabit her k için

$$\lim_{n\to\infty} c_{nk} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n-k}P_k}{Q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n-k}P_k}{Q_{n-k}} = P_k \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n-k}}{Q_{n-k}}$$

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{Q_n}$$

olur ve b) koşulu sağlanır.

"Yeterli Koşul": a) ve b) koşulları sağlansın. Bu takdirde ispat için

$$c_{nk} = \begin{cases} \dfrac{b_{n-k}P_k}{Q_n} & , \quad k \le n \\ 0 & , \quad k < n \end{cases}$$

olmak üzere (c_{nk}) matrisinin regüler olduğunu göstermek yeterlidir. Hipotezden Teorem 2.3'ün (iii) ve (i) koşulları sağlanır. (ii) koşulunun sağlandığını gösterelim: $|z| < 1$ için Cauchy çarpımı kullanılarak,

$q(z) = p(z)\cdot b(z)$

$$\sum_{n=o}^{\infty} q_n z^n = \left(\sum_{n=o}^{\infty} p_n z^n\right)\cdot\left(\sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n\right)$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty}\left(\sum_{k=o}^{n} p_k b_{n-k}\right) z^n$$

ve kuvvet serilerinin özdeşliği teoreminden

$$q_n = \sum_{k=o}^{n} p_k b_{n-k} \tag{3.2.1}$$

bulunur. Ayrıca,

$$Q_n = \sum_{k=o}^{n} q_k = \sum_{k=o}^{n}\left(\sum_{i=o}^{k} p_i b_{k-i}\right)$$

$$= p_o b_o + (p_o b_1 + p_1 b_o) + \ldots + (p_o b_n + p_1 b_{n-1} + \ldots + p_n b_o)$$

$$= b_o (p_o p_1 + \ldots + p_n) + b_1 (p_o + \ldots + p_{n-1}) + \ldots + b_n p_o$$

$$= b_o P_n + b_1 P_{n-1} + \ldots + b_n P_o$$

$$= \sum_{k=o}^{n} b_{n-k} P_k \tag{3.2.2}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\sum_{k=o}^{n} c_{nk} = \sum_{k=o}^{n} \frac{b_{n-k} P_k}{Q_n} = 1$$

olup buradan (ii) sağlanır. Bu üç koşul sağlandığından Teorem 2.3'e göre (c_{nk}) matrisi regülerdir.

Lemma 3.2.3. $p(x) = \sum_{n=o}^{\infty} p_n x^n$, $|x| < 1$ için yakınsak ve $p_o = 1$, $p_n > 0$, $\frac{p_{n+1}}{p_n} \geq \frac{p_n}{p_{n-1}}$ $(n > 0)$ ise $C_n \geq 0$, $\sum_n C_n \leq 1$ olacak şekilde

$$\{p(x)\}^{-1} = \frac{1}{p(x)} = 1 - C_1 x - C_2 x^2 \ldots$$

dır. Eğer $\sum_n p_n = \infty$ ise $\sum_n C_n = 1$ dir[7].

Teorem 3.2.4. i) Np ve Nq regüler Nörlund metodlar;

ii) $p_o = 1$, $p_n > 0$, $\frac{p_{n+1}}{p_n} \geq \frac{p_n}{p_{n-1}}$ $(n > 0)$;

iii) $q_n > 0$;

iv) $\frac{p_n}{p_{n-1}} \leq \frac{q_n}{q_{n-1}}$ $(n > n_o)$;

olsun. Bu takdirde $S_n \to s(Np)$ ise $S_n \to s(Nq)$ dır[7].

İspat. $n_o = 0$ özel hali için ispat edelim. Bu durumda iv) koşulu her n > 0 için sağlanır. Lemma 3.2.3.'e göre, yeteri kadar küçük x ler için

$$\frac{1}{p(x)} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n x^n$$

dır. $\sum_{n=o}^{\infty} b_n x^n = b(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$ olmak üzere Cauchy çarpımı kullanılarak,

$$\left(\sum_{n=o}^{\infty} b_n x^n\right) = \left(\sum_{n=o}^{\infty} \gamma_n x^n\right)\left(\sum_{n=o}^{\infty} q_n x^n\right)$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty}\left(\sum_{k=o}^{n} q_{n-k}\gamma_k\right)x^n$$

ve kuvvet serilerinin özdeşliğinden,

$$b_o = q_o,$$

$$b_n = q_n\gamma_o + q_{n-1}\gamma_1 + \ldots + q_o\gamma_n \qquad (n > 0)$$

bulunur. $\gamma_o = 1$ ve $C_n = -\gamma_n \ (n = 1, 2, \ldots)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$b_n = q_n - C_1\ q_{n-1} - C_2\ q_{n-2} - \ldots - C_n q_o \quad (n > 0);$$

$$\frac{b_n}{q_n} = 1 - C_1 \cdot \frac{q_{n-1}}{q_n} - C_2 \cdot \frac{q_{n-2}}{q_n} - \ldots - C_n \cdot \frac{q_o}{q_n} \qquad (n > 0)$$

dır. Ayrıca

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\gamma_k = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases}$$

eşitliğinde $p_o = 1$ ve $C_n = -\gamma_n$ (n = 1, 2, …) olduğu kullanılırsa

$$p_n - C_1 p_{n-1} - \ldots - C_n p_o = 0 \quad (n > 0)$$

elde edilir. Diğer taraftan iv) koşuluna göre,

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} \le \frac{q_n}{q_{n-1}} \Rightarrow \frac{q_{n-1}}{q_n} \le \frac{p_{n-1}}{p_n};$$

$$\frac{q_{n-2}}{q_n} = \frac{q_{n-1}}{q_n} \cdot \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \le \frac{p_{n-1}}{p_n} \cdot \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} = \frac{p_{n-2}}{p_n}$$

……………………………………………

elde edilir. O halde

$$\frac{b_n}{q_n} = 1 - C_1 \cdot \frac{q_{n-1}}{q_n} - C_2 \cdot \frac{q_{n-2}}{q_n} - \ldots - C_n \cdot \frac{q_o}{q_n}$$

$$\geq 1 - C_1 \cdot \frac{p_{n-1}}{p_n} - C_2 \cdot \frac{p_{n-2}}{p_n} - \ldots - C_n \cdot \frac{p_o}{p_n} = 0$$

elde edilir. $q_n > 0$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n > 0$ dır. Şimdi Teorem 3.2.2'deki a) ve b) koşullarının sağlandığını gösterelim.

(3.2.2)'den;

a) $|b_o||P_n| + \ldots + |b_n||P_o| = b_o P_n + \ldots + b_n P_o = Q_n$;

ve (3.2.1) dan da;

b) $b_o p_o \leq b_n p_o + \ldots + b_o p_n = q_n$

dır. Nq regüler olduğundan, Sonuç 3.1.2.'den

$$b_n = 0(q_n) = o(Q_n) \; (n \to \infty)$$

elde edilir. O halde Teorem 3.2.2'ye göre $S_n \to s(Np)$ ise $S_n \to s(Nq)$ dır. Böylece $n_o = 0$ özel hali için ispat biter. Şimdi genel durum için ispat edelim.

$$r_n = p_n \; (n = n_o, \; n_o + 1, \ldots)$$

ve eğer gerekli ise n_o sayısına kadar olan n ler için

$$\frac{r_{n_o}}{r_{n_o - 1}} \leq \frac{r_{n_o + 1}}{r_{n_o}}, \quad \frac{r_{n_o}}{r_{n_o - 1}} \leq \frac{q_{n_o}}{q_{n_o - 1}};$$

$$\frac{r_{n_o - 1}}{r_{n_o - 2}} \leq \frac{r_{n_o}}{r_{n_o - 1}}, \quad \frac{r_{n_o - 1}}{r_{n_o - 2}} \leq \frac{q_{n_o - 1}}{q_{n_o - 2}};$$

....

$$\frac{r_1}{r_o} \leq \frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{r_1}{r_o} \leq \frac{q_1}{q_o}$$

olsun. Bu takdirde n > 0 için

$$\frac{r_n}{r_{n-1}} \leq \frac{r_{n+1}}{r_n}, \quad \frac{r_n}{r_{n-1}} \leq \frac{q_n}{q_{n-1}}$$

olur. $\rho_n = \dfrac{r_n}{r_o}$ olarak tanımlayalım. Bu takdirde

$$\rho_o = 1,\ \rho_n = 0,\ \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \geq \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}},\ \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} \leq \frac{q_n}{q_{n-1}}\ \ (n > o)$$

sağlanır. Dolayısıyla ρ_n, $n_o = 0$ özel hali için hipotezdeki koşulları sağlar. $n_o = 0$ için ispat yapıldığından

$$S_n \to s(N\rho) \Rightarrow S_n \to s\left(N_q\right)$$

dır. Ayrıca ρ_n nin tanımı gereği

$$S_n \to s(Nr) \Rightarrow S_n \to s(N\rho)$$

dır. O halde

$$S_n \to s\left(N_p\right) \Rightarrow S_n \to s\left(N_r\right)$$

olduğu gösterilirse ispat biter.

$$r_n = p_n + \delta_n \ \ \left(n = 0, 1, \ldots, n_o - 1\right)$$

ile tanımlayalım öyle ki

$$r(x) = \sum_{n=o}^{\infty} r_n x^n = p(x) + \sum_{n=o}^{n_0 - 1} \delta_n x^n$$

olsun. $\delta(x) = \sum_{n=o}^{n_o - 1} \delta_n x^n$ olmak üzere

$$r(x) = p(x) + \delta(x)$$

olur. Lemma 3.2.3'e göre $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \leq 1$ olmak üzere

$$\frac{1}{p(x)} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n$$

olduğundan

$$\sum_{n=o}^{\infty} |\gamma_n| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \leq 2$$

dır.

$$b(x) = \frac{r(x)}{p(x)} = \sum_{n=o}^{\infty} b_n x^n$$

olarak tanımlayalım. $r(x) = p(x) + \delta(x)$ olduğu kullanılarak,

$$\sum_{n=o}^{\infty} b_n x^n = 1 + \frac{\delta(x)}{p(x)} = 1 + \sum_{n=o}^{n_o - 1} \delta_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n$$

ve buradan da

$$\sum_{n=o}^{\infty} |b_n| \leq 1 + \sum_{n=o}^{n_o - 1} \delta_n \cdot \sum_{n=o}^{\infty} |\gamma_n| \leq 1 + 2 \sum_{n=o}^{n_o - 1} \delta_n = H$$

elde edilir. O halde

$$\sum_{n=o}^{\infty} |b_n| \leq H$$

dır. Dolayısıyla $b_n = o(1)\ (n \to \infty)$ olur. Üstelik $R_n = r_o + r_1 + ... + r_n \neq 0$ olduğundan $b_n = o(R_n)\ (n \to \infty)$ bulunur. Böylece Teorem 3.2.2'nin b) koşulu sağlanır. Diğer taraftan,

$$|b_o||P_n| + ... + |b_n||P_o| = |b_o| P_n + ... + |b_n| P_o \leq HP_n \leq HR_n$$

olur ki bu ise i) koşulunun sağlandığını gösterir. O halde Teorem 3.2.2'ye göre $S_n \to s(N_r) \Rightarrow S_n \to s(N_p)$ dir.

Aşağıdaki Teorem 3.2.5'de, (p_n) ve (q_n) dizilerine karşılık gelen Np ve Nq Nörlund metotlarının denk olması için gerekli koşulları vereceğiz.

Teorem 3.2.5. Np ve Nq regüler Nörlund metotlar olsun. Bu takdirde $Np \approx Nq$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n, \quad \frac{q(z)}{p(z)} = \sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n$$

olmak üzere $\sum_{n=o}^{\infty} |a_n| < \infty$ ve $\sum_{n=o}^{\infty} |b_n| < \infty$ olmasıdır[7].

İspat. "Gerekli Koşul": $Np \approx Nq$ olsun. Bu takdirde $Np \subseteq Nq$ ve $Nq \subseteq Np$ dir. $Np \subseteq Nq$ olduğunu göz önüne alalım.

$$(Nq)_{nv} = \begin{cases} \dfrac{q_{n-v}}{Q_n} & , \quad v \le n \\ 0 & , \quad v > n \end{cases} \qquad (Q_n = q_o + \dots + q_n \ne 0)$$

ve $\dfrac{1}{p(z)} = k(z) = \sum\limits_{n=o}^{\infty} k_n z^n$ olmak üzere

$$\left(N_p^{-1}\right)_{nv} = \begin{cases} k_{n-v} P_v & , \quad v \le n \\ 0 & , \quad v > n \end{cases} \qquad (P_n = p_o + \dots + p_n \ne 0)$$

olmak üzere $\left((Nq)_{nv}\right)$ ve $\left(\left(N_p^{-1}\right)_{nv}\right)$ matrislerine alışılmış matris çarpımı uygulanarak,

$$\left(N_q N_p^{-1}\right)_{nv} = \sum_{\rho=o}^{n} \frac{q_{n-\rho}}{Q_n} k_{\rho-v} P_v$$

$$= \frac{P_v}{Q_n} \sum_{\rho=v}^{n} q_{n-\rho} k_{\rho-v} \quad (v \le n) \qquad (3.2.3)$$

elde edilir. Yeteri kadar küçük |z| ler için, Cauchy çarpımı kullanılarak

$$k(z) \cdot q(z) = \sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n$$

$$\left(\sum_{n=o}^{\infty} k^n z^n\right)\left(\sum_{n=o}^{\infty} q_n z^n\right) = \sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n$$

$$\sum_{n=o}^{\infty}\left(\sum_{v=o}^{n} q_{n-v} k_v\right) z^n = \sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n$$

bulunur. Kuvvet serilerinin özdeşliğinden,

$$b_n = \sum_{v=o}^{n} q_{n-v} k_v$$

olup

$$b_{n-v} = \sum_{\rho=o}^{n-v} q_{n-v-\rho} k_\rho = \sum_{\rho=v}^{n} q_{n-\rho} k_{\rho-v} \qquad (3.2.4)$$

dır. (3.2.3), (3.2.4) da yerine yazılırsa,

$$\left(N_q N_p^{-1}\right)_{nv} = \frac{P_v}{Q_n} \cdot b_{n-v} \qquad (v \le n)$$

elde edilir. Teorem 3.2.1'e göre, $N_p \subseteq N_q$ olduğundan $\left(\left(N_q N_p^{-1}\right)_{nv}\right)$ matrisi yakınsaklık korur. Dolayısıyla, $\left(\left(N_q N_p^{-1}\right)_{nv}\right)$ matrisi Teorem 2.3'ün (iii) koşulunu sağlar. Yani;

$$\sum_{v=o}^{\infty}\left|\left(N_q N_p^{-1}\right)_{nv}\right| = \sum_{v=o}^{n}\left|\frac{P_v}{Q_n}\right|\left|b_{n-v}\right| = 0(1)\ (n \to \infty)$$

$$\sum_{v=o}^{n}\left|P_v\right|\left|b_{n-v}\right| = 0\left(Q_n\right)\ (n \to \infty)$$

bulunur. v = n için $P_n = 0\left(Q_n\right)\ (n \to \infty)$ olur. Aynı düşünce ile $N_q \subseteq N_p$ olduğu göz önüne alınır ve benzer işlemler yapılırsa $Q_n = 0\left(P_n\right)\ (n \to \infty)$ bulunur. $Np \approx Nq$ olduğundan

$$\sum_{v=o}^{n_o}\left|b_v\right|\left|\frac{P_{n-v}}{P_n}\right| = 0\left(\frac{Q_n}{P_n}\right) \le K\ \ (0 \le n_o \le n;\ K,\ n_o \text{ ve n den bağımsız}) \tag{3.2.5}$$

dır. Diğer taraftan, regüler bir Nq–metodu için $\frac{P_{n-1}}{P_n} \to 1\ (n \to \infty)$ olduğu göz önüne alınırsa;

$$\frac{P_{n-v}}{P_n} = \frac{P_{n-v}}{P_{n-v+1}} \cdot \frac{P_{n-v+1}}{P_{n-v+2}} \cdot \frac{P_{n-v+3}}{P_{n-v+3}} \dots \frac{P_{n-1}}{P_n} \to (n \to \infty)$$

dır. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $P_n \neq 0$ olduğundan

$$\left|\frac{P_n}{P_n}\right|,\ \left|\frac{P_{n-1}}{P_n}\right|, \dots, \left|\frac{P_o}{P_n}\right| \neq 0$$

dır. O halde (3.2.5) dan;

$$\sum_{v=o}^{n_o}\left|b_v\right| \le K \text{ ve } (n \to \infty) \text{ için } \sum_{v=o}^{\infty}\left|b_v\right| < \infty$$

elde edilir.

Benzer işlemlerle $\sum_{v=o}^{\infty}\left|a_v\right| < \infty$ olduğu görülür.

“Yeterli Koşul”: $\frac{q(z)}{p(z)}=\sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n$, $\frac{p(z)}{q(z)}=\sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n$ olmak üzere $\sum_{n=o}^{\infty}|a_n|<\infty$ ve $\sum_{n=o}^{\infty}|b_n|<\infty$ olsun. Önce $N_p \subseteq N_q$ olduğunu gösterelim. Bunun için de Teorem 3.2.1’e göre,

$$\left(N_q N_p^{-1}\right)_{nv}=\begin{cases}\frac{P_v b_{n-v}}{Q_n} & , \quad v\le n\\ 0 & , \quad v>n\end{cases}$$

matrisinin regüler olduğunu göstermek yeterlidir.

$$p(z)=q(z)\cdot\sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n$$

$$=\left(\sum_{n=o}^{\infty} q_n z^n\right)\left(\sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n\right)$$

$$\sum_{n=o}^{\infty} p_n z^n=\sum_{n=o}^{\infty}\left(\sum_{v=o}^{n} a_{n-v} q_v\right) z^n$$

dır. Kuvvet serilerinin özdeşliğiden

$$p_n=\sum_{v=o}^{n} a_{n-v} q_v$$

bulunur. $A=a_o+a_1+...+a_n$ olmak üzere

$$P_n=\sum_{v=o}^{n} p_v=\sum_{v=o}^{n}\left(\sum_{\rho=o}^{v} a_{v-\rho} q_\rho\right)$$

$$=a_o q_o+\left(a_1 q_o+a_o q_1\right)+...+\left(a_n q_o+...+a_o q_n\right)$$

$$=q_o\left(a_o+...+a_n\right)+...+q_n a_o$$

$$=q_o A_n+...+q_n A_o$$

$$=\sum_{v=o}^{n} q_v A_{n-v}$$

$$|P_n|=\left|\sum_{v=o}^{n} A_{n-v} q_v\right|$$

$$\leq \sum_{v=o}^{n} |A_{n-v}||q_v|$$

$$\leq M \cdot \sum_{v=o}^{n} |q_v| \qquad \left(M = \sup|A_{n-v}|\right)$$

dır. Nq–metodu regüler olduğundan $\sum_{v=o}^{n} |q_v| = 0(Q_n)$ $(n \to \infty)$ dır. Dolayısıyla $|P_n| = 0(Q_n)$ elde edilir. O halde

$$\sum_{v=o}^{n} |P_v||b_{n-v}| = \sum_{v=o}^{n} \left(|b_{n-v}| \left| \sum_{\mu=0}^{v} p_\mu \right| \right)$$

$$< \sum_{v=o}^{n} \left(|b_{n-v}| \cdot \sum_{\mu=o}^{v} |p_\mu| \right)$$

$$= |b_n||p_o| + |b_{n-1}|\left(|p_o| + |p_1|\right) + \ldots + |b_o|\left(|p_o| + \ldots + |p_n|\right)$$

$$= |p_o|\left(|b_n| + \ldots + |b_o|\right) + |p_1|\left(|b_{n-1}| + \ldots + |b_o|\right) + \ldots + |b_o||p_n|$$

$$= \sum_{\mu=o}^{n} |p_\mu| \sum_{v=\mu}^{n} |b_{n-v}|$$

$$= 0(P_n)$$

$$= 0(Q_n)$$

olur. Böylece Teorem 2.3'ün (iii) koşulu sağlanır. Öte yandan (3.1.1)'den;

$$\frac{\sum_{v=o}^{n} P_v b_{n-v}}{Q_n} = 1$$

dır. Dolayısıyla Teorem 2.3'ün (ii) sağlanır. $\sum_{n=o}^{\infty} |b_n| < \infty$ olduğundan $b_n = o(1)$ $(n \to \infty)$ dır. Ayrıca Nq–regüler olduğundan $Q_n \neq o(1)$ $(n \to \infty)$ dır. O halde $b_n = o(Q_n)(n \to \infty)$ olur. Buradan da $\frac{b_{n-v}P_v}{Q_n} \to 0(n \to \infty,\ v \text{ sabit})$ olur ki bu ise Teorem 2.3'ün (i) koşulunun sağlandığını gösterir. O halde Teorem 2.3'ün (iii), (ii) ve (i) koşulları sağlandığından $\left(\left(N_q N_p^{-1}\right)_{nv}\right)$ matrisi regülerdir. Böylece $Np \subseteq N_q$ dır. Aynı düşünce ile $Nq \subseteq N_q$ olduğu elde edilir. O halde $Np \approx Nq$ dır.

4. NÖRLUND TOPLANABİLME METODUNUN KONVOLİSYONU

Öncelikle bu bölümdeki teoremlerin ispatında kullanılan aşağıdaki Lemmayı verelim.

Lemma 4.1. $R_n \neq 0$ (n=0, 1, 2,……..), $\bar{r}_n$, (2.9) ile tanımlanan, C satır sonlu matris olsun. (σ_n), (S_n) nin bu durumda bir (N, r_n) dönüşümü olmak üzere

$(N, r_n) - \lim S_n = \sigma$ iken M, n'den bağımsız olmak üzere

$$C - \lim S_n = \sigma' \Leftrightarrow \sum_{v=0}^{k_n} \left| R_v \sum_{k=v}^{k_n} c_{n,k} \bar{r}_{k-v} \right| \leq M \tag{4.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=v}^{k_n} c_{n,k} \bar{r}_{k-v} = \delta_v, \ \forall v \text{ için} \tag{4.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=v}^{k_n} c_{n,k} = \delta \tag{4.3}$$

sağlanır. Buna ek olarak $\sigma^1 = \delta\sigma + \sum R_v \delta_v (\sigma_v - \sigma)$ dır[13].

Sonuç 4.2. $C \supseteq (N, r_n)$ olması için gerek ve yeter şart $\delta_v = 0$, $\delta = 1$ olması durumunda (4.1), (4.2), (4.3)'ün sağlanmasıdır[14].

Sonuç 4.3. $P_n, Q_n \neq 0$, $p(x) = \sum p_n x^n$, $q(x) = \sum q_n x^n$ ve h_n , $h(x) = \sum h_n x^n = q(x)/p(x)$ olarak tanımlansın. Bu durumda

$$(N, q_n) \supseteq (N, p_n) \Leftrightarrow \sum_{v=0}^{n} |P_v h_{n-v}| = O(|Q_n|) \tag{4.4}$$

ve $\forall v$ sabiti için

$$\lim_{n\to\infty} (h_{n-v}/Q_n) = 0 \tag{4.5}$$

olmasıdır[14].

Sonuç 4.4. Eğer Sonuç 4.3'de $P_n > 0$, $h_n \geq 0$ ise bu durumda $(N,q_n) \supseteq (N,p_n)$ dir $\Leftrightarrow$ (4.5) sağlanır.

Eğer (N,p_n), (N,q_n), (N,r_n) verilen üç Nörlund metodu ise:

$$p_n(x) = \sum_{i=n}^{\infty} p_i x^i, \; p(x) = p_0(x)$$

şeklinde yazılabilir.

$q_n(x)$ için benzer olarak; $\phi_{n,v} = \gamma_v - \alpha_{n,v} - \beta_{n,v}$ olmak üzere

$$\left.\begin{aligned} p(x)q(x)/r(x) &= \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_v x^v \\ p_{n+1}(x)q(x)/r(x) &= \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_{n,v} x^v \\ p(x)q_{n+1}(x)/r(x) &= \sum_{v=0}^{\infty} \beta_{n,v} x^v \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

$$\frac{1}{r(x)}\{p(x)q(x) - p_{n+1}(x)q(x) - p(x)q_{n+1}(x)\} = \sum_{v=0}^{\infty} \phi_{n,v} x^v \tag{4.7}$$

$$\phi_{n,v} = \gamma_v - \alpha_{n,v} - \beta_{n,v} \tag{4.8}$$

olduğundan

$$0 \leq v \leq n \text{ için } \alpha_{n,v} = \beta_{n,v} = 0, \tag{4.9}$$

olduğu açıktır.

Yukarıdaki her bir kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı sıfır olması durumunda γ_v, $\alpha_{n,v}$, $\beta_{n,v}$, $\phi_{n,v}$ ifadelerini, bu serilerin formal uygulaması olarak tanımlayabiliriz.

Şimdi Lemma 4.1'i iki Nörlund metodunun konvolisyonuna $C = (N,p_n) * (N,q_n)$ şeklinde uygulayalım. (2.5) ve (2.8) ifadelerinden,

$$c_{n,k} = \frac{1}{P_n Q_n} \sum_{i=\max(0,k-n)}^{\min(k,n)} p_{n-i} q_{n-k+i}, \quad k_n = 2n \tag{4.10}$$

dır. Ayrıca,

$$f_{n,v} = \sum_{i=\max(0,2n-v)}^{2n} c_{n,k}\,\bar{r}_{k+v-2n}\ , \quad (n, v \geq 0) \tag{4.11}$$

dır.

Lemma4.5. $P_n Q_n f_{n,v} = \phi_{n,v}\ , \quad (0 \leq v \leq 2n+1)$ (4.12)

dır[14].

İspat. (4.10) ve (4.11)'den

$$\begin{aligned}
P_n Q_n &= \sum_{v=0}^{\infty} f_{n,v} x^v = P_n Q_n \sum_{v=0}^{\infty} x^v . \sum_{k=\max(0,2n-v)}^{2n} c_{n,k}\,\bar{r}_{k+v-2n} \\
&= P_n Q_n \sum_{k=0}^{2n} c_{n,k} . \sum_{v=2n-k}^{\infty} x^v \bar{r}_{k+v-2n} \\
&= \frac{P_n Q_n}{r(x)} \sum_{k=0}^{2n} x^{2n-k} c_{n,k} \\
&= \frac{1}{r(x)} \sum_{k=0}^{2n} x^{2n-k} \sum_{i=\max(0,k-n)}^{\min(k,n)} p_{n-i} q_{n-k+i} \\
&= \frac{1}{r(x)} \sum_{i=0}^{n} p_{n-i} \sum_{k=i}^{i+n} x^{2n-k} q_{n-k+i} \\
&= \frac{1}{r(x)} \sum_{i=0}^{n} p_{n-i} x^{n-i} \sum_{j=0}^{n} q_j x^j \\
&= \frac{1}{r(x)} \{p(x) - p_{n+1}(x)\}\{q(x) - q_{n+1}(x)\} \\
&= \sum_{v=0}^{\infty} \phi_{n,v} x^v + \frac{p_{n+1}(x) q_{n+1}(x)}{r(x)}
\end{aligned}$$

yazabiliriz.

$\dfrac{p_{n+1}(x) q_{n+1}(x)}{r(x)}$'in açılımı x^{2n+2} ile başladığından (4.12) elde edilir.

Teorem 4.6. Kabul edelim ki $P_n, Q_n, R_n \neq 0$ (n = 0,1,2,…….) ve $\phi_{n,v}$, (4.7)'deki gibi olsun. Bu durumda $(N, r_n) - \lim S_n$ iken $(N, p_n) * (N, q_n) - \lim S_n$ vardır $\Leftrightarrow$ Her v için

$$\sum_{v=0}^{2n} \left|R_{2n-v}\phi_{n,v}\right| = O(\left|P_n Q_n\right| \qquad (4.13)$$

$$\lim_{n\to\infty} (\phi_{n,2n-v} / P_n Q_n) = \delta_v , \qquad (4.14)$$

dır[14].

İspat. Bu (4.11) ve (4.12) yi, (4.1) ve (4.2)'de yerine koyarak Lemma 4.1 ve Lemma 4.5'den görülür. Lemma 4.1'in (4.3) şartı, (2.6)'yı kullanarak $\delta = 1$ için sağlanır.

Sonuç 4.7. $\left(N, p_n\right) \star \left(N, q_n\right) \supseteq \left(N, r_n\right)$ olması için gerek ve yeter şart $\delta_v = 0$ ile (4.13) ve (4.14)'ün sağlanmasıdır[14].

Sonuç 4.8. Eğer $\left(N, p_n\right)$, $\left(N, q_n\right)$ regüler ve $\lim \overline{r_n} = 0$ ise bu durumda (4.14), $\delta_v = 0$ ile sağlar. Öyleki $\left(N, p_n\right) \star \left(N, q_n\right) \supseteq \left(N, r_n\right)$ dir $\Leftrightarrow$ (4.13) sağlanır[14].

İspat. (4.14)'ün (4.2) orjinal şeklini kullanalım. Çünkü (2.7)'den $C = \left(N, p_n\right) \star \left(N, q_n\right)$ bu durumda regülerdir ve $\overline{r_n} \to 0$ dır. Bu durumda her v için $c - \lim \overline{r_n} = 0$ olacak şekilde $\exists \delta_v = 0$ vardır ve sonucu Sonuç 4.2'den elde edilir.

Aşağıdaki teorem, Teorem 4.6'nın yeterli kısmının özel bir durumunu ortaya koymaktadır.

Teorem 4.9. Kabul edelim ki P_n, $Q_n \neq 0$, $R_n > 0$ ve γ_v, $\beta_{n,v}$, $\alpha_{n,v}$, $\phi_{n,v}$ de (4.6) ve (4.7)'deki gibi tanımlansın. Eğer

$$n \to \infty, \text{ v sabiti için } \phi_{n,2n-v} = 0\left(P_n Q_n\right); \qquad (4.15)$$

ya da

$$\phi_{n,v} \geq 0 \text{ her ve n için;} \qquad (4.16)$$

$$\gamma_v \geq 0,\ \alpha_{n,v} \geq 0,\ \beta_{n,v} \geq 0 \text{ her n ve v için,} \qquad (4.17)$$

$$P_0 Q_{2n} + \ldots + P_{2n} Q_0 = 0\left(P_n Q_n\right); \qquad (4.18)$$

γ_v, $\alpha_{n,v}$, $\beta_{n,v}$'lerin her biri her n ve v için sabit gösterimlerdir. (4.19)

$$\left|P_{n+1} Q_{n-1} + \ldots + P_{2n} Q_0\right| = 0\left(\left|P_n Q_n\right|\right), \qquad (4.20)$$

ve

$$\left|q_{n+1}P_{n-1}+\ldots+q_{2n}P_0\right|=0\left(\left|P_nQ_n\right|\right) \text{ ise} \tag{4.21}$$

bu durumda $(N, p_n)\bigstar(N, q_n)\supseteq(N, r_n)$ dir[14].

İspat. Sonuç 4.7 ile eğer (4.16), (4.17), (4.18), (4.19), (4.20) ve (4.21) durumları (4.13)'ü sağlaması için yeterli ise teorem doğru olacaktır.

$P(x)=\sum P_nX^n$ olsun. Q(x) ve R(x) de P(x)'e benzer olarak p(x) = (1 – x) P(x) elde edilir. Öyle ki,

R(x) p(x) q(x) / r(x) = p(x) Q(x) = P(x) q(x) , $\left(x^{2n}\right)$ nin katsayısı olur. Benzer şekilde

$$\sum R_{2n-v}\gamma_v = p_0Q_{2n}+p_1Q_{2n-1}+\ldots+p_{2n}Q_0 \tag{4.22}$$

$$\sum R_{2n-v}\alpha_{n,v} = p_{n+1}Q_{n-1}+p_{n+2}Q_{n-2}+\ldots+p_{2n}Q_0 \tag{4.23}$$

ve kısmi toplamla

$$\begin{aligned}\sum R_{2n-v}\beta_{n,v} &= q_{n+1}P_{n-1}+q_{n+2}P_{n-2}+\ldots+q_{2n}P_0\\ &= p_0Q_{2n}+\ldots+p_nQ_n-P_nQ_n\end{aligned} \tag{4.24}$$

elde ederiz.

Şimdi eğer $R_n>0$ ve (4.16) sağlanırsa, bu durumda (4.22) – (4.24) eşitliklerinden

$\sum\left|R_{2n-v}Q_{n,v}\right|\le\sum R_{2n-v}\left(\gamma_v-\alpha_{n,v}-\beta_{n,v}\right)=P_nQ_n$ elde edilir.

Alternatif olarak eğer $R_n>0$ ve (4.17), (4.18) şartları sağlanırsa, bu durumda

$$\begin{aligned}\sum\left|R_{2n-v}\phi_{n,v}\right| &\le \sum R_{2n-v}\le(\gamma_v+\alpha_{n,v}+\beta_{n,v})\\ &= 2(p_0Q_{2n}+\ldots.+p_{2n}Q_0)-P_nQ_n\\ &= 0(P_nQ_n)\end{aligned}$$

dır.

Alternatif olarak eğer $R_n>0$ ve (4.19), (4.20) ve (4.21) sağlanırsa, bu durumda

$$\sum\left|R_{2n-v}\phi_{n,v}\right| \le \left|\sum R_{2n-v}\gamma_v\right| + \left|\sum R_{2n-v}\alpha_{n,v}\right| + \left|\sum R_{2n-v}\beta_{n,v}\right|$$
$$\le 2\left|p_n Q_{n-1} + \ldots + p_{2n}Q_0\right| + 2\left|q_{n+1}P_{n-1} + \ldots + q_{2n}P_0\right| + \left|P_n Q_n\right|$$
$$= 0\left(\left|P_n Q_n\right|\right)$$

dır.

Böylece (4.13) her durumda sağlanır ve teorem ispatlanır.

4.1. Nörlund Matrislerinin Bazı Özel Sınıfları Üzerine Nörlund Metodlarının Karşılaştırılması

$r_0 > 0,\ r_n \ge 0$ şartını sağlayan (r_n) dizisi verilsin.

$A_n^k = (k+1)(k+2)...(k+n)/n!$ olmak üzere $n \ge 1$ için $R_n^k = \sum_{v=0}^{n} A_{n-1}^{k-1} r_v$ dir. Ayrıca $A_0^k = 1$ dir. Böylece eğer $r(x) = \sum r_n x^n$ ise $R^k(x) = \sum R_n^k x^n = (1-x)^{-k} r(x)$ ve bu durumda $R_n^0 = r_n$, $R_n = R_n = r_0 + \ldots + r_n$ dir.

(N, R_n^k) Nörlund metodu $R_n^{k+1} \ne 0$ şartıyla tanımlıdır ve bu, kesinlikle $k > -1$ için olan durumdur.

Teorem 4.1.1. Eğer $r_0 > 0$, $r_n \ge 0$ ve $K' \ge k > -1$ ise bu durumda $(N, R_n^{K'}) \supseteq (N, R_n^K)$ dır[14].

İspat. Teorem 4.17 nin $K' \ge K \ge 0$ için Hardy (5)'deki ispat metoduyla sonuç çıkar; ve $K' \ge K > -1$ için $h(x) = R^{K'}(x)/R^K(x)$ seçip Sonuç 4.4. kullanılarak istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.2. Eğer bazı $K > -1$ için (N, R_n^K) regüler ise bu durumda $K' \ge K$ için $(N, R_n^{K'})$ regülerdir[14].

4.2. Konvekslik Sağlayan Nörlund Metodları

(r_n) artmayan ve $\log r_n$ konveks olmak üzere (r_n) dizilerinin sınıfını $\mathfrak{M}$ göstereceğiz. Yani;

$$\mathfrak{M} = \left\{ r_n : \frac{r_n}{r_{n-1}} \le \frac{r_{n+1}}{r_n} \le 1, r_n > 0 \right\} \tag{4.2.1}$$

dir.

(4.2.1) sağlandığı zaman $r = (r_n) \in \mathfrak{M}$ yazılır; eğer $r = r_n$, $r \in \mathfrak{M}$ ise bu durumda $R_n \ge nr_n$ olup böylece (2.11)'den (N, r_n) nin regüler olduğunu söyleriz. Nörlund metodlarının bu sınıfının ilginç özellikleri, $0 \le K \le 1$, (C, K) Cesa'ro matrislerini içermesi ve (N, r_n) nin karşılaştırılması hakkında iyi bir bilgi alışverişinin elde edilebilmesidir.

Lemma 4.2.2. Kabul edelim ki $r \in \mathfrak{M}$ ve $\left(\overline{r_n}\right)$, (2.9)'daki gibi tanımlansın. Bu durumda $\overline{r_0} > 0$, $\overline{r_n} \le 0$ $(n \ge 1)$ ve $\overline{r_0} + ... + \overline{r_n} \ge (n \ge 0)$ dır. Ayrıca eğer $R_n \to \infty$ ise $\overline{r_0} + ... + \overline{r_n} \to 0$ dır[12].

İspat. Bu lemmanın ispatı, Szegö (12) tarafından verildi.

Teorem 4.2.3. Eğer $r \in \mathfrak{M}$ ve $K > -1$ ise bu durumda $(C, K) \subseteq \left(N, R_n^K\right) \subseteq (C, K+1)$ dır[14].

İspat. Lemma 4.2.2 ve $\frac{r_{n-v}}{m} \le \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^v$ kullanarak Sonuç 4.4'ün şartlarının sağlandığını gösterebiliriz. Burada sol taraftaki ifade $h(x) = r(k)$ ve sağ taraftaki ifade $h(x) = \bar{r}(x)/(1-x)$'dir.

Uyarı 4.2.4. $K = 0$ durumunda $I = (C,0) \subseteq (N, r_n) \subseteq (C,1)$ olup bu Hardy (7) tarafından gösterilmişti[14].

Teorem 4.9 ve Teorem 4.1.1'den eğer $r \in \mathfrak{M}$ ise bu durumda, $K=-1$ için $\exists \lim r_n = \ell \geq 0$ olduğunu da görürüz; eğer $\ell > 0$ ise $\left(N, R_n^{-1}\right) \sim I$'dır , $\ell = 0$ ve $R_n \to \infty$ iken $\left(N, R_n^{-1}\right) \subseteq I$ dır.

4.3 Satırları Azalan Diziler Olan Nörlund Matrisleri

Bu başlık altında,

$$0 < r_n \leq r_{n-1} \quad (n = 0,1,2,...) \tag{4.3.1}$$

şartını sağlayan (N, r_n) matrislerini gözönüne alacağız. Bununla birlikte uygulamalarımızda r_n monoton artan olmayacaktır.

Örneğin; Teorem 4.3.12'de $r_n / R_n = 0\left(n^{-1}\right)$ şartı konulmalıdır. Bu, $\frac{r_n}{R_n} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$ olmak üzere $r_n = e^{\sqrt{n}}$ gibi örnekleri içermez. $r_n / R_n \sim \frac{1}{2} n^{-\frac{1}{2}}$ deki $r_n = e^{\sqrt{n}}$ gibi örnekleri hariç tutacaktır; ve r_n artarsa (N, r_n) regüler bile olamaz, bu aşağıdaki teoremde gösterildiği gibidir.

Teorem 4.3.1. Eğer $r_n > 0$ ve $\underline{\lim}\left(r_{n+1} / r_n\right) > 1$ ise (N, r_n) regüler değildir[14].

İspat. Hipotez $\lim\left(r_n / R_n\right) > 0$ olmasını gerektirir.

Uyarı 4.3.2. Eğer Teorem 4.3.1'in hipotezinin yerine $r_n > 0$, $\overline{\lim}\left(r_{n+1} / r_n\right) > 1$ alınırsa $\overline{\lim}\left(r_{n+1} / r_{ln}\right) = 2$ iken $r_n / R_n = 0\left(n^{-1}\right)$ için,

$$r_0 = 1,\ r_n = 2^p \quad \left(2^p \leq n < 2^{p+1};\ p = 0,1,...\right)$$

örneğin de görüldüğü gibi sonuç başarısızdır[14].

Teorem 4.3.3. Eğer

i) $K \geq 0$ için $0 < r_n \leq r_{n+1}$, $r_n / R_n = 0(1)$

veya

ii) $-1<K<0$ için $0<r_n \le r_{n+1}$ ve $r_n / R_n = 0\left(n^k\right)$

şartların dan biri sağlanıyorsa bu durumda $\left(N, R_n^k\right) \supseteq (C, k+1)$ dır[14].

İspat. $h_n = r_n - r_{n-1} \ge 0$ olduğunda $h(x) = R_{(x)}^K / (1-x)^{-(K+1)} = (1-x) r(x)$ dır. $K \ge 0$ için $R_n^{K+1} \ge R_n$ ve $h_{n-v} / R_n^{K+1} \le r_n / R_n = 0(1)$ dir; $-1<K<0$ için $R_n^{K+1} > A_n^K R_n$ ve $h_{n-v} / R_n^{K+1} < r_n / A_n^K R_n = 0(1)$ dir; ve böylece Sonuç 4.4'den teorem ispatlanır.

Sonuç 4.3.4. Eğer $0<r_n \le r_{n+1}$ ve $r_n / R_n = 0\left(n^{-1}\right)$ ise bu durumda $K>-1$ için Teorem 4.3.3'ün (i) ve (ii) şartı sağlanır[14].

Teorem 4.3.5. Eğer $p \in \mathfrak{M}$, $q \in \mathfrak{M}$ ve $t_n = p_o q_n + ... + p_n q_0$ ise bu durumda $(N, p_n) \star (N, q_n) \supseteq (N, t_n)$, $(N, t_n) \supseteq (N, p_n)$ ve $(N, t_n) \supseteq (N, q_n)$ dir[14].

İspat. $r_n = t_n$ için Teorem 4.9''u uygulayalım. Alışılmış notasyonla, $t(x) = p(x) q(x)$, $\bar{t}(x) = \bar{p}(x) \bar{q}(x)$ olsunlar ve Lemma 4.2.2'den dolayı $\sum |\bar{p}_n|$ ve $\sum |\bar{q}_n|$ yakınsak ve böylece $t_n \to 0$ iken $\sum |\bar{t}_n|$ de yakınsaktır. Ayrıca (N, p_n), (N, q_n) regülerdirler o halde Sonuç 4.3'den (4.15) sağlanır.

Tanım 4.6'dan $\sum \gamma_v x^v = \dfrac{p(x) q(x)}{t(x)} = 1$ $\gamma_0 = 1, \gamma_v = 0$ $(v \ge 1)$;

$$\sum \alpha_{n,v} x^v = \frac{p_{n+1}(x) q(x)}{t(x)} = \frac{p_{n+1}(x)}{\bar{p}(x)} \tag{4.3.2}$$

$$\alpha_{n,v} = \sum_{\lambda=0}^{v-n-1} \overline{P_\lambda} P_{v-\lambda} \qquad (v \ge n+1) \tag{4.3.3}$$

dır. Buradaki $\alpha_{n,v}$ ifadesi Lemma 4.5'den $\lambda > 0$ için $\overline{P_\lambda} P_{v-\lambda} \le 0$ olduğundan (4.9) dan $\alpha_{n,v} \ge 0$ dır. Benzer şekilde her n ve v için $\beta_{n,v} \ge 0$ dır ve böylece (4.17) sağlanır. Daha sonra n > 0 için (p_n) nin artan olmadığından,

$$\frac{P_n}{n}-\frac{P_{n+1}}{n+1}=\frac{p_0+(p_1-p_{n+1})+...+(p_n-p_{n+1})}{n(n+1)}>0 \tag{4.3.4}$$

olup böylece (P_n/n) dizisi azalandır. Bu yüzden $P_{2n}<2P_n$ ve benzer şeki $Q_{2n}<2Q_n$ dir. Çünkü (Q_n) artan olduğundan $p_0Q_{2n}+...+p_{2n}Q_0\le(p_0+...+p_{2n})Q_{2n}=P_{2n}Q_{2n}<4P_nQ_n$ dir. Böylece (4.18) sağlanır ve dolayısıyla $(N,p_n)\star(N,q_n)\supseteq(N,t_n)$ dir. İfadedeki kalan iki kapsama sonuçları Sonuç 4.4'ün uygulamalarıdır ve böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.3.6. Eğer $P\in\mathfrak{M},\ Q\in\mathfrak{M}$ (4.3.5)

ve

$t_n=p_0q_n+...+p_nq_0$ olmak üzere eğer $T_n>0,\ T_0+...+T_n\to\infty$ (4.3.6)

ise bu durumda

$$(N,p_n)\star(N,q_n)\supseteq(N,t_n) \tag{4.3.7}$$

ve

$$(N,p_n)\supseteq(N,t_n),\ (N,q_n)\supseteq(N,t_n) \tag{4.3.8}$$

dir[14].

İspat. $r_n=t_n$ olmak üzere (4.17) ve (4.18)'in yerine (4.16)'yı kullanarak Teorem 4.9'u kullanacağız. $P\in\mathfrak{M}$ olduğundan Lemma 4.2.2'den $\overline{p}_n=\overline{P}_0+...+\overline{P}n$ olmak üzere $\overline{p}(x)=\overline{P}(x)/(1-x)$ olduğundan $n\ge1$ için

$$\overline{P}_0>0,\ \overline{P}_n\le0 \tag{4.3.9}$$

$n\ge0$ için

$$0\le\overline{p}_{n+1}\le\overline{p}_n \tag{4.3.10}$$

elde edilir. Burada (4.3.3) sağlandığından $v\ge n+1$ için toplamadaki her bir terim pozitif olmadığından $\alpha_{n,v}=\sum_{\lambda=0}^{v-n-1}\overline{P}_\lambda P_{v-\lambda}\le0$ dir. Benzer şekilde $\beta_{n,v}\le0$ dır ve dolayısıyla (4.16) sağlanır.

Kısmi toplam ile (4.3.9)'dan

$$0 \geq \alpha_{n,v} = -\overline{P}_{v-n}P_n + \sum_{\lambda=0}^{v-n} \overline{P}_{\lambda}P_{v-\lambda}$$

$$\geq -\overline{P}_{v-n}P_n + \sum_{\lambda=0}^{v} \overline{P}_{\lambda}P_{v-\lambda}$$

olup

$$\left|\alpha_{n,v}\right| \leq \overline{P}_{v-n}P_n \tag{4.3.11}$$

dir. Ayrıca $Q(x) = \overline{p}(x)T(x)$ olduğundan (4.3.6) ve (4.3.10) den

$$0 \leq \frac{\overline{P}_n}{Q_n} \leq \frac{\overline{P}_n T_0 + \ldots + \overline{P}_0 T_n}{Q_n\left(T_0 + \ldots + T_n\right)} = \frac{1}{T_0 + \ldots + T_n} \to 0 \text{ olup } \frac{\overline{P}_n}{Q_n} \to 0 \tag{4.3.12}$$

dır.

Ayrıca $Q \in \mathfrak{M}$ olduğunda $Q_{n-v}/Q_n \leq \left(Q_0/Q_1\right)^v$ (4.3.13)

dır. (4.3.11) – (4.3.13) birleştirerek herhangi bir v sabiti için $n \to \infty$ iken

$$\frac{\left|\alpha_{n,2n-v}\right|}{P_n Q_n} \leq \frac{\overline{P}_{n-v}}{Q_n} = \frac{\overline{P}_{n-v}}{Q_{n-v}} \cdot \frac{Q_{n-v}}{Q_n} \to 0 \tag{4.3.14}$$

olur. $n > \frac{1}{2}v$ için $\phi_{n,2n-v} = -\alpha_{n,2n-v} - \beta_{n,2n-v}$ olduğundan (4.15)'in sağlanmasından dolayı $\beta_{n,v}$ için benzer sonuç sağlanır.

Bu (4.3.7)'yi ispatlar ve (4.3.8), (4.3.10) ve (4.3.14)'ü kullanarak Sonuç 4.4'ün bir uygulamasıdır.

Uyarı 4.3.7. (4.3.5) sağlandığında $\sum p_n$ ve $\sum q_n$ serilerinin her ikisi de yakınsak ve $T(x) = P(x)q(x) = p(x)Q(x)$ olduğundan (4.3.6) için gerek şartlar,

$$P_0 + \ldots + P_n \to \infty \text{ ve } Q_0 + \ldots + Q_n \to \infty \tag{4.3.15}$$

olmasıdır[14].

Fakat bunlar (4.3.15), (4.3.6)'yı elde etmek için gerekli şartlardır; bunlar (4.3.6)'nın doğruluğu için yeter şart değildir. Çünkü Teorem 4.3.6'daki (4.3.6) şartı yerine (4.3.15) şartı konulamaz. Bunu aşağıdaki örnekle gösterelim.

Örnek 4.3.8. $0<\lambda<1$, $0<\mu<1$, $\lambda+\mu>1$ olmak üzere $p_n = A_n^{-\lambda-1}$, $q_n = A_n^{-\mu-1}$ olsun. Böylece n>v için (4.3.3)'den v sabit $n \to \infty$ iken

$$\phi_{n,2n-v} / P_n Q_n \left|A_{2n-v}^{-\lambda-1}\right| A_{n-v-1}^{\lambda} / A_n^{-\lambda} A_n^{-\mu} \sim Kn^{\lambda+\mu-1} \to \infty \text{ iken}$$

$$\phi_{n,2n-v} \geq -\alpha_{n,2n-v} = \sum_{k=0}^{n-v-1} A_k^{\lambda-1} A_{2n-v-k}^{-\lambda-1} \geq \left|A_{2n-v}^{-\lambda-1}\right| A_{n-v-1}^{\lambda} \text{ dır. Bu nedenle (4.14)}$$

sağlanmaz. Böylece (4.3.7) yanlıştır[14].

Ayrıca Uyarı 4.3.7'den $P \in \mathfrak{M}$ ve $P_0 + \ldots + P_n \to \infty$ iken $(N, p_n) \subseteq I$ dır; ve bu da daha ziyade Teorem 4.3.6'nın hipotezleri altında (N, p_n) ve (N, q_n) metodlarının yakınsaklıkta kullanılacağını gösterir.

Teorem 4.3.9. $t_n = p_0 q_n + \ldots + p_n q_0$ olmak üzere

$$P \in \mathfrak{M},\ q \in \mathfrak{M} \tag{4.3.16}$$

$$T_0 + \ldots + T_n \to \infty \tag{4.3.17}$$

ve

$$T_{2n} = 0(P_n Q_n) \tag{4.3.18}$$

ise bu durumda $(N, p_n) \star (N, q_n) \supseteq (N, t_n)$ ve $(N, q_n) \supseteq (N, t_n)$ dir[14].

Eğer $P_0 + \ldots + P_n \to \infty$ ise bu durumda $(N, t_n) \supseteq (N, p_n)$ dir ve (4.3.17) ihmal edilebilir.

İspat. Alternatif olarak (4.19)-(4-21)'i kullanarak $r_n = t_n$ için Teorem 4.9'u uygulayalım. $T_n > 0$ olduğu için (4.3.11) ve (4.3.12)'ye götüren tartışmalar hala geçerlidir, bu yüzden $\alpha_{n,v} \leq 0$ dır ve bu durumda Q_n artan olduğundan, $n \to \infty$ iken (v sabit)

$$\frac{|\alpha_{n,2n-v}|}{P_nQ_n} \leq \frac{\overline{P}_{n-v}}{Q_n} \leq \frac{\overline{P}_{n-v}}{Q_{n-v}} \to 0 \tag{4.3.19}$$

dır.

Ayrıca Teorem 4.3.5'in ispatında olduğu gibi, $\beta_{n,v} \geq 0$ dır. Bu yüzden (4.19) sağlanır, fakat (4.3.18)'den

$$\begin{aligned}
&|p_{n+1}Q_{n-1} + \ldots + p_{2n}Q_0| + |q_{n+1}P_{n-1} + \ldots + q_{2n}P_0| \\
&= |q_0P_{2n} + \ldots + q_nP_n - P_nQ_n| + |q_{n-1}P_{n-1} + \ldots + q_{2n}P_0| \\
&< T_{2n} + P_nQ_n = 0(P_nQ_n)
\end{aligned}$$

dir, böylece (4.20), (4.21) sağlanır.

Şimdi (4.15)'i inceleyelim. Şimdi $q \in \mathfrak{M}$ iken, q_n artmayan olduğundan ve Lemma 4.5'i kullanarak $\lambda \geq 1$ için $\overline{q}_\lambda \leq 0$ dır. Böylece

$$0 \leq \beta_{n,v} = \sum_{\lambda=0}^{v-n-1} \overline{q}_\lambda q_{v-\lambda} \leq q_v \sum_{\lambda=0}^{v-n-1} \overline{q}_\lambda \tag{4.3.20}$$

dır. Ayrıca $T_n > 0$ için $T_0 + \ldots + T_n$ artan olduğundan

$$P_0 + \ldots P_n = \sum_{\lambda=0}^{n} \overline{q}_\lambda (T_0 + \ldots + T_{n-\lambda}) \geq (T_0 + \ldots + T_n) \sum_{\lambda=0}^{n} \overline{q}_\lambda \tag{4.3.21}$$

dır. Ayrıca,

$$T_n = P_0q_n + \ldots + P_nq_0 \geq q_n(P_0 + \ldots + P_n) \tag{4.3.22}$$

ve

$$q_{n-v}/q_n \leq (q_0/q_1)^v \tag{4.3.23}$$

dır. (4.3.20) – (4.3.23)'ü birleştirerek, (4.3.17) ve (4.3.18) ifadelerini kullanarak $n \to \infty$ iken

$$0 \leq \frac{\beta_{n,2n-v}}{P_nQ_n} < \left(\frac{q_0}{q_1}\right)^v \frac{T_{2n}}{P_nQ_n} \cdot \frac{1}{T_0 + \ldots + T_{n-v-1}} \to 0$$

elde edilir. Bu sonuç (4.3.19) ile birlikte $\phi_{n,2n-v} = 0(P_nQ_n)$ olduğunu gösterir ve bundan dolayı Teorem 4.9'dan $(N, p_n) \star (N, q_n) \supseteq (N, t_n)$'dir. $(N, q_n) \supseteq (N, t_n)$

kapsaması (4.3.10) ve (4.3.19)'u kullanarak Sonuç 4.4'den elde edilir; ve $P_0 + ... + P_n \to \infty$ olduğunda (4.3.22) ve (4.3.23) ile birlikte Sonuç 4.4 $(N, t_n) \supseteq (N, p_n)$ olduğunu verir. Bu da teoremi ispatlar.

Uyarı 4.3.10. $R_{2n} = 0(P_n Q_n)$ şartı, $(N, p_n) \star (N, q_n) \supseteq (N, r_n)$ olması için gerek şarttır. Böylece Teorem 4.3.9'un doğruluğu için (4.3.18) gerek şarttır ve bu teoremde (4.3.18) şartı

$T_{2n} / P_n Q_n > K_n / \log_n \to \infty$, $P, q \in \mu$ ve $T_0 + ... + T_n \geq P_0 Q_n \sim \log n \to \infty$ için

$P_n = 1/(n+1)^2$, $q_n = 1/(n+1)$ örneğiyle gösterildiği gibi diğer şartlar tarafından belirtilemez. Teorem 4.3.9'un son ifadesiyle ilgili olarak eğer $P, q \in \mathfrak{M}$ ise bu durumda $T_0 + ... + T_n \to \infty$ dır $\Leftrightarrow$ $P_0 + ... + P_n, Q_n$ lerden en az biri sonsuza gider. Fakat bu son şartlardan biri olmaksızın (4.3.17)'yi her v için $\lambda_v = \frac{1}{4}$ ve (4.13), (4.14) sağlayan $P_n = q_n = 2^{-n}$ örneğinde gösterildiği gibi ((4.3.16) ve (4.3.18)'i sağlayarak) teoremin hipotezinden ayrı tutamayız. Böylece Sonuç 4.2'den $(N, p_n) \star (N, q_n) \supseteq (N, t_n)$ yanlış olur[14].

Teorem 4.3.5'de (N, p_n), (N, q_n) ve (N, t_n)'ler total regüler olduğundan, Total regülerlik Teorem 4.3.6 ve Teorem 4.3.9'da söz konusu olmayabilir. Uyarı 4.2.4'den, eğer (N, p_n) yakınsamaya denk ise $P \in \mathfrak{M}$ olduğunda sadece regüler olabilir. Bu Teorem 4.3.5 ve Teorem 4.3.9 arasındaki marjinal durumu sağlar ve bu bize aşağıdaki sonucu verir.

Sonuç 4.3.11. Eğer $P \in \mathfrak{M}$, $q \in \mathfrak{M}$ ve $\lim P_n > 0$ ise bu durumda $(N, p_n) \sim I$, $(N, q_n) \sim (N, t_n)$ ve $(N, p_n) \star (N, q_n) \supseteq (N, t_n)$ dir. Özellikle eğer $q \in \mathfrak{M}$ ise bu durumda $I \star (N, q_n) \supseteq (N, q_n)$ dır. $I \star A \supseteq A$ kapsaması, $I \star (C, \sigma) \not\subset (C, \sigma)$ olmak üzere Teorem 4.5.1'in $\rho = 0$, $\sigma > 1$ olması örneğindeki gibi her Nörlund A matrisi için kesinlikle doğru olma gerekliliği yoktur[14].

Aşağıdaki iki teorem birlikte ispatlanacaktır.

Teorem 4.3.12. Eğer $P \in \mathfrak{M}$, $0 < q_n \le q_{n+1}$ (4.3.24)

ve

$$q_n(P_0 + ... + P_n) = 0(P_n Q_n) \quad (4.3.25)$$

ise bu durumda

$$(N, p_n) \star (N, q_n) \supseteq (N, P_n) \quad (4.3.26)$$

dır. Ayrıca $t_n = p_0 q_n + ... + p_n q_0$ olmak üzere

$$(N, p_n) \subseteq (C,1) \subseteq (N, q_n) \subseteq (N, t_n) \subseteq (N, Q_n) \quad (4.3.27)$$

ve

$$(N, P_n) \subseteq (C, 2) \subseteq (N, Q_n), \ (N, P_n) \subseteq (N, t_n) \quad (4.3.28)$$

dır[14].

Teorem 4.3.13. Eğer $P \in \mathfrak{M}$, $0 < q_n \le q_{n+1}$ (4.3.29)

ve $q_n(P_0 + ... + P_n) = 0(P_n Q_n)$ ise bu durumda $(N, p_n) \star (N, q_n) \supseteq (N, P_n)$'dir.[14]

İspat. $r_n = P_n$ alarak Teorem 4.6 veya (Sonuç 4.2)'yi uygulayalım. Böylece $r(x) = P(x) = p(x)/(1-x)$ olup bu yüzden

$$\left.\begin{aligned} \sum \gamma_v X^v &= (1-x) q(x) \\ \sum \beta_{n,v} X^v &= (1-x) q_{n+1}(x) \\ \sum \alpha_{n,v} X^v &= (1-x) q(x) p_{n+1}(x) \bar{P}(x) \end{aligned}\right\} \quad (4.3.30)$$

dır.

Böylece $\gamma_v = q_v - q_{v-1} \ge 0$, $\beta_{n,v} = \gamma_v$ $(v > n+1)$

$$n > v+1 \text{ için } \phi_{n,2n-v} = -\alpha_{n,2n-v} \quad (4.3.31)$$

$$\phi_{n,n+1} = -q_n - \alpha_{n,n+1} = -q_n - p_{n+1} q_0 / p_0 \quad (4.3.32)$$

ve bu yüzden $r_n = P_n$ olmak üzere

$$\sum_{v=0}^{2n} R_{2n-v}\left|\phi_{n,v}\right| \le \sum_{v=0}^{n} R_{2n-v}\gamma_v + R_{n-1}q_n + \sum_{v=n+1}^{2n} R_{2n-v}\left|\alpha_{n,v}\right| \tag{4.3.33}$$

elde edilir.

Eğer $p_{n+1}(x)\bar{p}(x) = \sum \alpha_{n,v}x^v$ ise, bu durumda

$$\alpha_{n,v} = \lambda_0\alpha'_{n,v} + \lambda_1\alpha'_{n,v-1} + \ldots + \lambda_{v-n-1}\alpha'_{n,n-1} \tag{4.3.34}$$

dır. Ayrıca teoremin her ikisinde de (N, P_n) regüler olduğunda

$$P_n/(P_0 + \ldots + P_n) \to 0 \tag{4.3.35}$$

dır ve (N, q_n) regüler olduğundan (4.24), $q_n/Q_n \to 0$ olduğunu gösterir.

Şimdi Teorem 4.3.12'de (N, p_n) ve (N, q_n) regüler ve Lemma 4.2.2'den $\sum \bar{P}_n$ yakınsak, böylece özel olarak $\bar{r}_n = \bar{P}_n = \bar{P}_n - \bar{P}_{n-1} \to 0$ ise Sonuç 4.8'den $\delta_v = 0$ için (4.14) sağlanır. Ayrıca (4.3.3)'den $\alpha'_{n,v} \ge 0$ ve dolayısıyla $\alpha_{n,v} \ge 0$ dır.

Teorem 4.3.13'de $-\bar{p}_0 P_n \le \alpha'_{n,v} \le 0$ ((4.3.10) ve (4.3.11) karşılaştırıldığında görülür) olup; böylece (4.3.34)'den

$$0 \ge \alpha_{n,v} \ge -\bar{p}_0 P_n(\gamma_0 + \ldots + \gamma_{v-n-1}) = -\bar{p}_0 P_n q_{v-n-1}$$

dir ve (N, q_n) regüler olduğu için bu ve (4.3.31)'den anlaşılacağı gibi her v sabiti için, $n \to \infty$ iken

$$\frac{\left|\phi_{n,2n-v}\right|}{P_nQ_n} = \frac{\left|\alpha_{n,2n-v}\right|}{P_nQ_n} \le \frac{\bar{P}_0 q_{n-v-1}}{Q_n} \to 0$$

dır; yani $\delta_v = 0$ için (4.14) sağlanır.

Şimdi $p \in \mathfrak{M}$ olduğundan (4.3.4)'den,

$\left|P_{2n} - P_n\right| = P_{2n} - P_n < P_n$ ve $P \in \mathfrak{M}$ iken $\left|P_{2n} - P_n\right| < P_n$ her iki durumda da (4.23) ve Q_n'in artan olmasından,

$$\sum_{v=n+1}^{2n} R_{2n-v}\left|\alpha_{n,v}\right| = \left|p_{n+1}Q_{n-1} + \ldots + p_{2n}Q_0\right| < Q_n\left|P_{2n} - P_n\right| < P_nQ_n \tag{4.3.36}$$

dır. Ayrıca $r_n = P_n$ olduğunda, $p \in \mathfrak{M}$ ise (4.3.4)'den $r_{2n-1} < r_{2n} < 2r_n$ dır ve bundan dolayı $R_{2n-v} < R_{2n} = r_0 + (r_1 + r_2) + ... + (r_{2n-1} + r_{2n}) < 4R_n$ dır. $P \in \mathfrak{M}$ iken (4.3.4), $R_{2n-v} < 2R_n$ olduğunu gösterir. Her iki durumda da bu nedenle (4.3.25)'i kullanarak

$$\sum_{v=0}^{n} R_{2n-v}\gamma_v + R_{n-1}q_n < 5q_nR_n = 0(P_nQ_n) \tag{4.3.37}$$

elde ederiz.

(4.3.34), (4.3.36), (4.3.37)'den (4.13)'ün her iki durumda sağladığı anlaşılır. Bu Teorem 4.3.12 ve 4.3.13'ün ispatını tamamlar. Sonuç 4.4'ün kolay uygulamalarıyla birlikte Teorem 4.4 ve 4.6'dan doğrudan elde edilen Teorem 4.3.12'nin (4.3.27) ve (4.3.28)'deki sonuçları Sonuç 4.4'ün uygulamasıyla beraber Teorem 4.2.3 ve 4.3.3'den direkt olarak elde edilir.

Uyarı 4.3.14. Teorem 4.3.12 ve 4.3.13'ün her ikisinde (4.13)'de $v = n+1$ alarak görülebildiği gibi, aslında (4.3.25) şartı (4.3.26)'yı sağlamak için gerek şarttır. Bu (4.3.32)'den $R_{n-1} | q_n + p_{n+1}q_0 / p_0 | = 0(P_nQ_n)$'i verir. $p \in \mathfrak{M}$ olduğunda $p_n > 0$, $R_{n-1} \sim R_n$'i elde ederiz ve bu yüzden $q_nR_n = 0(P_nQ_n)$ dir; $P \in \mathfrak{M}$ iken ise $p_n \to 0$ dır, böylece $q_n \geq q_0$ olduğunda $p_{n+1} / q_n = 0(1)$ elde ederiz ve bundan dolayı $R_{n-1}|q_n + p_{n+1}q_0 / p_0| \sim q_nR_n$ dır[14].

$R_n = P_0 + ... + P_n$ olduğundan (4.3.25)'in her iki durumda da gerekli olduğunu gösterir. (4.3.24) ya da (4.3.29)'un (4.3.25)'i gerektirmeyeceği $p_n = 1$, $q_n = e^{\sqrt{n}}$; $P_n = 1/(n+1)^2$, $q_n = 1$ örneklerinden görülebilir.

4.4. Alt Yarı Matrise Dönüşen Değişimli Konvolisyon

(10)'de Vermes ve (11)'de Moustafa tarafından kullanılan A*B konvolisyonu aşağıdaki işlemin özel bir şeklidir. (i_n), (j_n) negatif olmayan iki tamsayı dizileri olsun. Verilen A ve B matrisleri için A, B dönüştürülmüş matrisler

$$\hat{a}_{n,k} = a_{i_n,k},\ b_{n,k} = b_{j_n,k} \tag{4.4.1}$$

ile tanımlanır.

O halde, AxB ile belirtilen, $C = AxB$ konvolisyonunu ele alalım. A, B alt yarı matrisler ise o zaman;

$$\hat{c}_{n,k} = \sum_{p=\max(o,k-j_n)}^{\min(k,i_n)} a_{i_n,p} b_{j_n,k-p} \tag{4.4.2}$$

ve $k > i_n + j_n$ için $\hat{c}_{n,k} = 0$ dır. Böylece n = 0, 1, 2, ... için $i_n + j_n = n$ ise (4.4.3)

C alt yarı matristir.

Ayrıca A ve B normal matrislerse ($a_{n,n} \neq 0,\ b_{n,n} \neq 0$ olacak şekilde), bu durumda

$$\hat{c}_{n,n} = a_{i_n,i_n} b_{j_n,j_n} \neq 0 \text{ ve } C \text{ normaldir.}$$

Lemma 4.4.1. (i_n), (j_n) negatif olmayan herhangi iki tamsayı dizileri olsun. A, B herhangi iki normal matrisler olsun ve A , B , (4.4.1)'deki gibi tanımlansın. Bu durumda $A \sim A$ ve $B \sim B$ olması için gerek ve yeter şart

$$i_n \to \infty,\ j_n \to \infty \tag{4.4.4}$$

ve i_n, j_n nin her birinin hemen hemen n= 0, 1, 2, ... değerlerini almasıdır.

$$A \sim A \text{ ve } B \sim B \tag{4.4.5}$$

olur[14].

İspat. Eğer σ_n , Υ_n sırasıyla, bir (S_n) dizisinin A, B dönüşümleri ve σ_n, Υ_n de A, B dönüşümleri ise, bu taktirde $\sigma_n = \sigma_{i_n}$, $\Upsilon_n = \Upsilon_{i_n}$ dir. Böylece $A \sim A$, $B \sim B$ dir $\Leftrightarrow$ $\sigma_n \to s \Leftrightarrow \sigma_n = \sigma_i \to S$ ve $\Upsilon_n \to S \Leftrightarrow \Upsilon_{i_n} \to S$ dir ve böylece lemma ispatlanır.

Uyarı 4.4.2. Eğer i_n, j_n (4.4.3) ve (4.4.5)'i sağlar ve A, B de normal matrisler ise; o zaman $A \sim A$, $B \sim B$ ve $A \bigstar B$ normal bir matristir. Ayrıca A, B T – matrisler ise,

$A \bigstar B$ de T – matristir. $A \bigstar B$ nin değişmeli konvolisyonu (4.4.3) – (4.4.5)'i sağlayan $i_n = n - \left[\!\left[\frac{1}{2}n\right]\!\right]$, $j_n = \left[\!\left[\frac{1}{2}n\right]\!\right]$ olması durumudur[14].

Bu çalışmanın kalan kısmı boyunca (4.4.3), (4.4.4), (4.4.5)'e ilaveten,

$$0 < a = \lim\left(i_n / n\right) \leq \lim\left(i_n / n\right) = b < 1 \tag{4.4.6}$$

olduğunu varsayalım. Böylece, $j_n = n - i_n$ de aynı özelliğe sahip olur. Bu, $A \bigstar B$ konvolisyonuna, kesin bir simetri ölçüsü verir. $A \bigstar B$ ile ilgili bir teorem, (4.4.4)' deki özel a, b için bağımsız olarak sağlanırsa, bu durumda bu teorem $B \bigstar A$ için de sağlanır. $\left(N, p_n\right) \bigstar \left(N, q_n\right)$ nin yerine $\left(N, p_n\right) \bigstar \left(N, q_n\right)$ aldığımızda Teorem 4.3.5 ve Teorem 4.3.13 arasında benzerlikler olur ve bu teoremler sırasıyla Teorem 4.3.5 – 4.4.4 şeklinde isimlendirilecektir. i_n, j_n (4.4.3) – (4.4.6) verilen özelliklere sahip olduğu zaman bu teoremler, Teorem 4.3.5 – 4.3.13'e benzer hipotezler altında ispatlanabilir. Benzerlikler olduğu gibi farklılıklarda vardır.

Teorem 4.4.3. (4.3.18), $Tn = 0(P_{i_n}, Q_{j_n})$ ile değiştirilebilir[14].

Teorem 4.4.4. Teorem 4.3.'ün (i) ve (ii) hipotezleri ile değiştirilebilir. Bununla birlikte Teorem 4.3.5 ve Teorem 4.3.6'nın sonucunu genelleyebiliriz[14].

Lemmayı vererek başlayalım.

Lemma 4.4.5. Eğer E bir alt T – yarı matrisi ve

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \left\{ \left|e_{n,n}\right| - \sum_{v=0}^{n-1} \left|e_{n,v}\right| \right\} > 0 \tag{4.4.7}$$

ise bu durumda E yakınsamaya denktir[14].

Sonuç 4.4.6. Eğer E reel değerli bir T alt yarı matrisi ve hemen hemen her v için

$e_{n,v} \leq 0 \ (v \neq n)$ ise bu durumda E yakınsamaya denktir[14]. (4.4.8)

Sonuç 4.4.7. Eğer E reel değerli bir T alt yarı matrisi ve hemen hemen her v için

$e_{n,v} \geq 0$, $\underline{\lim}\, e_{n,n} > \frac{1}{2}$ ise E yakınsamaya denktir[14]. (4.4.9)

(N, p_n), (N, q_n), (N, r_n) verilen üç Nörlund metodu γ_v, $\alpha_{n,v}$, $\beta_{n,v}$ de (4.6)'daki gibi tanımlanmak üzere

$$\phi_{n,v} = \gamma_v - \alpha_{i_n,v} - \beta_{j_n,v} \tag{4.4.10}$$

olsun.

Bu durumda eğer $C = (N, p_n) \star (N, q_n)$, $D = (N, r_n)$, $E = C\,D^{-1}$ ise Lemma 4.5'deki aynı yöntemle; $e_{n,v} = R_v \phi_{n,n-v} / P_{i_n} Q_{j_n}$ olduğunu gösterebiliriz. Ayrıca eğer E yakınsamaya denk ise C, D'ye denk olacaktır. Lemma 4.4.5'i ele alınarak Teorem 4.6'nin bir benzer teoremi verilebilir[14].

Teorem 4.4.8. P_n, Q_n, $R_n \neq 0$ (n = 0, 1, 2, ...) ve i_n, j_n (4.63) – (4.66) şartlarını sağlasın ve $\phi_{n,v}$ (4.4.10)'daki gibi tanımlansın. Bu durumda $n \to \infty$ ve v sabit olmak üzere

$$(N,p_n) \star (N,q_n) \supseteq (N,r_n) \text{ dir} \Leftrightarrow \sum_{v=0}^{n} \left| R_{n-v} \phi_{n,v} \right| = 0\left(\left| P_{in} Q_{jn} \right| \right) \tag{4.4.11}$$

ve

$$\phi_{n,n-v} = 0\left(P_{i_n} Q_{j_n} \right) \tag{4.4.12}$$

dır. Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left| P_{i_n} Q_{j_n} \right|} \left\{ \left| R_n \gamma_0 \right| - \sum_{v=1}^{n} \left| R_{n-v} \phi_{n,v} \right| \right\} > 0 \tag{4.4.13}$$

ise bu durumda $(N, p_n) \star (N, q_n) \sim (N, r_n)$ dir[14].

Sonuç 4.4.6 ve 4.4.7'yi uygulayarak, aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 4.4.9. P_n, Q_n, $R_n > 0$ olsun. Eğer

$$1 \leq v \leq n \text{ için } \phi_{n,v} \leq 0 \tag{4.4.14}$$

$$n \to \infty \text{ iken (v sabit) } \phi_{n,n-v} = 0\left(P_{i_n} Q_{j_n} \right) \tag{4.4.15}$$

$$R_n = 0\left(P_{i_n} Q_{j_n}\right) \tag{4.4.16}$$

ise bu durumda $\left(N, p_n\right) \bigstar \left(N, q_n\right) \sim \left(N, r_n\right)$ dir[14].

Sonuç 4.4.10. $P_n, Q_n \neq 0$, $R_n > 0$ olsun. Eğer her n ve v için $\phi_{n,v} \geq 0$ ise $n \to \infty$ iken (v sabit) $\phi_{n,n-v} = 0\left(P_{i_n} Q_{j_n}\right)$, $\underline{\lim}\left(R_n \gamma_0 / P_{i_n} Q_{j_n}\right) > \frac{1}{2}$ ise bu durumda $\left(N, p_n\right) \bigstar \left(N, q_n\right) \sim \left(N, r_n\right)$ dır[14].

Şimdi aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

Teorem 4.4.11. Eğer $p, q \in \mathfrak{M}$ ve i_n, j_n (4.4.3) – (4.4.6) şartlarını sağlarsa, bu durum $t_n = p_o q_n + \ldots + p_n q_o$ olmak üzere $\left(N, p_n\right) \bigstar \left(N, q_n\right) \sim \left(n, q_n\right) \bigstar \left(N, p_n\right) \sim \left(N, t_n\right)$ dir[14].

İspat. Teorem 4.3.5'in ispatındaki gibi

$\gamma_0 = 1$, $\gamma_v = 0$ $(v \geq 1)$, $\alpha_{n,v} \geq 0$, $\beta_{n,v} \geq 0$ olup, dolayısıyla $1 \leq v \leq n$ için $\phi_{n,v} = -\alpha_{i_n,v} - \beta_{i_n,v} - \beta_{j_n,v} \leq 0$ dır. (4.4.15), $\left\{\left(N, p_n\right) \bigstar \left(N, q_n\right)\right\} - \lim \bar{t}_n = 0$ ifadesine denktir ve bu, $t_n \to 0$ ve $\left(N, p_n\right), \left(N, q_n\right)$ olduğundan sağlanır.

(4.4.16) için (4.4.6) ve (4.3.4)'yi kullanarak

$$R_n = T_n = p_0 Q_n + \ldots + p_n Q_0 \leq P_n Q_n < \left(nP_{i_n} / i_n\right)\left(nQ_{j_n} / j_n\right) = 0\left(P_{i_n} Q_{j_n}\right)$$

elde edilir.

Bu nedenle Sonuç 4.4.9'dan ve Uyarı 4.4.2'nin son ifadesinden teorem ispatlanır.

Aynı ispat metodu, matrislerden biri birim matris olmak üzere Teorem 4.4.11'in marjinal durumunda sağlanır.

Teorem 4.4.12. Eğer $p \in \mathfrak{M}$ ve i_n, j_n (4.4.3) – (4.4.6) şartlarını sağlıyorsa, bu durumda $I \bigstar \left(N, p_n\right) \sim \left(N, p_n\right) \bigstar I \sim \left(N, p_n\right)$ dir. Teorem 4.3.6'nın bir kombinasyonu ve Sonuç 4.4.10 aşağıdaki teoremi verir[14].

Teorem 4.4.13. Eğer (4.3.5), (4.3.6) sağlanır, i_n, j_n (4.4.3) – (4.4.6) şartlarını sağlıyor ve

$$\underline{\lim}\left(T_n / P_{i_n} Q_{j_n}\right) > \frac{1}{2} \tag{4.4.17}$$

ise bu durumda $(N, p_n) \star (N, q_n) \sim (N, t_n)$ dir[14].

Uyarı 4.4.14. A, B gibi iki normal matrisin denkliği için basit bir gerek şart

$$0 < M_1 \leq \left|a_{n,n} / b_{n,n}\right| \leq M_2 < \infty \tag{4.4.18}$$

olmasıdır[14].

A, B normal olduğunda $a_{n,n}^{-1} = 1/a_{n,n}$, $b_{n,n}^{-1} = 1/b_{n,n}$ şartlarını sağlayan A ve B'nin bir tek iki yönlü A^{-1} ve B^{-1} tersleri vardır. Ayrıca eğer $A \sim B$ ise bu durumda AB^{-1} ve BA^{-1} nin her ikisi de T – matrisleri olmalıdır ve kısmen bu (4.4.18)'i verir.

4.5. Cesa'ro Metodlarının Konvolisyonu

Önceki bölümlerde verilen Nörlund metodlarına ait teoremlerin her biri, özel bir durum olarak Cesa'ro metodları ile ilgili denk teoremi ihtiva eder.

Teorem 4.5.1. $p, \sigma, \Upsilon > -1$ olsun. Bu durumda $(C, p) \star (C, \sigma) \supseteq (C, \Upsilon)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\Upsilon \leq p + 1,\ \Upsilon \leq \sigma + 1,\ \Upsilon \leq p + \sigma \tag{4.5.1}$$

olmasıdır[14].

İspat. Bu teorem kısmen Moustafa(11) tarafından ispatlanmıştır. Teoreminin p, σ, $\Upsilon > 0$ için verilen gereklilik kısmının ispatı p, σ, $\Upsilon > -1$ için geçerli kalır. Yeterlilik ispatı sadece $p \geq 1$, $\sigma \geq 1$, $\min(\rho, \sigma)$ bir tamsayı iken yapılmıştır. Yeterlilik kısmı aslında $p, \sigma > -1$ şartı dışında da sağlanır. Eğer örnek olarak $p_n = A_n^{\rho-1}$, $q_n = A_n^{\sigma-1}$, $r_n = A_n^{\tau-1}$ seçersek bu durumda $t_n = p_0 q_n + \ldots + p_n q_0 = A_n^{\rho+\sigma-1}$ dir ve simetriden $p \leq \sigma$ kabul edilebilir. Bu durumda Teorem 4.3.5, $0<\rho\leq\sigma\leq 1$ için; Teorem 4.3.6, $-1<\rho\leq\sigma\leq 0$ 'la $\rho+\sigma>-1$ için, Teorem 4.3.9, $-1<\rho\leq 0<\mathfrak{M}\leq 1$ ve Teorem 4.3.12 ve 4.3.13'de $-1<\rho\leq 1\leq\sigma$ için ele alınmıştır. Bu sadece $1\leq\rho\leq\sigma$ durumu bırakır. Aslında Teorem 4.9'dan şimdiki teoremi ispatladıysak, $-1<\rho\leq\sigma<0$, $-1<\rho<0\leq\sigma$ ve $0\leq\rho\leq\sigma$ 'deki durumları ele almak gerekir. Son durumda $\rho,\sigma\geq 0$, $\tau>-1$ olduğunda $(N,p_n)=(C,p)$ ve $(N,q_n)=(C,\sigma)$ regülerdir ve $\bar{r}_n=A_n^{-\tau-1}\to 0$ böylece (4.15) sağlanır; (4.5.1)'den (4.17) ve (4.18)'in sağlandığını göstermek kolaydır.

Teorem 4.5.2. $\rho,\sigma,\ \tau>-1$ olsun ve i_n, j_n (4.4.3) – (4.4.6) şartlarını sağlasın. Bu durumda $(C,\rho)\bigstar(C,\sigma)\supseteq(C,\tau)$ olması için yeter şart $\tau=\rho+1,\ \tau=\sigma+1,\ \tau\leq\rho+\sigma$ olması ve $\tau\leq\rho+\sigma$ olması ise gerek şarttır. Eğer ek olarak $k\to\infty$ iken

$$i_{n,k}-j_{n,k}=0(1) \tag{4.5.2}$$

olacak şekilde (n_k) dizisi varsa bu durumda $\tau\leq\rho+1$ ve $\tau\leq\sigma+1$ de gerek şartlardır[14].

İspat. Yeterlilik kısmının ispatı Teorem 4.5.1'e benzerdir ve $\tau\leq\rho+\sigma$ nın gerekliliği $(C,\rho)\bigstar(C,\sigma)\supseteq(C,\tau)$ ise $A_n^{\tau}=0\left(A_{i_n}^{\rho}A_{j_n}^{\sigma}\right)$ olmasından $\tau\leq\rho+\sigma$ elde edilir ki bu gereklilik ispatıdır.

$p_n=A_n^{\rho-1}$, $q_n=A_n^{\sigma-1}$, $r_n=A_n^{\tau-1}$ ile (4.71)'in solundaki $v=i_n-1$ ve $v=j_n-1$ terimlerini ayrı ayrı alarak aşağıdaki şartların gerekli olduğunu buluruz.

$$R_{i_n-1}\left|\phi_{n,j_{n+1}}\right|=0\left(P_{i_n}Q_{j_n}\right),\ R_{j_{n-1}}\left|\phi_{n,i_{n+1}}\right|=0\left(P_{i_n}Q_{j_n}\right) \tag{4.5.3}$$

$\gamma_v=A_v^{\rho+\sigma+\tau-1}$ olduğundan $R_{i_{n-1}}\gamma_{j_{n+1}}$ ve $R_{j_{n-1}}\gamma_{i_{n+1}}$ 'in her ikisinin de $o\left(P_{i_n}Q_{j_n}\right)$ olduğunu buluruz ve böylece $\alpha_{i_n,i_{n+1}}=A_{i_{n+1}}^{p-1}$, $\beta_{j_n,j_{n+1}}=A_{j_{n+1}}^{\sigma-1}$ olmak üzere (4.4.10)'dan (4.5.3),

$$R_{i_{n-1}}\left|\alpha_{i_n,j_{n+1}}+\beta_{j_n,j_{n+1}}\right|=O\left(P_{i_n}Q_{j_n}\right) \tag{4.5.4}$$

ve

$$R_{j_{n-1}}\left|\alpha_{i_n,i_{n+1}}+\beta_{j_n,i_{n+1}}\right|=O\left(P_{i_n}Q_{j_n}\right)\text{'e} \tag{4.5.5}$$

denktir.

Şimdi eğer sonsuz n için $i_n < j_n$ ise bu durumda bu değerler için $\beta_{j_n,j_{n+1}}=0$ ve (4.5.5), $\tau \le \sigma+1$ iken $A^{\tau}_{j_{n-1}}A^{p-1}_{i_{n+1}}=0\left(A^{\rho}_{i_n}A^{\sigma}_{j_n}\right)$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde sonsuz n için $i_n > j_n$ ise bu durumda $\tau \le \rho+1$'dir. Hemen hemen her n için $i_n \le j_n$ olduğunu varsayalım; bu durumda sonsuz n'ler için $i_n < j_n$ dir. (Hemen hemen her n'ler için $i_n = j_n$ olması imkansızdır. Çünkü $i_n + j_n = n$ dir.) Böylece $\tau \le \sigma+1$ dir ve ayrıca

$$\left|\alpha_{i_n},j_{n+1}\right|=\left|\sum_{\lambda=0}^{j_n-i_n}A_{\lambda}^{\sigma-\tau-1}A^{p-1}_{j_n-\lambda+1}\right|\le \max_{i_n\le v\le j_n}\left|A^{p+1}_{v+1}\right|\left|\sum_{\lambda=0}^{j_n-i_n}A_{\lambda}^{\sigma-\tau-1}\right|$$

dir.

i_n, j_n'nin (4.4.3) – (4.4.6) genel özelliklerine ek olarak, eğer (4.5.2) şartını koyarak $\tau \le \sigma+1$ olduğundan, bu durumda $n=n_k$ için $k\to\infty$ iken

$$R_{i_{n-1}}\left|\alpha_{i_n,j_{n+1}}\right|/P_{i_n}Q_{j_n}=0\left(n_k^{\tau+p-1}/n_k^{p+\sigma}\right)=0(1)$$

dır.

Dolayısıyla (4.5.4), $\tau \le \sigma+1$ için

$R_{i_{n-1}}\left|\beta_{j_n,j_{n-1}}\right|=0\left(P_{i_n}Q_{j_n}\right)$ ifadesine denktir. Benzer şekilde eğer hemen hemen her n için $i_n \ge j_n$ ve (4.5.2) sağlanırsa bu durumda $\tau \le \sigma+1$ ve $\tau \le \rho+1$ dır ve teorem böylece ispatlanır.

Uyarı 4.5.3. (4.4.6)'dan (4.5.2)'nin sağlanması için gerek şart $a=b=\frac{1}{2}$ olmasıdır.

Her n için $0 \le i_n - j_n \le 1$ olduğundan $A \star B$ dönüştürülmüş konvolisyonu (4.5.2)'yi sağlar[14].

Teorem 4.5.4. Eğer $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \sigma \le 1$ ve birleştirilmiş $i_{n,}\, j_n$ dizileri (4.4.3)-(4.4.6) yı sağlarsa bu durumda,

$$(C,\rho) \overset{\wedge}{*} (C,\sigma) \sim (C,\rho+\sigma) \tag{4.5.6}$$

dır. Eğer $\rho > 1, \sigma > -1$ ya da $\sigma > 1, \rho > -1$ ve $i_{n,}\, j_n$ (4.4.3), (4.4.6), (4.5.2)'yi sağlarsa bu durumda $(C,p) \overset{\wedge}{*} (C,\sigma), (C,\Upsilon)$'e denk olmaz[14].

İspat. $p_n = A_n^{\rho-1}, q_n = A_n^{\sigma-1}, t_n = A_n^{p+\sigma-1}$ alırsak ilk sonuç Teorem 4.4.11 ve 4.4.12'den elde edilir. Şimdi eğer $A = (C,\rho) \overset{\wedge}{*} (C,\sigma), B = (C,\tau)$ ise, bu durumda $a_{n,n}/b_{n,n} = A_n^{\tau} / A_{i_n}^{\rho} A_{j_n}^{\sigma}$ dir ve bu yüzden $K_1.n^{\tau-p-\sigma} < a_{n,n} / b_{n,n} < K_2.n^{\tau-p-\sigma}$ dır: ve $K_1.n^{\tau-\rho-\sigma} < \dfrac{\alpha_{n,n}}{b_{n,n}} < K_2.n^{\tau-\rho-\sigma}$, (4.4.18) sadece $\tau = \rho + \sigma$ için sağlanır. Uyarı 4.4.14, (4.5.7)'nin bu konvolisyon için tek denklik formu olduğunu gösterir. Fakat eğer $\rho > 1$ ya da $\sigma > 1$ ve (4.5.2) sağlanırsa Teorem 4.5.2, $(C,\rho) \overset{\wedge}{*} (C,\sigma)$ nın $(C,\rho+\sigma)$ yı içermediğini gösterir ve ikinci sonuç böylece elde edilir.

Teorem 4.5.4, (4.5.6)'nın 1'den büyük en küçük ρ ve σ lar için sağlanmadığını göstermesine rağmen, Teorem 4.4.13'ü kullanarak bazı ρ ve σ negatif değerleri için denkliğin sağlanabileceğini gösterebilir; Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.5.5. Eğer $-1 < \rho < 0, -1 < \sigma < 0, p + \sigma > -1;\ i_n, j_n$, (4.4.3) - (4.4.6) şartlarını sağlar ve

$$a^{\rho}(1-b)^{\sigma}\Gamma(\rho+\sigma+1) < 2\Gamma(\rho+1)\Gamma(\sigma-1) \tag{4.5.7}$$

ise bu durumda,

$$(C,p) \overset{\wedge}{*} (C,\sigma) \sim (C,p+\sigma) \tag{4.5.8}$$

dır[14].

$A * B$ genellemesinde olduğu gibi ,örneğin eğer $a = b = \frac{1}{2}$ ve $\rho = \sigma$ ise bu durumda (4.5.7) ifadesi $\rho > \rho_0 = -0.30057...$ için sağlanan $\Gamma(p + \frac{1}{2}) / \Gamma(p+1) < 2\sqrt{\pi}$ olur. (4.5.8), $-\frac{1}{2} < p \le p_0$ için sağlansa da sağlanmasa da belirsiz kalır. (4.5.8)'ın, $-1 < p \le 1$, $-1 < \sigma \le 1$, $p + \sigma > -1$ den başka kısıtlamayla sağlanmayacağı gibi görünür, fakat Teorem 4.5.4 ve 4.5.5, bu bağlamda elde edilebilecek en iyi sonuçlardır. Moustafa(11) aşağıdaki soruyu sorar.

$H(\rho, \sigma) = (C, \rho) \bigstar (C, \sigma)$ olsun. Verilen pozitif bir σ tamsayısı ve $\rho \ge \sigma$ şartını sağlayan ρ pozitif tamsayısı için $H(p+1, \sigma) \supseteq H(p, \sigma)$ kapsaması doğru mudur? Eğer pozitif tamsayılar için kısıtlama yapmazsak, soruya kısmi bir cevap Teorem 4.5.2 ve 4.5.4'den verilebilir. Yani,
eğer $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \sigma \le 1$, $\rho_1 \le \rho_2$ ise bu durumda $H(\rho_2, \sigma) \supseteq H(\rho_1, \sigma)$ dir.

5. SONUÇ

Bu çalışmada, özel bir toplanabilme metodu olan Nörlund Toplanabilme Metodu incelendi. Buna ek olarak bazı Nörlund tipi metodların denkliliği, uyumluluğu araştırıldı. Nörlund Toplanabilme Metodunda ele alınan (p_n) dizisi üzerine pozitif olma şartı konulmasının çalışmada önemli bir rolü olduğu gözlemlendi.

Ayrıca metodun regüler olması koşulu altında elde edilen teoremler arasındaki ilişkiler araştırıldı.

Kuvvet serilerinin yardımıyla Nörlund Toplanabilme Metodunun uyumluluğu ile ilgili teoremlerin ispatı incelendi. Buna ek olarak, her regüler ve reel Nörlund metodlarının uyumlu oldukları görüldü.

Kapsama ve denklik yardımıyla herhangi iki regüler Nörlund Metodu arasındaki teoremlerin ispatı incelendi. Bu ispatları yaparken ele alınan kuvvet serilerinin yakınsak olma koşulunun önemi görüldü. Herhangi iki Nörlund Metodunun denk olması için gerek ve yeterli şartları veren teoremlerin ispatı incelendi.

Son olarak ise, Nörlund Toplanabilme Metodunun C=A*B konvolisyonu tanım yardımıyla $C=(N,p_n)*(N,q_n)$ oluşturularak $C=(N,p_n)*(N,q_n)$ toplanabilme metodu ile ilgili teoremlerin ispatı incelendi.

Nörlund matrislerinin bazı özel sınıfları üzerine Nörlund metodlarının karşılaştırılması incelendi. Özel Nörlund Toplanabilme Metodu olan Cesa'ro matrisleri ile Nörlund matrisleri arasındaki kapsama bağıntısını elde etmek için konvekslik şartının kaldırılamaz şart olacağı görüldü. Buna ek olarak satırları azalan olan Nörlund matrisleri ve matrisler arasındaki ilişkiler konvolisyon tanımı da kullanılarak incelendi.

KAYNAKLAR

1. Mcfadden, L., Absolute Nörlund Summability, Duke Math. J. Q., 1942.
2. Titchmarsh, E. C., Theory of Functions Oxford Universty, Oxford., 1949.
3. Goldberg, R. R., Methods of Reel Analysis, Canada., 1976.
4. Petersen, G. M., Regular Matrix Transformations., 1966.
5. Hardy, G. H., Divergent Series, Oxford University Press., 1949.
6. Knopp, K., Theory and application of Infinite Series, English ed, London., 1928.
7. Peyerimhoff, A., Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag., 1969.
8. Powel, R. E., Shah, S. M., Summability Theory and Its Applications, Van Nostrand Reinhold Company., 1972.
9. Widder, David V., Advanced Calculus, Prentice-Hall, Inc., 1965.
10. Wermes, P., Convolution of Summability Methods, J. D’Analyse Math. 2., 1952 (160-177)
11. Moustafa, M.D., Convolution of Cesa’ro Methods, J. London Math. Soc. 30., 1955 (85-100)
12. Szegö, G., Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Fejer’über die Legendreschen Polynome, Math. Z. 25., 1926 (172-187)
13. Russell, D. C., Note on inclusion theorems for in finite matrices, J. London Math. Soc. 33., 1958 (50-62)
14. Russell, Dennis C., Convolution OF Nörlund Summability Methods, Proc London Math. Soc. 3., 1959 (1-20)

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Yozgat'ın Çayıralan ilçesine bağlı Menteşe Köyünde doğan Tuncer COŞKUN ilköğrenimini Menteşe Köyü İlkokulu'nda, orta öğrenimini Kayseri Kadı Burhanettin Ortaokulunda, lise öğrenimini Kayseri Lisesi'nde ve yüksek öğrenimini ise 1995-1999 yılları arasında Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde tamamlamıştır.

Kayseri'de Matematik Öğretmenliği yapan Tuncer COŞKUN Şubat 2010'da Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisinde yüksek lisans yapmaya başlamıştır. Evli ve Fatma Asude isminde bir kız çocuğu vardır.

İletişim Bilgileri

Adres: Beyazşehir Mah. Gesi Cad. Miraç Apt. No:3/46

38600 Kocasinan/KAYSERİ

Cep: (534) 634 13 96

E-posta: cebirci_3@hotmail.com