T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

HAUSDORFF TOPLANABİLME METODU

Hatice ÖZTÜRK

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

Yozgat 2013

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

HAUSDORFF TOPLANABİLME METODU

Hatice ÖZTÜRK

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

Yozgat 2013

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 70111310002 numaralı öğrencisi Hatice ÖZTÜRK'ün hazırladığı "**Hausdorff Toplanabilme Metodu**" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezi ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 06/03/2013 Salı günü saat 15:00'de yapılmış, tezin onayına OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU (Danışman)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Onur OKTAY

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 14/03/2013 tarih ve 7 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

14/03/2013

T.C.

Doç. Dr. Hidayet ÇETİN
Enstitü Müdürü
Bozok Üniversitesi
Fen Bil.Enst.Müdürü
(Ünvanı, Adı Soyadı)

HAUSDORFF TOPLANABİLME METODU

Hatice ÖZTÜRK

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2013; Sayfa: 51

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ÖZET

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın amacı, Hausdorff toplanabilme metodunu incelemektir. Bu nedenle birinci bölümde; bir toplama metodu olan matris dönüşümleri ile ilgili açıklamalar ve ikinci bölümünde ise çalışmamızda kullanılan temel tanımlar ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise; temel kavramlar ve teoremler bölümünde tanımladığımız özel bir toplama metodu olan $(H{\sim}\mu)$ Hausdorff metoduna ait teoremlere ve ispatlara yer verilmiştir ve $R(a,b,\alpha)$ matrisleri tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde ise; Hausdorff toplanabilme metodunu ve $R(a,b,\alpha)$ metodunu kapsayan total regülerliğe göre total güçlülüğe ait teoremler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hausdorff Toplanabilme, Cesa'ro Toplanabilme, Regülerlik, Total Güçlülük

HAUSDORFF SUMMABILITY METHODS

Hatice ÖZTÜRK

Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2013; Page: 51

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ABSTRACT

The purpose of this study which composed of four parts, is to investigate Hausdorff summability method. The descriptions of matrix transformations as a method of summability are in the first chapter, the basic definition and theorems used in this study are given in the second one.

In the third chapter; theorems and proofs are given of $(H{\sim}\mu)$ Hausdorff summability method which is a summability method, described at the basic concepts and theorems part.

In the four chapter; Totally stronger theorems is examined according to Hausdorff summability method and $R(a, b, \alpha)$ method to include total regularity.

Keywords: Hausdorff Summability, Cesa'ro Summability, Regularity, Totally Strength

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocam Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU'na teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ayrıca, bu çalışmanın oluşma sürecinde maddi ve manevi desteğini benden esirgemeyen sevgili eşime ve beni bu günlere getiren aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1.GİRİŞ

İfadelerin ilk grubu genellikle sonsuz matrislere uygulanabilir. x dizilerimizi simgelesin. Öyle ki A,

$$A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$$

ile tanımlanan sonsuz bir matristir. (A) tarafından simgelenen A matrisinin yakınsaklık alanı, x dizininin kümesini içerir öyle ki $\{A_n(x)\}$ yakınsaktır. Eğer iki matris aynı yakınsaklık alanına sahipse, ikisinin eşdeğer olduğu söylenir. Eğer

$i)$ $\forall k$ için $a_k = \lim_n a_{nk}$

$ii)$ $t = \lim_n \sum_k a_{nk}$ var ve

$iii) \|A\| = \max_n \sum_k |a_{nk}|$ olmak üzere, A sonlu bir norma sahip ise,

A matrisi konservatif olarak adlandırılır.

Eğer A matrisi limiti koruyorsa, A matrisine regülerdir denir. Yani, limit l olan her yakınsak x dizisi için $A_n(x) \to l$ dır.

A matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart;

$i)$ $\forall k$ $için$ $a_k = 0$, yani $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$

$ii)$ $t = 1$ ve

$iii)$ A $sonlu$ bir $norma$ $sahip$ $olmasıdır$.

A martisi regüler ve eğer her x dizisi için $x_n \to +\infty$ iken $A_n(x) \to +\infty$ oluyorsa, A ya total regülerdir denir.

A ve B herhangi iki matris metodu olmak üzere eğer her x dizisi için $A_n(x) \to l$ iken $B_n(x) \to l$, $|l| < \infty$ şartı sağlanıyorsa B nin A dan daha total güçlü olduğu söylenir ve B t.s. A yazılır. Eğer $A_n(x) \to l$ iken $B_n(x) \to l$, l sonlu fakat $A_n(x) \to +\infty$ ve $B_n(x) \to +\infty$ olacak şekilde x dizisi varsa B, A dan daha total güçlü değildir denir ve

B n.t.s. A şeklinde gösterilir. Eğer B, A dan total güçlüyse ve A da B den total güçlü ise iki matrise total denk matrisler denir. A matrisinin esas köşegeninin üstündeki elemanların hepsi sıfırsa, A matrisine üçgensel matris denir.

μ herhangi bir dizi olsun. Bu durumda μ üzerinde oluşturulan Δ lineer fark operatörü

$$\Delta_{\mu_k} = \mu_k - \mu_{k+1} \quad ,$$

$$\Delta_{\mu_k}^n = \Delta(\Delta^{n-1}\mu_k) = \sum_j (-1)^i \, c_{n,j}\mu_{k+j}$$

ile tanımlanır.

Bir $H = (h_{n,k})$ Hausdorff matrisi , $h_{n,k} = c_{n,k}\Delta^{n-k}\mu_k$ ile tanımlanan üçgensel bir matristir. Bu yüzden, μ üreteç dizisi olarak adlandırılır. Eğer bütün ardışık farklar negatif değilse, yani $\Delta^n\mu_k \geqq 0$; $k, n = 0{,}1{,}2$ ... ise μ dizisine total monoton denir. Hausdorff matrisi için satır ve sütun indekslerinin 1 yerine 0 ile başlatıldığı bilinmelidir.

Eğer bir A matrisi iki yönlü bir tersliğe sahipse , B t.s. A ifadesi total regüler olan BA^{-1} ifadesine denktir. Bir Hausdorff matrisinin sonlu norma sahip olması için gerek ve yeter şart üreteç dizisinin iki total monoton dizinin farkı olarak ifade edilebilmesidir. Sonlu norma sahip olan Hausdorff matrisi konservatiftir ve $\forall n$ için $\sum_j \; h_{n,k} = \mu_0$ ek özelliklere sahiptir. Bu yüzden her pozitif k için $t = \mu_0$, $\lim_n \; h_{n,k} = 0$ ve $h_0 = \lim_n \; h_{n,0}$ vardır. Böylece Hausdorff matrisi için regülerlik şartları;

$i)$ $h_0 = 0$,

$ii)$ $\mu_0 = 1$ ve

$iii)$ $H \; sonlu \; normlu$

dır.

Bir Hausdorff matrisinin total regüler olması için gerek ve yeter şart bu matrisin regüler ve moment üreteç dizisinin total monoton olmasıdır.

μ dizisi tarafından üretilen H Hausdorff matrisinin ifade edilmesinde H_μ ile matris, $H \sim \mu$ ile metod, (H, μ) ile H_μ nin yakınsaklık bölgesi, bunlardan başka 1. mertebeden Cesaro matrisinin yakınsaklık bölgesi $(C, 1)$ ile gösterilecektir. Birim matris I ile gösterilecektir.

Özdeş olmadıkları sürece var olan moment dizileri ile iki regüler Hausdorff metodunun total denk olmayacağı bilinen bir sonuçtur [1]. Bu yüzden total güçlülük kavramı denk Hausdorff metodlarının kısmi sıralama bağıntısı olarak işlev görür.

Basu [1] de, genellikle C^α veya C_α olarak gösterilen Cesa'ro matrisleri ve H^α veya H_α olarak gösterilen Hölder matrislerinin totalliğini karşılaştırmıştır.

$a > 0$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere Basu [2] de Γ_a^α, $\left(\frac{n}{n+a}\right)^\alpha$ üreteç dizisine sahip Gamma matrisi olmak üzere H^α ve Γ_a^α matrislerinin totalliğini karşılaştırmıştır. [5] de Rhoades, B.E. [1-4] ün sonuçlarını kullanarak aşağıdaki sonuçları elde etmek için Gamma ve Cesa'ro metodlarının totalliğini karşılaştırmıştır.

$a < 0\, , a' < 1\, , b > 1$ olsun. Böylece

$R(i)$ $0 < a \leqq (a+1)/2 < 1 + a \leqq a' < 1$ için H_α t.s. , $\Gamma_{a'}^\alpha$ t.s. , C_α t.s. , Γ_a^α , fakat tersi doğru değildir.

$R(ii)$ $0 < a \leqq (a+1)/2 < 1$ için Γ_a^α t.s. , C_α t.s , H_α t.s , Γ_b^α , fakat tersi doğru değildir.

$R(iii)$ $a > 1\, , 2b \geqq a + 1$ için Γ_a^α t.s , H_α t.s , C_α t.s Γ_b^α , fakat tersi doğru değildir.

[3] de Basu Hipergeometrik ve Cesa'ro metodlarını total karşılaştırmıştır. Bu çalışmada, [3] nin sonuçlarını ve yukarıdaki bağıntıları alarak Hipergeometrik metod Gamma metoduyla total olarak karşılaştırılmıştır.

3. Bölümde, $(C, 1)$ ve Γ_{α}^{1} metodları, total olarak [6] Greenberg ve Wall (bundan sonra G ve W olarak bahsedilecek.) tarafından tartışılan ve tanımlanan üç metodla karşılaştırılmıştır.

Denklik, reel dizilere benzer karmaşık diziler için belli Hausdorff metodlarına uygulanmıştır.

4. Bölümde, bir Hausdorff metodunun toplanabilirliği tanımlanmıştır. İki parametre içeren bu toplanabilme metodu negatif olmayan α için C^{α} ya indirgenebileceği gösterilmiştir ve uygun seçilen parametreler için $\alpha.$ mertebeden Gamma metoduna veya Hölder metoduna indirgenir. Bu metod total olarak Gamma, Hölder ve Cesa'ro ile karşılaştırılmıştır. [7] ün bazı sonuçlarının genellemesi incelenmiştir.

2.TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Tanım 2.1. $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisi verilsin. Bir (S_n) dizisi için $\sigma_n=\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}S_k$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty}\sigma_n$ mevcut ve s ye eşit ise (S_n) dizisi s ye A–limitlenebilir denir ve $S_n \to s(A)$ veya $\left(A-\lim_{n\to\infty} S_n = s\right)$ şeklinde gösterilir. Bu durumda A matrisine de bir "limitleme metodu" denir. Ayrıca (S_n) dizisi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplam dizisi ve (S_n) bir A–metodu ile limitlenebilirse $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi A–toplanabilir denir ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(A)$ şeklinde gösterilir. Bu takdirde A matrisine de bir "toplama metodu" denir [8].

Tanım 2.2. f(x) ve g(x) kompleks veya reel değerli fonksiyonlar ve a da sabit bir nokta olsun (a reel veya kompleks).

(i) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ ise f(x) ile g(x) "asimtotik"tir denir ve $f(x)\sim g(x)(x\to a)$ şeklinde gösterilir.

(ii) $f(x)=0(g(x))(x\to a) \Leftrightarrow \lim_{x\to a}\sup\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|<\infty$

(iii) $f(x)=o(g(x))(x\to a) \Leftrightarrow \lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

dır. Özellikle

$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \text{ ise } f(x)=o(1)(x\to a)$$

ve

$$\lim_{x\to a}\sup|f(x)|<\infty \text{ ise } f(x)=0(1)(x\to a)$$

yazılır.

Yukarıdaki tanımlar $x \to \pm\infty$ için de geçerlidir [8].

Teorem 2.3. (Silverman–Toeplitz Teoremi):

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ olan (S_n) dizisi verilsin. Bu durumda $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=o}^{\infty} a_{nk} S_k = s$ olması için gerekli ve yeterli koşul

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \qquad \forall k = 0,1,2....$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=o}^{\infty} a_{nk} = 1$

iii) $\sup\limits_{n} \sum\limits_{k=o}^{\infty} |a_{nk}| < M \qquad (M > 0)$

olmasıdır [8].

Teorem 2.4. (Cesa'ro Teoremi):

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = B$ olsun. Bu iki serinin Cauchy çarpımı, $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$ olmak üzere $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n$ olsun. Bu takdirde, $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k$ olmak üzere,

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} T_k \to A \cdot B (n \to \infty)$$

dır [8].

Tanım 2.5. Diziden diziye dönüşümleri (2.1)'de sonsuz matris şeklinde ifade etmek istiyoruz. Yani

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} S_k \tag{2.1}$$

dır.

Burada kullanılan matrisler genel olarak satır sonlu olacaktır. Yani $k>k_n$ için $c_{n,k}=0$ olur. Eğer (2.1)'deki seri $\forall n$ için yakınsak ve (S_n)'de $\lim S_n = \sigma$ olacak şekilde yakınsarsa, bu durumda $S_n \to \sigma(C)$ veya $C-\lim S_n = \sigma$ dır. Eğer D ikinci bir sonsuz matris ve $S_n \to \sigma(D) \Rightarrow S_n \to \sigma(C)$ oluyorsa, bu durumda C'nin D'yi ihtiva ettiğini söyleyebiliriz ve $C \supseteq D$ yazabiliriz. Eğer her biri diğerini içeriyorsa C ve D matrislerine denk matris denir ve $C \sim D$ ile gösterilir [8].

Tanım 2.6. $A=(a_{nv})$ ve $B=(b_{nv})$ iki metod olsun. $S_n \to s(A)$ ve $S_n \to s'(B)$ olan her (S_n) dizisi için $s=s'$ oluyorsa "A ve B metodları uyumludur" denir [8].

3.HAUSDORFF MATRİSLERİN ÇARPIMI

Teorem3.1: $\mu = \{\mu_n\}$ en az iki elemanı sıfırdan farklı total monoton bir dizi olsun. Bu durumda herhangi bir n için $\mu_n \neq 0$ dır [9].

İspat: $\mu_{k-1} \neq 0$ ve $\mu_n = 0$ olacak şekilde bir k tamsayısının olduğunu farzedelim. Böylece ya bütün $n \geq k$ lar için $\mu_n = 0$ ya da $\mu_m \neq 0$ olacak şekilde en az bir $m > k$ tamsayısı vardır. Aksi takdirde en son şart μ nin total monoton olmadığını gösterir. Bu yüzden her $n \geqq k$ için $\mu_n = 0$ dır. O halde $r = 0,1,2$ ... için $\Delta^r_{\mu_k} = \mu_k$ ve birleştirilmiş Hausdorff matrisi $H_\mu = (h_{rk})$, $\lim_{r\to\infty} h_{rk} = \infty$ özelliğine sahiptir ve böylece H konservatif değildir. Fakat μ nün total monoton olması H_μ nün konservatif olmasını gerektirir. Bu yüzden μ total monoton değildir.

$\{1,0,0,\ldots\}$ dizisi total monoton olduğundan Teorem3.1 zayıflatılamaz.

Oysaki c sabit olmak üzere $\{c,0,0,\ldots\}$ şeklindeki diziler regüler olmayan Hausdorff matrisinin boş küme de dahil olmak üzere bir sınıfını oluşturur. Bu yüzden her total regüler Hausdorff metodunun var olan moment dizisine sahip olduğu doğrudur.

Eğer esas köşegen üzerinde hiç sıfır elemanı yoksa, üçgensel bir matrise, üçgenseldir denir. Teorem3.1 e göre her total regüler H Hausdorff matrisi bir üçgenseldir. Bu yüzden H^{-1} her zaman vardır. Bu bizi genelde üçgensel matrisler için doğru olan aşağıdaki teoreme götürür.

Teorem3.2: A ve B üçgensel olsun. Eğer A t.s. B ve B total regüler ise A total regülerdir [9].

İspat: Eğer AB^{-1} total regüler ise A t.s. B dir. $(AB^{-1})(B) = A$ dır. Bu yüzden A total regülerdir çünkü A iki total regüler metodun çarpımıdır.

Total regüler iki dizinin çarpımı da total regüler olduğundan, çarpımın total gücünü ikisinden birinin total gücüyle kıyaslamak mantıklı bir problemdir.

Teorem3.3: $H{\sim}\mu_1$, $H{\sim}\mu_2$ total regüler Hausdorff metodları olsun. O halde $H{\sim}\mu_1\mu_2$ t.s. $H{\sim}\mu_1$, $H{\sim}\mu_2$ dır [9].

Total regülerlikten $H_{\mu_1\mu_2}/H_{\mu_k} = H_{\mu_j}$, $j,k = 1,2$, $j \neq k$ olduğundan ispat aşikardır.

Bu teorem bize bilinen bazı sonuçların ispatlarını sağlar. Örneğin; bu teorem $\beta > \alpha > 0$ için H_β t.s. H_α yı kanıtlamak için kullanılır. $\mu_{1_k} = (k+1)^{-(\beta-\alpha)}$,

$\mu_{2_k} = (k+1)^{-\alpha}$ olsun. Bu durumda $\mu_{1_k}\mu_{2_k} = (k+1)^{-\beta}$ ve Teorem 3.3 den istenilen sonuç elde edilir.

Benzer şekilde $0 < \alpha < \beta$ için Γ_α^β $t.s. \Gamma_\alpha^\alpha$ olduğunu gösterebiliriz.

Ancak Teorem 3.3 ün ileride gösterilecek farklı kullanımları da vardır.

Teorem 3.4. $H{\sim}\mu_1$, $H{\sim}\mu_2$ mevcut moment dizisiyle iki Hausdorff metodu olsun. Bu taktirde $H{\sim}\mu_1$ $t.s.$ $H{\sim}\mu_2 \leftrightarrow H{\sim}\mu_2^{-1}$, $H{\sim}\mu_1^{-1}$ dir [9].

İspat: $\lambda_k = \mu_{1_k}/\mu_{2_k} = \left(\mu_{2_k}\right)^{-1}/\left(\mu_{1_k}\right)^{-1}$ olsun. Verilen λ total regüler olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 3.5: (i=1,2) için λ mevcut ve $H{\sim}\mu_i$ t.s. $H{\sim}\lambda_i$ olacak şekilde $H{\sim}\mu_i$, $H{\sim}\lambda_i$ bir Hausdorff metodları olsun. O halde $H{\sim}\mu_1\mu_2$ t.s. $H{\sim}\lambda_1\lambda_2$ dir [9].

İspat: $\alpha_k = \mu_{1_k}\mu_{2_k}/\lambda_{1_k}\lambda_{2_k} = \left(\mu_{1_k}/\lambda_{1_k}\right).\left(\mu_{2_k}/\lambda_{2_k}\right)$ olsun. Böylece total regüler iki metodun çarpımı da total regüler olduğundan $H{\sim}\alpha$ total regülerdir.

Teorem 3.6. $|\alpha| < 1$ olsun. Bu durumda C_α^{-1} t.s.$C_{-\alpha}$ dır [9].

İspat: $\alpha \geq 0$ için [10] da ispatın özeti bulunmaktadır. Bu nedenle ispat burada yapılmamıştır. $\alpha < 0$ için Teorem 3.4 ile [10] un sonuçları birleştirilerek ispat yapılır.

$-1 < \alpha < 0$ için Teorem 3.2. ile birleştirilen Teorem 3.6. C_γ^{-1} in total regüler olduğunu gösterir.

Sonuç 3.1. $0 < \gamma < 1$ olsun. Bu taktirde $H_{-\gamma}$ t.s. C_γ^{-1} dir [9].

İspat: R(ii) den C_γ t.s. H_γ dır. Teorem 3.4. den $H_\gamma^{-1} = H_{-\gamma}$ t.s. C_γ^{-1} dır.

Sonuç 3.2: $0 < 1 - \alpha \leqq \gamma < 1$ için $C_{-\gamma}^{-1}$ t.s. Γ_α^γ dır [9].

İspat: R(i) den $0 < 1 - \gamma \leqq \alpha < 1$ için yani $1 > \gamma \geqq 1 - \alpha > 0$ için $\Gamma_\alpha^{-\gamma}$ t.s. $C_{-\gamma}$ dır. Teorem 3.4 ü kullanarak ispat yapılır.

Sonuç 3.3. $0 < \gamma \leqq 1 - 2\alpha < 1$ için Γ_α^γ t.s. $C_{-\gamma}^{-1}$ dır [9].

İspat: Sonuç 3.2 ile aynıdır ve yapılmayacaktır. α, (-1,1) aralığında değiştiğinde Teorem 3.6. ile birleştirilen Teorem 3.4. Cesa'ro, Hölder tipi metodlarının negatif güçlülüğünü karşılaştırmada çok faydalı olur.

Örneğin; R(ii) den $0 < \alpha < 1$ için C_α t.s. H_α dır. Teorem 3.4. den $(H_\alpha)^{-1} = H_{-\alpha}$ t.s. C_α^{-1} dır. Fakat Teorem 3.6. dan C_α^{-1} t.s. $C_{-\alpha}$ dır. Buradan $\gamma = -\alpha$ için H_γ t.s. C_γ dır.[1] deki Teorem 3.1 (i) nin yeni bir ispatını verir.

$\alpha, \beta, \alpha + \beta > -1$ için [3] deki Teorem 1

B(i) $C_\alpha C_\beta$ t.s. $C_{\alpha+\beta}$, $\alpha\beta > 0$

B(ii)) $C_{\alpha+\beta}$ t.s. $C_\alpha C_\beta$, $\alpha\beta < 0$

olduğunu gösterir.

B(i) nin doğru olduğunu varsayarak B(ii) nin bağımsız ispatını verebilmek mümkündür.

Kabul edelim ki $C_\alpha^{-1} C_\beta^{-1}\, C_{\alpha+\beta}$, $\alpha\beta < 0$ olsun. Bu durumda ya $-1 < \alpha < 0$ ya da $-1 < \beta < 0$ dır. Yukarıdaki ifadede α ve β simetrik olduğundan sonuçların $-1 < \alpha < 0$ için ispatlanması yeterli olacaktır.

$\alpha\beta < 0$, $\beta > 0$ dan dolayı iki olasılığımız var. Ya $\alpha + \beta \geqq 0$ ya da $\alpha + \beta < 0$ dır.

1.Durum: $\alpha + \beta \geqq 0$ olsun. Teorem 3.5 ve Teorem 3.6 dan $C_\alpha^{-1} C_\beta^{-1}\, C_{\alpha+\beta}$ t.s. $C_{-\alpha} C_\beta^{-1} C_{\alpha+\beta}$ dır. B(i) den $C_{-\alpha} C_{\alpha+\beta}$ t.s. $C_{-\alpha+\alpha+\beta} = C_\beta$ dır. Teorem 3.5 i kullanarak

$C_{-\alpha}C_{\beta}^{-1}C_{\alpha+\beta}$ t.s. $C_{\beta}C_{\beta}^{-1} = I$ dır. Fakat I total regülerdir. Böylece Teorem 3.2 den $C_{\alpha}^{-1}C_{\beta}^{-1}\ C_{\alpha+\beta}$ total regülerdir yani $C_{\alpha+\beta}$ t.s. $C_{\alpha}C_{\beta}$ dır.

2.Durum: $\alpha + \beta < 0$ olsun. Burada $0 < \beta < 1$ ve Teorem 3.5 ve Teorem 3.6 dan $C_{\alpha}^{-1}C_{\beta}^{-1}\ C_{\alpha+\beta}$ t.s. $C_{\alpha}^{-1}C_{-\beta}C_{\alpha+\beta}$ dır. B(i) den $C_{-\beta}C_{\alpha+\beta}$ t.s. $C_{-\beta+\alpha+\beta} = C_{\alpha}$ dır. Böylece Teorem 3.5 den $C_{\alpha}^{-1}C_{\beta}^{-1}\ C_{\alpha+\beta}$ t.s. $C_{\alpha}^{-1}C_{\alpha} = I$ dır. I total regülerdir. Böylece Teorem 3.2 den $C_{\alpha}^{-1}C_{\beta}^{-1}\ C_{\alpha+\beta}$ total regülerdir.

3.1. Hipergeometrik Metodun Γ_{a}^{γ} Metoduyla Karşılaştırılması

Hipergeometrik metodu tanımlayan dizi $(H, \alpha, \beta, \gamma)$ ile gösterilsin. Basu [3] de belirtildiği gibi bu metot Cesa'ro metoduna denkliği ile ifade edildiğinde yani $(H, \alpha, \beta, \gamma) = C_{\alpha-1}^{-1}C_{\beta-1}^{-1}\ C_{\gamma-1}$ olduğunda daha uygulanabilir olur.

Teorem 3.1.1. $0 < \alpha, \beta \leqq 1$, $\beta < 1 + \gamma \leqq 1$ veya $\alpha < 1 + \gamma \leqq 1$ için

$(H, \alpha, \beta, \gamma + 1)$ t.s. Γ_{b}^{γ} , $b > 1$ dir [9].

İspat: $H = C_{\alpha-1}^{-1}C_{\beta-1}^{-1}\ C_{\gamma}\Gamma_{a}^{-\gamma}$ olsun. $\beta \leqq 1 + \gamma$, C_{γ} t.s. $C_{\beta-1}$ olduğu için $C_{\gamma}C_{\beta-1}^{-1}$ total regülerdir. Fakat $C_{\alpha-1}^{-1}$ ve $\Gamma_{b}^{-\gamma}$ da yine total regülerdir. Bu yüzden H total regülerdir. Yukarıdaki ifadeden α ve β nın rollerinin değiştirilebilir olduğu açıktır.

Teorem 3.1.2. $\alpha, \beta, b > 1$, $0 \leqq \gamma \leqq \alpha - 1$ veya $0 \leqq \gamma \leqq \beta - 1$ için

Γ_{b}^{γ} t.s. $(H, \alpha, \beta, \gamma + 1)$ dır [9].

İspat: $H = C_{\alpha-1}\ C_{\beta-1}C_{\gamma}^{-1}\ C_{\gamma}\Gamma_{b}^{\gamma}$ olsun. $\alpha - 1 \geqq \gamma$ dan dolayı $C_{\alpha-1}C_{\gamma}^{-1}$ total regülerdir. Böylece Γ_{b}^{γ} ve $C_{\beta-1}$ de öyledir. Bu yüzden H total regülerdir. Daha önceki gibi α ve β nın rolleri değiştirilebilirdir.

Teorem 3.1.3. $0 \leqq \alpha, \beta, \gamma < 1$, $\alpha \leqq 1 - \gamma \leqq a < 1$ için $(H, \alpha, \beta, \gamma + 1)$ t.s. Γ_{a}^{γ} dır [9].

İspat: $H = C_{\alpha-1}^{-1}C_{\beta-1}^{-1}\ C_{\gamma}\Gamma_{a}^{-\gamma} = C_{\alpha-1}^{-1}C_{\beta-1}^{-1}\ C_{\gamma}\Gamma_{a}^{-\gamma}C_{-\gamma}^{-1}\ C_{-\gamma}$ olsun.R(i) den $\Gamma_{a}^{-\gamma}$ t.s. $C_{-\alpha}$ dır. Teorem 3.4 den $C_{-\gamma}^{-1}$ t.s. Γ_{a}^{γ} yani $C_{-\gamma}^{-1}\Gamma_{a}^{-1}$ total regülerdir. $1 - \gamma \geqq \alpha$

olduğundan dolayı $C_{-\gamma}C_{\alpha-1}^{-1}$ total regülerdir. C_γ ve $C_{\beta-1}^{-1}$ de öyledir. Buradan H total regülerdir.

Aşırı uzun hesaplamalarda $0 \leqq \alpha,\beta,\gamma < 1$, $\alpha \geqq \gamma,\beta$ için $(H,\alpha,\beta,\gamma+1)$ t.s. Γ_a^γ olduğu gösterilebilir.

Basu [3] de $\alpha,\beta \geqq 1$, $\gamma > -1$ için C_γ t.s. $(H,\alpha,\beta,\gamma+1)$ ve $0 < \alpha\,,\beta \leqq 1$, $\gamma \geqq 1$ için $(H,\alpha,\beta,\gamma+1)$ t.s. C_γ olduğunu göstermiştir. Teorem 3.6 , Teorem 3.1.1 – Teorem 3.1.3 ile Sonuç 3.1 – Sonuç 3.3 ve R(i) – R(iii) buradaki sonuçları birleştirerek aşağıdaki tabloya ulaşabiliriz. “t.s.” notasyonu yerine güçlüden zayıfa işaret eden bir ok yerini almıştır.

$0 < a, a' < 1$, $b \geqq 1$, $0 < \alpha_1,\beta_1 \leqq 1$, $\alpha_2,\beta_2 \geqq 1$ olsun.

$-1 < \gamma \leqq 0$ için

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(H,\alpha_1,\beta_1,\gamma+1) \arrow[r, "(1)"] & \Gamma_b^\gamma \arrow[r] & H_\gamma \arrow[r] & C_{-\gamma}^{-1} \arrow[r, "(2)"] & \Gamma_{a'}^\gamma \arrow[r, "(2)"] & C_\gamma \arrow[r, "(3)"] \arrow[dr] & \Gamma_a^\gamma \\
 & & & & & & (H,\alpha_1,\beta_1,\gamma+1)
\end{tikzcd}$$

dır. $0 \leqq \gamma < 1$ için

$$(H,\alpha_1,\beta_1,\gamma+1) \xrightarrow{(4)} \Gamma_a^\gamma \xrightarrow{(3)} C_\gamma \to H_\gamma \to \Gamma_b^\gamma \xrightarrow{(7)} (H,\alpha_2,\beta_2,\gamma+1)$$

$$\Gamma_a^\gamma \xrightarrow{(5)} C_{-\gamma}^{-1} \xrightarrow{(6)} \Gamma_{a'}^\gamma \xrightarrow{(6)} C_\gamma$$

dır.

$\gamma > 1$ için

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (H,\alpha_1,\beta_1,\gamma+1) \arrow[dr] & & & \\
\Gamma_a^\gamma \arrow[r] & H_\gamma \arrow[r] & C_\gamma \arrow[r, "(8)"] & \Gamma_b^\gamma \arrow[r, "(7)"] & (H,\alpha_2,\beta_2,\gamma+1)
\end{tikzcd}$$

dır. Yukarıdaki tabloda

$(1)\beta_1 \leqq 1+\gamma \leqq 1$ veya $\alpha_1 \leqq 1+\gamma \leqq 1$

(2) $0 < 1 + \gamma \leqq \alpha < 1$

(3) $0 < \alpha \leqq 1 + \gamma/2 < 1$

(4) $\alpha_1 \leqq 1 - \gamma \leqq \alpha < 1$

(5) $0 < \gamma \leqq 1 - 2\alpha < 1$

(6) $0 < 1 - \alpha' \leqq \gamma < 1$

(7) $0 \leqq \gamma \leqq \alpha_2 - 1$ veya $0 \leqq \gamma \leqq \beta_2 - 1$

(8) $2b \geqq \gamma + 1$

dır.

Hipergeometrik metodların tartışmasını aşağıdaki 4 negatif sonuçla bitirelim.

Teorem 3.1.4. $-1 < \gamma \leqq 0$, $\alpha, \beta < 1$, $c > 0$ için Γ_c^γ n.t.s. $(H, \alpha, \beta, \gamma + 1)$ dır [9].

İspat: Farz edelim ki $C_{\alpha-1}\, C_{\beta-1} C_\gamma^{-1}\, C_\gamma \Gamma_c^\gamma$ olsun.

$$\delta_n = \frac{\Gamma_{(n+1)}\Gamma_{(\alpha)}}{\Gamma_{(n+\alpha)}}\,, \qquad \lambda_n = \frac{\Gamma_{(n+1)}\Gamma_{(\beta)}}{\Gamma_{(n+\beta)}}\,, \qquad v_n = \frac{\Gamma_{(n+\gamma+1)}}{\Gamma_{(n+1)}\Gamma_{(\gamma+1)}} . \frac{c^\gamma}{(n+c)^\gamma}$$

olmak üzere $\mu_n = \delta_n \lambda_n v_n$ dir.

H_μ nın konservatif olması için gerek yeter şart μ nın yakınsak dizi olmasıdır. Γ_c^γ ve C_γ bütün $\gamma > -1$ için denk olduğundan γ sıfırdan farklı bir sayıya yakınsak bir dizidir. $v = \min v_n$ olsun. δ_n, λ_n pozitif olduğundan $\mu_n \geqq \delta_n \lambda_n v$ dir. $\alpha, \beta < 1$ için $\delta_n \to \infty$ ve $\lambda_n \to \infty$ dır. Buradan μ yakınsak dizi değildir ve H_μ konservatif değildir. O halde total regüler değildir.

Teorem 3.1.5. $\gamma > 0$, $\alpha, \beta > 1$, $b > 1$ için $(H, \alpha, \beta, \gamma + 1)$ n.t.s Γ_b^γ dır [9].

İspat: $H_\mu{}^{-1} = C_{\alpha-1}^{-1} C_{\beta-1}^{-1}\, C_\gamma \Gamma_b^{-\gamma}$ olsun. δ_n, λ_n, v_n ler c=b için Teorem 3.1.4 deki gibi tanımlanmak üzere

${\mu_n}^{-1} = {\delta_n}^{-1}{\lambda_n}^{-1}{v_n}^{-1}$ dır. Az önceki gibi v^{-1} dizisi sıfırdan farklı bir sayıya yakınsaktır. $v^{-1} = \min {v_n}^{-1}$ olsun. Buradan ${\mu_n}^{-1} \geqq {\delta_n}^{-1}{\lambda_n}^{-1}{v_n}^{-1}$ dır. $\alpha, \beta > 1$ olduğundan ${\delta_n}^{-1} \to \infty$ ve ${\lambda_n}^{-1} \to \infty$ dır. Böylece μ^{-1} yakınsak dizi değildir.

Teorem 3.1.6. $\gamma \geqq 0$, $0 < \alpha, \beta \leqq 1$, $c > 0$ için Γ_c^γ n.t.s. $(H, \alpha, \beta, \gamma + 1)$ dır [9].

İspat: δ_n, λ_n, v_n ler Teorem 3.4 de tanımlanmak üzere $\mu_n = \delta_n \lambda_n v_n$olsun. Yine $v = \min v_n$ olmak üzere $v > 0$ olsun. Bu yüzden $\mu_n \geqq \delta_n \lambda_n v$ dir. Fakat $\alpha, \beta < 1$ olduğundan $\delta_n \to \infty$ ve $\lambda_n \to \infty$ dır. Bu yüzden μ yakınsak dizi değildir.

Teorem 3.1.7. $\gamma \geqq 1$, $0 < \alpha, \beta \leqq 1$ için H_γ n.t.s. $(H, \alpha, \beta, \gamma + 1)$ dır [9].

İspat: Farz edelim ki H_γ t.s. $(H, \alpha, \beta, \gamma + 1)$ olsun. R(iii) den $0 < \alpha < 1$ için Γ_a^γ t.s. H_γ dır. Bu yüzden Teorem 3.1.6 ile çelişen Γ_a^γ t.s. $(H, \alpha, \beta, \gamma + 1)$ elde edilir.

Teorem 3.1.7, Teorem 3.1.4 ün ispatında kullanılan metoda benzer teknik kullanılarak da ispatlanır.

Aşağıdakiler bazı açık sorulardır.

(i) $-1 < \gamma \leqq 0$, $0 < \alpha_1, \beta_1 \leqq 1$, $b > 1$, $\beta_1 > 1 + \gamma$ ve $\alpha_1 > 1 + \gamma$ için $(H, \alpha_1, \beta_1, \gamma + 1)$ t.s. Γ_b^γ ?

(ii) $0 < \gamma < 1$, $0 < \alpha_1, \beta_1 \leqq 1$, $0 < a < 1$, $a < \beta_1$ veya $a < \gamma$ için

$(H, \alpha_1, \beta_1, \gamma + 1)$ t.s. Γ_a^γ ?

$\gamma > 1$,$0 < a < 1$,$0 < \alpha_1, \beta_1 \leqq 1$ için

(iii) $(H, \alpha_1, \beta_1, \gamma + 1)$ t.s. Γ_a^γ ?

(iv) $(H, \alpha_1, \beta_1, \gamma + 1)$ t.s. H_γ ?

3.2. Üç Hausdorff Metodu ve C_1 Metodu Arasında Total Karşılaştırma

Bu bölüm boyunca c keyfi olmak üzere a,b,c reel sayıları $0 < a < 1$, $b > 1$ olacak şekilde pozitif sabitler olsun.

[5] deki Teorem 5'i ifade etmek veya [3] deki (iii) ve (iv) ü birleştirmek Γ_a^1 t.s. C_1 t.s. Γ_b^1 sonucunu verir.

G ve W dan üç Hausdorff metodu;

$$\alpha_1(t,k,c) = \frac{1-\alpha(t,k,c)}{c_1 t} \,, \alpha(t,k,c) = c^k(t+c)^{-k}$$

olmak üzere

$$\alpha_2(t,r) = \frac{1-r^t}{t\log\frac{1}{r}} = \int_0^1 u^t d\emptyset_2(u) \quad , \qquad 0 < r < 1\,,$$

$$\emptyset_2(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq u \leqq r, \\ 1 - \dfrac{\log u}{\log r}, & r < u \leqq 1, \end{cases}$$

ve

$$\alpha_3(t,r) = \frac{1-r^{t+1}}{(t+1)(1-r)} = \int_0^1 u^t d\emptyset_2(u) \quad , \qquad 0 < r < 1,$$

$$\emptyset_3(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq u \leqq r, \\ \dfrac{u-r}{1-r}, & r < u \leqq 1, \end{cases}$$

$k = 1,2,3, \dots, c > 0\,, c_1\; sabit\; say\imath\; ve\; \alpha_1(0,k,c) = 1$

$H \backsim \alpha_1(t,k,c)\,, H \backsim \alpha_2(t,r)$ ve $H \backsim \alpha_3(t,r)$ şeklinde ifade edilir.

İlk olarak $\alpha_1(t,k,c)$ ifadesini ele alarak ${c_1}^{-1}\sum_{r=1}^{k} c^{r-1}(t+c)^{-r}$ yazılabileceği gösterilir. Bu nedenle $c_1 = k/c$ dır.

$\alpha_1(0,k,c) = 1$ ve pozitif katsayılı total regüler metodların sonlu toplamı olduğundan ve $\alpha_1(t,k,c) = k^{-1}\sum_{r=1}^{k} c^r(t+c)^{-r}$ olduğundan $H \backsim \alpha_1(t,k,c)$ total regülerdir.

Teorem 3.2.1. $k = 1,2$ ... için $H \backsim \alpha_1(t,k,c)$ t.s. Γ_c^1 dır [9].

İspat: C_1 ve $H \backsim \alpha(t,\alpha,c)$ için G veW tarafından adi denklik oluşturulduğundan ve C_1 ve Γ_c^1 denk olduklarından moment üreteç dizisinin total monoton veya total monoton dizilerin sonlu çarpımı olduğunu göstererek burada ifade edilen pozitif sonuçlar gibi Teorem 3.2.1 ispatlanır.

Sonuç 3.2.1. $H \backsim \alpha_1(t,k,a)$ t.s. C_1 dır [9].

Bu sonuç teorem 3.2.1 de c=a alınarak ve Γ_a^1 t.s. C_1 t.s. Γ_b^1 den ispatlanır.

Teorem 3.2.2.

(i) $(C,1) = \big(H,\alpha_1(t,k,c)\big)\,, k = 1,2,3,\dots$ dır.

(ii) C_1 n.t.s. $H \backsim \alpha_1(t,k,b)\,, k = 1,2,3,\dots$ dır.

(iii) $H \backsim \alpha_1(t,k,b)$ n.t.s. $C_1\,, k = 1,2,3,\dots$ dır.

(iv) C_1 t.s. $H \backsim \alpha_1(t,1,b)$ dır [9].

i) kısmı G ve W tarafından oluşturulmuştur. Teorem 3.2.2 nin (ii) kısmı ve bu bölümün negatif sonuçlarının çoğu üreteç moment fonksiyonunun total monoton olmadığı gösterilerek ispatlanır. Bir moment üreteç fonksiyonu $f(n) = \mu(n)$ olacak şekilde μ moment dizisiyle uyuşan değerleri nonnegatif tam sayılar olan sürekli diferensiyellenebilir $f(t)$ fonksiyonudur. $\mu = (\mu_n)$ dizisi total monotondur $\Leftrightarrow$ $t > 0\,, n = 0,1,2,\dots$ ve $f(0+) \leqq f(0)$ için $(-1)^n f^n(t) \geqq 0$ dır.

$\mu_1(t) = t+1\,, \mu_2(t) = \alpha_1(t,k,b) = k^{-1}\sum_{r=1}^{k}[b/(t+b)]^r$ için

$\mu(t) = \alpha_1(t,k,b).(t+1) = \mu_1(t).\mu_2(t)$ olsun. $\mu_1'(t) = 1\,, \mu_1^{(\mathrm{n})}(t) = 0\,, n > 1$ dır.

$\mu_2^{(\mathrm{n})}(t) = (-1)^n k^{-1}\sum_{r=1}^{k} r(r+1)\cdots(r+n-1)b^r(t+b)^{-r-n}\,, n = 1,2,3,\cdots$dır.

$\mu^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}D_t^{n-j}[\mu_1(t)].D_t^{j}[\mu_2(t)] = \sum_{j=n-1}^{n}\binom{n}{j}\mu_1^{(\mathrm{n-j})}(t).\mu_2^{(\mathrm{j})}(t)$ dır.

$$\mu^{(n)}(t) = \frac{n(-1)^{n-1}}{k} \sum_{r=1}^{k} \frac{r(r+1)\cdots(r+n-2)b^r}{(t+b)^{r+n-1}}$$

$$+ \frac{(-1)^n(t+1)}{k} \sum_{r=1}^{k} \frac{r(r+1)\cdots(r+n-1)b^r}{(t+b)^{r+n}}.$$

$$(-1)^n \mu^{(n)}(t) = \frac{1}{k} \sum_{r=1}^{k} \frac{r(r+1)\cdots(r+n-2)b^r}{(t+b)^{r+n-1}} \left\{ \frac{(t+1)(r+n-1)}{(t+b)} - n \right\}.$$

$r = 1\,, f(t) < 0\,, t \geqq 0\,, n = 1,2,3,\cdots$ için

$$f(t) = (t+1)(r+n-1) - n(t+b) = (r-1)t + r - 1 + n(1+b)$$

olsun. $r > 1$ için $f(t) = (r-1)[t + 1 - (b-1)n/(r-1)]$ dır. $t = t_0$ sabit, yeteri derecede büyük n için $f(t_0) < 0$ dır. Bu yüzden $\mu(t)$ total monoton değildir.

(iii) ün ispatı:

$$f(t) = \frac{b^k}{(t+b)^k} \left\{ \frac{kt(t+1)}{t+b} + 1 \right\} - 1$$

$$= \frac{b^k}{(t+b)^{k+1}} (kt^2 + kt + t + b) - 1$$

olmak üzere

$$1/_{\mu(t)} = \frac{1}{t+1} . \frac{c_1 t}{1 - [b/(t+b)]^k} D_t(1/\mu(t))$$

$$= c_1 \left\{ \frac{(t+1)\left[1 - b^k/(t+b)^k\right] - t\left[1 - \left(\frac{b}{t+b}\right)^k + \frac{(t+1)kb^k}{(t+b)^{k+1}}\right]}{(t+1)^2\left[1 - b^k/(t+b)^k\right]^2} \right\}$$

$$(-1)D_t(1/\mu(t)) = \frac{c_1 f(t)}{(t+1)^2\left[1 - b^k/(t+b)^k\right]^2}$$

olsun. $k \geqq 2$ olduğundan $\lim_{t\to\infty} f(t) = -1$ dır. Bu yüzden $t > t_1$ için $f(t) < 0$ olacak şekilde bir $t_1 > 0$ vardır. Böylece $1/\mu(t)$ total monoton değildir.

(iv) ın ispatı: $H \backsim \alpha_1(t, 1, b) = \Gamma_b^1$ olduğu aşikardır.

Teorem 3.2.3. $H \backsim \alpha_2(t, r)$ $\mathrm{n.t.s.}\,\Gamma_c^1$ dır [9].

İspat: $\lambda(t) = (1 - r^t)(t + c)/t$ olmak üzere $\lambda(t)$ nın total monoton olmadığını göstermek yeterli olacaktır.

r^t yi $\left(e^{\ln r}\right)^t$ şeklinde yazarsak ve e^x fonksiyonunun sonsuz seri açılımını kullanarak

$$\lambda(t) = -\left(1 + \frac{c}{t}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(t\ln r)^k}{k!}$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(t\ln r)^k}{k!} - c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(t\ln r)^k t^{k-1}}{k!}$$

$$= -c\ln r - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(t\ln r)^k(k + 1 + c\ln r)}{(k+1)!}$$

denklemini elde ederiz.

Yeteri derecede küçük ve pozitif t için $\lambda^{(k)}(t)$ gösterimi t^k nın c_k katsayısı ile aynı olacaktır. $\lambda(t)$ için yukarıdaki ifadeden görüyoruz ki

$$c_k = \frac{(-1)^{k+1}(|\ln r|)^k}{(k+1)!}(k + 1 + c\ln r)$$

dır.

Bir $0 < r < 1$ şartını sağlayan her r için yeteri derecede büyük k ler için

$k + 1 + c\ln r > 0$ dır. Yeteri derecede büyük her k için ve yeteri derecede küçük t için c_k negatiftir. Bu nedenle $\lambda(t)$ total monoton değildir.

Sonuç 3.2.2. $H \backsim \alpha_2(t, r)$ $\mathrm{n.t.s.}\,\mathrm{C}_1$ dır [9].

İspat: $H \backsim \alpha_2(t,r)$ t.s. C_1 ise $H \backsim \alpha_2(t,r)$ t.s. Γ_b^1 olup bu Teorem 3.2.3 ile çeliştiğini gösterir.

Sonuç 3.2.3. $H \backsim \alpha_2(t,r)$ n.t.s. $H \backsim \alpha_1(t,k,c)$ dır [9].

İspat: $H \backsim \alpha_2(t,r)$ t.s. $H \backsim \alpha_1(t,k,c)$ ise Teorem 3.2.1 in Teorem 3.2.3 ile çeliştiğini kullanarak ispat yapılır.

Teorem 3.2.4. C_1 t.s. $H \backsim \alpha_2(t,r)$ olması mümkün değildir [9].

İspat: G ve W den $\big(H \backsim \alpha_2(t,r)\big) \supsetneq (C,1)$dır.

Teorem 3.2.5. $H \backsim \alpha_1(t,k,c)$ n.t.s. $H \backsim \alpha_2(t,r)$ dır [9].

$$\mu_n = \frac{1-\left(\frac{c}{n+c}\right)^k}{\frac{kn}{c}} \cdot \frac{n \ln \frac{1}{r}}{1-r^n} = \frac{c \ln \frac{1}{r}}{k} \left\{ \frac{1-\left(\frac{c}{n+c}\right)^k}{1-r^n} \right\}$$

olsun.

$\lim_{n\to 0} \mu_n = 1$ ve $\lim_{n\to\infty} \mu_n = (-c \ln r)/k$ olduğundan dolayı μ , $-c \ln r < k$ olmadıkça total monoton olamaz. $\mu_n < (-c \ln r)/k$ olacak şekilde pozitif bir n tamsayısının var olduğunu göstermek yeterlidir. Yani, $1-\left(\frac{c}{n+c}\right)^k < 1-r^n$, $r^n(n+c)^k < c_k$ dır. Fakat her k için c_k süreklidir ve $n \to \infty$ için $r^n(n+c)^k \to 0$ dır. Bu yüzden yeteri derecede büyük n için $\mu_n < (-c \ln r)/k$ ve μ total monoton değildir.

Sonuç 3.2.4. Γ_c^1 n.t.s. $H \backsim \alpha_2(t,r)$ dır [9].

Γ_c^1 n.t.s. $H \backsim \alpha_2(t,r)$ ise Teorem 3.2.1 i kullanmak Teorem 3.2.5 de çelişkiye sebep olur.

Teorem 3.2.6. C_1 t.s. $H \backsim \alpha_3(t,r)$ dır [9].

$\mu(t) = (t+1)^{-1}$ ve $(1-r)(t+1)/(1-r^{t+1}) = (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^{(t+1)k}$ olsun. $t \geqq 0$ için $\mu(t)$ nin diferensiyellenebilen serisi düzgün ve mutlak yakınsaktır. Terim terim türev alarak

$$\mu^{(n)}(t) = (-1)^n(1-r)|\ln r|^n \sum_{k=0}^{\infty} k^n r^{(t+1)k}$$

elde ederiz. $\mu(0+) = \mu(0)$ olduğu için $\mu(t)$ total monotondur.

Sonuç 3.2.5. $k = 2,3,\cdots$ için $H \backsim \alpha_3(t,r)$ n.t.s. $H \backsim \alpha_1(t,k,c)$ dır [9].

$H \backsim \alpha_3(t,r)$ t.s. $H \backsim \alpha_1(t,k,c)$ ise buradan Teorem 3.2.6. yı kullanmak Teorem 3.2.2 nin (ii). kısmı ve Sonuç 3.2.1 de çelişkiye neden olur. $k = 1$ durumu için Teorem 3.2.8 e başvurulabilir.

Sonuç 3.2.6. $H \backsim \alpha_3(t,r)$ n.t.s. $H \backsim \alpha_2(t,r)$ dır [9].

$H \backsim \alpha_3(t,r)$ n.t.s. $H \backsim \alpha_2(t,r)$ ise buradan Teorem3.2.6 yı kullanarak Teorem 3.2.4 için çelişki oluşturur.

Teorem 3.2.7. $r_1 \neq r_2$ olsun.

(i) $H \backsim \alpha_3(t,r_1)$ n.t.s. $H \backsim \alpha_3(t,r_2)$

(ii) $H \backsim \alpha_3(t,r_2)$ n.t.s. $H \backsim \alpha_3(t,r_2)$ dır [9].

İspat i) $\mu(t) = \alpha_3(t,r_1)/\alpha_3(t,r_2)$ olsun. Bu yüzden

$$\mu(t) = \frac{(1-r_2)(1-{r_1}^{t+1})}{(1-r_1)(1-{r_2}^{t+1})}$$

dır. $\lim_{t\to\infty} \mu(t) = (1-r_2)/(1-r_1)$ olduğu için $1-r_2 < 1-r_1$ yani $r_1 < r_2$ dır. $\mu(t)$ total monotondur $\Leftrightarrow$

$$(-1)\mu'(t) = \frac{(1-r_2)}{(1-r_1)(1-{r_2}^{t+1})^2}[{r_1}^{t+1}(1-{r_2}^{t+1})\ln r_1 - {r_2}^{t+1}(1-{r_1}^{t+1})\ln r_2]$$

dır. $r_1 < r_2$ olduğundan $t > -1$ için ${r_1}^{t+1} < {r_2}^{t+1}$ dır. Bu yüzden

$1 - r_1{}^{t+1} > 1 - r_2{}^{t+1}$ dır. Ayrıca $\ln r_1 < \ln r_2$ dır. Bu yüzden $t \geqq 0$ için $(-1)\mu'(t) < 0$ dır. Bu yüzden $\mu(t)$ total monoton değildir.

ii) r_1 ve r_2 ye göre $\mu(t)$ nin simetrik olmasından dolayı $1/\mu(t)$ total monoton değildir.

Teorem 3.2.8. (i) Γ_b^1 n. t. s. $H \backsim \alpha_3(t, r)$ dır.

(ii) $H \backsim \alpha_3(t, r)$ n. t. s. Γ_b^1 dır [9].

İspat (i): $\mu_n = b(n+1)\,(1-r)/(n+b)(1-r^{n+1})$ olsun.

$\mu_0 = 1$ ve $\mu_n \longrightarrow b(1-r)$ dır. $b(1-r) \geqq 1$ ise μ total monoton değildir.

$b(1-r) < 1$ olduğunu farz edelim. $\mu_n < b(1-r)$ olacak şekilde bir $n \geqq 0$ sayısı varsa μ total monoton değildir. $\mu_n \geqq b(1-r)$ olduğunu farz edelim. Bu yüzden

$$\frac{b(n+1)(1-r)}{(n+b)(1-r^{n+1})} \geqq b(1-r)$$

olup $n + 1 \geqq (n+b)(1-r^{n+1}) = n + b - (n+b)r^{n+1}$ yani

$(n+b)r^{n+1} \geqq b - 1$ dır. Fakat $b - 1 > 0$ ve $(n+b)r^{n+1} \longrightarrow 0$ dır. Bu yüzden yeteri derecede büyük n ler için $(n+b)r^{n+1} < b - 1$ dır. Bu yüzden μ total monoton değildir.

(ii) yi ispatlamak için Teorem 3.2.3 ün ispatındaki yöntem kullanılır.

Teorem 3.2.9. $1 \leqq k \leqq 4$ için $H \backsim \alpha_1(t, k+1, c)$ t.s. $H \backsim \alpha_1(t, k, c)$ dır [9].

İspat: t/c ortak terimleri ihmal ederek ve $k = 1$ için çarpımın değeri 1 alınarak $(t/c+1)^k - 1$ çarpan formunda yazılmak üzere

$$\begin{aligned}\mu_k(t) = \frac{\alpha_1(t, k+1, c)}{\alpha_1(t, k, c)} &= \frac{(k+1)^{-1}[1 - c^{k+1}(t+c)^{-k-1}]}{(k^{-1})[1 - c^k(t+c)^{-k}]} \\ &= \frac{k}{(k+1)}\left\{\frac{1}{t/c+1}\right\}\left\{\frac{(t/c+1)^{k+1} - 1}{(t/c+1)^k - 1}\right\}\end{aligned}$$

$$= \frac{k}{(k+1)}\left\{1 + \frac{t/c}{(t/c+1)[(t/c+1)^k - 1]}\right\},$$

$$= \frac{k}{(k+1)}\left\{1 + \frac{1}{(t/c+1)\prod_{p=1}^{k-1}[(t/c) + 2(\sin(p\pi/k))^2 - i\sin(2\,p\pi/k)]}\right\} \quad (3.1)$$

olsun. Buradan

$\mu_1(t) = (1/2)[1 + (t/c+1)^{-1}]$, $\mu_2(t) = (2/3)[1 + (t/c+1)^{-1}(t/c+2)^{-1}]$ dır ve ikiside total regülerdir. (3.1) deki köşeli parantez içindeki sayı $1 + \delta_k(t)$ ile gösterilsin. $\delta_k(t) > 0$ olduğundan $k > 2$ için $\mu_k(t)$ nin total regüler olduğunu göstermek için gerek ve yeter şart $\delta_k(t)$ nın total monoton olduğunu göstermektir.

$\alpha_p = 2(\sin(p\pi/k))^2 - i\sin(2\,p\pi/k)$, $1 \leqq p \leqq k-1$ olmak üzere

$\gamma_0(t) = (t/c+1)^{-1}$, $\gamma_p(t) = \left(t/c + \alpha_p\right)^{-1}$olsun. $1 \leqq p \leqq k-1$ olmak üzere $t/c + \alpha_p$ ve $t/c + \alpha_{k-p}$ karmaşık eşleniklerdir. Uygunluk için p yi $p > k/2$ ye kısıtlansın. Bu yüzden

$\gamma_0{}^{(n)}(t) = (-1)^n n!\, c^{-n}(t/c+1)^{-n-1}$ ve $n = 0,1,2\cdots$ için

$$\gamma_p{}^{(n)}(t) = (-1)^n n!\, c^{-n}\left(t/c + \alpha_p\right)^{-n-1}$$

dır. Leibnitz formülünü ve De Moivre teoremini ve her reel θ için

$\sum_{j=0}^{n} \sin(n-2j)\theta \equiv 0$ eşitliğini kullanarak $n = 0,1,2\cdots$ için $\theta = arg\left(t/c + \alpha_p\right)$, $k/2 \leqq p \leqq k-1$ olmak üzere

$$D_t^n\left[\gamma_p{}^{(t)}\gamma_{k-p}{}^{(t)}\right] = \frac{(-1)^n n! \sum_{j=0}^{n}\cos(n-2j)\theta}{c^n\left|t/c + \alpha_p\right|^{n+2}} \quad , \qquad (3.2)$$

dır.

$\theta \neq m\pi$ için $\sum_{j=0}^{n}\cos(n-2j)\theta = \sin(n+1)\theta/\sin\theta$ ve $\theta = m\pi$ için bu toplam $(-1)^{nm}(n+1)$ e eşittir.

$$f(n,t,\theta) = \left[\sum_{j=0}^{n} (t/c+1)^j \left|t/c+\alpha_p\right|^{-j} 2\sin h\, i(j+1)\theta\right] \Big/ 2i\sin\theta$$

olmak üzere

$$D_t^n\left[\gamma_0(t)\gamma_p(t)\gamma_{k-p}(t)\right] = \frac{(-1)^n n!\, f(n,t,\theta)}{c^n (t/c+1)^{n+1}\left|t/c+\alpha_p\right|^{n+2}}$$

dır. Ayrıntılı hesaplamalarda $k \leqq 4$ şartıyla $t > 0\,, n = 1,2,3,\cdots$ için $f(n,t,\theta)$ nin pozitif olduğu gösterilebilir. $\delta_3(0+) = \delta_3(0)$ olduğu için $\delta_3(t)$ total monotondur.

$\delta_4(t) = \gamma_2(t)[\gamma_0(t)\gamma_1(t)\gamma_3(t)]$ dır. Köşeli parantezdeki ifadeler total monoton olan $\gamma_2(t) = (t/c+2)^{-1}$ olduğundan $\delta_4(t)$ total monotondur.

Bu teknikle $k > 4$ için Teorem 3.2.9 un bir ispatına başlamak için tek umudumuz $\gamma_1(t)\gamma_2(t)\gamma_3(t)\gamma_4(t)$ nın total monoton olduğunu ya da genel olarak $\prod_{p=k-2}^{k-1} \gamma_p(t)\gamma_{k-p}(t)$ nın total monoton olduğunu göstermeyi denemekte yatıyor. Aksi takdirde k için her yeni asal sayı bir karışıklık, engelleyici bir hesaplama çıkarır ve hiçbir çeşit tümevarımsal formül meydana getirmez. $\prod_{p=3}^{4} \gamma_p(t)\gamma_{5-p}(t)$ nin total monoton olmadığı gösterilebilir.

Teorem 3.2.10. $c_2 > c_1 > 0\,, k = 1,2$ için $H \backsim \alpha_1(t,k,c_1)$ t.s. $H \backsim \alpha_1(t,k,c_1)$ dır [9].

$k = 1$ için bu teorem Γ_a^1 t.s. C_1 t.s. Γ_b^1 in özel durumudur.

$k = 2$ için basit bir diferensiyelleme $f(t) = \alpha_1(t,k,c_1)/\alpha_1(t,k,c_2)$ nın total monoton olduğunu gösterir.

$k > 2$ ise yukarıdaki diferensiyelleme çok karışık olacaktır. Ancak varsayımlara göre Teorem 3.2.10 $k \geqq 3$ için ve Teorem 3.2.9, $k \geqq 5$ için doğrudur.

Aşağıdakiler bazı açık sorulardır.

$H \backsim \alpha_2(t,r)$ t.s. $H \backsim \alpha_3(t,r)$?

$H \backsim \alpha_1(t,k,b)$ t.s. $H \backsim \alpha_3(t,r)$?

Teorem 3.2.6 ve Sonuç 3.2.1 den $H \backsim \alpha_1(t,k,a)$ t.s. $H \backsim \alpha_3(t/r)$ olduğu açıktır.

3.3. Bazı Denk Metotlar

Teorem 3.3.1. a^{-1} ve b^{-1} negatif olmayan tam sayılar olacak şekilde a ve b sıfırdan birbirinden farklı karmaşık sayılar olmak üzere $\mu_k = (ak+1)/(bk+1)$ olsun. Bu durumda $(H_\mu) = (I) \Leftrightarrow Re(a) > 0$ ve $Re(b) > 0$ dır.

Teorem, [11] Hille'de verildiğinden bu yüzden ispatı yapılmamıştır.

Teorem 3.3.2. $\alpha \in R\,, Re(a) > 0$ olsun. Buradan $(\Gamma_a^\alpha) = (H^\alpha)$ dır [9].

Pozitif ve negatif α nın simetrisinden dolayı sadece $\alpha \geqq 0$ olduğunu düşünmemiz gerekir. Üreteç dizisi $\{1\}$ olduğundan $\alpha = 0$ için ispat açıktır. Bir α reel sayısı için sonuç [8] verilmiştir.

$b = a^{-1}$ olsun. $\lambda_k = (bk+1)/(k+1)$ olmak üzere $(H_\lambda^\alpha) = (I)$ olduğunu göstermemiz gerekir. α tamsayısı için ispat açıktır. Çünkü Teorem 3.3.1 den

$(H_\lambda) = (I)$ ve böyle matrislerin sonlu çarpımı (I) e denk bir matris olup $\lambda_k^\alpha/\lambda_k^{\alpha+1} = (k+1)/(bk+1)$ olduğundan ve [8] deki ispatı kullanarak $0 < \alpha < 1$ kabul edebiliriz.

$C = \{z|\,|z| \leqq 1\}$ ve $f(z) = (b + (1-b)z)^\alpha$ olsun. Bu yüzden $f(1) = 1$ ve $z_0 = b/(b-1)$ noktası dışında $f(z), C$ de analitik olacak şekilde tanımlanabilir. f in C de hiç sıfırı yok çünkü $|z_0| > 1$. $1/f(z)$ fonksiyonu analitik ve C de hiç sıfırı yoktur. [12] dan $(H_\lambda^\alpha) = (I)$ dır.

Sonuç 3.3.1. Her $\alpha > -1$ için $(\Gamma_a^\alpha) = (C^\alpha)$ dır [9].

İspat: Her $\alpha > -1$ için $(C^\alpha) = (H^\alpha)$ dır.

Sonuç 3.3.2. $Re(a) > 0$ ve $Re(b) > 0\,, \mu_k = (ak+1)/(bk+1)$ olsun. Bu yüzden her reel α için $(H_\mu^\alpha) = (I)$ dır [9].

İspat: μ_k^α nın simetrisinden sadece $\alpha > 0$ olduğunu düşünmek gerekeceği açıktır.

$$\mu_k^\alpha = \frac{(ak+1)^\alpha}{(k+1)^\alpha} \cdot \frac{(k+1)^\alpha}{(bk+1)^\alpha}$$

olup sağdaki her ifade Teorem 3.3.2 den I ya denktir.

Sonuç 3.3.3. Her $\alpha \geqq 0$, $Re(a) > 0$ için Γ_a^α regülerdir [9].

İspat: $a = 1 , b = a^{-1}$ için Sonuç 3.3.2 deki $H_\mu$kullanılırsa $\Gamma_a^\alpha = H_\mu^\alpha . H_\mu$ ve bunun sonucu olarak iki regüler Hausdorff matrisinin çarpımı regüler sonucu elde edilir.

Teorem3.3.3. $\alpha \geqq 0$, $Re(a) > 0$, $Re(c) > 0$ ve $d = a^\alpha + b$ olmak üzere

$$\mu_k(\alpha) = [(k+a)^\alpha + b]/d(ck+1)^\alpha$$

olsun. $[Re(a)]^\alpha > |b|$ ise buradan $(H_\mu) = (I)$ dır. Eğer a pozitif bir tamsayı ise bu yüzden $0 \leq r < a$ için $Re(a) > |b|^{1/\alpha}$ $max|\cos[(\theta + 2\pi r)/\alpha]|$, $\theta = \arg(-b)$ olması $(H_\mu) = (I)$ olmasını gerektirir. Bu da en iyi yoldur [9].

İspat: $a = 0$ için $\mu_k(0) \equiv 1$ dır. $a > 0$ olduğunu kabul edelim. Buradan $\beta_k(\alpha) = a^\alpha[(k+a)^\alpha + b]/d(k+a)^\alpha$ ve $\gamma_k = (k+a)/a(ck+1)$ olmak üzere $\mu_k(\alpha) = \beta_k(\alpha)\gamma_k^\alpha$ dır.

$\lambda_k = a/(k+a)$ olmak üzere Sonuç 3.3.2 den $(H_\gamma^\alpha) = (I)$ ve $H_\beta = d^{-1}[a^\alpha I + bH_\gamma^\alpha]$ dır. Sonuç 3.3.3 den her pozitif α için H_λ^α regüler olduğundan H_β regülerdir. Çünkü $a^\alpha + b = d$ dır.

Geriye H_β^{-1} in regüler olduğunu ispatlamak kaldı. Bunu yapmak için [13] ye ve ifadesine başvurmak gerekir.

PITT TEOREMİ: $\phi(t)$ fonksiyonu [0,1] aralığı üzerinde sınırlı salınımlı olmak üzere $T \sim \emptyset(t)$ olsun [11]. Bu durumda $|T(z)| \geqq d > 0 , Re(z) < 0$ olması $T^{-1}(z)$ nin Mellin transformasyonu olması gerektirir ve böylece T , I ya denktir.

$\mu_n = \int_0^1 t^n d\emptyset(t)$ kütle fonksiyonu olmak üzere $\emptyset(t)$ ile birleştirilen bir regüler Hausdorff metodunu göstermek için $T \sim \emptyset(t)$ kullanılır.

$\emptyset(t)$ nın Mellin dönüşümleri $T(z) = \int_0^1 t^z d\emptyset(t)$ ile tanımlanır. Böylece $\mu_n = T(n)$ ve $T(z)$, T nın moment fonksiyonu olarak tanımlanır [14].

[0,1] aralığı üzerindeki regüler sınırlı salınımlı bazı $\emptyset(t)$ ler için

$$\beta_\alpha(z) = \frac{[a^\alpha(z+a)^\alpha + b]}{d(z+a)^\alpha} = \int_0^1 t^z d\emptyset(t) \quad , \qquad (Re(z) \geqq 0)$$

olsun. Ayrıca $T(z) = \beta_\alpha(z)$,

$$|T(z)| = \left|\frac{a^\alpha}{d}\left\{1 + \frac{b}{(z+a)^\alpha}\right\}\right| \geqq |a^\alpha d^{-1}|.\left|1 - |b/(z+a)^\alpha|\right|$$

dır. Fakat $z = x + iy$, $a = a_1 + ib_1$ ve $|z+a|^\alpha \geqq |Re(a)|^\alpha$ olmak üzere $Re(z) \geqq 0$ ve $Re(a) > 0$ olduğundan $|(z+a)^\alpha| = [(x+a_1)^2 + (y+b_1)^2]^{\alpha/2}$ dır.

Böylece, hipotezden $[Re(a)]^\alpha > |b|$ olmasından

$|T(z)| \geqq |a^\alpha d^{-1}|[1 - |b|[Re(a)]^{-\alpha}] > 0$ dır.

Bu yüzden $T^{-1}(z)$ bir Mellin dönüşümü ve T , I ya denktir. Yani $(H_{\beta_\alpha}) = (I)$ dır.

$(H_{\beta_\alpha}) = (I)$ olması Hille ve Tamarkin in [15] deki tekniği kullanılarak ispatlanabilir.

Pozitif α tamsayısı için $\theta = \arg(-b)$ olmak üzere

$$(k+a)^\alpha + b = \prod_{r=0}^{\alpha-1}\left\{k + a - |b|^{1/\alpha} cis[(\theta + 2r\pi)/\alpha]\right\}$$

dır. $c_r = a - |b|^{1/\alpha} e^{i[(\theta+2r\pi)/\alpha]}$ olmak üzere $\lambda_k(r) = (k + c_r)/c_r(ck+1)$ olsun. $0 \leqq r < \alpha$ için $Re(a) > |b|^{1/\alpha} max_{0\leqq r<\alpha}|cos[(\theta + 2r\pi)/\alpha]|$ olduğundan $Re(c_r) > 0$ dır. Ayrıca hipotezden $Re(c) > 0$ dır. Böylece her r için Teorem 3.3.1 den $(H_\lambda) = (I)$ dır. $H_\mu = \prod_{r=0}^{\alpha-1} H_{\lambda(r)}$ olduğundan $(H_\mu) = (I)$ dır.

Bir α tamsayısı için bu teoremin en iyi sonucunu göstermek için $\alpha = 1$, $a = 1 + i$, $b = -1$, $c = 1$ alalım. Bu durumda $Re(a) = |b|.|cos0|$, $\mu_k = (k + i)/i(k + 1)$ ve Teorem 3.3.1 den $\left(H_\mu\right) \neq (I)$ dır.

4.TOPLANABİLME METODU

$R(a,b,\alpha)$ bir matrisi ve $d = a^{\alpha} + b$, $[Re(a)]^{\alpha} > |b|$ olmak üzere

$\xi_k = d[(k+a)^{\alpha} + b]^{-1}$ üreteç dizisiyle birleştirilen bir matris metodu olsun.

Teorem 4.1. Her $\alpha \geqq 0$ için yukarıda tanımlanan $R(a,b,\alpha)$ metodu regüler ve C^{α} ya denktir [9].

İspat: $k = 0$ için ispat açıktır. Kabul edelim ki $k > 0$ olsun. $c = 1$ için H_{μ} için Teorem 3.3.3 ü kullanırsak $R(a,b,\alpha) = H_{\mu}^{-1}\Gamma_1^{\alpha} = H_{\mu}^{-1}H^{\alpha}$ dır. Bu yüzden $R(a,b,\alpha)$ regülerdir.

Denkliği ispatlamak için $R(a,b,\alpha)H^{-\alpha} = H_{\mu}$ olduğu gösterilir. Böylece Sonuç 3.3.1 den $\big(R(a,b,\alpha)\big) = (H^{\alpha}) = (\Gamma_1^{\alpha}) = (C^{\alpha})$ dır.

$R(a,b,\alpha)$ metodu tartışılırken a ve b nin Teorem 4.1 den önce ifade edilen şartları sağladığı kabul edilecektir.

Sonuç 4.1. $0 \leqq \alpha < \beta$ ise bu durumda tutarlılıkla $\big(R(a,b,\alpha)\big) \subset \big(R(a,b,\beta)\big)$ dır [9].

İspat:
$\mu_k = \{d'/[(k+a)^{\beta} + b]\}.\{[(k+a)^{\alpha} + b]d^{-1}\}$ olsun. Bu takdirde

$$\lambda_k = \frac{d(k+a)^{\beta}}{a^{\beta}[(k+a)^{\beta} + b]} \ , \qquad \gamma_k = \frac{a^{\alpha}[(k+a)^{\alpha} + b]}{d(k+a)^{\alpha}} \ , \quad v_k = (a/(k+a))^{\beta-\alpha}$$

olmak üzere $\mu_k = \lambda_k \gamma_k v_k$ dır.

Teorem 3.3.3 ve Sonuç 3.3.3 den H_{λ}, H_{γ} ve H_v regülerdir. Buradan $H_{\lambda}, H_{\gamma}, H_v = \mu_k$ regülerdir. Bütün Hausdorff metodları tutarlıdır [8].

Sonuç4.2. $\alpha \geqq 0$, $a, b, a' ve\ b'$ $R(a,b,\alpha)$ ve $R(a',b',\alpha)$ nın regülerlik şartını sağlayan herhangi sayılar olsun. Bu durumda $\big(R(a,b,\alpha)\big) = (R(a',b',\alpha))$ dır [9].

İspat:

$$\beta_k = \frac{d(k+1)^\alpha}{(k+a)^\alpha + b} \ , \qquad \gamma_k = \frac{(k+a')^\alpha + b'}{d'(k+1)^\alpha}$$

olmak üzere $\mu_k = \beta_k \gamma_k$ olduğundan Teorem 3.3.3 den dolayı $, H_\beta$ ve $, H_\gamma$ metodları I ya denktirler.

4.1. $R(a, b, \alpha)$ Metodunu Kapsayan Total Karşılaştırma

Bu bölümde $R(a, b, \alpha)$ matris metodunu total regülerliğe göre inceleyeceğiz ve $c > 0$ olmak üzere C^α, H^α ve Γ_c^α metodlarıyla total relatif güçlülüğünü karşılaştıracağız. (c pozitif sayısı için $R(a, b, \alpha)$ metodu Teorem 4.1 den C^α ya denk ve bu yüzden H^α ve Γ_c^a ya denktir.)

$R(a, b, \alpha)$ metodunu tartışmada $\alpha > 0$, $a > 0$, $a^\alpha > |b|$, $b \in R$, $d = a^\alpha + b$ ve $\mu_k^{(\alpha)} = d[(k+a)^\alpha + b]^{-1}$, $k = 0,1,2, \cdots$ olduğu anlaşılacaktır.

Ayrıca uygunluk için aşağıdaki gösterim incelenecektir. c ve f rastgele negatif olmayan c' ve f' ise rastgele pozitif olmayan sayıları gösterecektir.

a ve b $0 < a < 1$, $b > 1$ ile sınırlandırılacaktır.

Teorem 4.1.1. $\alpha \geqq 0$, $f > 0$, $c' \leqq 0$ için $R(f, c', \alpha)$ total regülerdir [9].

İspat: $\mu_k = 1$ olduğundan $\alpha = 0$ için ispat açıktır. $\alpha > 0$ kabul edelim.

$R(f, 0, \alpha) = \Gamma_f^\alpha$ dır. $c' < 0$ kabul edelim. $c = -c'$ olsun. Bu yüzden

$\mu_k^{(\alpha)} = d[(k+f)^\alpha - c]^{-1}$ dır. $\mu_t = d[(t+f)^\alpha - c]^{-1}$ olsun. Teorem 4.1 den $\mu_k^{(\alpha)}$ regüler iken $\mu(t)$ nin total monoton olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\mu(t) = d(t+f)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} c^k (t+f)^{-\alpha k} = d \sum_{k=0}^{\infty} c^k (t+f)^{-\alpha k - \alpha}$$

ve $f^\alpha > |c'|$ olduğundan $\mu(t)$ nin serisi $t \geqq 0$ için mutlak ve düzgün yakınsaktır. Her diferensiyellenebilir seri düzgün yakınsak olduğundan

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k \Gamma(ak + \alpha + n)(t + f)^{-\alpha k - \alpha - n}}{\Gamma(ak + \alpha)}$$

olmak üzere terim terim diferensiyellenebilir ve $(-1)\mu^{(n)}(t) = dS_n(t)$ elde ederiz.

$S_n(t)$ tamamen negatif olmayan terimler içerdiğinden $\mu(t)$ total monoton fonksiyondur.

$c > 0$ için $R(f, c, \alpha)$ total regüler değildir.

Karşıt örnek; $\alpha = 2$ olsun.

$\mu_k = d[(k + f)^2 + c]^{-1} = d\left[\left(k + f + ic^{1/2}\right)\left(k + f - ic^{1/2}\right)\right]^{-1}$ dır.

$\mu(t) = d/(t + \alpha_1)(t + \bar{\alpha}_1)\, , \alpha_1 = f + ic^{1/2}$ olsun. $k = 2\, , c = 1$ için (3.2) yi kullanarak ve $\theta_1 = \arctan\left(c^{1/2}(t + f)^{-1}\right)$ olmak üzere

$$\mu^{(n)}(t) = \frac{d(-1)^n n!\, 2 \sin(n + 1)\theta_1}{|t + \bar{\alpha}_1||t + \alpha_1|^{n+1} \sin \theta_1}$$

yı elde etmek için tartışma devam eder. Hipotezden $f > c^{1/2}$ dır. Bu yüzden $0 < \theta_1 < \pi/4$ dır. Her $t \geqq 0$ ve bazı k tamsayıları için

$(2k - 1)\pi < (n + 1)\theta_1 < 2k\pi$ olacak şekilde ki her n için $(-1)^n \mu^{(n)}(t) < 0$ dır. Bu yüzden $\mu(t)$ total monoton değildir.

Teorem 4.1.2. $\alpha \geqq 0\, , f > 0\, , c > 0$ ise buradan Γ_f^α t.s. $R(f, c, \alpha)$ dır [9].

İspat: $\alpha = c = 0$ durumları için ispat açıktır. $\alpha\, , c > 0$ kabul edelim ki $\lambda_n \equiv 1$, $\beta_n = f^\alpha (n + f)^{-\alpha}$ olmak üzere

$$\mu_n = \frac{f^\alpha[(n + f)^\alpha + c]}{d(n + f)^\alpha} = f^\alpha d^{-1} \lambda_n + c d^{-1} \beta_n$$

olsun. Açık olarak λ ve β total monoton ve $f^{\alpha}+\alpha=d$ olduğundan $H\sim\mu$ total regülerdir.

Teorem 4.1.3. $\alpha>0\,,c'\leqq 0$ ise buradan $R(f,c',\alpha)$ t.s. Γ_f^{α} dır [9].

İspat: $c'=0$ ise metotlar aynıdır. $c'<0$ kabul edelim. $c>0$ olmak üzere $c'=-c$ dır. $\mu_n=d(n+f)^{\alpha}/f^{\alpha}[(n+f)^{\alpha}-c]$ ve

$$\mu(t)=\frac{d(t+f)^{\alpha}}{f^{\alpha}[(t+f)^{\alpha}-c]}=f^{-\alpha}d\sum_{k=0}^{\infty}c^k(t+f)^{-\alpha k}$$

olsun. $t\geqq 0$ için seri ve her bir türevi düzgün ve mutlak yakınsak olduğundan

$S_n(t)=c^k(t+f)^{-\alpha k-n}, n=1,2,3,\cdots$ olmak üzere

$$(-1)^n\mu^{(n)}(t)=f^{-\alpha}d\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha k+n)S_n(t)}{\Gamma(\alpha k)}$$

dır. Bu yüzden $\mu(t)$ total monotondur.

Teorem 4.1.2 ve Teorem 4.1.3 ü birleştirerek ve $\Gamma_1^{\alpha}=\mathrm{H}^{\alpha}$ olduğunu göstererek aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.1.1. $c'<0\,,c>0\,,\alpha>0$ olsun. Buradan $R(1,c',\alpha)$ t.s. $.\mathrm{H}^{\alpha}$ t.s $R(1,c,\alpha)$ dır [9].

Teorem 4.1.4. ${c_2}'<{c_1}'<0$ için $R(f,{c_2}',\alpha)$ t.s. $R(f,{c_1}',\alpha)$ dır [9].

İspat: ${c_1}'={c_2}'+\delta\,,\delta>0\,,d_i=f^{\alpha}+{c_i}', i=1,2.$ olsun.

$\gamma=d_2/d_1\,,\beta_n=d_2/[(n+f)^{\alpha}+{c_2}']$ olmak üzere

$$\mu_n=\frac{d_2}{d_1}\left\{\frac{(n+f)^{\alpha}+{c_1}'}{(n+f)^{\alpha}+{c_2}'}\right\}=\frac{d_2}{d_1}\left\{1+\frac{\delta}{(n+f)^{\alpha}+{c_2}'}\right\}=\gamma+(1-\gamma)\beta_n$$

dır. Teorem 4.1.1 ve $0 < \gamma < 1$ den $H \sim \beta$ total regüler olduğu için $H \sim \mu$ total regülerdir.

Teorem 4.1.5. $f_1 > f_2 > 0$ için $R(f_2, c', \alpha)$ t.s. $R(f_1, c', \alpha)$ dır [9].

İspat: $\lambda_n = (n + f_1)^\alpha / [(n + f_2)^\alpha + c']$, $\beta_n = (n + f_2)^\alpha / [(n + f_2)^\alpha + c']$ olmak üzere

$$\mu_n = \frac{d_2[(n + f_1)^\alpha + c']}{d_1[(n + f_2)^\alpha + c']} = d_2 {d_1}^{-1} [1 + (\lambda_n - \beta_n)]$$

olsun. Teorem 4.1.3 den $H \sim \lambda$ ve $H \sim \beta$ total monotondur.

$\lambda_n {\beta_n}^{-1} = (n + f_1)^\alpha / (n + f_2)^\alpha$ olsun. $f_1 > f_2$ olduğu için $\lambda \beta^{-1}$ total monotondur. $\lambda - \beta$ nın total monoton olduğunu ispatlamak için aşağıdaki Lemma yı kullanalım.

Lemma 4.1.1. $k = 0,1,2 \cdots$ için $\alpha_k \geqq \beta_k$ olmak üzere β ve $\alpha \beta^{-1}$ total monoton olacak şekilde α, β reel diziler olsun ve her k için $\beta_k \neq 0$ olsun. Bu durumda $\lambda - \beta$ total monotondur [9].

İspat: $\mu_k = \alpha_k - \beta_k$ olsun. Pozitif n için

$$\Delta^n (\alpha_k - \beta_k) = \Delta^n [\beta_k (\alpha_k \beta_k^{-1} - 1)]$$

$$= \sum_{j=0}^{n} C_{n,j} \, \Delta^{n-j} \beta_{k+j} \Delta^j (\alpha_k \beta_k^{-1} - 1)$$

$$= \Delta^n \beta_k (\alpha_k \beta_k^{-1} - 1) + \sum_{j=1}^{n} C_{n,j} \, \Delta^{n-j} \beta_{k+j} \Delta^j (\alpha_k \beta_k^{-1})$$

dır. Hipotezden β ve $\alpha \beta^{-1}$total monoton ve $\alpha_k \geqq \beta_k$ dır. Böylece μ total monotondur. Teoremin ispatına döndüğümüzde $\lambda - \beta$ ve dolayısıyla μ nün total monoton olduğu açıktır.

Gelecek üç teorem ve Lemma için aşağıdaki notasyonu kullanacağız.

α tamsayı olmak üzere

$$\mu_k^{(\alpha)} = \frac{[(k+b)^\alpha + c']\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{d\Gamma(k+\alpha+1)}$$

olsun.

$v_k^{(\alpha)} = \prod_{i=1}^{\alpha} \beta_k^{(i)}$, $\beta_k^{(i)} = i(k+b)/b(k+i)$,

$\gamma_k^{(\alpha)} = \Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)\,/\Gamma(k+\alpha+1)$ olmak üzere $\lambda_k^{(\alpha)} = (k+\alpha)^{-1}$, $k+\alpha \neq 0$

olsun. Bu yüzden $\mu_k^{(\alpha)} = \left[b^\alpha v_k^{(\alpha)} + c'\gamma_k^{(\alpha)}\right]/d$ dır.

Lemma 4.1.2. $\Delta^n \gamma_k^{(\alpha)} = \alpha(1+\alpha)\cdots(n-1+\alpha)\gamma_k^{(\alpha)} \prod_{i=0}^{n-1} \lambda_{k+i+1}^{(\alpha)}$,

$k = 0, 1, 2 \cdots; n = 1, 2, 3$ dır [9].

İspat:

$$\begin{aligned}
\Delta\gamma_k^{(\alpha)} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} - \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+2)}{\Gamma(k+\alpha+2)} \\
&= \gamma_k^{(\alpha)} \left\{1 - \frac{k+1}{k+1+\alpha}\right\} \\
&= \alpha\gamma_k^{(\alpha)} \lambda_{k+1}^{(\alpha)}.
\end{aligned}$$

Tümevarım hipotezini kabul edelim.

$$\begin{aligned}
\Delta^{n+1}\gamma_k^{(\alpha)} &= \alpha(1+\alpha)\cdots(n-1+\alpha)\Delta\gamma_k^{(\alpha)} \prod_{i=0}^{n-1} \lambda_{k+i+1}^{(\alpha)} \\
&= \alpha(1+\alpha)\cdots(n-1+\alpha)\left[\gamma_k^{(\alpha)}\Delta \prod_{i=0}^{n-1} \lambda_{k+i+1}^{(\alpha)} + \prod_{i=0}^{n-1} \lambda_{k+i+2}^{(\alpha)} \Delta\ \gamma_k^{(\alpha)}\right].
\end{aligned}$$

Kolaylıkla kurulan özdeşliği kullanarak

$$\Delta\left(\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_{k+i+1}^{(\alpha)}\right) = n \prod_{i=0}^{n} \lambda_{k+i+1}^{(\alpha)}$$

ve $n = 1$ için bu Lemma bize

$$\Delta^{n+1}\gamma_k^{(\alpha)} = \alpha(1+\alpha)\cdots(n-1+\alpha)\left[\gamma_k^{(\alpha)}.n\prod_{i=0}^{n}\lambda_{k+i+1}^{(\alpha)} + \prod_{i=1}^{n}\lambda_{k+i+1}^{(\alpha)}\,\alpha\gamma_k^{(\alpha)}\lambda_{k+1}^{(\alpha)}\right]$$

$$= \alpha(1+\alpha)\cdots(n-1+\alpha)(n+\alpha)\,\gamma_k^{(\alpha)}.\prod_{i=0}^{n}\lambda_{k+i+1}^{(\alpha)}$$

olduğunu verir.

$\alpha \neq 0-1,-2,\cdots$ şartını sağlayan α kompleks sayısı için Lemma 4.1.2 yine sağlanır.

Teorem 4.1.6. $b > 1, c' < 0$ için C' t. s. $R(b,c',1) \Leftrightarrow b \geqq 1-c'$ dır [9].

İspat: $\mu_k^{(1)} = bv_k^{(1)}/d + c'\gamma_k^{(1)}/d$ olsun. $v_k^{(1)} = \beta_k^{(1)}$, $(1/b) + (1-b^{-1})\lambda_k^{(1)}$ şeklinde yazılacağından

$$\Delta^n\mu_k^{(1)} = \frac{1}{d}\left\{\frac{b(1-b^{-1})n!}{\prod_{i=0}^{n}(k+i+1)} + \frac{c'n!}{k+1}\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_{k+i+1}^{(1)}\right\}$$

$$= \frac{n!}{d}\prod_{i=0}^{n}\lambda_{k+1}^{(1)}[(b-1)+c']$$

elde edilir.

Böylece $\left\{\mu_k^{(1)}\right\}$ total monotondur $\Leftrightarrow b \geqq 1-c'$ dır.

Teorem4.1.7. $\mathrm{M} = \max\left\{3/2\,, 1+(-c')^{1/2}\right\}$ ve $M > (2-c')^{1/2}$ olmak üzere $b > 1, c' < 0,$ için C^2 t. s $R(b,c',2) \Leftrightarrow b > M$ dır [9].

İspat: $\mu_k^{(2)} = b^2v_k^{(2)}/d + c'\gamma_k^{(2)}/d$ iki dizinin çarpımının n farkı formülünü kullanarak ve β nın terimlerinde v yi yeniden yazarak

$$\Delta^n v_k^{(2)} = \sum_{j=0}^{n} C_{n,j}\Delta^{n-j}\beta_{k+j}^{(2)}\Delta^j\beta_k^{(1)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} C_{n,j}\frac{(1-2/b)(n-j)!\,2}{\prod_{i=0}^{n-j}(k+j+i+2)}.\frac{(1-1/b)j!}{\prod_{i=0}^{j}(k+i+1)} + \beta_k^{(1)}\Delta^n\beta_k^{(2)} + \beta_{k+n}^{(2)}\Delta^n\beta_k^{(1)}$$

$$= \frac{2n!\,(1-2/b)(1-1/b)}{\prod_{i=0}^{n+1}(k+i+1)}\sum_{j=1}^{n-1}(1) + \frac{2(k/b+1)(1-2/b)n!}{\prod_{i=0}^{n}(k+i+2).(k+1)}$$

$$+\frac{\left(\frac{k+n}{b}+1\right)(1-1/b)n!}{\left(\frac{k+n}{b}+1\right)\prod_{i=0}^{n}(k+i+1)}$$

$$= \frac{2n!}{b^2}\prod_{i=0}^{n+1}\lambda_{k+i}^{(1)}\,[(b-2)(b-1)(n-1)+(k+b)(b-2)+(k+n+b)(b-1)].$$

$$\Delta^n\mu_k^{(2)} = \frac{2n!}{d}\prod_{i=0}^{n+1}\lambda_{k+i}^{(1)}\,[(b-2)(b-1)(n-1)+(k+b)(b-2)$$

$$+(k+n+b)(b-1)] + \frac{c'}{d}\frac{(n+1)!\,\Gamma(3)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+3)}\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_{k+i+1}^{(2)}$$

$$= \frac{2n!}{d}\prod_{i=0}^{n+1}\lambda_{k+i}^{(1)}\left[\begin{matrix}(b-2)(b-1)(n-1)+(k+b)(b-2)+(k+n+b)(b-1)\\ +c'(n+1)\end{matrix}\right].$$

elde ederiz.

$$f(n,k,b) = (n-1)b^2 - 3(n-1)b + 2(n-1) + b^2 + (k-2)b$$

$$-2k + (k+n)b + b^2 - (k+n) - b + c'(n+1)$$

$$= (n+1)b^2 + (2k-2n)b + n - 3k - 2 + c'(n+1)$$

olsun. Her n ve $b \geqq 3/2$ için k da $f \uparrow$ dır. Her k ve $b \geqq 1+(-c')^{1/2}$ için n de $f \uparrow$ dır.Bu yüzden $b \geqq M$ için n ve k da $f(n,k,b) \uparrow$ dır. Bu yüzden

$f(n,k,b) \geqq f(0,0,b) = b^2 - 2 + c'$ dır. $\mu_k^{(2)} \to 2/d$ olduğundan $d > 2$ olmadıkça $\left\{\mu_k^{(2)}\right\}$ total monoton olamaz. Yani $b^2 + c' > 2$ $b > (2-c')^{1/2}$ dır. Bu yüzden $f(0,0,b) > 0$ ve $\left\{\mu_k^{(2)}\right\}$ total monotondur.

Gereklilik şartını göstermek için 3 tane durum vardır.

Durum I. $M = 3/2$ kabul edelim.

$b < 3/2$ için $f(1,k,b) = (2b-3)k + 2b^2 - 2b - 1 + 2c'$ dır.

$k = 1,2,3,\cdots.$ için $\mathrm{a}_1 = 2b^2 - 2b - 1 + 2c' \leqq 0$, $k \geqq [\mathrm{a}_1/(3-2\mathrm{b})] + 1$ için $\mathrm{a}_1 > 0$ ise buradan $\Delta\mu_k^{(2)} < 0$ dır.

Durum II. $M = 1 + (-c')^{1/2}$ kabul edelim.

Buradan $b < M$ için $f(n,o,b) = (b^2 - 2b + 1 + c')n + b^2 - 2 + c'$ dır. Böylece $n \geqq [(b^2 - 2b + 1 + c')] + 1$ için $\Delta^n\mu_0^{(2)} < 0$ dır.

Durum III. $M \leqq (2-c')^{1/2}$ için $\bar{\mu} = lim\mu_n \geqq 1$ dır.

Bu yüzden μ total monoton değildir.

Teorem 4.1.8. $b > 1$ ve $c' < 0$ için

$$H^2\,\text{t.s.}R(b,c',2) \iff b \geqq 1 + (-c')^{1/2}$$

dır [9].

İspat: $\mu_k^{(2)}\ [(k+b)^2 + c']/d(k+1)^2 = b^2\left(\beta_k^{(1)}\right)^2/d + c'\left(\gamma_k^{(1)}\right)^2/d$ olsun.

$$\Delta^n(\beta_k^{(1)})^2 = \sum_{j=0}^{n} C_{n,j}\Delta^{n-j}\beta_{k+j}^{(1)}\Delta^j\beta_k^{(1)}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} C_{n,j}(1-1/b)(n-j)!\prod_{i=0}^{n-j}\lambda_{k+i+j}^{(1)}$$

$$\times (1-1/b)j!\prod_{i=0}^{j}\lambda_{k+i}^{(1)} + \beta_k^{(1)}\Delta^n\beta_k^{(1)} + \beta_{k+n}^{(1)}\Delta^n\beta_k^{(1)}$$

$$= n!\,(n-1/b)^2 \prod_{i=0}^{n} \lambda_{k+i}^{(1)} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{k+j}^{(1)}$$

$$+\left\{\frac{k+b}{b(k+1)}+\frac{k+n+b}{b(n+k+1)}\right\} n! \prod_{i=0}^{n} \lambda_{k+i}^{(1)}(1-1/b).$$

$$\Delta^n({\gamma_k}^{(1)})^2 = \Delta^n\left({\lambda_k}^{(1)}\right)^2 = \sum_{j=0}^{n} C_{n,j}\Delta^{n-j}{\lambda_{k+j}}^{(1)}\Delta^j\lambda_k^{(1)}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} C_{n,j}(n-j)! \prod_{i=0}^{n-j} \lambda_{k+j+i}^{(1)}\, j! \prod_{i=0}^{j} \lambda_{k+i}^{(1)}$$

$$= n! \prod_{i=0}^{n} \lambda_{k+i}^{(1)} \sum_{j=0}^{n} \lambda_{k+j}^{(1)}$$

$$\Delta^n \mu_k^{(2)} = \frac{n! \prod_{i=0}^{n} \lambda_{k+i}^{(1)}}{d}\left[(b-1)^2 \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{k+j}^{(1)} + \left\{\frac{k+b}{k+1}+\frac{k+n+b}{n+k+1}\right\}(b-1)\right.$$

$$\left. + c' \sum_{j=0}^{n} \lambda_{k+j}^{(1)}\right]$$

$$\Delta^n \mu_k^{(2)} = \frac{n! \prod_{i=0}^{n} \lambda_{k+i}^{(1)}}{d}\left\{[(b-1)^2+c'] \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{k+j}^{(1)} + \frac{(k+b)(b-1)+c'}{k+1}\right.$$

$$\left. + \frac{(k+n+b)(b-1+c')}{n+k+1}\right\} \tag{4.1}$$

$b \geqq 1+(-c')^{1/2}$ için $(b-1)^2 + c' \geqq 0$ dır. Bu yüzden

$(k+n+b)(b-1)+c' > (k+b)(b-1)+c' \geqq b(b-1)+c'$

olduğundan $b \geqq (1+(1-4c')^{1/2})/2$ için doğru olan $b(b-1)+c' \geqq 0$ ise

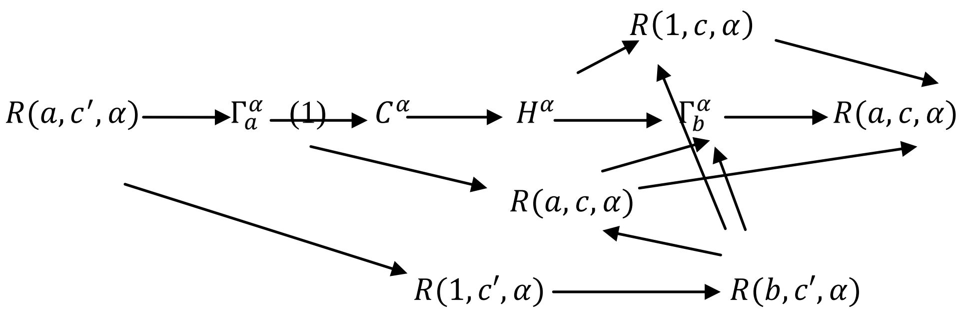
$\left\{\mu_k^{(2)}\right\}$ total monotondur. Fakat her $c' < 0$ için $\left(1 + (1 - 4c')^{1/2}\right)/2 < 1 + (-c')^{1/2}$ dır. Böylece $\left\{\mu_k^{(2)}\right\}$ total monotondur.

Tersini ispatlamak için $b < 1 + (-c')^{1/2}$ kabul edelim ve k yı sabitleyelim. 4.1 in en son iki terimi n de sınırlıdır. $\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{k+j}^{(1)}$ bir ıraksak serinin ilk $n - 1$ teriminin toplamıdır. $(b - 1)^2 + c' < 0$ olduğundan parantez içindeki ifade yeteri derecede büyük n için negatif olacaktır. Bu yüzden yeteri derecede büyük n ler için $\Delta^n \mu_k^2 < 0$ ve $\{\mu_k^2\}$ total monoton değildir. α pozitif tamsayısı için $H^\alpha t.s. R(b, c', \alpha)$ olması akılcı bir varsayımdır. Teorem 4.1.7 ve Teorem 4.1.8 i kullanarak $b > 1, c' < 0$, α pozitif tamsayısı için $b \geqq 1 + (-c')^{1/\alpha}$ için H^α t.s. $R(b, c', \alpha)$ olduğunu göstermek basit bir işlemdir.

$\alpha > 2$ için b üzerine konulacak en iyi şartın ne olacağı sorusu açıktır.

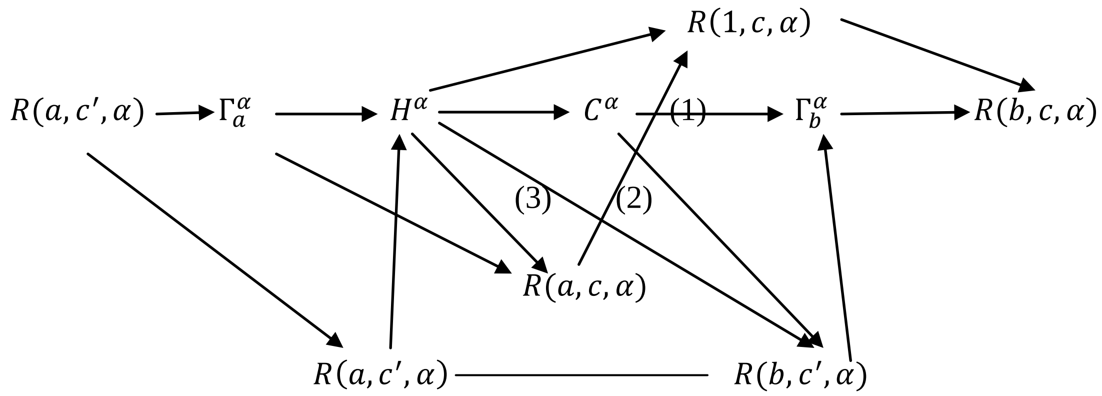
Teorem 4.1.8 de kullanılan tekniği kullanmak $\Delta^n \mu_k^\alpha$ formunun karmaşıklığından zor olabilir. Yani Teorem 4.1.12 $d \leqq \alpha$ için $R(1, c', \alpha)$ t.s. Γ_a^α olup olmadığı konusunda açık bir soru bırakır. Bu açık soru diğer aynı tiplerle birlikte tablonun zor anlaşılmasını önlemek için ihmal edilmiştir.

$0 < \alpha < 1, 0 < a < 1, b < 1, c' < 0, c > 0$ için



(1) $a \leq (\alpha + 1)/2$ için

$\alpha \geq 1$, $0 < a < 1$, $b > 1$, $c' < 0$, $c > 0$ için



1. $b \geqq (\alpha+1)/2$

2. $\alpha = 1$, $b \geqq 1 - c'$; için $\alpha = 2$, $b \geqq M = max\{3/2,\ 1 + (-c')^{1/2}\}$ ve

$M > (2 - c')^{1/2}$. $\alpha > 2$ için sonuçlar yoktur.

3. α bir tamsayısı için $b \geqq 1 + (-c')^{1/\alpha}$ ispatlanır. örneğin Γ_b^α t.s. $\mathrm{R(b,c,}\alpha)$ olduğundan $\mathrm{R(b,c,}\alpha)$ t.s. Γ_b^α [1] den açıktır.

Bu bölümün kalan kısımları negatif sonuçlarla devam eder. Bunları göstermek için yukarıdaki tablo en iyisidir. Bilinen negatif sonuçlar ihmal edilecektir. Örneğin; [1] den Γ_b^α t.s. $\mathrm{R(b,c,}\alpha)$ olduğundan $\mathrm{R(b,c,}\alpha)$ n.t.s. Γ_b^α dır.

Teorem 4.1.9. $\alpha > 0$, $c > 0$, $f_2 > f_1 > 0$ olsun. Bu yüzden

$R(f_{2,}c,\alpha)$ n.t.s $R(f_1,c,\alpha)$ dır [9].

İspat: $d_i = f_i^\alpha + c, i = 1,2$ olmak üzere

$\mu_n = d_2\,[(n+f_1)^\alpha + c]/d_1[n+f_2)^\alpha + c]$ olsun.

$f_2 > f_1$ olduğundan $d_2 > d_1$ dır. Fakat $\mu_n \to d_2/d_1 > 1$ dır. μ total monoton değildir bu teorem bize hemen hemen $R(b,c,\alpha)$ n.t.s $R(1,c,\alpha)$ ve $R(1,c,\alpha)$ n.t.s $R(a,c,\alpha)$ olduğunu gösterir.

Ayrıca Teorem 4.1.4 de $c' < 0$ olduğundan Teorem 4.1.9 , Teorem 4.1.4 ün bir sonucu değildir.

Teorem 4.1.10. $\alpha > 0$, $c, f, > 0$ olsun. Bu takdirde $\Gamma(\alpha + 1) \leqq f^{\alpha} + c$ için $R(f, c, \alpha)$ n.t.s. C^{α} ve $f^{\alpha} + c \leqq \Gamma(\alpha + 1)$ için C^{α} n.t.s. $R(f, c, \alpha)$ dır. Bu yüzden $d \geqq \Gamma(\alpha + 1)$ için μ total monoton değildir. Ayrıca $d \leqq \Gamma(\alpha + 1)$ için μ^{-1} total monoton değildir [9].

Teorem4.1.11. $0 < \alpha < 1, b > 1, c' < 0$ için

(i) H^{α} n.t.s $R(b, c', \alpha)$ dır.

(ii) $d > b^{\alpha-1}$ için $R(b, c', \alpha)$ n.t.s H^{α} dır.

$$\mu(t) = d^{-1}[(i + b)^{\alpha} + c'](t + 1)^{-\alpha}$$

olsun.

$$\mu'(i) = \frac{1}{d}\left\{\frac{(i + 1)^{\alpha}\alpha(i + b)^{\alpha-1} - [(i + b)^{\alpha} + c']\alpha(i + 1)^{\alpha-1}}{(i + 1)^{2\alpha}}\right\}$$

$$= \frac{\alpha}{d}\left\{\frac{i + 1 - (i + b) - c'(i + b)^{1-\alpha}}{(i + 1)^{1+\alpha}(i + b)^{1-\alpha}}\right\}$$

,

$$(-1)\mu'(i) = \frac{\alpha}{d}\left\{\frac{b - 1 + c'(i + b)^{1-\alpha}}{(i + 1)^{1+\alpha}(i + b)^{1-\alpha}}\right\}$$

dır [9].

Sonuç 4.1.2. $0 < \alpha < 1$, $c' < 0$ için C^{α} n.t.s. $R(1, c', \alpha)$ dır [9].

İspat: Kabul edelim ki C^{α} t.s. $R(1, c', \alpha)$ olsun. R(i) den Γ_a^{α} t.s. C^{α} olduğundan Γ_a^{α} t.s. $R(1, c', \alpha)$ Teorem 4.1.12 ile çelişir.

Sonuç 4.1.3. $0 < \alpha < 1$ için $R(1, c, \alpha)$ n.t.s. $R(b, c', \alpha)$ dır [9].

İspat: Kabul edelim ki $R(1, c, \alpha)$ t.s. $R(b, c', \alpha)$ olsun. Sonuç 4.1.1 den

H^{α} t.s. $R(1, c, \alpha)$ dır. Bu yüzden H^{α} t.s. $R(b, c', \alpha)$ Teorem 4.1.11 ile çelişir.

Teorem 4.1.13. $0 < \alpha < 1$, $b > 1$, $c > 0$ olsun.

(i) $d < b$ için Γ_b^α n.t.s. $R(1,c,\alpha)$ dır.

(ii) $R(1,c,\alpha)$ n.t.s. Γ_b^α dır [9].

İspat (i) a ile b , c' ile c nin yerleri değiştirilerek ve Teorem 4.1.12 deki $\mu(t)$ yi kullanarak $d < b$ için

$$(-1)\mu'(t) = \frac{\alpha b^\alpha}{d}\left\{\frac{1-b+c(t+1)^{1-\alpha}}{(t+b)^{1+\alpha}(t+1)^{1-\alpha}}\right\}$$

$(-1)\mu'(0) < 0$ dır.

İspat (ii) Yeteri derecede büyük t ler için $\mu'(t) < 0$ dır. Bu yüzden $1/\mu(t)$ total monoton değildir.

Teorem 4.1.14. $0 < \alpha < 1$, $0 < a < 1$, $c > 0$ olsun.

(i) $R(a,c,\alpha)$ n.t.s. H^α dır.

(ii) $d < a^{\alpha-1}$ için H^α n.t.s. $R(a,c,\alpha)$ dır [9].

b ve c' ile a ve c nin yerleri değiştirilip Teorem 4.1.11 deki $\mu(t)$ kullanılarak

$$(-1)\mu'(t) = \frac{\alpha}{d}\left\{\frac{a-1+c(t+1)^{1-\alpha}}{(t+1)^{1+\alpha}(t+\alpha)^{1-\alpha}}\right\}$$

elde edilir.

İspat (ii): $(-1)\mu'(0) = \alpha d^{-1}(a-1+ca^{1-\alpha})$ ve bu eşitlik $d < a^{\alpha-1}$ için negatiftir.

İspat (i): Yeteri derecede büyük t ler için $1/\mu(t)$ total monoton değildir.

Teorem 4.1.15. $\alpha \geqq 1$ olsun. Bu yüzden $d < b^{\alpha-1}$ için H^α n.t.s. $R(b,c',\alpha)$ dır [9].

İspat: Teorem 4.1.11 deki $\mu(t)$ kullanılarak

$$(-1)\mu'(0) = \alpha d^{-1}(b^\alpha - b^{\alpha-1} + c') = \alpha d^{-1}(d - b^{\alpha-1}) < 0$$

elde edilir. Bu yüzden $\mu(t)$ total monoton değildir.

Teorem 4.1.16. $\alpha \geqq 1$, α tamsayı olsun. Bu takdirde

b_0 $(\alpha+1)b^{\alpha}-(b+1)^{\alpha}+\alpha c^{'}=0$ denkleminin pozitif bir kökü olmak üzere $b<b_0$ için C^{α} n.t.s. $R(b,c^{'},\alpha)$ dır [9].

İspat: $\mu_n=[(n+b)^{\alpha}+c']\,\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)/d\Gamma(n+\alpha+1)$ olsun.

$$\Delta\mu_n=\mu_n\left\{1-\frac{(n+1)[(n+b+1)^{\alpha}+c']}{(n+\alpha+1)[(n+b)^{\alpha}+c']}\right\}$$

dır.

$f(t,b)=(t+\alpha+1)[(t+b)^{\alpha}+c^{'}]-(t+1)[(t+b+1)^{\alpha}+c']$ olsun.

$$f(0,b)=(\alpha+1)(b^{\alpha}+c^{'})-(b+1)^{\alpha}-c^{'}$$

$$=(\alpha+1)b^{\alpha}-(b+1)^{\alpha}+\alpha c^{'}$$

$$=\alpha b^{\alpha}\sum_{k=1}^{\alpha-1}C_{\alpha,k}b^{k}-1+\alpha c^{'}$$

dır.

$f(0,b)=0$ bir reel pozitif köke sahiptir. Buna b_0 diyelim. $f(0,0)<0$ olur. Bu yüzden $b<b_0$ için $f(0,b)<0$ dır. Böylece $\Delta\mu_0<0$ dır. Böylece μ total monoton değildir.

4.2. Hausdorff Matrislerin Lineer Kombinasyonları

Vanderburg [7] de aşağıdaki iki sonucu ispatlamıştır.

(I) En az birinin reel veya regüler olarak tanımlı olduğu iki metot $H^{\alpha+1}$ ile $[C^{\alpha}-\Gamma(\alpha+1)H^{\alpha}][1-\Gamma(\alpha+1)]^{-1}$ denktir.

(II) $\alpha,\beta,\alpha+\beta$ den en az biri reel ve -1 den büyük olmasın ve α ve β da sıfırdan farklı olsun. Bu durumda

$[\Gamma(\alpha+\beta+1)C^{\alpha}C^{\alpha}-\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)C^{\alpha+\beta}]$.

$$[\Gamma(\alpha+\beta+1)-\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)]^{-1}$$

toplanabilme metodu $C^{\alpha+\beta+1}$ e denktir.

Bu bölümdeki amaç, (I) ve (II) temel prensiplerini daha geniş Hausdorrf matris sınıflarına uygulamaktır.

K herhangi regüler Hausdorff matrisini göstersin. k, K nın normalleştirme çarpanını göstersin. Normalleştirme çarpanı $\mu_0 = 1$ şeklindeki üreteç dizisinin sabit kısmıdır. Örnek olarak $H^{\alpha}, C^{\alpha}, \Gamma_a^{\alpha}$ ve $R(c,b,\alpha)$ matrislerinin normalleştirme çarpanları sırasıyla $1, \Gamma(\alpha+1), a^{\alpha}$ ve $d = c^{\alpha} + b$ dır.

(I)ve (II) deki esas iddia şudur : H^{α} ya denk olan herhangi iki Hausdorff matrisinden biri normalleştirme çarpanına bölünür ve bu durumda bir matris diğerinden çıkarılır. Fark matrisi bu durumda uygun kısıtlamalar altında $H^{\alpha+1}$ matrisine denk olacak şekilde normalleştirme çarpanlarının farkıyla bölünebilir. Bu fikirlerin şekillenmesi belli bir yönüyle aşağıdaki teoremde belirtilir.

Teorem 4.2.1. K_1^{α} ve K_2^{α} H^{α} ya denk olan Hausdorff matrislerini, $K_1^{\alpha}(z)$ ve $K_2^{\alpha}(z)$ birleştirilmiş Mellin dönüşümlerini ve k_1 ve k_2 de $k_1 \neq k_2$ olmak üzere sırasıyla normalleştirme çarpanlarını göstersin. $R(a) > -1$ şartını sağlayan her α için eğer c sabit olmak üzere düzgün olarak $R_{\epsilon} = \{z|Re(z) > -\epsilon\}$ üzerinde

$$\frac{K_1^{\alpha}(z)}{k_1} - \frac{K_2^{\alpha}(z)}{k_2} = c(z+1)^{-\alpha-1} + O(|z+1|^{-\alpha-2}) \tag{4.2}$$

şartını sağlayan $0 < \varepsilon < 1$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı varsa bu durumda

$$[k_2^{\alpha} K_1^{\alpha} - k_1^{\alpha} K_2^{\alpha}](k_2^{\alpha} - k_1^{\alpha})^{-1} \supset H^{\alpha+1}$$

dır [9].

$T(z) = [k_1^{-1} K_1^{\alpha}(z) - k_2^{-1} K_2^{\alpha}(z)](z+1)^{\alpha+1}$ olsun. (4.2) den $T(z)$ nın Mellin dönüşümü olduğu açıktır.

Teorem 4.2.1 in uygulanabilir bir ispatını vermek için (I) ve (II) nin içermelerinden birinin ispatını yapmak aşağıdaki içermelerin listesiyle mümkündür. Bütün içermeler sadece bir düzen oluşturması için $C^{\alpha+1}$ in terimlerinde ifade edilmiştir. Bu içermeler diğer denk Hausdorff matrislerine denk olmasıyla ifade edilmişlerdir.

Aksi söylenmedikçe b ve c $R(a,b,\alpha)$ regüler ve normalleştirme faktörleri arasındaki fark sıfır olmayacak şekilde a,b,c ve α reel sayılar olarak algılanacaktır.

(i) En az bir $a>0, \alpha>-1$ için $[a^\alpha C^\alpha - \Gamma(\alpha+1)\Gamma_a^\alpha][a^\alpha - \Gamma(\alpha+1)]^{-1} \supset C^{\alpha+1}$ dır.

(ii) En az $a>0, \alpha>-1$ için $[a^\alpha H^\alpha - \Gamma_a^\alpha](\alpha+1)^{-1} \supset C^{\alpha+1}$ dır.

(iii) En az $\alpha \geqq -1$ için $[dC^\alpha - \Gamma(\alpha+1)R(c,b,\alpha)\,][d-\Gamma(\alpha+1)]^{-1} \supset C^{\alpha+1}$ dır.

(iv) En az $\alpha \geqq -1$ için $[dH^\alpha - R(c,b,\alpha)\,](d-a^\alpha)^{-1} \supset C^{\alpha+1}$ dır.

(v) En az $\alpha \geqq -1$ için $[d\Gamma_a^\alpha - a^\alpha R(c,b,\alpha)\,](d-a^\alpha)^{-1} \supset C^{\alpha+1}$ dır

(vi) En az $\alpha \geqq -1$ için $[d_2R(c_1,b_1,\alpha) - d_1R(c_2,b_2,\alpha)\,](d_2-d_1)^{-1} \supset C^{\alpha+1}$ dır.

(vii) En az $a>0, \alpha>-1$ için $[b^\alpha\Gamma_a^\alpha - a^\alpha\Gamma_b^\alpha](b^\alpha - a^\alpha)^{-1} \supset C^{\alpha+1}$ dır.

(viii) En az $\alpha,\beta,\alpha+\beta>-1$ için

$\left[C^\alpha C^\beta - \Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)H^{\alpha+\beta}\right].[1-\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)]^{-1} \supset C^{\alpha+\beta+1}$ dır.

(ix) $\alpha,\beta,\alpha+\beta>-1$ en az $a>0$ için

$\left[a^{\alpha+\beta}C^\alpha C^\beta - \Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma_a^{\alpha+\beta}\right]\left[a^{\alpha+\beta} - \Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\right]^{-1} \supset C^{\alpha+\beta+1}$

dır.

(x) En az $\alpha,\beta>-1\,,\alpha+\beta \geqq 1$ için

$\left[dC^\alpha C^\beta - \Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)R(c,b,\alpha+\beta)\right][d-\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)]^{-1} \supset C^{\alpha+\beta+1}$

dır.

Yukarıdakilerin ispatları benzer olduğundan sadece (i) yi ispatlayalım.

$$T(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+\alpha+1)} - \frac{1}{(z+a)^\alpha} \tag{4.3}$$

olsun. [7] den

$$T(z) = \frac{1}{(z+1)^{\alpha}} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2(z+1)^{\alpha+1}} + O(|z+1|^{-\alpha-2}) - \frac{1}{(z+a)^{\alpha}}$$

dır.

I.Durum: $a \geqq 1$ olsun.

$$\frac{1}{(z+1)^{\alpha}} - \frac{1}{(z+a)^{\alpha}} = (z+1)^{-\alpha}\left\{1 - \left(\frac{z+1}{z+a}\right)^{\alpha}\right\} \tag{4.4}$$

$$= (z+1)^{-\alpha}\left\{1 - \left(1 - \frac{a-1}{z+a}\right)^{\alpha}\right\}$$

$$= (z+1)^{-\alpha}[\alpha(a-1)(z+a)^{-1} + O(|z+1|^{-2})] \tag{4.5}$$

dır. R_{ϵ} üzerinde yukarıdaki seri açılımı geçerli olacak şekilde bir ϵ bulunabileceği açıktır ve $|(z+1)\,(z+\alpha)^{-1}|$ düzgün sınırlıdır. (4.5) ı $T(z)$ de yerine koyarsak $T(z)$ Teorem 4.2.1 in (4.2) şartını sağlar.

II.Durum: $0 < a < 1$ için $|z+1| = 1-a$ nın dışındaki her yerde tanımlı olan $z+1$ in kuvvetleri olarak (4.4) için Laurent açılımını kullanalım. Diğer kalan ispatlar I. durumun aynısıdır.

α pozitif tamsayısı için yukarıdaki sonuçlar

$Re(\alpha) > 0\,, [Re(c)]^{\alpha} > |b|\,, [Re(c_i)]^{\alpha} > |b_i|\,, i = 1{,}2$ için de sağlanır.

(i)-(x) deki ters içermeyi ispatlamak için [7] de ilgili teoremin B şartının gerek ve yeter şartlarının sağlandığını göstermek gerekir. Yani R_0 üzerinde Mellin dönüşümlerinin her biri yok sayılabilir. Ters içermeler daha zor bir problem olur. Bazı özel sonuçlar aşağıda listelenmiştir. Listelenen parametreler üzerinde kısıtlamalar sadece kısalık içindir.

C(i) α_0 ispatta tanımlı olmak üzere en az $a > 0, \alpha > -1\,, \alpha \neq 0$ için.

C(ii) Bir kompleks a sayısı için $Re(a) \geqq 1$ şartını sağlayan $\alpha > -1$ pozitif sayısı için tersi doğru kalmak şartıyla $a \neq 0$ dır.

C(iii) En az $\alpha \geqq -1$, $b > 0$ için $Re(c) \geqq 1$ dır.

C(iv) En az $\alpha \geqq 0$, a, b, c reel, $b > 0$ için $c \geqq \alpha$

C(v) En az $\alpha \geqq 0$, b_i, c_i reel,$i = 1{,}2$ ve $c_1 \geqq c_2$, $b_1 \geqq b_2$ için.

C(vi) $\alpha > 0$, a, b reel sayılarında en az biri için $a \neq b$ veya

$Re(a) > Re(b) > g(a) > g(b)$ veya yönlerinin eşitsizliklerin tamamen tersi.

C(vii) α ve β simetrik matris olduğundan $\alpha \leqq \beta$ kabul edilebilir. Bu düzende tersi en az bir $\alpha \geqq 1$ $(A); 0 \leqq \alpha < 1$ (B) $0 < \beta < 1$; (C) $-1 < \alpha < 0$, $\beta \leqq 0$ veya $\beta \geqq 1$ için en az biri doğrudur.

C(viii) C(i) deki α_0 için $\alpha \leqq \beta$ $(A), \alpha \geqq \alpha_0$ $(B), -1 < \alpha < 0$, $\beta \leqq 0$ veya $\beta \geqq \alpha_0$ ve $0 \leqq \alpha \leqq \alpha_0$ $(C), 0 < \beta < \alpha_0$ en az birisi için tersi sağlanır.

İspat (Ci): (4.2.2.) den $T(z) = 0 \Leftrightarrow$

$$F_1(z, \alpha) = \frac{\Gamma(z + \alpha + 1)}{(z + a)^{\alpha} \Gamma(z + 1)}$$

olmak üzere $F_1(z, \alpha) = 1$ dır. Reel a ve z için [7] de ki gibi $F_1(\alpha + x + 1)$ in α nın logaritmik konveks fonksiyonu olduğu gösterilebilir. Bu nedenle bu fonksiyon 1 değerini ikiden fazla alamaz. Bunlardan biri $\alpha = 0$ da ve a ya bağlı bazı pozitif α_0 için değer alır.

$z = x + iy$, $y \neq 0$, $Re(a) > 0$ için [7] deki işlemleri kullanarak

$$2 \log|F_1(z, \alpha)| = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \int_{x+j+Re(a)}^{x+j+Re(a)+1} \frac{2tdt}{t^2 + (y + g(a))^2} - \int_{x+j+1}^{\alpha+x+j+1} \frac{2tdt}{t^2 + v^2} \right\}$$

elde edilir.

[7] deki ilgili teoremin (a) özelliğinden

$2[\log|F_1(z, -x, -1)| - \log F_1(z, -x)]$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \int_{j}^{j+1} \frac{2tdt}{t^2 + y^2} - \int_{x+j+Re(a)}^{x+j+Re(a)+1} \frac{2tdt}{t^2 + (y + g(a))^2} \right\}$$

olduğu gösterilebilir.

Bir reel a sayısı için (a) özelliği aşağıdaki Lemmayı kullanarak oluşturulabilir.

Lemma 4.2.1. $f(t)$, $(0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlı pozitif, sürekli ve monoton azalan fonksiyon ise bu durumda $c > 0$ ve $0 < x_1 < x_2$ için

$$\int_{x_1}^{x_1+c} f(t)dt - \int_{x_2}^{x_2+c} f(t)dt > 0$$

dır [7].

a kompleks ve $|y + g(a)| \geqq |y|$ ise [7] deki ilgili teoremin (a) özelliği açık olarak sağlanır.

$|y + g(a)| < |y|$ şartını sağlayan z lerin değeri açık bir soru olarak kalır. Böylece

$$2\frac{\partial}{\partial \alpha} \log F_1(z, -\alpha)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \int_{x+j+Re(a)}^{x+j+Re(a)+1} \frac{2tdt}{t^2 + (y + g(a))^2} - \frac{2(\alpha + x + j + 1)}{(\alpha + x + j + 1)^2 + y^2} \right\}$$

olduğu gösterilebilir.

Böylece [7] deki ilgili teoremin (b) özelliği sağlanır.

Son olarak $\partial^2 (\log|F_1(z, \alpha)|)/\partial \alpha^2$ [3] deki F ye özdeş olduğu gösterilebilir. Bu yüzden [7] deki (c) ve (d) ifadeleri otomatik olarak sağlanır.

5. SONUÇ

Bu çalışmada özel bir toplama metodu olan Hausdorff Toplanabilme Metodu incelendi. Her total regüler Hausdorff metodunun var olan moment dizisine sahip olduğu araştırıldı. Üçgensel matrisler ve total regülerlik arasında bağlantı kuruldu. Total regüler iki dizinin çarpımı da total regüler olduğundan, çarpımın total gücünü ikisinden birinin total gücüyle kıyaslamanın yeterli olduğu gözlemlendi.

Ayrıca metodun regüler olması koşulu altında elde edilen teoremler arasındaki ilişkiler araştırıldı. İki toplama metodu arasındaki total güçlülükler incelendi ve Cesa'ro, Hölder tipi metodlarının negatif güçlülüğünü karşılaştırmada çok faydalı olan teoremlerin ispatları incelendi.

Hipergeometrik metodu tanımlayan dizi (H,α,β,γ) olmak üzere, Basu [3] de belirtildiği gibi Cesa'ro metoduna denkliğinden hareket edildiğinde yani $(H,\alpha,\beta,\gamma) = C_{\alpha-1}^{-1} C_{\beta-1}^{-1}\, C_{\gamma-1}$ olduğunda metodun daha uygulanabilir olduğu gözlemlendi. Üç Hausdorff metodu ve C_1 metodu arasında total karşılaştırmaların yapıldığı teoremlerin ispatı incelendi. Birbirine denk bazı metotlar incelendi.

Son olarak, $R(a,b,\alpha)$ bir matrisi ve $d = a^{\alpha} + b$, $[Re(a)]^{\alpha} > |b|$ olmak üzere

$\xi_k = d[(k+a)^{\alpha} + b]^{-1}$ üreteç dizisiyle birleştirilen bir matris metodu ile tanımlanan her $\alpha \geqq 0$ için $R(a,b,\alpha)$ metodu regüler ve C^{α} ya denk olduğu gözlemlendi. Bunların devamında verilen teorem ve sonuçlardan yola çıkarak bütün Hausdorff metodlarının tutarlı olduğu incelendi.

$R(a,b,\alpha)$ matris metodunu total regülerliğe göre incelendi ve $c > 0$ olmak üzere C^{α}, H^{α} ve Γ_c^{α} metodlarıyla total relatif güçlülüğünü karşılaştırıldı. Ayrıca uygunluk için Teorem ve sonuçların ispatı incelendi.

Hausdorff matrislerin lineer kombinasyonları ile ilgili teoremler incelendi ve $H^{\alpha+1}$ ile $[C^{\alpha} - \Gamma(\alpha+1)H^{\alpha}][1-\Gamma(\alpha+1)]^{-1}$ denk olması ve $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ den en az biri reel ve -1 den büyük olmayan ve α ve β sıfırdandan farklı olması durumunda elde edilen toplanabilme metodunun $C^{\alpha+\beta+1}$ e denk olduğunun daha geniş Hausdorrf matris sınıflarına uygulanacağı görüldü. Bu fikirlerin şekillenmesine belli bir yönüyle sebep olan teoremlerin ispatları incelendi.

KAYNAKLAR

1. Basu, S.K. On the total relative strength of the Hölder and Cesa'ro methods, Proc. London Math. Soc. vol. 50 (1948-1949) 447-462.

2. Basu, S.K. On the total relative strength of some Hausdorff methods equivalent to the identity, Amer. J. Math. vol. 76 (1954) 389-398.

3. Basu, S.K. On comparison of the total strength of some Hausdorff methods, Math. Z. Vol. 67 (1957) 303-309.

4. Basu, S.K. On hypergeometric summability involving infinite limits, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 5 (1954) 226-238.

5. Hardy, G. H. Divergent series, Oxford, 1949.

6. Hille, E. and J. D. Tamarkin, On moment functions, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. vol. 19 (1933) 902-908.

7. Rhoades, B. E. Total comparison among some totally regular Hausdorff methods, Math.Z. vol. 72 (1960) 463-466.

8. Rhoades, B. E. Hausdorff summability methods, Lafayette College, Easton, Pennsylvania, (1961) 396-425.

9. Rogosinski, W.W. On Hausdorff's method of summability, Proc. Cambridge Philos. Soc . vol. 38 (1942) 166-192.

10. Rhoades, B. E. Total comparison between two Cesa'ro matrices, Abstract 553-96,Notices Amer. Math. Soc. vol. 7 (1958) 828.

11. Greenberg, H. J. and Wall, H. S. Hausdorff means included between (C,0) and (C,1) , Bull. Amer. Math. Soc. vol. 48 (1942) 774-783.

12. Vanderburg, B. Certain linear combinations of Hausdorff summability methods, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 71 (1951) 466-477.

13. Hille, E. Functional analysis and semi-groups,Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 31, 1948.

14. Wilansky, A. An application of Banach linear functionals to summability,Trans. Amer.Math. Soc. vol. 67 (1949) 59-68.

15. Hurwitz, W. A. and Silverman, L.L On the consistence and equivalence of certain definitions of summability, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 18 (1917) 1-20.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Kayseri Merkezde doğan Hatice ÖZTÜRK ilköğrenimini Servet Akaydın İlkokulunda lise öğrenimini Nuh Mehmet Baldöktü Anadolu Lisesinde ve yüksek öğrenimi ise 2006-2010 yılları arasında Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde tamamlamıştır. 2010-2011 ylları arasında Ahi Evran Üniversitesi Eğitim Fakültsi Fen Bilimler Enstitüsünden Pedagolojik Eğitim Sertifikasını almıştır.

Şu anda İstanbul'da Matematik Öğretmenliği yapan Hatice ÖZTÜRK Eylül 2010'da Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisinde yüksek lisans yapmaya başlamıştır. Evlidir.

İletişim Bilgileri
Adres: Bayındırlık Konutları 3. Ada 3. Blok
Başakşehir/İSTANBUL
Cep: (507) 422 28 76
E-posta: hatice_mtmtk@hotmail.com