T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

YAKIN-HALKALARDA P-REGÜLERLİK VE P-v-ASALLIK

Hüseyin KAMACI

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Yozgat 2014

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

YAKIN-HALKALARDA P-REGÜLERLİK VE P-v-ASALLIK

Hüseyin KAMACI

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Yozgat 2014

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 70111312019 numaralı öğrencisi Hüseyin KAMACI'nın hazırladığı "**Yakın-halkalarda P-regülerlik ve P-v-asallık**" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezi ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 17/06/2014 Salı günü saat 11:00'da yapılmış, tezin onayına OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR

Üye : Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN(Danışman)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hürmet Fulya AKIZ

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun ...../...../20.... tarih ve ...... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

....../....../20....

İÇİNDEKİLER

Sayfa

YAKIN-HALKALARDA P-REGÜLERLİK VE P-v-ASALLIK

Hüseyin KAMACI

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2014; Sayfa: 48

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci ve ikinci bölümde, çalışmayla ilgili literatür ve temel bilgiler verildi. Üçüncü bölümde, yakın-halkalarda P-regülerlik, P-kuvvetli regülerlik ve P-asallık kavramları detaylı olarak incelendi. Ayrıca bu kavramların yakın-halkanın diğer kavramlarıyla ve birbirleriyle olan ilişkileri araştırıldı.

Dördüncü bölümde, verilen bir P ideali kullanılarak yakın-halkanın P-merkezi, bir elemanın P-merkezi, P-sağ (sol) birim tanımları yapıldı. Bir yakın halkanın P-birimlerinin cümlesinin, yakın-halkanın ikinci işlemine göre alt yarıgrubu olduğu ispatlandı. Aynı zamanda P-sağ (sol) değişmeli, P-medial ve P-tam asal yakın-halka tanımları yapıldı, ve bu yakın-halkalar için bazı özellikler ve sonuçlar elde edildi. Ayrıca bu kavramların P-regülerlik, P-kuvvetli regülerlik ve P-idempotent elemanlar ile ilişkileri incelendi.

Anahtar Kelimeler: Yakın-halka, P-regülerlik, P-kuvvetli regülerlik, P-idempotent eleman, P-tam asal ideal.

P-REGULARITY AND P-v-PRIMENESS IN NEAR-RINGS

Hüseyin KAMACI

Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2014; Page: 48

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. The literature and basic informations about the study have been given in the first and second chapters. In the third chapter, concepts of P-regularity, P-strongly regularity and P-primeness in near-rings have been investigated in details. Also relationships which being with other concepts in near-rings and with each other of these concepts have been researched.

In the fourth chapter, concepts of a P-center of near-ring, P-center of an element and P-right (left) identity by using a given ideal P have been defined. It has been proved that the set of all P-identities in a near-ring is a multiplicative subsemigroup of it has been proved. Also concepts of P-right (left) permutable, P-medial and P-completely prime near-ring have been defined, and some properties and results have been obtained for these near-rings. Furthermore relationships between this concepts and P-regularity, P-strongly regularity and P-idempotent elements have been examined.

Keywords: Near-ring, P-regularity, P-strongly regularity, P-idempotent element, P-completely prime ideal.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlamamda desteğini esirgemeyen danışmanım sayın Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen bölümümüzün değerli öğretim üyelerinden Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV, Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU, Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN, Yrd. Doç. Dr. Onur OKTAY, Yrd. Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR, Yrd. Doç. Dr. Hürmet Fulya AKIZ, Yrd. Doç. Dr. Murat BABAARSLAN ve Öğr. Gör. Mehmet EKİCİ'ye teşekkürlerimi sunarım.

Sevgili dostlarım Öğr. Gör. Osman Ali ÇETİN, Buğra BAĞCI ve İsmail TAŞTEKİN'e bu çalışma boyunca vermiş oldukları büyük moral ve motivasyon desteğinden dolayı teşekkür ederim.

Her zaman arkamda duran değerli aileme ve tüm bu çalışma esnasında çekilen maddi manevi sıkıntılarımı paylaşan, her durumda desteğini esirgemeyen nişanlım Nuray SAĞLAM'a sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ

N	:	Yakın-halka
N_0	:	N yakın-halkasının 0-simetrik kısmı
N_c	:	N yakın-halkasının sabit kısmı
Γ	:	N-grup
$M(\Gamma)$	:	Γ ’dan Γ ’ya tüm fonksiyonların yakın-halkası
$M_0(\Gamma)$	:	$M(\Gamma)$ ’da sıfırı koruyan tüm fonksiyonların yakın-halkası
$M_c(\Gamma)$	:	$M(\Gamma)$ ’da tüm sabit fonksiyonların yakın-halkası
N_d	:	N yakın-halkasının dağılmalı kısmı
R	:	Halka
$Hom(N,M)$	:	N ’den M ’ye tüm yakın-halka homomorfizmlerinin cümlesi
0_Γ	:	Γ ’nın sıfır elemanı
$(0:\Gamma)$	:	Γ ’nın sıfırlayanı
$N/_I$	:	Bölüm yakın-halkası
$C(N)$	:	Yakın-halkanın merkezi
P-$C(N)$	:	Yakın-halkanın P-merkezi
U_P	:	N ’nin P-birim elemanlarının cümlesi
x_P^{-1}	:	$x \in N$ ’nin P-inverslerinin cümlesi
x_l^{-1}	:	$x \in N$ ’nin P-sol inverslerinin cümlesi
x_r^{-1}	:	$x \in N$ ’nin P-sağ inverslerinin cümlesi

1. GİRİŞ

Halkaların bir genellemesi olan yakın-halkalara ilk adım, 1905 yılında Dickson [1] tarafından atılmıştır. O, tek yönlü dağılma özelliğine sahip cisimlerin varlığını ispatlamıştır, bugün bu cisimler yakın-cisim olarak isimlendirilmektedir.

Regülerlik kavramı ilk olarak Roos [2] tarafından halkalar üzerinde tanımlanmış, ilerleyen yıllarda ise çeşitli regülerlik kavramları elde edilmiştir. Bu kavramların çoğu yakın-halkalar için de tanımlanmış ve Groenewald ve Potgieter [3] gibi çeşitli araştırmacılar da bunlar hakkında bir çok genel teori geliştirmiştir. Mason [4] yakın halkalarda regülerliği sağ ve sol regülerlik olarak ikiye ayırmış, ve daha çok sağ yakın-halkalarda regülerlik ve kuvvetli regülerlik kavramlarını incelemiştir. Daha sonraki yıllarda ise, birimli 0-simetrik yakın-halkalarda sol regülerlik, sağ regülerlik ve sol kuvvetli regülerliğin birbirine denk olduğu gösterilmiş, Reddy ve Murty [5] sadece birimli 0-simetrik yakın-halkalar için değil, herhangi bir yakın-halkada da bu üç kavramın denk olduğunu kanıtlamıştır. Ayrıca Hongan [6] bu denkliğe sağ kuvvetli regülerlik kavramını eklemiştir.

Halkalarda asallık kavramı yakın-halkalara bir çok farklı asallık tanımı ile uyarlanmıştır. Bu tanımlardan her biri halkalardaki asallığın bir genellemesidir. Yakın-halkalarda asal idealler çeşitli yazarlar tarafından yoğun bir şekilde araştırılmıştır. İlk olarak 1970 yılında, Holcombe [7] asal yakın-halkalar kavramını tanımlanmıştır. Fakat dağılma özelliği tek yönlü olduğundan ve yakın-halkada ilk işlem genelde değişmeli olmadığından, Holcombe [7] 0-asal (veya asal), 1-asal, 2-asal olarak isimlendirdiği asallığın üç farklı kavramını tanımlamıştır. Ramakotaiah ve Rao [8], 1-tipinde asal ideal ve 2-tipinde asal ideal kavramlarını tanımlamıştır. Groenewald [9] 1-tipinde asal ideal yerine 3-asal ideal ifadesini kullandı ki literatürde bu kullanım, daha sık karşımıza çıkmaktadır. Ayrıca, literatürde 2-tipinde asal ideal yerine tam asal ideal ifadesi kullanılmaktadır.

Ayrıca çeşitli araştırmacılar asallık ile kuvvetli regülerlik kavramları arasındaki ilişkiyi araştırmıştır. Örneğin, Argaç ve Groenewald [10] kuvvetli regüler yakın-halkaları karakterize etmek için sol 0-asal ve sol tam asal idealler arasındaki ilişkiyi kullanmıştır. Aynı zamanda kuvvetli regüler kavramı yakın-halkalardaki bir çok kavrama uyarlanmaya çalışılmıştır. Hadelman ve Lawrence [11] tarafından kuvvetli asal yakın-halkalar tanımı yapılmış ve Groenewald [12] bu kavramı genişletmiştir. Booth ve ark. [13] kuvvetli asal yakın-halkaların bir alternatif tanımı olarak kuvvetli equiprime (e-asal) yakın-halkaları tanımlamıştır.

Yakın-halkalarda merkez, idempotent eleman, birim, sağ ve sol değişme, medial, komutatiflik, abelyenlik, iç çarpan özelliği gibi kavramlar uzun zamandır bilinmektedir. Manara [14], Birkenmeier ve Heatherly [15] gibi çeşitli araştırmacılar medial, sol değişmeli, sağ değişmeli ve komutatif yakın-halkaların temel özelliklerini geliştirmiştir. Mason [4] ve Drazin [16] merkez ve idempotent kavramlarını ve bu kavramlar arasındaki bazı ilişkileri incelemiş, aynı zamanda bu kavramların regüler formlar, kuvvetli regüler formlar ve asal idealler ile ilişkileri üzerine çalışmıştır. Ayrıca, Birkenmeier [17] idempotent elemanların cümlesi ve tam asal idealler arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Mason [18] yakın-halkalarda regülerliğin kuvvetli formlarını tanımlamış ve kuvvetli regüler ve idempotent elemanlar arasındaki bazı ilişkileri araştırmıştır. Ayrıca Drazin [16] bütün elemanları merkezde olan yakın-halkalarda regülerlik üzerine çalışmalar yapmıştır.

P-regülerlik kavramı ilk olarak Andrunakievich [19] tarafından halkalar üzerinde tanımlanmış ve daha sonra, bu kavram Choi [20] tarafından yakın-halkalara aktarılmıştır. 2012 yılında, Dheena ve Jenila [21] P-kuvvetli regüler yakın-halkalar kavramını tanımlamış ve kuvvetli regülerliğin bazı özelliklerinin P-kuvvetli regülerlikte de sağlandığını göstermiştir. O, aynı zamanda ilk kez P-asallık kavramını tanımlamıştır [21].

Bu yüksek lisans tezinde ilk olarak, yakın-halkalarda P-regülerlik, P-kuvvetli regülerlik, P-idempotent ve P-asallık kavramları verilmiş, ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Son bölümde, verilen bir P-ideali kullanılarak bir yakın-halkanın merkezi, bir elemanın merkezi, (sağ-sol) birim, (sağ-sol) değişmelilik, mediallik, tam asallık ve iç çarpan gibi yakın-halkalarda bazı kavramların genelleştirilmeleri verilmiştir. Ayrıca bu genelleştirilmeler tarafından P-regülerlik, P-kuvvetli regülerlik ve P-idempotentler üzerinde bazı sonuçlar elde edilmiştir.

2.TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, temel bilgi niteliğinde olan ve tezin diğer bölümlerinde ortak olarak kullanılan tanım ve teoremler verilecektir. İlk baskısı 1977 ve yenilenmiş baskısı 1983 yıllarında basılan Günter Pilz'e ait 'Near-rings' [22] kitabı, bu bölüm için temel kaynak olarak alınmıştır.

2.1. Yakın-halkalar

Halkaların bir genellemesi olan yakın-halkalara ilk adım, 1905 yılında Dickson tarafından atılmıştır. Dickson, tek yönlü dağılma özelliğine sahip cisimlerin varlığını ispatlamıştır. Bugün bu cisimler yakın-cisim olarak adlandırılmaktadır.

Yakın-halkalar, halkalardan farklı olarak, ilk işleme göre değişmeli olması gerekmeyen ve tek taraflı dağılma özelliğinin sağlandığı, genelleştirilmiş halkalardır. Yakın-halkalar açık olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.1.1. ([22]) N cümlesi üzerinde "$+$" ve "$\cdot$" ile gösterilen iki ikili işlem alalım. Eğer,

a) $(N, +)$ değişmeli olması gerekmeyen bir grup,

b) $(N, \cdot)$ bir yarı grup,

c) $\forall x, y, z \in N$ için aşağıdaki iki dağılma özelliğinden en az birisi sağlanıyor ise

i) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ veya ii) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

$(N, +, \cdot)$ üçlüsüne bir *yakın-halka* denir.

Eğer (a), (b) ve (i) şartı sağlanıyorsa, N 'ye sağ yakın-halka, (a), (b) ve (ii) şartı sağlanıyorsa, N 'ye sol yakın-halka denir.

Bu tez çalışmasında kullanılan her yakın-halka terimi bir sağ yakın-halkayı ifade edecek olup elde edilen sonuçlar sol yakın-halkalar için de paralel olarak sağlanmaktadır.

Bazı yakın-halka örnekleri aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.1.2. $(\Gamma, +)$ herhangi bir grup olsun.

$$M(\Gamma) = \{f : \Gamma \to \Gamma \mid f\ bir\ fonksiyon\}$$

ile tanımlanan cümle, fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri altında bir yakın-halkadır.

Örnek 2.1.3. $(\Gamma, +)$ herhangi bir grup ve "0_Γ" bu grubun etkisiz elemanı olmak üzere fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri altında aşağıdakiler birer yakın-halkadır.

a) $M_{\mathbf{0}}(\Gamma) = \{f: \Gamma \to \Gamma \mid f(0_\Gamma) = 0_\Gamma\}$

b) $M_{\mathbf{c}}(\Gamma) = \{f: \Gamma \to \Gamma \mid f\ sabit\}$

Örnek 2.1.4. $(N, +)$ bir grup ve bu grup üzerinde ikinci işlem, $\forall a, b \in N$ için;

$$ab = \begin{cases} a, & b \neq 0 \\ 0, & b = 0 \end{cases}$$

ile verilsin. Bu durumda, N bir yakın-halkadır. Bu yakın-halka literatürde *aşikar yakın-halka* olarak geçmektedir.

Örnek 2.1.5. Her grup için bir yakın-halka elde edilebilir. Gerçekten, $(N, +)$ eğer grubu üzerinde ikinci işlem, $\forall x, y \in N$ için,

$$x \cdot y = 0$$

ile tanımlanırsa, $(N, +, \cdot)$ bir yakın-halkadır.

Özellikler 2.1.6. ([22]) N bir yakın-halka olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler vardır.

a) $\forall a \in N$ için, $0a = 0$ dır.

b) $\forall a, b \in N$ için, $(-a)b = -ab$ dir.

İspat: a) $\forall a \in N$ için, sağdan dağılma özelliğinden,

$$0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$$

ve buradan $0a = 0$ bulunur.

b) $\forall a, b \in N$ için, sağdan dağılma özelliği ve (a) kullanılarak,

$$(-a)b = (0 - a)b = 0b - ab = 0 - ab = -ab$$

elde edilir.

Not: Bir N yakın-halkasında, her zaman, $\forall a, b \in N$ için,

$$a0 = 0 \text{ ve } a(-b) = -ab$$

sağlanmayabilir. Örnek 2.1.2 'de tanımlanan $M(\Gamma)$ yakın-halkasında, $f, g \in M(\Gamma)$ için,

$$f \circ 0 = 0$$

olması f fonksiyonun orjinden geçmesiyle mümkündür. Benzer olarak

$$f \circ (-g) = -(f \circ \mathrm{g})$$

olması f fonksiyonunun tek fonksiyon olması ile mümkündür.

Tanım 2.1.7. ([22]) N bir yakın-halka olsun.

a) $N_0 = \{n \in N \mid n0 = 0\}$ cümlesine N yakın-halkasının 0-simetrik kısmı,

b) $N_c = \{n \in N \mid n0 = n\} = \{n \in N \mid \forall n' \in N \text{ } için \text{ } nn' = n\}$ cümlesine N yakın-halkasının sabit kısmı denir.

N_0 ve N_c birer yakın-halka olup, $N = N_0$ ise N yakın-halkasına *sıfır-simetrik* yakın-halka ve $N = N_c$ ise N yakın-halkasına *sabit* yakın-halka denir.

Örnek 2.1.8. ([22]) $(M(\Gamma))_0 = M_0(\Gamma)$ve $(M(\Gamma))_c = M_c(\Gamma)$ dır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}(M(\Gamma))_0 &= \{f \in M(\Gamma) \mid f \circ 0 = 0\} \\ &= \{f \in M(\Gamma) \mid f(0) = 0\} \\ &= M_0(\Gamma)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(M(\Gamma))_c &= \{f \in M(\Gamma) \mid f \circ 0 = f\} \\ &= \{f \in M(\Gamma) \mid f \text{ } sabit\} \\ &= M_c(\Gamma)\end{aligned}$$

dır.

Böylece, $M_0(\Gamma)$ 0-simetrik; $M_c(\Gamma)$ bir sabit yakın-halkadır.

Teorem 2.1.9. ([24]) Bir N yakın-halkası için $N = N_0 + N_c$ dir.

İspat: $n \in N$ için,

$$[n - (n0)]0 = \big[n + \big((-n)0\big)\big]0 = n0 + \big((-n)0\big)0 = n0 + (-n)0 = 0$$

Buradan,

$$n - (n0) \in N_0$$

dır. Üstelik $\forall\, m \in N$ için,

$$(n0)m = n0$$

olduğundan

$$n0 \in N_c$$

ve dolayısıyla

$$n = [n - (n0)] + n0$$

şeklinde yazılır. Bu ise ispatı tamamlar.

Dolayısıyla, bir N yakın-halkasında $\forall n \in N$ için,

$$n = n_0 + n_c$$

olacak şekilde $\exists n_0 \in N_0$ ve $\exists n_c \in N_c$ vardır.

$(G,+)$ bir grup, $(N,+)$ ve $(K,+)$ 'da iki alt grubu olsun. Eğer, $N \cap K = \{0\}$, $N + K = G$ ve $(N,+)$ alt grubu $(G,+)$ 'da normal ise, $(G,+)$ grubuna; $(N,+)$ alt grubunun $(K,+)$ alt grubuyla bir yarı-direkt çarpımı adı verilir.

Sonuç 2.1.10. ([23]) Bir $(N,+,\cdot)$ yakın-halkası için, $(N,+)$ grubu, $(N_0,+)$ ve $(N_c,+)$ altgruplarının bir yarı-direkt çarpımıdır.

İspat: $x \in N_0 \cap N_c$olsun. Bu durumda,

$$x = n0$$

olacak şekilde $n \in N$ vardır ve

$$x0 = 0$$

dır. O halde,

$$0 = x0 = (n0)0 = n(00) = n0 = x$$

yani, $N_0 \cap N_c = \{0\}$ dır. Teorem 2.1.9 'dan $N = N_0 + N_c$ dir. Son olarak, $(N_0,+)$ 'nın $(N,+)$ 'da normal olduğunu gösterelim. Eğer $m \in N_0$ ve $y \in N$ ise, bu durumda

$$(y + m - y)0 = (y0) + (m0) + (-y)0 \tag{1}$$

burada,

$$m0 = 0$$

olduğundan, (1) ifadesi,

$$(y0) + (-y)0 = 0$$

halini alır. Bu ise, $(N_0, +)$ ’nın $(N, +)$ ’da normal olduğunu gösterir.

Tanım 2.1.11. ([22]) $(N, +, \cdot)$ bir yakın-halka olsun.

a) Eğer $d \in N$ ve $\forall a, b \in N$ için,

$$d(a + b) = da + db$$

sağlanıyorsa, $d \in N$ ’ye bir dağılmalı eleman denir. N yakın-halkasının tüm dağılmalı elemanlarının cümlesi N_d ile gösterilir. Eğer $N = N_d$ ise, N ’ye bir *dağılmalı* yakın-halka adı verilir.

b) Eğer $(N, +)$ değişmeli grup ise N ’ye bir *abelyen* yakın-halka, $(N, \cdot)$ değişmeli yarı-grup ise, N ’ye bir *komutatif* yakın-halka denir.

c) Eğer $\forall n \in N$ için $n = ne$ olacak şekilde bir $e \in N$ varsa e ’ye N ’nin sağ birimi, $n = en$ ise sol birimi, e hem sağ hem de sol birim ise bu taktirde e ’ye N ’nin birimi denir. Eğer $(N, \cdot)$ bir monoid ise N ’ye *birimli* bir yakın-halka denir. Eğer $(N - \{0\}, \cdot)$ bir grup ise, N ’ye bir *yakın-cisim* adı verilir.

2.2. N-Gruplar

Halkalarda modül kavramının, yakın-halkalara aktarılmasıyla oluşan N-grup kavramı aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 2.2.1 ([22]) $(\Gamma, +)$ bir grup ve N bir yakın halka olsun.

$$\mu : N \times \Gamma \rightarrow \Gamma$$

$$(n, \gamma) \rightarrow n\gamma$$

alalım. Eğer $\forall x, y \in N$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için;

$$(x + y)\gamma = x\gamma + y\gamma$$

ve

$$(xy)\gamma = x(y\gamma)$$

şartları sağlanıyorsa (Γ, μ) ikilisine bir N-grup yani N üzerinde yakın-modül denir. Kısaca N^{Γ} ile gösterilir. Eğer N, birimi 1 olan birimli bir yakın-halka ise, $\forall\gamma \in \Gamma$ için,

$$1\gamma = \gamma$$

şartını sağlayan Γ N-grubuna, bir üniter N-grup denir.

Örnekler 2.2.2. a) N bir yakın-halka olsun.

$$\mu : N \times N \to N$$

$$(x, y) \to xy$$

altında $(N, +)$ bir N-gruptur. Bu N-grup kısaca N^N ile gösterilir.

b) Γ bir grup olsun. Bu durumda,

$$\mu : M(\Gamma) \times \Gamma \to \Gamma$$

$$(f, \gamma) \to f(\gamma)$$

altında, Γ bir $M(\Gamma)$-gruptur. Gerçekten, $\forall f, g \in M(\Gamma)$ ve $\forall\gamma \in \Gamma$ için,

$$(f + g)\gamma = (f + g)(\gamma) = f(\gamma) + g(\gamma) = f\gamma + g\gamma$$

ve

$$(fg)\gamma = (fg)(\gamma) = f\big(g(\gamma)\big) = f(g\gamma)$$

sağlanır.

N-grup kavramıyla ilgili bazı temel özellikler aşağıdadır.

Özellikler 2.2.3. N bir yakın halka ve Γ bir N-grup olsun. Bu durumda,

a) $\forall\gamma \in \Gamma$ için $0\gamma = 0_{\Gamma}$,

b) $\forall\gamma \in \Gamma$ ve $\forall x \in N$ için $(-x)\gamma = -x\gamma$,

c) $\forall x \in N_0$ için $x0_{\Gamma} = 0_{\Gamma}$,

d) $\forall\gamma \in \Gamma$ ve $\forall n \in N_c$ için $n\gamma = n0_{\Gamma}$ dır.

İspat: a) $\forall\gamma \in \Gamma$ için,

$$0\gamma = (0+0)\gamma = 0\gamma + 0\gamma$$

ve dolayısıyla $0\gamma = 0_\Gamma$ dır.

b) $\forall\gamma \in \Gamma$ ve $\forall \mathrm{x} \in N$ için,

$$(-\boldsymbol{x})\gamma = (0 - \mathrm{x})\gamma = 0\gamma - \mathrm{x}\gamma = 0_\Gamma - x\gamma = -\mathrm{x}\gamma$$

dir.

c) $\forall \mathrm{x} \in N_0$ için,

$$x0_\Gamma = x(00_\Gamma) = (x0)0_\Gamma = 00_\Gamma = 0_\Gamma$$

dır.

d) $\forall\gamma \in \Gamma$ ve $\forall \mathrm{n} \in N_c$ için,

$$n\gamma = (\mathrm{n}0)\gamma = \mathrm{n}(00_\Gamma) = n0_\Gamma$$

elde edilir.

2.3. Yakın-halkaların Alt Yapıları

Tanım 2.3.1. ([22]) N bir yakın-halka ve $(M,+)$, $(N,+)$ 'nın bir alt grubu olsun. Eğer, $\forall m_1, m_2 \in M$ için $m_1 m_2 \in M$ sağlanıyorsa, M 'ye N 'nin bir *alt yakın-halkası* denir.

Örnek 2.3.2. N_0 ve N_c, N yakın-halkasının alt yakın-halkalarıdır. Gerçekten, $\forall x, y \in N_0$ için,

$$(x-y)0 = x0 - y0 = 0 - 0 = 0$$

yani, $(N_0,+)$ $(N,+)$ 'nın bir alt grubudur. $\forall x, y \in N_0$ için,

$$(xy)0 = x(y0) = x0 = 0$$

dır. O halde $N_0 N_0 \subseteq N_0$ olur. Şimdi, $\forall x, y \in N_c$ için,

$$(x-y)0 = x0 - y0 = x - y$$

yani,$(x-y) \in N_c$ olur. Bu ise, $(N_c,+)$ grubunun $(N,+)$ 'nın bir alt grubu olduğunu gösterir. $\forall x, y \in N_c$ için,

$$(xy)0 = x(y0) = xy$$

dir. O halde $N_cN_c \subseteq N_c$ elde edilir.

Tanım 2.3.3. N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Γ 'nın

$$N\Delta \subseteq \Delta$$

şartını sağlayan bir Δ alt grubuna Γ 'nın bir N-alt grubu denir ve $\Delta \leq_N \Gamma$ ile gösterilir.

2.4. Homomorfizm ve İdealler

Tanım 2.4.1. N ve M iki yakın-halka ve $h: N \rightarrow M$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in N$ için,

$$h(x + y) = h(x) + h(y)$$

ve

$$h(xy) = h(x)h(y)$$

şartları sağlanıyorsa, h fonksiyonuna bir *yakın-halka homomorfizmi* denir.

Bu tanımlarla beraber, monomorfizm, epimorfizm, izomorfizm ve otomorfizm kavramları için, yakın-halka teorisinde farklı bir tanım yoktur. Eğer N yakın-halkasından M yakın-halkasına bir monomorfizm, yani birebir homomorfizm, varsa N yakın-halkası M 'ye gömülebilirdir denir.

Önerme 2.4.2. ([23]) N ve M iki yakın-halka ve $h: N \rightarrow M$ yakın-halka homomorfizmi olsun. Bu durumda,

a) $h(N)$ görüntüsü, N 'nin bir alt yakın-halkasıdır.

b) Eğer T, M 'nin bir alt yakın-halkası ise, bu taktirde $h^{-1}(T)$ 'de N 'nin bir alt yakın-halkasıdır.

c) $h(N_0) \subseteq M_0$ dır.

d) $h(N_c) \subseteq M_c$ dir.

e) Eğer h bir izomorfizm ise, h^{-1} 'de bir izomorfizmdir.

İspat: a) $h(N)$ 'nin N 'nin bir alt grubu olduğu açıktır. Şimdi,

$$a = h(x), b = h(y) \in h(N)$$

alınsın. O halde,

$$ab = h(x)h(y) = h(xy) \in h(N)$$

olur. Bu ise, $h(N)$ 'nin, M 'nin bir alt yakın-halkası olduğunu gösterir.

b) T M 'nin bir alt yakın-halkası olsun. $h^{-1}(T)$ 'nin N 'nin bir alt grubu olduğu açıktır. Eğer, $h(x),\ h(y) \in T$ ise,

$$h(xy) = h(x)h(y) \in T$$

yani,

$$xy \in h^{-1}(T)$$

olur. Dolayısıyla $h^{-1}(T),\ N$ 'nin bir alt yakın-halkasıdır.

c) $\forall n_0 \in N_0$ için,

$$h(n_0)0_M = h(n_0)h(0_N) = h(n_0 0_N) = h(0_N) = 0_M$$

olur. Bu ise, $h(N_0) \subseteq M_0$ olduğu anlamına gelir.

d) $\forall n_c \in N_c$için,

$$h(n_c)0_M = h(n_c)h(0_N) = h(n_c 0_N) = h(n_c)$$

elde edilir. Buradan, $\forall n_c \in N_c$ için, $h(n_c) \in M_c$, yani $h(N_c) \subseteq M_c$ sonucuna ulaşılır.

e) $h: N \to M$ bir izomorfizm olsun. Bu durumda, $h^{-1}: M \to N$ bir grup izomorfizmidir. Şimdi, $u, v \in M$ alalım. Bu durumda, $h(x) = u$ ve $h(y) = v$ olacak şekilde tek $x, y \in N$ elemanları vardır. O halde,

$$\begin{aligned} h^{-1}(uv) &= h^{-1}(h(x)h(y)) \\ &= h^{-1}\big(h(xy)\big) \\ &= xy \\ &= h^{-1}(h(x))h^{-1}(h(y)) \\ &= h^{-1}(u)h^{-1}(v) \end{aligned}$$

olur. Bu ise, ispatı tamamlar.

Tanım 2.4.3. ([22]) N bir yakın-halka ve I, N 'nin bir normal alt grubu olsun. Bu durumda, eğer,

a) $IN \subseteq I$

b) $\forall x, y \in N$ ve $\forall i \in I$ için, $x(y+i) - xy \in I$

şartları sağlanıyorsa, I 'ya N yakın-halkasının bir *ideali* denir ve $I \trianglelefteq N$ ile gösterilir. Eğer, sadece a) şartı sağlanıyorsa I, N 'nin bir sağ ideali, sadece b) şartı sağlanıyorsa I, N 'nin bir sol ideali adını alır ve sırasıyla $I \trianglelefteq_r N$ ve $I \trianglelefteq_l N$ ile gösterilir.

Not: a) N bir yakın-halka ve $I \trianglelefteq N$ ise, $N/_I$ bölüm yakın-halkası, bölüm halkasında olduğu gibi,

$$N/_I = \{n + I \mid n \in N\}$$

şeklinde tanımlanır.

b) $\{0\}$ ve N, N yakın-halkasının idealleridir. Bunlara N 'nin aşikar idealleri denir.

c) N ve M iki yakın-halka ve $h \in Hom(N, M)$ ise,

$$çekh = \{n \in N \mid h(n) = 0_M\}$$

cümlesine h homomorfizminin çekirdeği denir.

Tanım 2.4.4. ([22]) Eğer N yakın-halkasının, bir M alt yakın-halkası için, $MN \subseteq M$ ve $NM \subseteq M$ şartları sağlanıyorsa, M, N yakın-halkasının bir *invaryant alt yakın-halkasıdır* denir. Burada N 'nin yönüne göre M sağ ya da sol invaryant alt yakın-halka adını alır.

Örnek 2.4.5. ([22]) N bir yakın-halka olsun. Bu durumda,

a) $N_0 \trianglelefteq_l N$ dir, fakat $N_0 \trianglelefteq N$ olmak zorunda değildir.

b) N_c**,** N 'nin bir invaryant alt yakın-halkasıdır, fakat ne sağ ne de sol ideali olmak zorunda değildir.

Bunların doğruluğu aşağıda gösterilmiştir.

a) $\forall x, y \in N$ ve $n \in N_0$ için,

$$(x + n - x)0 = x0 + n0 - x0 = x0 - x0 = 0$$

yani, N_0, N 'nin bir normal alt grubudur. Şimdi, $\forall x, y \in N$ ve $n \in N_0$ için,

$$[x(y + n) - xy]0 = x(y0 + n0) - xy0 = xy0 - xy0 = 0$$

olur. Bunun anlamı $\forall x, y \in N$ ve $n \in N_0$ için,

$$x(y+n) - xy \in N_0$$

olmasıdır. Bu ise $N_0 \trianglelefteq_l N$olduğunu gösterir. Şimdi, $N_0 \trianglelefteq N$ olmak zorunda olmadığını göstermek için, bir örnek yeterlidir. R reel sayılar cümlesi ve $N = M(R)$ olsun. $1 \in M(R)$ ile birim dönüşüm gösterilirse, $1 \in N_0 = M_0(R)$ dir. $\phi \in M(R)$ dönüşümü,

$$\phi : R \to M(R)$$
$$x \to 1_R$$

ile tanımlansın. Bu durumda,

$$(1 \circ \phi)(0) = 1(1_R) = 1_R \neq 0$$

yani,

$$1 \circ \phi \notin M_0(R) = N_0$$

olur. Bu ise, $M_0(R)$ 'nin $M(R)$ 'nin bir (sağ) ideali olmadığını gösterir.

b) $\forall x \in N$ ve $\forall n \in N_c$ için,

$$(xn)0 = x(n0) = xn$$

yani, $NN_c \subseteq N_c$ dir. Yine, $\forall x \in N$ ve $\forall n \in N_c$ için,

$$(nx)0 = n0 = n = nx$$

olduğundan, $N_cN \subseteq N_c$ olur. O halde N_c, N 'nin bir invaryant alt yakın-halkasıdır. N_c, N 'nin genelde ne sağ ne de sol idealidir, çünkü $(N_c, +)$, $(N, +)$ 'nın genelde bir normal alt grubu değildir. Örneğin, $(\Gamma, +)$ abelyen olmayan bir grup ve $\gamma, \delta \in \Gamma$ elemanları $\gamma + \delta \neq \delta + \gamma$ olacak şekilde seçilsin. Şimdi, bir f_γ dönüşümü

$$f_\gamma : \Gamma \to \Gamma$$
$$x \to \gamma$$

ile tanımlansın. Bu durumda, $f_\gamma \in M_c(\Gamma)$ 'dır. $1 \in M(\Gamma)$ birim dönüşüm ise, bu durumda,

$$(1 + f_\gamma - 1)(0_\Gamma) = 0_\Gamma + \gamma - 0_\Gamma = \gamma$$

olur, fakat

$$(1 + f_\gamma - 1)(\delta) = \delta + \gamma - \delta \neq \gamma$$

dır. Bu ise,

$$(1 + f_\gamma - 1) \notin M_c(\Gamma)$$

olduğunu gösterir. Buradan, $M_c(\Gamma)$, $M(\Gamma)$ 'nın bir normal alt grubu değildir. O halde, $M_c(\Gamma)$ 'nın $M(\Gamma)$ 'da normal olması için gerek ve yeter şart Γ 'nın bir abel grubu olmasıdır.

Bir N yakın-halkasında, her zaman $N = N_0 + N_c$ olduğu Teorem 2.1.9 ile verilmişti. Aşağıdaki önerme aynı durumun yakın-halkaların sağ idealleri için de geçerli olduğunu göstermektedir.

Önerme 2.4.6. ([22]) N bir yakın-halka ve $A \trianglelefteq_r N$ olsun. Bu durumda,

$$A = A \cap (N_0 + N_c) = A \cap N_0 + A \cap N_c = A_0 + A_c$$

dir.

İspat: Teorem 2.1.9 'dan $\forall a \in A$ için,

$$a = n_0 + n_c$$

olacak şekilde, $\exists n_0 \in N_0$ ve $\exists n_c \in N_c$ vardır. $A \trianglelefteq_r N$ olduğundan,

$$n_c = n_c 0 = (n_0 + n_c)0 = a0 \in A$$

dolayısıyla, n_0 ve n_c A idealinin elemanlarıdır. Bu ise $A = A_0 + A_c$ olduğunu ispatlar.

Tanım 2.4.7. ([22]) $(N, +, \cdot)$ bir yakın-halka olsun.

a) $\{x \in N \mid xn = nx,\ \forall n \in N\}$ cümlesine N 'nin merkezi denir ve $C(N)$ ile gösterilir. $C(N)$ 'nin elemanları merkezil elemanlar olarak isimlendirilir.

b) $\{n \in N \mid an = na\}$ cümlesine N 'nin a elemanının merkezi denir ve $C_a(N)$ ile gösterilir.

c) Bir $e \in N$ için $e = e^2$ ise e 'ye idempotent eleman denir. Eğer $\forall n \in N$ için $en = ne$ ise e 'ye merkezil idempotent denir.

Tanım 2.4.8. ([15]) $(N, +, \cdot)$ bir yakın-halka olsun.

a) $\forall a, b, c \in N$ için $abc = acb$ ise N 'ye *sağ değişmeli*,

b) $\forall a,b,c \in N$ için $abc = bac$ ise N 'ye *sol değişmeli*,

c) $\forall a,b,c,d \in N$ için $abcd = acbd$ ise N 'ye *medial* yakın-halka denir.

Birkenmeier ve Heatherly [15] bu özdeşliklere "Üç Özdeşlikler" adını vermiş ve bu üç özdeşliği sağlayan yakın-halkalar teorisini geliştirmişlerdir. Yakın-halka literatürünün incelenmesi sonucunda bu özdeşliklerden birini sağlayan birçok yakın-halkanın olduğu görülmüştür. Pilz yakın-halkalarda sağ değişmelilik için "zayıf değişmeli" kavramını kullanmıştır ([22]). Hem sağ hem de sol değişmeli olan yakın-halkalara değişmeli yakın-halkalar denir.
Ayrıca, sonraki bölümlerde üzerinde sıklıkla durulacak olan diğer özdeşlikler aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.4.9. ([24],[25]) $(N,+,\cdot)$ bir yakın-halka olsun.

a) $\forall a,b,c \in N$ için $abc = acbc$ ise N yakın-halkasına *sağ iç dağılmalı(RSD),*

b) $\forall a,b,c \in N$ için $abc = abac$ ise N yakın-halkasına *sol iç dağılmalı(LSD),*

c) $\forall a \in N$ için $aN = Na$ ise N yakın-halkasına *alt değişmeli* yakın-halka denir.

Örnek 2.4.10. Çarpma işlemi aşağıdaki tablo ile verilen $(N,+)$ Klein-4-grubu alınsın [22];

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	a	a
b	0	b	b	b
c	0	c	c	c

Bu durumda, $(N,+,\cdot)$ **sağ değişmeli bir yakın-halkadır.**

Örnek 2.4.11. $N = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ üzerinde toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki tablolar ile verilen bir yakın-halkadır **[22].**

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	0	5	6	7	4
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	0	1	2	7	4	5	6
4	4	7	6	5	0	3	2	1
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	5	4	7	2	1	0	3
7	7	6	5	4	3	2	1	0

.	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	0	2	0	0	0	0
3	0	3	2	1	4	5	6	7
4	0	4	2	6	4	0	6	2
5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	4	4	0	6	2
7	0	7	0	7	0	5	0	5

$(N, +, \cdot)$ yakın-halkası için $643 \neq 463$ olduğundan N sol değişmeli bir yakın-halka değildir. Üstelik, N LSD ve alt değişmeli de değildir. Diğer taraftan, $M = \{0,2,5,7\}$, N 'nin bir alt yakın-halkası ve $\forall a \in M$ için $aM = Ma$ olduğundan, M alt değişmeli bir yakın-halkadır. M aynı zamanda sol değişmeli ve LSD yakın-halkadır.

3. P-KUVVETLİ REGÜLER YAKIN-HALKALAR

Yakın-halka üzerinde regülerlik ve kuvvetli regülerlik kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler bilinmektedir [22]. P-regülerlik kavramı ise ilk kez V. A. Andrunakievich [19] tarafından halka yapısında tanımlanmış ve daha sonra bu kavram S. J. Choi [20] tarafından P-regüler yakın-halkalar olarak genişletilmiştir. Bu bölümde P. Dheena ve C. Jenila [21] tarafından verilen P-kuvvetli regüler yakın-halka yapısı ve bunun P-regüler yakın-halkalarla ilişkileri verilecektir.

Bu bölümde tüm yakın-halkalar aksi belirtilmedikçe sıfır-simetrik olarak alınacaktır.

3.1. Yakın-halkaların P-idempotent Elemanları

Tanım 3.1.1. ([8]) N bir yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$ olsun. Herhangi bir $a \in N$ için $a^2 \in P$ olması $a \in P$ olmasını gerektiriyorsa N 'nin P idealine tam yarı asal ideal denir.

Tanım 3.1.2. ([21]) N bir yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$ olsun. $e \in N$ için $e - e^2 \in P$ ise e 'ye *P-idempotent eleman* denir.

N 'nin boştan farklı A, B alt cümleleri için $(A: B) = \{n \in N \mid nB \subseteq \mathrm{A}\}$ ile tanımlanır.

Lemma 3.1.3. ([22]) A, N 'nin bir ideali ve B, N 'nin bir alt cümlesi ise $(A: B)$, N 'nin bir sol idealidir.

İspat: A, N 'nin bir ideali ve B, N 'nin bir alt cümlesi olsun. Bu durumda $(A: B) = \{n \in N \mid nB \subseteq \mathrm{A}\}$ dir.

$i)$ $\forall x, y \in (A: B)$ için,

$$(x - y)B = xB - yB \subseteq A$$

olduğundan,

$$x - y \in (A: B)$$

dir. Dolayısıyla $(A: B)$, N 'nin alt grubudur.

$ii)$ $\forall x \in (A: B)$ ve $\forall n \in N$ için A ideal olduğundan,

$$(n + x - n)B = nB + xB - nB \subseteq A$$

yani

$$n + x - n \in (A:B)$$

dir. Dolayısıyla $(A:B)$ N'nin normal alt grubudur.

$iii)$ $\forall x \in (A:B)$ ve $\forall n, m \in N$ için A ideal olduğundan,

$$(n(m + x) - nm)B = [n(mB + xB) - nmB] \subseteq A$$

yani

$$n(m + x) - nm \in (A:B)$$

dir. Dolayısıyla $(A:B)$ N'nin bir sol idealidir.

Lemma 3.1.4. ([26]) N bir yakın-halka ve P, N 'nin bir tam yarı asal ideali olsun. Bu durumda herhangi $a, b \in N$ için $ab \in P$ olması $ba \in P$ ve $aNb \subseteq P$ olmasını gerektirir.

İspat: Kabul edelim ki; P, N 'nin bir tam yarı asal ideali ve herhangi $a, b \in N$ için $ab \in P$ olsun. N sıfır-simetrik olduğundan $NP \subseteq P$ dir. Bu durumda $ab \in P$ olduğundan,

$$(ba)^2 = baba \in NPN \subseteq P$$

dir. Dolayısıyla P bir tam yarı asal ideal olduğundan $ba \in P$ dir.
Ayrıca $\forall n \in N$ için $ba \in P$ olduğundan,

$$(anb)^2 = anbanb \in NPN \subseteq P$$

yani

$$anb \in P$$

dir.

Lemma 3.1.5. ([21]) P, N 'nin bir tam yarı asal ideali ve S, N 'nin boştan farklı bir alt cümlesi olmak üzere $(P:S)$ N 'nin bir idealidir.

İspat: Lemma 3.1.3 'den $(P:S)$, N 'nin bir sol idealidir. $x \in (P:S)$ olsun. Bu durumda her bir $s \in S$ için $xS \subseteq P$ olması $xs \in P$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla Lemma 3.1.4 'ten $sx \in P$ dir. $n \in N$ olsun.

$$(xns)^2 = xn(sx)ns \in NPN \subseteq P$$

ve P bir tam yarıasal ideal olduğundan $\forall s \in S$ için $xns \in P$ dir. Bu durumda $xnS \subseteq P$ dir. Yani $xn \in (P:S)$ dir. Dolayısıyla $(P:S)$ N 'nin bir idealidir.

Lemma 3.1.6. N bir yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$ olsun. $\forall n \in N$ ve $\forall p \in P$ için $n + p = p' + n$ olacak şekilde $p' \in P$ vardır.

İspat: N bir yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$ olsun. Bu durumda P, N 'nin bir normal altgrubu olduğundan $\forall n \in N$ ve $\forall p \in P$ için,

$$n + p = n + p - n + n = p' + n$$

dir.

Lemma 3.1.7. ([21]) N bir yakın-halka ve P, N 'nin bir tam yarı asal ideali olsun. Eğer $a \in N$ bir P-idempotent eleman ise bu taktirde herhangi bir $n \in N$ ve bazı $p \in P$ için $an = ana + p$ dir.

İspat: $a \in N$ bir P-idempotent eleman olsun. Bu durumda $a - a^2 \in P$ yani $a^2 = a + p_1$ olacak şekilde $p_1 \in P$ vardır. $n \in N$ olsun. $p_2, p_3 \in P$ için,

$$\begin{aligned}(an - ana)a &= ana - (ana^2)\\ &= ana - (ana^2) + ana - ana\\ &= ana - an(a + p_1) + ana - ana\\ &= ana + p_2 - ana\\ &= ana - ana + p_3 \in P\end{aligned}$$

dir. P bir tam yarıasal ideal olup Lemma 3.1.4 'ten $ab \in P$ iken $ba \in P$ ve $aNb \subseteq P$ olduğundan,

$$an(an - ana) \in P$$

ve

$$ana(an - ana) \in P$$

dir. Dolayısıyla,

$$an(an - ana) - ana(an - ana) = (an - ana)(an - ana) = (an - ana)^2 \in P$$

dir. Bu durumda P bir tam yarı asal ideal olduğundan $(an - ana) \in P$ dir. O halde bazı $p \in P$ için $an = ana + p$ dir.

3.2. Yakın-halkalarda P-regülerlik ve P-kuvvetli Regülerlik

Tanım 3.2.1. ([22]) N bir yakın-halka olsun. $\forall a \in N$ için $a = axa$ olacak şekilde bir $x \in N$ varsa N yakın-halkasına *regüler-yakın halka* denir.

Tanım 3.2.2. ([22]) N bir yakın-halka olsun. $\forall a \in N$ için $a = xa^2$ olacak şekilde bir $x \in N$ varsa N yakın-halkasına *kuvvetli regüler yakın-halka* denir.

Tanım 3.2.3. ([20]) N bir yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$ olsun. $\forall a \in N$ ve bazı $p \in P$ için $a = axa + p$ olacak şekilde bir $x \in N$ varsa N yakın-halkasına P*-regüler yakın-halka* denir.

Tanım 3.2.4. ([21]) N bir yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$ olsun. $\forall a \in N$ ve bazı $p \in P$ için $a = xa^2 + p$ olacak şekilde bir $x \in N$ varsa N yakın-halkasına P*-kuvvetli regüler yakın-halka* denir.

Eğer $P = 0$ ise bu durumda P-kuvvetli regüler yakın-halka bir kuvvetli regüler yakın-halkadır. Eğer N bir kuvvetli regüler ise N 'nin bütün P idealleri için N P-kuvvetli regülerdir. Fakat N yakın-halkası N 'nin herhangi bir P ideali için P-kuvvetli regüler ise N 'nin kuvvetli regüler olması gerekmez.

Örnek 3.2.5. $N = \{0, a, b, c\}$ Klein-4 grubu olsun. N 'deki çarpma işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	a	b	b
c	0	a	b	c

Bu durumda $(N, +, \cdot)$ bir yakın halkadır [22]. N 'nin idealleri $\{0\}$, $\{0, a\}$ ve N dir. $x \in N$ için $a \neq xa^2$ olduğundan N yakın-halkası kuvvetli regüler değildir. Fakat $P = \{0, a\}$ alındığında $\forall y \in N$ ve bazı $p \in P$ için $y = xy^2 + p$ olacak şekilde bir $x \in N$ olduğundan N yakın- halkası bir P-kuvvetli regüler yakın-halkadır.

Teorem 3.2.6. ([21]) N bir P-kuvvetli regüler yakın-halkadır $\Leftrightarrow$ N bir P-regüler yakın-halka ve P bir tam yarı asal idealdir.

İspat: $\Rightarrow$: Varsayalım ki N bir P-kuvvetli regüler yakın-halka ve $a \in N$ için $a^2 \in P$ olsun. N bir P-kuvvetli regüler yakın-halka olduğundan bazı $p_1 \in P$ için $a = xa^2 + p_1$ olacak şekilde bir $x \in N$ vardır. O halde $a \in P$ dir. Dolayısıyla P bir tam yarı asal idealdir. $a \in N$ ve $p_1, p_2 \in P$ için,

$$\begin{aligned}(a - axa)a &= a^2 - axa^2 \\ &= a^2 - a(a + p_1) \\ &= a^2 - a(a + p_1) + a^2 - a^2 \\ &= a^2 + p_2 - a^2 \in P\end{aligned}$$

dir. P tam yarıasal ideal ve $ab \in P$ iken Lemma 3.1.4 'den $ba \in P$ ve $aNb \subseteq P$ olduğundan,

$$a(a - axa) \in P$$

ve

$$axa(a - axa) \in P$$

dir. Dolayısıyla,

$$a(a - axa) - axa(a - axa) = (a - axa)(a - axa) = (a - axa)^2 \in P$$

ve P tam yarıasal ideal olduğundan $a - axa \in P$ dir. O halde bazı $p \in P$ için $a = axa + p$ dir. Yani N, P-regüler yakın-halkadır.

$\Leftarrow$: Varsayalım ki N, P-regüler yakın-halka ve P bir tam yarıasal ideal olsun. Bu durumda $a \in N$ ve bazı $p \in P$ için $a = axa + p$ olacak şekilde $x \in N$ vardır. Dolayısıyla $p_1, p_2 \in P$ için,

$$\begin{aligned}xa - (xa)^2 &= xa - x(axa) \\ &= xa - x(a - p_1) \\ &= xa - x(a - p_1) + xa - xa \\ &= xa + p_2 - xa \in P\end{aligned}$$

olduğundan xa bir P-idempotent elemandır. O halde $p, p' \in P$ için;

$$a = (axa + p)xa + p$$

$$= a(xax)a + p^I$$

dir. P bir tam yarıasal ideal ve a bir P-idempotent iken bazı $p \in P$ için $an = ana + p$ olduğundan $p^I, p^{II}, p^{III}, p^{IV} \in P$ için,

$$\begin{aligned} a &= a(xaxxa + p^{II})a + p^I \\ &= a(xax^2a^2 + p^{III}) + p^I \\ &= a(xax^2a^2 + p^{III}) - axax^2a^2 + axax^2a^2 + p^I \\ &= axax^2a^2 + p^{IV} \\ &= ya^2 + p^{IV} \end{aligned}$$

olacak şekilde $y = axax^2 \in N$ vardır. O halde N P-kuvvetli regüler yakın-halkadır.

Tanım 3.2.7. ([22]) $A, B, C \trianglelefteq N$ olmak üzere $BC \subseteq A$ olması $B \subseteq A$ veya $C \subseteq A$ olmasını gerektiriyorsa, N 'nin A idealine *asal (0-asal) ideal* denir.

Tanım 3.2.8. ([21]) $A, B, C \trianglelefteq N$ olmak üzere $P \trianglelefteq N$ için $BC + P \subseteq A$ olması $B \subseteq A$ veya $C \subseteq A$ olmasını gerektiriyorsa, N 'nin A idealine P-*asal ideal* denir.

Eğer $P = 0$ ise bu taktirde N 'nin bir P-asal ideali aynı zamanda N 'nin bir asal idealidir. Eğer A N 'nin bir asal ideali ise, bu durumda N 'nin tüm P idealleri için A bir P-asal idealdir. Fakat tersi genelde doğru değildir.

Örnek 3.2.9. $N = \{0, a, b, c\}$ Klein-4 grubu olsun. N üzerinde çarpma işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
c	0	a	b	c

Bu durumda $(N, +, \cdot)$ bir yakın halkadır [22]. N 'nin idealleri $\{0\}$, $\{0, a\}$, $\{0, b\}$ ve N dir.$\{0, a\}\{0, b\} \subseteq \{0\}$ iken $\{0, a\} \nsubseteq \{0\}$ ve $\{0, b\} \nsubseteq \{0\}$ olduğundan N 'nin $\{0\}$ ideali bir asal ideal değildir. Fakat $P = \{0, b\}$ için $\{0, a\}\{0, b\} + \{0, b\} \nsubseteq \{0\}$ olduğundan $\{0\}$ ideali bir P-asal idealdir.

Lemma 3.2.10. ([27]) N bir kuvvetli regüler yakın-halka olsun. Bu durumda,

(1) N 'nin her N-altgrubu bir idealdir.

(2) N 'nin her asal ideali maksimaldir.

(3) N 'nin her I ideali için $I = I^2$ dir.

Teorem 3.2.11. ([21]) N bir P-kuvvetli regüler yakın-halka olsun. Bu durumda,

(1) Herhangi bir $a \in N$ için $Na + P$, N 'nin bir idealidir.

(2) P 'yi içeren N'nin her P-asal ideali maksimaldir.

(3) N 'nin her I ideali için $I + P = I^2 + P$ dir.

İspat: (1) Varsayalım ki N bir P-kuvvetli regüler yakın-halka olsun. Teorem 3.2.7 'den N bir P-regüler yakın-halka ve P bir tam yarı asal idealdir. $a \in N$ olsun. Bu durumda, $x \in N$ ve bazı $p_1 \in P$ için $a = axa + p_1$ dir. O halde xa bir P-idempotenttir. Herhangi bir $n \in N$ ve $p_2, p_3 \in P$ için,

$$\begin{aligned} na &= n(axa + p_1) \\ &= n(axa + p_1) - naxa + naxa \\ &= p_2 + naxa \\ &= naxa + p_3 \end{aligned}$$

olması $na \in Nxa + P$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $Na + P \subseteq Nxa + P$ dir. Ayrıca $Nxa + P \subseteq Na + P$ olduğu kolaylıkla görülebilir. O halde $Na + P = Nxa + P$ dir. $S = \{n - nxa \mid n \in N\}$ olsun. Herhangi bir $n \in N$ ve $p_4, p_5 \in P$ için,

$$\begin{aligned} nxa &= nx(axa + p_1) \\ &= nx(axa + p_1) - nxaxa + nxaxa \\ &= p_4 + nxaxa \\ &= nxaxa + p_5 \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla P tam yarı asal ideal ve $(n - nxa)xa \in P$ olduğundan,

$$(n - nxa)Nxa \subseteq P$$

ve

$$Nxa(n - nxa) \subseteq P$$

dir. S boştan farklı bir cümle ve P tam yarıasal ideal olduğundan $(P:S)$ için $xS \subseteq P$ dir. Bu durumda, $Nxa \subseteq (P:S)$ olmak üzere $\forall s \in S$ için $nxas \in P$ dir. Dolayısıyla,

$$(nxa + p)s = nxas + ps \in P$$

dir. O halde,

$$Nxa + P \subseteq (P:S)$$

elde edilir.

$y \in (P:S)$ olsun. Bu durumda $yS \subseteq P$ dir. Dolayısıyla $y(y - yxa) \in P$ dir. P-tam yarı asal ideal olduğundan $(y - yxa)y \in P$ dir. O halde $y^2 - yxay \in P$ yani, bazı $p^I \in P$ için $y^2 = yxay + p^I$ dir. N bir P-kuvvetli regüler yakın-halka olduğundan bazı $p^{II} \in P$ için $y = zy^2 + p^{II}$ olacak şekilde bir $z \in N$ vardır. Bu durumda bazı $p^{III} \in P$ için $zy^2 = y + p^{III}$ dür. $p^{IV}, p^V \in P$ için,

$$\begin{aligned} zy^2 &= z(yxay + p^I) \\ &= z(yxay + p^I) - zyxay + zyxay \\ &= p^{IV} + zyxay \\ &= zy(xay) + p^V \end{aligned}$$

dir. xa bir P-idempotent olduğundan bazı $p^{VI} \in P$ için $xay = xayxa + p^{VI}$ dır. Dolayısıyla $p^{VII}, p^{VIII} \in P$ için,

$$\begin{aligned} zy^2 &= zy(xayxa + p^{VI}) + p^V \\ &= zy(xayxa + p^{VI}) - zyxayxa + zyxayxa + p^V \\ &= p^{VII} + zyxayxa + p^V \\ &= zyxayxa + p^{VIII} \end{aligned}$$

dir. O halde $y \in Nxa + P$ olması $(P:S) \subseteq Nxa + P$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $(P:S) = Nxa + P = Na + P$ dir. Lemma 3.1.5 ’ten $Na + P$, N ’nin bir idealidir.

(2) A, P ’yi içeren N ’nin bir P-asal ideali ve varsayalım ki N ’nin bir M ideali için $A \subset M$ olsun. $b \in M \backslash A$ alalım. Bu durumda N bir P-kuvvetli regüler yakın-halka olduğundan bazı $p_1 \in P$ için $b = xb^2 + p_1$ olacak şekilde $x \in N$ vardır. $n \in N$ olsun. Bu durumda $p_2, p_3 \in P$ için,

$$nb = n(xb^2 + p_1)$$

$$= n(xb^2 + p_1) - nxb^2 + nxb^2$$

$$= p_2 + nxb^2$$

$$= nxb^2 + p_3$$

dir. Yani $(n - nxb)b \in P$ dir. Lemma 3.1.4 'ten $N(n - nxb)Nb \subseteq P$ dir. Dolayısıyla,

$$\big[\big(N(n - nxb)\big)(Nb)\big] + P \subseteq A$$

dır. A bir P-asal ideal olduğundan,

$$N(n - nxb) \subseteq A$$

veya

$$Nb \subseteq A$$

dır. Farzedelim ki, $Nb \subseteq A$ olsun. Bu durumda,

$$b = xb^2 + p_1 \in Nb + P \text{ ve } Nb + P \subseteq A$$

olduğundan $b \in A$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Farzedelim ki;

$$N(n - nxb) \subseteq A$$

olsun. Bu durumda,

$$n - nxb \in A \subset M$$

dir. $b \in M$ olduğundan $nxb \in M$ dir. O halde $n - nxb \in M$ ve $nxb \in M$ ise $n \in M$ dir. Bu durumda $M = N$ dir. Dolayısıyla, A bir maksimal idealdir.

(3) I, N 'nin P 'yi içeren bir ideali olsun. Kolaylıkla görülür ki; $I^2 + P \subseteq I + P$ dir. $a \in I$ yani, $a \in I + P$ olsun. N bir P-kuvvetli regüler yakın-halka olduğundan bazı $p \in P$ için $a = xa^2 + p$ olacak şekilde bir $x \in N$ vardır. O halde $a = (xa)a + p \in I^2 + P$ dir. Bu durumda $I + P \subseteq I^2 + P$ dir.

3.3 Quasi İdealler

Tanım 3.3.1. ([28]) N bir yakın-halka olsun. $QN \cap NQ \subseteq Q$ olacak şekilde $(N, +)$ grubunun bir Q alt grubu varsa, Q 'ya N 'nin bir *quasi ideali* denir. Sağ N-alt gruplar ve sol N-alt gruplar quasi ideallerdir. Ayrıca quasi ideallerin kesişimi yine bir quasi idealdir.

Lemma 3.3.2. ([28]) N yakın-halkası regüler olmak üzere N 'nin her Q quasi ideali için $QNQ = Q$ dur.

İspat: Q, N 'nin bir quasi ideali ve N yakın-halkası regüler olsun. Bu durumda $QN \cap NQ \subseteq Q$ dur. N yakın-halkası regüler olduğundan $Q \subseteq QNQ$ dur. Ayrıca biliyoruz ki;

$$QNQ \subseteq QN$$

ve

$$QNQ \subseteq NQ$$

dur. Dolayısıyla,

$$Q \subseteq QNQ \subseteq QN \cap NQ \subseteq Q$$

dur. O halde $Q = QNQ$ dur.

Bu durum P-kuvvetli regüler yakın-halkalar içinde genelleştirilebilir.

Lemma 3.3.3. ([20]) N yakın-halkası P-regüler ve $P \trianglelefteq N$ olmak üzere N 'nin her Q quasi ideali $QNQ + P = Q + P$ şeklindedir.

İspat: Farzedelim ki N bir P-regüler yakın-halka ve Q, N 'nin bir quasi ideali olsun. Bu durumda,

$$QNQ \subseteq QN \cap NQ \subseteq Q$$

olduğundan,

$$P + QNQ \subseteq P + QN \cap NQ \subseteq P + Q$$

yazılabilir. $n \in P + Q$ olsun. Bu durumda bazı $p \in P$ ve $q \in Q$ için $n = p + q$ dur. N 'nin P-regülerliğinden $q \in Q$, $x \in N$ ve bazı $p^I \in P$ için $q = p^I + qxq$ şeklinde yazılabilir. O halde $n = p + q = p + p^I + qxq \in P + QNQ$ dur. Dolayısıyla $P + Q \subseteq P + QNQ$ dur.

Teorem 3.3.4. ([20]) N bir P-regüler yakın-halka ise N 'nin bir Q quasi idealinin her elemanı P ve Q 'nun iki elemanının toplamı olarak yazılabilir.

İspat: N bir P-regüler yakın-halka ve Q, N 'nin bir quasi ideali olsun. Eğer $q \in Q$ ise bu durumda bazı $p \in P$ için $q = p + qxq$ olacak şekilde bir $x \in N$ vardır. Quasi idealin tanımından, $qxq \in QNQ \subseteq QN \cap NQ \subseteq Q$ dur. Dolayısıyla $q = p + qxq \in P + Q$ dur.

Tanım 3.3.5. ([22]) N bir yakın-halka olmak üzere $x \neq 0$ iken $x^n = 0$ olacak şekilde n pozitif tamsayısı varsa $x \in N$ 'ye n. mertebeden *nilpotent eleman* denir.

Tanım 3.3.6. ([22]) N bir yakın-halka olmak üzere $\forall a \in N$ için $a \in Na$ ise N 'ye S*-yakın-halka* denir.

Tanım 3.3.7. ([22]) N bir yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$ olsun. $\forall a \in N$ için $a \in Na + P$ ise N 'ye P*-yakın-halka* denir.

Açıkça görülür ki herhangi bir P ideali için S-yakın-halka bir P-yakın-halkadır.

Lemma 3.3.8. ([28]) N yakın-halkası üzerinde aşağıdaki şartlar denktir.

(1) N regülerdir ve sıfırdan farklı nilpotent elemanlara sahip değildir.

(2) N bir S-yakın-halka ve N 'nin her quasi ideali N 'nin bir idempotent sağ N-alt grubudur.

(3) N bir S-yakın-halka ve N 'nin her L_1 ve L_2 sol N-alt grubu için $L_1 \cap L_2 = L_1 L_2$ dir.

Teorem 3.3.9. ([21]) Aşağıdaki şartlar denktir.

(1) N yakın-halkası P-kuvvetli regülerdir.

(2) N bir P-yakın-halka ve N 'nin her Q quasi ideali için,

$$QN + P = Q + P = Q^2 + P$$

dir.

(3) N bir P-yakın-halka ve N 'nin herhangi iki sol N-altgrubu L_1 ve L_2 için,

$$(L_1 + P) \cap (L_2 + P) = L_1 L_2 + P$$

dir.

İspat: (1)⇒(2): N bir P-kuvvetli regüler yakın-halka olduğundan $\forall a \in N$ için $a = xa^2 + p$ olacak şekilde bir $x \in N$ vardır. Bu durumda,

$$a = xa^2 + p = xaa + p \in Na + P$$

dir. Yani N bir P-yakın-halkadır. Q, N ’nin bir quasi ideali olsun. Bazı $p_1 \in P, q \in Q$ ve $n \in N$ için $QN + P$ ’nin herhangi bir x elemanı $x = qn + p_1$ şeklindedir. O halde $p_2, p_3 \in P$ ve $y \in N$ için,

$$x = (qyq + p_2)n + p_1 = q(yqn) + p_3$$

dür. yq bir P-idempotent olduğundan Lemma 3.2.1 ’den $p_4, p_5, p_6 \in P$ için,

$$\begin{aligned} x &= q(yqnyq + p_4) + p_3 \\ &= q(yqnyq + p_4) - qyqnyq + qyqnyq + p_3 \\ &= p_5 + qyqnyq + p_3 \\ &= qyqnyq + p_6 \in QNQ + P \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $QN + P \subseteq QNQ + P$ dir. Lemma 3.3.4 ’den

$$Q + P = QNQ + P \subseteq QN + P \subseteq QNQ + P$$

elde edilir. Bu durumda,

$$Q^2 + P \subseteq QN + P = Q + P$$

dir. $p_1 \in P, q_1 \in Q$ olsun. $p_2, p_3, p_4 \in P$, $q_2, q_3, q_4 \in Q$ ve $n \in N$ için,

$$\begin{aligned} q_1 + p_1 &= q_2 n q_3 + p_2 \\ &= (q_4 + p_3)q_3 + p_2 \\ &= q_4 q_3 + p_4 \in Q^2 + P \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $Q + P \subseteq Q^2 + P$ dir. O halde $QN + P = Q + P = Q^2 + P$ dir.

(2)⇒(3): L_1 ve L_2, N ’nin sol N-altgrupları olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} L_1L_2 + P &\subseteq (L_1 + P) \cap (L_2 + P) \\ &\subseteq \big((L_1 + P) \cap (L_2 + P)\big) + P \\ &= \big((L_1 + P) \cap (L_2 + P)\big)^2 + P \\ &\subseteq (L_1 + P)(L_2 + P) + P \\ &\subseteq L_1L_2 + P \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $(L_1 + P) \cap (L_2 + P) = L_1 L_2 + P$ elde edilir.

(3)⇒(1): $a \in N$ olsun. Na ve N, N ’nin sol N-altgrupları olduğundan,

$$Na + P = NaNa + P$$

ve

$$Na + P = NaN + P$$

yazılabilir. Dolayısıyla,

$$Na + P = NaNa + P = Na^2 + P$$

dir. N bir P-yakın-halka olduğundan,

$$a \in Na + P = Na^2 + P$$

yazılabilir. Dolayısıyla N yakın-halkası bir P-kuvvetli regüler yakın-halkadır.

4. YAKIN-HALKALARIN İDEAL BAĞLANTILI GENELLEŞTİRMELERİ

4.1. Yakın-halkalarda P-merkez Kavramı

Tanım 4.1.1. N bir yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$ olsun.

$$\{x \in N \mid xn - nx \in P, \forall n \in N\}$$

cümlesine N 'nin *P-merkezi* denir ve P-$C(N)$ ile gösterilir. P-$C(N)$ 'nin elemanları P-merkezil elemanlar olarak isimlendirilir.

Eğer $P = 0$ ise, bu taktirde N 'nin P-merkezinin elemanları aynı zamanda N 'nin merkezinin elemanlarıdır. Eğer $x \in C(N)$, ise bu durumda N 'nin tüm P idealleri için $x \in P$-$C(N)$ dir. Fakat genelde, N 'nin bir P-merkezil elemanının, bir merkezil eleman olması gerekmez.

Tanım 4.1.1. N bir yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$olsun.

$$\{n \in N \mid an - na \in P\}$$

cümlesine N 'nin *a elemanının P-merkezi* denir ve P-$C_a(N)$ ile gösterilir.

Eğer $P = 0$ ise bu taktirde a 'nın P-merkezinin elemanları aynı zamanda a 'nın merkezinin elemanlarıdır. Eğer $x \in C_a(N)$ ise bu durumda N 'nin tüm P idealleri için $x \in P$-$C_a(N)$ dir. Fakat genelde, P-$C_a(N)$ 'nin elemanının $C_a(N)$ 'nin elemanı olması gerekmez.

Örnek 4.1.2. $N = \{0, a, b, c\}$ Klein-4 grubu olsun. N 'deki çarpma işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	a	b	b
c	0	a	b	c

Bu durumda $(N, +, \cdot)$ bir yakın halkadır [22]. N 'nin idealleri $\{0\}$, $\{0, a\}$ ve N dir. $P_1 = \{0\}$ olsun. Bu durumda,

$$P_1\text{-}C(N) = C(N) = \{0, c\}$$

$$P_1\text{-}C_0(N) = C_0(N) = N$$

$$P_1\text{-}C_a(N) = C_a(N) = \{0, a, c\}$$

$$P_1\text{-}C_b(N) = C_b(N) = \{0, b, c\}$$

$$P_1\text{-}C_c(N) = C_c(N) = N$$

dir. $P_2 = \{0, a\}$ olsun. Bu durumda,

$$P_2\text{-}C(N) = N$$

$$P_2\text{-}C_0(N) = N$$

$$P_2\text{-}C_a(N) = N$$

$$P_2\text{-}C_b(N) = N$$

$$P_2\text{-}C_c(N) = N$$

dir.

Bu örnekte $\forall x \in N$ için $P_1\text{-}C(N) \subseteq P_1\text{-}C_x(N)$ ve $P_2\text{-}C(N) \subseteq P_2\text{-}C_x(N)$ dir.

N yakın halkasında $\forall a \in N$ için $C(N) \subseteq C_a(N)$ dir. Aşagıdaki önerme benzer durumun P-merkez için de geçerli olduğunu gösterir.

Önerme 4.1.4. N bir yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$ olsun. Bu durumda $\forall a \in N$ için $P\text{-}C(N) \subseteq P\text{-}C_a(N)$ dir.

İspat: $x \in P\text{-}C(N)$ olsun. Bu durumda Tanım 4.1.1 **'**den $\forall n \in N$ için $xn - nx \in P$ dir. $n = a$ için $xa - ax \in P$ olduğundan $x \in P\text{-}C_a(N)$ dir.

4.2. Yakın-halkalarda *P*-birim ve P-invers Kavramları

Tanım 4.2.1. N bir yakın-halka, $P \trianglelefteq N$ ve $e \in N$ olsun. Eğer $\forall n \in N$ için $n - ne \in P$ ise $e \in N$ 'ye *P-sağ birim*, $n - en \in P$ ise *P-sol birim*, $e \in N$ hem P-sağ birim hem de P-sol birim ise e elemanına N yakın-halkasında bir *P-birim* denir. N 'nin P-birim elemanlarını içeren cümle U_P ile gösterilir.

Eğer $P = 0$ ise, bu taktirde N 'nin P-birimi aynı zamanda N 'nin birimidir. Eğer e bir birim eleman ise bu durumda N 'nin tüm P idealleri için e bir P-birim elemandır. Fakat genelde N 'nin bir P-birim elemanı N 'nin birim elemanı olmak zorunda değildir.

Örnek 4.2.2. Z_6 üzerinde $*$ işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$*$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	3	1	5	3	1	5
2	0	2	4	0	2	4
3	3	3	3	3	3	3
4	0	4	2	0	4	2
5	3	5	1	3	5	1

Bu durumda $(Z_6, +, *)$ bir yakın halkadır [29]. $P_1 = \{0,3\} \lhd N$ olsun. Bu durumda $e = 4 \in Z_6$ için $1 \neq 4*1$ olduğundan $e = 4$ sol birim değildir. Fakat $\forall n \in N$ için $n - 4n \in P_1$ olduğundan $e = 4$ bir P_1-sol birimdir. Ayrıca $e = 4$ sağ birim ve aynı zamanda bir P_1-sağ birimdir. Dolayısıyla birim değil, fakat bir P_1-birimdir. Ayrıca P_1-birimlerin cümlesi $U_{P_1} = \{1,4\}$ dir.

Diğer taraftan, $P_2 = \{0,2,4\} \lhd N$ ise bu taktirde P_2-sağ birimlerin cümlesi N ve P_2-sol birimlerin cümlesi $\emptyset$ 'dir. Dolayısıyla P_2-birimlerin cümlesi $\emptyset$ 'dir.

Teorem 4.2.3. $(N, +,\cdot)$ bir yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$ olsun. $U_P \neq \emptyset$ ise bu durumda U_P $(N,\cdot)$ 'nın bir alt yarı grubudur.

İspat: $e_1, e_2 \in U_P$ olsun. $p,\ p^I,\ p^{II},\ p^{III} \in P$ için,

$$\begin{aligned} e_1e_2n - n &= e_1e_2n - e_2n + e_2n - n \\ &= e_1(n+p) - (n+p) + p^I \\ &= (e_1(n+p) - e_1n) + e_1n - (n+p) + p^I \\ &= p^{II} + e_1n - p - n + p^I \\ &= p^{II} + e_1n - n + p^{III} \in P \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} ne_1e_2 - n &= ne_1e_2 - ne_1 + ne_1 - n \\ &= (n(e_2+p) - ne_2) + ne_2 - n \end{aligned}$$

$$= p^{II} + p^{I} \in P$$

dir. Bu durumda $e_1 e_2 \in U_P$ dir ve dolayısıyla U_P, $(N,.)$ 'nın bir alt yarı grubudur.

Sonuç 4.2.4. N bir yakın-halka ve $P, I \trianglelefteq N$ olsun. P-birimlerin cümlesi U_P ve I-birimlerin cümlesi U_I olmak üzere;

a) Eğer $P \subseteq I$ ise, bu durumda $U_P \subseteq U_I$.

b) Eğer $P = N$ ise, bu durumda $U_P = N$.

İspat: a) Tanım 4.2.1 'den $x \in U_P$ ise, bu taktirde $\forall n \in N$ için,

$$xn - n \in P$$

ve

$$nx - n \in P$$

dir. $P \subseteq I$ olduğundan $\forall n \in N$ için,

$$xn - n \in I$$

ve

$$nx - n \in I$$

dir. Dolayısıyla $x \in U_I$ dır. O halde $U_P \subseteq U_I$ dır.

b) Eğer $P = N$ ise $\forall x \in N$ için $xn - n \in N$ ve $nx - n \in N$ olduğundan,

$$U_{P=N} = N$$

dir.

Tanım 4.2.4. N bir yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$olsun. $x \in N$ için,

$$x_r^{-1} = \{y \in N |\ xy \in U_P\}$$

cümlesine x 'in P*-sağ inverslerinin cümlesi*,

$$x_l^{-1} = \{y \in N |\ yx \in U_P\}$$

cümlesine x 'in P*-sol inverslerinin cümlesi* denir.

$$x_P^{-1} = x_r^{-1} \cap x_l^{-1}$$

cümlesine de x 'in P*-inverslerinin cümlesi* denir.

Örnek 4.2.5. Örnek 4.2.2 'de verilen $N = (Z_6, +, *)$ yakın halkasında $P = \{0,3\}$ alalım. Bu durumda $0_r^{-1} = \emptyset = 0_l^{-1}$, $1_r^{-1} = \{1,4\} = 1_l^{-1}$, $2_r^{-1} = \{2,5\} = 2_l^{-1}$, $3_r^{-1} = \emptyset = 3_l^{-1}$, $4_r^{-1} = \{1,4\} = 4_l^{-1}$ ve $5_r^{-1} = \{2,5\} = 5_l^{-1}$ olduğundan $1_P^{-1} = 4_P^{-1} = \{1,4\}$ ve $2_P^{-1} = 5_P^{-1} = \{2,5\}$ dir.

Önerme 4.2.6. $e \in N$ bir P-birim ise bu durumda e bir P-idempotent elemandır.

İspat: $e \in N$ bir P-birim olsun. Bu durumda Tanım 4.2.1 'den $\forall n \in N$ için,

$$ne - e \in P$$

veya

$$en - e \in P$$

yazılabilir. O halde $n = e$ alındığında ispat tamamdır.

Örnek 4.2.6. Örnek 4.2.2 'de verilen $N = (Z_6, +, *)$ yakın halkasında $P = \{0,3\}$ alalım. Bu durumda $e_1 = 4$ bir P-birimdir. Bu durumda bazı $p, p^I \in P$ ve $\forall n \in N$ için $n = 4*\mathrm{n} + \mathrm{p} = \mathrm{n}*4 + p^I$ yazılabilir. Dolayısıyla $n = 4$ alındığında $e_1 = 4$ bir P-idempotenttir. Benzer şekilde, $e_2 = 1$ de bir P-birim, ve aynı zamanda bir P-idempotenttir.

4.3. Yakın-halkalarda Merkez ve P-merkez

Aşağıdaki önerme $C(N)$ ile P-$C(N)$ arasındaki ilişkileri verir.

Önerme 4.3.1. N bir yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$olsun.

a) Eğer $C(N) = \emptyset$ ve $NP \nsubseteq P$ ise, bu taktirde $P \cap P$-$C(N) = \emptyset$ dur.

b) Eğer $C(N) = \emptyset$ ve $NP \subseteq P$ ise, bu taktirde $P \subseteq P$-$C(N)$ dir.

c) Eğer $C(N) \neq \emptyset$ ve $NP \nsubseteq P$ ise, bu taktirde $C(N) \subseteq P$-$C(N)$ dir.

d) Eğer $C(N) \neq \emptyset$ ve $NP \subseteq P$ ise, bu taktirde $P \cup C(N) \subseteq P$-$C(N)$ dir.

e) Eğer N birimli ise, bu taktirde $1 \in P$-$C(N)$ dir.

f) Eğer $e \in N$ bir P-birim ise, bu taktirde $e \in P$-$C(N)$ dir.

İspat: **a)** N bir yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$ olsun. $C(N) = \emptyset$, $NP \nsubseteq P$ ve $x \in P$-$C(N)$ alalım. Bu durumda Tanım 4.1.1 'den $\forall n \in N$ için $xn - nx \in P$ yazılabilir. Eğer $x \in P$ ise, bu taktirde $\forall n \in N$ için $pn - np \in P$ olacak şekilde $x = p \in P$ vardır.

Dolayısıyla $\forall n \in N$ için $np \in P$ dir. Bu ise $NP \nsubseteq P$ kabulüyle çelişir. O halde $x \notin P$ dir. Yani $P \cap P\text{-}C(N) = \emptyset$ dur.

b) N bir yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$ olsun. $C(N) = \emptyset$ ve $NP \subseteq P$ alalım. Bu durumda, her bir $p \in P$ ve $\forall n \in N$ için,

$$pn - np \in P$$

olduğundan,

$$P \subseteq P\text{-}C(N)$$

dir.

c) N bir yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$ olsun. $C(N) \neq \emptyset$, $NP \nsubseteq P$ ve $x \in C(N)$ alalım. Bu durumda $\forall n \in N$ için,

$$xn - nx = 0$$

yani,

$$xn - nx \in P$$

dir. Dolayısıyla,

$$C(N) \subseteq P\text{-}C(N)$$

dir.

d) N bir yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$ olsun. $C(N) \neq \emptyset$ ve $NP \subseteq P$ alalım. Bu durumda $NP \subseteq P$ olduğundan her bir $p \in P$ ve $\forall n \in N$ için,

$$pn - np \in P$$

yani,

$$P \subseteq P\text{-}C(N)$$

dir. Ayrıca $C(N) \neq \emptyset$ olduğundan herbir $x \in C(N)$ ve $\forall n \in N$ için,

$$xn - nx \in P$$

yani,

$$C(N) \subseteq P\text{-}C(N)$$

dir. Dolayısıyla $P \cup C(N) \subseteq P\text{-}C(N)$ dir.

e) N birimi 1 ile gösterilen birimli bir yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$ olsun. Bu durumda $1n = n1$ olduğundan $\forall n \in N$ için,

$$1n - n1 \in P$$

dir. Dolayısıyla,

$$1 \in P\text{-}C(N)$$

dir.

f) N, P-birimli bir yakın-halka, $P \trianglelefteq N$ ve e N 'nin bir P-birim elemanı olsun. Bu durumda bazı $p, p^I \in P$ için $n = en + p = ne + p^I$ olduğundan $\forall n \in N$ için,

$$en - ne \in P$$

dir. Dolayısıyla,

$$e \in P\text{-}C(N)$$

dir.

Örnek 4.3.2. $N = \{0,1,2,3\}$ Klein-4 grubu olsun. N 'deki çarpma işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

.	*0*	*1*	*2*	*3*
0	*0*	*0*	*0*	*0*
1	*1*	*1*	*1*	*1*
2	*0*	*0*	*0*	*0*
3	*1*	*1*	*1*	*3*

Bu durumda $(N, +,\cdot)$ bir yakın halkadır [30]. N 'nin idealleri $\{0\}$, $\{0,1\}$, $\{0,2\}$ ve N dir. Aynı zamanda $C(N) = \emptyset$ dur.

$P_1 = \{0,1\}$ için, $NP_1 \subseteq P_1$ dir. Bu durumda,

$$P_1\text{-}C(N) = \{0,1\}$$

$$P_1\text{-}C_0(N) = N$$

$$P_1\text{-}C_1(N) = N$$

$$P_1\text{-}C_2(N) = \{0,1,2\}$$

$$P_1\text{-}C_3(N) = \{0,1,3\}$$

dir. O halde kolaylıkla görülür ki; $P_1 \subseteq P_1 - C(N)$ dir.

$P_2 = \{0,2\}$ için, $NP_2 \subseteq P_2$ dir. Bu durumda,

$$P_2\text{-}C(N) = \emptyset$$

$$P_2\text{-}C_0(N) = \{0,2\}$$

$$P_2\text{-}C_1(N) = \{1,3\}$$

$$P_2\text{-}C_2(N) = \{0,2\}$$

$$P_2\text{-}C_3(N) = \{1,3\}$$

dir. O halde kolaylıkla görülür ki; $P_2 \cap P_2\text{-}\ C(N) = \emptyset$ dur.

Ayrıca Örnek 4.1.2 'deki N yakın-halkası üzerinde $P = \{0, a\} \lhd N$ alalım. Bu durumda $NP \subseteq P$ ve $P\text{-}C(N) = N$ dir. Ayrıca $C(N) = \{0, c\}$ dir. O halde $C(N) \neq \emptyset$ ve $NP \subseteq P$ iken $P \cup C(N) \subseteq P\text{-}C(N)$ olduğu görülür.

Önerme 4.3.3. N bir yakın-halka ve $P, I \trianglelefteq N$ olsun. Eğer $P \subseteq I$ ise bu taktirde $P\text{-}C(N) \subseteq I\text{-}C(N)$ dir.

İspat: $P \subseteq I$ ve $x \in P\text{-}C(N)$ olsun. Bu durumda, Tanım 4.1.1 'den $\forall n \in N$ için $xn - nx \in P$ yazılabilir. $P \subseteq I$ olduğundan $xn - nx \in I$ dır. Dolayısıyla $x \in I\text{-}C(N)$, yani $P\text{-}C(N) \subseteq I\text{-}C(N)$ dir.

Örnek 4.3.4. Örnek 2.1.11'deki N yakın-halkası üzerinde $P = \{0,2\} \lhd N$ ve $I = \{0,2,5,7\} \lhd N$ alalım. Bu durumda $P\text{-}C(N) = N$ ve $I\text{-}C(N) = N$ elde edilir.

4.4. P-sağ (sol) değişmeli, P-medial, P-komutatif ve P-abelyen Yakın-halkalar

Tanım 4.4.1. N bir yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$ olsun. Eğer $\forall x, y, z \in N$ için,

$$xyz - xzy \in P$$

ise N 'ye bir *P-sağ değişmeli*,

$$xyz - yxz \in P$$

ise N 'ye bir *P-sol değişmeli* yakın-halka denir. Eğer $\forall x, y, z, t \in N$ için,

$$xyzt - xzyt \in P$$

ise N 'ye bir *P-medial* yakın-halka denir.

Önerme 4.4.2. Eğer N bir sağ değişmeli (sırasıyla sol değişmeli ve medial) yakın-halka ise bu taktirde N 'nin her P ideali için N bir P-sağ değişmeli (P-sol değişmeli ve P-medial) yakın-halkadır. Fakat tersi genelde doğru değildir.

İspat: N bir sağ değişmeli yakın-halka olsun. Bu durumda Tanım 2.4.8 'den $\forall x, y, z \in N$ için,

$$xyz = xzy$$

yazılabilir. Dolayısıyla N 'nin her P ideali için,

$$xyz - xzy \in P$$

dir. O halde N bir P-sağ değişmeli yakın-halkadır. N bir sol değişmeli (medial) yakın-halka ise N 'nin her P ideali için N 'nin bir P-sol değişmeli (P-medial) yakın-halka olduğu benzer şekildegösterilebilir. Tersinin geçerli olmadığını aşağıdaki örnek kanıtlar.

Örnek 4.4.3. $N = \{0, a, b, c\}$ Klein-4 grubu olsun. N 'deki çarpma işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	a	a	a
b	0	a	b	c
c	a	0	c	b

Bu durumda $(N, +, \cdot)$ bir yakın halkadır [22]. Bu yakın-halka $bca \neq bac$ olduğundan sağ değişmeli değildir, fakat $P = \{0, a\} \lhd N$ için N P-sağ değişmelidir. Örneğin $bca - bac \in P$ dir. Buradan P-sağ değişmeli bir yakın-halka sağ değişmeli olmak zorunda değildir. Ayrıca N sol değişmeli, medial ve dolayısıyla P-sol değişmeli ve P-medial bir yakın halkadır.

Tanım 4.4.4. N bir yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$ olsun. Eğer $\forall x, y \in N$ için,

$$xy - yx \in P$$

ise N 'ye *P-komutatif* yakın-halka denir. Eğer $\forall x, y \in N$ için,

$$x + y - x - y \in P$$

ise N 'ye P-*abelyen* yakın-halka denir.

Eğer $P = 0$ ise bu taktirde P-komutatif (P-abelyen) bir yakın-halka aynı zamanda komutatif (abelyen) bir yakın-halkadır. Eğer N komutatif (abelyen) ise bu taktirde N 'nin her P ideali için N bir P-komutatif (P-abelyen) yakın-halkadır. Fakat tersi genelde doğru değildir.

Örnek 4.4.3 'de $ac \neq ca$ olduğundan N komutatif değil, fakat $P = \{0, a\} \lhd N$ için N P-komutatiftir. Örneğin, $ac - ca \in P$ dir. Ayrıca N abelyen ve dolayısıyla N 'nin tüm P idealleri için P-abelyen bir yakın-halkadır.

Örnek 4.3.2 'de $4 + 5 \neq 5 + 4$ olduğundan N abelyen değil, fakat $P = \{0,2\} \lhd N$ için N P-abelyendir. Örneğin, $4 + 5 - 4 - 5 \in P$ dir.

Teorem 4.4.5. N bir yakın-halka, $P \unlhd N$ ve $P\text{-}C(N) = N$ olsun. Bu durumda, N bir P-regüler yakın halkadır $\Leftrightarrow$ N bir P-kuvvetli regüler yakın halkadır.

İspat: $\Rightarrow$: N P-regüler olduğundan $\forall a \in N$ ve bazı $p \in P$ için $a = axa + p$ olacak şekilde bir $x \in N$ vardır. Ayrıca $P\text{-}C(N) = N$ olduğundan $\forall a \in N$ için $ax = xa + p^I$ olacak şekilde bir $p^I \in P$ vardır. Bu durumda p, p^I, p^{II}, $p^{III} \in P$ için,

$$\begin{aligned} a &= axa + p \\ &= (xa + p^I)a + p \\ &= xa^2 + p^{II} + p \\ &= xa^2 + p^{III} \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla Tanım 3.2.4 'den N bir P-kuvvetli regüler yakın halkadır.

$\Leftarrow$: N P-kuvvetli regüler olduğundan $\forall a \in N$ ve bazı $p \in P$ için $a = xa^2 + p$ olacak şekilde bir $x \in N$ vardır. Bu durumda p, p^I, p^{II}, $p^{III} \in P$ için,

$$\begin{aligned} a &= xa^2 + p \\ &= xaa + p \\ &= (xa + p^I)a + p \\ &= axa + p^{II} + p \end{aligned}$$

$$= axa + p^{III}$$

dir. Dolayısıyla Tanım 3.2.3 ’den N bir P-regüler yakın halkadır.

Teorem 4.4.6. $x \in N$ bir P-idempotent elemandır $\Leftrightarrow$ $\forall p \in P$ için $x + p$ bir P-idempotent elemandır.

İspat: $\Rightarrow$: $x \in N$ bir P-idempotent eleman olsun. Bu durumda, Tanım 3.1.2 ’den $x^2 - x \in P$ dir. Dolayısıyla $\forall p \in P$ ve $p^I,\ p^{II}, p^{III},\ p^{IV},\ p^V \in P$ için,

$$\begin{aligned}(x+p)^2 - (x+p) &= (x+p)(x+p) - (x+p)\\ &= x(x+p) + p(x+p) - p - x\\ &= x(x+p) + p^I - p - x\\ &= x(x+p) - x^2 + x^2 + p^{II} - x\\ &= p^{III} + x^2 + p^{II} - x\\ &= p^{III} + p^{IV} + x^2 - x\\ &= p^V + x^2 - x \in P\end{aligned}$$

dir. O halde $\forall p \in P$ için $x + p$ bir P-idempotent elemandır.

$\Leftarrow$: $\forall p \in P$ için $x + p,\ N$ ’nin bir P-idempotent elemanı ise, bu p =0 için de doğrudur. Dolayısıyla $x \in N$ de N ’nin bir P-idempotent elemanıdır.

Teorem 4.4.7. $x \in N$ bir P-regüler elemandır $\Leftrightarrow$ $\forall p \in P$ için $x + p$ bir P-regüler elemandır.

İspat: $\Rightarrow$: $x \in N$ bir P-regüler eleman olsun. Bu durumda, Tanım 3.2.3 **’**den bazı $p^I \in P$ için $x = xyx + p^I$ olacak şekilde $y \in N$ vardır. Dolayısıyla $\forall p \in P$ ve $p^{II}, p^{III},\ p^{IV} \in P$ için,

$$\begin{aligned}(x+p)y(x+p) - (x+p) &= xy(x+p) + py(x+p) - (x+p)\\ &= xy(x+p) + p^{II} - (x+p)\\ &= xy(x+p) - xyx + xyx + p^{II} - (x+p)\\ &= p^{III} + xyx + p^{II} - p - x\\ &= xyx - x + p^{IV} \in P\end{aligned}$$

dir. O halde,

$$(x+p)y(x+p)-(x+p)\in P$$

olduğundan $\forall p\in P$ için $x+p$ bir P-regüler elemandır.

$\Leftarrow$: $\forall p\in P$ için $x+p$ N 'nin bir P-regüler elemanı ise, bu p =0 için de doğrudur. Dolayısıyla $x\in N$ de N 'nin bir P-regüler elemanıdır.

4.5. Yakın-halkalarda P-tam Asallık Kavramı

Tanım 4.5.1. N bir yakın-halka ve $P,I\trianglelefteq N$ olsun. Eğer $a,b\in N$ için $ab+P\subseteq I$ olması $a\in I$ veya $b\in I$ olmasını gerektiriyorsa, I 'ya *P-tam asal ideal* denir. Eğer $a\in N$ için $a^2+P\subseteq I$ olması $a\in I$ olmasını gerektiriyorsa, I 'ya *P-tam yarıasal ideal* denir.

Eğer $P=0$ ise bu taktirde P-tam asal (sırasıyla P-tam yarıasal) ideal aynı zamanda bir tam asal (sırasıyla tam yarıasal) idealdir. Eğer I bir tam asal (tam yarıasal) ideal ise bu taktirde N 'nin her P ideali için I bir P-tam asal (P-tam yarıasal) idealdir. Fakat tersi genelde doğru değildir.

Örnek 4.5.2. Örnek 4.3.2 **'**deki N yakın-halkası üzerinde $I=\{0,1\}\vartriangleleft N$ alalım. Bu durumda,

$$2\notin I\Rightarrow 2.2=0\in I$$

olduğundan I tam asal ve tam yarıasal ideal değildir.

Fakat $P=\{0,2\}\vartriangleleft N$ için I P-tam asal ve P-tam yarıasal idealdir. Örneğin, $2\notin I$ fakat

$$2.2+P\nsubseteq I$$

dir.

Tanım 4.5.3. N bir yakın-halka ve $P,I\trianglelefteq N$ olsun. Eğer P, P-tam asal ideal ise bu taktirde N 'ye bir *P-tam asal yakın-halka* denir. Eğer P, P-tam yarıasal ideal ise bu taktirde N 'ye bir *P-tam yarıasal yakın-halka* denir.

Önerme 4.5.4. N bir P-tam asal yakın-halka ve $e\notin P$ bir P-idempotent eleman olsun. Bu durumda,

(i) e bir P-sağ birimdir.

(ii) Eğer e P-regüler ve e 'nin P-regüler bileşeni $x \in N$ ise, bu durumda x bir P-idempotent elemandır.

İspat: (i) $e \notin P$ olsun. Bu durumda $\forall n \in N$ ve $p,\ p^I \in P$ için,

$$\begin{aligned}(ne-n)e+P &= (nee-ne)+P \\ &= (n(e+p)-ne)+P \\ &= p^I+P \\ &\subseteq P\end{aligned}$$

dir. N bir P-tam asal yakın-halka ve $e \notin P$ olduğundan $\forall n \in N$ için,

$$ne-n \in P$$

dir. Dolayısıyla e bir P-sağ birimdir.

(ii) e bir P-regüler eleman olduğundan $e-exe \in P$ olacak şekilde $x \in N$ vardır. Ayrıca (i) şıkkından $x-xe \in P$ ve e P-idempotent olduğundan $e^2-e \in P$ dir. Bu durumda $p, p^I,\ p^{II},\ p^{III},\ p^{IV},\ p^V,\ p^{VI} \in P$ için,

$$\begin{aligned}x &= xe+p \quad (e\ P\text{-regüler olduğundan}) \\ &= x(exe+p^I)-xexe+xexe+p \\ &= p^{II}+xexe+p \\ &= xexe+p^{III} \\ &= (x+p^{IV})+(x+p^{IV})+p^{III} \\ &= x(x+p^{IV})+p^V \\ &= x(x+p^{IV})-x^2+x^2+p^V \\ &= x^2+p^{VI}\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $x \in N$ bir P-idempotent elemandır.

Önerme 4.5.5. N bir P-sol değişmeli P-tam asal yakın-halka ve $e \notin P$ bir P-idempotent eleman olsun. Bu durumda,

(i) e bir P-sol birimdir.

(ii) $e \in P\text{-}C(N)$ dir.

İspat: (i) $e \notin P$ olsun. Bu durumda $p,\ p^0,\ p^I,\ p^{II},\ p^{III} \in P$ için,

$$(en - n)e + P = (ene - ne) + P \quad (P\text{-sol değişmeli olduğundan})$$

$$= (nee + p^0 - ne) + P \quad (\,e\ P\text{-idempotent olduğundan})$$

$$= (n(e + p) + p^0 - ne) + P$$

$$= (n(e + p) - ne + ne + p^0 - ne) + P$$

$$= (p^I + p^{II}) + P$$

$$= p^{III} + P$$

$$\subseteq P$$

dir. N, P-sol değişmeli P-tam asal yakın-halka ve $e \notin P$ olduğundan,

$$en - n \in P$$

elde edilir. Dolayısıyla e bir P-sol birimdir.

(ii) Önerme 4.5.4 ’ün (i) şıkkından ve bu önermenin (i) şıkkından,

$$en - ne \in P$$

dir. Dolayısıyla,

$$e \in P\text{-}C(N)$$

dir.

Tanım 4.5.6. $\forall x, y \in N$ için,

$$xny - xy \in P$$

Olacak şekilde $n \in N$ elemanları varsa, bu elemanlara N’nin *P-iç çarpan elemanları* denir.

Eğer $P = 0$ ise, bu taktirde bir P-iç çarpan aynı zamanda bir iç çarpandır. Eğer $n \in N$ bir iç çarpan ise bu taktirde N ’nin her P ideali için n bir P-iç çarpandır. Fakat tersi genelde doğru değildir.

Örnek 4.5.7. Örnek 4.4.3 ’te $b0 \neq bc0$ olduğundan c, N ’nin bir iç çarpanı değildir, fakat $P = \{0, a\} \lhd N$ için N ’nin bir P-iç çarpanıdır. Örneğin, $b0 - bc0 \in P$ dir. Benzer şekilde b, N ’nin bir iç çarpanı, aynı zamanda $\forall P \trianglelefteq N$ için bir P-iç çarpanı olduğu kolaylıkla görülür.

Sonuç 4.5.8. N bir P-tam asal yakın-halka ve $e \notin P$ bir P-idempotent eleman olsun. Bu durumda e, N yakın-halkasında bir P- iç çarpandır.

İspat: Varsayımlar altında Önerme 4.5.4 'ten $\forall x \in N$ için $xe - x \in P$ olduğundan e N 'nin bir P-sağ birim elemanıdır. Bu durumda $\forall x, y \in N$ ve $p,\ p^I \in P$ için,

$$xey - xy = (x + p)y - xy$$

$$= xy + p^I - xy \in P$$

dir. Dolayısıyla $xey - xy \in P$ elde edilir. Yani e, bir P- iç çarpandır.

SONUÇ

Bu tezde ilk olarak; yakın-halka kavramı ve temel özellikleri verilmiştir. Ayrıca yakın-halkalar üzerinde P-regülerlik, P-kuvvetli regülerlik, P-idempotent eleman ve P-asallık kavramları verilmiş ve bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Son bölümde ise, verilen bir P-ideali kullanılarak bir yakın-halkanın merkezi, bir elemanın merkezi, (sağ-sol) birim, (sağ-sol) değişmelilik, mediallik, tam asallık ve iç çarpan gibi yakın-halkalarda bazı önemli kavramların genelleştirilmeleri tanımlanmıştır. Ayrıca bu genelleştirilmelerin P-regülerlik, P-kuvvetli regülerlik, P-idempotent eleman ve P-tam asallık ile ilişkileri incelenmiştir.

KAYNAKLAR

1. Dickson, L.E., Definitions of a Group and a Field by Independent Postulates, Trans. Amer. Math. Soc., 6, 198-204, 1905.

2. Roos, C., Rings and Rugularities, Ph. D. Dissertation, Delf Holland, 1975.

3. Groenewald, N.J., Potgieter, P.C., A Generalization of Regularities in Near-rings, Comm. Algebra, 17, 1449-1462, 1989.

4. Mason, G., Strongly Regular Near-rings, Proc. Edinburg Math. Soc., 23, 27-35, 1980.

5. Reddy, Y.V., Murty, C.V.L.N., On Strongly Regular Near-rings, Proc. Edinburg Math. Soc., 27, 61-65, 1984.

6. Hongan, M., Note on Strongly Regular Near-rings, Proc. Edinburg Math. Soc., 29, 379-381, 1986.

7. Holcombe, W.L.M., Primitive Near-rings, Ph. D. Dissertation, University of Leeds, 1970.

8. Ramakotaiah, D., Rao, G.K., IFP Near-rings, J. Austral. Math. Soc.(Series A), 27, 365-370, 1979.

9. Groenewald, N.J., Different Prime Ideals in Near-rings, Comm. Algebra, 19, 2667-2675, 1991.

10. Argaç N., Groenewald N.J., Weakly and Strongly Regular Near-rings, Algebr. Colloq., 12, 121-130, 2005.

11. Handelman, D., Lawrence, J., Strongly Prime Near-rings, Trans. Amer. Math. Soc., 211 , 209-223, 1975.

12. Groenewald, N.J., Strongly Prime Near-rings, Proc. Edinburgh Math. Soc., 31, 337-343, 1988.

13. Booth, G.L., et al., Strongly Equiprime Near-rings, Quaest. Math., 15, 483-489, 1991.

14. Manara, S.P., On Medial Near-rings, North-Holland Math. Stud., 137, 199-209, 1987.

15. Birkenmeier, G.F., Heatherly, H., Medial Near-rings, Monatsh. Math., 107, 89-110, 1989.

16. Drazin, M.P., Rings with Central Idempotent or Nilpotent Elements, Proc. Edinburgh Math. Soc., 9, 157-165, 1958.

17. Birkenmeier, G.F., Idempotents and Completely Semiprime Ideals, Comm. Algebra, 11, 567-580, 1983.

18. Mason, G., A Note on Strong Forms of Regularity for Near-rings, Int. J. Algebra, 40, 149-153, 1998.

19. Andrunakievich, V.A., Regularity of a Ring with Respect to Right Ideals, Dokl. Akad. Nauk SSSR., 310, 267-272, 1990.

20. Choi, S.J., Quasiideals of a P-Regular Near-ring, Int. J. Algebra, 4, 501-506, 2010.

21. Dheena, P., Jenila, C., P-Strongly Regular Near-rings, Commun. Korean Math. Soc., 27, 501-506, 2012.

22. Pilz, G., Near-rings, 2nd Ed., Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland, 1983.

23. Clay, J.R., Near-rings Geneses and Applications, Oxford, New York, Tokyo, 1982.

24. Birkenmeier, G.F., Heatherly, H., Left self distributive near-rings, J. Aust. Math. Soc., 49, 273-296, 1990.

25. Nandakumar, P., On Weakly π-subcommutative Near-rings, B. Malays. Math.Scı.So., 32, 131-136, 2009.

26. Atagün, A.O., IFP Idelas in Near-rings, Hacet. J. Math. Stat., 39, 17-21, 2010.

27. Dheena, P., On Strongly Regular Near-rings, J. Indian Math. Soc. (N.S.), 49, 201-208, 1985.

28. Yakabe, I., Regular Near-rings without Nonzero Nilpotent Elements, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 65, 176-179, 1989.

29. Atagün, A.O., et al., S-special Near-rings, Jour. Of Inst. Of Math. Comp. Sci. (Math. Ser.), 19, 205-210, 2006.

30. Booth, G.L., Groenewald, N.J., Different Prime Ideals in Near-rings II, Rings and Radicals (B. J. Gardner, Liu Shaoxue, R. Weigandt (eds.)), Shijiazhaung 1994, Pitman Res, Notes Math., Longman, 346, 131-139, 1996.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Aydın'da doğan Hüseyin KAMACI, ilköğretim ve lise öğrenimini sırasıyla Kisir İlköğretim Okulu ve Söke Yavuz Selim Lisesinde tamamlamıştır. 2007 yılında kazandığı Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2011 yılında bitirmiştir.

2013 yılında yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başlamıştır. Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN danışmanlığında hazırladığı "Yakın-halkalarda *P*-regülerlik ve *P*-v-asallık" başlıklı teziyle 2014 yılında mezun olmuştur.

İletişim Bilgileri

Adres : Eskipazar mah. Demircan Sitesi Kat:3 No:16

66100 YOZGAT

Telefon: (507) 305 22 53

E-posta: huseyin.kamaci@bozok.edu.tr.