T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

MANİFOLD DÖNÜŞÜMLERİ

Hüseyin KORKMAZ

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN

Yozgat 2014

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

MANİFOLD DÖNÜŞÜMLERİ

Hüseyin KORKMAZ

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN

Yozgat 2014

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 70111310001 numaralı öğrencisi Hüseyin KORKMAZ'ın hazırladığı **"MANİFOLD DÖNÜŞÜMLERİ"** başlıklı YÜKSEK LİSANS tezi ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 03/07/2014 Perşembe günü saat 11:00'de yapılmış, tezin onayına OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan :Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Üye :Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN (Danışman)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Murat BABAARSLAN

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 23.../07.../2014 tarih ve 25... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Hidayet ÇETİN
Bozok Üniversitesi
Fen Bil.Enst.Müdürü

İÇİNDEKİLER

Sayfa

MANİFOLD DÖNÜŞÜMLERİ

Hüseyin KORKMAZ

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

2014; Sayfa: 53

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN

ÖZET

Ceylan Öztürk'ün hazırladığı yüksek lisans tezinin devamı niteliğinde olan bu tezin amacı topolojik manifold, Riemann manifoldu, diferensiyellenebilir manifold kavramlarını tanımlamak ve manifoldlar arasında tanımlanan dönüşümleri incelemektir. Önce diferensiyellenebilir n manifodu tanımlandı. Türev dönüşümü tanımı verildi ve türev dönüşümünün lineer dönüşüm olduğundan bahsedildi.

Manifoldlar arasındaki dönüşümler altında korunan özellikleri ispat ederken türev dönüşümünden yararlanarak M manifoldu üzerinde tanımlı bazı özellikler; eğrilik çizgisi, umbilik nokta ve tanjant vektörü özellikleri ele alındı. Sonra paralel hiperyüzeyler ve dönel yüzeylerin tanımları verildi. Paralel hiperyüzeyler ilgili bazı teoremler ispatlandı.

Son olarak Normal Dönüşüm, Stereografik İzdüşümü, Mercator İzdüşümü, Konform Dönüşüm ve Lambert İzdüşümü altında eğrilik çizgilerinin korundukları gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Manifold dönüşümleri; eğrilik çizgisi; türev dönüşümü.

MANIFOLD MAPS

Hüseyin KORKMAZ

Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master's Thesis

2014; Page:53

Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN

ABSTRACT

Ceylan Öztürk prepare the continuation of his thesis that the aim of this thesis topological manifolds, Riemann manifolds, differentiable manifolds define and examine the transformation is defined between manifolds. The definition of devivatre map definition was given and it was mentioned that derivative map is linear map.
In order to prove the propentres properties which one protected under the tnons formations between manifolds, by using denivative map. Some propertion defined on the manifold M; curvature line, the umbilic point and tangent vector specifications were discussed. Later, the definitions of parallel hypersurfaces and revolution surfaces were given. Some theorems about the parallel hypersurfaces were proved.

Finally, it was shown that the line of curvatures one preserved under the Normal map, Stereographic projection, Mercator projection, Conformal maps and Lambert projection.

Keywords: Manifold maps, the line of curvature, the derivative map.

TEŞEKKÜR

Manifold Dönüşümleri isimli tez çalışmamı hazırlamam da benden desteklerini esirgemeyen değerli hocam Yusuf Ali Tandoğan’a teşekkür ederim.

ŞEKİLLER LİSTESİ

1.GİRİŞ

Manifold kavramı geometrinin çoğu kısmında ve modern teorik fizikte yer almaktadır. Matematikte, özellikle de diferensiyel geometri ve topoloji de, bir manifold yeterince küçük bir ölçekte Öklid uzayına benzeyen matematiksel bir uzaydır. Bir manifoldun yapısı haritalar topluluğu olan bir atlas ile belirlenir.

Ceylan Öztürkün hazırladığı yükseklisans tezinin devamı olan, bu tezde amacımız manifoldlar arasında tanımlanan Normal Dönüşüm, Stereografik İzdüşüm, Mercator İzdüşüm, Konform Dönüşüm ve Lambert İzdüşüm gibi bazı dönüşümler altında korunan özellikler ve Gauss Dönüşümünü incelemektir.

Manifold,Türev dönüşümü, Şekil operatörü, Gauss Dönüşümü, Paralel hiperyüzeyler ve Dönel hiperyüzeyler gibi kavramları tanımladık ilgili teoremleri ispatladık ve gerekli görülen yerlerde örnekler verdik.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1. Temel Kavramlar

Tanım.2.1.1: A$\neq \emptyset$ bir cümle V, K cismi üstünde vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir F:A×A→ V fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

(A1): $\forall \mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R} \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) + \mathrm{F}(\mathrm{Q}, \mathrm{R}) = \mathrm{F}(\mathrm{P}, \mathrm{R})$

(A2): $\forall$P $\in$ A için ve $\forall\alpha \in$ V için F(P,Q)=α olacak biçimde birtek Q$\in$ A noktası vardır [9].

Örnek.2.1.1: $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PQ'} + \overrightarrow{QQ'}$ eşitliğinin sağlandığını gösteriniz?

Çözüm: Afin uzayın 1.özelliğinden

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

eşitliği yardımıyla,

$$\vec{R} = \overrightarrow{P'}$$

alınırsa

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{PP'}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP'} - \overrightarrow{QP'} \qquad (*)$$

$\vec{R} = \overrightarrow{Q'}$ alınırsa

$$\overrightarrow{PQ'} + \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PQ'}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ'} - \overrightarrow{QQ'} \qquad (**)$$

(*) ve (**) eşitliklerinden

$$\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PQ'} + \overrightarrow{QP'}$$

eşitliği sağlanır.

Tanım.2.1.2: Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayıda V olsun.V de bir iç çarpım işlemi olarak

$$<,>: V \times V \to R$$

$$(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \to < X, Y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \begin{cases} \mathrm{X} = (\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) \\ \mathrm{Y} = (\mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_\mathrm{n}) \end{cases}$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayıda yeni bir ad olarak Öklid uzayı adını alır ve E^{n} ile gösterilir [1].

Örnek.2.1.1: 1-Boyutlu standart Öklid uzayı Reel sayılar ekseni olarak şimdiye kadar duyduğumuz sayı doğrusunu ele alalım. Bu doğru, reel sayılar cismi (kendi üstünde bir boyutlu reel vektör uzayıdır) ile birleştirilmiş R^1 afin uzayıdır. Ayrıca bu vektör uzayında

$$<,>: R \times R \to R$$

$$(\vec{\mathrm{X}},\vec{\mathrm{Y}}) \to <\vec{\mathrm{X}},\vec{\mathrm{Y}}> = \mathrm{x.y} \qquad \begin{cases} \vec{\mathrm{X}} = (\mathrm{x}) \\ \vec{\mathrm{Y}} = (\mathrm{y}) \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığı için R^1 afin uzayı 1-boyutlu Öklid uzayı olur ve E ile gösterilen bu uzaya Öklid doğrusu da denir [9].

Örnek.2.1.2: 2-Boyutlu standart Öklid uzayı Reel düzlem olarak şimdiye kadar bildiğimiz düzlemi elealalım. Bu düzlem, 2-Boyutlu reel standart vektör uzayı ile birleştirilmiş R^2 afin uzayıdır. Ayrıca bu vektör uzayında Öklid iç çarpımı da

$$<,>: \mathrm{R}^2 \times \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$$

$$(\vec{\mathrm{X}},\vec{\mathrm{Y}}) \to <\vec{\mathrm{X}},\vec{\mathrm{Y}}> = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i \ , \begin{cases} \vec{\mathrm{X}} = (\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2) \\ \vec{\mathrm{Y}} = (\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan R^2 afin uzayı 2-boyutlu Öklid uzayı olur ve E^2 ile gösterilen bu uzaya Öklid düzlemide denir [9].

Örnek.2.1.3: 3-Boyutlu standart Öklid uzayı 3-boyutlu standart reel vektör uzayı R^3 ile birleştirilmiş R^3 afin uzayını elealalım. Bu R^3 vektör uzayında Öklid iç çarpımı

$$<,>: \mathrm{R}^3 \times \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$$

$$(\vec{\mathrm{X}},\vec{\mathrm{Y}}) \to <\vec{\mathrm{X}},\vec{\mathrm{Y}}> = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i \ , \begin{cases} \vec{\mathrm{X}} = (\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3) \\ \vec{\mathrm{Y}} = (\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2,\mathrm{y}_3) \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Böylece R^3 afin uzayı 3-boyutlu Öklid uzayı olur ve E^3 ile gösterilir. Bu uzay, şimdiye kadar duyduğumuz 3-boyutlu Öklid uzayının kendisidir [9].

Tanım.2.1.3: $d: E^n \times E^n \to R$

$$(X,Y) \to d(X,Y) = \|\overrightarrow{XY}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve d(X,Y) reel sayısına da X,Y$\in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir [9].

Teorem.2.1.1: E^n de uzaklık fonksiyonu bir metriktir [9].

İspat: $\forall$ X,Y,Z $\in E^n$ için

(i) d(X,Y)≥ 0 , d(X,Y)=0$\Leftrightarrow$X=Y,

(ii) d(X,Y)=d(Y,X), (Simetri özelliği)

(iii) d(X,Z)$\leq$d(X,Y)+d(Y,Z), (Üçgen eşitsizliği)

olduğunu gösterelim.

(i) E^n ile birleşen R^n iç çarpım uzayında, iç çarpım pozitif tanımlı olduğundan $\forall \alpha \in R^n$ için $\|\alpha\| \geq 0$ dır

$\overrightarrow{XY} = \alpha$ ve d(x,y)=$\|\overrightarrow{XY}\| \geq 0$, $\|\alpha\| = 0 \implies$ d(X,Y)=$\|\overrightarrow{XY}\|$=0 veya $\overrightarrow{XY} = 0$ olmak üzere X=Y elde edilir. Tersine X=Y ise $\overrightarrow{XY}=\vec{0}$ $\|\overrightarrow{XY}\|$=0 $\Rightarrow$ d(X,Y)=0 olur.

(ii) d(X,Y)=$\|\overrightarrow{XY}\|=\|\overrightarrow{YX}\|$=d(Y,X)

(iii) İç çarpım uzayında normun özelliklerinden

$$\|\overrightarrow{XZ}\| = \|\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}\| \leq \|\overrightarrow{XY}\| + \|\overrightarrow{YZ}\|$$

veya

$$d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$$

olur.

Tanım.2.1.3: $d: E^n \times E^n \to R$

$$(X,Y) \to d(X,Y) = \|\overrightarrow{XY}\|$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna E^n de Öklid metriği denir [9].

Tanım.2.1.4: E^n n-boyutlu Öklid uzayında farklı üç nokta x,y,z olsun $\overrightarrow{XY}$ ve $\overrightarrow{YZ}$ vektörleri arasındaki açı $\theta \in R$, $0 \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere

$$\cos\theta = \frac{<\overrightarrow{XY},\overrightarrow{YZ}>}{\|\overrightarrow{XY}\|.\|\overrightarrow{YZ}\|}$$

şeklinde tanımlanır [1].

Tanım.2.1.5: U ve V sırası ile E^m ve E^n de birer açık altcümle olsunlar, bir

$$\psi: U \to V$$
$$X \to \psi(X)=(f_1(X), \dots, f_n(X))$$

fonksiyonu için bütün

$$f_i: U \to R$$

koordinat fonksiyonları C^k sınıfından iseler $\psi \in C^k(U,V)$ dır denir.

$$C^\infty(U,V)=\{\{\psi | \psi \in C^k(U,V)\ ,\ \forall k \in N\}$$

f_i fonksiyonlarına ψ'nin Öklid koordinat fonksiyonları denir. E^n de bir koordinat sistemi $(u_1, \dots, u_n)$ olmak üzere

$$\psi: U \to W$$
$$p \to \psi(p)=(u_1(\psi(p)), \dots, u_n(\psi(p)))=((u_1 o \psi)(p), \dots, (u_n o \psi)(p))$$

yazabiliriz. Böylece

$$\begin{tikzcd}
U \subset M \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "x_i = u_i o \psi"'] & W \subset U^n \arrow[d, "u_i"] \\
 & R
\end{tikzcd}$$

Şekil 2.1.(Oklid Koordinat Fonksiyonları)

$\psi(p)=(x_1(p),\dots,x_n(p))$ $x_i(p) \in R$ olarak tanımlanan $\{x_1,\dots,x_n\}$ sistemine U da bir lokal koordinat sistemi denir [9].

2.2. Topolojik Manifold

Tanım.2.2.1: $X \neq \emptyset$ bir cümle ve X'in altcümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun τ koleksiyonu aşağıdaki cümleleri doğrularsa X üzerinde bir topoloji adını alır [1].

(τ_1) $X, \emptyset \in \tau$

(τ_2) $\forall A_1, A_2 \in \tau$ için $A_1 \cap A_2 \in \tau$

(τ_3) $A_i \epsilon \tau$, $i \epsilon I$, $\bigcup_{i \epsilon I} A_i \, \epsilon \tau$

Tanım.2.2.2: Bir X cümlesi üzerindeki bir τ topolojisinden (X,τ) ikilisine bir topolojik uzay denir [1].

Tanım.2.2.3: Bir f:X→ Y fonksiyonu verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa f fonksiyonuna bir homeomorfizm (topolojik dönüşüm) denir.

(i) f fonksiyonu birebir ve örten

(ii) f fonksiyonu sürekli

(iii) f in ters fonksiyonu f^{-1}:Y→X var ve sürekli

eğer (X,τ_1) ve (Y,τ_2) uzayları arasında bir homeomorfizm varsa bu uzaylara topolojik olarak denktir veya homeomorfiktir denir [1].

Örnek.2.2.1: Diskre topoloji.

Tanım.2.2.4: X bir topolojik uzay olsun X'in P ve Q gibi farklı noktaları için X'de sırası ile P ve Q noktalarını içine alan A_P ve A_Q açık altcümleleri $A_P \cap A_Q = \emptyset$ alacak biçimde bulunabilirse X topolojik uzayına bir Hausdorff uzay denir [1].

Tanım.2.2.5: M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir n-boyutlu topolojik veya kısaca topolojik n-Manifold denir [1].

(i) M bir Hausdorff uzayı,

(ii) M'nin herbir açık altcümlesi E^n'e veya E^n'nin bir açık altcümlesine homeomorftur.

(iii) M sayılabilir çoklukta açık altcümlelerle örtülebilir.

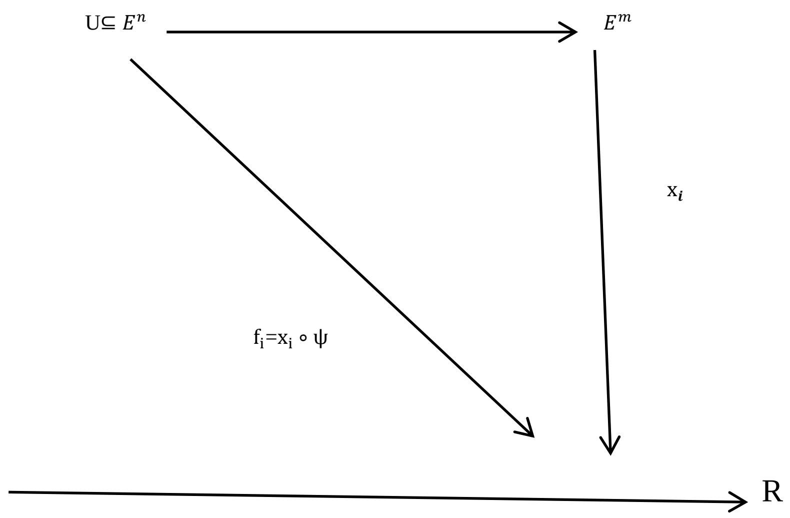
2.3. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım.2.3.1: E^n de bir açık altcümle U olmak üzere bir f:U→R fonksiyonunun k.yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var iseler f fonksiyonuna C^k sınıfından (k.sınıftan) diferensiyellenebilirdir denir [1].

Tanım.2.3.2: E^n deki bir açık altcümle U olduğuna göre bir

$$\psi: U \to E^m$$
$$u \to (f_1(u),\ldots,f_m(u))$$

fonksiyonu verildiğinde bütün f_i koordinat fonksiyonları için $f_i \in C^k(E^m, R)$, $1 \leq i \leq m$ veya $f_i = x_i \circ \psi \epsilon C^k(U, R)$ ise $\psi \epsilon C^k(U, E^m)$ dir denir [1].



Şekil.2.2.(Koordinat Fonksiyonları)

Tanım.2.3.3: U ve V sırası ile ,E^m ve E^n de birer açık alt cümle olsunlar. Bir

$$\psi: U \to V$$
$$x \to \psi(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

fonksiyonu için bütün

$$f_i: U \to R$$

koordinat fonksiyonları C^k sınıfından iseler

$$\psi \epsilon C^k(U, V)$$

dır denir.

$$C^\infty(U, V) = \{\psi | \psi \in C^k(U, V), \forall k \in N\}$$

f_i fonksiyonlarına ψ nin Öklid koordinat fonksiyonları denir [1].

Tanım.2.3.4: E^n in iki açık altcümlesi U ve V olsun. Bir $\psi: U \to V$ fonksiyonu için şu iki önerme doğru ise ψ ye C^k sınıfından bir diffeomorfizm ve U ile V ye de k.dereceden diffeomorfiktirler denir [1].

(D_1) $\psi \epsilon C^k(U, V)$

(D_2) $\psi^{-1}: V \to U$ var ve $\psi^{-1} \epsilon C^k(V, U)$

Örnek.2.3.1: Aşağıdaki verilen fonksiyonların birebir ve örten olup olmadığını gösteriniz. f^{-1} ters fonksiyonunu bulunuz ve diffeomorfizm olup olmadığını araştırınız [11].

a-) f(u,v)=(ve^u, u)

b-) f(u,v)=$(u^3, v-u)$

c-) f(u,v)=(1+2u-2v,4-2u+v)

Çözüm: a-) f(u,v)=(ve^u, u)

1) Birebirlik $\forall(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in E^2$ için

$$
\begin{aligned}
f(u_1,v_1)=f(u_2,v_2) &\Rightarrow (v_1e^{u_1}, u_1)=(v_2e^{u_2}, u_2)\\
&\Rightarrow u_1=u_2\ ,\ v_1e^{u_1} = v_2e^{u_2}\\
&\Rightarrow u_1=u_2\ ,\ v_1 = v_2
\end{aligned}
$$

birebirdir.

2) Örtenlik $\forall(x, y) \in E^2$ için $\exists(u, v) \in E^2$ öyleki u=y , v=xe^y ve f(u,v)=(x,y) olduğundan örtendir.

3) $f^{-1}: E^2 \rightarrow E^2$

$(u,v) \rightarrow f^{-1}(u,v)=(v,u.e^{-v})$

olup $f^{-1} \in C^\infty$ dur.f bir diffeomorfizmdir.

b-) f(u,v)=$(u^3, v-u)$

$f^{-1}(u, v)=(\sqrt[3]{u},u+\sqrt[3]{u})$

olup $f^{-1} \notin C^\infty$. O halde diffeomorfizm değil fakat u=0 hariç diffeomorfizmdir.

c-) $f^{-1}(u, v) = (\frac{-u-2v-9}{2}$,-u-v-5) ve diffeomorfizm

Tanım.2.3.5: M bir n-boyutlu topolojik manifold olsun. Bir P∈ M noktasının M deki bir U açık komşuluğu ψ homeomorfizmi ile E^n in bir açık altcümlesine

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, shift left, "\psi"] \arrow[dr, "u_i"'] & & W\subset M \arrow[ll, shift left, "\psi^{-1}"] \arrow[dl, "u_i o \psi^{-1}=x_i"] \\
& R &
\end{tikzcd}
$$

Şekil.2.3.(Homeomorfizm)

$$\psi: U \subset E^n \rightarrow W \subset M$$

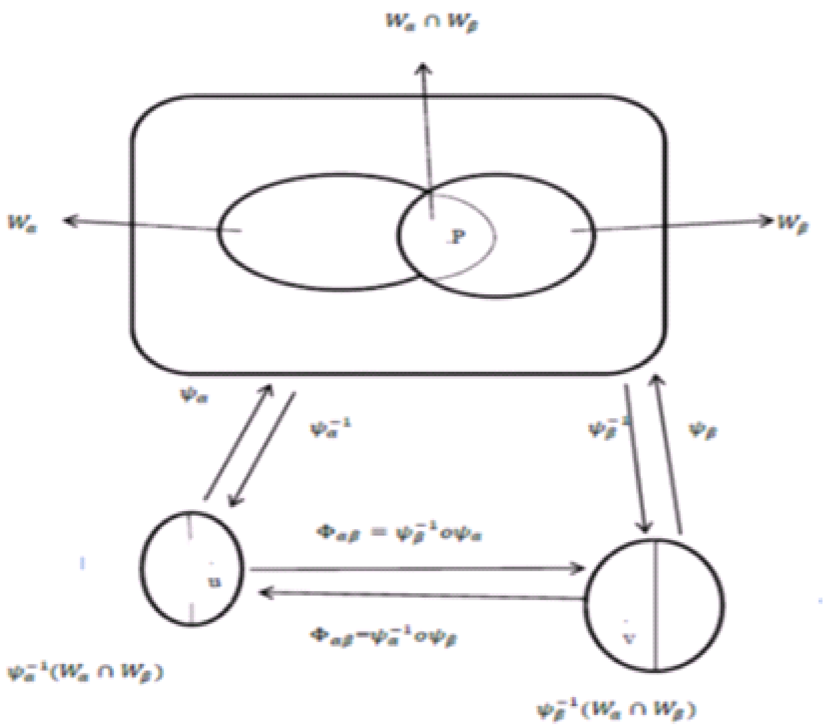
şeklinde eşlenebilir.

(ψ, W) ikilisine M de bir koordinat komşuluğu veya harita denir [1].

Tanım.2.3.6: M bir topolojik n-manifold ve M'nin açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. U_α açık cümlelerinin α-indislerinin cümlesi $\mathcal{A}$ olmak üzere $\{U_\alpha\}$ örtüsü için $\{U_\alpha\}_{\alpha\epsilon\mathcal{A}}$ yazılır. E^n de V_α açığına bir ψ_α homeomorfizmi altında homeomorfik olan U_α açık altcümlelerinin $\{U_\alpha\}$ ailesi olmak üzere $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ koordinat komşuluklarının S=$\{(U_\alpha, \psi_\alpha) | \alpha\epsilon\mathcal{A}\}$ koleksiyonunna M bir koordinat komşuluğu sistemi veya atlas denir [1].

Tanım.2.3.7: Bir topolojik n-manifold M ve M'nin bir atlası S=$\{(\psi_\alpha, W_\alpha\}_{\alpha\epsilon\mathcal{A}}$ olsun. Eğer S-atlası için $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall\alpha, \beta\epsilon\mathcal{A}$ ya karşılık gelen $\Phi_{\alpha\beta}$ ve $\Phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir iseler S'ye C^k sınıfından diferensiyellenebilirdir denir.

S atlası M üzerinde C^k sınıfından iseler S ye M üzerinde C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı denir [1].



Şekil.2.4.(Diferensiyel Yapı)

Tanım.2.3.8: M bir topolojik n-manifold olsun. M üzerinde C^{k} sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M'ye C^{k} sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir [1].

Tanım.2.3.9: M ve$\overline{\mathrm{M}}$ birer C^{∞} manifold ve F:M→ $\overline{\mathrm{M}}$ bir C^{∞} fonksiyon olsun. Eğer F'nin F_{*} Jakobien matrisi $\forall \mathrm{P} \in \mathrm{M}$ noktasında regüler ise F'ye M den $\overline{\mathrm{M}}$ içine bir immersiyon denir [2].

Tanım.2.3.10: N bir C^{∞} (n-1)-manifold olsun

F:N→ E^{n}

fonksiyonu bir immersiyon (F_{*} regüler) ise F(N)=M manifolduna E^{n}'in bir hiperyüzeyi denir [2].

Tanım.2.3.11: V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

[,] : V×V→ V

dönüşümü de ;

1) Bilineer
2) Alterne ($\forall \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{V}$ için $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = -[\mathrm{Y}, \mathrm{X}]$)
3) $\forall$ X, Y, Z ∈ V için;

[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]]=0

olarak verilsin. [,] dönüşümüne, V üstünde bir Lie operatörü denir [9].

Teorem.2.3.1: E^{n} üstünde vektör alanlarının cümlesi $\chi(E^n)$ olsun.

$$[\ ,\ ] : \chi(E^n) \times \chi(E^n) \to \chi(E^n)$$

$$(X,Y) \to [X,Y]$$

dönüşümü, $\forall f \in C^{\infty}(E^n, R)$ için

$$[X,Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklinde tanımlanırsa, [,] bir Lie operatörüdür [9].

Ispat: $\chi(E^n)$ in R üstünde bir vektör uzayı olduğunu biliyoruz.

1) $\forall$ a,b $\in R$,$\forall X, Y, Z \in \chi(E^n)$ için $\forall f \in C^{\infty}(E^n, R)$

olmak üzere

$$[aX+bY,Z](f) = (aX+bY)(Zf) - Z((aX+bY)f)$$

$$= aX(Zf) + bY(Zf) - a(Z(Xf)) - bZ(Yf)$$

=(a[X,Z] +b[Y,Z])(f)

[aX+bY,Z]= a[X,Z] +b[Y,Z]

elde edilir. Benzer şekilde Lie operatörünün 2.tarafa görede lineer olduğu gösterilebilir.

2) $\forall$ X ,Y$\in$ $\chi(E^n)$, $\forall f \in C^\infty(E^n, R)$ için

$[X,Y]$(f) =X(Yf) –Y(Xf)

=-(Y(Xf)-X(Yf))

=-([Y,X]f)

$\Rightarrow$[X,Y]=-[Y,X]

dir.

3) $\forall$ X,Y,Z$\in$ $\chi(E^n)$ ve $\forall f \in C^\infty(E^n, R)$ için;

$\big[X,[Y,Z]\big]f = X([Y,Z]f) - [Y,Z](Xf)$

=X(Y(Zf))-X(Z(Yf))-Y(Z(Xf))+Z(Y(Xf))

dir. Benzer düşünceyle

[Y,[Z,X]]f = Y(Z(Xf))-Y(X(Zf))-Z(X(Yf))+X(Z(Yf))

[Z,[X,Y]]f =Z(X(Yf))-Z(Y(Xf))-X(Y(Zf))+Y(X(Zf))

yazılabilir.

Böylece,

[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0

elde edilir.

Teorem.2.3.2: $\chi(E^n)$ üstünde [,] Lie operatörü verilsin. Bu durumda ,$\forall X,Y \in \chi(E^n)$ ve $\forall$ $f,g \in C^\infty(E^n, R)$ için,

1) [X,Y](fg) = f[X,Y](g)+g[X,Y](f)

2) [fX,gY] =f(Xg)Y-g(Yf)X+fg[X,Y]

3) [X,X]=0

dır [9].

İspat: 1) [X,Y](fg) =X(Y(fg))-Y(X(fg))

=X(fY(g)+gY(f))-Y(fX(g)+gX(f))

=X(fY(g))+X(g(Y(f)) – Y(fX(g)) – Y(gX(f))

$=f[X,Y](g) + g[X,Y](f).$

2) $\forall h \in C^{\infty}(E^n, R)$ için,

$$[fX,gY](h) = (fX)(gY(h)) - (gY)(fX(h))$$
$$= fX(gY(h)) - gY(fX(h))$$
$$= f(X(g)Y(h) + gX(Yh)) - g(Y(f)X(h) - fY(X(h)))$$
$$=(fX(g)Y - gY(f)X + fg[X,Y])(h)$$
$$\Rightarrow [fX,gY] = fX(g)Y - gY(f)X + fg[X,Y]$$

elde edilir.

4) $[X,X]f= X(Xf) - X(Xf) =0$

$\Rightarrow [X,X]=0$

2.4. Bir Manifold Üzerinde Tanjant Vektörler ve Tanjant Uzay

Tanım.2.4.1: M bir diferensiyellenebilir manifold ve $\alpha(I)$ da M üzerinde $\{(I,\alpha)\}$ koordinat komşuluğu ile verilmiş C^k sınıfından bir eğri olsun $\alpha(t)=P\in M$ olmak üzere

$$\overrightarrow{V_p}: C^{\infty}(M,R) \to R$$

$$f \to \overrightarrow{V_p}[f] = \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i}\Big|_P v_i = \frac{d(f\circ\alpha)}{dx_i}\Big|_t$$

şeklinde tanımlı $\overrightarrow{V_p}$ fonksiyonuna, $\alpha(I)$ eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki bir tanjant vektörü denir [1].

Tanım.2.4.2: $T_M(P)=\left\{\overrightarrow{V_p} \,\middle|\, \overrightarrow{V_p}: C^{\infty}(M,R) \to R\right\}$ cümlesi M diferensiyellennebilir manifoldunun bir P noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesidir. Bu cümlede toplam ve skaler çarpım aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\oplus: T_M(P) \times T_M(P) \to T_M(P)$$
$$(X_p, Y_p) \to X_p \oplus Y_p$$

öyleki $\forall f \in C^{\infty}(M,R)$ için

$$(X_p \oplus Y_p)(f) = X_p(f) \oplus Y_p(f)$$

dir.

$$\odot: R \times T_M(P) \to T_M(P)$$
$$(\lambda, X_p) \to \lambda \odot X_p$$

öyleki $\forall f \in C^{\infty}(M,R)$ için

$$(\lambda \odot X_p)(f) = \lambda \odot X_p(f)$$

dir.

Bu iki işleme göre $\{T_M(P), \oplus, \odot, R, +, .\}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olur ve M'nin P noktasındaki tanjant uzayı adını alır [1].

Tanım.2.4.3: M bir C^{∞} manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$D: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X,Y) \rightarrow D(X,Y) = D_X Y$$

fonksiyonu için

1-) $D_{fX+gY}Z = fD_X Z + gD_Y Z$, $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$, $\forall f,g \in C^{\infty}(M,R)$

2-) $D_x(fg) = fD_X Y + (Xf)Y$, $\forall X,Y \in \chi(M)$, $\forall f \in C^{\infty}(M,R)$

özellikleri sağlanıyorsa D ye M manifoldu üstünde bir afin konneksiyon ve D_X'e de X'e göre kovaryant türev operatörü denir [1].

2.5. Şekil Operatörü (Weingarten Dönüşümü)

Tanım.2.5.1: E^n'in bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı,

$N = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d}{dx_i}$ verilsin. E^n de Riemann konneksiyonu D olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N$$

şeklinde tanımlı, S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya M nin Weingarten dönüşümü denir [1].

Teorem.2.5.1: E^n in bir hiperyüzeyi M ve M nin şekil operatörü S olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler doğrudur [1].

1) $S: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ dir.

2) S lineerdir.

3) S simetriktir.

İspat : 1-) M nin birim normal vektör alanı N ise $< N, N >= 1$ dir.Çünkü; N birim normal

$$\|N\| = \sqrt{< N, N >} = 1$$

dır. $\forall X \in \chi(M)$ için D bir Riemann Konneksiyonu olduğundan $< N, N >= 1$ de

$X(< N, N >)=X[1]$

$\Rightarrow < D_X N, N > + < N, D_X N > = 0$

$\Rightarrow 2. < D_X N, N > = 0$

$\Rightarrow < S(X), N > = 0$

dır. Bu ise , $N=\chi(M)^{\perp}$ olduğundan $S(X) \in \chi(M)$ olmasını gerektirir. Yani

$S:\chi(M) \to \chi(M)$

bir dönüşümdür.

2-) Lineerlik ; $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall a, b \in R$ için

$S(aX+bY)=D_{aX+bY}N$ dir.

D Riemann konneksiyonu olduğundan

$=a.D_X N+ bD_Y N$

$=aS(X)+bS(Y)$

dir. Bu ise, S nin lineer olduğunu gösterir.

3-) Simetrik; S lineer olduğundan.S nin simetrik olduğunu göstermek yerine Self-Adjoint olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun içinde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$< S(X), Y > = < X, S(Y) >$

olduğunu göstermeliyiz. $\forall X, Y \in \chi(M)$, $N \epsilon \chi(M)^{\perp}$ için

$< X, N >= 0 \, , < Y, N >= 0$ (1)

yazılabilir. D Riemann Konneksiyonu olduğundan

$Y(< X, N >)=Y[0]$

$< D_Y X, N > + < X, D_Y N > = 0$ (2)

$X(< Y, N >) = X[0]$

$< D_X Y, N > + < Y, D_X N > = 0$ (3)

olur. (3) den (2) numaralı eşitlik çıkarılırsa

$< D_X Y, N > - < D_Y X, N > + < Y, D_X N > - < X, D_Y N > = 0$ olur.

$D_X N=S(X)$ ve $D_Y N = S(Y)$ olduğundan

$< D_X Y - D_Y X, N > + < Y, S(X) > - < X, S(Y) > = 0$

veya D bir Riemann Konneksiyonu olduğundan

$D_X - D_Y=[X,Y] \in \chi(M)$, $N \in \chi(M)^{\perp}$

den

$$< [X, Y], N >= 0$$

$$\Rightarrow < D_X Y - D_Y X >= 0$$

demektir. Buradan

$$< Y, S(X) > - < X, S(Y) >= 0$$

iç çarpım simetrik olduğundan

$$< S(X), Y >=< X, S(Y) >$$

olur, bu da S nin self-adjoint olması demektir.

o halde S simetriktir.

S şekil operatörü simetrik ve lineer dönüşüm olduğundan buna karşılık gelen matris simetriktir.

Sonuç.2.5.1: E^n de bir hiperyüzey M olsun.M üzerinde şekil operatörü S ise $\chi(M)$ deki herhangi bir baza göre S'nin matrisi simetriktir [8].

İspat: Bir önceki teorem gereğince S lineer ve simetrik olduğundan ıspat açıktır. S'nin matrisi $\mathcal{A}$ ise $\mathcal{A}^T = \mathcal{A}$ dır.

Tanım.2.5.2: E^n in bir M hiperyüzeyi üzerinde q-yuncu temelform diye, $1 \leq q \leq n$ olmak üzere

$$I^q : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, R)$$

$$(X,Y) \to I^q < X, Y >=< S^{q-1}(X), Y >$$

şeklinde tanımlı I^q fonksiyonuna denir [10].

Buna göre temel formlar;

$$I(X, Y) = < X, Y >$$

birinci temel formu için

a-)X ile Y den biri $\vec{e}_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}$'e parelel değil ise

$$I(X,Y) = <X,Y>$$

b-)X ile Y den biri $\frac{\partial}{\partial x_3}$'e paralel ise yine

$$I(X,Y) = <X,Y> = < \vec{e}_3, Y> \text{ veya } <X, \vec{e}_3 >$$

dir.

$II(X,Y)=<S(X),Y>=<X,S(Y)>$

ikinci temel formu için

a-)X ile Y den biri $\frac{\partial}{\partial x_3}$ e paralel değil ise

$II(X,Y)=I(X,Y)$

b-) X ile Y den biri $\frac{\partial}{\partial x_3}$ e paralel ise

$II(X,Y)=0$

dır.

$III(X,Y)=< S^2(X), Y >=<S(X),S(Y)>$

üçüncü temel formu için

a-) X ile Y den biri $\frac{\partial}{\partial x_3}$ e paralel değil ise

$III(X,Y)=I(X,Y)$

b-)X ile Y den biri $\frac{\partial}{\partial x_3}$ e paralel ise

$III(X,Y)=0$

olur [10].

Tanım.2.5.3: E^n de bir hiperyüzey M ve M'nin şekil operatörü S olursa M'nin bir P noktasına karşılık gelen S(P)'nin karakteristik (eigen) değerleri M nin bu noktadaki asli eğrilikleri olarak olarak adlandırılır. Asli eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik (eigen) vektör denilen vektörlerin belirttiği doğrultulara M'nin P noktasındaki asli eğrilik doğrultuları denir [1].

Örnek.2.5.1: A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ matrisinin eigen değerlerini bulalım.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$-$\lambda$I=0 ifadesini hesaplayalım

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 4-\lambda & 6 \\ 4 & 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} =(1-\lambda)(4-\lambda)(8-\lambda) + 2.6.3 + 4.2.6 - 3.4.(4-\lambda) - 6.6.(1-\lambda) - (8-\lambda)4$$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 4-\lambda & 6 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 13\lambda^2 - 16\lambda = \lambda(\lambda^2 + 13\lambda - 16) = 0$ buradan,

$\lambda_1 = 0$ ve $\Delta = b^2 - 4ac = 169 - 4.1.(-16)$

$= 169 + 64$

$= 233$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-13 \pm \sqrt{233}}{2}$$

değerleri A matrisinin eigen değerleridir.

Tanım.2.5.4: E^n in bir hiperyüzeyi M olsun P∈ M noktasında M'nin şekil operatörü S olmak üzere, $\exists\lambda \in R$ için $S = \lambda I_{n-1}$ ise P noktasına M'nin bir umbilik noktası denir [6].

Tanım.2.5.5: E^n in bir hiperyüzeyi M ve P∈M noktasındaki şekil operatörü S olsun. Eğer $\vec{X}_p, \vec{Y}_p \in T_M(P)$ için $< S(\vec{X}_p), \vec{Y}_p >= 0$ ise bu iki tanjant vektöre eşleniktirler denir. Eşlenik vektörlerin oluşturduğu doğrultulara eşlenik doğrultu denir [6].

Tanım.2.5.6: E^n in bir hiperyüzeyi M ve P∈M noktasında şekil operatörü S olsun. Eğer $\vec{X}_p, \vec{Y}_p \in T_M(P)$ için $< S(\vec{X}_p), \vec{Y}_p >= 0$ ise $\vec{X}_p$ doğrultusuna, M'nin P noktasındaki bir asimptotik doğrultusu ve $\vec{X}_p$ yi $\forall P \in \alpha$ noktasında teğet vektörü kabuleden α-eğrisine M üzerinde asimptotik çizgi denir [6].

Teorem.2.5.3: E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. S(X)=k.X ve S(Y)= -kY olacak şekilde iki lineer bağımsız vektör alanı X ve Y için

(i) X+Y asimptotik ise X-Y vektör alanı ortogonaldir.

(ii) Tersine X+Y vektör alanı X-Y vektör alanına ortagonal ise asimptotik doğrultudur [10].

Ispat: (i) X+Y asimptotik ise X-Y vektör alanına ortogonaldir.

$<S(X+Y)\ ,\ X+Y>=0$

$$<kX-kY\ ,\ X+Y>=0$$

$$k<X-Y\ ,\ X+Y>=0$$

$$<X-Y\ ,\ X+Y>=0$$

olur. Benzer şekilde X-Y asimptotik ise X+Y ye ortogonaldir.

$$<S(X-Y)\ ,\ X-Y>=0$$

$$<k.X+k.Y\ ,\ X-Y>=0$$

$$k<X+Y\ ,\ X-Y>=0$$

$$<X+Y\ ,X-Y>=0$$

olur. Burada , $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ lineer bağımsız olduğundan $\vec{X}$-$\vec{Y}$ $\neq 0$ ve $\vec{X}+\vec{Y}\neq 0$ dır. O halde $\vec{X}-\vec{Y}$ ile $\vec{X}+\vec{Y}$ ortogonaldir.

Tersten düşünecek olursak

$$<\vec{X}\text{-}\vec{Y}\ ,\ \vec{X}+\vec{Y}>=0 \text{ ise } X\text{-}Y=\tfrac{1}{k}.S(X+Y)$$

olacağından

$$<\tfrac{1}{k}.S(X+Y)\ ,\ X+Y>=0 \Longrightarrow \tfrac{1}{k}<S(X+Y)\ ,\ X+Y>=0$$

$k\neq 0$ den $\frac{1}{k}\neq 0$ ve $<S(X+Y)\ ,\ X+Y)>=0$ olur. Buda X+Y nin asimptotik olması demektir.

Teorem.2.5.4: E^n in bir hiperyüzeyi M olsun.$X_p \in T_M(P)$ olmak üzere

1-) $\vec{X}_p$ bir asimptotik doğrultu ve aynı zamanda bir asli eğrilik doğrultusudur $\Longrightarrow \vec{X}_p$ tanjant vektörü $T_M(P)$ dekir her vektöre eşleniktir.

2-) Bir $\vec{X}_p \in T_M(P)$ vektörü $T_M(P)$ deki her vektöre eşlenik ise bir asimptotik ise bir asimptotik doğrulutudur.

3-) $S(\vec{X}_p)\neq 0 \Longrightarrow \vec{X}_p$ ye eşlenik olan doğrultular daima vardır.

4-) II. Temel form pozitif (veya negatif) tanımlı ise hiçbir asimptotik doğrultu mevcut değildir [10].

Ispat: 1-) $\vec{X}_p$ asimptotik doğrultu ve bir asli eğrilik doğrultusu ise

$$<S(\vec{X}_p)\ ,\ \vec{X}_p>=0 \text{ ve } S(\vec{X}_p)=k.\vec{X}_p\ ,\ k\neq 0$$

$$<k.\vec{X}_p\ ,\vec{X}_p>=0$$

$k.< \vec{X}_p , \vec{X}_p >= 0$

$< \vec{X}_p , \vec{X}_p >=0$

$\vec{X}_p=\vec{0}$

$S(\vec{X}_p)=0$

$\forall Y_p \in T_M(P)$ için $<S(\vec{X}_p) , \vec{Y}_p >= 0$ olur. O halde $\vec{X}_P$ her vektöre eşleniktir.

2-) $\vec{X}_p$ bütün vektörlere eşlenik olsun.Bu taktirde $\forall Y_p \in T_M(P)$ için,

$< S(\vec{X}_p) ,\vec{Y}_p >=0$

dır. Buna göre $\forall \vec{Y}_p \in T_M(P)$ için doğru olan bu ifade $\vec{X}_p=\vec{Y}_p$ içinde doğru olacaktır. Yani $< S(\vec{X}_p) , \vec{X}_p >=0$ olacağından, $\vec{X}_p$ bir asimptotik doğrultudur.

3-) $S(\vec{X}_p)\neq 0$ ise $S(\vec{X}_p)$ ye ortogonal bir $\vec{Y}_p \in T_M(P)$ daima bulunabilir. O halde $\vec{X}_p$ ye eşlenik bir $\vec{Y}_p$ daima vardır.

4-) II.temel form pozitif tanımlı ise $\vec{X} \neq \vec{0}$ olmak üzere

$II(\vec{X},\vec{X}) > 0 \Rightarrow II(\vec{X},\vec{X})=<S(\vec{X}) , \vec{X} > >0$

dır. O halde $<S(X) , X>\neq 0$ dır. Böylece asimptotik doğrultu yoktur.

II.temel formun negatif tanımlı olması halinde düşünce aynıdır.

Tanım.2.5.7: E^n de yönlendirilmiş bir hiperyüzey M olsun. M nin differensiyellenebilir birim normal vektör alanı $N=\sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ olmak üzere

$\eta: M \to S^{n-1} \subset E^n$

$$P\to \eta(P) = \vec{N}(P) = (P,\vec{N}) = \sum_{i=1}^{n} a_i(P)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P$$

dönüşümü $\|\vec{N}_P\| = 1$ olduğundan M yi E^n deki S^{n-1} hiperküresine resmeder. Böylece tanımlanmış olan diferensiyellenebilir η dönüşümüne Gauss dönüşümü denir [10].

Teorem.2.5.5: $F= (f_1, \dots, f_m) : E^n \to E^m$ bir dönüşüm olsun. Eğer E^n in $P\in E^n$ noktasındaki bir tanjant vektörü $\vec{V}_P$ ise $F(P)\in E^m$ noktasındaki $F_*(\vec{V}_P)$ tanjant vektörü için,

$$F_*(\vec{V}_P) = \sum_{i=1}^{m}\vec{V}_P[f_i]\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{F(P)}$$

dir. Burada ,$\{x_1, \dots, x_m\}$ ile $\mathrm{E^m}$ de bir koordinat sistemi gösterilmiştir [9].

Ispat: $\vec{V}_P \in T_{E^n}(P)$ verildiğine göre,

$$\beta: I \to E^m$$

$$t \to \beta(t) = F(\vec{P}+t\vec{v})$$

eğrisinin hız vektörü olan $\beta'(0)$ vektörü $F_*(\vec{V}_P)$ dir.

halbuki ,

$$\beta(t) = F(\vec{P}+t\vec{v})$$

$$\beta(t) = (f_1(\vec{P}+t\vec{v}), \dots, f_m(\vec{P}+t\vec{v}))$$

$$F_*(\vec{V}_P) = \frac{d\beta}{dt}|_{t=0}$$

olduğundan

$$F_*(\vec{V}_P) = \sum_{i=1}^{m} \frac{d}{dt}(f_i(\vec{P}+t\vec{v}))|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x_i}|_{F(P)}$$

dir. Burada ,

$$\vec{V}_P[f_i] = \frac{d}{dt}(f_i(\vec{P}+t\vec{v}))|_{t=0}$$

değeri yerine yazılırsa,

$$F_*(\vec{V}_P) = \sum_{i=1}^{m} \vec{V}_P[f_i] \frac{\partial}{\partial x_i}|_{F(P)}$$

elde edilir.

Teorem.2.5.6: $\mathrm{E^n}$ de bir hiperyüzey M ve M üzerinde Şekil Operatörü S olsun. Bu durumda S, M nin Gauss dönüşümünün, Jacobian dönüşümüdür [10].

Ispat: $\alpha: I \to M$ eğrisi verilsin.

$$\alpha'(t) = X_{\alpha(t)} \in T_M(\alpha(t))$$

olmak üzere, X∈ $\chi(M)$ vektör alanını gözönüne alalım.

$\alpha(t) = P \in M$ diyelim.Şimdi,

$$\eta_*|_P : T_M(P) \to T_{S^{n-1}}(\eta(P))$$

dönüşümünün S ile aynı olduğunu gösterelim.

$$N = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olmak üzere $\eta = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dir. Teorem2.5.5 den

$$\eta_*|_P(X_P) = \sum_{i=1}^{n} X_P[a_i] \frac{\partial}{\partial x_i}|_P$$

$$\eta_*|_P(X)_P = D_{X_P} N$$

$$\eta_*|_P(X_P) = S(X_P)$$

elde edilir. Bu eşitlik,$\forall X_P \in T_M(P)$ için yazılabileceğinden,

$$\eta_* = S$$

bulunur.

Gauss dönüşümünün resmi olan

$$\eta(M) = \{X \in S^{n-1} | \; X = N(P) \, , P \in M\}$$

cümlesine yönlendiriliş M hiperyüzeyinin küresel resmi denir.

2.6.Türev Dönüşümü Eğrilik Çizgisi ve Bir Dönüşümün Jakobieni

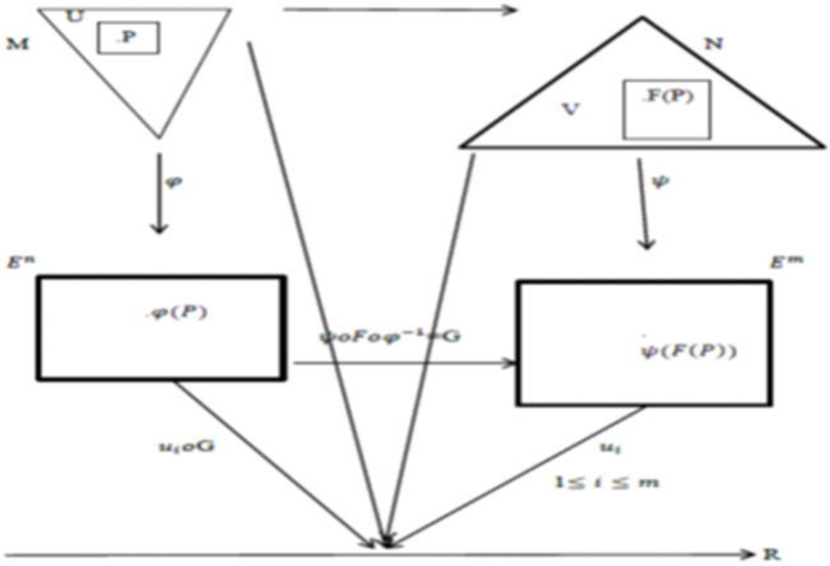
M ve N sırası ile , n ve m boyutlu C^∞ manifoldlar olmak üzere F:M→N diferensiyellenebilir fonksiyonunu elealalım.

$$u_i o G : E^n \to R$$

Fonksiyonları diferensiyellenebilir ise G nin diferensiyellenebilir olduğunu biliyoruz. G diferensiyellenebilir ise F de diferensiyellenebilirdir denir. Ya da

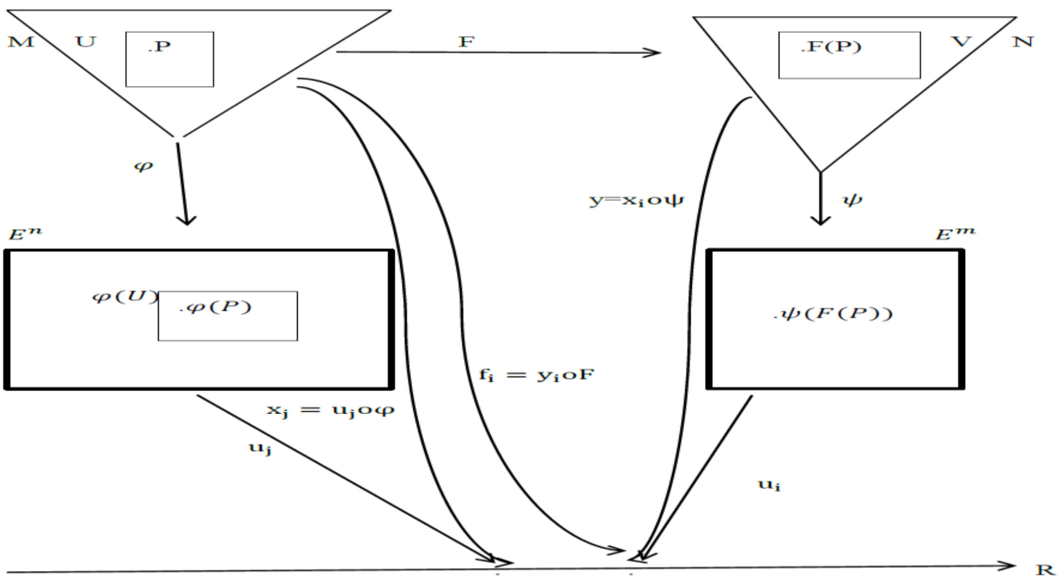
$$f_i : M \to R$$

koordinat fonksiyonları diferensiyellenebilir iseler F de diferensiyellenebilirdir.



Şekil.2.6.1.(Türev Dönüşümü)

M de bir P noktasının bir açık komşuluğu U iken F(P) noktasının N deki açık komşuluğu da V olsun.



Şekil.2.6.2.(Türev Dönüşümü)

Tanım.2.6.1: M, m-boyutlu ve N n-boyutlu manifold olsun

$$F:M\to N$$

$$P\to F(P)=(f_1(P),\ldots,f_m(P))$$

diferensiyellenebilir dönüşümü yardımıyla

$$F_*:T_M(P)\to T_N(F(P))$$

$$\vec{X}_p\to F_*(X_p):C^\infty(N,R)\to R$$

$$g \to [F_*(X_p)](g)=X_p[goF]$$

şeklinde tanımlanan F_* dönüşümüne F dönüşümünün türev dönüşümü denir [9].

Teorem.2.6.1: F:M→N difenensiyellenebilir dönüşümü yardımı ile tanımlanan

$F_*:T_M(P) \to T_N(F(P))$

$\vec{X}_p \to F_*(X_p):C^\infty(N,R) \to R$

$$g \to [F_*(X_p)](g)=X_p[goF]$$

dönüşümü lineerdir [1].

Ispat:$T_M(P)$, $\vec{X}_p + \vec{Y}_p=(\vec{X}+\vec{Y})_p$ ve $c(\vec{X}_p)=(c\vec{X})_p$

işlemine göre kapalı ayrıca

$$(\vec{X}_p+\vec{Y}_p)[f]=\vec{X}_p[f]+\vec{Y}_p[f] \text{ ve } (c.\vec{X}_p)[f]=c\vec{X}_p[f]$$

şeklinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemine göre R üzerinde bir vektör uzayı olduğundan biz lineer olduğunu göstermek için P∈M noktasında $T_M(P)$ nin iki vektörü $\vec{X}_p$ ve $\vec{Y}_p$ olsun.

a,b∈R olmak üzere

$$F_*(a\vec{X}_p+b\vec{Y}_p)=a.F_*(\vec{X}_p)+b.\vec{F}_*(\vec{Y}_p)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}[F_*(a\vec{X}_p + b\vec{Y}_p)] &= (a.\vec{X}_p+b.\vec{Y}_p)(foF)\\ &= a.\vec{X}_p(foF)+b.\vec{Y}_p(foF)\\ &= a.[F_*(\vec{X}_p)](f)+b[F_*(\vec{Y}_p)](f)\\ &= [a.F_*(\vec{X}_p)+b.F_*(\vec{Y}_p)][f]\end{aligned}$$

$\forall f \in C^\infty(N,R)$ için doğru olan bu eşitlikten

$$F_*(a.\vec{X}_p + b.\vec{Y}_p)=a.F_*(\vec{X}_p)+b.F_*(\vec{Y}_p)$$

bulunur.

Şimdi bu F:M→N dönüşümüne karşılık gelen matris F nin Jakobien matrisi şöyle hesaplanır.

P∈M noktasının bir U açık komşuluğu üzerinde bir lokal koordinat sistemi $\{x_1 , . . . ,X_n\}$ ise

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p : C^\infty(M,R) \to R$$

$$f \to \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f)=\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p , \ 1 \leq i \leq n$$

olmak üzere $\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p,\dots,\frac{\partial}{\partial x_p}\Big|_p\}$ nin $T_M(P)$'nin bir bazı olduğunu biliyoruz.

Ayrıca herhangi bir $\vec{V}_p \in T_M(P)$

$$\vec{V}_p:C^\infty(M,R) \to R$$

Vektörünün

$$\vec{V}_p=\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P$$

$$\vec{v}_i=\vec{V}_p[X_i] \in R$$

şeklinde yazılabileceğini biliyoruz.

$F(P) \in N$ noktasının bir $F(U) \subset V$ olacak şekilde V açık komşuluğu üzerinde bir lokal koordinat sistemi $\{y_1,\ldots,y_m\}$ ise $\{\frac{\partial}{\partial y_1}|_{F(P)},\ldots,\frac{\partial}{\partial y_m}|_{F(P)}\}$ $T_N(F(P))$ nin bir bazı olduğunuda biliyoruz.

F_* lineer dönüşümüne karşılık gelen marisi bulmak için ilgili iki baz arasındaki lineer dönüşümün matrisini bulmak yeter.

$F_*(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p) \in T_N(F(P))$ tanjant vektörü

$$F_*(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p)= \sum_{j=1}^{m} a_j |_{F(P)}$$

ile gösterelim.

$$F_*(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p)[y_i]= (\sum_{k=1}^{m} a_k \frac{\partial}{\partial y_k} |_{F(P)})[y_i] = \sum_{k=1}^{m} a_k \frac{\partial y_i}{\partial y_k} |_{F(P)} = a_j$$

bulunur.

Diğer taraftan

$$F_*(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p):C^\infty(N,R)\to R$$

$$y_j \to [F_*(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p)](y_j)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_i}|_p(y_i o F)=\frac{\partial(y_i o F)}{\partial x_i}|_p$$

$$F_*(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p(y_i))=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}|_p=a_j$$

$y_i o F = f_i$, F'nin koordinatları idi

$$F_*(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p)= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}|_P \frac{\partial}{\partial y_j}|_{F(P)}$$

bulunur.Bu ise F_* dönüşümüne karşılık gelen matrisi verir.

Bu matris

$$F_*(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}|_p & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1}|_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}|_p & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}|_p \end{bmatrix}^T$$

olur. Bu matrise F dönüşümünün Jakobieni yada Jakobien matrisi denir [9].

Teorem.2.6.2: E^n Öklid uzayının bir (n-1)-hiperdüzlemi üzerinde bütün doğrultular birer asli eğrilik doğrultusudur [10].

İspat: $\forall x \in \chi(M)$ için

$$S(X)= D_X N$$

$$=\sum_{i=1}^{n} X[a_i]\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow S(X)=0 \Longrightarrow S=0$$

dır.

S=0 olduğundan , $x\neq 0$ olmak üzere $\forall x \in \chi(M)$ için

$$S.X=0.X$$

olacaktır.

Tanım.2.6.2: E^n de bir hiperyüzey M ve M üzerinde bir eğri α olsun α'nın teğet vektör alanı T ve M nin şekil operatörü S olsun. Eğer T vektör alanı α-eğrisi boyunca S'nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α-eğrisine M üzerinde bir eğrilik çizgisidir denir [2].

Bu tanıma göre M üzerindeki eğrilik çizgilerinin diferensiyel denklemi, $\lambda \neq 0$ bir skaler olmak üzere $S(T)=\lambda T$ dir.

Teorem.2.6.3: E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin umbilik olmayan her P noktasından geçen eğrilik çizgileri ortogonaldir. M üzerinde umbilik noktası olmayan bir bölgede eğrilik çizgileri bir eşlenik ağ oluşturur [8].

İspat: $\alpha: I \to M$ eğrilik çizgisi ve $P \in M$ noktasındaki teğet vektör alanı T_1 ise ,T_1'e karşılık gelen karakteristik değer k_1 olmak üzere $S(T_1)=k_1.T_1$

ve

$\beta: J \to M$ eğrilik çizgisi ve $P \in M$ noktasındaki teğet vektör alanı T_2 ise, T_2 ye karşılık gelen karakteristik değer k_2 olmak üzere $S(T_2)=k_2.T_2$ dir. Eğrilik çizgilerinin ortogonalliği için $\langle T_1,T_2\rangle=0$ olduğunu göstermeliyiz S Self-Adjoint olduğundan

$$\langle S(T_1),T_2\rangle=\langle T_1,S(T_2)\rangle$$

yazılabilir buradan

$$\langle k_1.T_1,T_2\rangle=\langle T_1,k_2.T_2\rangle$$
$$\Rightarrow k_1\langle T_1,T_2\rangle=k_2\langle T_1,T_2\rangle$$
$$k_1\langle T_1,T_2\rangle-k_2\langle T_1,T_2\rangle=0$$
$$(k_1-k_2)\langle T_1,T_2\rangle=0$$

buluruz. $k_1 \neq k_2$ olduğundan $k_1 - k_2 \neq 0$ dır. Eşitliğin sağlanması için

$$\langle T_1,T_2\rangle=0$$

olmalıdır. Bu eğrilik çizgisinin ortogonal olduğunu gösterir.

Eğrilik çizgilerinin bir eşlenik ağ oluştura bilmeleri için

$$\langle S(T_1),T_2\rangle=0$$

olduğunu göstermeliyiz. Eğrilik çizgileri ortogonal olduğundan

$$\langle T_1,T_2\rangle=0$$

dır. Bu eşitliğin her iki tarafını k_1 ile çarpalım

$$k_1.\langle T_1,T_2\rangle=k_1.0$$
$$\langle k_1.T_1,T_2\rangle=0$$
$$\langle S(T_1),T_2\rangle=0$$

elde edilirki bu eğrilik çizgilerinin bir ağ oluşturduğunu gösterir.

Teorem.2.6.4: n-Boyutlu Öklid uzayının bir (n-1)-boyutlu hiperküresi üzerindeki herbir eğri, bir eğrilik çizgisidir [8].

Ispat: S^{n-1} üzerinde teğet vektör alanı T olan öyle eğriler arıyoruz ki, bu eğrilerin T teğet vektör alanı eğrinin her noktasında bir asli eğrilik doğrultusu olsun. Şu halde S^{n-1} için S(T)=λ.T olacak şekilde $T\in \chi(S_r^{n-1})$ arıyoruz demektir. Halbuki $\forall T\in \chi(S_r^{n-1})$ için $S(T)=\frac{1}{r}T$ dir. Bu demek oluyorki S^{n-1} üzerinde yatan herbir eğri eğrilik çizgisidir.

Örnek.2.6.1: $F:E^3 \to E^3$ dönüşümü $F(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2\,,\, x_1+x_2\,,\, 2x_3)$ olarak tanımlanıyor. Bu dönüşümün türev dönüşümü için $F_*(V_p)$ yi hesaplayınız [11].

Çözüm: $F_*:T_{E^3}(P) \to T_{E^3}(F(P))$

$$V_p \to F_*(V_p)|_{F(P)}$$

$$F_*(\vec{V}_p)=\frac{d}{dt}[F(p_1+tv_1\,,p_2+tv_2\,,\,p_3+tv_3)]|_{t=0}$$

$$=\frac{d}{dt}(p_1+tv_1\text{-}p_2\text{-}tv_2\,,p_1+tv_1+p_2+tv_2\,,p_3+tv_3)|_{t=0}$$

$$=(v_1\text{-}v_2)\frac{\partial}{\partial x_1}|_{F(P)}+(v_1+v_2)\frac{\partial}{\partial x_2}|_{F(P)}+(2v_3)\frac{\partial}{\partial x_3}|_{F(P)}$$

veya

$$F_*|_p \to \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$F_*|_p(V_p)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=(v_1-v_2\,,v_1+v_2\,,\,2v_3)$$

olur.

Örnek.2.6.2: Genel olarak $F:E^n \to E^m$ bir lineer dönüşüm ise $F_*(\vec{V}_p)=F(\vec{V})|_{F(P)}$ olduğunu gösteriniz [11].

Çözüm: $F_*|_p(\vec{V}_p)=\frac{d}{dt}[F(P+tV)]|_{t=0}=\frac{d}{dt}[F(P)+tF(V)]|_{t=0}=F(V)|_{F(P)}$

Örnek.2.6.3: $F:E^n \to E^m$ bir dönüşüm ve $\forall \vec{V}_p \in T_{E^n}(P)$, $g\in C(E^m, R)$ olsun

$$F_*(\vec{V}_p)(g)=\vec{V}_p(goF)$$

ise F yöne göre türevi koruyor denir. $\forall F:E^n \to E^m$ dönüşümünün yöne göre türevi koruduğunu gösteriniz [11].

Çözüm: E^n de $\{x_1\,,x_2\,,\ldots\,,x_n\}$ ve E^m de $\{y_1,y_2,\ldots,y_m\}$ koordinat sistemleri verilsin.

$F:E^n \to E^m$,$F=(f_1,f_2,\ldots,f_m)$ ise

$$F_*|_p : T_{E^n}(P) \rightarrow T_{E^m}(F(P))$$

$$\vec{V}_p \rightarrow F_*(\vec{V}_p) : C^\infty(E^m, R) \rightarrow R$$

$$g \rightarrow [F_*(\vec{V}_p)](g)$$

$$[F_*(\vec{V}_p)](g) = [\sum_{j=1}^{m} \vec{V}_p(f_j) \frac{\partial}{\partial y_j} |_{F(P)}](g)$$

olup

$$[F_*(V_p)](g) = [\sum_{j=1}^{m} V_P(f_j) \frac{\partial}{\partial y_j}](g)|_{F(P)}$$

$$= [\sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} v_i)] \frac{\partial g}{\partial y_j} |_{F(P)}$$

$$= [\sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} v_i)] \frac{\partial g}{\partial y_i} |_{F(P)} \ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

$$\vec{V}_p(goF) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(goF)}{\partial x_i} |_p \; v_i \quad goF = (gof_1, \ldots, gof_m)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j} |_{F(P)} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} |_p) v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} |_p \frac{\partial g}{\partial y_j} |_{F(P)} \; v_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1) ve (2) den $F_*(\vec{V}_p)(g) = \vec{V}_p(goF)$ olur.

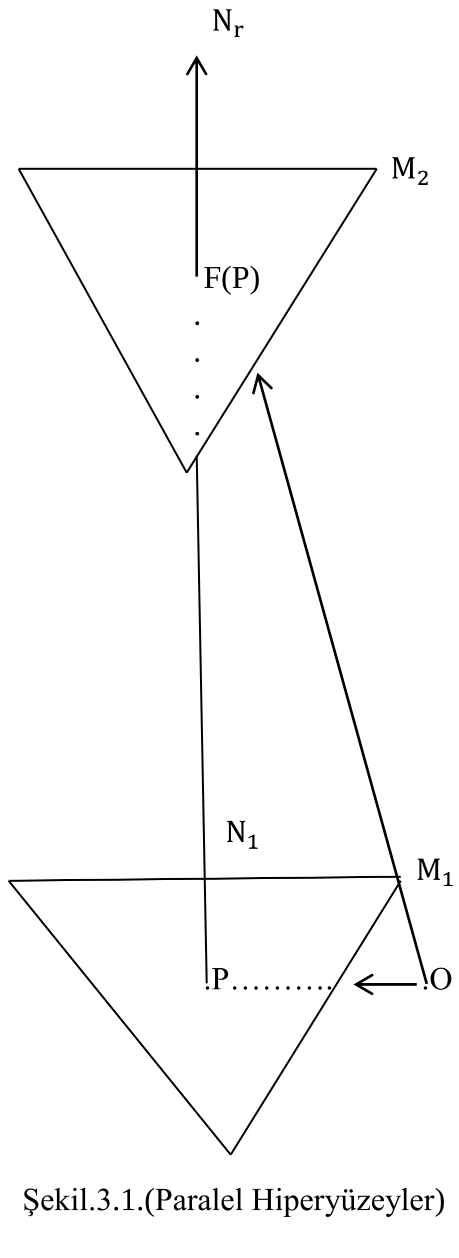
Burada $goF : E^n \rightarrow R$

$$J(goF, p) = [\frac{\partial g}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial y_n}]_{F(P)} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

3.E^n de PARALEL HİPERYÜZEYLER VE DÖNELYÜZEYLER

3.1.E^n de Paralel Hiperyüzeyler

Tanım.3.1.1: M_1 ve M_2, E^n in iki hiperyüzeyi ve M_1' in birim normal vektör alanı $N_1=\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $a_i \in C^\infty(M, R)$ olsun. Eğer bir $r \in R$ sabit sayısı ve $\forall P = (p_1, \ldots, p_n) \in M_1$ için $F(P)=(p_1+ra_1(P),\ldots,p_n+ra_n(P))$ olacak şekilde bir $F: M_1 \rightarrow M_2$ fonksiyonu bulunabilirse, M_2 ye M_1 in paralel hiperyüzeyi denir [10].



Şekil.3.1.(Paralel Hiperyüzeyler)

Teorem.3.1.1: E^n in M hiperyüzeyi paralel M_r hiperyüzeyi verilsin. E^n in $\{x_1,\ldots,x_n\}$ Öklid koordinat sistemine göre, $x\in\chi(M)$, $\bar{x}\in\chi(M_r)$ vektör alanları $X=\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\bar{X}=\sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ öyleki, $\forall P\in M$ için $b_i(P)=\bar{b}_i(f(P))$, $1\le i\le n$

özelliği ile verilsin o zaman

1- $f_*(x)=\bar{X}+rS(\bar{X})$

2- $S_r(f_*(x))=S(\bar{x})$

dir [1].

İspat: f:M→ M_r dönüşümü E^n ye

$f:E^n\to E^n$

$P\to f(P)=(p_1+ra_1(p),\ldots,p_n+ra_n(p))$

şeklinde genişletelim. Burada M nin $N=\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ normal vektör alanının $a_i\in C^\infty(M,R)$, $1\le i\le n$ bileşenlerinin de E^n ye

$$a_i(p)=\begin{cases} a_i(p)\,, & p\in M\\ 0\,, & p\notin M\end{cases}$$

şeklinde genişlediğini varsayıyoruz,

1-) E^n deki $\{x_1,\ldots,x_n\}$ Öklid koordinat sistemine göre f dönüşümünün koordinat fonksiyonları

$$f_i=x_i+ra_i:E^n\to R\,,\ 1\le i\le n$$

olacağından

$$F_*\leftrightarrow I_n+r[\frac{\partial a_i}{\partial x_j}]\in R_n^n$$

olacaktır böylece

$$F_*|_P(X_P)\leftrightarrow I_n\begin{bmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}+r[\frac{\partial a_i}{\partial x_j}]\begin{bmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1(p)\\ \vdots\\ b_n(p)\end{bmatrix}+r[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_j}|_P\, b_j(P)]$$

elde edilir. Burada , ikinci taraftaki matris formunu tekrar

$$\{\frac{\partial}{\partial x_i}|1\le i\le n\}$$

bazı cinsinden yazarsak

$$F_*|_P(X_p)=\sum_{i=1}^{n} b_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}|_p + r\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_j}|_p b_j(p)\frac{\partial}{\partial x_i}|_{F(P)}$$

veya, $b_i(p)=\overline{b}_i(F(p))$, $1\leq i\leq n$ eşitliğini kullanarak

$$F_*|_p(x_p)=\sum_{i=1}^{n}\overline{b}_i(f(p))\frac{\partial}{\partial x_i}|_{f(p)} + r\sum_{i=1}^{n} x_p[a_i]\frac{\partial}{\partial x_i}|_{f(P)}$$

yazılabilir. Burada sağdaki ilk terimin $\overline{X}|_{f(p)}$ olduğu açıktır.
İkinci terim ise $r\overline{S(X)}|_{f(p)}$ dir. Çünkü

$$S(X)=\sum_{i=1}^{n} X[a_i]\frac{\partial}{\partial x_i}$$

olduğundan

$$\overline{S(X)}=\sum_{i=1}^{n}\overline{X[a_i]}\frac{\partial}{\partial x_i}\ ,\ X[a_i](p)=\overline{X[a_i]}(f(p))$$

$$\Rightarrow \overline{S(X)}|_{f(P)}=\sum_{i=1}^{n} X[a_i](f(P))\frac{\partial}{\partial x_i}|_{f(P)}$$

$$\Rightarrow \overline{S(X)}|_{f(P)}=\sum_{i=1}^{n} X[a_i](P)\frac{\partial}{\partial x_i}|_{f(P)}$$

$$\Rightarrow \overline{S(X)}|_{f(P)}=\sum_{i=1}^{n} X_p[a_i]\frac{\partial}{\partial x_i}|_{f(P)}$$

dir. Buna göre

$$F_*(X)=\overline{X}+r\overline{S(X)}$$

elde edilir.

2-)$\xi_i o f = a_i$, $1\leq i\leq n$ olmak üzere

$$N_r=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

vektör alanının, M_r nin normali olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\chi(M_r)=F_*(\chi(M))$$

özelliğinden yararlanacağız. O halde

$$\forall X=\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial}{\partial x_i}\in\chi(M)$$

için

$$<N_r, F_*(X)>|_{F(P)} = 0, \forall P \in M$$

olmalıdır.

$$<N_r, F_*(X)>|_{F(P)} = <N_r, \overline{X} + r\overline{S(X)}>|_{F(P)}$$

$$= <N_r, \overline{X}>|_{F(P)} + r<N_r, \overline{S(X)}>|_{F(P)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \xi_i\big(f(P)\big).\overline{b}_i\big(f(P)\big) + r\sum_{i=1}^{n} \xi_i\big(f(P)\big)X_P[a_i]$$

$$= <N_1, X>|_P + r<N_1, S(X)>|_P$$

$$\Longrightarrow < N_r, f_*(X)>|_{F(P)} = 0$$

şimdi

$$X = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

vektör alanının

$$\alpha: I \to M$$

eğrisinin birim teğet vektör alanı olduğunu varsayalım. O zaman $f_*(X) \in \chi(M_r)$ vektör alanında

$$f o\alpha: I \to M_r$$

eğrisinin teğet vektör alanı olur. Buna göre $P = \alpha(t) \in M$ noktasında

$$S(X)|_P = D_{X_p}N = \sum_{i=1}^{n} X_{\alpha(t)}[a_i] \frac{\partial}{\partial x_i}|_P$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{d(a_i o\alpha)}{dt}|_t \frac{\partial}{\partial x_i}|_P$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{d(\xi_i o f o\alpha)}{dt}|_t \frac{\partial}{\partial x_i}|_P$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f_*(X)|_{f(P)}[\xi_i]\frac{\partial}{\partial x_i}|_P$$

dir. Diğer taraftan

$$S_r(f_*X)|_{f(P)} = D_{f_*(X)}|_{f(P)}N_r$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f_*(X)|_{f(P)}[\xi_i]\frac{\partial}{\partial x_i}|_{f(P)}$$

dır. Böylece

$$S_r(f_*X)|_{f(P)} = \overline{S(X)}$$

elde edilir.

Teorem.3.1.2: f:M→ M_r olmak üzere, M nin bir paralel hiperyüzeyi M_r olsun. O zaman, f umbilik nokta olma özelliğini korur [1].

İspat: P∈ M, M nin bir umbilik noktası olsun. Bu durumda $\forall X_p \in T_M(P)$ ve bir tek $\lambda \in R$ için $S(X_p)=\lambda X_P$ dir. Teorem.8.1 gereğince

$$f_*(X_P) = X|_{f(P)} + r\overline{S(X)}|_{f(P)}$$

ifadesinde $\overline{S(X_P)}=\lambda\overline{X}_P$ yazılırsa $f(X_P)=X|_{f(P)}+r\lambda\overline{X}_P|_{f(P)}$

$$f_*(X_P) = (1 + r\lambda)\overline{X}|_{f(P)}$$

$$X|_{f(P)}=\frac{f_*(X_P)}{1+r\lambda}$$

yazılabilir. Buna göre

$$\forall f_*(X_P)\in T_{M_r}(f(P))$$

için

$$S_r\big(f_*(X_P)\big) = \overline{S(X_P)}$$

$$=\lambda\overline{X}|_{f(P)}$$

$$=\frac{\lambda}{1+r\lambda} f_*(X_P)$$

$$S_r\Big(f_*\big(X_p\big)\Big) = \frac{\lambda}{1 + r\lambda} f_*(X_P)$$

elde edilir.

3.2. E^n de Dönel Yüzeyler

Tanım.3.2.1: E^n de $\{x_1, \dots, x_n\}$ Öklid koordinat sistemi ve E^n in $\frac{\partial}{\partial x_n}$ yi de içine alan (n-1)-hiperdüzlemini gözönüne alalım. Bu hiperdüzlemde $\frac{\partial}{\partial x_n}$ ile kesişmeyen bir (n-2)-manifold P olsun. P nin E^n de $\frac{\partial}{\partial x_n}$ etrafında döndürülmesiyle elde edilen hiperyüzeyi M ile gösterelim. $\frac{\partial}{\partial x_n}$ ekseninden geçen (n-1)-hiperdüzlemler ile M nin arakesiti olan herbir (n-2)-manifolda M nin meridyen manifoldu ve $\forall m \in P$ noktasına $\frac{\partial}{\partial x_n}$ etrafında dönmesiyle elde edilen eğriye M nin bir paralel dairesi diyeceğiz. Özel olarak $\frac{\partial}{\partial x_n}$ den geçen 2-hiperdüzlem ile M nin arakesiti olan eğriyede meridyen eğrisi diyeceğiz.

Henüz P manifoldunun genel olarak bir (n-2)-manifold olmaktan öteye bir özelliği yoktur. Bu durumda, M nin bazı özelliklerini araştıralım $\frac{\partial}{\partial x_n}$ ekseninden geçen bir 2-hiperdüzlem H olmak üzere M nin $H \cap M$ meridyen eğrisini gözönüne alalım. M nin birim normali N olmak üzere $H \cap M$ üzerinde $N \in \chi(H)$ yazılabilir. $x \in \chi(H \cap M)$ birim vektör alanı için M nin Riemann Konneksiyonu D ve şekil operatörü S olmak üzere $\overline{D}_X N = S(X)$ dir. Diğer taraftan, $H \cap M \subset H$ olduğundan $S(X) \in \chi(H)$ dır.
O halde

$$S(X) \in \chi(M)$$

$$S(X) \in \chi(H)$$

elde edilir. Böylece S(X) meridyen eğrisine teğet yani $S(X)=k.X$, $k \in R$ dir. Buna göre meridyen eğrilerinin teğet vektör alanları M nin asli eğrilik doğrultuları olurlar.
$\frac{\partial}{\partial x_n}$ ye dik (n-1)-hiperdüzlemler ile M nin arakesiti, eğer boşdeğil ve bir noktadan ibaret değil ise E^n in bir (n-2)-hiperküresidir. Böylece hiperküreyi S^{n-2} ile gösterelim. Buna göre

$$\chi(M) = \chi(S^{n-2}) \oplus \chi(H \cap M)$$

dir. Simetrik lineer dönüşümün bir invaryant alt uzayıdır. Üstelik

$$S: \chi(S^{n-2}) \to \chi(S^{n-2})$$

dönüşümüde simetrik lineer dönüşümdür. O halde S nin $\chi(S^{n-2})$ deen az bir karakteristik vektörü vardır. Bu vektöre x_1 diyelim böylece $\chi(S^{n-2})$ de $Sp\{x_1\}$ in ortogonal tümleyeni S altında invaryant kalır. Böylece devam edilerek, $\chi(S^{n-2})$ nin

$$\{x_1, \dots, x_{n-2}\}$$

ortanormal bazı eldeedilir, öyleki

$$S(x_i) = \lambda_i . x_i \ ,1 \leq i \leq n-2 \ ,\lambda_i \in R$$

dir. O halde M nin $\{x_1, \dots, x_{n-2}\}$ asli eğrilik doğrultu sistemi vardır ve X meridyen eğrisinin birim teğeti ,x_i $1 \leq i \leq n-2$ de dönelyüzeyin $\frac{\partial}{\partial x_n}$ ye ortogonal olan (n-1)-hiperdüzlem ile M nin arakesitinin teğet vektör alanıdırlar [10].

Tanım.3.2.2: E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. M üzerindeki bir C^∞ eğri α ise α boyunca, $D_T T = 0$ ise α-eğrisine M üzerinde bir jeodezik eğridir denir [10].

Tanım.3.2.3:E^{n+1} de bir M hiper yüzeyi üzerinde geodezik denen eğri öyle bir parametrik eğridirki bu eğrinin her noktasındaki ivme vektörü M ye ortogonaldir. Yani

$$\alpha : I \longrightarrow M$$

ise

$$\ddot{\alpha} \in T_M^{\perp}\ (\alpha(t))\ ,\forall t \in I$$

dır [10].

Teorem.3.2.1: M bir dönelhiperyüzey ve M nin bir meridyen manifoldu P olsun. P nin içinde yattığı (n-1)-hiperdüzlem H olmak üzere H ya göre olmayan fakat P de geodezik olan her eğri M de geodeziktir [10].

İspat: M nin Riemann konneksiyonu $\overline{D}$, H nın Riemann konneksiyonu $\overline{\overline{D}}$ ve P nin Riemann konneksiyonuda P_D olsun.

$$\alpha : I \rightarrow P$$

eğrisinde P de geodezik ise α(I)⊂P nin birim teğet vektör alanı X olmak üzere $P_{D_X X} = 0$ olur. P ve H manifoldları için Gauss denklemi gözönüne alınırsa

$$0 = P_{D_X X} = \overline{\overline{D}}_X X - < S_p(X)\ , X > N_P$$

$$\overline{\overline{D}}_X X = < S_P(X), X > N_P$$

elde edilir. Burada, S_P ile P nin şekil operatörü gösterilmiştir. Tekrar Gauss denklemi ile H nın şekil operatörü 0 olduğundan

$$\overline{\overline{D}}_X X = D_X X$$

ve

$\overline{\mathrm{D}}_{\mathrm{X}}\mathrm{X}=\mathrm{D}_{\mathrm{X}}\mathrm{X}-<\mathrm{S(X)},\mathrm{X}>\mathrm{N}$

yazılabilir.
Böylece

$$\overline{\mathrm{D}}_{\mathrm{X}}\mathrm{X} =< \mathrm{S}_{\mathrm{P}}(\mathrm{X}),\mathrm{X} > N -< S(\mathrm{X}),\mathrm{X} > N$$

$$\overline{\mathrm{D}}_{\mathrm{X}}\mathrm{X} =< \mathrm{S}_{\mathrm{P}}(\mathrm{X}) - \mathrm{S}(\mathrm{X}),\mathrm{X} >$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\mathrm{S}_{\mathrm{P}}(\mathrm{X}) = \overline{\overline{\mathrm{D}}}_{\mathrm{X}}\mathrm{N}=\mathrm{D}_{\mathrm{X}}\mathrm{N}=\mathrm{S(X)}$$

dir. Böylece $\overline{\overline{\mathrm{D}}}_{\mathrm{X}}\mathrm{X} = 0$ bulunur. Bu ise α'nın M de geodezik olduğunu gösterir.

Teorem.3.2.2: M⊂ E^3 dönel yüzeyve M nin dönme ekseni $\frac{\partial}{\partial x_3}$ olsun. O zaman, $\alpha: I \rightarrow M$ bir paralel daire olmak üzere ; " α bir geodeziktir ⟺ α boyunca $<\mathrm{N},\frac{\partial}{\partial x_3}>=0$ dır" [10].

İspat : (⇒) : α bir geodezik olsun. α nın birim teğet vektör alanı T olmak üzere, $\mathrm{D_T T} \in \mathrm{S_P\{N\}}$ dir. Diğer taraftan α bir paralel daire olduğundan

$$<\mathrm{T},\frac{\partial}{\partial x_3}> = 0$$

$$\Rightarrow < D_T T,\frac{\partial}{\partial x_3} > = 0$$

dır. Böylece,

$$<\mathrm{N},\frac{\partial}{\partial x_3}> = 0$$

bulunur.

(⇐): α boyunca $<\mathrm{N},\frac{\partial}{\partial x_3}> = 0$ verilsin. O zaman , α boyunca $\{\mathrm{T},\mathrm{N},\frac{\partial}{\partial x_3}\}$ bir ortonormal sistem olur. Buna göre ,

$$\begin{matrix} <T,T> = 1 \\ <T,\frac{\partial}{\partial x_3}> = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} T<T,T> =0 \\ T<T,\frac{\partial}{\partial x_3}> =0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} <D_T T,T> =0 \\ <D_T T,\frac{\partial}{\partial x_3}> =0 \end{matrix}$$

ise $D_T T \in S_P\{N\} \Rightarrow \alpha$ bir geodeziktir.

Teorem.3.2.3: M bir dönel yüzey ve m∈M noktasının çizdiği paralel daire de $\alpha: I \rightarrow M$ olsun. O zaman, α bir geodeziktir ⟺ M nin birim normali α boyunca dönme ekseni $\frac{\partial}{\partial x_n}$ ye diktir [10].

İspat: α bir geodezik olsun. O zaman, α nın birim teğet vektör alanı T olmak üzere,

$D_T T \in S_P(N)$

dir. Diğer taraftan α bir paralel daire olduğundan,

$$<T, \frac{\partial}{\partial x_n}> = 0$$

$$T <T, \frac{\partial}{\partial x_n}> = 0$$

$$<D_T T, \frac{\partial}{\partial x_n}> = 0$$

elde edilir. Buradan α boyunca N nin $\frac{\partial}{\partial x_n}$ ye dik olduğu elde edilir.

4.EĞRİLİK ÇİZGİSİNİ KORUYAN DÖNÜŞÜMLER

E^n de M ve M_r iki hiperyüzey olsun. Bir F:M→ M_r dönüşümünün eki

$$F_*: \chi(M) \to \chi(M_r)$$
$$s \to F_*(s)$$

olmak üzere $\alpha: I \to M$ eğrisi eğrilik çizgisi ve teğet vektör alanı

$$s \to \alpha(s)$$

T iken aynı zaman da S ve S_r sırasıyla M ve M_r hiperyüzeyine ait şekil operatörleri S(T)=λT eşitliği sağlanırken

$$S_r\big(F_*(T)\big) = \lambda F_*(T)$$

bağıntısı sağlanıyorsa, $\frac{d\alpha}{ds}$=T ile belli olan α-eğrilik çizgisi F tarafından korunuyordur denir [2].

4.1.Normal Dönüşüm

Tanım.4.1.1: E^n de bir hiperyüzey M ve M nin birim normal vektör alanı $N=\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $a_i \in C^\infty(M, R)$ olmak üzere

$$M_r = \{x_1 + ra_1(X), \dots, x_n + ra_n(X) | X = (x_1, \dots, x_n) \in M\}$$

şeklinde tanımlı M_r hiperyüzeyine M nin bir paralel hiperyüzeyi denir.

$$F: M \to M_r$$
$$x \to f(X) = (x_1 + ra_1(X), \dots, x_n + ra_n(X))$$

dönüşümünede M nin M_r üzerine normal dönüşümü denir [2].

Teorem.4.1.1: M nin bir paralel hiperyüzeyi M_r ve F:M→ M_r normal dönüşümü olsun. Bu normal dönüşüm eğrilik çizgisi olma özelliğini korur [7].

Ispat: $\alpha: I \to M$ eğrisi M eğrilik çizgisi olsun teğet vektör alanı T için S(T)=λT olur. Daha önce

$$S_r(F_*(T)) = \frac{k}{1+rk}(F_*(T)) \ , \lambda = \frac{k}{1+rk}$$

için

$$S_r\big(F_*(T)\big) = \lambda(F_*(T))$$

elde edilir. O halde normal dönüşüm eğrilik çizgisi olma özelliğini korur.

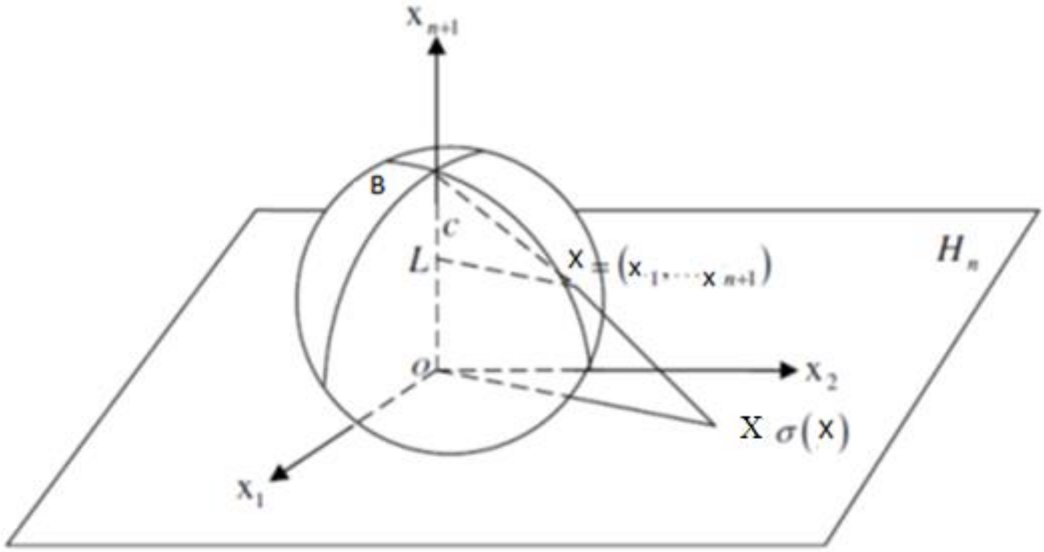
4.2.Stereografik İzdüşüm

E^{n+1} de merkezi C(0,…,0,$\frac{1}{2}$r) ve yarıçapı $\frac{1}{2}$r olan S^n küresinin denklemi $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}(x_{n+1} - r)$=0 olduğunu biliyoruz $S^n \cap E_{(n+1)}$={0} olmak üzere B={0,…,0,r}∈ S^n kutup noktası adını alır.

Tanım.4.2.1: E^{n+1} de merkezi C=(0,…,0,$\frac{1}{2}$r) olan bir hiperküre S_c^n ve bir n-hiperdüzlemi $E_{(n+1)n} = H_n$ olarak verilsin. O∈ E^{n+1} başlangıç noktasının C merkezine göre simetriği B=(0,0,…,0,r)∈ S_c^n ve $S_c^n - \{B\} = {}^{S_c^n}/_{B}$ olmak üzere

$$\sigma: {}^{S_c^n}/_{B} \to H_n$$
$$X \to \sigma(X) = \overline{X}$$

şeklinde tanımlanan σ-fonksiyonuna stereografik izdüşüm denir [4].



Şekil.4.1.(Stereografik İzdüşüm,[8])

$\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in {}^{S^n}/_{B}$ için $0 \leq x_{n+1} \leq r$ dir ve böyle herbir X noktasına stereografik izdüşümünde bir σ(X)=$\overline{X}$ noktası karşılık gelir. Bu $\overline{X}$ noktası $\overline{BX}$ doğrunun H_n yi kestiği noktadır. $\overline{BX}$ doğrusuda

$$\overline{X}=B+t(X-B) \qquad (*)$$

formundaki noktalardan geçer. Şekle göre BOX ve BLX üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{|BL|}{|BO|} = \frac{|BX|}{|B\overline{X}|} \text{ veya } \frac{r-x_{n+1}}{r} = \frac{\|X-B\|}{\|\overline{X}-B\|}$$

bunuda (*) denkleminden

$$\overline{X} - B = t(X - B)$$
$$t=\frac{\overline{X}-B}{X-B} \Rightarrow t = \frac{\|\overline{X}-B\|}{\|X-B\|}$$

yerine yazılırsa

$$\frac{r-x_{n+1}}{r} = \frac{1}{t} \text{ veya } t=\frac{r}{r-x_{n+1}}$$

elde edilir. Bu değer (*) da yerine yazılır.

$$\overline{X} = B + \frac{r}{r - x_{n+1}}(X - B)$$

veya $\overline{X}$=σ(X) den

$$\sigma(X) = \frac{rX - x_{n+1}B}{r - x_{n+1}}$$

elde edilir. Denklemi

$$x_{n+1}=0$$

olan bir n-hiperdüzlem E^n olmak üzere

$$\sigma: {}^{S^n}\!/_{B} \to E^n$$

fonksiyonuna da S^n nin E^n stereografik izdüşümü denir.

Teorem.4.2.1: $\sigma: {}^{S^n}\!/_{B} \to H_n$ stereografik izdüşüm birebir ve örtendir. Dolayısıyla σ^{-1} mevcuttur [8].

Ispat: σ-birebir dir.

X=$(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S_c^n$ için küre denklemi sağlandığında

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + x_{n+1}(x_{n+1} - r) = 0 \qquad (*)$$

dır.

$$\sigma(X) = \overline{X} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)$$

$$\sigma(X) = \frac{rX + x_{n+1}B}{r - x_{n+1}}$$

değerleri (*) da yerine yazılırsa

$$\overline{X}_i = \frac{rX_i}{r - x_{n+1}}$$

$$\Rightarrow \overline{X}_i r - \overline{X}_i x_{n+1} = rX_i$$

$$\Rightarrow X_i = \frac{r - x_{n+1}}{r}\overline{X}_i$$

bu (*) da yerine yazılır

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(r - x_{n+1})^2}{r^2} \overline{x}_i^2 + x_{n+1}(x_{n+1} - r) = 0$$

$$\frac{(r - x_{n+1})^2}{r^2} \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i^2 + x_{n+1}(x_{n+1} - r) = 0$$

$$\frac{(r - x_{n+1})^2}{r^2} \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i = x_{n+1}(r - x_{n+1})$$

$$(r-x_{n+1})\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2 x_{n+1}$$

$$r\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i^2 = x_{n+1}(r^2+\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i^2)$$

$$x_{n+1} = \frac{r\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i^2}{r^2+\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i^2}$$

$$x_{n+1} = \frac{r<\bar{X}.\bar{X}>}{r^2+<\bar{X},\bar{X}>} \qquad (**)$$

elde edilir ki $x_{n+1} < r$ olduğundan $\bar{X} \in H_n$ noktasına karşılık birtek x∈ $S_c^n/_B$ tutulabilir.

σ-örtendir.

Buradan x∈ S_c^n $\sigma(X) = \frac{rX-Bx_{n+1}}{r-x_{n+1}}$ den

$$\bar{X} = B + \frac{r}{r-x_{n+1}}(X-B)$$

formuna göre

$$\bar{X}\text{-}B = \frac{r(X-B)}{r-x_{n+1}}$$

$$X = \frac{1}{r}[Bx_{n+1} + \bar{X}(r-x_{n+1})] \qquad (***)$$

bulunur x_{n+1} in $x_{n+1} = \frac{r<\bar{X},\bar{X}>}{r^2+<\bar{X},\bar{X}>}$ değerlerini burada yazacak olursak

$$X = \frac{1}{r}[B\frac{r<\bar{X},\bar{X}>}{r^2+<\bar{X},\bar{X}>} + \bar{X}(r - \frac{r<\bar{X},\bar{X}>}{r^2+<\bar{X},\bar{X}>})]$$

$$= \frac{1}{r}[\frac{Br<\bar{X},\bar{X}>+r^3\bar{X}}{r^2+<\bar{X},\bar{X}>}]$$

$$X = \sigma^{-1}(\bar{X}) = \frac{Br<\bar{X},\bar{X}>+r^3\bar{X}}{r^2+<\bar{X},\bar{X}>}$$

bulunur. O halde σ −örtendir.

σ nın Türev Dönüşümü ise

$$\sigma: S^n/B \to H_n$$

$$\sigma(x_1,\dots,x_{n+1}) = (\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n,0)$$

$$\sigma(X) = \bar{x}_i = \frac{rx_i}{r-x_{n+1}}$$

$$\sigma(X) = (\frac{rx_1}{r-x_{n+1}},\dots,\frac{rX_n}{r-x_{n+1}},0)$$

$$\sigma_*|_X \leftrightarrow [\frac{\partial\sigma_i}{\partial x_j}]$$

$$\sigma_*|_X = \frac{1}{r - x_{n+1}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \frac{x_1}{r-x_{n+1}} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \frac{x_2}{r-x_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{x_n}{r-x_{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

Teorem.4.2.2: Stereografik izdüşüm altında eğrilik çizgisi ve umbilik nokta olma özelliği korunur [8].

Ispat: $\sigma: S^n/B \to H_n$ stereografik izdüşümü göz önüne alalım S_k hiperküre için şekiloperatörü $S_k = I_n$ S_d hiperdüzlem için şekil operatörü$S_d = 0_n$ dir.

$$\alpha: I \to S^n/B$$

Eğrisi hiperküre üzerinde bir eğrilik çizgisi ve teğet vektör alanı T ise

$$S_k(\lambda) = \lambda T\ , \forall T \in \chi(S^n/_B)$$

dir.

$$S_d(\sigma_*(T)) = 0.\sigma_*(T)$$

yazılabileceğinden, σ_* altında teğet vektör alanlarının resmi olan $\sigma_*(T)$ ler birer asli doğrultu olur. Bu yüzden hiperdüzlem üzerindeki her eğri eğrilik çizgisi olur. Bu yüzden hiperdüzlem üzerindeki her eğri eğrilik çizgisi olur. O halde σ stereografik izdüşümü altında eğrilik çizgisi olma özelliğini korur.

Örnek.4.2.1: Küre üzerinde alınan çember Stereografik İzdüşüm altında eğrilik çizgisi olma özelliğini korur.

4.3.Möbiüs Uzayı

E^{n+1} de bir hiperküre S_c^n ve $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2$ denklemi ile bir n-hiperdüzlem H_n verilsin.S_c^n hiperküresinin kutup noktası B=(0,0,….,0,r) olsun. H_n hiperdüzlemi denilince $x_{n+1} = 0$ hiperdüzlemi anlaşılacaktır. Stereografik izdüşüm altında B noktasının resminin H_n ye eklenmesiyle n-boyutlu Möbiüs uzayı elde edilir.

$$\overline{X}_i = \frac{rx_i}{r-x_{n+1}}, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_{n+1}(r - x_{n+1})$$

eşitlikleri yardımıyla

$$d(\overline{X}, 0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} r^2 x_i^2}{(r-x_{n+1})^2}} = \sqrt{\frac{r^2 x_{n+1}}{r-x_{n+1}}}$$

$$d(\overline{X},0)=\frac{r\sqrt{x_{n+1}}}{\sqrt{r-x_{n+1}}}$$

elde edilir. $X \to B$ için $x_{n+1} \to r$ olacaktırki, buna göre $\overline{X} \in H$ noktası O orijin noktasından $(d(\overline{X}, 0) \to \infty)$ sınırsız uzaklaşacaktır. Limit durumundan elde edilen bu noktayı X_∞ göstereceğiz. Bu durumda şu tanımı vereceğiz [8].

Tanım.4.3.1: $\sigma: {S^n}/{B} \to H_n$ stereografik izdüşümü altında $\sigma(X) = (X_\infty)$ olmak üzere n-boyutlu Möbiüs uzayı M^n ile gösterilir ve $M^n = H_n \cup \{X_\infty\}$ şeklinde tanımlanır. Bu tanımın sonucu olarak $\sigma: S^n \to M^n$ olarak yazılır [4].

4.4.İnversiyon

Tanım.4.4.1: $\sigma: S^n \to M^n$ stereografik izdüşüm ve S^n in merkezinden geçen ve M^n ye paralel olan H_n hiperdüzlemine göre simetri

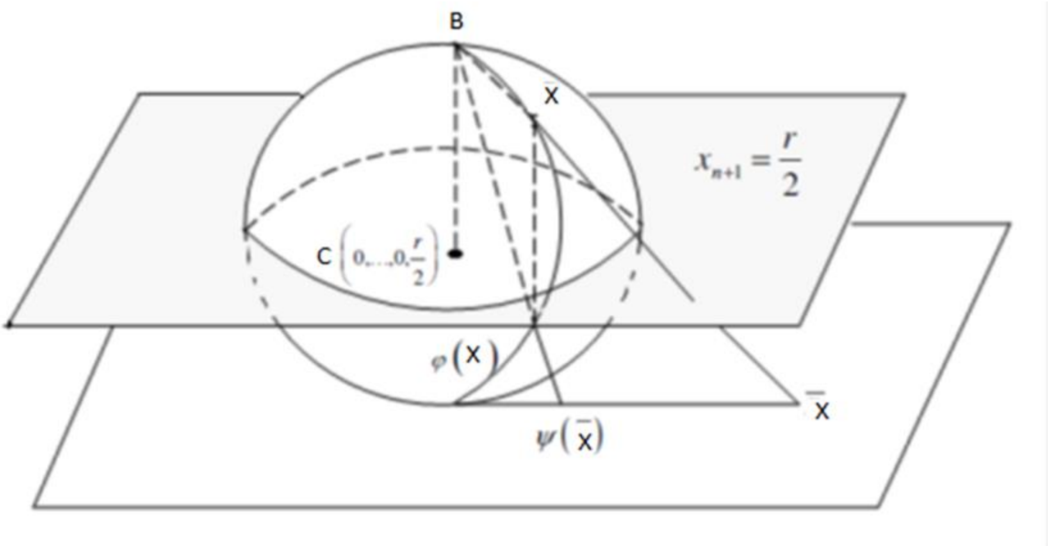
$$\varphi: S^n \to M^n$$

olsun.

Bu durumda

$$\psi = \sigma o \varphi o \sigma^{-1}$$

dönüşümüne M^n in inversiyonu denir[4].



Şekil.4.2.(İnversiyon,[8])

ψ nin analitik ifadesini belirtmek istersek, bunu hesaplarken $\bar{x} \neq X$,$\bar{x} \in M^n$ alınır.

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1})=(x_1, \ldots, r - x_{n+1})$$
$$\sigma(X) = B + \frac{r}{r - x_{n+1}}(X - B) = rX - Bx_{n+1}r - xn + 1$$
$$\sigma^{-1}(\bar{X}) = \frac{B < \bar{X}, \bar{X} > + \bar{X}r^2}{r^2 + < \bar{X}, \bar{X} >}$$

ifadesini elealarak $\forall \bar{X} \in M^n$ için

$$\psi(\bar{X}) = (\sigma o \varphi o \sigma^{-1})(\bar{X})$$

değerini hesaplayalım.

$$\psi(\bar{X}) = (\sigma o \varphi)(\sigma^{-1}(\bar{X}))$$
$$\psi(\bar{X}) = (\sigma o \varphi)[\frac{r^2\bar{X}}{r^2 + < \bar{X}, \bar{X} >} + \frac{< \bar{X}, \bar{X} > B}{r^2 + < \bar{X}, \bar{X} >}]$$
$$\psi(\bar{X}) = (\sigma o \varphi)[\frac{r^2}{r^2 + <\bar{X},\bar{X}>}\bar{x}_1, \ldots, \frac{r^2}{r^2 + <\bar{X},\bar{X}>}\bar{x}_n, 0] + \frac{<\bar{X},\bar{X}>}{r^2 + <\bar{X},\bar{X}>}(0,0, \ldots ,0, r)$$
$$\psi(\bar{X}) = (\sigma o \varphi)[\frac{r^2}{r^2 + < \bar{X}, \bar{X} >}\bar{x}_1, \ldots, \frac{r^2}{r^2 + < \bar{X}, \bar{X} >}\bar{x}_n, \frac{r < \bar{X}, \bar{X} >}{r^2 + < \bar{X}, \bar{X} >}]$$

ψ nin tanımından ilk n bileşen aynı ve n+1 inci bileşen r den çıkarılır.

$$\psi(\bar{X}) = \sigma[\frac{r^2}{r^2 + < \bar{X}, \bar{X} >}\bar{x}_1, \ldots, \frac{r^2}{r^2 + < \bar{X}, \bar{X} >}\bar{x}_n, r - \frac{r < \bar{X}, \bar{X} >}{r^2 + < \bar{X}, \bar{X} >}]$$
$$\psi(\bar{X}) = \sigma[\frac{r^2}{r^2 + < \bar{X}, \bar{X} >}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, 0) + (0,0, \ldots ,0, r)\left(1 - \frac{< \bar{X}, \bar{X} >}{r^2 + < \bar{X}, \bar{X} >}\right)]$$
$$\psi(\bar{X}) = \sigma[\frac{r^2}{r^2 + < \bar{X}, \bar{X} >} + B\left(1 - \frac{< \bar{X}, \bar{X} >}{r^2 + < \bar{X}, \bar{X} >}\right)]$$

$$\psi(\overline{X}) = \sigma[\frac{r^2\overline{X}}{r^2+<\overline{X},\overline{X}>} + \frac{r^2 b}{r^2+<\overline{X},\overline{X}>}]$$
$$\psi(\overline{X}) = \sigma[\frac{r^2}{r^2+<\overline{X},\overline{X}>}(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n,0) + (0,\dots,0,r)\frac{r^2}{r^2+<\overline{X},\overline{X}>}]$$
$$\psi(\overline{X}) = \sigma[\left(\frac{r^2}{r^2+<\overline{X},\overline{X}>}\right)(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n,r)]$$

σ nın tanımına göre $\sigma(X)=B+\frac{r}{r-x_{n+1}}(X-B)$ den

$$\psi(\overline{X}) = B+\frac{r}{r-\frac{r^3}{r^2+<\overline{X},\overline{X}>}}[\frac{r^2(B+\overline{X})}{r^2+<\overline{X},\overline{X}>} - B]$$

$$\psi(\overline{X}) = B+\frac{r(r^2+<\overline{X},\overline{X}>)}{r^3+r<\overline{X},\overline{X}>-r^3}[\frac{r^2B+r^2\overline{X}-Br^2-B<\overline{X},\overline{X}>}{r^2+<\overline{X},\overline{X}>}]$$
$$\psi(\overline{X}) = \frac{B<\overline{X},\overline{X}> + r^2\overline{X} - <\overline{X},\overline{X}> B}{<\overline{X},\overline{X}>}$$
$$\psi(\overline{X}) = \frac{r\overline{X}}{<\overline{X},\overline{X}>}$$

bulunur. Bu inversiyon, merkezi O ve yarıçapı r olan hiperkürenin noktalarını aynı bırakır. Bu nedenle bu dönüşüme merkezi O olan yarıçapı r olan hiperküreye göre inversiyondur denir.

İnversiyonun Türrev Tasviri;

$$\psi(\overline{X}) = \frac{r^2\overline{X}}{<\overline{X},\overline{X}>}$$

formülüne göre, $X=(x_1,\dots,x_n) \in M_n$ için

$$\psi(X) = \frac{r^2 X}{<X,X>}$$

$$\psi(X) = \left(\frac{r^2 x_1}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2},\dots,\frac{r^2 x_n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}\right) = (\psi_1,\dots,\psi_n)$$

$$J(\psi,X) = \psi_*|_X = \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\psi_*|_X = \frac{r^2}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^2}\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2x_1^2 & \cdots & -2x_1x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -2x_1x_n & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2x_n^2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Teorem.4.4.1: ψ inversiyon dönüşümü altında eğrilik çizgisi olma özelliği korunur [8].

Ispat: $\psi: M^n \to M^n$

$x \to \psi(X) = \frac{r^2 X}{\|x\|^2}$

dönüşümü veriliyor.

$M^n = H_n \cap \{X_\infty\}$

şeklinde tanımlanan M^n möbiüs uzayının normali

$N=\{a_1, \dots, a_n\}$

biçiminde bir sabit vektör alanıdır. $\forall x \in \chi(M^n)$ için

$S(X)=D_X N$

$S(X)=X[N]$

$S(X)=0$

$S= 0_n$

dır. Bu şekil operatörü M^n möbiüs uzayının her noktası aynıdır.

$\alpha: I \to M^n$

Bir eğrilik çizgisi ve teğet vektör alanı T ise S(T)=0.T dir. ψ_* altında vektör alanlarını resimlerinin doğrultuları için $S(\psi_*(T)) = 0.\psi_*(T)$ yazılabileceğinden her doğru asli doğrultu ve her eğri bir eğrilik çizgisi olur. Böylece ψ inversiyon dönüşümü altında eğrilik çizgisi olma özelliğini korur.

4.5.Konform Dönüşüm

Tanım.4.5.1: E^3 de iki yüzey M ve N olsun. Bir F:M→ N dönüşümü için

$\|F_*(V_P)\|=\lambda(P)\|V_p\|$, $\forall V_p \in T_M(P)$, $\lambda: M \to R$

$p \to \lambda(p) > 0$

ise F ye konform dönüşümdür denir.

Bir konform dönüşümde $\lambda = 1$ ise F bir lokal izometridir. Şu halde konform dönüşümler tanjant vektörlerin uzunluklarını korumaz fakat $\forall P \in M$ noktasında P deki tanjant vektörleri her birinin uzunluklarını aynı oranda değiştirir.

Bu nedenle konform dönüşümlere genelleştirilmiş izometriler denir[10].

Örnek.4.5.1: Konform dönüşümün açıları koruduğunu göserelim [10].

Çözüm: F:M→N

Konform Dönüşüm olsun. O zaman $\exists\lambda: M \to R, \lambda > 0$

öyleki ;

$\forall V_p \in T_M(P)$ için $\|F_* V_p\| = \lambda(P)\|V_p\|$ dir.

Buna göre $\forall V_p, U_p \in T_M(P)$ için;

$$<F_*(V_p + U_p), F_*(V_p + U_p)> = \lambda^2(p) < V_p + U_p, V_p + U_p >$$

$$\Rightarrow < F_*V_P + F_*U_p, F_*V_p + F_*U_p > = \lambda^2(P) < V_p + U_p, V_p + U_p >$$

$$\Rightarrow \|F_*V_p\|^2 + 2 < F_*V_p, F_*U_p > + \|F_*U_p\|^2 = \lambda_p^2\|V_p\|^2 + 2\lambda^2(P) < V_p, U_p > + \lambda^2(u)\|U_p\|^2$$

$$\Rightarrow < F_*V_p, F_*U_p > = \lambda^2(P) < V_p, U_p >$$

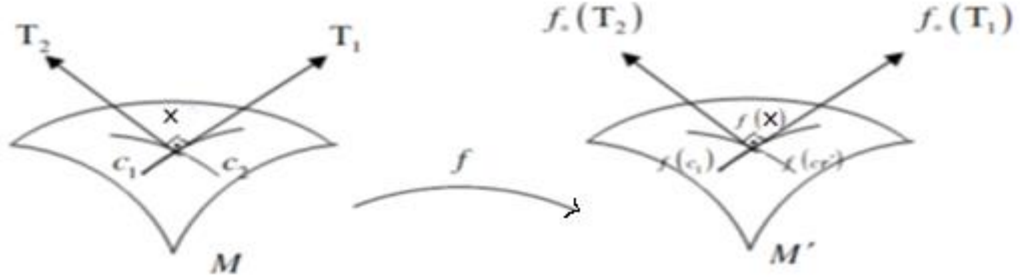
dır. Buna göre;

$$\frac{< F_*V_p, F_*U_p >}{\|F_*V_p\|.\|F_*U_p\|} = \frac{\lambda^2(P) < V_p, U_p >}{\lambda(P)\|V_p\|\lambda(P)\|U_p\|} = \frac{< V_p, U_p >}{\|V_p\|\|U_p\|}$$

dir. O halde; F_* altında açıların ölçüleri korunur.

Teorem.4.5.1: M hiperyüzeyinden M' hiperyüzeyine bir diferensiyellenebilir konform dönüşüm, eğrilik çizgisi olma özelliğini korur [8].

Ispat: F:M→ M', ∀P∈M ve $\forall T_1, T_{n-1} \in \chi(M)$ teğet vektör alanları için $<F_*(T_1), F_*(T_{n-1})> = \lambda^2(P) < T_1, T_{n-1} >$ dır.



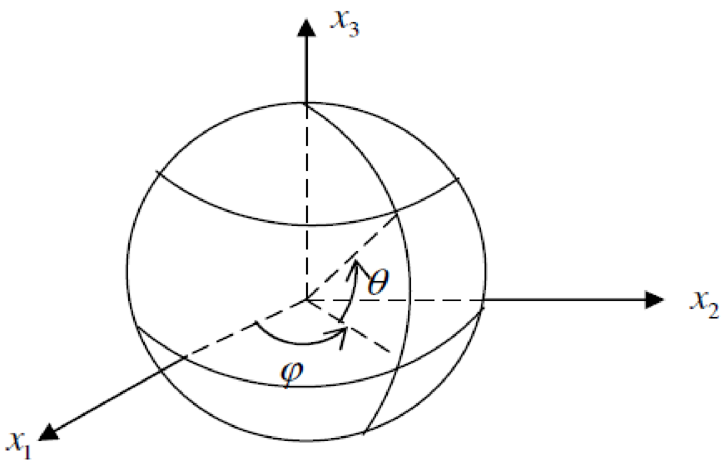
Şekil.4.3.(Konform Dönüşüm,[8])

M hiperyüzeyi üzerinde P noktasından geçen $c_1, \dots, c_{n-1}$ ortogonal eğri ailesinin üyeleri birer eğrilik çizgisi olsun. O zaman bunların teğet vektör alanları olan $T_1, \dots, T_{n-1}$ birer asli doğrultu olur.(Şekil.4.5)

F diferansiyellenebilir olduğundan F_* mevcuttur ve $T_i \in \chi(M)$ nin resmi $F_*(T_i)$ dir. M üzerinde $T_1, \dots, T_{n-1}$, N bir n-li ortogonal sistem oluştururlar. F dönüşümü konform olduğundan açıları korur. Bu yüzden $\{F_*(T_1), \dots, F_*(T_{n-1}), F_*(N)\}$ de M'

üzerinde ortogonal sistem oluşturur. Dolayısıyla n-li ortogonal sistem korunur. Dupin teoreminden dolayı $\{F(c_1), \ldots, F(c_{n-1})\}$eğrileri M' üzerine birer eğrilik çizgisi olurlar. Bu yüzden F konform dönüşümü altında eğrilik çizgisi olma özelliğini korur.

4.6.Mercatör İzdüşümü



Şekil.4.4.(Mercatör İzdüşümü,[8])

$$X=(x_1, x_2, x_3) = (\varphi, \theta, x_3) \in S_0^2$$

$$F: S_0^2 \to E^2$$

$$(\theta, \varphi) \to F(\theta, \varphi) = (\lambda \ln\tan\tfrac{\theta}{2}, \lambda\varphi) = (x_1, x_2)$$

şeklinde tanımlı Mercatör izdüşümü E^3 de kürenin düzlem üzerine konform tasviridir [3].

Mercatör izdüşümünün türev dönüşümü (tasviri) ;

$$F(\theta, \varphi) = (\lambda \ln\tan\tfrac{\theta}{2}, \lambda\varphi) = (F_1, F_2)$$

denilirse

$$F_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \theta} & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \theta} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{\sin\theta} & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

olur Paralel daireler için $\theta = \text{sabit}, T_\varphi = (0, \lambda)$ ve meridyenler için $\varphi = \text{sabit}$ $T_\theta = (\frac{\lambda}{\sin\theta}, 0)$ olduğundan

$$F_*(T_\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{\sin\theta} & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{\sin\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\lambda^2}{\sin^2\theta} = \frac{\lambda}{\sin\theta} T_\theta$$

ve

$$F_*(T_\varphi) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{\sin\theta} & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \end{bmatrix} = (0, \lambda^2) = \lambda T_\varphi$$

elde edilir [8].

Teorem.4.6.1: Mercatör izdüşümü eğrilik çizgisi olma özelliğini korur [8].

Ispat:$F: S^2 \rightarrow E^2$

$(\theta, \varphi) \rightarrow F(\theta, \varphi) = (\lambda \ln \tan\frac{\theta}{2}, \lambda\varphi)$

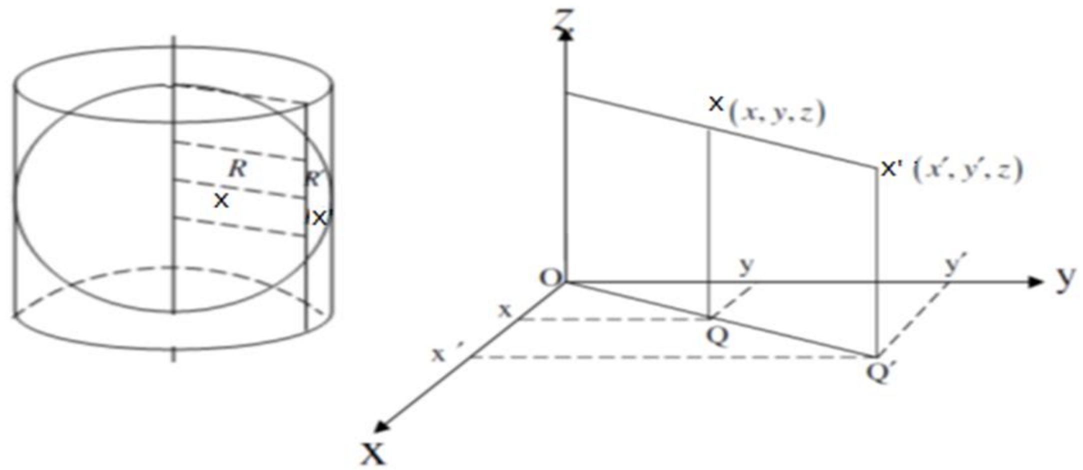
dönüşümünde kürenin şekil operatörü $S_k = I_2$ ve düzlemin şekil operatörü $S_d = O_2$ dir. Küre üzerindeki her eğri birer eğrilik çizgisi olduklarından, meridyenler ve paralel dairelerde birer eğrilik çizgileri olur. Bunların teğet vektör alanları olan. T_θ ve T_φ asli doğrultularının F_* altında düzlem üzerindeki resimleri doğrular olduğu için

$$S_d(F_*(T_\theta)) = 0.\frac{\lambda}{\sin\theta} T_\theta = 0$$
$$S_d\left(F_*(T_\varphi)\right) = 0.\lambda T_\varphi$$

yazılabileceğinden, her doğrultu asli doğrultu ve her eğri eğrilik çizgisi olur. Bu nedenle Mercatör izdüşümü F altında eğrilik çizgisi olma özelliğini korur.

4.7.Lambert İzdüşümü

E^3 de küreden silindir üzerine olan bir izdüşümdür. Kürenin noktalarının silindir üzerindeki izdüşümünde resim noktalar kürenin noktalarından silindirin eksenine çıkan diklerin silindiri kestiği noktalardır[3].



Şekil.4.5.(Lambert İzdüşümü,[8])

ve silindirin denklemi $x'^2 + y'^2 = 1$ (z=t keyfi) dir. Kürenin denklemi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ Lambert izdüşümünün denklemi; OXQ ve OXQ′ üçgenlerinin benzerliğinden

$\frac{|OX|}{|OX'|} = \frac{|OQ|}{|OQ'|}$, $|OQ'| = 1$

olur. Buradan

$$\frac{x}{x'} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{1} \Rightarrow x' = \frac{x}{\sqrt{1 - z^2}}$$

ve

$$x'^2 + y'^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1 - z^2} + y'^2 = 1 \Rightarrow y' = \frac{y}{\sqrt{1 - z^2}}$$

bulunur. Buradan

$$F: S^2 \longrightarrow C^2$$

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-z^2}}, z\right) = (F_1, F_2, F_3)$$

şeklinde elde edilir. Türev dönüşümü ise

$$F_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} & 0 & \frac{zx}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} & \frac{zy}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur.

Teorem.4.7.1: Lambert izdüşümü meridyen ve paralel dairelerinden ibaret olan eğrilik çizgilerinin bu özelliğini korur [8].

Ispat: $\alpha: I \to S^2$

bir eğrilik çizgisi ve ve teğet vektör alanı T için

$$S_k(T) = \lambda T, \lambda = \text{sabit}$$

olur. Şayet silindirin şekil operatörü S_c olmak üzere

$$S_c(F_*(T)) = \mu . F_*(T)$$

olacak şekilde doğrular bulabilirsek o zaman eğrilik çizgisi olma özelliğinin korunduğunu gösterebiliriz.

$F_*(\vec{X}) = \vec{e}_3$ için $\vec{x} \in \chi(S^2)$ olacak şekilde doğrultular varmıdır buna bakalım.

$X = (x_1, x_2, x_3)$ için

$$F(X)=\begin{bmatrix} \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} & 0 & \frac{zx}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 & \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} & \frac{zy}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=(0,0,1)$$

eşitliğinden x_1, x_2 ve x_3 hesaplanırsa

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-z^2}}+\frac{x_2}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

$$\frac{x_2}{\sqrt{1-z^2}}+\frac{zyx_3}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

$$x_3=1 \Rightarrow x_1=-\frac{zx}{1-z^2}$$

$$x_3=-\frac{zy}{1-z^2}\,, x_3=1$$

$$x_1(1-z^2)+zxx_3=0$$

$$x_2(1-z^2)+zyx_3=0$$

$$x_3=1$$

X noktası olarak

$$X=(-\frac{zx}{1-z^2}, -\frac{zy}{1-z^2}, 1)$$

bulunur.

Resimleri $\vec{e}_3$ olan eğrilik çizgileri

$S_k(X)=\lambda X\,, S_k=I$ olduğundan şekil operatörü $S_c=0_2$ olduğundan

$$S_c\big(F_*(X)\big)=0.F_*(X)$$

dır.

SONUÇ

Sonuç.1: F_* altında teğet vektör alanının resmi silindir üzerinde $\vec{e}_3$ olan eğrilik çizgileri silindir üzerinde de eğrilik çizgileridir.

F_* altında teğet vektör alanlarının resimleri $\vec{e}_3$ e dik olan eğrilik çizgileri

$$< F_*(X), \vec{e}_3 >= 0$$

$$x_3 = 0$$

bulunur. Bu doğrultuda $S_c = I_2$ olduğundan

$$S_c\big(F_*(X)\big) = F_*(X)$$

$$F_*(X) = (x_1, x_2, 0)$$

dır [12].

Sonuç.2: Teğet vektör alanlarının F_* altında resimlerinin doğrultuları $\vec{e}_3$ e dik olan eğrilik çizgileri F altında C^2 üzerinde de eğrilik çizgileridir [12].

KAYNAKLAR

1. Hacısalihoğlu, H.H. , Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, MAT-No:2, 1980.

2. Hicks, N.J. , Notes On Differential Geometry, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1-49, 1974.

3. Geotz, A. , Introduction To Differential Geometry, University Of Notre Name, Indian, 208, 212, 298-299, 1970.

4. Hacısalihoğlu, H.H. , Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler Ve Geometriler, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 183-185, 199-202, 1976.

5. O'Neill, B. , Elementary Differrential Geometry, Academic Pres, New York, 6- 11,268-269, 1966.

6. Guggenheimer, H.W. , Differrential Geometry, College Of Liberal Arts, University Of Minnesota, 212-223, 1963.

7. Özdemir M. , Manifold Dönüşümleri ve Eğrilik Çizgileri, Doğa Bilim Dergisi, Seri A1, Cilt 9, Sayı 1, 1985.

8. Öztürk C. , Manifold Dönüşümleri Üzerine , Yüksek Lisans Tezi ,Erciyes Üniversitesi , Kayseri , 2010.

9. Hacısalihoğlu H.H.,Diferensiyel Geometri Cilt 1,1,4-6,19,62-65,107,110-111, 1993.

10. Hacısalihoğlu H.H.,Diferensiyel Geometri Cilt 2,45,71-73,94,96-97,113-115,140,171,189-193,276,339, 2000.

11. Tandoğan Yusuf Ali,Diferensiyel Geometri Deres Notları

12. Özdemir M. , Manifold Dönüşümleri ve Eğrilik Çizgileri, Doğa Bilim Dergisi, Seri A_1, Cilt 9, Sayı 1, 1985.

ÖZGEÇMİŞ

Hüseyin KORKMAZ ,YOZGAT'ın Sorgun ilçesinde 1989 yılında dünyaya geldi ilköğretimini ve lise öğretimini Sorgun da tamamladı.2006 yılında Bozok Üniversitesi Matematik bölümünü kazandı.2010 yılında matematik bölümünden mezun oldu ve aynı yıl yüzksek lisans eğtimi almak için Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Matematik Bölümün de yüksek lisansa başladı.2011 yılında Sorgun Belediyesi'ne itfaiye eri olarak atandı ve halen aynı kadroda çalışmaktadır.

Adres:Yeni Mahalle Cumhuriyet
Caddesi Ş.Zeki Demirkol Sokak
Gururkent koop. D/7
YOZGAT/Sorgun

Telefon: 0545 262 84 13

e-posta: h.korkmaz89@mynet.com