T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ QUASİ- NÖRLUND TOPLANABİLME ÜZERİNE

Kadriye BAŞAR

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

Yozgat 2015

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ QUASİ- NÖRLUND TOPLANABİLME ÜZERİNE

Kadriye BAŞAR

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

Yozgat 2015

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 70111312010 numaralı öğrencisi Kadriye BAŞAR'ın hazırladığı "**Genelleştirilmiş Quasi- Nörlund Toplanabilme Üzerine**" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezi ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 16/06/2015 günü saat 14:00'te yapılmış, tezin onayına OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Muammer KULA

Üye : Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Üye : Yrd.Doç.Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU (Danışman)

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 07/07/2015 tarih ve 18 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

07/07/2015

Doç. Dr. Fuat KÖKSAL
Bozok Üniversitesi
Fen Bil.Enst.Müdürü

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iii

ABSTRACT iv

TEŞEKKÜR v

SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ.. vi

1. GİRİŞ.. 1

2. TEMEL TANIMLAR ve TEOREMLER.. 4

3. (N*,p,q) -METODU 7

4. |N*, p, q |- METODU 24

5. (J,q) - METODU.. 27

SONUÇ 42

KAYNAKLAR.. 43

ÖZGEÇMİŞ.. 44

GENELLEŞTİRİLMİŞ QUASİ- NÖRLUND TOPLANABİLME ÜZERİNE

Kadriye BAŞAR

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2015; Sayfa: 44

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ÖZET

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın amacı genelleştirilmiş quasi-Nörlund toplanabilme metodunu incelemektir.
Birinci bölümde bir limitleme metodu olan matris dönüşümleriyle ilgili açıklamalar yapıldı.
İkinci bölümde bu çalışmada kullanılan temel tanım ve teoremler verildi.
Üçüncü bölümde genelleştirilmiş quasi-Nörlund toplanabilme ile ilgili teoremlerin ispatı incelendi.
Dördüncü bölümde mutlak genelleştirilmiş quasi-Nörlund toplanabilme ile ilgili bir teoremin ispatı incelendi.
Beşinci bölümde genelleştirilmiş quasi-Nörlund metodu ile (J,q) metodu arasındaki ilişkiyi veren bir teoremin ispatı incelendi.

Anahtar Kelimeler: Regülerlik, Mutlak Regülerlik, quasi-Nörlund Toplanabilme, Genelleştirilmiş quasi-Nörlund Toplanabilme, Mutlak quasi-Nörlund Toplanabilme

ON GENERALISED QUASI- NÖRLUND SUMMABILITY

Kadriye BAŞAR

Bozok Universty
Graduate Scholl of Natural and Applied Sciences
Department Of Mathematics
Master of Science Thesis

2015; Page: 44

Thesis Supervisor: Assistant Professor Doctor Abdullah SÖNMEZOĞLU

ABSTRACT

The aim of this study which compose of five parts, is to investigate the method of generalised quasi-Nörlund summability.

In the first section, the descriptions of matrix transformations as a method of limiting are given.

In the second section, the basic definitions and theorems used in this study are given.

In the third section, proofs of theorems with respect to generalised quasi-Nörlund summability are studied.

In the fourth section, the proof of theorem with respect to absolute generalised quasi-Nörlund summability is studied.

In the fifth section, the proof of a theorem which gives relation between generalised quasi-Nörlund method and (J,q) method is studied.

Keywords: Regularity, Absolute regularity, quasi-Nörlund Summability, Generalised quasi-Nörlund Summability, Absolute generalised quasi-Norlund Summablity.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve alakasını kesmeyen, ortaya çıkan her türlü problemin çözümünde yardımlarını gördüğüm saygı değer danışmanım Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU'na ve hocalarım Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN, Doç. Dr. Muammer KULA ile Yrd. Doç. Dr. Onur OKTAY'a ayrıca bana her zaman destek olan eşim ve biricik oğluma sonsuz teşekkür ederim.

SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ

(N,p)	:	Nörlund Toplanabilme
(N,p,q)	:	Genelleştirilmiş Nörlund Toplanabilme
(N*,p,q)	:	Genelleştirilmiş quasi-Nörlund Toplanabilme
$\|N *, p, q\|$	:	Mutlak Genelleştirilmiş quasi-Nörlund Toplanabilme
(a_{nv})	:	Satır ve Sütun Sayısı Sonsuz Olan Kompleks Terimli Bir Matris
(p_n),$\{p_n\}$	:	Reel veya Kompleks Sayılar Dizisi
$\sum$	:	Toplam Sembolü
a_n =o(1)	:	(a_n)dizisinin limiti 0
a_n =O(1)	:	(a_n)dizisi sınırlı
$\Delta a_n = a_n$ - a_{n+1}	:	a_n nin simetrik farkı

1. GİRİŞ

Toplanabilme teorisi özel bir yakınsaklık türüdür. Analizde ve uygulamalı matematikte uygulamaları vardır. Serilerin yakınsaklığının incelenmesi çok eski bir bilim dalıdır. Leonard Euler (1707-1784) in döneminden önce yapılan çalışma özellikle yakınsaklığın mantıklı incelemeleri ile gözönüne alındı. Yakınsak olmayan bu seriler çok az ilgi gördü veya hiç ilgi görmedi. Aslında bu tip seriler özellikle gözleme dayalı gerçek dünya düşüncesine göre mantıksız olarak algılandı ve bu yüzden birinin bu serileri incelemeyi bırakması akılcı olacaktı.

Euler, $f(1) = s$ ve küçük z değerleri için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ serisinin $f(z)$ değerine yakınsaması halinde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ıraksak serisini $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ şekline dönüştüren toplam metodunu geliştirdi. Bu yolla $|z| < 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$$

yakınsaması vardır. Böylece

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \left.\frac{1}{1+z}\right|_{z=1} = \frac{1}{2}$$

dır. Bununla birlikte $z \neq 1$ için

$$\frac{1-z^2}{1-z^3} = 1-z^2+z^3-z^5+z^6 - \ldots$$

$$\frac{1-z^2}{1-z^3} = \frac{1+z}{1+z+z^2}$$

olduğundan

$$\frac{1+z}{1+z+z^2} = 1-z^2+z^3-z^5+z^6 - \ldots$$

dır. Bunun sonucu olarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \left.\frac{1+z}{1+z+z^2}\right|_{z=1} = \frac{2}{3}$$

dır. Bu şekilde birinin Eulerin yorumuyla $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisine neredeyse herhangi bir değer karşılık getirebileceği görünmektedir.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) sonsuz işlemlerin matematik analizde kullanılması fikrini tanıtmaya yardımcı olmuştur. Binom teoremi erken yaşlarda Gauss tarafından geliştirilmiştir ve bu onun bir kuvvet serisinin bir fonksiyona yakınsaması kavramıyla ilgilenmesine neden oldu. Bu tabii ki öncelikle matematikçiler tarafından ortaya atılan bazı anlamsız fikirleri ortadan kaldırdı. Halen gördüğümüz bu şekildeki anlamsız fikirler bu zamana öncelikli sır olarak terkedilmiştir.

Gauss hayatı boyunca matematik dünyasına başka katkılar da yaptı. Bunlar arasında hipergeometrik seriler ve bu şekildeki serilerin yakınsaklığı tartışması olmuştur.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) Gauss ve Abel ile birlikte matematik analizine dikkat çekilmesini tanıtmada öncülük etmiştir. Kuvvet serilerinin yakınsaklığı ve ıraksaklığıyla ilgili fikirlerini şekillendirmiştir. Onun çalışmalarının çoğu günümüzdeki birçok matematiksel aktivite için bir temel oluşturur.

Niels Henrik Abel (1802-1829) 19. yüzyılın ilk zamanında yakınsaklık ve ıraksaklıkla ilgili fikirlere katkı yapan üçüncü öncülerdendi. Onun en önemli teoremi olarak bilinen Abel teoremi günümüzde çokça kullanılır.

Öncelikle Cauchy, Gauss ve Abel'e atfedilen ıraksak serilere olan ilgi 19. yüzyılın ikinci yarısında azaldı. Ama daha sonraki zamanlarda ıraksak serilere olan ilgi arttı. Iraksak serilerin yeniden incelenmesini başlatanların arasında 1890 yılında $(C,1)$ yakınsaklık fikrini tanıtan E. Cesa'ro idi. Bu matematikçilere iki sonsuz serinin Cauchy çarpımının yakınsaklığını tartışma gibi imkan verdi. Bu zamandan itibaren bir çok matematikçi ıraksak serilerin araştırılmasında kapsamlı çalışmalar yayınladı.

Quasi-Nörlund toplanabilme ile ilgili çalışmalar ilk olarak 1960 yılında B.Kutner, J. I. M. S tarafından quasi-Cesaro toplanabilme ile başladı ve 1977 yılına kadar yapılan çalışmalarla geliştirildi.

Toplanabilme teorisi daha çok analiz ve uygulamalı matematikte kullanılan bir teoridir. Bu çalışmada (N*,p) quasi-Nörlund toplanabilme metodunun genel hali olan genelleştirilmiş (N*,p,q) quasi-Nörlund toplanabilme metodu $|N*, p, q|$ mutlak genelleştirilmiş quasi-Nörlund toplanabilme metodu ve son olarak (J,q) metodu ile (N*,p,q) metodu arasındaki ilişki incelendi.

2.TEMEL TANIMLAR ve TEOREMLER

Bu bölümde genel olarak çalışmamızda faydalanacağımız temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 2.1: F reel veya kompleks sayıların kümesi v = 0,1,2,3... için $a_{nv} \in F$ olmak üzere A= (a_{nv}) sonsuz matrisi ve (S_n) de F de bir dizi olsun.

(S_n) dizisinden (t_n) dizisine bir dönüşüm

$$t_n = \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} \ S_v \qquad (n = 0,1,2...)$$

olarak tanımlansın.

Bu durumda (t_n) dizisine (S_n) dizisinin A- dönüşümü dizisi denir. Bu A dönüşümünün var olabilmesi için ∀n için $\sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} \ S_v$ nin yakınsak olması gerekir [1].

Tanım 2.2: Bir A= (a_{nv}) sonsuz matrisi verilmiş olsun. Eğer A matrisi yakınsak her diziyi yakınsak diziye dönüştürüyor ve aynı zamanda limiti de koruyorsa A matrisine regülerdir denir [1].

Teorem 2.3: Bir A matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart

i) Her v için $\lim_{n\to\infty} a_{nv} = 0$

ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} = 1$

iii) Her n için $\sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}| \leq M$ olacak şekilde n den bağımsız bir M pozitif reel sayısının var olmasıdır [1].

Bu teoreme Silvermann-Toeplitz Teoremi denir.

Tanım 2.4: Verilen bir $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (U_n) olsun. Ayrıca A = (a_{nv}) sonsuz matrisinin yardımıyla $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ serisinin veya (U_n) dizisinin $(U_n^{'})$ dönüşüm dizisi $U_n^{'} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} U_k$ ile verilsin. Eğer A metodu, her mutlak yakınsak $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ serisini $u'_k = U'_k - U'_{k-1}$ olmak üzere mutlak yakınsak bir $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k$ serisine dönüştürüyorsa A metoduna mutlak regülerdir denir [1].

Tanım 2.5: Verilen bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (S_n) olsun. Ayrıca $A = (a_{nv})$ sonsuz matrisinin yardımıyla $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin veya (S_n) dizisinin (t_n) dönüşüm dizisi

$$t_n = \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} \ S_v$$

olarak tanımlansın. Eğer $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} \ S_v = S$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisine veya (S_n) dizisine S değerine A- limitlenebilir (toplanabilir) denir.

Ayrıca $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n - t_{n-1}| < \infty$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisine veya (S_n) dizisine $|A|$ toplanabilirdir denir [1].

Tanım 2.6: Hepsi birden sıfır olmayan ve hiçbiri negatif olmayan sayıların bir (p_n) dizisi verilmiş olsun.

$p_0 > 0$ ve $P_n = p_0 + p_1 + ... + p_n$ olmak üzere (S_n) dizisinden (t_n) dizisine

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} \ S_v$$

ile verilen dönüşüme Nörlund dönüşümü veya Nörlund metodu denir ve (N, p_n) ile gösterilir.

(N, p_n) ortalamasının matrisinin elemanları

$$a_{nv} = \begin{cases} \dfrac{p_{n-v}}{P_n} &, \quad v \le n \\ 0 &, \quad v > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [1].

(N,p,q) Nörlund metodlarını genelleştirdiği gibi, aynı zamanda bu çalışmada Thorpe [2] tanımından quasi-Nörlund metodunu genelleştirerek, genelleştirilmiş (N*,p,q) quasi-Nörlund metodunun tanımı verildi.

Öncelikle belli bir durumda, genelleştirilmiş quasi-Nörlund matrisinin tersi belirlendi. Hem (N*,p,q) hemde mutlak (N*,p,q) toplanabilme için limitleme teoremleri verildi.

Son olarak (J,q), ∀n∊ IN için $q_n = 1$ alındığında (A) Abel metoduna indirgenen bir kuvvet serisi metodu olmak üzere (N*,p,q) ⇒ (J,q) ifadesi için bir Abelian teoreminin ispatı incelendi.

Vermes [3] de, A = (a_{nk}) diziden diziye dönüşüm matrisi olmak üzere A matrisinin toplanabilme özellikleri ile bu özelliklerin seriden seriye A* = (a_{kn}) transpoze dönüşümleri arasında yakın ilişki olduğunu gösterdi.

Kabul edelim ki; A diziden diziye bir dönüşüm ve ayrıca ∀n∊ N için

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 1$$

olsun. Bu durumda mutlak regülerlik (Knopp ve Lorentz [4]) ve regülerlik (Hardy [5], Teorem 2) teoremlerini kullanarak A* ın seriden seriye bir dönüşüm olduğu görülebilir.

Tersine olarak, C = (c_{nk}) ile verilen seriden seriye mutlak regüler metodunun C* transpozu, n sabiti için $k \to \infty$ iken $c_{nk} \to 0$ şartı sağlanmak üzere diziden diziye regüler metottur.

Ayrıca A mutlak regüler ve yukarıdaki şartlar sağlanıyorsa bu durumda A* ın regüler ve tersinin de doğru olduğu görülür.

A ile birleştirilen (üretilen) quasi metodunu A* ile isimlendireceğiz ve unutmayalım ki A * seriden seriye dönüşümdür.

Kuttner [6] de quasi-Cesaro toplanabilmeyi tanımladı ve onun temel özelliklerini quasi-Hausdorf dönüşümü (Ramunujan [7] ve White [8]) olarak inceledi. Thorpe [2]'de quasi-Nörlund (quasi-Riesz) toplanabilmeyi tanımladı.

3. (N*,p,q) METODU

GENELLEŞTİRİLMİŞ QUASİ- NÖRLUND TOPLANABİLME

Tıpkı (N,p,q)' nin Nörlund metodlarını genellediği gibi, quasi-Nörlund metodlarını genelleyen (N*,p,q) genelleştirilmiş quasi-Nörlund metodunu tanımlayabiliriz. Bu tanımı aşağıdaki gibi verelim;

Tanım 3.1: $n \geq 0$ için $r_n \neq 0$ olacak şekilde verilen p_n ve q_n için

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v}\, q_v$$

tanımlayalım. $\forall n \geq 0$ için

$$b_n = q_n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{p_{k-n} a_k}{r_k} \qquad \textbf{(3.1)}$$

varsa (N*,p,q) metodunun verilen $\sum a_n$ sonsuz serisine uygulanabilir olduğunu söyleyebiliriz. Buna ek olarak $\sum b_n = s$ ise $\sum a_n$ serisine s değerine (N*,p,q) metoduyla toplanabilirdir denir ve $\sum |b_n| < \infty$ ise $\sum a_n$ serisine mutlak genelleştirilmiş quasi-Nörlund toplanabilir ya da $|N^*, \mathrm{p}, \mathrm{q}|$ metoduyla toplanabilirdir denir [9].

Eğer $q_n = 1$ ise (N*,p,q) metodu quasi-Nörlund (N*,p) metoduna, $p_n = 1$ ise (N*,p,q) metodu quasi-Riesz $(\overline{N}^*, q)$ metoduna indirgenir.

$$p_n = \frac{\alpha^n \sigma^n}{n!}, \quad q_n = \frac{\alpha^n}{n!} \quad (\alpha > 0\,, \sigma > 0)$$

olduğunda (N*,p,q) metodu Euler-Knopp (E^*, σ) metoduna indirgenir.

$$p_n = \binom{n+\alpha-1}{\alpha}, \quad q_n = \binom{n+\beta}{\beta}$$

olduğunda (N*,p,q) metodu (C^*, α, β) metoduna indirgenir.

Tanım 3.2: (N,p,q) matrisinin

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{p_{n-k}q_k}{r_n} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

ile verildiği bilinmektedir.

(N,p,q) matrisinin transpozu ile verilen (N*,p,q) matrisi de

$$a_{nk}{}^{*} = \begin{cases} \dfrac{q_n p_{k-n}}{r_k} & , \quad k \geq n \\ 0 & , \quad k < n \end{cases}$$

ile verilir [9].

Yukarıda tanımlanan $(\mathrm{a_{nk}})$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 1$$

olduğundan yukarıdaki tartışmadan eğer

$$k \to \infty \text{ iken } \quad p_{k-n} = o(r_k)$$

ise ∀n sabiti için (N*,p,q) regülerdir ⇔ (N,p,q) mutlak regüler ve (N*,p,q) mutlak regülerdir ⇔ (N,p,q) regülerdir sonuçları elde edilir.

Bu çalışmanın esas amacı $\sum a_n$ ∈ (N*,p,q) ⇒ $\sum a_n$ ∈ (J,q) olmasını gerektiren belli şartları incelemektir.

(N*,p,q) metodunun uygulanabilir olduğu bir örnek verelim.

Örnek 1: $a_n = (-1)^n$ olsun. $\sum a_n$ serisine (N^*, p_n, q_n) = (N*,p,q) metodu uygulanabilir mi?

$p_n = q_n = 1$ seçelim.

$b_n = q_n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{p_{k-n} a_k}{r_k}$ ile verilen b_n yakınsaksa b_n mevcuttur bu da $\sum a_n$ serisine (N*,p,q) uygulanabilirliğini gösterir.

Burada $r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v}\, q_v = n + 1$ ve

$b_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ olup, Leibnitz Teoremine göre $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ yakınsak olduğundan b_n mevcuttur.

O halde $\sum a_n$ serisine (N*,p,q) uygulanabilir. Ancak bu seri (N*,p,q) toplanabilir değildir. Çünkü $\sum b_n$ ıraksaktır.

Örnek 2: Bu örnekte $a_n = \frac{1}{n^2}$ ve $p_n = q_n = 1$ seçelim. $\sum \frac{1}{n^2}$ yakınsak seridir.

$b_n = q_n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{p_{k-n} a_k}{r_k} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)}$ yakınsak seri olduğundan $\sum a_n = \sum \frac{1}{n^2}$ serisine (N*,p,q) uygulanabilir.

Peki (N*,p,q) toplanabilir mi?

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)} \sum_{n=0}^{k} 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

yakınsak olduğundan $\sum \frac{1}{n^2}$ (N*,p,q) toplanabilirdir.

Yukarıdaki örneklerden her yakınsak seriye (N*,p,q) uygulanabilir ve bu seri (N*,p,q) toplanabilirdir.

(J,q) metodu aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.3: Kabul edelim ki $q_n \geq 0$ ve n nin sonsuz değerleri için $q_n \neq 0$ olsun.

ρ_q $(\rho_q < \infty)$, $q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı olsun.

Yani $\rho_q = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{q_n}{q_{n+1}} \right|$ olsun.

Eğer $0 \leq x \leq \rho_q$ için

$$J(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} q_n s_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n}$$

şeklinde diziden fonksiyona bir dönüşüm varsa (J,q) metoduna $\sum a_n$ veya (s_n)'e uygulanabilirdir denir.

Buna ek olarak $x \to \rho_q^{-0}$ iken $J(x) \to s$ ise $\sum a_n$ veya (s_n)'e s değerine (J,q) toplanabilirdir denir (Hardy [5], Das[10]).

(J,q) metodunun iyi bilinen özel durumları q_n=1 iken Abel metodu, $q_n = \frac{1}{n+1}$

(Borwein [11], Hardy [5] sayfa 81) iken (L) metodu veya logaritmik metodu, q_n=$\binom{n+\alpha}{\alpha}$ iken (Borwein [12]) $A_\alpha$metodu (A_0, A Abel metoduyla aynıdır), $q_n = \frac{1}{n!}$ (Hardy [5]) iken Borel metodudur.

Tanım 3.4: $\mathfrak{M} = \left\{p_n \middle| \frac{p_n}{p_{n-1}} \leq \frac{p_{n+1}}{p_n} \leq 1,\ p_n > 0\right\}$ şeklinde tanımlanır.

$p_n \in \mathfrak{M}$ iken $n > 0$ için $\frac{p_n}{p_{n-1}} \leq \frac{p_{n+1}}{p_n} \leq 1$ ve $p_n > 0$ olduğundan

$\frac{p_{n+1}}{p_n} \leq 1$ olup (p_n) hem artmayan hem de pozitif dizidir.

O halde $\lim_{n\to\infty} p_n$ vardır. Buradan (p_n) yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} p_n \geq 0$ dır.

$n > 0$ olmak üzere $p_n > 0$ ve $\frac{p_n}{p_{n-1}} \leq \frac{p_{n+1}}{p_n} \leq 1$ olduğunda $p_n \in \mathfrak{M}$ olarak yazarız.

$$P_n = \sum_{v=0}^{n} p_v \ , \quad Q_n = \sum_{v=0}^{n} q_v$$

olsun. c_n de formal olarak

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n\, x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n\right) = 1 \qquad \textbf{(3.2)}$$

özelliğiyle tanımlanır. Yani

$$p(x)\, c(x) = 1$$

dır. Şimdi (3.2) yi inceleyelim. Bunun için sol tarafa Cauchy çarpımı uygulayalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{n} (p_{n-v}\, c_v)\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{v=0}^{n} p_{n-v}\, c_v\right) x^n = 1$$

olur.

Burada seri toplamının 1 olması $x, x^2, x^3, \ldots$ lerin katsayılarının 0 ve $p_0\, c_0 = 1$ olması ile mümkündür. Yani

$$\sum_{v=0}^{n} p_{n-v}\, c_v = \begin{cases} 1 \;, & n = 0 \\ 0 \;, & n > 0 \end{cases}$$

dır.

Quasi-Nörlund metodunda olduğu gibi (3.1) dönüşümünün tersini elde etmek her zaman mümkün olmayabilir. Fakat $n \geq 0$, $q_n \neq 0$ ve $p_n \in \mathfrak{M}$ şartını sağlayan dizilerin sınıfı için bir inversini elde etmede başarılı oluruz bu aşağıdaki teoremlerle şekillenir.

Teoremleri ispatlamak için aşağıdaki Lemmaya ihtiyacımız vardır.

Lemma 3.1: $p_n \in \mathfrak{M}$ olsun. Bu takdirde

i) $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$

ii) $c_0 > 0$, $c_n \leq 0$ $(n \geq 1)$

iii) $\sum c_n \geq 0$

iv) $\sum c_n = 0 \Leftrightarrow n \to \infty$ iken $P_n \to \infty$

dır [5].

İspat : $p_n \in \mathfrak{M}$, $p_n > 0$ ve $\frac{p_n}{p_{n-1}} \leq \frac{p_{n+1}}{p_n} \leq 1$ olduğundan (p_n) azalan, yakınsak bir dizidir. Diğer taraftan $\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n\, x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n\right) = 1$ yani $p(x)\, c(x) = 1$ olup Cauchy çarpımı kullanılarak

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n\, x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v}\, c_v\, x^n = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{v=0}^{n} p_{n-v}\, c_v = \begin{cases} 1 \;, & n = 0 \\ 0 \;, & n > 0 \end{cases}$$

dir. Burada $n = 0$ için $p_0\, c_0 = 1$ olduğu açıktır.

iii) $n = 0$ için $p_0\, c_0 = 1$ olduğu açıktır. Şimdi $n > 0$ için $\sum_{v=0}^{n} p_{n-v}\, c_v = 0$ olduğunu inceleyelim.

$0 = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v}\, c_v \leq p_0 \sum_{v=0}^{n} c_v \Rightarrow \sum_{v=0}^{n} c_v \geq 0$ olup, buradan $\sum c_n \geq 0$

dır.

ii) $n = 0$ için $p_0\, c_0 = 1$ ise $c_0 = \frac{1}{p_0} > 0$ yani $c_0 > 0$

dır.

$n > 0$ için $\sum_{v=0}^{n} p_{n-v}\, c_v = 0$ olduğundan

$p_n\, c_0 + p_{n-1}\, c_1 + \cdots + p_0\, c_n = 0$

$c_0 = \frac{-p_{n-1}\, c_1 - p_{n-2}\, c_2 - \cdots - p_0\, c_n}{p_n}$ ifadesinde

$\forall\, n$, $p_n > 0$, $c_0 > 0$ olduğundan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ negatiftir.

i) $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$ olduğunu göstermek için iii) ve ii) den yararlanalım.

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \geq 0$ olduğundan

$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \geq 0$

$\Rightarrow c_0 \geq -\sum_{n=1}^{\infty} c_n$

$\Rightarrow c_0 \geq \sum_{n=1}^{\infty} -c_n$

$\Rightarrow c_0 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\, c_n\, |$

Buradan

$\sum_{n=1}^{\infty} |\, c_n\, | \leq c_0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$

iv) $\Rightarrow$ $P_n = \sum_{v=0}^{n} p_v$ ve $c_n^{(1)} = \sum_{v=0}^{n} c_v > 0$ olup,

$P_n\, c_n^{(1)} = \sum_{v=0}^{n} p_v \sum_{v=0}^{n} c_v = (p_0 + p_1 + \cdots + p_n)(c_0 + c_1 + \cdots + c_n)$

$$= p_0 c_0 + \cdots = 1$$

dir.

$$\sum_{v=0}^{n} p_{n-v}\ c_v^{(1)} = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} \sum_{j=0}^{v} c_j = \sum_{j=0}^{n} c_j \sum_{v=j}^{n} p_{n-v}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} c_j\ (\mathrm{P}_{\mathrm{n-j}})$$

$$\leq \mathrm{P_n} \sum_{j=0}^{n} c_j$$

$$= \mathrm{P_n}\ c_n^{(1)}$$

olur.

Diğer taraftan

$$\sum_{v=0}^{n} p_{n-v}\ c_v^{(1)} = \sum_{j=0}^{n} c_j \sum_{v=0}^{n} p_{n-v}$$

$$= c_0\,(p_0 + p_1 + \cdots + p_n)$$

$$= p_0\, c_0 = 1$$

dir.

$$1 \leq \mathrm{P_n}\ c_n^{(1)}$$

$0 \leq \frac{1}{P_n} \leq c_n^{(1)}$ olup

$$\lim_{n\to\infty} c_n^{(1)} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_n = \infty$$

$\Leftarrow$ $(\mathrm{P_n})\ (c_n^{(1)}) = 1$ olup $\lim_{n\to\infty} P_n = \infty$ ifadesinide kullanarak

$$\lim_{n\to\infty} P_n \lim_{n\to\infty} c_n^{(1)} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n^{(1)} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} P_n} = 0 = \sum c_n$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2: Kabul edelim ki $p_n \in \mathfrak{M}$ ve $q_n \neq 0$ ($n \geq 0$) olsun. Bu durumda uygulanabilir olmak üzere (N*,p,q), matrisi (N,p,q) nun inversinin transpozu olan invers dönüşümüne sahiptir ki, b_n (3.1) dönüşümüyle verilmişse bu durumda;

$$a_n = r_n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{b_k c_{k-n}}{q_k} \qquad \textbf{(3.3)}$$

dır. Bu teorem burada ve başka yerlerde yaygın olarak kullanılması bakımından temel teoremdir ve $q_n = 1$ olması halinde Thorpe [2]'e atfedilen bir sonucu sağladığı görülebilir [9].

İspat:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\ x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n\ x^n\right) = 1$$

eşitliğinden

$$\sum_{n=0}^{k} p_n\, c_{k-n} = \begin{cases} 1 & ,\ k = 0 \\ 0 & ,\ k > 0 \end{cases} \qquad \textbf{(3.4)}$$

olduğunu biliyoruz. Bu yüzden

$$\sum_{k=n}^{N} c_{k-n}\ \ p_{v-k} = - \sum_{k=N+1}^{v} c_{k-n}\ \ p_{v-k} \qquad (v > n) \qquad \textbf{(3.5)}$$

dir.

Şimdi N > n için ve (3.1) ile (3.4) kullanılarak

$$a_n = r_n \sum_{k=n}^{N} \frac{b_k c_{k-n}}{q_k} = r_n \sum_{k=n}^{N} \frac{c_{k-n}}{q_k}\ \ q_k \sum_{v=k}^{\infty} \frac{a_v p_{v-k}}{r_v}$$

$$= r_n \sum_{k=n}^{N} c_{k-n}\ \ \left(\sum_{v=k}^{N} + \sum_{v=N+1}^{\infty}\right) \frac{a_v p_{v-k}}{r_v}$$

$$= r_n \sum_{v=n}^{N} \frac{a_v}{r_v} \sum_{k=n}^{v} c_{k-n}\ \ p_{v-k}\ +\ r_n \sum_{v=N+1}^{\infty} \frac{a_v}{r_v} \sum_{k=n}^{N} c_{k-n}\ \ p_{v-k}$$

$$= \quad a_n + r_n \sum_{v=N+1}^{\infty} \frac{a_v}{r_v} \sum_{k=n}^{N} c_{k-n}\ \ p_{v-k}$$

elde edilir.

Böylece (3.3) ün geçerliliği için gerek ve yeter şart her sabit n için N → ∞ iken

$$\sum_{v=N+1}^{\infty} \frac{a_v}{r_v} \sum_{k=n}^{N} c_{k-n} \ \ p_{v-k} \to 0$$

olmalıdır ki bu (3.5) den dolayı her sabit n için N → ∞ iken

$$\phi_N = \sum_{v=N+1}^{\infty} \frac{a_v}{r_v} \sum_{k=N+1}^{v} c_{k-n} \ \ p_{v-k} \to 0 \qquad \textbf{(3.6)}$$

olmasıyla aynıdır. Kabul edelim ki

$$b_0 = q_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k a_k}{r_k}$$

$$\omega_v = q_0 \sum_{k=v}^{\infty} \frac{p_k a_k}{r_k} \qquad \textbf{(3.7)}$$

olsun. (N*,p,q) metodu $\sum a_n$ serisine uygulanabilir olduğundan b_0 sonlu ve bu yüzden ω_v iyi tanımlı olup v → ∞ iken $\omega_v \to 0$ dır.

Yani $\lim\limits_{v \to \infty} q_0 \sum_{k=v}^{\infty} \frac{p_k a_k}{r_k} = 0$

olur.

Şimdi (3.7) den $\frac{a_v}{r_v}$ oluşturmaya çalışalım.

$$\omega_v = q_0 \sum_{k=v}^{\infty} \frac{p_k a_k}{r_k} = q_0 \frac{p_v a_v}{r_v} + q_0 \sum_{k=v+1}^{\infty} \frac{p_k a_k}{r_k}$$

$\omega_v = q_0 \frac{p_v a_v}{r_v} + \ \omega_{v+1}$ ise $\omega_v - \ \omega_{v+1} = q_0 \frac{p_v a_v}{r_v}$

Buradan ;

$$\frac{a_v}{r_v} = \frac{\omega_v - \omega_{v+1}}{q_0 p_v}$$

dir. Bu nedenle

$$\phi_N = \frac{1}{q_0} \sum_{v=N+1}^{\infty} \frac{\omega_v - \omega_{v+1}}{p_v} \sum_{k=N+1}^{v} c_{k-n} \;\; p_{v-k}$$

dır.

Şimdi M > N için

$$\frac{1}{q_0} \sum_{v=N+1}^{M} \frac{\omega_v - \omega_{v+1}}{p_v} \sum_{k=N+1}^{v} c_{k-n} \;\; p_{v-k}$$

$$= \frac{1}{q_0} \sum_{v=N+1}^{M} \omega_v \left[\sum_{k=N+1}^{v} \frac{p_{v-k}\, c_{k-n}}{p_v} - \sum_{k=N+1}^{v-1} \frac{p_{v-k-1}\, c_{k-n}}{p_{v-1}} \right] -$$
$$\frac{1}{q_0} \frac{\omega_{M+1}}{p_M} \sum_{k=N+1}^{M} p_{M-k} \;\; c_{k-n}$$

dır.

Gerçekten (3.4) ifadesinden yararlanarak

$$\frac{1}{q_0} \sum_{v=N+1}^{M} \frac{\omega_v}{p_v} \sum_{k=N+1}^{v} c_{k-n} \;\; p_{v-k} - \frac{1}{q_0} \sum_{v=N+1}^{M} \frac{\omega_{v+1}}{p_v} \sum_{k=N+1}^{v} c_{k-n} \;\; p_{v-k}$$

$$= \frac{1}{q_0} \sum_{v=N+1}^{M} \frac{\omega_v}{p_v} \sum_{k=N+1}^{v} c_{k-n} \;\; p_{v-k} - \frac{1}{q_0} \sum_{v=N+2}^{M+1} \frac{\omega_v}{p_{v-1}} \sum_{k=N+1}^{v-1} c_{k-n} \;\; p_{v-k-1}$$

$$= \frac{1}{q_0} \sum_{v=N+1}^{M} \frac{\omega_v}{p_v} \quad \sum_{k=N+1}^{v} c_{k-n} \;\; p_{v-k} - \quad \frac{1}{q_0} \sum_{v=N+2}^{M} \frac{\omega_v}{p_{v-1}} \quad \sum_{k=N+1}^{v-1} c_{k-n} \;\; p_{v-k-1} -$$
$$\frac{1}{q_0} \frac{\omega_{M+1}}{p_M} \sum_{k=N+1}^{M} p_{M-k} \;\; c_{k-n}$$

yazılabilir.

Lemma 2.1den $p_n \in \mathfrak{M}$ olduğundan M→ ∞ iken

$$|\sum_{k=N+1}^{M} p_{M-k} \;\; c_{k-n}| = 0(1)$$

dır.Gerçekten $M > N$ olmak üzere

$$\sum_{k=N+1}^{M} p_{M-k} \;\; c_{k-n} = p_{M-N-1}\, c_{N+1-n} + \cdots + p_0\, c_{M-n}$$

$N+1 \leq k \leq M$ olduğundan $p_{M-k} < p_0$ ve

$$|\sum_{k=N+1}^{M} p_{M-k} \;\; c_{k-n}| \leq \sum_{k=N+1}^{M} p_{M-k} \;\; |c_{k-n}| \leq p_0 \sum_{k=N+1}^{M} \;\; |c_{k-n}| < \infty$$

dır.

$\sum|c_n|$ serisinin kısmi toplam dizisi sınırlı olduğundan,

Yani M→ ∞ iken $|\sum_{k=N+1}^{M} p_{M-k} \; c_{k-n} \,| \;=\; 0(1)$

dır.

Ayrıca tanımdan M→ ∞ iken ω_M = 0(1) olduğundan

$$\phi_N = \frac{1}{q_0} \sum_{v=N+1}^{M} \omega_v \sum_{k=N+1}^{v-1} c_{k-n} \left(\frac{p_{v-k}}{p_v} - \frac{p_{v-k-1}}{p_{v-1}}\right)$$

dır. (ω_v) sıfıra yakınsayan keyfi bir dizi olduğundan bu nedenle (3.6) doğrudur yani

sabit n için N → ∞ iken ϕ_N → 0 ⇔$J_N = \sum_{v=N+1}^{\infty} \left|\sum_{k=N+1}^{v} \left(\frac{p_{v-k}}{p_v} - \frac{p_{v-k-1}}{p_{v-1}}\right) c_{k-n} \right|$

=0(1)

dır. Fakat (3.4) den dolayı $v > n$ için

$$\sum_{k=N+1}^{v} \left(\frac{p_{v-k}}{p_v} - \frac{p_{v-k-1}}{p_{v-1}}\right) c_{k-n} = -\sum_{k=n}^{N} \left(\frac{p_{v-k}}{p_v} - \frac{p_{v-k-1}}{p_{v-1}}\right) c_{k-n}$$

dir ve ayrıca $k \leq v-1$ için

$$\frac{p_{v-k}}{p_v} - \frac{p_{v-k-1}}{p_{v-1}} \leq 1$$

dir (Hardy [5], Teorem 8).

Bu yüzden

$$J_N = \sum_{v=N+1}^{\infty} \left|\sum_{k=n}^{N} \left(\frac{p_{v-k}}{p_v} - \frac{p_{v-k-1}}{p_{v-1}}\right) c_{k-n} \right|$$

$$\leq \sum_{v=N+1}^{\infty} c_0 \left|\frac{p_{v-n}}{p_v} - \frac{p_{v-n-1}}{p_{v-1}}\right| + \sum_{v=N+1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \left|c_{k-n} \left(\frac{p_{v-k}}{p_v} - \frac{p_{v-k-1}}{p_{v-1}}\right)\right|$$

$$= J_N^{(1)} + J_N^{(2)}$$

diyelim.

$p_n \in \mathfrak{M}$ olduğundan $(\frac{p_n}{p_{n+1}})$artmayan olup bu nedenle $N \to \infty$ iken $J_N^{(1)} = 0(1)$ dir. $\frac{p_n}{p_{n+1}} \geq 1$ ve $\left(\frac{p_n}{p_{n+1}}\right)$ artmayan dizi olduğundan $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_{n+1}}$ mevcut ve

$A = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_{n+1}} \geq 1$ sonucu çıkar.

Bu yüzden

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\frac{p_{v-k}}{p_v} - \frac{p_{v-k-1}}{p_{v-1}}\right)$$

$$= \lim_{R\to\infty} \sum_{k=N+1}^{R}\left(\frac{p_{v-k}}{p_v} - \frac{p_{v-k-1}}{p_{v-1}}\right)$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(\frac{p_{R-k}}{p_R} - \frac{p_{N-k}}{p_N}\right) = \lim_{v\to\infty}\left(\frac{p_{v-k}}{p_v} - \frac{p_{N-k}}{p_N}\right)$$

$$= \lim_{v\to\infty}\left(\frac{p_{v-k}}{p_{v+1-k}} \cdot \frac{p_{v+1-k}}{p_{v+2-k}} \cdots \frac{p_{v-1}}{p_0}\right) - \frac{p_{N-k}}{p_N}$$

$$= A^k - \frac{p_{N-k}}{p_N}$$

dır. Bu nedenle (3.4) den

$$J_N^{(2)} = \sum_{v=N+1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \left| c_{k-n} \left(\frac{p_{v-k}}{p_v} - \frac{p_{v-k-1}}{p_{v-1}}\right)\right|$$

$$J_N^{(2)} = \sum_{k=n+1}^{N} c_{k-n} \sum_{v=N+1}^{\infty}\left(\frac{p_{v-k}}{p_v} - \frac{p_{v-k-1}}{p_{v-1}}\right)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{N} c_{k-n} A^k - \sum_{k=n+1}^{N} c_{k-n} \frac{p_{N-k}}{p_N}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{N} c_{k-n} A^k - \left[\sum_{k=n}^{N} c_{k-n} \frac{p_{N-k}}{p_N} - c_0 \frac{p_{N-n}}{p_N}\right]$$

$$= \sum_{k=n+1}^{N} c_{k-n} A^k - 0 + c_0 \frac{p_{N-n}}{p_n}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{N} c_{k-n} A^k + c_0 \frac{p_{N-n}}{p_N}$$

dır. Lemma 3.1 den

$$\sum_{k=n+1}^{N} c_{k-n} A^k \leq 0$$

olur.

$N \to \infty$ iken Lemma 3.1 den $c_0 > 0$ ve $(\frac{p_{N-n}}{P_N})$ yakınsak ve dolayısıyla sınırlı olduğundan $(\frac{c_0\, p_{N-n}}{P_N})$ sınırlıdır. Yani $J_N^{(2)} \leq c_0 \frac{p_{N-n}}{P_N} = 0(1)$

dir.

Yani $N\to\infty$ iken $J_N = 0(1)$ elde ederiz ki bu teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3. 3: Kabul edelim ki $p_n \in \mathfrak{M}$, $q_n \neq 0$ $(n \geq 0)$ ve $\{|q_n|\}$ dizisi azalmayan olsun. Eğer $\sum a_n$, s değerine (N*,p,q) toplanabilirse bu durumda

$a_n = o\,(\frac{|r_n|}{|q_n|})$ dır.

Eğer ilave olarak $r_n \geq 0$ ise bu takdirde $s_n = s + o\,(\frac{Q_n}{|q_n|})$ dır [9].

İspat: $\sum a_n$, (N*,p,q) toplanabilir olduğundan $\sum b_n$ yakınsak ve bu yüzden de $b_n = o\,(1)$ dır. Teorem 3.2 de verildiği gibi inversiyon formülünü ve teoremlerin hipotezini kullanarak $\sum |c_n| < \infty$ ve $b_n = o\,(1)$ olduğundan

$$|a_n| = \left| r_n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{b_k c_{k-n}}{q_k} \right|$$

$$\leq |r_n| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|b_k c_{k-n}|}{|q_k|}$$

$$\leq \frac{|r_n|}{|q_n|} \sum_{k=n}^{\infty} |b_k c_{k-n}|$$

$$\leq \frac{|r_n|}{|q_n|} \sum_{k=n}^{\infty} |b_k|\, |c_{k-n}|$$

$$= \frac{|r_n|}{|q_n|} \sum_{k=n}^{\infty} o\,(1)\, |c_{k-n}|$$

$$= o\,(1) \frac{|r_n|}{|q_n|} \sum_{k=n}^{\infty} |c_{k-n}|$$

$$= o\,\left(\frac{|r_n|}{|q_n|}\right)$$

elde ederiz.

$(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n) (\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{n} c_{n-v} r_v x^{n-v} x^v$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{n} c_{n-v} r_v x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{n} c_{n-v} \sum_{j=0}^{v} p_{v-j} q_j x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} q_j \sum_{v=j}^{n} c_{n-v} p_{v-j} x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} [q_n \sum_{v=n}^{n} c_{n-v} p_{v-n} + \sum_{j=0}^{n-1} q_j \sum_{v=j}^{n-1} c_{n-v} p_{v-j}] x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} [q_n c_0 p_0 + \sum_{j=0}^{n-1} q_j . 0] x^n$

$= \sum q_n x^n$

olur. Demek ki

$$(\sum c_n x^n) (\sum r_n x^n) = \sum q_n x^n$$

yani $$c(x)r(x) = q(x)$$

dir. Şimdi

$c_n^{(1)} = \sum_{v=0}^{n} c_v$ olmak üzere

$(\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(1)} x^n) (\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{n} c_v^{(1)} x^v r_{n-v} x^{n-v}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{n} c_v^{(1)} r_{n-v} x^n$ dır.

Burada,

$\sum_{v=0}^{n} c_v^{(1)} r_{n-v} = c_0^{(1)} r_n + \sum_{v=1}^{n} c_v^{(1)} r_{n-v}$

$= c_0 r_n + \sum_{v=1}^{n} c_v^{(1)} r_{n-v}$

$= c_0 \left[\sum_{v=0}^{n} p_{n-v} \; q_v \right] + \sum_{v=1}^{n} \; c_v^{(1)} r_{n-v}$

$= c_0 \left[p_0 \; q_n + p_1 \; q_{n-1} + \cdots + p_n \; q_0 \right] + \sum_{v=1}^{n} \; c_v^{(1)} r_{n-v}$

$= c_0 \, p_0 \; q_n + c_1^{(1)} r_{n-1} \; + c_2^{(1)} r_{n-2} \; + \cdots + c_n^{(1)} r_0$

$= c_0 \, p_0 \; q_n + c_0 \, p_0 \; q_{n-1} \; + \cdots + c_0 \, p_0 \; q_0$

$= \; q_n + \; q_{n-1} \; + \cdots + \; q_0$

$= Q_n$

dir.

Böylece

$$\left(\sum c_n^{(1)} \; x^n \right) \left(\sum r_n \; x^n \right) = \sum Q_n \; x^n$$

dir. Bu durumda

$$\sum_{v=0}^{n} r_v \, c_{n-v} \; = q_n \qquad \textbf{(3.8)}$$

$$\sum_{v=0}^{n} r_v \, c_{n-v}^{(1)} \; = Q_n \qquad \textbf{(3.9)}$$

sonuçları çıkar.

Böylece $p_n \in \mathfrak{M}$ oduğundan $c_n^{(1)} \geq 0$ elde ederiz ve $r_n \geq \; 0$ ise (3.9) dan q_n ister pozitif olsun ister olmasın $Q_n \geq \; 0$ sonucu çıkar.

Son olarak kabul edelim ki $\sum b_n = s$ olsun

$S_m = \sum_{n=0}^{m} a_n \quad (m > n)$

olsun. (3.8) den

$S_m = \sum_{n=0}^{m} r_n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{b_k c_{k-n}}{q_k}$

$= \sum_{n=0}^{m} r_n \left(\sum_{k=n}^{m} \frac{b_k c_{k-n}}{q_k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{b_k c_{k-n}}{q_k} \right)$

$= \sum_{n=0}^{m} r_n \sum_{k=n}^{m} \frac{b_k c_{k-n}}{q_k} + \sum_{n=0}^{m} r_n \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{b_k c_{k-n}}{q_k})$

$= \sum_{k=0}^{m} \frac{b_k}{q_k} \sum_{n=0}^{k} r_n c_{k-n} + \sum_{n=0}^{m} r_n \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{b_k c_{k-n}}{q_k}$

$S_m = \sum_{k=0}^{m} b_k + \sum_{n=0}^{m} r_n \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{b_k c_{k-n}}{q_k}$

dır.

$|S_m - \sum_{k=0}^{m} b_k \ | \leq \sum_{n=0}^{m} r_n \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|b_k|\,|c_{k-n}|}{|q_k|}$

$\leq \sum_{n=0}^{m} r_n \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|b_k||c_{k-n}|}{|q_m|}$

Bu nedenle b_k = o (1) olduğundan

$|S_m - \sum_{k=0}^{m} b_k \ | \leq \sum_{n=0}^{m} r_n \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{o(1)\,|c_{k-n}|}{|q_m|}$

$= \text{o}\ (1) \frac{1}{|q_m|} \sum_{n=0}^{m} r_n \sum_{k=m+1}^{\infty} |c_{k-n}|$

dır.

Fakat Lemma 3.1 den $p_n \in \mathfrak{M}$ olduğundan

$$c_{m-n}^{(1)} = \sum_{v=0}^{m-n} c_v \geq 0$$

dır. Bu yüzden

$\sum_{k=n}^{\infty} c_{k-n} = \sum_{k=n}^{m} c_{k-n} + \sum_{k=m+1}^{\infty} c_{k-n} \geq 0$

$= c_0 + \sum_{k=n+1}^{m} c_{k-n} + \sum_{k=m+1}^{\infty} c_{k-n} \geq 0$

$\sum_{k=n}^{m} c_{k-n} + \sum_{k=m+1}^{\infty} c_{k-n} \geq 0$

$\sum_{k=0}^{m-n} c_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} c_{k-n} \geq 0$

$c_{m-n}^{(1)} \geq \sum_{k=m+1}^{\infty} -c_{k-n}$

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}|c_{k-n}| \le c_{m-n}^{(1)} \tag{3.10}$$

elde edilir.

Bu yüzden (3.9) eşitliğinden $\sum_{v=0}^{n} r_v\, c_{n-v}^{(1)} = Q_n$ olduğundan

$$|S_m - \sum_{k=0}^{m} b_k\,| = \mathrm{o}\,(1)\,\frac{1}{|q_m|}\ \sum_{n=0}^{m} r_n c_{m-n}^{(1)}$$

$$= \mathrm{o}\,(1)\,\frac{Q_m}{|q_m|}$$

dır. Bu ise ispatı tamamlar.

4. $|N^*, \mathbf{p}, \mathbf{q}|$- METODU

MUTLAK GENELLEŞTİRİLMİŞ QUASİ-NÖRLUND TOPLANABİLME

Bu kısımda $|N^*, p, q|$ toplanabilirliği ile ilgili bir teorem ispatlanmıştır.

Teorem 4.1: Kabul edelim ki $p_n \in \mathfrak{M}$, q_n pozitif, $\{q_n\}$ azalmayan ve $\left\{\frac{q_n}{r_n}\right\}$ dizisi artmayan olsun. Bu takdirde $\sum a_n$, $|N^*, p, q|$ toplanabilirse $\left\{\frac{s_n q_n}{r_n}\right\} \in BV$ dir [9].

İspat: Kabul edelim ki $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olsun.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{s_n q_n}{r_n} - \frac{s_{n+1} q_{n+1}}{r_{n+1}}\right|$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left|\Delta(\frac{s_n q_n}{r_n})\right|$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{s_n q_n}{r_n} - \frac{s_n q_{n+1}}{r_{n+1}} + \frac{s_n q_{n+1}}{r_{n+1}} - \frac{s_{n+1} q_{n+1}}{r_{n+1}}\right|$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{q_{n+1}}{r_{n+1}}(s_n - s_{n+1}) + s_n\,(\frac{q_n}{r_n} - \frac{q_{n+1}}{r_{n+1}})\right|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_{n+1}}{r_{n+1}} |a_{n+1}| + \sum_{n=0}^{\infty} |s_n| \left|\frac{q_n}{r_n} - \frac{q_{n+1}}{r_{n+1}}\right|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}| \frac{q_{n+1}}{r_{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} |s_n| \left|\Delta \frac{q_n}{r_n}\right|$$

$$= L_n + M_n$$

olsun.

(3.3) ve $\{q_n\}$ in azalmayan olduğu kullanılarak

$$L_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}| \frac{q_{n+1}}{r_{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_{n+1}}{r_{n+1}} \left| r_{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k\, c_{k-n-1}}{q_k}) \right|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_{n+1}}{r_{n+1}} r_{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|b_k||c_{k-n-1}|}{q_k}$$

$\leq \sum_{n=0}^{\infty} q_{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k||c_{k-n-1}| \ \frac{1}{q_{n+1}}$

$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k||c_{k-n-1}|$

$=\sum_{k=1}^{\infty} \ |b_k| \ \sum_{n=0}^{k-1} |c_{k-n-1}|$

olup $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ \ |N^*, p, q \ |$ toplanabilirdir. Buradan $\sum|b_k| < \infty$ ve $p_n \in \mathfrak{M}$ iken

$\sum|c_n| < \infty$ olduğundan

$\sum_{n=0}^{k-1} |c_{k-n-1}| = 0(1)$

dir. Böylece

$L_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ |b_k| \ \sum_{n=0}^{k-1} |c_{k-n-1}|$

L_n= 0(1) elde edilir.

$M_n = \sum_{n=0}^{\infty} \ |s_n| \ \left|\Delta \frac{q_n}{r_n}\right|$

$=\sum_{n=0}^{\infty} \left|\Delta(\frac{q_n}{r_n})\right| \ |\sum_{v=0}^{n} a_v|$

$=\sum_{n=0}^{\infty} \left|\Delta(\frac{q_n}{r_n})\right| \ \left|\sum_{v=0}^{n} r_v \sum_{k=v}^{\infty} \ \frac{b_k \, c_{k-v}}{q_k} \ \right|$

$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left|\Delta(\frac{q_n}{r_n})\right| \ \sum_{v=0}^{n} r_v \sum_{k=v}^{\infty} \ \frac{|b_k||c_{k-v}|}{q_k}$

$= \sum_{v=0}^{\infty} r_v \sum_{n=v}^{\infty} \left|\Delta(\frac{q_n}{r_n})\right| \ \sum_{k=v}^{\infty} \ \frac{|b_k||c_{k-v}|}{q_k}$

$= \sum_{v=0}^{\infty} r_v \sum_{k=v}^{\infty} \ \frac{|b_k||c_{k-v}|}{q_k} \ \sum_{n=v}^{\infty} \left|\Delta(\frac{q_n}{r_n})\right|$

dir. $\left\{\frac{q_n}{r_n}\right\}$ azalan olduğundan

$\sum_{n=v}^{\infty} \left|\Delta \frac{q_n}{r_n}\right| = \sum_{n=v}^{\infty} \ \left|\frac{q_n}{r_n} - \frac{q_{n+1}}{r_{n+1}}\right| = \sum_{n=v}^{\infty} \ \ (\frac{q_n}{r_n} - \frac{q_{n+1}}{r_{n+1}})$

$= \lim_{M\to\infty} \sum_{n=v}^{M} \ \ (\frac{q_n}{r_n} - \frac{q_{n+1}}{r_{n+1}})$

$= \lim_{M\to\infty} (\frac{q_v}{r_v} - \frac{q_{M+1}}{r_{M+1}})$

$= \frac{q_v}{r_v} - \lim_{M\to\infty} \frac{q_{M+1}}{r_{M+1}}) \leq \frac{q_v}{r_v}$

dir. Böylece

$M_n \leq \sum_{v=0}^{\infty} r_v \sum_{k=v}^{\infty} \frac{|b_k||c_{k-v}|}{q_k} \frac{q_v}{r_v}$

$\leq \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k=v}^{\infty} |b_k||c_{k-v}|$

$= \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \sum_{v=o}^{k} |c_{k-v}| < \infty$

olup

M_n = 0(1) dir.

$$\sum \left|\Delta \frac{s_n q_n}{r_n}\right| \leq L_n + M_n = 0(1)$$

ve böylece $\left\{\frac{s_n q_n}{r_n}\right\} \in$ BV dir. Bu ise Teorem 4.1 in ispatını tamamlar.

5. (J,q) - METODU

Bu kısımda (N*,p,q) ile (J,q) metodu arasındaki ilişkiyi veren teoremin ispatı incelenecektir. Bu teorem Abel teoremi olarak bilinir ve çalışmamızın temel teoremidir. Ancak bu teoremin ispatını yapmak için aşağıdaki Lemmaya ihtiyaç vardır.

Lemma 5.1: $p_n \in \mathfrak{M}$, $q_n > 0$ ve $\{q_n\}$ azalmayan olsun. Bu takdirde

$$r_n\,(q_{n+1} - q_n) = O(q_{n+1}(r_{n+1} - r_n)) \qquad \textbf{(5.1)}$$

olması

$0 \leq q_k^2 \leq \sum_{v=0}^{k} q_v\, r_v c_{k-v} = O(q_k^2)$

olmasını gerektirir [9].

İspat : $p_n > 0$, $q_n > 0$ ve $\{q_n\}$ azalmayan olduğunda $r_n > 0$ ve r_n azalmayandır.

Gerçekten $r_n = \sum_{v=0}^{n} p_v\, q_{n-v} > 0$ ve

$r_n - r_{n+1} = \sum_{v=0}^{n} p_v\, q_{n-v} - \sum_{v=0}^{n+1} p_v\, q_{n+1-v}$

$= \sum_{v=0}^{n+1} p_v\,(q_{n-v} - q_{n+1-v}) < 0$

Yani $r_n < r_{n+1}$ dır.

Lemma 3.1 den $p_n \in \mathfrak{M}$ iken $c_0 > 0$, $c_n \leq 0$ $(n \geq 1)$ olduğundan ve (3.8) eşitliğini de kullanarak

$$\sum_{v=0}^{k} q_v\, r_v c_{k-v} \;\geq\; q_k \sum_{v=0}^{k} r_v c_{k-v} = q_k^2 \geq 0$$

elde ederiz. Şimdi

$\sum_{v=0}^{k} q_v\, r_v c_{k-v} = \sum_{v=0}^{k} q_{k-v}\, r_{k-v}\; c_v$

$= \sum_{v=0}^{k-1} \Delta(q_{k-v}\, r_{k-v}) c_v^{(1)} + q_0\, r_0\; c_k^{(1)}$

$=\sum_{v=0}^{k} \Delta(q_{k-v}\, r_{k-v})c_v^{(1)}$- $\Delta\,(q_0\, r_0)\;\; c_k^{(1)}$+ $q_0\, r_0\;\; c_k^{(1)}$

$=\sum_{v=0}^{k} \Delta(q_{k-v}\, r_{k-v})c_v^{(1)}$

$=\sum_{v=0}^{k} (\, q_{k-v}\, r_{k-v} - q_{k-v-1}\, r_{k-v-1})c_v^{(1)}$

$=\sum_{v=0}^{k} (\, q_{k-v}\, r_{k-v} - \; q_{k-v}\, r_{k-v-1} + \; q_{k-v}\, r_{k-v-1} - q_{k-v-1}\, r_{k-v-1})c_v^{(1)}$

$= \sum_{v=0}^{k} q_{k-v}\, (r_{k-v} - r_{k-v-1})c_v^{(1)}+\sum_{v=0}^{k} r_{k-v-1}\, (q_{k-v} - q_{k-v-1})c_v^{(1)}$

olup Lemma 3.1 den $\sum c_n \geq 0$ olduğundan $c_n^{(1)} \geq\; 0$ dır. Diğer taraftan (3.9) ifadesinden

$\sum_{v=0}^{k} q_{k-v}\, (r_{k-v} - r_{k-v-1})c_v^{(1)} \leq\; q_k \sum_{v=0}^{k} (r_{k-v} - r_{k-v-1})c_v^{(1)}$

$\leq\; q_k[\sum_{v=0}^{k} r_{k-v}c_v^{(1)} - \sum_{v=0}^{k-1} r_{k-v-1}c_v^{(1)}]$

$=\; q_k(\, Q_k - Q_{k-1}) = q_k^2$

elde ederiz. Yine $r_n\, (q_{n+1}\; - q_n\,) = \mathrm{O}(q_{n+1}(r_{n+1}\; - r_n\,))$ den yararlanarak ve önceki durumu da kullanarak

$0 \leq \sum_{v=0}^{k} r_{k-v-1}\, (q_{k-v} - q_{k-v-1})c_v^{(1)}$

$= \sum_{v=0}^{k} O[\, q_{k-v}\, (r_{k-v} - r_{k-v-1})]\; c_v^{(1)}$

$= \mathrm{O}(1)\;\; q_k\; \sum_{v=0}^{k} [r_{k-v} - r_{k-v-1}]c_v^{(1)} = \mathrm{O}(1)\, q_k^2$

elde ederiz. Bu nedenle

$0 \leq \sum_{v=0}^{k} q_v\, r_v c_{k-v} = \mathrm{O}(q_k^2)$

dır. Bu ise Lemma 5.1 nin ispatını tamamlar.

Teorem 5.2: Kabul edelim ki $p_n \in\; \mathfrak{M},\;\; q_n >\; 0$ ve $\{q_n\}$ ve $\left\{\frac{q_n}{q_{n+1}}\right\}$ azalmayan diziler olsun. Ayrıca (5.1) şartı sağlansın. Bu takdirde

$$\sum a_n = s\ (N^*,p,q) \Rightarrow \sum a_n = s\ (J,q)$$

dır.

(N,p,q) ve (J,q) arasındaki ilişkinin Das [10] tarafından incelendiği belirtilmelidir. Teorem 5.2 de q_n = 1 alarak (N*,p) ⇒ (A) ye ilişkin Thorpe [2] 'nin sonucu elde edilir [9].

İspat: İlk olarak $\sum a_n$, (N*,p,q) toplanabilir olduğunda (J,q) metodunun $\sum a_n$ serisine uygulanabilir olduğunu ispatlayacağız.

Teorem 3.3 den dolayı

$s_n = s + o\,(\frac{Q_n}{q_n}) = 0(\frac{Q_n}{q_n})$

elde ederiz. Bu yüzden

$$J(x) = \frac{\sum q_n\, s_n\, x^n}{\sum q_n\ x^n}$$

ifadesinde s_n eşitliğini yazalım.

$J(x) = \frac{\sum q_n\ 0(\frac{Q_n}{q_n})\ \ x^n}{\sum q_n\ x^n}$

$= 0(1) \sum \frac{Q_n\, x^n}{q_n\, x^n}$

$= 0(1) \sum x^n$

dır.

$|x| < 1$ için $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$ olduğundan $|x| < 1$ için J(x) mevcut ve bu nedenle $\sum a_n$ serisine (J,q) metodu uygulanabilirdir.

Şimdi $|x| < 1$ için

$J(x) = \frac{\sum q_n\, s_n\, x^n}{\sum q_n\ x^n}$

$= \frac{1}{q(x)} \sum_{n=0}^{\infty} q_n \sum_{v=0}^{n} a_v \, x^n$

$= \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} a_v \sum_{n=v}^{\infty} q_n \, x^n$

$= \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=v}^{\infty} q_n x^n r_v \; \sum_{k=v}^{\infty} \frac{b_k c_{k-v}}{q_k}$

$$= \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v \sum_{k=v}^{\infty} \frac{b_k c_{k-v}}{q_k} \sum_{n=v}^{\infty} q_n x^n \qquad \textbf{(5.2)}$$

$= \frac{1}{q(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{q_k} \sum_{v=0}^{k} r_v \, c_{k-v} \; \sum_{n=v}^{\infty} q_n \, x^n$

$= \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) \, b_k$ dır.

Burada,

$$g_k(x) = \frac{\sum_{v=0}^{k} r_v c_{k-v} \;\; \sum_{n=v}^{\infty} q_n x^n}{q(x) \, q_k}$$

dır.

Double serisinin mutlak yakınsaklığıyla (5.2) ifadesini elde etmede işleme sokulan toplamın sırasını değiştirme, $|x| < 1$ bölgesinde sağlanır.

Şimdi (5.2), $\sum b_n$ serisini J(x) fonksiyonuna dönüştüren seriden fonksiyona bir dönüşümdür. Teoremi ispatlamak için (5.2) dönüşümünün regüler yani regülerlik şartlarını (Cooke[13] , sayfa65) sağladığını göstermek zorundayız.

(3.8) eşitliğinden

$g_k(x) = \frac{\sum_{v=0}^{k} r_v c_{k-v} \;\; (\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n - \sum_{n=0}^{v-1} q_n x^n)}{q(x) \, q_k}$

$= \frac{\sum_{v=0}^{k} r_v c_{k-v} \;\; (q(x) - \sum_{n=0}^{v-1} q_n x^n)}{q(x) \, q_k}$

$$= \frac{1}{q_k} \sum_{v=0}^{k} r_v \, c_{k-v} \, (1 - \frac{\sum_{n=0}^{v-1} q_n x^n}{q(x)}) \qquad \textbf{(5.3)}$$

$$= 1- \frac{\left(\sum_{v=0}^{k} r_v c_{k-v} \ \sum_{n=0}^{v-1} q_n x^n\right)}{q(x)\, q_k}$$

elde edilir.

$q_n > 0$ ve $\{q_n\}$ artan olduğundan $q_n > q_0$ olup, $x \to 1^-$ iken

$q(x) = \sum q_n x^n \geq q_0 \sum x^n$ olup

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x} = \infty$$

elde ederiz.

Bu yüzden (5.3) den $x \to 1^-$ iken $g_k(x) \to 1$ dir. Biz sadece M bir pozitif sayı olmak üzere $0 < x < 1$ durumunda ispatı tamamlamak için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| g_k(x) - g_{k+1}(x) \right| \leq M \qquad \textbf{(5.4)}$$

olduğunu göstermeliyiz.

Şimdi

$$\phi_v(x) = \frac{\sum_{k=v}^{\infty} q_k x^k}{q(x)}$$

olsun.

$$\phi_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_k x^k}{q(x)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k}{\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k} = 1$$

dir. Buradan $\phi_0(x) = 1$ olduğu açıktır.

Bu durumda

$$g_k(x) = \frac{\sum_{v=0}^{k} r_v c_{k-v} \ \sum_{n=v}^{\infty} q_n x^n}{q(x)\, q_k}$$

$$= \frac{\sum_{v=0}^{k} r_v c_{k-v} \ \phi_v(x)}{q_k}$$

dır. Bu yüzden

$$g_k(x) - g_{k+1}(x) = \frac{\sum_{v=0}^{k} r_v c_{k-v}\ \phi_v(x)}{q_k} - \frac{\sum_{v=0}^{k+1} r_v c_{k+1-v}\ \phi_v(x)}{q_{k+1}}$$

$$= \frac{\sum_{v=0}^{k} r_v c_{k-v}\ \phi_v(x)}{q_k} - \frac{\sum_{v=-1}^{k} r_{v+1} c_{k-v}\ \phi_{v+1}(x)}{q_{k+1}}$$

$$= \sum_{v=0}^{k}\left(\phi_v(x)\frac{r_v}{q_k} - \phi_{v+1}(x)\ \frac{r_{v+1}}{q_{k+1}}\right) c_{k-v} - \frac{r_0\ c_{k+1}\ \phi_0(x)}{q_{k+1}}$$

olup

$$\left|g_k(x) - g_{k+1}(x)\right| \leq \sum_{v=0}^{k}\left|\left(\phi_v(x)\frac{r_v}{q_k} - \phi_{v+1}(x)\ \frac{r_{v+1}}{q_{k+1}}\right) c_{k-v}\right| + \left|\frac{r_0\ c_{k+1}}{q_{k+1}}\right|$$

dır.

Buradan $\sum|c_n| < \infty$ hipotezinden ve n artarken $\left\{\frac{1}{q_n}\right\}$ azalacağından

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{r_0\ c_{k+1}}{q_{k+1}}\right| \leq r_0 \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\ c_{k+1}|}{q_{k+1}} \leq \frac{r_0}{q_0}\ \sum_{k=1}^{\infty}\ |\ c_{k+1}| < \infty$$

elde ederiz.

Bu nedenle (5.4) ün sağlandığını göstermek için $0 < x < 1$ olmak üzere

$$\theta(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left|\ \sum_{v=0}^{k}\ c_{k-v}\left(\phi_v(x)\ \frac{r_v}{q_k} - \ \phi_{v+1}(x)\ \frac{r_{v+1}}{q_{k+1}}\ \right)\right| < M$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

Şimdi

$$\phi_v(x) - \ \phi_{v+1}(x) = \frac{\sum_{n=v}^{\infty} q_n x^n}{q(x)} - \frac{\sum_{n=v+1}^{\infty} q_n x^n}{q(x)}$$

$$= \frac{q_v x^v}{q(x)}$$

olduğundan,

$\theta(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\Big|\sum_{v=0}^{k} c_{k-v}\,(\,\phi_v(x)\,\frac{r_v}{q_k}-\phi_{v+1}(x)\,\frac{r_v}{q_k}+\phi_{v+1}(x)\,\frac{r_v}{q_k}-$

$\phi_{v+1}(x)\,\frac{r_{v+1}}{q_{k+1}}\,)\Big|$

$=\sum_{k=0}^{\infty}\Big|\sum_{v=0}^{k} c_{k-v}\,(\,\phi_v(x)\,-\phi_{v+1}(x))\,\frac{r_v}{q_k}+\phi_{v+1}(x)\,(\frac{r_v}{q_k}-\frac{r_{v+1}}{q_{k+1}}\,)\Big|$

$$\leq\ M(x)+\ N(x) \qquad \textbf{(5.5)}$$

elde edilir. Burada

$M(x)=\frac{1}{q(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{q_k}\,|\,\sum_{v=0}^{k}c_{k-v}\ q_v r_v\ x^v\,|$

$N(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\Big|\sum_{v=0}^{k}\ c_{k-v}\ \phi_{v+1}(x)\,(\frac{r_v}{q_k}-\frac{r_{v+1}}{q_{v+1}}\,)\Big|$

dır.

$\sum_{v=0}^{k}c_{k-v}\ q_v r_v\ x^v=\sum_{v=0}^{k}c_{k-v}\ q_v r_v\ (x^v-x^k+x^k)$

$$=\sum_{v=0}^{k}c_{k-v}\ q_v r_v\ (x^v-x^k)+x^k\sum_{v=0}^{k}c_{k-v}\ q_v r_v$$

$$=\sum_{v=0}^{k-1}c_{k-v}\ q_v r_v\ (x^v-x^k)+x^k\sum_{v=0}^{k}c_{k-v}\ q_v r_v$$

olduğundan,

$M(x)\leq\frac{1}{q(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{q_k}\sum_{v=0}^{k-1}|c_{k-v}|\ q_v r_v\ (x^v-x^k)+\frac{1}{q(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{q_k}\sum_{v=0}^{k}|c_{k-v}|\ q_v r_v$

dır.

$M(x)\leq M'(x)+M''(x)$

olsun. $M(x)$= 0(1) olduğunu göstermek için

$$M'(x)=\frac{1}{q(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{q_k}\sum_{v=0}^{k-1}c_{k-v}\ q_v r_v\ (x^v-x^k)=0(1)$$

$$M''(x)=\ \frac{1}{q(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{q_k}\sum_{v=0}^{k}|c_{k-v}|\ q_v r_v=0(1)$$

olduğunu göstermemiz gerekir.

$n \geq 1$ için $c_n \leq 0$ ve $\left\{\frac{1}{q_n}\right\}$ azalan olduğundan

$$M'(x) = \frac{1}{q(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q_k} \sum_{v=0}^{k-1} |c_{k-v}| \; q_v r_v \, (x^v - x^k)$$

$$= - \frac{1}{q(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q_k} \sum_{v=0}^{k-1} q_v r_v c_{k-v} \;\; (x^v - x^k)$$

$$\leq - \frac{1}{q(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{k-1} r_v c_{k-v} \; x^v \, (1 - x^{k-v})$$

$$= - \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v \; x^v \sum_{k=v+1}^{\infty} c_{k-v} \;\; (1 - x^{k-v})$$

$$= - \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v \; x^v [\sum_{k=v+1}^{\infty} c_{k-v} \; - \; \sum_{k=v+1}^{\infty} c_{k-v} \, x^{k-v} \;]$$

$$= - \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v \; x^v (\, c(1) - \, c \, (x))$$

$$= \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v \; x^v (\, c(x) - \, c \, (1))$$

$$\leq \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v \; x^v \; c \; (x)$$

$$= \frac{r \, (x) \, c \, (x)}{q(x)}$$

$$= \frac{q(x)}{q(x)}$$

$$= 1$$

elde ederiz . Buradan $M'(x) \; \leq 1$ olduğundan $M'(x) = 0(1)$ dır.

$$M''(x) = \frac{1}{q(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{q_k} \sum_{v=0}^{k} |c_{k-v}| \; q_v r_v$$

$$\leq \frac{1}{q(x)} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{v=0}^{k} |c_{k-v}| \; r_v$$

$$= \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v \sum_{k=v}^{\infty} |c_{k-v}| \; x^{k-v+v}$$

$= \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v\, x^v \sum_{k=v}^{\infty} |c_{k-v}|\; x^{k-v}$

$= \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v\, x^v [\, c_0 - \sum_{k=v+1}^{\infty} c_{k-v}\; x^{k-v}]$

$= \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v\, x^v [\, c_0 - \sum_{k=1}^{\infty} c_k\; x^k\,]$

$= \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v\, x^v [\, c_0 - c(x) + c_0\,]$

$= \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v\, x^v [2c_0 - c(x)\,]$

$\leq \frac{2c_0}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v\, x^v$

$< 2c_0\, p(x)$ dır.

Burada $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, x^n \;\; 0 < x < 1$, yakınsaktır. $p_n > 0$ ve (p_n) azalan olduğundan (p_n) yakınsaktır. Bu durumda (p_n) sınırlıdır.

$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, x^n \leq k \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$p(x) \;\leq\; k\; \frac{1}{1-x}$

$p(x) = 0(1)$

olup $M''(x) = 0(1)$ dir.

Sonuç olarak

$$M(x) = 0(1) \tag{5.6}$$

dır.

$N(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{v=0}^{k} c_{k-v}\; \phi_{v+1}(x)\, \left(\frac{r_v}{q_k} - \frac{r_{v+1}}{q_{v+1}}\right) \right|$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{v=0}^{k} c_{k-v}\; (\phi_{v+1}(x) + \phi_{k+1}(x) - \phi_{k+1}(x))\left(\frac{r_v}{q_k} - \frac{r_{v+1}}{q_{v+1}}\right) \right|$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{v=0}^{k} c_{k-v} \left(\phi_{v+1}(x) - \phi_{k+1}(x)\right)\left(\frac{r_v}{q_k} - \frac{r_{v+1}}{q_{v+1}}\right) + \phi_{k+1}(x) \sum_{v=0}^{k} c_{k-v} \left(\frac{r_v}{q_k} - \frac{r_{v+1}}{q_{v+1}}\right) \right|$

$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{v=0}^{k} c_{k-v} \left(\phi_{v+1}(x) - \phi_{k+1}(x)\right)\left(\frac{r_v}{q_k} - \frac{r_{v+1}}{q_{v+1}}\right) \right| +$

$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \phi_{k+1}(x) \sum_{v=0}^{k} c_{k-v} \left(\frac{r_v}{q_k} - \frac{r_{v+1}}{q_{v+1}}\right) \right|$

olup,

$N'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{v=0}^{k} c_{k-v} \left(\phi_{v+1}(x) - \phi_{k+1}(x)\right)\left(\frac{r_v}{q_k} - \frac{r_{v+1}}{q_{v+1}}\right) \right|$

ve

$N''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \phi_{k+1}(x \sum_{v=0}^{k} c_{k-v} \left(\frac{r_v}{q_k} - \frac{r_{v+1}}{q_{v+1}}\right) \right|$

olmak üzere

$$N(x) \leq N'(x) + N''(x) \qquad \textbf{(5.7)}$$

dır.

$\phi_v(x) = \frac{\sum_{n=v}^{\infty} q_n x^n}{q(x)}$ olup $0 \leq v \leq k$ için

$\phi_{v+1}(x) - \phi_{k+1}(x) = \frac{\sum_{n=v+1}^{\infty} q_n x^n}{q(x)} - \frac{\sum_{n=k+1}^{\infty} q_n x^n}{q(x)}$

$$= \frac{\sum_{n=v+1}^{k} q_n x^n}{q(x)}$$

dir. Yine (3.8) den

$\sum_{v=0}^{k} c_{k-v} \left(\frac{r_v}{q_k} - \frac{r_{v+1}}{q_{k+1}}\right)$

$= \sum_{v=0}^{k} c_{k-v} \frac{r_v}{q_k} - \sum_{v=0}^{k} c_{k-v} \frac{r_{v+1}}{q_{k+1}}$

$= \frac{q_k}{q_k} - \frac{1}{q_{k+1}} \sum_{v=0}^{k} c_{k-v} r_{v+1}$

$= 1- \frac{1}{q_{k+1}} \sum_{v=0}^{k} c_{k-v} \, r_{v+1}$

$= 1- \frac{1}{q_{k+1}} \sum_{v=1}^{k+1} c_{k+1-v} \, r_{v}$

$= 1- \frac{1}{q_{k+1}} \left(\sum_{v=0}^{k+1} c_{k+1-v} \, r_{v} - c_{k+1} r_0 \right)$

$= 1 - \frac{q_{k+1}}{q_{k+1}} + \frac{c_{k+1}}{q_{k+1}} r_0$

$= r_0 \frac{c_{k+1}}{q_{k+1}}$

dir. Bu ifadeyi

$N''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \phi_{k+1}(x) \sum_{v=0}^{k} c_{k-v} \left(\frac{r_v}{q_k} - \frac{r_{v+1}}{q_{v+1}}\right) \right|$

eşitliğinde yerine yazalım.

$0 < x < 1$ için $\phi_k(x)$ in iyi tanımlı olmasından biliyoruz ki

$$0 \leq \phi_k(x) \leq 1$$

dır. Bu yüzden

$N''(x) = r_0 \sum_{k=0}^{\infty} \left| \phi_{k+1}(x) \frac{c_{k+1}}{q_{k+1}} \right|$

$\leq r_0 \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{k+1}(x) \frac{|c_{k+1}|}{q_{k+1}}$

$\leq \frac{r_0}{q_0} \sum_{k=0}^{\infty} |c_{k+1}|$

$< \infty$

oluduğundan $N''(x)$ =0 (1) dir.

$N'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{v=0}^{k} c_{k-v} \left(\phi_{v+1}(x) - \phi_{k+1}(x)\right) \left(\frac{r_v}{q_k} - \frac{r_{v+1}}{q_{v+1}}\right) \right|$

$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{k} |c_{k-v}| \left| \frac{r_v}{q_k} - \frac{r_{v+1}}{q_{k+1}} \right| \frac{\sum_{n=v+1}^{k} q_n x^n}{q(x)}$

$$= \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k=v}^{\infty} | c_{k-v} | \left| \frac{r_v}{q_k} - \frac{r_{v+1}}{q_{k+1}} \right| \sum_{n=v+1}^{k} q_n \ x^n$$

$$= \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=v+1}^{\infty} q_n \ x^n \sum_{k=n}^{\infty} | c_{k-v} | \left| \frac{r_v}{q_k} - \frac{r_{v+1}}{q_{k+1}} \right|$$

$$= \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=v+1}^{\infty} q_n \ x^n \sum_{k=n}^{\infty} | c_{k-v} | \left| \frac{r_v}{q_k} - \frac{r_v}{q_{k+1}} + \frac{r_v}{q_{k+1}} - \frac{r_{v+1}}{q_{v+1}} \right|$$

$$\leq \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v \sum_{n=v+1}^{\infty} q_n \ x^n \sum_{k=n}^{\infty} | c_{k-v} | \left(\frac{1}{q_k} - \frac{1}{q_{k+1}} \right)$$

$$+ \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} (r_{v+1} - r_v) \sum_{n=v+1}^{\infty} q_n \ x^n \sum_{k=n}^{\infty} | c_{k-v} | \frac{1}{q_{k+1}}$$

$$= \alpha(x) + \beta(x)$$

diyelim. Şimdi n'e göre $\{q_n\}$ ve $\left\{\frac{q_n}{q_{n+1}}\right\}$ artan olduğundan ve ayrıca (5.1) hipotezi ve (3.10) kullanılarak, $0 < x < 1$ için

$(1-x)\, p(x) \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(1)} x^n = 1$ eşitliğini de kullanarak

$$\alpha(x) = \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v \sum_{n=v+1}^{\infty} q_n \ x^n \sum_{k=n}^{\infty} | c_{k-v} | \left(\frac{1}{q_k} - \frac{1}{q_{k+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v \sum_{n=v+1}^{\infty} q_n \ x^n \sum_{k=n}^{\infty} | c_{k-v} | \frac{1}{q_k} \left(1 - \frac{1}{q_{k+1}} \right)$$

$$\leq \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v \sum_{n=v+1}^{\infty} x^n \ \sum_{k=n}^{\infty} | c_{k-v} | \left(1 - \frac{q_k}{q_{k+1}} \right)$$

$$\leq \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v \sum_{n=v+1}^{\infty} x^n \ \sum_{k=n}^{\infty} | c_{k-v} | \left(1 - \frac{q_v}{q_{v+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v \left(1 - \frac{q_v}{q_{v+1}} \right) \sum_{n=v+1}^{\infty} x^n \ \sum_{k=n}^{\infty} | c_{k-v} |$$

$$\leq \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v \frac{(q_{v+1} - q_v)}{q_{v+1}} \sum_{n=v+1}^{\infty} c_{n-v-1}^{(1)} x^n$$

$$= \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v \left(1 - \frac{q_v}{q_{v+1}} \right) x^{v+1} \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(1)} x^n$$

$$= \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v \left(1 - \frac{q_v}{q_{v+1}} \right) x^{v+1} \ \frac{1}{(1-x)\, p(x)}$$

$$= \frac{1}{(1-x)\, p(x)\; q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v (1 - \frac{q_v}{q_{v+1}})\, x^{v+1}$$

$$= \frac{1}{(1-x)\, r(x)} \sum_{v=0}^{\infty} r_v (1 - \frac{q_v}{q_{v+1}})\, x^{v+1}$$

$$= \frac{1}{(1-x)\, r(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{o\,(q_{v+1\,(r_{v+1}-r_v)})}{q_{v+1}} x^{v+1}$$

$$= \frac{1}{(1-x)\, r(x)}\, 0(1) \sum_{v=0}^{\infty} (r_{v+1} - r_v)\, x^{v+1}$$

$$= \frac{1}{(1-x)\, r(x)}\, 0(1) [\sum_{v=0}^{\infty} r_{v+1} x^{v+1} - \sum_{v=0}^{\infty} r_v\; x^{v+1}]$$

$$= \frac{1}{(1-x)\, r(x)}\, 0(1)\, [\sum_{v=1}^{\infty} r_v x^v - x\, r(x)]$$

$$= \frac{1}{(1-x)\, r(x)}\, 0(1)\, [\sum_{v=0}^{\infty} r_v x^v - x\, r(x) - r_0]$$

$$= \frac{0(1)\,[r(x)(1-x) - r_0]}{(1-x)\, r(x)}$$

$$= 0(1)$$

elde edilir.

Böylece $\alpha(x)$ = 0(1) dir.

Ve son olarak $\beta(x)$ için bakalım. $\{r_n\}$ ve $\{q_n\}$ artan olduğundan ve (3.10) dan

$$\beta(x) = \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} (r_{v+1} - r_v) \sum_{n=v+1}^{\infty} q_n\; x^n \sum_{k=n}^{\infty} |\, c_{k-v}| \frac{1}{q_{k+1}}$$

$$\leq \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} (r_{v+1} - r_v) \sum_{n=v+1}^{\infty} x^n \sum_{k=n}^{\infty} |\, c_{k-v}|$$

$$\leq \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} (r_{v+1} - r_v) \sum_{n=v+1}^{\infty} c_{n-v-1}^{(1)}\; x^n$$

$$= \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} (r_{v+1} - r_v)\, x^{v+1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(1)} x^n$$

$$= \frac{1}{q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} (r_{v+1} - r_v)\, x^{v+1} \frac{1}{(1-x)\, p(x)}$$

$= \frac{1}{(1-x)\, p(x)\;\; q(x)} \sum_{v=0}^{\infty} (r_{v+1} - r_v)\, x^{v+1}$

$= \frac{1}{(1-x)\;\; r(x)} \sum_{v=0}^{\infty} (r_{v+1} - r_v)\, x^{v+1}$

$= \frac{1}{(1-x)\;\; r(x)} [\, \sum_{v=0}^{\infty} r_{v+1} x^{v+1} - x \sum_{v=0}^{\infty} r_v \;\, x^v]$

$= \frac{1}{(1-x)\;\; r(x)} [\, \sum_{v=1}^{\infty} r_v x^v - x \;\; r(x) \;\;]$

$= \frac{1}{(1-x)\;\; r(x)} [\, \sum_{v=0}^{\infty} r_v x^v - x \;\, r(x) - r_0 \;\;]$

$= \frac{1}{(1-x)\;\; r(x)} [r(x) - x\, r(x) - r_0]$

$< \frac{(1-x)\;\; r(x)}{(1-x)\;\; r(x)}$

$= 1$

dır.

Böylece $\beta(x)$ = 0(1) dir. Yani

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x) - g_{k+1}(x)| \leq \; M$$

dir.

Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Şimdi Teorem 5.2 nin bazı sonuçlarını inceleyeceğiz.

Sonuç 5.3 : (Thorpe [2]) Kabul edelim ki $p_n \in \; \mathfrak{M}$ olsun. Bu takdirde (A) Abel metodu olmak üzere $\sum a_n \in$ (N*,p) $\Rightarrow \sum a_n \in$ (A) dır.

İspat: Teorem 5.2 de $\forall n$ için q_n = 1 alınırsa ispat yapılır.

Sonuç 5.4 : $\forall n$ için $q_n > 0$, $\{q_n\}$ ve $\left\{\frac{q_n}{q_{n+1}}\right\}$ de n de artan dizi ve

$$Q_n(q_{n+1} - q_n) = 0\ (q_{n+1}^{(2)})$$

olacak şekilde dizi olsun.

Bu takdirde

$$\sum a_n \in (\bar{N}^*, q) \Rightarrow \sum a_n \in (J, q)$$

dır.

İspat: Teorem 5.2 de $\forall n$ için $p_n = 1$ alalım. Bu durumda

$$c_0 = 1, c_1 = -1, c_n = 0 \ \ (n > 2)$$

elde ederiz.

Sonuç 5.5 : $0 < \alpha \leq 1 \leq \beta$ için $(C^*, \alpha, \beta) \Rightarrow A_\beta$ dır.

İspat: Teorem 5.1 de $p_n = A_n^{\alpha-1}$, $q_n = A_n^{\beta-1}$ alalım. Bu takdirde $r_n = A_n^{\alpha+\beta-1}$ ve (5.1) şartı şu halde geçerli olan

$$n^{\alpha+\beta-1}.n^{\beta-2} = 0\ (n^{\beta-1}.n^{\alpha+\beta-2})$$

ifadesinin ispatına indirgenir.

Ayrıca $0 < \alpha \leq 1$ olduğunda $p_n = A_n^{\alpha-1} \in \mathfrak{M}$ ve $\beta \geq 1$ olduğunda $q_n = A_n^{\beta-1}$ azalmayandır.

SONUÇ

Bu çalışmada (N*,p) quasi-Nörlund toplanabilme metodunun (N*,p,q) genelleştirirlmiş quasi-Nörlund toplanabilme metodu incelendi. Bu metodla ilgili teoremlerin ispatını yapmak için gerekli olan lemmaların ispatı incelendi. Bu teoremlerdeki $(p_n) \in \mathfrak{M}$ şartının kaldırılamayacak şart olduğu gözlemlendi. (p_n) ve (q_n) dizisine konulan bazı şartlarla teoremlerin ispatı incelendi. Toplamların sırasını değiştirme metodunun teoremlerin ispatında sağladığı kolaylıklar gözlemlendi. Bu çalışmada, özellikle Lemma 3.1 in diğer lemmaların ispatında bile kullanıldığı görüldü. Genelleştirirlmiş quasi-Nörlund metodunun uygulanabildiği seri örnekleri verildi. Daha sonra bu metodun uygulandığı serilerin genelleştirirlmiş quasi-Nörlund toplanabilir olup olmadığı örneklerle gösterildi. Ayrıca mutlak genelleştirirlmiş quasi-Nörlund toplanabilme metodu ile ilgili bir teoremin ispatı verilirken sınırlı salınımlı kavamının önemi ve rolü gözlemlendi. Bu çalışmanın temel teoremini oluşturan Abel'e ait teoremin ispatı incelendi. Bu teorem genelleştirirlmiş quasi-Nörlund toplanabilme ile (J,q) metodu arasındaki ilişkiyi veren önemli bir teoremdir. Teorem 5.2 nin çalışmanın esasını oluşturmasının sebebi (N*,p,q) $\subset$ (J,q) bağıntısının varlığıdır.

Son olarak (J,q) metodu ile (N*,p,q) arasındaki ilişkiyi veren teoremlerin sonuçları ve indirgendiği teoremlerin ispatı incelendi.

KAYNAKÇA

1. Petersen, G. M. , Regüler Matrix Transformations Cambritge, 1966.

2. Thorpe, B., Nörlund and related summability methods, Ph.D.Thesis, (1970), Birminngham University.

3. Vermes, P., The transpoze of a summability matrix, Colloque sur la Theorie des Suttes, Centre Belge de rechroches Math., (1958), 60-86.

4. Knopp, K., Lorentz, G. G., Betrage Zur absoluted Limitierung, Archiv der Math., 2, (1949), 10-16.

5. Hardy, G. H., Divergent Series, (Oxford 1949)

6. Kuttner , B., On quasi-Cesaro summability, J. I. M. S., 24 (1960), 319-341.

7. Ramanujan, M. S., Note on the quasi-Hausdorff, series to series transformation, J. London Math. Soc., 32, (1957), 27-32.

8. White, A. J., On quasi-Cesaro summability, Quart. J. Math. Oxford (2), 12, (1961), 81-99.

9. Mohapatro, P., Generalised Quasi-Nörlund Summability, Pacific Journal of Mathematics, 68 (1), (1977), 177-195.

10. Das, G., On some methods of summability, Quart. J. Math. Oxford (2), 17, (1966), 244-256.

11. Borwein, D., A logarithmic method of summability, J. London Math. Soc., 33, (1958), 212-220.

12. Borwein, D., On products of sequences, , J. London Math. Soc., 33, (1958), 352-375.

13. Cooke, R. G., Infinite Matrices and Sequence Spaces, (Dover, New York 1955).

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Sivas'da doğan Kadriye BAŞAR, ilk ve orta öğrenimini sırasıyla Sivas Kongre İlkokulu ve Dört Eylül Ortaokulu lise öğrenimini ise Sivas Lisesinde tamamlamıştır. 2000 yılında kazandığı Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2005 yılında başarıyla bitirmiştir.

2012 yılında yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başlamıştır. Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU danışmanlığında hazırladığı "Genelleştirilmiş Quasi- Nörlund Toplanabilme Üzerine" başlıklı teziyle Yüksek Lisans öğrenimine devam etmektedir.

2008 yılından beri Bozok Üniversitesi Meslek Yüksek Okulunda Öğretim Görevlisi olarak çalışmakta olan Kadriye BAŞAR, evli ve 1 çocuk annesidir.

İletişim Bilgileri

Adres : Bozok Üniversitesi Meslek Yüksek Okulu

Bahçeşehir Mahallesi, Esentepe Mevki,66200,Yozgat

Telefon: 0554 873 05 80

(354) 217 17 81

Faks: (354) 217 17 80

E-posta: kadriye.basar@bozok.edu.tr