T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

GALERKİN METODU

Yasemin EZEN

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2015

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

GALERKİN METODU

Yasemin EZEN

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2015

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 70111313006 numaralı öğrencisi Yasemin EZEN'in hazırladığı "**Galerkin Metodu**" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezi ile ilgili TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 04/06/2015 Salı günü saat 14:00'te yapılmış, tezin onayına OY BİRLİĞİYLE karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU

Üye : Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Üye : Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

(Danışman)

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 09/06/2015 tarih ve 16 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

T.C.
09/06/2015

Doç. Dr. Hidayet ÇETİN
Müdür

İÇİNDEKİLER

Sayfa

GALERKİN METODU

Yasemin EZEN

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2015; Sayfa: 45

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ÖZET

Bu çalışmada Banach uzaylarında verilmiş operatör denklemlerin Galerkin metodunun uygulanması ile yaklaşık çözümlerinin bulunması gösterildi. Burada önce bazı anlam ve tanımlar verildi. Özellikle Galerkin serilerinin uygulanmasıyla Galerkin approksimasyonunun yakınsaklığı gösterildi. Galerkin approksimasyonunun kararlılık şartı ve Galerkin şemasının yakınsaklığı şartı yazıldı ve incelendi. En küçük kareler metodu Galerkin metodunun uygulanmasıyla ele alındı. Galerkin metodunun varyasyon şekli incelendi. Sonlu elemanlar metodu Galerkin şemasının uygulanması ile ele alındı. Banach uzayında birinci mertebeden diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin Galerkin metodunun uygulanması ile yaklaşık çözümü gösterildi. Bu problem Hilbert uzayında ele alındığında ve bu problemdeki operatör lineer öz eşlenik operatör olduğunda Galerkin serilerinin Fourier serilerine dönüştüğü gösterildi ve bu hal için Galerkin metodunun daha sade hal aldığı görüldü.

Anahtar Kelimeler: Galerkin Metodu, Ortogonal projeksiyon operatörler, Galerkin approksimasyonu, En küçük kareler metodu, Sonlu elemanlar metodu.

GALERKİN METHOD

Yasemin EZEN

Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2015; Page: 45

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ABSTRACT

In this study, we showed Banach space operator in the implementation of equations Galerkin approximate solution method. In here we gave some notions and definitions. Especially, we showed the convergence of Galerkin's approximations implementation of the Galerkin series. The Galerkin approximations stability condition and Galerkin's convergence of scheme was written and examined. We considered the solution of certain variation problems by the Galerkin method.We examined the finite elements method with implementation of the Galerkin's schema. We showed that the Galerkin series coincide with the Fourier series when we considered the problem in the Hilbert space setting and when the operator is linear self-adjoint operator. We showed how to use the Galerkin method to solve first order differential equations as an example we applied this to the Cauchy Problem.

Keywords: Galerkin Method, Galerkin approximation, Least Squares Method, Finite Element Method, Orthogonal Projection Operators.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlamam da desteklerini esirgemeyen başta danışman hocam sayın Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV ve bölüm başkanımız sayın Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN olmak üzere bölümümüz değerli üyelerinden Yrd. Doç. Dr. Onur OKTAY, Yrd. Doç. Dr. Hürmet Fulya AKIZ, Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN, Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU, Öğr. Gör. Mehmet EKİCİ ile her zaman arkamda duran ve destekleyen değerli ailem ve eşim Hasan EZEN'e sonsuz teşekkürü borç bilirim.

KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ

min $\boldsymbol{A}$	: A'nın en küçük elemanı, minumumu
max $\boldsymbol{A}$	: A'nın en büyük elemanı, maksimumu
$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A})$	: Aoperatörünün tanım kümesi
$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$	: A operatörünün değer bölgesi
$\mathbf{C}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$	: $[a,b] \subset R$ üzerinde sürekli fonksiyonlar kümesi
$\boldsymbol{A}'$	: A kümesinin limit noktaları kümesi
$\|\boldsymbol{A}\|$	: A'nın normu
$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$	: X den Y ye sınırlı lineer operatörlerin kümesi

1.GİRİŞ

Bu çalışmada denklemlerin yaklaşık çözüm metotlarının büyük bir grubu ele alındı. Bunlar Ritz, Bubnov, Galerkin, Petrov metotları grubudur [1-7]. Literatürde bu metotlar grubu Galerkin metodu olarak adlandırılır. Son zamanlarda Galerkin metodu genelde sonlu elemanlar metodunun varyasyon farklar metodu şeklinde de verilmektedir. Bu tezde öncelikle yaklaşık Galerkin şeması denklemleri sistemi

$$Ax = y$$

şeklinde denklemleri için verilmiştir. Bu denklemde A operatörü X Banach uzayından Y Banach uzayına etki eden yoğun tanımlı lineer operatördür [1].

Tezde Galerkin approksimasyonu ele alınıp incelenmiştir. Burada özellikle Galerkin serilerinin uygulanması ile Galerkin approksimasyonunun yakınsaklığı da incelenmiştir. Aynı zamanda Galerkin approksimasyonunun kararlılık şartı belirlenmiş ve araştırılmıştır. Ele alınmış denklemler için Galerkin şemasının yakınsaklığı şartı verilmiştir. Galerkin şemasının yakınsaklığı hakkındaki teorem tezde yazılmış ve araştırılmıştır. En küçük kareler metodu Galerkin metodu altında ele alınıp incelenmiştir. Galerkin metoduna ait örnekler gösterilmiştir. Burada Galerkin metodunun varyasyon şeklide ele alınıp incelendi. Bu tezde bir sade hal için sonlu elemanlar metodu Galerkin şemasının uygulanmasıyla ele alındı.

Banach uzayında birinci mertebeli diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin yaklaşık çözümü Galerkin metodu ile çözüldü. Bu yaklaşım metodu Galerkin serilerinin kullanımı ile verildi. Galerkin serilerinin Fourier serilerine dönüştüğü gösterildi ve bu hal için Galerkin metodu daha sade hal aldı.

2.TEMEL KAVRAMLAR VE AÇIKLAMALAR

2.1. Lineer Uzay

2.1.1. Lineer Uzaylar

Tanım 2.1.1. $x, y, z, \ldots$ elemanlarının E kümesinde aşağıda gösterilen yöntemle iki işlem, elemanların toplamı ve elemanları skaler sayı ile çarpımı işlemi, tanımlandığında ve bu işlemler aşağıdaki şartları sağladığında bu E kümesine lineer uzay denir:

I. Her bir $x, y \in E$ elemanlarına bu elemanların toplamı olarak adlandırılan tamamen belli bir $x + y = z \in E$ elemanı karşı getirilir.

II. Her bir $x \in E$ ve her bir skaler λ sayısına, tamamen belli bir $\lambda x = y \in E$ elemanı karşı getirilir ki, bu eleman x elemanının λ skaleri ile çarpımı olarak adlandırılır.

Bu işlemlerin keyfi $x, y, z \in E$ ve keyfi λ, μ skaler sayıları için aşağıdaki özellikleri sağladığı kabul edilir:

1) $x + y = y + x$ (simetriklik)

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (gruplandırma)

3) Öyle $0 \in E$ elemanı vardır ki, $\forall x \in E$ için $x + 0 = x$ dir.

4) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

5) $1x = x,\ 0x = 0$

6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

Burada $x \in E$ elemanının skaler sayı ile çarpımında kullanılan λ, μ çarpanları reel sayılar olduğunda lineer uzay reel lineer uzay olarak adlandırılır. Kompleks sayılar alındığında lineer uzay kompleks lineer uzay adını alır.

$(-1)x = -x$ şeklinde tanımlanır. Buradanda 5. ve 7. aksiyomlara dayanarak aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$x - x = x + (-1)x = \big(1 + (-1)\big)x = 0x = 0.$$

Böylece, lineer E uzayında her bir x elemanının toplamaya göre tersi $-x$ elemanı tanımlanmış olur. Uygun olarak $x-y$ farkı $(x-y)=x+(-1)y$ şeklinde tanımlanmış olur [4].

2.1.2. Lineer Uzaylara Örnekler

Örnek 2.1.1. m sayıda reel sayıların sıralanmış takımından oluşan sütun vektörlerinin $\mathbb{R}^m$ kümesini ele alalım. Bu kümede $x, y, z, \ldots \in \mathbb{R}^m$ elemanları

$$x=(\xi_i)_{i=1}^m,\ y=(\eta_i)_{i=1}^m,\ z=(\zeta_i)_{i=1}^m,$$

şeklinde yazılırlar.

$\mathbb{R}^m$kümesinde$x+y$ toplamını $x+y=(\xi_i+\eta_i)_{i=1}^m$ eşitliği ile λ reel sayı olmakla λx çarpımını $\lambda x=(\lambda\xi_i)_{i=1}^m$ eşitliği ile tanımlayalım. $\mathbb{R}^m$'de sıfır elemanı $0=(0)_{i=1}^m$ eşitliği ile tanımlanır. Bu tanımlardan $\mathbb{R}^m$ kümesinin reel lineer uzay oluşturduğu görülür.

Örnek2.1.2. $[a,b]$ aralığında tanımlanmış sürekli $x(t), y(t), z(t)$ ... fonksiyonlarının $C_{[a,b]}$ kümesini ele alalım. Bu kümede x ve y elemanlarının $x+y$ toplamını ve x elemanının λ sayısı ile çarpımı olan λx'i aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t), \qquad (\lambda x)(t)=\lambda x(t).$$

$[a,b]$ aralığındaki sürekli fonksiyonların toplamı ve $[a,b]$ aralığındaki sürekli fonksiyonların skaler sayı ile çarpımı da bu aralıkta sürekli fonksiyon olduğundan $C_{[a,b]}$ kümesinin lineer uzay oluşturduğu görülür. Burada reel ve kompleks uzay durumları uygun olarak tanımlanır.

2.2. Normlu Uzaylar

2.2.1. Normlu Uzayın Tanımı

Tanım 2.2.1. Lineer E uzayının her bir x elemanına negatif olmayan bir $\|x\|$ sayısı karşılık getirilirse bu sayı aşağıdaki şartları sağlarsa, o zaman E lineer uzayına normlu uzay denir.

1)$\|x\| \geq 0$; $\|x\|=0$ yalnız ve yalnız$x=0$ olduğunda,

2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$,

3) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$.

Böylece, norm tüm lineer E uzayında tanımlanmış 1-3 şartlarını sağlayan negatif olmayan değerli bir fonksiyondur.

Normun üçgen eşitsizliğinin yardımıyla ters üçgen eşitsizliği olarak adlandırılan aşağıdaki eşitsizlikte elde edilir:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|. \tag{2.1}$$

Bu eşitsizliğin ispatı $x, y \in E$ vektörleri için doğru olan aşağıdaki eşitsizliğin yardımıyla ispatlanır:

$$\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|.$$

Normlu uzayda iki eleman arasındaki uzaklık

$$\rho(x,y) = \|x-y\|$$

formülü ile tanımlanır [4].

Örnek 2.2.1. m-boyutlu sütun vektörlerinin reel lineer $\mathbb{R}^m$ uzayında

$$x = (\xi_i)_{i=1}^m$$

elemanının normunu

$$\|x\|_{sf} = \left(\sum_{i=1}^m \xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

formülü ile tanımladığımızda elde edilen uzay Euclid uzayı olarak adlandırırlır ve E^m ile gösterilir.

2.2.2. Normlu Uzaylarda Dizilerin Limiti

Normlu E uzayında $\{x_n\}$ dizisini ele alalım.

Tanım 2.2.3. $x_0 \in E$ elemanı için $n \to \infty$ şartında $\|x_n - x_0\| \to 0$ olduğunda, $x_0$elemanına $\{x_n\}$ dizisinin $n \to \infty$ şartındaki limiti denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ veya $x_n \to x_0$ gibi gösterilir [5].

Normlu uzaylarda yakınsak dizilerin aşağıdaki özellikleri kolaylıkla ispatlanır:

1. x_0 noktası $\{x_n\}$ dizisinin limiti olduğunda, o zaman x_0 noktasının keyfi $\varepsilon > 0$ komşuluğunda, yani $S_\varepsilon(x_0) = \{x \in E: \|x - x_0\| < \varepsilon\}$ komşuluğunda bu dizinin ilk sonlu sayıda elemanları hariç tüm terimleri $S_\varepsilon(x_0)$ komşuluğunda kalırlar,

2. $\{x_n\}$ dizisinin limiti varsa tektir,

3.$\{x_n\}$ dizisi x_0 elemanına yakınsadığında, bu dizinin tüm alt $\{x_{n_k}\}$ dizileride x_0 elemanına yakınsar,

4. $x_n \to x_0$ ve $\lambda_n \to \lambda_0$ olduğunda $\lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0$ olur,

5. $y_n, y_0 \in E$ olmak üzere $x_n \to x_0, y_n \to y_0$ olduğunda $x_n + y_n \to x_0 + y_0$ olur,

6. $x_n \to x_0$ olduğunda $\|x_n\| \to \|x_0\|$ olur,

7. Normlu uzayda her bir yakınsak dizi sınırlıdır.

Dikkate alalım ki, $M \subset E$ kümesi için öyle bir $c > 0$ sayısı bulunursa ki, her bir $x \in M$ için $\|x\| \leq c$ eşitsizliği sağlandığında, o zaman M kümesine normlu E uzayında sınırlı küme denir.

Tanım 2.2.4. E normlu uzay, $\{x_n\}$ ise bu uzaydan alınmış bir dizi olsun. Keyfi alınmış $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $N > 0$ sayısı bulunursa ki, her bir $n > N$ için ve her bir doğal $p = 1, 2, 3, ...$sayıları için

$$\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlandığında $\{x_n\}$ dizisine normlu E uzayında fundamental veya Cauchy dizisi denir [5].

Normlu uzaylarda fundamental dizilerin aşağıdaki özellikleri vardır:

1. Her bir fundamental dizi sınırlıdır.

2. $\{x_n\}$ dizisi fundamental dizi olduğunda her bir λ sayısı için $\{\lambda x_n\}$ dizisi de fundamental dizi olur.

3. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri normlu E uzayında fundamental diziler olduklarından $\{x_n + y_n\}$ dizisi de fundamental dizi olur.

4. $\{x_n\}$ fundamental dizisinin bir alt dizisi $\{x_{n_k}\}$ bir x_0 elemanına yakınsak olduğunda, o zaman $\{x_n\}$ dizisinin kendiside x_0 elemanına yakınsar.

5. Normlu E uzayında her bir yakınsak dizi fundamental dizidir.

2.2.3. Banach Uzayının Tanımı

Tanım 2.2.5. Normlu E uzayında her bir fundamental dizi yakınsak olduğunda normlu E uzayına tam uzay denir. Tam normlu uzaya Banach uzayı denir [2].

Örnek 2.2.2. Reel sayılar kümesi Banach uzayıdır. Gerçekten de, reel sayılar kümesinde dizinin yakınsaklığı için bu dizinin Cauchy dizisi olması gerek ve yeter şartıdır.

Örnek 2.2.3. $C_{[a,b]}$ uzayı bir Banach uzayıdır. $\{x_n(t)\} \subset C_{[a,b]}$ dizisini alalım. $C_{[a,b]}$ uzayında $\{x_n(t)\}$ dizisinin düzgün yakınsak olması için Cauchy kriteri doğrudur.

$\{x_n(t)\}$ dizisinin $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart, keyfi alınmış $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $N > 0$ sayısı varsa ki, her bir $n > N$ sayıları için, tüm $p = 1, 2, 3, \ldots$ doğal sayıları ve tüm $t \in [a,b]$ için $\left|x_{n+p}(t) - x_n(t)\right| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır. $C_{[a,b]}$ uzayında yakınsaklık fonksiyonlar dizisinin yakınsaklığıdır. Bu yüzden de $\{x_n(t)\} \subset C_{[a,b]}$ dizisi için Cauchy kriterinin sağlandığı görülür.$[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonların $\{x_n(t)\}$ dizisi $x(t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunda $x(t)$ fonksiyonu da $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyon olur. Böylece, $C_{[a,b]}$ uzayı bir Banach uzayıdır.

2.2.4. Açık ve Kapalı Kümeler

E normlu uzay olsun.

Tanım 2.2.6. E normlu uzayının M kümesinin her bir $x_0 \in M$ noktasının öyle açık $S_r(x_0) = \{x \in E, \|x - x_0\| < r\}$ komşuluğu bulunursa ki, $S_r(x_0) \subset M$, o zaman M kümesine normlu E uzayında açık küme denir [1].

Tanım 2.2.7. $M \subset E$ olsun; $E \setminus M = \{x \in E : x \notin M\}$ kümesine Mkümesinin E-ye tümleyeni denir [1].

Tanım 2.2.8. $M \subset E$ kümesinin tümleyeni $E \setminus M$ kümesi E uzayında açık küme olduğunda M kümesine kapalı küme denir [1].

2.2.5. Normlu Uzaylarda Alt Uzay ve Nokta İle Alt Uzay Arasındaki Uzaklık

Hatırlatalım ki, E lineer uzay $\tilde{E}$ ise bu uzaydan alınmış herhangi bir küme olsun. Her bir $x, y \in \tilde{E}$ elemanları ve her bir λ, μ skaler sayıları için $\lambda x + \mu y \in \tilde{E}$ şartı sağlandığında $\tilde{E} \subset E$ kümesine lineer E uzayında lineer manifold veya lineer E uzayında alt uzay denir.

Tanım 2.2.9. Normlu E uzayında kapalı lineer L manifolduna normlu E uzayında alt uzay denir [1].

Örnek 2.2.4. Derecesi n sayısını aşmayan polinomların P_n kümesi $C_{[a,b]}$ uzayında bir alt uzay oluşturur.

$x \in E$ noktasından L alt uzayına dik uzaklık aşağıdaki formülle tanımlanır,

$$\rho(x, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\| \tag{2.2}$$

Aşağıdaki lemma doğrudur:

Lemma 2.2.1. $x \in L$ olduğunda $\rho(x, L) > 0$ olur.

2.2.6. Normlu Uzaylarda Her Yerde Yoğun Lineer Manifoldlar

Tanım 2.2.10. E normlu uzay, L ise bu uzaydan alınmış bir lineer manifold olsun. Keyfi alınmış $x \in E$ elemanı ve keyfi alınmış $\varepsilon > 0$ sayısına karşı $\|x - u\| < \varepsilon$ olacak şekilde öyle bir $u \in L$ elemanı bulunursa bu L lineer manifolduna E normlu uzayında her yerde yoğun lineer manifold denir.

L lineer manifoldunun normlu E uzayında her yerde yoğun olduğunu varsayalım. O zaman $\varepsilon = 1, \varepsilon = \frac{1}{2}, \dots, \varepsilon = \frac{1}{n}, \dots$ seçerek öyle $u_1 \in L, u_2 \in L, \dots, u_n \in L, \dots$ elemanları bulunur ki, $\|x - u_n\| < \frac{1}{n}, n = 1,2, \dots$ olur. Böylece, L lineer manifoldu E normlu uzayında her yerde yoğun olduğunda her bir $x \in E$ elemanı için öyle $\{u_n\} \subset L$ dizisi bulunur ki, $u_n \to x$ olur. Böylece, L lineer manifoldunun kapanışı yani L lineer manifolduna bu lineer manifoldun limit noktalarını da eklemekle bulunan $\overline{L}$ kümesi E normlu uzayı ile çakışır, yani $\overline{L} = E$ olur.

Örnek 2.2.5. Weierstrass teoremine göre tüm $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k, n = 0,1,2, \dots$ polinomlarının kümesi $C_{[a.b]}$ uzayında her yerde yoğun lineer manifold oluşturur.

2.2.7. Operatörler

X ve Y kümelerini ele alalım. X kümesinin bir D alt kümesini alalım. Her bir $x \in D$ elemanına karşı, belli bir F kuralı ile, tamamen belli bir $y \in Y$ elemanı karşılık getirildiğinde D kümesinde bir $y = F(x)$ operatörü tanımlanmıştır denir. Bu halde D kümesine F operatörünün tanım bölgesi denir ve $D(F)$ ile gösterilir.

Aşağıdaki eşitlikle tanımlanan

$$R = R(F) = \{y \in Y : Y = F(x), x \in D(F)\}$$

kümesine F operatörünün değerler bölgesi denir.

F operatörü şematik olarak aşağıdaki gibi gösterilir:

$$X \supseteq D(F) \xrightarrow{F} R(F) \subseteq Y$$

veya

$$F: X \to Y.$$

Sonuncu gösterilişte $D(F) = X$ ve $R(F) = Y$eşitlikleri kastedilmiyor, $D(F) \subseteq X$ ve $R(F) \subseteq Y$ dir.

Özel olarak, $F(D) = R(F) = Y$ şartı sağlandığından $F: D \to Y$ operatörüne örten operatör denir.

Keyfi alınmış $x, y \in D$ için $F(x) = F(y)$ eşitliğinden $x = y$ elde edildiğinde $F: D \to Y$ operatörüne bire-bir operatör denir.

$F: X \to Y$ operatörü hem örten hem de bire-bir olduğunda bu operatöre biyektif operatör denir.

$F: X \to Y$ operatörü biyektif operatör olduğunda, bu operatörün ters operatörü olarak adlandırılan bir $A^{-1}: Y \to D$ operatörü vardır, bu halde $Ax = y$ olduğunda $A^{-1}y = x$ olur. Bu halde her bir $y \in Y$ için öyle tek bir tane$x \in D(F)$ elemanı var ki,

$$F(x) = y$$

olur.

Örnek 2.2.6. $-\infty < a << b < +\infty$ olsun.

$f(t, s, x)$ fonksiyonu $[a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ kümesinde tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olsun. Bu şartlar sağlandığında

$$F(x)(t) = \int_a^b f\big(t, s, x(s)\big) ds, \qquad t \in [a, b]$$

eşitliği ile bir

$$F: C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$$

operatörü tanımlanmış olur. Bu F operatörüne integral operatörü denir [2].

2.3. Skaler Çarpımlı Uzaylar

2.3.1. Öklid Uzayı

Tanım 2.3.1. E bir reel lineer uzay olsun. Bu uzayın her bir $x, y \in E$ elemanları çiftine, (x, y) ile gösterilen bir reel sayı karşılık getirildiğinde ve x ve y elemanlarının skaler çarpımı olarak adlandırılan (x, y) sayısı aşağıdaki şartları sağladığında lineer E uzayına Öklid uzayı denir:

1. $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0$ yalnız ve yalnız $x = 0$ olduğunda,

2. (x, y)=(y, x)

3. $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Her bir Öklid uzayı, bu uzaydaki her bir $x \in E$ elemanının normunu

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \qquad (2.3)$$

formülü ile tanımlayarak, normlu uzaya dönüştürülür.

Öklid uzayında kolaylıkla ispatlanan aşağıdaki Cauchy-Schwarz eşitsizliği vardır:

$$|(x, y)| \leq \|x\|\|y\| \qquad (2.4)$$

Bu eşitliğin uygulanmasıyla (2.3) eşitliği ile tanımlanan normun üçgen eşitsizliğinin sağlandığı kolaylıkla gösterilir [1].

Örnek 2.3.1. Reel E^m uzayında skaler çarpım

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{m} \xi_k \eta_k$$

formülü ile tanımlanır. Buna uygun norm

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{m} \xi_m^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

formülü ile tanımlanır.

2.3.2. Elemanların Ortogonalliği, Ortogonal ve Ortonormal Sistemler

E uzayı skaler çarpımlı uzay olsun. $(x, y) = 0$ olduğunda, x ve y elemanlarına ortogonaldir (diktir) denir ve $x \perp y$ şeklinde gösterilir. Buradan E uzayının sıfır elemanının tüm elemanlarına dik olduğu açıkça görülür.

Lineer skaler çarpımlı E uzayından sıfır olmayan $x_1, x_2, \dots, x_m$ elemanlarını ele alalım. Bu elemanlar için $i \neq j$ olduğunda $(x_i, x_j) = 0, i, j = 1, 2, \dots$ şartları sağlandığında $\{x_k\}_{k=1}^{m}$ elemanlar sistemine ortogonal sistem denir.

$x_1, x_2, \dots x_m$ elemanlar sistemi için

$$(x_i, x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

şartı sağlandığında $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ elemanlar sistemine ortonormal sistem denir [5].

2.3.3. Hilbert Uzayı

Skaler çarpımlı uzay, skaler çarpımın tanımladığı norma nazaran tam normlu uzay olduğunda bu uzaya Hilbert uzayı denir ve H ile gösterilir.

H bir Hilbert uzayı olsun. L ise bu uzayda alt uzay olsun. $x \in H$ ama $x \notin L$ olsun. Bu şartlar sağlandığında

$$\rho(x, L) = \|x - y\|$$

eşitliğini sağlayan tek bir tane $y \in L$ elemanı bulunur.

Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 2.3.1. $\|x - y\| = \rho(x, L)$ eşitliği sağlandığında $x - y \perp L$ olur.

Bu teoremden aşağıdaki Riesz teoremi alınır [4].

Teorem 2.3.2. L kümesi H Hilbert uzayında bir alt uzay olsun. O zaman her bir $x \in H$ elemanı için

$$x = y + z \tag{2.5}$$

burada $y \in L,\ z \perp L$. (2.5) açılımı tektir [4].

2.4. Lineer Operatörler

2.2.7' de operatörlerin genel tanımı verildi. Burada biz genellikle lineer operatörlerle ilgili bazı tanım ve teoremleri vereceğiz.

2.4.1. Normlu Uzaylarda Operatörler, Limit ve Süreklilik

X ve Y normlu uzaylar olsun. $F: X \to Y$ operatörünün verildiğini varsayalım. F operatörünün tanım kümesini $D(F)$, x_0 noktasının bir $S_r(x_0)$ komşuluğunu sağladığını varsayalım. Burada x_0 noktası $D(F)$ kümesine dahil olamayabilir.

Tanım 2.4.1. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulunursa ki, $\|x - x_0\| < \delta$ şartını sağlayan her bir $x \in S_r(x_0)$ için $\|F(x) - y_0\| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlandığında $y_0 \in Y$ elemanına $F(x)$ operatörünün $x \to x_0$ için limiti denir ve $\lim_{x \to x_0} F(x) = y_0$ veya $x \to x_0$ için $F(x) \to y_0$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.4.2. $F: X \to Y$ operatörünün $x_0 \in X$ noktasının bir $S_r(x_0) \subset X$ komşuluğunda tanımlanmış olduğunu varsayalım. $x \to x_0$ için $F(x) \to F(x_0)$ olduğunda F operatörü x_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 2.4.3. $F(x)$ operatörünün tanım bölgesi $D(F) \subseteq X$ ve değerler bölgesi $R(F) \subseteq Y$ olduğunu varsayalım. Burada $D(F)$ tanım bölgesinden alınmış her bir sınırlı kümeyi Y uzayının sınırlı kümesine dönüştüren operatöre sınırlı operatör denir.

2.4.2. Lineer Operatörler

X ve Y uzaylarının lineer uzaylar olduklarını varsayalım.

Tanım 2.4.4. $D(A)$ bölgesi $A: X \to Y$ operatörünün tanım bölgesi lineer manifold olduğunda ve her bir $x, y \in D(A)$ ve her bir λ, μ skaler sayıları için

$$A(\lambda y + \mu x) = \lambda A y + \mu A x$$

eşitliği sağlandığında A operatörüne lineer operatör denir. Kolaylıkla lineer operatörün değerler bölgesi $R(A)$ bölgesinin de lineer manifold olduğu gösterilir.

Tüm X Banach uzayında tanımlanmış lineer A operatörü $0 \in X$ noktasında sürekli olduğunda bu operatörün X Banach uzayının her bir noktasında sürekli olduğu gösterilir.

2.4.3. Sınırlı Lineer Operatörler

Tanım 2.4.5. $D(A) = X$ ve $R(A) \subset Y$ şartını sağlayan A lineer operatörü için

$$\{\|Ax\|, \ \|x\| \leq 1\}$$

kümesi sınırlı olduğunda A operatörüne sınırlı operatör denir [1].

Lineer sınırlı operatörler için aşağıdaki teoremler doğrudur:

Teorem 2.4.1. A lineer operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter şart bir $c > 0$ sayısında her bir $x \in X$ için

$$\|Ax\| \leq c\|x\| \tag{2.6}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [1].

Teorem 2.4.2. $M \subseteq X$ olsun. M kümesi sınırlı küme olduğunda $\{\|Ax\|,\ x \in M\}$ kümesi de sınırlı küme olur [1].

Teorem 2.4.3. X ve Y Banach uzayları ve $A: X \to Y$ operatörü $D(A) = X$ olan lineer operatör olsun. A operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter şart bu operatörün sınırlı olmasıdır [1].

2.4.4. Sınırlı Lineer Operatörlere Örnekler

Örnek 2.4.1. Burada

$$v(t) = \int_a^b K(t,s)u(s)ds \tag{2.7}$$

eşitliğini ele alalım. Burada $K(t,s)$ fonksiyonunun $[a,b] \times [a,b]$ karesinde sürekli bir fonksiyon olduğunu varsayalım. O zaman (2.7) eşitliği $C_{[a,b]}$ uzayında bir sınırlı lineer A operatörünü

$$(Au)(t) \equiv \int_a^b K(t,s)u(s)ds$$

biçiminde tanımlar. Bu operatör bir integral operatörüdür. Bu integral operatörü için aşağıdaki değerlendirme elde edilir:

$$\|Au\|_{C_{[a,b]}} \leq \left(\max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)ds|\right) \|u\|_{C_{[a,b]}} .$$

Örnek 2.4.2. Aşağıdaki eşitlikle tanımlanan A diferansiyel operatörünü ele alalım:

$$Au = a_0(t)u^{(n)}(t) + a_1(t)u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n(t)u(t). \tag{2.8}$$

Burada $a_0(t) \neq 0$ şartının sağlanmasıyla $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ katsayıları $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlardır. Burada aşağıdaki değerlendirme elde edilir:

$$\|Au\|_{C_{[a,b]}} \leq \max_{0\leq i\leq h} \|a_i(t)\|_{C_{[a,b]}} \max_{t\in[a,b]} \sum_{i=1}^{n} \left|u^{(n-i)}(t)\right| \leq c\|u\|_{C_{[a,b]}^n},$$

burada

$$c = \max_{0 \le i \le n} \|a_i(t)\|_{C_{[a,b]}},$$

ve

$$\|u\|_{C^n_{[a,b]}} = \sum_{i=0}^{n} \max_{t \in [a,b]} \left|u^{(n-i)}(t)\right|.$$

(2.9)

Böylece, (2.8) eşitliği ile tanımlanan A diferansiyel operatörü n-kez sürekli diferansiyellenen fonksiyonların $C^n_{[a,b]}$ uzayından $C_{[a,b]}$ uzayına dönüşüm yapan lineer sınırlı bir operatördür.

2.4.5. Lineer Operatörün Normu, $L(X,Y)$ Normlu Uzayı

Normlu X uzayının tümünde tanımlanmış değerleri normlu Y uzayında olan lineer ve sürekli $A, B, C, \ldots$ operatörlerinin tüm kümesini ele alalım. Bu kümede operatörlerin toplamı ve skaler çarpımı işlemleri aşağıdaki eşitliklerle tanımlanır:

$$(A + B)x = Ax + Bx,$$

$$(\lambda A)x = \lambda Ax.$$

Burada X ve Y uzaylarının ikisi de ya reel ya da kompleks alınır. X ve Y nin her ikisinin de reel olması halinde operatörlerin reel sayıyla çarpımı, X ve Y'nin her ikisininde kompleks olması halinde ise, kompleks sayılarla çarpımı tanımlanır. Böylece, bu yöntemle lineer sürekli operatörlerin lineer uzayı elde edilir. Operatörlerin bu lineer uzayında normu aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|.$$

(2.10)

Bu tanıma göre

$$\|Ax\| \le \|A\| \|x\| \qquad (2.11)$$

eşitsizliği elde edilir. Tüm X uzayında tanımlanmış değerleri normlu Y uzayında olan lineer sürekli operatörlerin normlu uzayı sembolik olarak $L(X,Y)$ gibi gösterilir [1].

Aşağıdaki teorem doğrudur:

Teorem 2.4.4. X normlu uzay, Y ise Banach uzayı olduğunda $L(X,Y)$ Banach uzayı olur.

$L(X,X) \equiv L(X)$ şeklinde gösterildiğine dikkat edelim.

2.5. Lineer Uzaylar ve Eşlenik Operatörler

2.5.1. Lineer Fonksiyonelin Tanımı

X reel ve normlu uzay, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ reel sayılar kümesi olsun. Her bir $f: X \to \mathbb{R}$ operatörüne bir fonksiyonel denir. Burada lineer fonksiyonelleri ele alalım. Lineer f fonksiyonelinin $x \in X$ elemanındaki değeri $\langle x, f \rangle$ şeklinde gösterilir. Lineer fonksiyonel $D(f)$ tanım bölgesi lineer manifold olan ve her bir$x, y \in D(f)$ ve her bir $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sayıları için

$$\langle \alpha x + \beta y, f \rangle = \alpha \langle x, f \rangle + \beta \langle y, f \rangle$$

şartlarını sağlayan fonksiyoneline denir.

Sınırlı lineer fonksiyonel

$$\|f\| = \max_{\substack{x \in D(f), \\ \|x\| \le 1}} |\langle x, f \rangle| < +\infty$$

şartını sağlayan lineer fonksiyonele denir. Normlu X uzayında tanımlanmış lineer sınırlı fonksiyonellerin normlu uzayı X^* ile gösterilir[1], ve X^* uzayına X uzayının dual uzayı denir. Hilbert uzaylarında tanımlanmış lineer fonksiyonellerin genel şekli hakkındaki aşağıdaki Riesz teoremi doğrudur [1]:

Teorem 2.5.1.(Riesz) H bir reel veya kompleks Hilbert uzayı olduğunu varsayalım. Tüm H uzayında tanımlanmış her bir lineer sınırlı f fonksiyoneline karşı tek bir tane $y \in H$ elemanı bulunur ki, tüm $x \in H$ elemanları için $\langle x, f \rangle = (x, y)$ eşitliği sağlanır ve $\|f\| = \|y\|$ olur.

Bu Riesz teoreminden görülür ki, H ve H^* uzayları arasında elemanların normlarının eşitliğini sağlayan tek değerli bir dönüşüm vardır. Bu yüzden H uzayının Hilbert uzayı olması halinde $H^* = H$ alınır. Bu anlamda Hilbert uzayları özeşlenik uzaylar olur [1].

2.5.2. Eşlenik Operatörler

$A \in L(X,Y)$ operatörünü alalım. $x \in X$ ve $f \in Y^*$ olmak üzere aşağıdaki ifadeyi ele alalım:

$$\langle Ax, f\rangle.$$

Bu ifade ile bir $\varphi(x)$ fonksiyoneli tanımlanmış olur:

$$\varphi(x) = \langle x, \varphi\rangle = \langle Ax, f\rangle\ . \tag{2.13}$$

Bu (2.13) eşitliği ile tanımlanan φ fonksiyonelinin aşağıdaki özellikleri vardır:

1) $D(\varphi) = X$,

2) φ lineer fonksiyoneldir,

3) φ sınırlı fonksiyoneldir.

Bu özelliklerden $\varphi \in X^*$ olduğu bulunur. Buradan görülür ki, (2.13) formülü ile her bir $f \in Y^*$ elemanına X^* uzayında tek bir φ elemanı karşılık getirilir. Böylelikle, bir lineer ve sürekli $A^*f = \varphi$ operatörü tanımlanmış olur. Bu A^* operatörü, $A^* \in L(Y^*, X^*)$ olmak üzere A operatörünün eşlenik operatörü olarak adlandırılır [2].

Aşağıdaki lemma doğrudur:

Lemma 2.5.1. $A \in L(X,Y)$ olduğunda $\|A^*\| = \|A\|$ olur.

Örnek 2.5.1. $X = Y = L_2[a,b]$ olsun. Burada $L_2[a,b]$ uzayı $[a,b]$ aralığında tanımlanmış karesi Lebesque anlamda integrallenebilen fonksiyonların Hilbert uzayıdır. Bu uzayda

$$y(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

eşitliği ile tanımlanan lineer A operatörünün eşlenik operatörünü bulalım. Burada $K(t,s)$ fonksiyonunun $[a,b] \times [a,b]$ karesinde sürekli fonksiyon olduğunu varsayalım. O zaman buluruz:

$$\langle Ax, z\rangle = (Ax, z) = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(t,s)x(s)ds \right\} z(t)dt$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_a^b K(t,s)z(t)dt \right\} x(s)ds$$

$$= (x, A^*z) = \langle x, A^*z\rangle.$$

Böylece, eşlenik $w = A^*z$ operatörüde integral operatördür:

$$w(t) = \int_a^b K(s,t)z(s)ds.$$

2.5.3. Özeşlenik Operatörler

Tanım 2.5.1. $A \in L(H)$ olsun. $A^* = A$ eşitliği sağlandığında A operatörüne özeşlenik operatör denir.

Bu tanımdan görülür ki, A özeşlenik operatör olduğunda veya A'nın özeşlenik olması için gerek ve yeter şart her bir $x, y \in H$ için

$$(Ax, y) = (x, Ay) \tag{2.14}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [1].

Örnek 2.5.2. Örnek 2.5.1.'de tanımlanmış integral A operatörünün $L_2[a,b]$ uzayında özeşlenik olması için onun çekirdeği $K(t,s)$ fonksiyonu simetrik olmalıdır, yani $K(t,s) = K(s,t)$ şartının her bir $t, s \in [a,b]$ için sağlanılmasıdır.

2.6. Ortogonal Projeksiyon Operatörler

2.6.1. Ortogonal Projeksiyon Operatörlerin Tanımı

H Hilbert uzayı M'de bu uzayda bir alt uzay olsun. O zaman terorem 2.3.2.'de verilmiş Riesz teoremine nazaran her bir $x \in H$ elemanı $x = y + z,\ y \in M,\ z \in M^{\perp}$şeklinde tek olarak açılır. Burada y elemanı x elemanının M üzerine ortogonal projeksiyonudur. Şimdi biz burada her bir $x \in H$ elemanına karşı bu elemanın M'deki tek bir ortogonal projeksiyonu olan $y \in M$ elemanını karşı getirelim. Bu yöntemle H uzayında bir $y = Px$ olan $P: H \to M$ operatörü tanımlanmış olur. Bu P operatörüne ortogonal projeksiyon operatör denir.

Burada $x \in M$ olması için yalnız ve yalnız $Px = x$ olmasının gerektiği görülür.

$$x = y + z$$

açılımında$z \in M^{\perp}$ elemanı x elemanının $M^{\perp}$ üzerine ortogonal projeksiyonudur. Böylece, her bir $x \in H$ için

$$z = x - y$$

olduğundan

$$z = (I - P)x$$

olur.

Bu tanımdan da $x \in M^{\perp}$ olması için gerek ve yeter şart $Px = 0$ olmasıdır.

Ortogonal projeksiyon operatörünün en önemli özelliklerinden biri $P^2 = P$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Keyfi $x \in H$ için $Px \in M$ olur bu yüzden de

$$P(Px) = P^2x = Px$$

olur [1].

2.7. Sonlu Boyutlu Lineer Operatörler

2.7.1. Sonlu Boyutlu Lineer Operatörün Tanımı

Tanım 7.1. $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in Y$ ve $f_1, f_2, \dots, f_n \in X^*$ olsun. Her bir $x \in X$ için

$$P_n x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k \rangle \varphi_k$$

şeklindeki bir lineer operatöre sonlu boyutlu lineer operatör denir.

Her bir sonlu boyutlu lineer operatörün sınırlı operatör olduğu aşağıdaki eşitsizlikten görülür:

$$\|P_n x\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\langle x, f_k \rangle| \|\varphi_k\| \leq c\|x\|,$$

burada

$$c = \sum_{k=1}^{n} \|f_k\| \, \|\varphi_k\|$$

olur.

3. GALERKİN METODU

3.1.Yaklaşık Galerkin Şemasının Denklemleri Sistemi Üzerine

A lineer operatörünün $D(A)$ tanım bölgesinin X Banach uzayında her yerde yoğun olduğunu, yani $\overline{D(A)} = X$ olduğunu ve $R(A)$ değerler kümesinin Y Banach uzayında yerleştiğini ve A operatörünün $D(A)$ tanım bölgesini $R(A)$ değerler bölgesine bire bir dönüştürdüğünü varsayalım. $y \in R(A)$ elemanının değişmez sağlanan bir eleman olduğunu varsayalım.

Aşağıdaki

$$Ax = y \qquad (3.1.1)$$

operatör denkleminin yaklaşık çözümünü bulmak için aşağıdaki inşa yöntemini uygulayalım.

$D(A)$ tanım bölgesinden lineer bağımsız $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ elemanlar sistemini seçelim. $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ sistemine koordinat sistemi de denir. Sonra Y Banach uzayının Y^* eşlenik uzayından lineer bağımsız $\{\psi_l\}_{l=1}^{\infty}$elemanlar sistemini seçelim. Bu $\{\psi_l\}_{l=1}^{\infty}$ elemanlar sistemine projeksiyon sistemi de denir. (3.1.1) denkleminin yaklaşık x_n çözümünü

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k \qquad (3.1.2)$$

lineer kombinasyonu şeklinde arayalım.

Aranan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ katsayılarını

$$\langle Ax_n - y, \psi_l \rangle = 0, \quad l = 1,2,\dots,n \qquad (3.1.3)$$

şartının sağlanmasından bulalım. Burada kullandığımız $\langle y, \psi \rangle$ işareti lineer

$\psi \in Y^*$fonksiyonelinin $y \in Y$ elemanındaki değerini gösterir.

(3.1.3) eşitliğini açık şekilde yazarak aranan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ katsayılarının bulunması için aşağıdaki lineer cebirsel denklemler sistemini bulmuş oluruz:

$$\sum_{k=1}^{n} \langle A\varphi_k, \psi_l \rangle \xi_k = \langle y, \psi_l \rangle, \;\; l = 1,2,\dots,n. \qquad (3.1.4)$$

Genel halde (3.1.4) sisteminin determinantı sıfırdan farklı olmayabilir.

(3.1.4) sisteminin determinantı sıfırdan farklı olduğu halde, (3.1.4) sistemini sağlayan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ için (3.1.2) eşitliği ile bulunan yaklaşık $\{x_n\}$ çözümleri dizisi genel halde (3.1.1) denkleminin x çözümüne yakınsamayabilir.

Bu problemleri incelemek amacıyla önce X Banach uzayının eşlenik uzayı olan X^* Banach uzayından öyle $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ elemanları sistemini seçelim ki, bu elemanlar sistemi için

$$\det(\langle \varphi_k, \gamma_i \rangle)_{k,i=1}^{n} \neq 0 \qquad n = 1,2,3, \dots \qquad (3.1.5)$$

şartları sağlansın.

Sonra ise aşağıdaki eşitlikle $\{P_n\} \subset L(X)$ kısıtlama operatörünü tanımlayalım:

$$P_n x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, \gamma_k \rangle \varphi_k. \qquad (3.1.6)$$

Daha sonra Y Banach uzayından öyle $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ elemanlar sistemini seçelim ki,

$$det(\langle z_j, \psi_l \rangle)_{j,l=1}^{n} \neq 0, \qquad n = 1,2, \dots \qquad (3.1.7)$$

şartları sağlansın. Burada uygun olarak $\{Q_n\} \subset L(Y)$ kısıtlama operatörler dizisini aşağıdaki eşitlikle tanımlayalım:

$$Q_n y = \sum_{k=1}^{n} \langle y, \psi_k \rangle z_k \ . \qquad (3.1.8)$$

Özel halde $\{\gamma_i\} \subset X^*$ sistemini ve $\{z_j\} \subset Y$ sistemini uygun olarak

$$\langle \varphi_k, \gamma_i \rangle = \delta_{k,i} = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i \end{cases} \qquad \text{i,k=1,2,…} \qquad (3.1.9)$$

$$\langle z_j, \psi_l \rangle = \delta_{j,l} = \begin{cases} 1, & j = l, \\ 0, & j \neq l \end{cases} \qquad \text{j,l=1,2,…} \qquad (3.1.10)$$

şartlarının sağlanmasıyla seçtiğimizde (3.1.5) ve (3.1.7) şartları uygun olarak sağlanacaktır. Bu hal için P_n ve $Q_n$operatörleri uygun olarak X ve Y Banach uzaylarında sonlu boyutlu projeksiyon operatörleri olurlar. Gerçekten de, bu hal için

$$P_n^2 = P_n \qquad \text{ve} \qquad Q_n^2 = Q_n \ . \qquad (3.1.11)$$

eşitlikleri sağlanır.

Genel halde (3.1.9) ve (3.1.10) şartlarının sağlandığı varsayılır. Bu yüzden Galerkin metoduna bazen projeksiyon metodu da denir.

Şimdi Galerkin approksimasyonunu tanımlayalım:

X Banach uzayında kapalı değerler bölgeleri olan $\{P_n\} \subset L(X)$ operatörler dizisini ele alalım. Varsayalım ki,

$$X_n = R(P_n) \subset D(A)$$

sağlansın. Böylece,

$$P_n \in L(X, X_n)$$

olur. Şimdi $x_n \in X_n$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisini ele alalım. $n \to \infty$ şartında

$$\|x_n - P_n x\| \to 0$$

şartı sağlandığında $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ elemanına P-yakınsaktır denir [1,2].

Dikkate alalım ki, genel halde P-yakınsaklık X uzayındaki yakınsaklıkla çakışmıyor. Bu yakınsaklıklar arasındaki bağlantıyı açıklamak için aşağıdaki tanımları verelim.

Tanım1. $n \to \infty$ şartında $P_n x \to x$ şartı sağlandığında $x \in X$elemanına P-limit noktası denir [1].

Tanım2. Her bir $x \in X$ elemanı P-limit noktası olduğunda, o zaman $\{X_n\}$ alt uzaylar dizisi X Banach uzayında limit anlamında yoğundur denir [1].

Aşağıdaki lemmada X uzayındaki yakınsaklıkla P-yakınsaklık arasındaki bağlantı gösterilir.

Lemma1. $x \in X$ noktasının $\{X_n\}$ alt uzaylar dizisinin P-limit noktası olduğunu varsayalım. $\{x_n\}$ dizisinin x elemanına P-yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\{x_n\}$ dizisinin X uzayında x elemanına yakınsak olmasıdır.

İspat. $x_n \xrightarrow{P} x$ olduğunu varsayalım.

O zaman

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - P_n x\| + \|P_n x - x\| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Bu eşitsizliğin sağ yanındaki birinci toplam P-yakınsaklığa göre sıfıra yakınsar. İkinci toplam ise x'in P-limit noktası olmasından dolayı sıfıra yakınsar.

Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin X uzayında x elemanına yakınsak olduğunu varsayalım. O zaman benzer şekilde

$$\|x_n - P_n x\| \leq \|x_n - x\| + \|P_n x - x\| \to 0, \qquad n \to \infty$$

olur. Böylece lemma ispatlandı.

Sonuç1. $\{X_n\}$ dizisinin X Banach uzayında limit anlamda her yerde yoğun olduğunu varsayalım. O zaman P-yakınsaklıkla X uzayındaki norma göre yakınsaklık çakışır.

Şimdi P_n operatörünün (3.1.9) şartının sağlanmasıyla (3.1.6) formülü ile tanımlandığını varsayalım, yani

$$P_n x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, \gamma_k \rangle \varphi_k \tag{3.1.6}$$

ve

$$\langle \varphi_k, \gamma_i \rangle = \delta_{ki}, \qquad \text{k,i=1,2,…} \tag{3.1.9}$$

olsun.

(3.1.9) şartını sağlayan $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ve $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ sistemlerine biortogonal sistemler denir. $\langle x, \gamma_i \rangle$ sayılarına $x \in X$ elemanının $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ sistemi üzere Galerkin katsayıları denir. $P_n x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, \gamma_k \rangle \varphi_k$ ifadesine $x \in X$ elemanının $\{\varphi_i\}_1^{\infty}$,$\{\gamma_j\}_1^{\infty}$ sistemleri üzere Galerkin polinomu denir.

Uygun olarak

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \gamma_i \rangle \varphi_i \tag{3.1.12}$$

serisine$x$ elemanının biortogonal $\{\varphi_i\}_1^{\infty}$,$\{\gamma_j\}_1^{\infty}$ elemanlar sistemi üzere Galerkin serisi denir.

Özel halde $\{\varphi_i\}$ sistemi ortonormal sistem oluşturduğunda

$$P_n x = \sum_{i=1}^{n} (x, \varphi_i) \varphi_i$$

eşitliği ile tanımlanır. Bu halde P_n projeksiyon operatör olur ve $P_n^* = P_n$ eşitliği sağlanır. Yani bu halde P_n operatörü H Hilbert uzayında özeşlenik operatör olur. Burada $\{\varphi_i\}$ sistemi tam sistem oluşturduğunda $P_n x \to x$ olur.

Bu durumda, $\xi_i = (x, \varphi_i)$ x elemanının $\{\varphi_i\}$ sistemi üzere Fourier katsayıları olur.

Bu halde

$$\|x - P_n x\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \xi_i^2 \tag{3.1.13}$$

olur.

Şimdi ise lineer operatörlerin Galerkin approksimasyonunu tanımlayalım:

A operatörünün $D(A)$ tanım bölgesinin X Banach uzayında her yerde yoğun olduğunu, $R(A)$ değerler bölgesinin Y Banach uzayında olduğunu varsayalım. $\{X_n\} \subset D(A)$ ve $\{Y_n\} \subset Y$ sonlu boyutlu alt uzaylar olduklarını ve

$dimX_n = dimY_n$ eşitliğinin sağlandığını varsayalım. $\{P_n\}$ ve $\{Q_n\}$ sonlu boyutlu operatörler olduklarını varsayalım. Varsayalım ki,

$$P_n X = X_n, \qquad Q_n Y = Y_n.$$

A operatörünün approksimasyonları olarak $Q_n A$ operatörünün X_n alt uzayına kısıtlanmasını alalım [4].

Tanım3. $x \in D(A)$ elemanı için $n \to \infty$ şartında

$$\|Q_n Ax - Q_n AP_n x\|_Y \to 0, \qquad (3.1.14)$$

şartı sağlandığında bu $x \in D(A)$ elemanında Galerkin approksimasyon şartı sağlanır denir.

(3.1.14) approksimasyon şartını aşağıdaki şekilde yazmak daha faydalı olur.

$$\|Q_n A(x - P_n x)\|_Y \to 0, \qquad n \to \infty\ . \qquad (3.1.15)$$

Burada

$$w_n = \sup_{1 \le k \le n} \|Q_k\| \qquad (3.1.16)$$

işaret edelim.

Aşağıdaki lemma doğrudur [5].

Lemma2. A operatörünün sınırlı olduğunu, $x \in X$ noktasının P-limit noktası olduğunu ve $n \to \infty$ şartında

$$\|x - P_n x\| = o(w_n^{-1})$$

şartının sağlandığını varsayalım. O zaman x elemanında Galerkin approksimasyonu şartı sağlanır.

Bu lemmanın ispatı

$$\|Q_n A(x - P_n x)\|_Y \le w_n \|A\| \|x - P_n x\|$$

eşitsizliğinden alınır.

Sonuç2. x noktasının P-limit noktası olduğunu ve $\{Q_n\}$ dizisinin düzgün sınırlı olduğunu yani öyle $c > 0$ sayısı var ki, $\|Q_n\| \leq c$, n=1,2,…eşitsizliklerinin sağlandığını varsayalım. O zaman x noktasında Galerkin approksimasyon şartı sağlanır.

3.2. Galerkin Approksimasyonunun Kararlılık Şartı

Tanım: A operatörü için n sayısına bağlı olmayan öyle $\gamma > 0$ sayısı bulunursa ki tüm $x_n \in X_n$ için bir numaradan başlayarak

$$\|Q_n A x_n\|_Y \geq \gamma \|x_n\|_X \tag{3.2.1}$$

eşitsizliği sağlandığında A operatörünün Galerkin approksimasyonu kararlıdır denir [1].

Lemma1. Tüm $x \in D(A)$ için

$$\|Ax\| \geq \alpha \|x\| \tag{3.2.2}$$

eşitsizliği sağlandığında ve her bir $y_n \in AX_n$ için

$$\|Q_n y_n\| \geq \beta \|y_n\| \tag{3.2.3}$$

eşitsizliği sağlanırsa, o zaman A operatörünün Galerkin approksimasyonu için

$\gamma = \alpha\beta$ olmak üzere kararlılık şartı sağlanır.

Bu lemmanın ispatı

$$\|Q_n A x_n\| \geq \beta \|A x_n\| \geq \beta\alpha \|x_n\|$$

eşitsizliğinden alınır.

Şimdi burada X ve Y Banach uzaylarının Hilbert uzayları oldukları hali ele alalım. Bu hal için P_n ve Q_n operatörleri ortoprojeksiyon operatörleri olurlar:

$$P_n x = \sum_{i=1}^{n} (x, \varphi_i)\varphi_i, Q_n x = \sum_{j=1}^{n} (x, \psi_j)\psi_j. \tag{3.2.4}$$

Bu halde $x_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i$ şeklinde aranarak $(Q_n A x_n, Q_n A x_n)$ çarpımını açarak

$$\|Q_n A x_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \xi_i \left(A\varphi_i, \psi_j\right)\right]^2$$

eşitliğini buluruz. Bu eşitliği (3.2.1) eşitsizliğinde kullanarak A operatörünün Galerkin approksimasyonunun kararlılık şartını aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\xi_i\xi_j \geq \gamma^2 \sum_{l=1}^{n}\xi_l^2 \ . \tag{3.2.5}$$

Burada

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(A\varphi_i,\psi_k)(A\varphi_j,\psi_k).$$

(3.2.5) şartının sağlanması Silvester kriterinin yardımıyla olur.

Şimdi $H = X = Y$ halini ele alalım. Bu halde $A: H \to H$ olur. Bu halde $Q_n = P_n$ olur ve kararlılık şartı kolaylıkla sağlanır. Gerçekten de, tüm $x \in D(A)$ için bir $\gamma > 0$ sayısı için

$$(Ax,x) \geq \gamma(x,x) \tag{3.2.6}$$

şartının sağlandığını varsayalım. Burada $P_n x = \sum_{i=1}^{n}(x,\varphi_i)\varphi_i$ H Hilbert uzayında ortoprojeksiyon operatörü olsun. O zaman $P_n = P_n^*$ olur ve tüm$x_n \in X_n$ için

$$(P_nAx_n,x_n) = (Ax_n,P_nx_n) = (Ax_n,x_n) \geq \gamma\|x_n\|^2$$

eşitsizliği sağlanır.

Diğer yandan $(P_nAx_n,x_n) \leq \|P_nAx_n\|\|x_n\|$ eşitsizliği sağlandığından buradan biz aşağıdaki kararlılık şartını buluruz

$$\|P_nAx_n\| \geq \gamma\|x_n\| \ . \tag{3.2.7}$$

Böylece burada aşağıdaki lemma ispatlandı.

Lemma2. (3.2.6) şartı sağlandığında tüm P_n projeksiyon operatörleri için Galerkin approksimasyonu A operatörü için kararlı olur.

Not. $A = A_1 + A_2$olsun ve her bir $x \in D(A)$ için

$$(A_1x,x) \geq \gamma_1\|x\|^2,$$

$$(A_2x,x) \geq \gamma_2\|x\|^2$$

$\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ şartları sağlandığında $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ olmak üzere $A = A_1 + A_2$ operatörü için (3.2.6) şartı sağlanır ve bu A operatörü içinde Lemma2 doğru olur.

3.3. Galerkin Şemasının Yakınsaklık Şartı

Burada

$$Ax = y \tag{3.3.1}$$

denklemini ele alalım. Bu denklemde $A: X \to Y$operatörünün genelde sınırlı olmayan operatör olduğunu ve $D(A)$ tanım bölgesinin X Banach uzayında her yerde yoğun olduğunu varsayalım. $P_n \in L(X, X_n)$ ve $Q_n \in L(Y, Y_n)$ kısıtlama operatörlerinin $X_n = P_n X$ ve $Y_n = Q_n Y$ değerler kümesinin kapalı kümeler olduklarını varsayalım. Sonra (3.3.1) denkleminin çözümünün Galerkin şemasını ele alalım. Yani aşağıdaki yaklaşık denklemler dizisini ele alalım.

$$Q_n A x_n = Q_n y \tag{3.3.2}$$

Burada (3.3.2) denkleminin x_n çözümü X_n kümesinde aranır. Belli bir numaradan başlayarak her bir n sayısı için (3.3.2) denkleminin x_n çözümü var ve tek olduğunda ve $n \to \infty$ şartında x_n yaklaşık çözümler dizisi (3.3.1) denkleminin dakik x çözümüne yakınsadığında, yani

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

eşitliği sağlandığında (3.3.2) Galerkin şeması yakınsaktır denir.

Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem. Aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

1) $y \in R(A)$, $Q_n y \in R(Q_n A P_n)$ yani (3.3.1) denklemi ve (3.3.2) yaklaşık denklemi çözülebilendir;

2) (3.3.1) denkleminin her bir dakik $x$çözümü için $n \to \infty$ şartında $P_n x \to x$ olur;

3) Her bir $y \in R(A)$ için $n \to \infty$ şartında $Q_n y \to y$ olur;

4) Galerkin approksimasyon şartı sağlanır, yani $n \to \infty$ şartında

$$\|Q_n A x - Q_n A P_n x\| \to 0$$

olur;

5) Galerkin şemasının kararlılık şartı sağlanır, yani bir numaradan başlayarak her bir $x_n \in X_n$ için

$$\|Q_nAx_n\|_Y \geq \gamma\|x_n\|_X$$

eşitsizliği bir $\gamma > 0$ sayısı için sağlanır. Bu 1), 5) şartları sağlandığında (3.3.1) denkleminin dakik x çözümü tektir, bir numaradan başlayarak yaklaşık x_n çözümü tektir ve (3.3.2) Galerkin şeması yakınsaktır. Aşağıdaki değerlendirme sağlanır:

$$\|x_n - x\| \leq \|P_nx - x\| + \gamma^{-1}\|Q_nAx - Q_nAP_nx\| \quad (3.3.3)$$

İspat. Yaklaşık x_n çözümünün bir n numarasından başlayarak tekliği kararlılık şartından sağlanır. Şimdi burada önce kararlılık şartını sonra (3.3.2) ve (3.3.1) denklemlerini kullanarak aşağıdaki değerlendirmeleri buluruz:

$$\|x_n - x\| \leq \|P_nx - x\| + \|x_n - P_nx\|,$$

$$\gamma\|x_n - P_nx\| \leq \|Q_nAx_n - Q_nAP_nx\| = \|Q_ny - Q_nAP_nx\| = \|Q_nAx - Q_nAP_nx\|$$

Bu eşitsizlikten (3.3.3) eşitsizliği alınır. $\{x_n\}$ dizisinin tek bir limitinin olmasından (3.3.3) eşitsizliğinden de dakik x çözümünün tek olduğu alınır. Böylece, teorem ispatlandı.

Not1. X_n ve Y_n kümeleri sonlu boyutlu olduğunda ve $dimX_n = dimY_n$ şartı sağlandığında kararlılık şartından bir numaradan başlayarak yaklaşık denklemin bir değerli çözülebildiği alınır.

Gerçekten de, A_n operatörü Q_nA operatörünün X_n kümesine kısıtlanması olduğunu varsayalım. O zaman $A_n \in L(X_n, Y_n)$ olur ve $N(A) = \{0\}$ olur. Bu yüzden kararlılık şartından bir numaradan başlayarak teoremin 5) şartı sağlandığından kararlılık şartı da sağlanır. Buradan da yaklaşık denklemin bir değerli çözüldüğü alınır.

Not2. $\|Q_n\| \leq c$ ve $A \in L(X,Y)$ olduğunda (3.3.3) şartını aşağıdaki şart ile değiştiririz:

$$\|x_n - x\| \leq (1 + \gamma^{-1}c\|A\|)\|P_nx - x\| \quad (3.3.4)$$

3.4. En Küçük Kareler Metodu Üzerine

Önce lineer A operatörünün H Hilbert uzayını H uzayının kendisine dönüştürdüğünü yani $A: H \rightarrow H$ olduğunu tanım bölgesi $D(A)$ kümesinin H Hilbert uzayında her yerde yoğun olduğunu varsayalım. $D(A)$ kümesinde tanımlanmış

$$\varphi(x) = \|Ax - y\|^2$$

fonksiyonelini ele alalım.

$$Ax = y, \qquad y \in D(A)$$

denkleminin x^* çözümü $\varphi(x)$ fonksiyoneline minumum değer verir. Verilmiş denklemin yaklaşık çözümünü bulmak için $D(A)$ tanım bölgesinden lineer bağımsız $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ sistemini seçelim. H_n kümesi $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ elemanları üzerine çekilmiş alt uzay olsun..

$H_n = sp\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ yaklaşık $x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$ çözümünün $c_1, c_2, \dots, c_n$ katsayıları $\varphi(x_n) = \|\sum_{i=1}^{n} c_i A\varphi_i - y\|^2$ $\min\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ şartından seçilir. Böylece, öyle $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitlerinin bulunması gerekir ki, $\sum_{i=1}^{n} c_i A\varphi_i$ lineer kombinasyonu denklemin sağ yanı olan y elemanını en iyi approksime etsin. Bu yönteme en küçük kareler metodu denir [4].

Bu metodun yakınsaklığını genel hal için gösterelim. Burada lineer A operatörünün $D(A)$ tanım bölgesinin X Banach uzayında her yerde yoğun olduğunu ve $R(A)$ değerler bölgesinin Y Banach uzayında olduğunu varsayalım. $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset D(A)$ lineer bağımsız elemanlar sisteminin ve $\{\psi_j\} \subset D(A^*)$ lineer bağımsız fonksiyoneller sisteminin bulunmuş olduğunu varsayalım.

$\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}ve\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ sistemleri için

$$\langle A\varphi_i, \psi_j \rangle = \delta_{i,j}, \qquad i,j = 1,2, \dots \tag{3.4.1}$$

şartlarını sağladığını varsayalım.

X Banach uzayında P_n projeksiyon operatörünü ve Y Banach uzayında ise Q_n projeksiyon operatörünü aşağıdaki eşitliklerle tanımlayalım:

$$P_n x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, A^*\psi_i \rangle \varphi_i, \qquad Q_n y = \sum_{i=1}^{n} \langle y, \psi_i \rangle A\varphi_i \tag{3.4.2}$$

P_n ve $Q_n$projeksiyon operatörleri (3.4.2) formülleri ile tanımlandığında Galerkin şemasını en küçük kareler şeması olarak adlandırılır. Bu halde her bir $x \in D(A)$ için

$$Q_n A x = \sum_{i=1}^{n} \langle Ax, \psi_i \rangle A\varphi_i = A\left(\sum_{i=1}^{n} \langle x, A^*\psi_i \rangle \varphi_i\right)$$

olur. Böylece, $D(A)$ tanım bölgesinde

$$Q_n A = A P_n \tag{3.4.3}$$

eşitliği sağlanır.

Aşağıdaki teoremde (3.4.1) denklemi için en küçük kareler metodunun şemasının yakınsak olduğu gösterilir [4].

Teorem. $A: X \to Y$ operatörünün X Banach uzayında yoğun tanımlı olduğunu ve tüm $x \in D(A)$ için

$$\|AX\| \geq \gamma\|X\| \qquad (3.4.4)$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. Burada $y \in R(A)$ ve $n \to \infty$ şartında $Q_n y \to y$ şartları sağlandığında en küçük quadratlar şeması yakınsak olur ve

$$\|x_n - x^*\| \leq \gamma^{-1}\|y - Q_n y\| \qquad (3.4.5)$$

değerlendirmesi sağlanır [1].

İspat. (3.4.3) eşitliğini ve (3.4.4) eşitsizliğini kullanarak buluruz

$$\|Q_n A x_n\| = \|AP_n x_n\| = \|Ax_n\| \geq \gamma\|x_n\|.$$

Buradan da en küçük kareler şeması için kararlılık şartının sağlandığı görülür. Sonra yine (3.4.3) eşitliğinden

$$Q_n Ax = Q_n^2 Ax = Q_n AP_n x$$

eşitliğini buluruz. Buradan da $D(A)$ kümesinde approksimasyon şartının tam olarak sağlandığı bulunur:

$$\|Q_n Ax - Q_n AP_n x\| = 0.$$

O zaman (3.4.4) eşitsizliğini ve (3.4.3) eşitliğini kullanarak aşağıdaki değerlendirmeyi buluruz:

$$\|x_n - x^*\| \leq \|P_n x - x\| \leq \gamma^{-1}\|AP_n x - Ax\| = \gamma^{-1}\|AP_n x - y\| = \gamma^{-1}\|Q_n y - y\|.$$

3.5. Galerkin Metoduna Ait Bir Örnek

Örnek. Burada $H = L_2[0,1]$ Hilbert uzayında aşağıdaki

$$Ax \equiv -x'' + c(t)x = y(t) \qquad (3.5.1)$$

denkleminin

$$x(0) = 0, \qquad x(1) = 0 \qquad (3.5.2)$$

sınır şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemini ele alalım. Burada $c(t)$ katsayısı ve denklemin sağ yanı $y(t)$ fonksiyonlarının $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonlar oldukları ve

$$c(t) \geq \alpha > -\frac{8}{\pi} \qquad (3.5.3)$$

şartının sağlandığını varsayalım. Buradaki A operatörünün tanım bölgesi

$$D(A) = \left\{x(t) \in C^2_{[0,1]}: x(0) = 0, \;\; x(1) = 0\right\}$$

eşitliği ile tanımlanır. Böylece, A operatörü sınırlı olmayan operatördür. Koordinat sistemi olarak H Hilbert uzayında ortonormal tam sistem oluşturan

$$\varphi_k = \sqrt{2}\sin k\pi t, \qquad k = 1,2,\ldots \qquad (3.5.4)$$

sistemini seçelim. Burada her bir $x \in D(A)$ için

$$(Ax, x) \geq \left(\frac{8}{\pi} + \alpha\right)(x, x) \qquad (3.5.5)$$

eşitsizliği sağlanır.

(3.5.5) eşitsizliğinin ve (3.5.4) sisteminin ortonormal olduğunu Galerkin approksimasyonunun kararlılık şartları olan (3.2.6) ve (3.2.7) şartlarını kullanarak Galerkin yaklaşık şemasının kararlılık şartı alınır. Bunun için burada

$$Q_n x = P_n x = \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)\varphi_k$$

almak gerekir. Burada Galerkin yaklaşması

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t)$$

şeklinde olur. Buradaki $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ katsayıları

$$(k\pi)^2\xi_k + \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\xi_i = \eta_k, \quad k = 1,2,\dots,n \tag{3.5.6}$$

sisteminden bulunur. Bu sistemde

$$c_{ik} = \int_0^1 c(t)\varphi_k(t)\varphi_i(t)dt, \ \eta_k = \int_0^1 y(t)\varphi_k(t)dt$$

eşitlikleri ile tanımlanır. (3.5.6) sistemi bir değerli olarak çözülür. Approksimasyon şartının sağlandığını göstermek için

$$A = -\frac{d^2}{dt^2} + c(t)I = A_1 + A_2$$

almak gerekir. Bunun için $A_1 = -\frac{d^2}{dt^2}$ ve $A_2 = c(t)I$ operatörlerinin her birinin approksimasyon şartını sağladığını gösterelim. Burada $\|P_n\| = 1$ olduğundan ve $c(t)$ fonksiyonuna çarpma operatörü sınırlı olduğundan bu A_2 operatörü için approksimasyon şartı sağlanır.

Şimdi $A_1 = -\frac{d^2}{dt^2}$ operatörünün tanım bölgesinin $D(A)$ olduğunu dikkate alarak Galerkin approksimasyonu şartını sağladığını gösterelim. φ_k fonksiyonu A_1 operatörünün karakteristik fonksiyonu, $\lambda_k = k^2\pi^2$ ise uygun olarak karakteristik değeridir. Burada

$$P_n\left[-\frac{d^2}{dt^2}\right]x = \sum_{k=1}^{n}(-x'', \varphi_k)\varphi_k = \sum_{k=1}^{n}(x, -\varphi_k'')\varphi_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x, \varphi_k)\,\varphi_k,$$

$$\left[-\frac{d^2}{dt^2}\right]P_n x = \sum_{k=1}^{n}(x, \varphi_k)\,[-\varphi_k''] = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x, \varphi_k)\varphi_k.$$

Böylece,

$$P_n\left[-\frac{d^2}{dt^2}\right]P_n x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x, \varphi_k)\varphi_k.$$

Buradan da her bir $x \in D(A)$ için

$$P_n\left[-\frac{d^2}{dt^2}\right]P_n x - P_n\left[-\frac{d^2}{dt^2}\right]x = 0$$

olur.

Yani $A_1 = -\frac{d^2}{dt^2}$ operatörü için approksimasyon şartı dakik olarak sağlanır. 3.3 bölümündeki Galerkin şemasının yakınsaklığı hakkındaki teoreme esasen bu örnek için Galerkin şeması yakınsaktır. Buradaki Galerkin yaklaşması için aşağıdaki değerlendirme alınır:

$$\|x_n - x\|_H \leq \left[1 + \left(\frac{8}{\pi} + \alpha\right)^{-1} \|c(t)\|_H \|x - P_n x\|_H\right].$$

3.6. İkinci Çeşit Operatör Denklemlere Galerkin Metodunun Uygulanması Üzerine

X Banach uzayında ikinci çeşit

$$x - Kx = y \tag{3.6.1}$$

denklemini ele alalım. Bu denklemde $K \in L(X)$, $y \in X$ olduğunu varsayalım. $I - K$ operatörünün burada sürekli dönüştürülebilen operatör olduğunu varsayalım. Yani $R(I - K) = X$ olduğunu ve $(I - K)^{-1}$ var ve sınırlı olduğunu varsayalım. $P_n \subset L(X)$ projeksiyon operatörler olduklarını ve $X_n = P_n X$'in X'de alt uzay oluşturduğunu varsayalım. Galerkin yaklaşmaları

$$x_n - P_n K x_n = P_n y \tag{3.6.2}$$

denkleminin çözümü olur. Buradan $x_n \in X_n$ olduğu alınır. Üstte gösterdiğimiz tüm tanımlamalari teorem ve lemmalar (3.6.1) ve (3.6.2) denklemleri içinde geçerli olur. Kararlılık şartı yukarıdaki (3.6.2) denkleminin tüm mümkün çözümleri için apriori değerlendirme olur:

$$\|x_n\| \leq \gamma^{-1} \|P_n y\|.$$

Bu kararlılık şartı tüm $I - P_n K$ operatörleri sürekli dönüştürülebilen olduklarında ve

$$\|(I - P_n K)^{-1}\| \leq \gamma, \;\; n = 1,2, \dots \tag{3.6.3}$$

şartları sağlandığında sağlanacaktır.

$$\|P_n\| \leq c$$

şartı sağlandığında ve K operatörünün sınırlı olmasından approksimasyon şartının sağlandığı bulunur. Bu hal için 3. Bölümdeki (3.3.4) genel değerlendirmesi nispeten daha iyi şekilde bulunur. Gerçekten de, burada

$$Kx = x - y$$

olmasından dolayı

$$\begin{aligned} x_n - x &= (I - P_n K)^{-1} P_n y - x \\ &= (I - P_n K)^{-1} (P_n y - x + P_n K x) \\ &= (I - P_n K)^{-1} (P_n x - x) \end{aligned}$$

burada biz

$$\|x_n - x\| \le \gamma \|x - P_n x\|$$

değerlendirmesini buluruz. $n \to \infty$ şartında $P_n K \to K$ ve $P_n y \to y$ olduğunda,

$$x_n - x = (I - P_n K)^{-1}(P_n y - y) + [(I - P_n K)^{-1} - (I - K)^{-1}]y$$

$$=(I - P_n K)^{-1}(P_n y - y) + (I - P_n K)^{-1}(P_n K - K)(I - K)^{-1}y$$

olur ve böylece,

$$\|x_n - x\| \le \gamma \|P_n y - y\| + \gamma \|(I - K)^{-1}\| \|P_n K - K\| \|y\| \qquad (3.6.4)$$

değerlendirmesi bulunur.

Dikkate alalım ki, burada alınan sonuçlar ikinci çeşit Fredholm integral denklemine $C_{[a,b]}$ ve $L_2[a,b]$ uzaylarında uygulanabilir [4]:

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t) \qquad (3.6.5)$$

3.7. Galerkin Metodunun Varyasyon Şekli Üzerine

Lineer A operatörünün reel X Hilbert uzayını kendisine dönüştürdüğünü ve $D(A)$ tanım bölgesinin X Hilbert uzayında her yerde yoğun olduğunu varsayalım. X uzayındaki skaler çarpımı (x,y) gibi ve bu skaler çarpımın doğurduğu normu ise $\|x\|$ gibi gösterelim. Burada

$$Ax = y \qquad (3.7.1)$$

denklemini ele alalım.

H başka bir Hilbert uzayı olsun. Bu uzaydaki skaler çarpımı $[u,v]$ ve normu $\|u\|$ gibi gösterelim. Aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

I. H Hilbert uzayının X Hilbert uzayına yatırılmış olduğunu varsayalım.

$D(A) \subset H$ olsun. $H \dotplus H$ direk toplamında bilineer sınırlı $a(u,v)$ fonksiyoneli tanımlanmış olsun. Yani $a(u,v)$ fonksiyonelinin reel değerli olduğunu, v sabit tutulduğunda u'ya göre lineer, u sabit tutulduğunda v'ye göre lineer olduğunu ve

$$|a(u,v)| \le c\|u\|\|v\| \qquad (3.7.2)$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. Tüm $x \in D(A)$ ve tüm $v \in H$ için

$$a(x,v) \equiv (Ax,v) \tag{3.7.3}$$

eşitliğininde sağlandığını varsayalım.

II. Öyle $\gamma > 0$ sayısı bulunur ki, tüm $u \in H$ için

$$a(u,u) \geq \gamma \|u\|^2 \tag{3.7.4}$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım.

Tanım1. I ve II şartlarını sağlayan A operatörüne H-eliptik operatör denir [2].

Tanım2. (3.7.1) denklemindeki A operatörü H-eliptik operatör olduğu halde her bir $v \in H$elemanı ve $x \in H$elemanı için

$$a(x,v) = (y,v) \tag{3.7.5}$$

aynılığı sağlandığında $x \in H$ elemanına (3.7.1) denkleminin genelleştirilmiş çözümü denir.

Burada biz X ve H Hilbert uzaylarının separabel Hilbert uzayları olduklarını varsayalım. Galerkin metodunu kullanarak (3.7.1) denkleminin genelleştirilmiş çözümünün varlığını ve tekliğini gösterelim.

H uzayından $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ koordinat sistemini seçelim. $H_n = sp\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ olsun. P_n ise H'dan H_n'e projeksiyon operatörü olsun [2].

Tanım3. Her bir $v_n \in H_n$ için ve $x_n \in H_n$ için

$$a(x_n, v_n) = (y, v_n) \tag{3.7.6}$$

aynılığı sağlandığında bu $x_n \in H_n$ elemanına (3.7.1) denkleminin x genelleştirilmiş çözümünün Galerkin yaklaşması denir [2].

Lemma1. (3.7.6) probleminin çözümü

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i \tag{3.7.7}$$

şeklindedir ve bu açılımdaki $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ katsayıları aşağıdaki lineer cebirsel denklemler sisteminin çözümüdür:

$$\sum_{i=1}^{n} a(\varphi_i, \varphi_j)\xi_i = (y, \varphi_j), \quad j = 1,2,\dots,n \tag{3.7.8}$$

İspat. $x_n \in H_n$ olduğundan (3.7.7) şeklindedir. x_n'in (3.7.7) ifadesini ve v_n'in

$$v_n = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \varphi_j \tag{3.7.9}$$

ifadesini (3.7.6)'da yerlerine yazarak $a(u,v)$'nin bilineer olduğunu ve skaler çarpımın lineer olduğunu kullanarak buluruz:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a(\varphi_i, \varphi_j)\xi_i \eta_j = \sum_{j=1}^{n} (y, \varphi_j)\eta_j. \tag{3.7.10}$$

$v_n \in H_n$ keyfi elemandır, yani $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ (3.7.10) eşitliğinde keyfi alınmış sabitlerdir. Buradan da (3.7.6) ve (3.7.10)'un equivalent olduğu alınır. Yani $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ sabitlerini öyle seçebiliriz ki, (3.7.8) eşitliği sistemi alınır. Lemma ispatlandı.

Lemma2. A operatörünün H-eliptik olduğunu varsayalım. O zaman her bir n sayısı için (3.7.1) denkleminin genelleştirilmiş çözümünün tek bir tane x_n Galerkin yaklaşması vardır.

İspat. Lemma1'e nazaran x_n'in (3.7.6)'dan bulunması (3.7.8) sisteminin çözümüne equivalenttir. Bu yüzden (3.7.6)'da $y = 0$ aldığımızda alınan homojen problemin yalnız trivial çözümünün olduğu gösterildiğinde, o zaman (3.7.8) sisteminin tek çözümünün olduğu gösterilmiş olur. Buradan da (3.7.6) probleminin tek çözümü olduğu gösterilmiş olacaktır.

II şartını kullanalım. Her bir $v_n \in H_n$ için $a(x_n, v_n) = 0$ olduğunda, burada $v_n = x_n$ aldığımızda da bu eşitlik sağlanacaktır. O zaman (3.7.4) eşitsizliğinden

$$0 = a(x_n, x_n) \geq \gamma \|x_n\|^2$$

olur. Böylece, $x_n = 0$ ve lemma2 ispatlandı.

Aşağıda biz (3.7.1) denkleminin genelleştirilmiş çözümünün varlığını göstereceğiz ve (3.7.7) Galerkin yaklaşmalarının bu genelleştirilmiş çözüme yakınsadığını göstereceğiz. Bunları göstermek için aşağıdaki lemma kullanılacaktır.

Lemma3. $n \to \infty$ şartında $u_n \to u_0$ H-da zayıf, $n \to \infty$ şartında $v_n \to v_0$ H-da güçlü yakınsadığında $a(u_n, v_n) \to a(u_0, v_0)$ olur.

İspat. Öncelikle bir lineerlikten

$$a(u_n, v_n) - a(u_0, v_0) = a(u_n, v_n - v_0) + a(u_n - u_0, v_0) \tag{3.7.11}$$

eşitliği bulunur. $\{u_n\}$ dizisi zayıf yakınsak olduğundan sınırlıdır. Bu yüzden

$n \to \infty$ şartında (3.7.2) eşitsizliğinden

$$|a(u_n, v_n - v_0)| \leq c\|u_n\|\|v_n - v_0\|$$

eşitsizliği bulunur. v_0 değişmez sağlandığından tüm $u \in H$ için $a(u, v_0)$ H Hilbert uzayında bir lineer sınırlı fonsiyonel tanımlar. O zaman lineer fonksiyonelin genel şekli hakkında Riesz teoremine esasen öyle $w_0 \in H$ elemanı bulunur ki, tüm $u \in H$ için $a(u, v_0) = [u, w_0]$ olur. Bu yüzden $n \to \infty$ şartında $\{u_n\}$ dizisinin u_0'a zayıf yakınsak olmasından dolayı

$$a(u_n - u_0, v_0)\text{=}[u_0 - u_n, w_0] \to 0$$

olur. Böylece, (3.7.11) eşitliğinin sağ yanındaki toplamın her ikisi de sıfıra yakınsar. Lemma3 ispatlandı.

Teroem. H altuzayının separabel olduğunu ve A operatörünün H-eliptik operatör olduğunu varsayalım. O zaman:

1) (7.1) denkleminin genelleştirilmiş çözümünün her bir n için x_n Galerkin yaklaşması var ve tektir;

2) (7.1) denkleminin genelleştirilmiş çözümü var ve tektir;

3) $n \to \infty$ şartında $\{x_n\}$ dizisi x_0 elemanına zayıf yakınsaktır ve aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$\|x_n - x_0\| \leq c\gamma^{-1}\|P_n x - x\| \qquad (3.7.12)$$

İspat. Lemma2'ye esasen teoremin birinci iddiası doğrudur. Teoremin ikinci iddiasını ispatlamak için H uzayının separabel olduğunu kullanalım. Huzayından ortonormalbaz seçelim ve bu baz elemanlarını da $\{\varphi_i\}_1^\infty$ gibi gösterelim. Keyfi $v \in H$ için $n \to \infty$ şartında $P_n v \to v$ olur, yani v elemanının Fourier serisi kendisine yakınsar.

Şimdi $\{x_n\}$ Galerkin yaklaşmaları dizisini ele alalım. (3.7.6) eşitliğinde $v_n = x_n$ alalım ve (3.7.4) eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki değerlendirmeyi yapalım:

$$\gamma\|x_n\|_H^2 \leq a(x_n, x_n) = (y, x_n) \leq \|y\|_X\|x_n\|_X.$$

H Hilbert uzayı X Hilbert uzayına yatırılmıştır. Bu yüzden öyle $K > 0$ sabit sayısı bulunur ki, her bir $x_n \in H$ için $\|x_n\|_X \leq K\|x_n\|_H$ eşitsizliği sağlanır. Böylece, $\gamma\|x_n\|_H^2 \leq K\|x_n\|_H\|y\|_X$ olur.

Buradan da

$$\|x_n\|_H \leq \gamma^{-1}\|y\|_X$$

eşitsizliği bulunur.

Böylece, $\{x_n\}$ Galerkin yaklaşmaları dizisinin sınırlı olduğunu göstermiş olduk. Bu yüzden $\{x_n\}$ sınırlı dizisi zayıf kompakttır. $\{x_{n'}\}$ dizisi $\{x_n\}$ dizisinin $x_0 \in H$ elemanına H-da zayıf yakınsak olan alt dizisi olsun. Şimdi x_0 elemanının (3.7.1) denkleminin genelleştirilmiş çözümü olduğunu gösterelim. Keyfi $v \in H$ elemanını alalım ve bu v elemanını değişmez kabul edelim. O zaman (3.7.6) eşitliğinden

$$a(x_n, P_{n'}, v) = a(y, P_{n'}, v)$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada $n' \to \infty$ şartında $P_{n'}v \to v$ güçlü, ama $n' \to \infty$ şartında $x_{n'} \to x_0$ zayıf yakınsaktır. O zaman lemma3'e esasen ve skaler çarpımın süreklilik özelliğine dayanarak $a(x_0, v) = (y, v)$ eşitliğini buluruz. $v \in H$ elemanının keyfi olmasından x_0 elemanının (3.7.1) denkleminin genelleştirilmiş çözümü olduğu bulunur. (3.7.1) denkleminin genelleştirilmiş çözümünün tekliğini ispatlamak için II şartını kullanalım. x_0 ve x_0' elemanlarının (3.7.1) denkleminin iki tane genelleştirilmiş çözümü olduklarını varsayalım. O zaman keyfi alınmış $v \in H$

$$a(x_0, v) = (y, v),$$

ve

$$a(x_0', v) = (y, v)$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitlikleri taraf tarafa çıkardığımızda $a(x_0 - x_0', v) = 0$ eşitliğini buluruz. Bu eşitlikte $v = (x_0 - x_0')$ alalım ve (3.7.4) eşitsizliğini kullanarak

$$0 = a(x_0 - x_0', x_0 - x_0') \geq \gamma\|x_0 - x_0'\|_H^2$$

buluruz. Böylece, buradan da $x_0 = x_0'$ olduğu bulunur.

Şimdi (3.7.12) değerlendirmesini ispatlayalım. Bu değerlendirme $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ sisteminin tamlık şartını sağlamadığı halde de doğru olur. (3.7.5)'de $v = v_n$ alıp sonra

(3.7.6)'dan çıkardığımızda $a(x_n - x, v_n) = 0$ eşitliğini buluruz. Bu eşitlik her bir $v_n \in H_n$ için sağlanır. Özel halde,

$$a(x_n - x, x_n) = a(x_n - x, P_n x) = 0$$

olur. O zaman II şartından aşağıdaki değerlendirme bulunur:

$$\|x_n - x\|_H^2 \le a(x_n - x, x_n - x) = -a(x_n - x, x)$$

$$= a(x_n - x, P_n x - x) \le c\|x_n - x\|_H \|P_n x - x\|_H.$$

Buradan (3.7.12) değerlendirmesi bulunur. Teorem ispatlandı.

3.8. Sonlu Elemanlar Metodu Üzerine

Burada aşağıdaki

$$-(a(t)x')' + c(t)x = y(t), \qquad (3.8.1)$$

denkleminin

$$x(0) = 0, \qquad x(1) = 0 \qquad (3.8.2)$$

sınır şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemini ele alalım.

(3.8.1) denklemindeki $a(t)$ fonksiyonunun [0,1] aralığında sürekli diferansiyellenen olduğunu ve $c(t)$, $y(t)$ fonksiyonlarının [0,1] aralığında sürekli fonksiyonlar olduklarını varsayalım. [0,1] aralığında

$$a(t) \ge \alpha > 0, \qquad c(t) \ge \beta > 0 \qquad (3.8.3)$$

eşitsizliklerinin de sağlandığını varsayalım.

(3.8.1), (3.8.2) probleminin genelleştirilmiş çözümü 7. bölümde gösterilmiş (3.7.5) aynılığını sağlayan $x(t) \in \dot{H}'(0,1)$ fonksiyonuna denir. Burada her bir $v(t) \in \dot{H}'(0,1)$ için

$$a(x, v) = \int_0^1 a(t)x'(t)v'(t)dt + \int_0^1 c(t)x(t)v(t)dt,$$

$$(y, v) = \int_0^1 y(t)v(t)dt$$

eşitlikleri ile tanımlanır [4,1].

Böylece, 7. bölümdeki (3.7.5) aynılığı (3.8.1) denkleminin her yanını $L_2(0,1)$ uzayında $v(t) \in \dot{H}'(0,1)$ keyfi fonksiyonu ile çarpma ile bulunur. Sonra bulunmuş eşitliğin sol yanında parça-parça integrasyon formülü uygulanır.

$H_n \subset \dot{H}'(0,1)$'de koordinat sistemi olarak,

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1 - nt, & t \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0, & t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right], \end{cases}$$

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right], \\ n - 1 + nt, & t \in \left[1 - \frac{1}{n}, 1\right], \end{cases}$$

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} i - 1 + nt, & t \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \\ i + 1 - nt, & t \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right], \\ 0, & t \notin \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \end{cases}$$

fonksiyonlar sistemini alalım.

Burada Galerkin yaklaşması 7. bölümdeki (3.7.7) açılımı şeklinde aranır. $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ katsayıları 7.bölümdeki (3.7.8) sisteminin çözümü olur:

$$\sum_{i=0}^{n} a(\varphi_i, \varphi_j)\xi_i = (y, \varphi_j), \qquad j = 0,1,2, \dots, n$$

Burada $h = n^{-1}$ olmak üzere

$$a(\varphi_0, \varphi_0) = n^2 \int_0^h a(t)dt + \int_0^h c(t)(1 - nt)^2 dt,$$

$$a(\varphi_n, \varphi_n) = n^2 \int_{1-h}^h a(t)dt + \int_{1-h}^h c(t)(n - 1 + nt)^2 dt$$

$$a(\varphi_k, \varphi_{k+1}) = a(\varphi_{k-1}, \varphi_k) = -n^2 \int_{kh}^{(k+1)h} a(t)dt +$$

$$\int_{kh}^{(k+1)h} c(t)(nt - K)(nt - K - 1)dt,$$

$$a(\varphi_k, \varphi_l) = 0, \qquad l \neq k - 1, l \neq k + 1.$$

Burada (y, φ_k) çarpımı da benzer formüllerle hesaplanır. Böylece $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ katsayıları üç diagonal matrisli cebirsel denklemler sisteminin çözümü olur.

3.9. Banach Uzayında Diferansiyel Denklemler İçin Cauchy Problemine Galerkin Şemasının Uygulanması

X Banach uzayı, $A \in L(X)$ ve $x_0 \in X$ elemanı verilmiş olsun. $y(t)$ fonksiyonu $[0, \theta]$ aralığında tanımlanmış sürekli ve değerleri X Banach uzayında olan abstrakt fonksiyon olsun. Aşağıdaki Cauchy problemini ele alalım:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + y(t), \tag{3.9.1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{3.9.2}$$

(3.9.1) ve (3.9.2) Cauchy probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için Galerkin metodunu uygulayalım. $\{\varphi_i\}$ sisteminin X Banach uzayında lineer bağımsız elemanlar sistemi, $\{\gamma_i\}$ sisteminin ise $\{\varphi_j\}$ sistemine biortogonal olan X^* eşlenik uzayından alınmış lineer sınırlı fonksiyoneller sistemi olduğunu varsayalım. Burada P_n projeksiyon operatörünü

$$P_n x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \gamma_i \rangle \, \varphi_i \tag{3.9.3}$$

eşitliği ile tanımlayalım.

$y(t)$ abstrakt fonksiyonunun yakınsak olan Galerkin serisine açıldığını varsayalım:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t)\varphi_k, \qquad \eta_k(t) = \langle y(t), \gamma_k \rangle \tag{3.9.4}$$

(3.9.2) başlangıç şartındaki x_0 elemanının yakınsak Galerkin serisine açıldığını varsayalım:

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{ok} \, \varphi_k, \quad \xi_{ok} = \langle x_0, \gamma_k \rangle \tag{3.9.5}$$

(3.9.4) ve (3.9.5) varsayımlarını aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$P_n y(t) \xrightarrow{n\to\infty} y(t), \, P_n x_0 \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \tag{3.9.6}$$

(3.9.1), (3.9.2) Cauchy probleminin yaklaşık çözümünü aşağıdaki şekilde arayalım:

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k(t)\varphi_k \tag{3.9.7}$$

Galerkin metoduna dayanarak $x_n(t)$ yaklaşık çözümünü bulmak için aşağıdaki Cauchy problemini buluruz:

$$\frac{dx_n}{dt} = P_n A x_n + P_n y(t), \tag{3.9.8}$$

$$x_n(0) = P_n x_0. \qquad (3.9.9)$$

(3.9.8) ve (3.9.9) Cauchy probleminin çözümü

$$x_n(t) = e^{P_n A t} P_n x_0 + \int_0^t e^{P_n A(t-s)} P_n y(s) ds. \qquad (3.9.10)$$

şeklinde bulunur.

Burada

$$\|P_n\| \leq c, \qquad n = 1,2, \ldots \qquad (3.9.11)$$

(3.9.11) eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. O zaman (3.9.10) eşitliğini kullanarak aşağıdaki değerlendirmeyi buluruz:

$$\max_{[0,\theta]} \|x_n(t)\| \leq K(\theta)\{\|P_n x_0\| + \max_{[0,\theta]} \|P_n y(t)\|\},$$

(3.9.12)

burada

$$K(\theta) = max\{e^{c\|A\|\theta}, \frac{(e^{c\|A\|\theta} - 1)}{c\|A\|}\} \qquad (3.9.13)$$

(3.9.12) değerlendirmesi (3.9.8), (3.9.9) Galerkin şemasının kararlılık şartını gösterir. Approksimasyon şartı için

$$P_n\left(\frac{dx}{dt} - Ax\right) - P_n\left(\frac{d}{dt} - A\right) P_n x = P_n A(P_n x - x) \quad (3.9.14)$$

eşitliği bulunur. Burada P_n ve $\frac{d}{dt}$ operatörlerinin komütatif operatörler olduklarını kullandık. A operatörünün sınırlı operatör olmasından dolayı ve (3.9.11) şartının sağlanmasından dolayı approksimasyon şartı sağlanır. Bunun için

$$P_n x(t) \to x(t) \qquad n \to \infty \qquad (3.9.15)$$

şartının sağlanması gerekir. Böylece, (3.9.4), (3.9.5) şartları sağlandığında ve (3.9.10) şartı sağlandığında üçüncü bölümdeki genel teoreme göre (3.9.8), (3.9.9) Galerkin şeması yakınsak olur.

Özel halde, X uzayı Hilbert uzayı olduğunda ve $\{\varphi_k\} = \{\gamma_k\}$ ortonormal tam sistem olduğunda bu şartlar doğrudan sağlanır.

Ama özel halde burada A özeşlenik tamamen sürekli operatör olduğunda X ise separabel Hilbert uzayı olduğunda, $\{\varphi_i\}$ sistemi olarak A operatörünün karakteristik vektörlerini alabiliriz. $P_n A P_n$ diagonal matrise dönüşür. Bu halde (3.9.4), (3.9.5) ve (3.9.7) deki $\xi_k(t)$, $k = 1,2,\ldots$katsayıları

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \lambda_k \xi_k + \eta_k(t) \tag{3.9.16}$$

$$\xi_k(0) = \xi_{k0}, \quad k = 1,2,\ldots n \tag{3.9.17}$$

Cauchy probleminin çözümü olur. Buradaki λ_k sayıları A operatörünün karakteristik değerleridir:

$$A\varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \; k = 1,2,\ldots \tag{3.9.18}$$

Bu hal için Galerkin metodu Fourier metoduna dönüşmüş olur [3,4].

SONUÇ

Bu çalışmada Banach uzaylarında operatör denklemlerin Galerkin metodunun uygulanması ile yaklaşık çözüm yöntemleri ele alınıp öğrenildi. Galerkin serileri tanımlandı Galerkin serilerinin uygulanması ile Galerin aproksimasyonunun yakınsaklığı gösterildi. En küçük kareler metodu Galerkin metodunun uugulanması ile ele alınıp incelendi. Galerkin metodunun varyasyon şekli gösterildi. Sonlu elemanlar metodu Galerkin şemasının uygulanması ile ele alındı.

Banach uzayında birinci mertebeden diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin yaklaşık çözümü Galerkin metodunun uygulanması ile bulundu. Bu problem Hilbert uzayında ele alındığında ve problemdeki operatör öz eşlenik olduğunda Galerkin serilerinin Fourier serilerine dönüştüğü gösterildi.

KAYNAKLAR

1. Trenogin V. A. Funksionalniy Analiz-M.: Nauka, Fizmatlit, 2002.
2. B. Musayev, Fonksiyonel Analiz, Kütahya, Kasım 2000.
3. Collatz Funktional Analysis und Numerische Matematik Berlin Springer-Verlag 1964.
4. Schechter M. Principles of Functional Analysis American Matematical Society 2001.
5. Cesari, Lamberto Cesari Functional Analysis and Galerkin's Method, The Micghigan Mathematical Journal 11(1964), no.4, 385-414.
6. Eberhard Zeidler Applied Functional Analysis, New York 1995.
7. Michlin, S.G., Variasionnie metodı v matematiçeskoy fizike, Gostexizdat 1957.
8. Mixlin S.G. Pryamıye Metodı v Matematiçeskoy Fiziki M. Nauka 1962.
9. Lei Y., Friswell M.I., Adhikaris, A Galerkin method for distributed systems with non-local damping International Journal of Solids and Structures 43(2006) 3381-3400.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Yozgat'ta doğan Yasemin Zararsız, ilköğrenimini Sakarya İlk Öğretim Okulunda, orta öğrenimini ise Yozgat Anadolu lisesinde ve yüksek öğrenimini de 2008-2012 yılları arasında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde tamamlamıştır. 2012-2013 yılları arasında North American College' da dil eğitimi almıştır. Eylül 2013 de ise Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstisüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans yapmaya başlamıştır. Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV danışmanlığında hazırladığı "Galerkin Metodu" başlıklı tezine devam etmektedir.

İletişim Bilgileri

Adres: Karatepe Mah. Yemencity G Blok Yozgat/ Merkez

Cep: 0545 349 98 22

E-posta: yaseminzararsiz@hotmail.com