

**T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Yüksek Lisans Tezi

**MINKOWSKI 3-UZAYINDA HELİKOİDAL YÜZEYLER
ÜZERİNDEKİ LOKSODROMLAR**

Mustafa KAYACIK

**Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Murat BABAARSLAN**

YOZGAT 2015

**T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Yüksek Lisans Tezi

**MINKOWSKI 3-UZAYINDA HELİKOİDAL YÜZEYLER
ÜZERİNDEKİ LOKSODROMLAR**

Mustafa KAYACIK

**Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Murat BABAARSLAN**

**Bu tez Bozok Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) birimi tarafından
2015FBE/T159 kodlu tez projesi olarak desteklenmiştir.**

YOZGAT 2015

TC
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 70111313007 numaralı öğrencisi Mustafa KAYACIK'ın hazırladığı “Minkowski 3-Uzayında Helikoidal Yüzeyle Üzerindeki Loksodromlar” başlıklı Doktora/Yüksek Lisans tezi ile ilgili Tez Savunma Sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 10/09/2015 Perşembe günü saat 13:00'te yapılmış, tezin onayına oy birliği / oy çokluğu ile karar verilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Üye : Yrd. Doç. Dr. Murat BABAARSLAN (Danışman)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun ...18/09/2015 tarih ve 26 sayılı kararı ile onaylanmıştır.



Doç. Dr. Fuat KÖKSAL

Müdür

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR	v
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
3. SPACE-LIKE MERİDYENLİ SPACE-LIKE HELİKOİDAL YÜZEY ÜZERİNDEKİ SPACE-LIKE LOKSODROMLAR	10
3.1. Space-like Meridyenli Space-like Eksenli Space-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Space-like Loksodromlar	10
3.2. Space-like Meridyenli Time-like Eksenli Space-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Space-like Loksodromlar	12
3.3. Space-like Meridyenli Light-like Eksenli Space-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Space-like Loksodromlar	14
4. SPACE-LIKE MERİDYENLİ TIME-LIKE HELİKOİDAL YÜZEY ÜZERİNDEKİ SPACE-LIKE LOKSODROMLAR.....	17
4.1. Space-like Meridyenli Space-like Eksenli Time-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Space-like Loksodromlar	17
4.2. Space-like Meridyenli Time-like Eksenli Time-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Space-like Loksodromlar	19
4.3. Space-like Meridyenli Light-like Eksenli Time-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Space-like Loksodromlar	21
5. TIME-LIKE MERİDYENLİ TIME-LIKE HELİKOİDAL YÜZEY ÜZERİNDEKİ SPACE-LIKE LOKSODROMLAR.....	24
5.1. Time-like Meridyenli Space-like Eksenli Time-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Space-like Loksodromlar	24
5.2. Time-like Meridyenli Time-like Eksenli Time-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Space-like Loksodromlar	26
5.3. Time-like Meridyenli Light-like Eksenli Time-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Space-like Loksodromlar	28

6. SPACE-LIKE MERİDYENLİ TIME-LIKE HELİKOİDAL YÜZEY ÜZERİNDEKİ TIME-LIKE LOKSODROMLAR.....	31
6.1. Space-like Meridyenli Space-like Eksenli Time-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Time-like Loksodromlar	31
6.2. Space-like Meridyenli Time-like Eksenli Time-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Time-like Loksodromlar	33
6.3. Space-like Meridyenli Light-like Eksenli Time-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Time-like Loksodromlar	35
7. TIME-LIKE MERİDYENLİ TIME-LIKE HELİKOİDAL YÜZEY ÜZERİNDEKİ TIME-LIKE LOKSODROMLAR.....	38
7.1. Time-like Meridyenli Space-like Eksenli Time-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Time-like Loksodromlar	38
7.2. Time-like Meridyenli Time-like Eksenli Time-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Time-like Loksodromlar	40
7.3. Time-like Meridyenli Light-like Eksenli Time-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Time-like Loksodromlar	42
SONUÇ.....	45
KAYNAKLAR.....	46
ÖZGEÇMİŞ.....	48

MINKOWSKI 3-UZAYINDA HELİKOİDAL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ LOKSODROMLAR

Mustafa KAYACIK

**Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

2015; Sayfa:48

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Murat BABAARSLAN

ÖZET

Bu çalışmanın birinci bölümünde loksodromun genel tanımı verildi ve loksodromun uygulama alanlarından bahsedildi. Ayrıca bu alanda yapılan çalışmaların literatür özeti verildi. İkinci bölümünde Minkowski 3-uzayında bazı temel tanım ve formüller verildi. Üçüncü dördüncü ve beşinci bölümlerde Minkowski 3-uzayında space-like veya time-like meridyenli helikoidal yüzeyler üzerindeki space-like loksodromların diferansiyel denklemleri bulundu. Buna ek olarak bazı örnekler gösterildi ve grafikleri Mathematica programı ile çizildi. Altı ve yedinci bölümlerde Minkowski 3-uzayında space-like veya time-like meridyenli helikoidal yüzeyler üzerindeki time-like loksodromların diferansiyel denklemleri bulundu. Ayrıca bazı örnekler verildi ve grafikleri Mathematica programı kullanılarak çizildi.

Anahtar Kelimeler : Loksodrom, Helikoidal yüzey, Minkowski 3-uzayı.

LOXODROMES ON HELICOIDAL SURFACES IN MINKOWSKI 3-SPACE

Mustafa KAYACIK

**Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis**

2015; Page: 48

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Murat BABAARSLAN

ABSTRACT

On the first part of this paper, the general definition of the loxodromes was given and the practice fields of the loxodromes were mentioned. Also the literature abstract of the studies carried on this field was given. On the second part, some fundamental definitions and formulas were given in Minkowski 3-space. On the third, fourth and fifth parts, differential equations of the space-like loxodromes on the helicoidal surfaces which have space-like or time-like meridians in Minkowski 3-space were found. In addition, some examples were shown and their graphics were drawn by Mathematica program. On the sixth and seventh parts of the paper, differential equations of the time-like loxodromes on the helicoidal surfaces which have space-like or time-like meridians in Minkowski 3-space were found. Also some examples were given and their graphics were drawn by Mathematica program.

Key words: Loxodrome, Helicoidal surface, Minkowski 3-space.

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım boyunca bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocam Yrd. Doç. Dr. Murat BABAARSLAN'a teşekkür eder saygılarımı sunarım.

2015FBE/T159 kodlu proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Bozok Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine teşekkür ederim.

Ayrıca, bu çalışmanın oluőma sürecinde maddi manevi desteğini benden esirgemeyen sevgili eőime ve beni bu günlere getiren aileme teőekkürü bir borç bilirim.

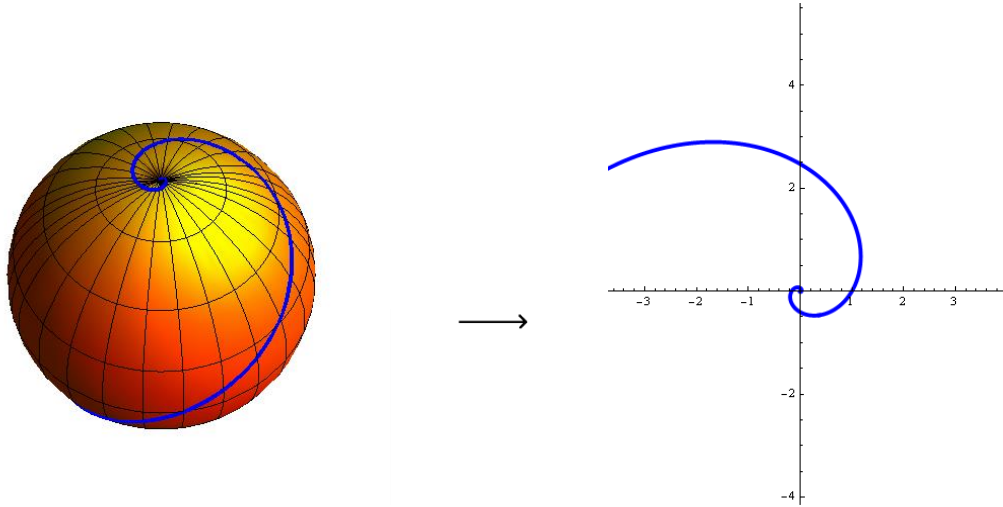
ŞEKİLLER LİSTESİ

		<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1.	Loksodromun stereografik izdüşümü.....	1
Şekil 1.2.	Loksodromun Merkatör izdüşümü.....	2
Şekil 3.1.	Space-like dönme eksenli space-like helikoidal yüzey, Space-like loksodrom, Space-like meridyen eğrisi.....	12
Şekil 3.2.	Time-like dönme eksenli space-like helikoidal yüzey, Space-like loksodrom, Space-like meridyen eğrisi.....	14
Şekil 3.3.	Light-like dönme eksenli space-like helikoidal yüzey, Space-like loksodrom, Space-like meridyen eğrisi.....	16
Şekil 4.1.	Space-like dönme eksenli time-like helikoidal yüzey, Space-like loksodrom, Space-like meridyen eğrisi.....	19
Şekil 4.2.	Time-like dönme eksenli time-like helikoidal yüzey, Space-like loksodrom, Space-like meridyen eğrisi.....	21
Şekil 4.3.	Light-like dönme eksenli time-like helikoidal yüzey, Space-like loksodrom, Space-like meridyen eğrisi.....	23
Şekil 5.1.	Space-like dönme eksenli time-like helikoidal yüzey, Space-like loksodrom, Time-like meridyen eğrisi.....	26
Şekil 5.2.	Time-like dönme eksenli time-like helikoidal yüzey, Space-like loksodrom, Time-like meridyen eğrisi.....	28
Şekil 5.3.	Light-like dönme eksenli time-like helikoidal yüzey, Space-like loksodrom, Time-like meridyen eğrisi.....	30
Şekil 6.1.	Space-like dönme eksenli time-like Helikoidal yüzey, Time-like loksodrom, Space-like meridyen eğrisi.....	33
Şekil 6.2.	Time-like dönme eksenli time-like Helikoidal yüzey, Time-like loksodrom, Space-like meridyen eğrisi.....	35
Şekil 6.3.	Light-like dönme eksenli time-like Helikoidal yüzey, Time-like loksodrom, Space-like meridyen eğrisi.....	37
Şekil 7.1.	Space-like dönme eksenli time-like Helikoidal yüzey, Time-like loksodrom, Time-like meridyen eğrisi.....	40
Şekil 7.2.	Time-like dönme eksenli time-like Helikoidal yüzey, Time-like loksodrom, Time-like meridyen eğrisi.....	42

Şekil 7.3.	Light-like dönme eksenli time-like Helikoidal yüzey, Time-like loksodrom, Time-like meridyen eğrisi.....	44
-------------------	--	-----------

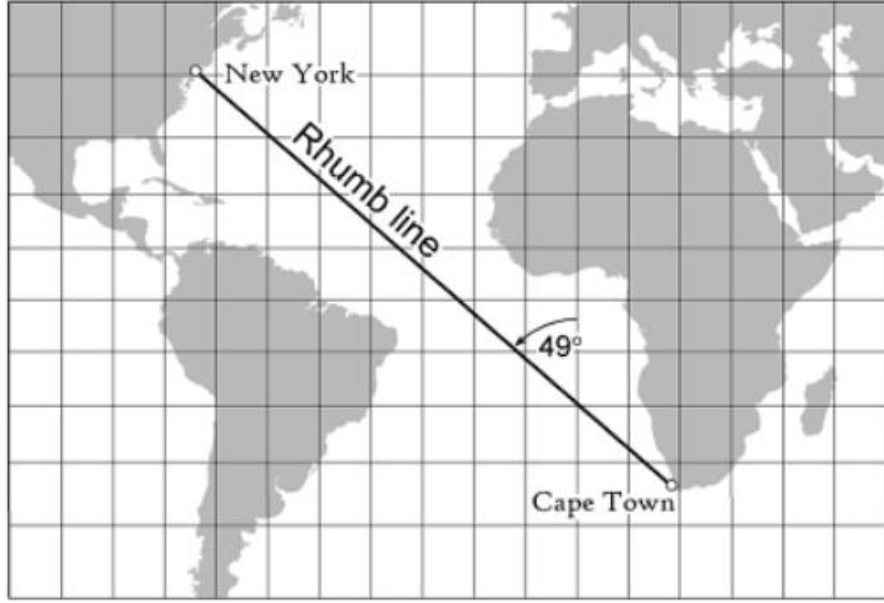
1. GİRİŞ

Loksodromlar, Dünya üzerindeki bütün meridyenleri sabit açı ile kesen eğrilere karşılık gelir. Genel olarak loksodromlar büyük çember yayları değildirler. Bu yüzden loksodromlar Dünya üzerindeki iki nokta arasındaki en kısa uzaklığı vermezler. Fakat loksodromlar navigasyon için çok önemlidir. Bu yüzden uçak pilotları ve gemi kaptanları tarafından bilinmelidir [1]. 3-boyutlu Öklid uzayında dönel yüzeyler üzerindeki loksodromların diferansiyel denklemi 1905 yılında Noble tarafından bulunmuştur. Ayrıca küre üzerindeki loksodromların stereografik ve Merkator izdüşümü kullanılarak sırasıyla logaritmik spirallere ve doğrulara karşılık geldiği gösterilmiştir [16]. Küre üzerindeki loksodromların stereografik izdüşümü logaritmik spirallere karşılık gelir (Şekil 1.1).



Şekil 1.1. Loksodromun stereografik izdüşümü [5].

Ayrıca loksodromların Merkator izdüşümü de doğrulara karşılık gelir. Örneğin; Cape Town' dan bir gemi vasıtasıyla kuzey batıya doğru 49 derecelik açıyla sabit bir doğrultuda gidilirse New York'a ulaşılır (Şekil 1.2) [14].



Şekil 1.2. Loksodromun Merkator izdüşümü [14].

Küre üzerindeki loksodromların uzunluğu Kos, Vranic ve Zec tarafından hesaplanmıştır [10]. Ayrıca elipsoid üzerindeki loksodromların uzunluğu Petrovic tarafından bulunmuştur [17].

Dünyanın şekli yaklaşık olarak dönele yüzey örnekleri olan küre veya elipsoid olarak düşünülebilir. Bu nedenle loksodromlar bu yüzeyler üzerinde çalışılmıştır. Dönele yüzeylerin doğal bir genellemesi helikoidal yüzeylerdir. Ayrıca doğada, bilimde ve mühendislikte navigasyonla bağlantılı olan helikoidal yapılara ve nesnelere sıklıkla karşılaşılır. Örneğin; sarmaşık bitkileri, helikoidal merdivenler, helikoidal konveyörler, otopark rampaları, helikoidal tren yolları, yürüyen merdivenler, yürüyüş yolları [5], helikoidal gökdelenler [6], jeolojideki helikoidal kırıklar [18], tropik kasırgalar [12], helikoidal yüzey üzerindeki elektronik durumlar [7] ve helikal kanallar [15].

3-boyutlu Öklid uzayı ile karşılaştırıldığında 3-boyutlu Minkowski uzayında daha karışık ve zengin geometrik yapılar vardır [11]. Metriklerindeki farklılıktan dolayı 3-boyutlu Minkowski uzayında vektörler, açılar ve parçacıkların hareketleri değişir [8].

Babaarslan ve Munteanu, Minkowski 3-uzayında meridyenleri sırasıyla time-like ve space-like olan dönel yüzeyler üzerindeki time-like loksodromların diferansiyel denklemlerini oluşturmuşlardır [3].

Ayrıca Babaarslan ve Yaylı, Minkowski 3-uzayında meridyenleri sırasıyla space-like ve time-like olan dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromların diferansiyel denklemlerini bulmuşlardır [4].

Minkowski 3-uzayında bir Lorentz vida hareketi sabit bir eksen etrafındaki Lorentz dönmesi ve bir öteleme ile tanımlanabilir [8].

Minkowski 3-uzayında eksenin space-like, time-like ve light-like olmasına göre üç farklı vida hareketi vardır [9]. Bu Lorentz vida hareketleri altındaki helikoidal yüzeyler birçok yazar tarafından çalışılmıştır ([2], [8] ve [9]).

Bu tezde Minkowski 3-uzayında meridyenleri space-like ya da time-like olan helikoidal yüzeyler üzerindeki loksodromların diferansiyel denklemleri araştırılacak ve bazı örnekler verilecektir. Ayrıca Mathematica programı kullanılarak örneklerin grafikleri çizilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Minkowski 3-uzayında bazı temel tanımlar ve formüller verilecektir. Ayrıca farklı tipteki helikoidal yüzeyler ve onların önemli geometrik yapıları tekrar verilecektir.

E_1^3 , x_1, x_2, x_3 lineer koordinatları ile Minkowski 3-uzayı olsun ve

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 \quad (1)$$

Lorentz metriği ile verilsin. Bu metrik indeksi 1 olan non-dejenere metriktir.

Tanım 2.1. \langle, \rangle , Lorentz metriğinden indirgenmiş skaler çarpımı göstermek üzere, E_1^3 deki herhangi bir u vektörünün koszul karakteri aşağıdaki gibidir;

- i. Eğer $\langle u, u \rangle > 0$ veya $u = 0$ ise u space-like (uzay benzeri) vektör,
- ii. Eğer $\langle u, u \rangle < 0$ ise u time-like (zaman benzeri) vektör,
- iii. Eğer $\langle u, u \rangle = 0$ ve $u \neq 0$ ise u light-like (ışık benzeri) vektördür [13].

Tanım 2.2. E_1^3 de bütün time-like vektörlerin oluşturduğu kümeye time-koni denir ve

$$T = \{(x, y, z) \in E_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0\} \quad (2)$$

ile verilir [13].

Tanım 2.3. $u \in E_1^3$ olmak üzere, u vektörünün normu (uzunluğu)

$$\|u\| = \sqrt{|\langle u, u \rangle|} \quad (3)$$

şeklindedir. $\|u\| = 1$ ise u ya birim vektör denir [13].

Tanım 2.4. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ regüler bir eğri olsun (yani $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$ için $\alpha'(t) \neq 0$ dır).

i. Eğer $\alpha'(t)$ hız vektörü space-like ise $\alpha(t)$ eğrisi space-like,

ii. Eğer $\alpha'(t)$ hız vektörü time-like ise $\alpha(t)$ eğrisi time-like,

iii. Eğer $\alpha'(t)$ hız vektörü light-like ise $\alpha(t)$ eğrisi light-like dır [13].

Tanım 2.5. E_1^3 de $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ iki vektör olsun. Bu iki vektörün vektörel çarpımı

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (4)$$

formülüyle bulunur [13].

Bir $S \subset E_1^3$ yüzeyinin teğet düzlemi üzerindeki indirgenmiş metrik non-dejenere ise S ye non-dejenere yüzey denir. Eğer indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise S yüzeyi space-like dır. Ayrıca indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise S yüzeyi time-like dır. Yani, S yüzeyinin N normali space-like ise yüzey time-like, N normali time-like ise yüzey space-like dır [13]. Böylece aşağıdaki tanım verilebilir:

Tanım 2.6. $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow P$ regüler bir eğri, $P \subset E_1^3$ bir düzlem ve l de P düzleminde bir doğru olsun. E_1^3 de H helikoidal yüzeyi, l eksenini sabit bırakan $g_t: E_1^3 \rightarrow E_1^3$ Lorentz vida hareketleriyle elde edilen non-dejenere yüzey olarak tanımlanır [2].

E_1^3 de l -eksenli H helikoidal yüzeyi, Lorentz vida hareketlerinin bir parametrelili alt grubu altında değişmezdir. Böylece E_1^3 de üç tip helikoidal yüzey denklemi vardır. Eğer sırasıyla l -ekseni space-like veya time-like ise l -eksenini sırasıyla x_1 -eksenine

ve x_3 -eksenine dönüştüren bir Lorentz dönüşümü vardır. Ayrıca eğer l -ekseni light-like ise bu eksen (x_2, x_3) -düzleminin açkırtay doğruşu olarak alınabilir [2]. Eğer l -ekseni space-like ise l -eksenini sabit bırakan Lorentz grubunun alt grubu aşığıdaki dönme matrisi ile verilir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh v & \sinh v \\ 0 & \sinh v & \cosh v \end{bmatrix}, v \in R. \quad (5)$$

Eğer l -ekseni time-like ise l -eksenini sabit bırakan Lorentz grubunun alt grubu aşığıdaki dönme matrisi ile verilir:

$$\begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 0 \leq v \leq 2\pi. \quad (6)$$

Eğer l -ekseni light-like ise l -eksenini sabit bırakan Lorentz grubunun alt grubu aşığıdaki dönme matrisi ile verilir:

$$\begin{bmatrix} 1 & v & -v \\ -v & 1 - \frac{v^2}{2} & \frac{v^2}{2} \\ -v & -\frac{v^2}{2} & 1 + \frac{v^2}{2} \end{bmatrix}, v \in R \quad (7)$$

[13].

H helikoidal yüzeyi non-degenerate olduğundan P düzlemini space-like veya time-like olarak düşünmek yeterlidir. Fakat çalışmamızda bu düzlemlerde yatan profil eğrileri space-like veya time-like olabilir. Bu yüzden biz yalnızca P nin time-like olmasını düşüneceğiz. Böylece P düzlemi (x_1, x_3) -düzlemi veya (x_2, x_3) -düzlemi olarak alınabilir.

$\beta = \beta(u) = (f(u), 0, g(u))$, $u \in I \subset \mathbb{R}$ profil eğrisi ve (5) matrisi kullanılarak aşağıdaki helikoidal yüzeyi elde edilir:

$$H(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh v & \sinh v \\ 0 & \sinh v & \cosh v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(u) \\ 0 \\ g(u) \end{bmatrix} + \lambda v \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

veya

$$H(u, v) = (f(u) + \lambda v, g(u) \sinh v, g(u) \cosh v), \quad (8)$$

burada $g(u) \neq 0$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^+$ dir.

$\beta = \beta(u) = (0, f(u), g(u))$, $u \in I \subset \mathbb{R}$ profil eğrisi ve (6) matrisini kullanarak aşağıdaki helikoidal yüzeyi elde edilir:

$$H(u, v) = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f(u) \\ g(u) \end{bmatrix} + \lambda v \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

veya

$$H(u, v) = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, g(u) + \lambda v), \quad (9)$$

burada $f(u) \neq 0$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^+$ dir.

Ayrıca $\beta = \beta(u) = (0, f(u), g(u))$, $f(u) \neq g(u)$, $u \in I \subset \mathbb{R}$ profil eğrisi ve (7) matrisini kullanarak aşağıdaki helikoidal yüzeyi elde edilir:

$$H(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & v & -v \\ -v & 1 - \frac{v^2}{2} & \frac{v^2}{2} \\ -v & -\frac{v^2}{2} & 1 + \frac{v^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f(u) \\ g(u) \end{bmatrix} + \lambda v \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya

$$H(u, v) = \left((f(u) - g(u))v, f(u)\left(1 - \frac{v^2}{2}\right) + g(u)\frac{v^2}{2} + \lambda v, g(u)\left(1 + \frac{v^2}{2}\right) - f(u)\frac{v^2}{2} + \lambda v \right), \quad (10)$$

burada $\lambda \in \mathbb{R}^+$ dır.

$\lambda = 0$ alındığında (8), (9) ve (10) deklemleri E_1^3 deki dönel yüzeylere karşılık gelir [2].

Tanım 2.7. H helikoidal yüzeyi

$$H : U \subset E^2 \rightarrow E_1^3; H(u, v) = (H_1(u, v), H_2(u, v), H_3(u, v)) \quad (11)$$

şeklinde tanımlansın ve H yüzeyinin birim normali N olsun. Bu durumda

$$N = \frac{H_u \times H_v}{\|H_u \times H_v\|} \quad (12)$$

dir. Burada $H_u = \frac{\partial H}{\partial u}$ ve $H_v = \frac{\partial H}{\partial v}$ dir [20].

Tanım 2.8. H helikoidal yüzeyinin her noktasındaki teğet düzleminin bir bazı $\{H_u, H_v\}$ olsun. Bu durumda H helikoidal yüzeyinin birinci temel formu

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (13)$$

dir, burada birinci temel formun katsayıları $E = \langle H_u, H_u \rangle$, $F = \langle H_u, H_v \rangle$ ve $G = \langle H_v, H_v \rangle$ şeklindedir. Ayrıca;

i. Eğer $\det(I) = EG - F^2 > 0$ ise H helikoidal yüzeyi space-like,

ii. Eğer $\det(I) = EG - F^2 < 0$ ise H helikoidal yüzeyi time-like olur [13].

H helikoidal yüzeyinin üzerindeki light-like olmayan bir eğrinin u_1 ile u_2 aralığındaki yay-uzunluğu

$$s = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{E + 2F \frac{dv}{du} + G \left(\frac{dv}{du} \right)^2} du \quad (14)$$

ile verilir.

3. SPACE-LIKE MERİDYENLİ SPACE-LIKE HELİKOİDAL YÜZEY ÜZERİNDEKİ SPACE-LIKE LOKSODROMLAR

Bu bölümde, sırasıyla space-like, time-like ve light-like dönme eksenlerine sahip space-like helikoidal yüzeyler üzerindeki space-like meridyenlerle sabit açı yapan space-like loksodromların diferansiyel denklemleri oluşturulacaktır. Ayrıca bazı örnekler verilecektir.

Tanım 3.1. E_1^3 de, u ve v space-like vektörleri bir space-like düzlemi geriyor olsun. Bu durumda

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \psi \quad (15)$$

olacak şekilde bir tek $\psi \in \text{Ri}(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ reel sayısı vardır. Burada ψ ye u ile v arasındaki Lorentz space-like açı denir [19].

Tanım 3.2. E_1^3 de, space-like meridyenli time-like helikoidal yüzey üzerindeki space-like meridyenleri sabit ψ Lorentz space-like açısıyla kesen space-like eğriye loksodrom denir.

3.1. Space-like Meridyenli Space-like Eksenli Space-like Helikodal Yüzey Üzerindeki Space-like Loksodromlar

(8) deki helikoidal yüzeyi düşünelim ve ayrıca $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $f'^2(u) - g'^2(u) = 1$ olduğunu varsayalım. Yani $\beta = \beta(u)$ profil eğrisi yay-parametresiyle parametrelendirilsin. Böylece meridyen eğrisi ($v = \text{sabit}$)

$$H(u) = (f(u) + \lambda v, g(u) \sinh v, g(u) \cosh v) \quad (16)$$

şeklindedir. Bu ifadenin u ya göre türevi alınırsa:

$$H_u(u) = (f'(u), g'(u) \sinh v, g'(u) \cosh v) \quad (17)$$

elde edilir. $H(u)$ meridyen eğrisi ile $\beta(u)$ profil eğrisi aynı koszul karaktere sahiptir. Çünkü $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $\langle H_u(u), H_u(u) \rangle = f'^2(u) - g'^2(u) = 1$ dir.

H helikoidal yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları aşağıdaki eşitliklerdeki gibidir:

$$E = \langle H_u, H_u \rangle = 1, \quad F = \langle H_u, H_v \rangle = \lambda f'(u) \quad \text{ve} \quad G = \langle H_v, H_v \rangle = g^2(u) + \lambda^2. \quad (18)$$

Bu eşitlikler (13) de yerine yazılırsa H helikoidal yüzeyinin birinci temel formu

$$ds^2 = du^2 + 2\lambda f'(u)dudv + (g^2(u) + \lambda^2)dv^2 \quad (19)$$

şeklindedir.

H helikoidal yüzeyinin space-like olması için gerek ve yeter şart $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $EG - F^2 = g^2(u) - \lambda^2 f'^2(u) > 0$ olmasıdır.

$\alpha(t)$ space-like loksodrom eğrisinin, (uv) -düzlemindeki $(u(t), v(t))$ eğrisinin H altındaki görüntüsü olduğunu varsayalım. Space-like loksodromun space-like meridyeni sabit ψ Lorentz space-like açıyla kestiği $H(u, v)$ noktasında

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \frac{\langle \alpha'(t), H_u \rangle}{\|\alpha'(t)\| \|H_u\|} = \frac{Edu + Fdv}{\sqrt{E^2 du^2 + 2EFdudv + EGdv^2}} \\ &= \frac{du + \lambda f'(u)dv}{\sqrt{du^2 + 2\lambda f'(u)dudv + (g^2(u) + \lambda^2)dv^2}}. \end{aligned} \quad (20)$$

eşitliği vardır. Burada $\{H_u, H_v\}$ bazına göre $\alpha'(t)$ tanjant vektörü (u', v') koordinatlarına ve H_u tanjant vektöründe $(1, 0)$ koordinatlarına sahiptir.

Bu denklem düzenlenirse space-like meridyenli space-like eksenli space-like helikoidal yüzey üzerindeki space-like loksodromların diferansiyel denklemi

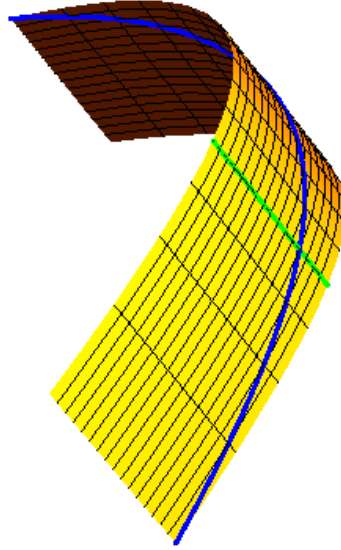
$$\left(\cos^2 \psi (g^2(u) + \lambda^2) - \lambda^2 f'^2(u) \right) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 - 2\lambda \sin^2 \psi f'(u) \frac{dv}{du} = \sin^2 \psi \quad (21)$$

dir. Böylece space-like loksodromun diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$v = \int_{u_0}^u \frac{2\lambda \sin^2 \psi f'(u) + \varepsilon \sqrt{\sin^2 2\psi (g^2(u) - \lambda^2 f'^2(u) + \lambda^2)}}{2 \cos^2 \psi (g^2(u) + \lambda^2) - 2\lambda^2 f'^2(u)} du, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (22)$$

şeklindedir.

Örnek 3.1. $f(u) = u$, $g(u) = 2$, $\lambda = 1$, $\psi = \pi/4$, $\varepsilon = 1$, $u \in (-2, 2)$ ve $u_0 = 0$ alınırsa $v \in (-2, 2)$ elde edilir. Space-like loksodromun yay uzunluğu $8\sqrt{2}$ olarak bulunur. Helikoidal yüzey $H(u, v)$ nin, meridyen eğrisinin ($v = 0$) ve space-like loksodrom $H(u, v(u))$ nun grafikleri aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.1. Space-like dönme eksenli space-like helikoidal yüzey, space-like loksodrom (mavi), space-like meridyen eğrisi (yeşil)

3.2. Space-like Meridyenli Time-like Eksenli Space-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Space-like Loksodromlar

(9) daki helikoidal yüzeyi düşünelim. Böylece meridyen eğrisini ($v = \text{sabit}$)

$$H(u) = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, g(u) + \lambda v) \quad (23)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitliğin u ya göre türevi

$$H_u(u) = (-f'(u) \sin v, f'(u) \cos v, g'(u)) \quad (24)$$

dır.

$H(u)$ meridyen eğrisi space-like olduğundan $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $f'^2(u) - g'^2(u) = 1$ dir.

H helikoidal yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$E = \langle H_u, H_u \rangle = 1, \quad F = \langle H_u, H_v \rangle = -\lambda g'(u) \quad \text{ve} \quad G = \langle H_v, H_v \rangle = f^2(u) - \lambda^2 \quad (25)$$

dir. Bu eşitlikler (13) de yerine yazılırsa H helikoidal yüzeyinin birinci temel formu aşağıdaki gibi yazılır:

$$ds^2 = du^2 - 2\lambda g'(u) du dv + (f^2(u) - \lambda^2) dv^2 \quad (26)$$

H yüzeyinin space-like olması için gerek ve yeter şart $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $EG - F^2 = f^2(u) - \lambda^2 f'^2(u) > 0$ olmasıdır.

Space-like loksodrom eğrisi ile space-like meridyen eğrisi arasındaki sabit ψ Lorentz space-like açısı onların $H(u, v)$ noktasındaki tanjant vektörleri arasındaki açı ile tanımlanır ve aşağıdaki eşitlikle verilir:

$$\cos \psi = \frac{du - \lambda g'(u) dv}{\sqrt{du^2 - 2\lambda g'(u) du dv + (f^2(u) - \lambda^2) dv^2}}. \quad (27)$$

(27) eşitliği düzenlenirse space-like loksodromun diferansiyel denklemi

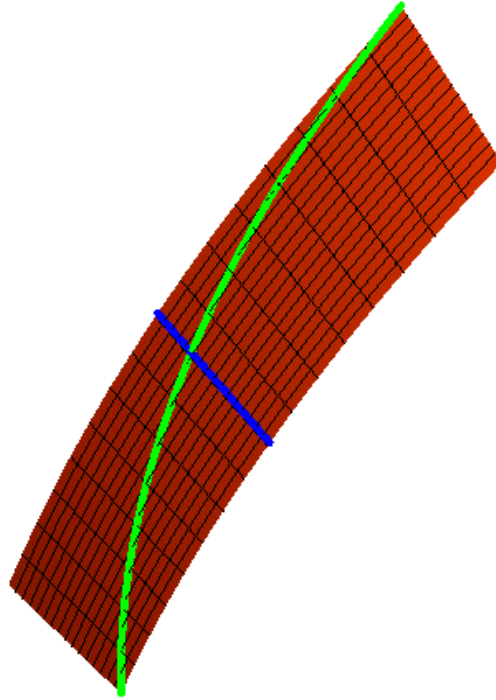
$$\left(\cos^2 \psi (f^2(u) - \lambda^2) - \lambda^2 g'^2(u) \right) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + 2\lambda \sin^2 \psi g'(u) \frac{dv}{du} = \sin^2 \psi \quad (28)$$

şeklindedir. Böylece (28) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$v = \int_{u_0}^u \frac{2\lambda \sin^2 \psi g'(u) + \varepsilon \sqrt{\sin^2 2\psi (f^2(u) + \lambda^2 g'^2(u) - \lambda^2)}}{-2 \cos^2 \psi (f^2(u) - \lambda^2) + 2\lambda^2 g'^2(u)} du, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (29)$$

dir.

Örnek 3.2. $f(u) = 2u$, $g(u) = \sqrt{3}u$, $\lambda = 2$, $\psi = \pi/6$, $\varepsilon = 1$, $u \in (2.05, 2.2)$ ve $u_0 = 0$ alınırsa $v \in (-0.604841, 0.990717)$ elde edilir. Space-like loksodromun yay uzunluğu 1.32681 dir. Helikoidal yüzey $H(u, v)$ nin, meridyen eğrisinin ($v = 0.8$) ve space-like loksodrom $H(u, v(u))$ nun grafikleri aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.2. Time-like dönme eksenli space-like helikoidal yüzey, space-like loksodrom (mavi), space-like meridyen eğrisi (yeşil)

3.3. Space-like Meridyenli Light-like Eksenli Space-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Space-like Loksodromlar

(10) daki helikoidal yüzeyi düşünelim. Böylece meridyen eğrisi ($v = \text{sabit}$)

$$H(u) = \left(v(f(u) - g(u)), (1 - \frac{v^2}{2})f(u) + \frac{v^2}{2}g(u) + \lambda v, -\frac{v^2}{2}f(u) + (1 + \frac{v^2}{2})g(u) + \lambda v \right) \quad (30)$$

şeklindedir. Bu ifadenin u ya göre türevi

$$H_u(u) = \left(vf'(u) - vg'(u), \left(1 - \frac{v^2}{2}\right)f'(u) + \frac{v^2}{2}g'(u), -\frac{v^2}{2}f'(u) + \left(1 + \frac{v^2}{2}\right)g'(u) \right) \quad (31)$$

dir. $H(u)$ meridyen eğrisi space-like olduğundan $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $f'^2(u) - g'^2(u) = 1$ dir.

H helikoidal yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$E = 1, \quad F = \lambda(f'(u) - g'(u)) \quad \text{ve} \quad G = (f(u) - g(u))^2 \quad (32)$$

dir. Böylece (32) eşitlikleri (13) de yerine yazılırsa H helikoidal yüzeyinin birinci temel formu

$$ds^2 = du^2 + 2\lambda(f'(u) - g'(u))dudv + (f(u) - g(u))^2 dv^2 \quad (33)$$

dir.

$H(u, v)$ yüzeyinin space-like olması için gerek ve yeter şart $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $EG - F^2 = (f(u) - g(u))^2 - \lambda^2(f'(u) - g'(u))^2 > 0$ olmasıdır.

Daha öncede belirtildiği gibi H helikoidal yüzeyinin her $H(u, v)$ noktasında space-like loksodrom eğrisi ile space-like meridyen eğrisi arasındaki sabit ψ Lorentz space-like açısı aşağıdaki formül ile bulunur:

$$\cos \psi = \frac{du + \lambda(f'(u) - g'(u))dv}{\sqrt{du^2 + 2\lambda(f'(u) - g'(u))dudv + (f(u) - g(u))^2 dv^2}}. \quad (34)$$

Bu denklem düzenlenirse

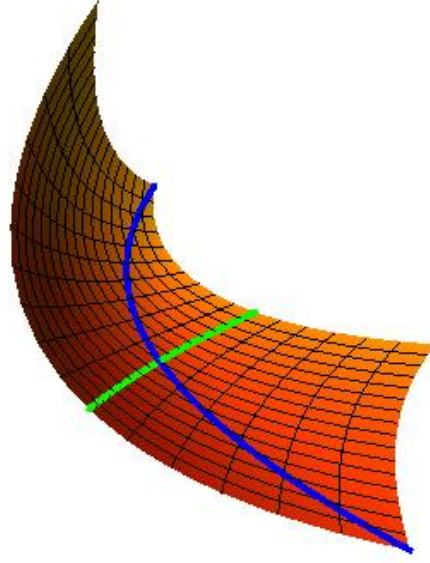
$$\begin{aligned} & \left(\cos^2 \psi (f(u) - g(u))^2 - \lambda^2 (f'(u) - g'(u))^2 \right) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \\ & - 2\lambda \sin^2 \psi (f'(u) - g'(u)) \frac{dv}{du} = \sin^2 \psi \end{aligned} \quad (35)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$v = \int_{u_0}^u \frac{2\lambda \sin^2 \psi (f'(u) - g'(u)) + \varepsilon \sqrt{\sin^2 2\psi ((f(u) - g(u))^2 - \lambda^2 (f'(u) - g'(u))^2)}}{2 \cos^2 \psi (f(u) - g(u))^2 - 2\lambda^2 (f'(u) - g'(u))^2} du, \varepsilon = \pm 1 \quad (36)$$

dir.

Örnek 3.3. $f(u) = \sinh u$, $g(u) = \cosh u$, $\lambda = 0.5$, $\psi = \pi/2$, $\varepsilon = -1$, $u \in (-0.5, 0.5)$ ve $u_0 = 0$ alınırsa $v \in (-1.2944, 0.786939)$ elde edilir. Space-like loksodromun yay uzunluğu $\sqrt{3}$ dür. Helikoidal yüzey $H(u, v)$ nin, meridyen eğrisinin ($v=0$) ve space-like loksodrom $H(u, v(u))$ nun grafikleri aşağıda verilmiştir:



Şekil 3.3. Light-like dönme eksenli space-like helikoidal yüzey, space-like loksodrom (mavi), space-like meridyen eğrisi (yeşil)

Yorum 3.1. (22), (29) ve (36) eşitliklerinde $\lambda = 0$ alınırsa E_1^3 deki space-like meridyenli space-like helikoidal yüzeyler üzerindeki space-like loksodromların diferansiyel denklemleri E_1^3 deki space-like meridyenli space-like dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromların diferansiyel denklemleri ile çakışır.

4. SPACE-LIKE MERİDYENLİ TIME-LIKE HELİKOİDAL YÜZEY ÜZERİNDEKİ SPACE-LIKE LOKSODROMLAR

Bu bölümde sırasıyla space-like, time-like ve light-like dönme eksenlerine göre time-like helikoidal yüzeyler üzerindeki space-like meridyenlerle sabit açı yapan space-like loksodromların diferansiyel denklemleri bulunacaktır. Ayrıca bazı örnekler verilecektir.

Tanım 4.1. E_1^3 de u ve v space-like vektörleri bir time-like düzlemi geriyor olsun. Bu durumda

$$|\langle u, v \rangle| = \|u\| \|v\| \cosh \eta \quad (37)$$

olacak şekilde bir tek $\eta > 0$ reel sayısı vardır. Burada η ya u ile v arasındaki Lorentz time-like açı denir [19].

Tanım 4.2. Space-like meridyenli time-like helikoidal yüzey üzerindeki space-like meridyenleri sabit η Lorentz time-like açısıyla kesen space-like eğriye loksodrom denir.

4.1. Space-like Meridyenli Space-like Eksenli Time-like Helikodal Yüzey Üzerindeki Space-like Loksodromlar

(8) deki helikoidal yüzeyi düşünelim. $\beta(u)$ profil eğrisi birim hızlı olduğundan $f'^2(u) - g'^2(u) = 1$ dir. Meridyen eğrisini ($v = \text{sabit}$)

$$H(u) = (f(u) + \lambda v, g(u) \sinh v, g(u) \cosh v) \quad (38)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifadenin u ya göre türevi

$$H_u(u) = (f'(u), g'(u) \sinh v, g'(u) \cosh v) \quad (39)$$

dır. $H(u)$ meridyen eğrisi ile $\beta(u)$ profil eğrisi aynı koszul karaktere sahiptir. Çünkü $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $f'^2(u) - g'^2(u) = 1$ dir.

H helikoidal yüzeyinin birinci temel formun katsayıları

$$E = 1, \quad F = \lambda f'(u) \quad \text{ve} \quad G = g^2(u) + \lambda^2 \quad (40)$$

dir. Böylece (40) eşitlikleri (13) de yer azılırsa H helikoidal yüzeyinin birinci temel formu

$$ds^2 = du^2 + 2\lambda f'(u) du dv + (g^2(u) + \lambda^2) dv^2 \quad (41)$$

ile verilir.

H helikoidal yüzeyinin time-like olması için gerek ve yeter şart $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $EG - F^2 = g^2(u) - \lambda^2 f'^2(u) < 0$ olmasıdır.

Space-like loksodromun space-like meridyeni kestiği $H(u, v)$ noktasında tanjant vektörler arasındaki sabit η Lorentz time-like açısı

$$\varepsilon \cosh \eta = \frac{du + \lambda f'(u) dv}{\sqrt{du^2 + 2\lambda f'(u) du dv + (g^2(u) + \lambda^2) dv^2}}, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (42)$$

eşitliği ile verilir. Bu denklemden space-like meridyenli space-like eksenli time-like helikodal yüzey üzerindeki space-like loksodromların diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left(-\cosh^2 \eta (g^2(u) + \lambda^2) + \lambda^2 f'^2(u) \right) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 - 2\lambda f'(u) \sinh^2 \eta \frac{dv}{du} = \sinh^2 \eta. \quad (43)$$

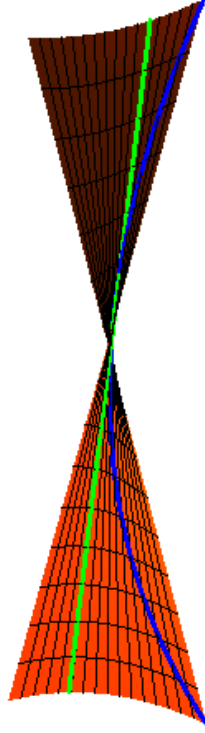
Bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$v = \int_{u_0}^u \frac{-2\lambda f'(u) \sinh^2 \eta + \varepsilon \sqrt{\sinh^2 2\eta (\lambda^2 f'^2(u) + g^2(u) + \lambda^2)}}{2 \cosh^2 \eta (g^2(u) + \lambda^2) + 2\lambda^2 f'^2(u)} du, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (44)$$

dir.

Örnek 4.1. $f(u) = 3u$, $g(u) = 2\sqrt{2}u$, $\lambda = 1$, $\eta = \pi/4$, $\varepsilon = 1$, $u \in (-0.5, 0.25)$ ve $u_0 = 0$ alınırsa $v \in (-0.455781, 0.197374)$ elde edilir. Space-like loksodromun yay

uzunluğu 2.04566 dır. Helikoidal yüzey $H(u, v)$ nin, meridyen eğrisinin ($v = 0$) ve space-like loksodrom $H(u, v(u))$ nun grafikleri Şekil 4.1 deki gibidir:



Şekil 4.1. Space-like dönme eksenli time-like helikoidal yüzey, space-like loksodrom (mavi), space-like meridyen eğrisi (yeşil)

4.2. Space-like Meridyenli Time-like Eksenli Time-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Space-like Loksodromlar

(9) daki helikoidal yüzeyi düşünelim. Bundan dolayı meridyen eğrisini ($v = \text{sabit}$)

$$H(u) = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, g(u) + \lambda v) \quad (45)$$

şeklinde yazabiliriz. $H(u)$ meridyen eğrisinin u ya göre türevi

$$H_u(u) = (-f'(u) \sin v, f'(u) \cos v, g'(u)) \quad (46)$$

şeklindedir. $H(u)$ meridyen eğrisi space-like olduğundan $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $f'^2(u) - g'^2(u) = 1$ dir.

H helikoidal yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları aşağıdaki gibidir:

$$E = 1, F = -\lambda g'(u) \text{ ve } G = f^2(u) - \lambda^2 \quad (47)$$

(47) eşitlikleri (13) de yerine yazılırsa H helikoidal yüzeyinin birinci temel formu

$$ds^2 = du^2 - 2\lambda g'(u)dudv + (f^2(u) - \lambda^2)dv^2 \quad (48)$$

şeklindedir.

H helikoidal yüzeyinin time-like olması için gerek ve yeter şart $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $EG - F^2 = f^2(u) - \lambda^2 f'^2(u) < 0$ olmasıdır.

Space-like loksodrom eğrisi ile space-like meridyen eğrisi arasındaki sabit η Lorentz time-like açısı onların tanjant vektörleri arasındaki açı yardımıyla tanımlanır ve aşağıdaki formül ile bulunur.

$$\varepsilon \cosh \eta = \frac{du - \lambda g'(u)dv}{\sqrt{du^2 - 2\lambda g'(u)dudv + (f^2(u) - \lambda^2)dv^2}}. \quad (49)$$

Bu eşitlikten space-like loksodromun diferansiyel denklemi

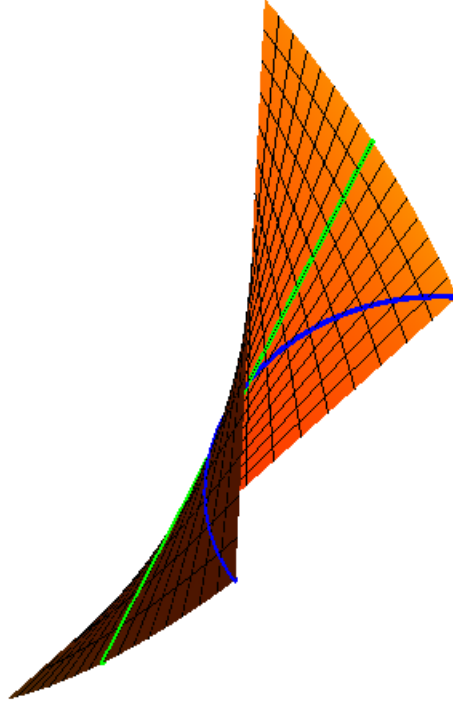
$$\left(-\cosh^2 \eta (f^2(u) - \lambda^2) + \lambda^2 g'^2(u)\right) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2\lambda g'(u) \sinh^2 \eta \frac{dv}{du} = \sinh^2 \eta \quad (50)$$

dir. Buradan genel çözüm

$$v = \int_{u_0}^u \frac{2\lambda \sinh^2 \eta g'(u) + \varepsilon \sqrt{\sinh^2 2\eta (-f^2(u) + \lambda^2 g'^2(u) + \lambda^2)}}{-2 \cosh^2 \eta (f^2(u) - \lambda^2) + 2\lambda^2 g'^2(u)} du, \varepsilon = \pm 1 \quad (51)$$

dir.

Örnek 4.2. $f(u) = u$, $g(u) = 3$, $\lambda = 3$, $\eta = \pi/6$, $\varepsilon = -1$, $u \in (-2, 2)$ ve $u_0 = 0$ alınırsa $v \in (-0.350614, 0.350614)$ elde edilir. Space-like loksodromun yay uzunluğu 3.50804 tür. Helikoidal yüzey $H(u, v)$ nin, meridyen eğrisinin ($v = 0$) ve space-like loksodrom $H(u, v(u))$ nun grafikleri Şekil 4.2 deki gibidir:



Şekil 4.2. Time-like dönme eksenli time-like helikoidal yüzey, space-like loksodrom (mavi), space-like meridyen eğrisi (yeşil)

4.3. Space-like Meridyenli Light-like Eksenli Time-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Space-like Loksodromlar

(10) daki helikoidal yüzeyi düşünelim. Bundan dolayı meridyen eğrisini ($v = \text{sabit}$)

$$H(u) = \left(v(f(u) - g(u)), \left(1 - \frac{v^2}{2}\right)f(u) + \frac{v^2}{2}g(u) + \lambda v, -\frac{v^2}{2}f(u) + \left(1 + \frac{v^2}{2}\right)g(u) + \lambda v \right) \quad (52)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemin u ya göre türevi

$$H_u(u) = \left(vf'(u) - vg'(u), \left(1 - \frac{v^2}{2}\right)f'(u) + \frac{v^2}{2}g'(u), -\frac{v^2}{2}f'(u) + \left(1 + \frac{v^2}{2}\right)g'(u) \right) \quad (53)$$

dir. $H(u)$ meridyen eğrisi space-like olduğundan $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $f'^2(u) - g'^2(u) = 1$ dir.

H yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$E = -1, \quad F = \lambda(f'(u) - g'(u)) \quad \text{ve} \quad G = (f(u) - g(u))^2 \quad (54)$$

dir. Böylece (54) ve (13) eşitliklerinden H yüzeyinin birinci temel formu

$$ds^2 = -du^2 + 2\lambda(f'(u) - g'(u))dudv + (f(u) - g(u))^2 dv^2 \quad (55)$$

şeklindedir.

$H(u, v)$ helikoidal yüzeyinin time-like olması için gerek ve yeter şart $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $EG - F^2 = (f(u) - g(u))^2 - \lambda^2 (f'(u) - g'(u))^2 < 0$ olmasıdır.

Daha önce de belirtildiği gibi space-like loksodrom eğrisinin space-like meridyen eğrisini kestiği $H(u, v)$ noktasında oluşan sabit η Lorentz time-like açısı

$$\varepsilon \cosh \eta = \frac{du + \lambda(f'(u) - g'(u))dv}{\sqrt{du^2 + 2\lambda(f'(u) - g'(u))dudv + (f(u) - g(u))^2 dv^2}} \quad (56)$$

eşitliği ile verilir. (56) eşitliğinden space-like loksodromun diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

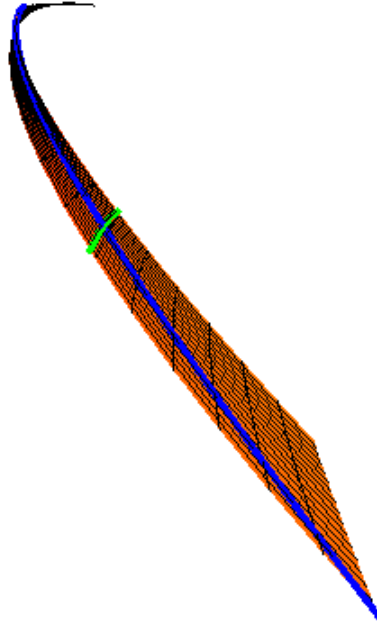
$$\begin{aligned} & \left(-\cosh^2 \eta (f(u) - g(u))^2 + \lambda^2 (f'(u) - g'(u))^2 \right) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \\ & - 2\lambda \sinh^2 \eta (f'(u) - g'(u)) \frac{dv}{du} = \sinh^2 \eta \end{aligned} \quad (57)$$

(57) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$v = \int_{u_0}^u \frac{2\lambda \sinh^2 \eta (f'(u) - g'(u)) + \varepsilon \sqrt{\sinh^2 2\eta (\lambda^2 (f'(u) - g'(u))^2 - (f(u) - g(u))^2)}}{-2\cosh^2 \eta (f(u) - g(u))^2 + 2\lambda^2 (f'(u) - g'(u))^2} du, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (58)$$

dir.

Örnek 4.3. $f(u) = \sinh u$, $g(u) = \cosh u$, $\lambda = \sqrt{2}$, $\eta = \pi/3$, $\varepsilon = 1$, $u \in (-0.5, 0.25)$ ve $u_0 = 0$ alınırsa $v \in (-2.130116, 2.95097)$ elde edilir. Time-like loksodromun yay uzunluğu 4.50221 dir. Helikoidal yüzey $H(u, v)$ nin, meridyen eğrisinin ($v=1$) ve space-like loksodrom $H(u, v(u))$ nun grafikleri Şekil 4.3 deki gibidir:



Şekil 4.3. Light-like dönme eksenli time-like helikoidal yüzey, space-like loksodrom (mavi), space-like meridyen eğrisi (yeşil)

5. TIME-LIKE MERİDYENLİ TIME-LIKE HELİKOİDAL YÜZEY ÜZERİNDEKİ SPACE-LIKE LOKSODROMLAR

Bu bölümde sırasıyla space-like, time-like ve light-like dönme eksenlerine göre time-like helikoidal yüzeyler üzerindeki time-like meridyenlerle sabit açı yapan space-like loksodromların diferansiyel denklemleri bulunacaktır. Ayrıca bazı örnekler verilecektir.

Tanım 5.1. E_1^3 de u space-like vektör ve v time-like vektör olsun. Bu durumda

$$|\langle u, v \rangle| = \|u\| \|v\| \sinh \varphi \quad (59)$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geq 0$ reel sayısı vardır. Burada φ ye u ile v arasındaki Lorentz time-like açı denir [19].

Tanım 5.2. Time-like meridyenli time-like helikoidal yüzey üzerindeki time-like meridyenleri sabit φ Lorentz time-like açısıyla kesen space-like eğriye loksodrom denir.

5.1. Time-like Meridyenli Space-like Eksenli Time-like Helikodal Yüzey Üzerindeki Space-like Loksodromlar

(8) deki helikoidal yüzeyi düşünelim. Buradan meridyen eğrisini ($v = \text{sabit}$)

$$H(u) = (f(u) + \lambda v, g(u) \sinh v, g(u) \cosh v) \quad (60)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifadenin u ya göre türevi

$$H_u(u) = (f'(u), g'(u) \sinh v, g'(u) \cosh v) \quad (61)$$

dır. $H(u)$ meridyen eğrisi time-like olduğundan $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $\langle H_u(u), H_u(u) \rangle = f'^2(u) - g'^2(u) = -1$ dir.

H helikoidal yüzeyinin birinci temel formun katsayıları

$$E = -1, \quad F = \lambda f'(u) \quad \text{ve} \quad G = g^2(u) + \lambda^2 \quad (62)$$

dir. Böylece (62) ve (13) eşitliklerinden H helikoidal yüzeyinin birinci temel formu

$$ds^2 = -du^2 + 2\lambda f'(u)dudv + (g^2(u) + \lambda^2)dv^2 \quad (63)$$

ile verilir.

H helikoidal yüzeyi time-like tir. Çünkü $\forall u \in J \subset \mathbf{R}$ için $EG - F^2 = -\lambda^2 g'^2(u) - g^2(u) < 0$ dir.

Space-like loksodrom ile time-like meridyen arasındaki sabit φ Lorentz time-like açısı diferansiyel geometride aşağıdaki formülle verilir:

$$\varepsilon \sinh \varphi = \frac{-du + \lambda f'(u)dv}{\sqrt{-du^2 + 2\lambda f'(u)dudv + (g^2(u) + \lambda^2)dv^2}} \quad (64)$$

(64) eşitliğinden space-like loksodromun diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

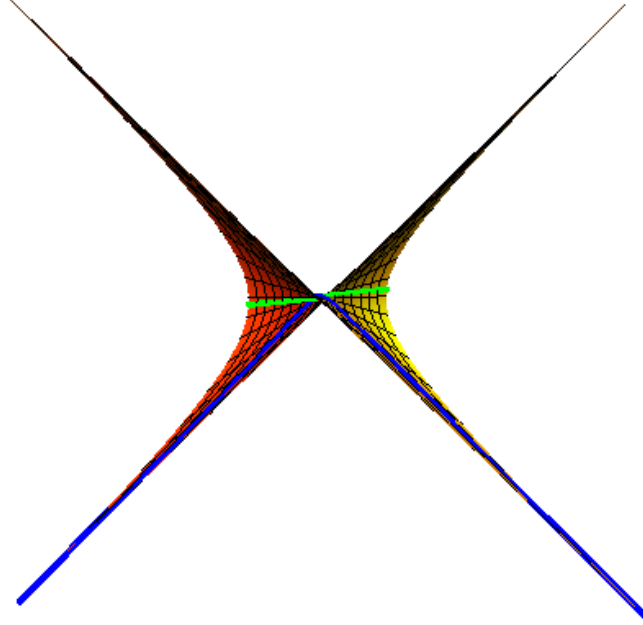
$$\left(\sinh^2 \varphi (g^2(u) + \lambda^2) - \lambda^2 f'^2(u) \right) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + 2\lambda \cosh^2 \varphi f'(u) \frac{dv}{du} = \cosh^2 \varphi. \quad (65)$$

(65) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$v = \int_{u_0}^u \frac{-2\lambda \cosh^2 \varphi f'(u) + \varepsilon \sqrt{\sinh^2 2\varphi (g^2(u) + \lambda^2 f'^2(u) + \lambda^2)}}{-2\sinh^2 \varphi (g^2(u) + \lambda^2) + 2\lambda^2 f'^2(u)} du, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (66)$$

dir.

Örnek 5.1. $f(u) = 1$, $g(u) = u$, $\lambda = 1$, $\varphi = \pi/4$, $\varepsilon = 1$, $u \in (-2, 2)$ ve $u_0 = 0$ alınırsa $v \in (-2.20135, 2.20135)$ elde edilir. Space-like loksodromun yay uzunluğu 4.60474 tür. Helikoidal yüzey $H(u, v)$ nin, meridyen eğrisinin ($v = 0.1$) ve space-like loksodrom $H(u, v(u))$ nun grafikleri aşağıdaki gibidir:



Şekil 5.1. Space-like dönme eksenli time-like helikoidal yüzey, space-like loksodrom (mavi), time-like meridyen eğrisi (yeşil)

5.2. Time-like Meridyenli Time-like Eksenli Time-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Space-like Loksodromlar

(9) daki helikoidal yüzeyi düşünelim. Meridyen eğrisi ($v = \text{sabit}$)

$$H(u) = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, g(u) + \lambda v) \quad (67)$$

şeklindedir. $H(u)$ meridyen eğrisinin u ya göre türevi

$$H_u(u) = (-f'(u) \sin v, f'(u) \cos v, g'(u)) \quad (68)$$

şeklindedir. $H(u)$ meridyen eğrisi time-like olduğundan $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $f'^2(u) - g'^2(u) = -1$ dir.

H helikoidal yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$E = -1, F = -\lambda g'(u) \text{ ve } G = f^2(u) - \lambda^2 \quad (69)$$

dir. Böylece (69) ve (13) eşitliklerinden H helikoidal yüzeyinin birinci temel formu

$$ds^2 = -du^2 - 2\lambda g'(u)dudv + (f^2(u) - \lambda^2)dv^2 \quad (70)$$

şeklindedir.

$H(u, v)$ yüzeyi time-like dir. Çünkü $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $EG - F^2 = -\lambda^2 f'^2(u) - f^2(u) < 0$ dir.

Space-like loksodrom eğrisi ile time-like meridyen eğrisi arasındaki sabit φ Lorentz time-like açısı onların tanjant vektörleri arasındaki açıdır. Aşağıdaki formül ile bulunur.

$$\varepsilon \sinh \varphi = \frac{-du - \lambda g'(u)dv}{\sqrt{-du^2 - 2\lambda g'(u)dudv + (f^2(u) - \lambda^2)dv^2}}. \quad (71)$$

Bu eşitlikten space-like loksodromun diferansiyel denklemi

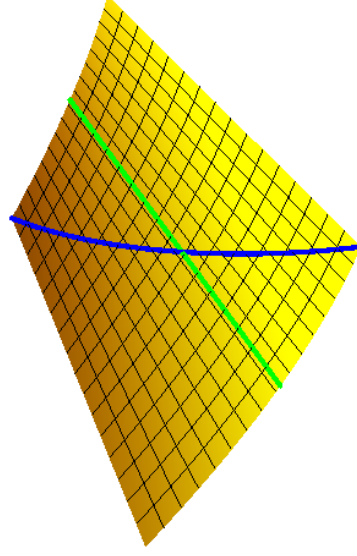
$$\left(\sinh^2 \varphi (f^2(u) - \lambda^2) - \lambda^2 g'^2(u) \right) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 - 2\lambda \cosh^2 \varphi g'(u) \frac{dv}{du} = \cosh^2 \varphi \quad (72)$$

dir. Buradan genel çözüm

$$v = \int_{u_0}^u \frac{2\lambda \cosh^2 \varphi g'(u) + \varepsilon \sqrt{\sinh^2 2\varphi (f^2(u) + \lambda^2 g'^2(u) - \lambda^2)}}{2 \sinh^2 \varphi (f^2(u) - \lambda^2) - 2\lambda^2 g'^2(u)} du, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (73)$$

dir.

Örnek 5.2. $f(u) = \sqrt{3}u$, $g(u) = 2u$, $\lambda = 2$, $\varphi = \pi/6$, $\varepsilon = 1$, $u \in (1, 1.9)$ ve $u_0 = 0$ alınırsa $v \in (-0.907812, -0.441097)$ elde edilir. Space-like loksodromun yay uzunluğu 1.76481 dir. Helikoidal yüzey $H(u, v)$ nin, meridyen eğrisinin ($v = -0.7$) ve space-like loksodrom $H(u, v(u))$ nun grafikleri aşağıdaki gibidir:



Şekil 5.2. Time-like dönme eksenli time-like helikoidal yüzey, space-like loksodrom (mavi), time-like meridyen eğrisi (yeşil)

5.3. Time-like Meridyenli Light-like Eksenli Time-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Space-like Loksodromlar

(10) daki helikoidal yüzeyi düşünelim. Böylece meridyen eğrisini (v =sabit)

$$H(u) = \left(v(f(u) - g(u)), (1 - \frac{v^2}{2})f(u) + \frac{v^2}{2}g(u) + \lambda v, -\frac{v^2}{2}f(u) + (1 + \frac{v^2}{2})g(u) + \lambda v \right) \quad (74)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifadenin u ya göre türevi

$$H_u(u) = \left(vf'(u) - vg'(u), (1 - \frac{v^2}{2})f'(u) + \frac{v^2}{2}g'(u), -\frac{v^2}{2}f'(u) + (1 + \frac{v^2}{2})g'(u) \right) \quad (75)$$

dir. $H(u)$ meridyen eğrisi time-like olduğundan $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $f'^2(u) - g'^2(u) = -1$ dir.

H helikoidal yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$E = -1, \quad F = \lambda(f'(u) - g'(u)) \quad \text{ve} \quad G = (f(u) - g(u))^2 \quad (76)$$

şeklindedir. Böylece (76) ve (13) eşitliklerinden H helikoidal yüzeyinin birinci temel formu

$$ds^2 = -du^2 + 2\lambda(f'(u) - g'(u))dudv + (f(u) - g(u))^2 dv^2 \quad (77)$$

şeklindedir.

H helikoidal yüzeyi time-like tır. Çünkü $\forall u \in J \subset \mathbf{R}$ için $EG - F^2 = -\lambda^2(f'(u) - g'(u))^2 - (f(u) - g(u))^2 < 0$ dır.

Daha önce de belirtildiği gibi $H(u, v)$ noktasında space-like loksodrom eğrisi ile time-like meridyen eğrisi arasındaki sabit φ Lorentz time-like açısı

$$\varepsilon \sinh \varphi = \frac{-du + \lambda(f'(u) - g'(u))dv}{\sqrt{-du^2 + 2\lambda(f'(u) - g'(u))dudv + (f(u) - g(u))^2 dv^2}} \quad (78)$$

eşitliği ile verilir. (78) eşitliğinden space-like loksodromun diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

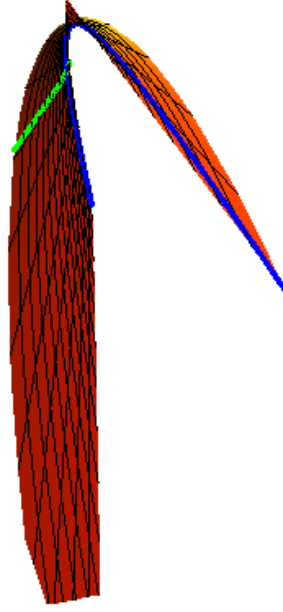
$$\begin{aligned} & \left(\sinh^2 \varphi (f(u) - g(u))^2 - \lambda^2 (f'(u) - g'(u))^2 \right) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \\ & + 2\lambda \cosh^2 \varphi (f'(u) - g'(u)) \frac{dv}{du} = \cosh^2 \varphi \end{aligned} \quad (79)$$

(79) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$v = \int_{u_0}^u \frac{2\lambda \cosh^2 \varphi (f'(u) - g'(u)) + \varepsilon \sqrt{\sinh^2 2\varphi \left((f(u) - g(u))^2 + \lambda^2 (f'(u) - g'(u))^2 \right)}}{-2\sinh^2 \varphi (f(u) - g(u))^2 + 2\lambda^2 (f'(u) - g'(u))^2} du, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (80)$$

şeklinde bulunur.

Örnek 5.3. $f(u) = \cosh u$, $g(u) = \sinh u$, $\lambda = 2$, $\varphi = 1$, $\varepsilon = -1$, $u \in (-2, 1)$ ve $u_0 = 0$ alınrsa $v \in (-5.785, 2.9111)$ elde edilir. Space-like loksodromun yay uzunluğu 14.6361 dir. Helikoidal yüzey $H(u, v)$ nin, meridyen eğrisinin ($v = -2$) ve space-like loksodrom $H(u, v(u))$ nun grafikleri aşağıdaki gibidir:



Şekil 5.3. Light-like dönme eksenli time-like helikoidal yüzey, space-like loksodrom (mavi), time-like meridyen eğrisi (yeşil)

Yorum5.1. (66), (73) ve (80) denklemlerinde $\lambda = 0$ alınrsa E_1^3 deki time-like meridyenli time-like helikoidal yüzeyler üzerindeki space-like loksodromların diferansiyel denklemleri E_1^3 deki time-like meridyenli time-like dönел yüzeylerdeki space-like loksodromların diferansiyel denklemi ile çakışır.

6. SPACE-LIKE MERİDYENLİ TIME-LIKE HELİKOİDAL YÜZEY ÜZERİNDEKİ TIME-LIKE LOKSODROMLAR

Bu bölümde sırasıyla space-like, time-like ve light-like dönme eksenlerine sahip time-like helikoidal yüzeyler üzerindeki space-like meridyenlerle sabit açı yapan time-like loksodromların diferansiyel denklemlerini oluşturulacaktır. Ayrıca Mathematica programı yardımıyla bazı örnekler verilecektir.

Tanım 6.1. E_1^3 de, u space-like vektör ve v time-like vektör olsun. Bu durumda

$$|\langle u, v \rangle| = \|u\| \|v\| \sinh \varphi \quad (81)$$

olacak şekilde bir tek $\varphi > 0$ reel sayısı vardır. Burada φ ye u ile v arasındaki Lorentz time-like açı denir [19].

Tanım 6.2. E_1^3 de, space-like meridyenli time-like helikoidal yüzey üzerindeki space-like meridyenleri sabit φ Lorentz time-like açısıyla kesen time-like eğriye loksodrom denir.

6.1. Space-like Meridyenli Space-like Eksenli Time-like Helikodal Yüzey Üzerindeki Time-like Loksodromlar

(8) deki helikoidal yüzeyi düşünelim ve ayrıca $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $f'^2(u) - g'^2(u) = 1$ olduğunu varsayalım. Yani $\beta = \beta(u)$ profil eğrisi yay-parametresiyle parametrelendirilsin. Meridyen eğrisi ($v = \text{sabit}$)

$$H(u) = (f(u) + \lambda v, g(u) \sinh v, g(u) \cosh v) \quad (82)$$

şeklindedir. Bu eşitliğin u ya göre türevi

$$H_u(u) = (f'(u), g'(u) \sinh v, g'(u) \cosh v) \quad (83)$$

dır. $H(u)$ meridyen eğrisi ile $\beta(u)$ profil eğrisi aynı koszul karaktere sahiptir. Çünkü $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $f'^2(u) - g'^2(u) = 1$ dir.

H helikoidal yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$E = \langle H_u, H_u \rangle = 1, \quad F = \langle H_u, H_v \rangle = \lambda f'(u) \quad \text{ve} \quad G = \langle H_v, H_v \rangle = g^2(u) + \lambda^2 \quad (84)$$

dir. Böylece (84) ve (18) eşitliğinden birinci temel form

$$ds^2 = du^2 + 2\lambda f'(u)dudv + (g^2(u) + \lambda^2)dv^2 \quad (85)$$

şeklindedir.

H helikoidal yüzeyinin time-like olması için gerek ve yeter şart $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $EG - F^2 = \lambda^2 g'^2(u) - g^2(u) > 0$ olmasıdır.

$\alpha(t)$ time-like loksodrom eğrisinin (uv) -düzlemindeki $(u(t), v(t))$ eğrisinin H altındaki görüntüsü olduğunu varsayalım. $\{H_u, H_v\}$ bazına göre $\alpha'(t)$ tanjant vektörü (u', v') koordinatlarına ve H_u tanjant vektöründe $(1, 0)$ koordinatlarına sahip olduğundan dolayı time-like loksodromun space-like meridyeni sabit φ Lorentz time-like açıyla kestiği $H(u, v)$ noktasında

$$\begin{aligned} \varepsilon \sinh \varphi &= \frac{\langle \alpha'(t), H_u \rangle}{\|\alpha'(t)\| \|H_u\|} = \frac{Edu + Fdv}{\sqrt{-Edu^2 - 2Fdudv - Gdv^2} \cdot \sqrt{E}} \\ &= \frac{du + \lambda f'(u)dv}{\sqrt{-du^2 - 2\lambda f'(u)dudv - (g^2(u) + \lambda^2)dv^2}}. \end{aligned} \quad (86)$$

eşitliği vardır.

Bu denklem düzenlenirse space-like meridyenli space-like eksenli time-like helikoidal yüzey üzerindeki time-like loksodromların diferansiyel denklemi

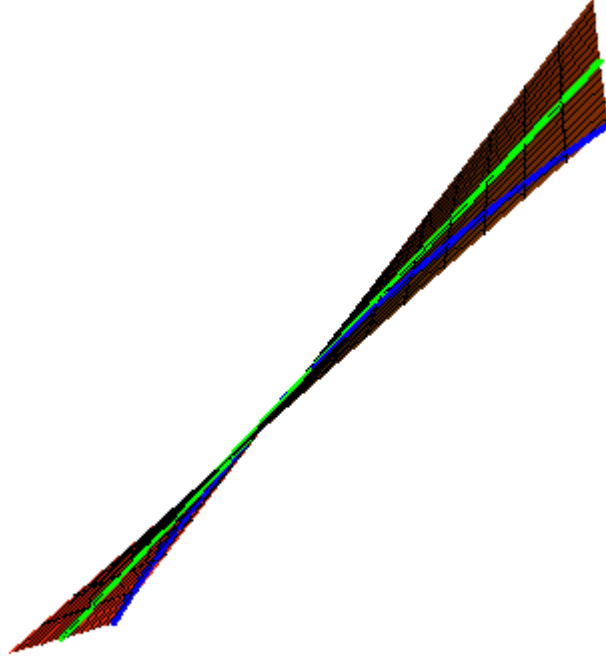
$$\left(\lambda^2 f'^2(u) + \sinh^2 \varphi (g^2(u) + \lambda^2) \right) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + \left(2\lambda f'(u) \cosh^2 \varphi \right) \frac{dv}{du} = -\cosh^2 \varphi \quad (87)$$

dir. Böylece time-like loksodromun diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$v = \int_{u_0}^u \frac{-2\lambda f'(u) \cosh^2 \varphi + \varepsilon \sqrt{\sinh^2 2\varphi (\lambda^2 f'^2(u) + g^2(u) - \lambda^2)}}{2 \sinh^2 \varphi (g^2(u) + \lambda^2) + 2\lambda^2 f'^2(u)} du, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (88)$$

dir.

Örnek 6.1. $f(u) = 2u$, $g(u) = \sqrt{3}u$, $\lambda = 2$, $\varphi = 2$, $\varepsilon = 1$, $u \in (-1, 1)$ ve $u_0 = 0$ alınırsa $v \in (-0.139041, 0.139041)$ elde edilir. Time-like loksodromun yay uzunluğu 0.845363 dür. Helikoidal yüzey $H(u, v)$ nin, meridyen eğrisinin ($v = 0$) ve time-like loksodrom $H(u, v(u))$ nun grafikleri aşağıdaki gibidir:



Şekil 6.1. Space-like dönme eksenli time-like helikoidal yüzey, time-like loksodrom (mavi), space-like meridyen eğrisi (yeşil)

6.2. Space-like Meridyenli Time-like Eksenli Time-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Time-like Loksodromlar

(9) daki helikoidal yüzeyi düşünelim. Böylece meridyen eğrisini ($v = \text{sabit}$)

$$H(u) = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, g(u) + \lambda v) \quad (89)$$

şeklindedir. Bu ifadenin u ya göre türevi

$$H_u(u) = (-f'(u) \sin v, f'(u) \cos v, g'(u)) \quad (90)$$

dır. $H(u)$ meridyen eğrisi ile $\beta(u)$ profil eğrisi aynı koszul karaktere sahiptir. Çünkü $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $f'^2(u) - g'^2(u) = 1$ dir.

H helikoidal yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$E = \langle H_u, H_u \rangle = 1, \quad F = \langle H_u, H_v \rangle = -\lambda g'(u) \quad \text{ve} \quad G = \langle H_v, H_v \rangle = f^2(u) - \lambda^2 \quad (91)$$

dir. Buradan birinci temel form

$$ds^2 = du^2 - 2\lambda g'(u) du dv + (f^2(u) - \lambda^2) dv^2 \quad (92)$$

şeklindedir.

$H(u, v)$ yüzeyinin time-like olması için gerek ve yeter şart $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $EG - F^2 = \lambda^2 f'^2(u) - f^2(u) > 0$ olmasıdır.

Time-like loksodrom eğrisi ile space-like meridyen eğrisi arasındaki sabit Lorentz time-like açısı onların $H(u, v)$ noktasındaki tanjant vektörleri ile tanımlanır ve aşağıdaki eşitlikle verilir:

$$\varepsilon \sinh \varphi = \frac{du - \lambda g'(u) dv}{\sqrt{-du^2 + 2\lambda g'(u) du dv - (f^2(u) - \lambda^2) dv^2}}. \quad (93)$$

Bu eşitlik düzenlenirse time-like loksodromun diferansiyel denklemi

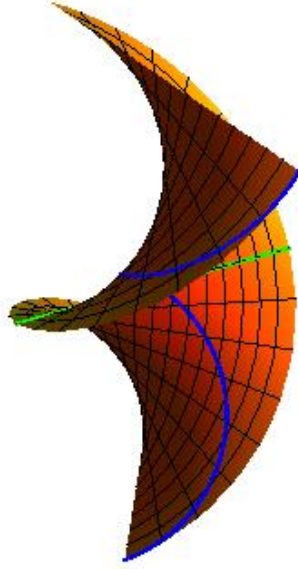
$$(\lambda^2 g'^2(u) + \sinh^2 \varphi (f^2(u) - \lambda^2)) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 - (2\lambda g'(u) \cosh^2 \varphi) \frac{dv}{du} = -\cosh^2 \varphi \quad (94)$$

şeklindedir. Buradan da genel çözüm

$$v = \int_{u_0}^u \frac{2\lambda g'(u) \cosh^2 \varphi + \varepsilon \sqrt{\sinh^2 2\varphi (\lambda^2 g'^2(u) - f^2(u) + \lambda^2)}}{2 \sinh^2 \varphi (f^2(u) - \lambda^2) + 2\lambda^2 g'^2(u)} du, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (95)$$

dir.

Örnek 6.2. $f(u)=u$, $g(u)=2$, $\lambda=2$, $\varphi=1$, $\varepsilon=1$, $u \in (-2,2)$ ve $u_0=0$ alınırsa $v \in (-2.06251, 2.06251)$ elde edilir. Time-like loksodromun yay uzunluğu 0.70184 dür. Helikoidal yüzey $H(u,v)$ nin, meridyen eğrisinin ($v=0$) ve time-like loksodrom $H(u,v(u))$ nun grafikleri aşağıdaki gibidir:



Şekil 6.2. Time-like dönme eksenli time-like helicoidal yüzey, time-like loksodrom (mavi), space-like meridyen eğrisi (yeşil)

6.3. Space-like Meridyenli Light-like Eksenli Time-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Time-like Loksodromlar

(10) daki helicoidal yüzeyi düşünelim. Meridyen eğrisini ($v=sabit$)

$$H(u) = \left(v(f(u) - g(u)), (1 - \frac{v^2}{2})f(u) + \frac{v^2}{2}g(u) + \lambda v, -\frac{v^2}{2}f(u) + (1 + \frac{v^2}{2})g(u) + \lambda v \right) \quad (96)$$

şeklindedir. Bu ifadenin u ya göre türevi

$$H_u(u) = \left(vf'(u) - vg'(u), (1 - \frac{v^2}{2})f'(u) + \frac{v^2}{2}g'(u), -\frac{v^2}{2}f'(u) + (1 + \frac{v^2}{2})g'(u) \right), \quad (97)$$

dir. $H(u)$ meridyen eğrisinin space-like olması için gerek ve yeter şart $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $f'^2(u) - g'^2(u) = 1$ olmasıdır.

H helikoidal yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$E = 1, \quad F = \lambda(f'(u) - g'(u)) \quad \text{ve} \quad G = (f(u) - g(u))^2 \quad (98)$$

dir. Böylece birinci temel form

$$ds^2 = du^2 + 2\lambda(f'(u) - g'(u))dudv + (f(u) - g(u))^2 dv^2 \quad (99)$$

ile verilir.

$H(u, v)$ yüzeyinin time-like olması için gerek ve yeter şart $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $EG - F^2 = \lambda^2(f'(u) - g'(u))^2 - (f(u) - g(u))^2 > 0$ olmasıdır.

Buradan time-like loksodrom eğrisi ile space-like meridyen eğrisi arasındaki sabit Lorentz time-like açısı aşağıdaki formül ile bulunur:

$$\varepsilon \sinh \varphi = \frac{du + \lambda(f'(u) - g'(u))dv}{\sqrt{-du^2 - 2\lambda(f'(u) - g'(u))dudv - (f(u) - g(u))^2 dv^2}}. \quad (100)$$

Bu denklem düzenlenirse time-like loksodromun diferansiyel denklemi

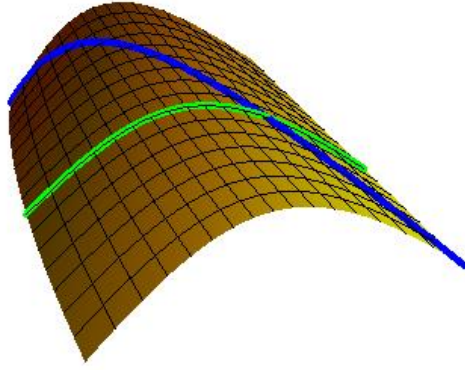
$$\begin{aligned} & \left(\lambda^2 (f'(u) - g'(u))^2 + \sinh^2 \varphi (f(u) - g(u))^2 \right) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \\ & + \left(2\lambda(f'(u) - g'(u)) \cosh^2 \varphi \right) \frac{dv}{du} = -\cosh^2 \varphi \end{aligned} \quad (101)$$

dir. Bu denklemin genel çözümü

$$v = \int_{u_0}^u \frac{2\lambda(f'(u) - g'(u)) \cosh^2 \varphi + \varepsilon \sqrt{\sinh^2 2\varphi (\lambda^2 (f'(u) - g'(u))^2 - (f(u) - g(u))^2)}}{2\sinh^2 \varphi (f(u) - g(u))^2 + 2\lambda^2 (f'(u) - g'(u))^2} du, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (102)$$

dir.

Örnek 6.3. $f(u) = \sinh u$, $g(u) = \cosh u$, $\lambda = 2$, $\varphi = 1$, $\varepsilon = 1$, $u \in (-1,1)$ ve $u_0 = 0$ alınrsa $v \in (-0.192045, 0.505886)$ elde edilir. Time-like loksodromun yay uzunluğu 0.338181 dir. Helikoidal yüzey $H(u, v)$ nin, meridyen eğrisinin ($v = 0.2$) ve time-like loksodrom $H(u, v(u))$ nun grafikleri aşağıdaki gibidir:



Şekil 6.3. Light-like dönme eksenli time-like helikoidal yüzey, time-like loksodrom (mavi), space-like meridyen eğrisi (yeşil)

7. TIME-LIKE MERİDYENLİ TIME-LIKE HELİKOİDAL YÜZEY ÜZERİNDEKİ TIME-LIKE LOKSODROMLAR

Bu bölümde sırasıyla space-like, time-like ve light-like dönme eksenlerine göre time like helikoidal yüzeyler üzerindeki time-like meridyenlerle sabit açı yapan time-like loksodromların diferansiyel denklemlerini bulacağız.

Tanım 7.1. E_1^3 de u ve v aynı time-like konide yatan iki time-like vektör olsun. Bu durumda

$$\langle u, v \rangle = -\|u\| \|v\| \cosh \theta \quad (103)$$

olacak şekilde bir tek $\theta > 0$ reel sayısı vardır. Burada θ ya u ile v arasındaki Lorentz time-like açı denir [19].

Tanım 7.2. Time-like meridyenli time-like helikoidal yüzey üzerindeki time-like meridyenleri sabit θ Lorentz time-like açısıyla kesen time-like eğriye loksodrom denir.

7.1. Time-like Meridyenli Space-like Eksenli Time-like Helikodal Yüzey Üzerindeki Time-like Loksodromlar

(8) deki helikoidal yüzeyi düşünelim. $\beta(u)$ profil eğrisi birim hızlı olduğundan $f'^2(u) - g'^2(u) = 1$ olacaktır. Meridyen eğrisini ($v = \text{sabit}$)

$$H(u) = (f(u) + \lambda v, g(u) \sinh v, g(u) \cosh v) \quad (104)$$

şeklindedir. Bu ifadenin u ya göre türevi

$$H_u(u) = (f'(u), g'(u) \sinh v, g'(u) \cosh v) \quad (105)$$

dır. $H(u)$ meridyen eğrisinin time-like olması için gerek ve yeter şart $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $f'^2(u) - g'^2(u) = -1$ olmasıdır.

H helikoidal yüzeyinin birinci temel formun katsayıları

$$E = -1, \quad F = \lambda f'(u) \quad \text{ve} \quad G = g^2(u) + \lambda^2 \quad (106)$$

dir. Böylece birinci temel form

$$ds^2 = -du^2 + 2\lambda f'(u)dudv + (g^2(u) + \lambda^2)dv^2 \quad (107)$$

ile verilir.

H helikoidal yüzeyi time-like tır. Çünkü $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $EG - F^2 = \lambda^2 g'^2(u) + g^2(u) > 0$ dir.

$\alpha(t)$ time-like loksodrom eğrisinin (uv) -düzlemindeki $(u(t), v(t))$ eğrisinin H altındaki görüntüsü olduğunu varsayalım. $\{H_u, H_v\}$ bazına göre $\alpha'(t)$ tanjant vektörü (u', v') koordinatlarına ve H_u tanjant vektöründe $(1, 0)$ koordinatına sahip olduğundan dolayı time-like loksodromun time-like meridyeni sabit θ Lorentz time-like açısıyla kestiği $H(u, v)$ noktasında

$$-\cosh \theta = \frac{-du + \lambda f'(u)dv}{\sqrt{du^2 - 2\lambda f'(u)dudv - (g^2(u) + \lambda^2)dv^2}} \quad (108)$$

eşitliği vardır. Bu denklemden time-like meridyenli space-like eksenli time-like helikodal yüzey üzerindeki time-like loksodromların diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

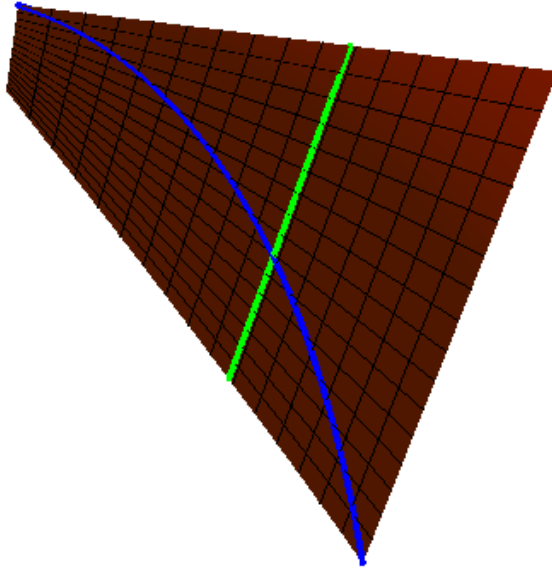
$$\left(\lambda^2 f'^2(u) + \cosh^2 \theta (g^2(u) + \lambda^2)\right) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \left(2\lambda f'(u) \sinh^2 \theta\right) \frac{dv}{du} = \sinh^2 \theta. \quad (109)$$

Bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$v = \int_{u_0}^u \frac{-2\lambda f'(u) \sinh^2 \theta + \varepsilon \sqrt{\sinh^2 2\theta (\lambda^2 f'^2(u) + g^2(u) + \lambda^2)}}{2 \cosh^2 \theta (g^2(u) + \lambda^2) + 2\lambda^2 f'^2(u)} du, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (110)$$

dir.

Örnek 7.1. $f(u)=1, g(u)=u, \lambda=1, \theta=\frac{1}{2}, \varepsilon=1, u \in (0,1)$ ve $u_0=0$ alınırsa $v \in (0,0.407298)$ elde edilir. Time-like loksodromun yay uzunluğu 0.886819 dur. Helikoidal yüzey $H(u,v)$ nin, meridyen eğrisinin ($v=0.25$) ve time-like loksodrom $H(u,v(u))$ nun grafikleri aşağıdaki gibidir:



Şekil 7.1. Space-like dönme eksenli time-like helicoidal yüzey, time-like loksodrom (mavi), time-like meridyen eğrisi (yeşil)

7.2. Time-like Meridyenli Time-like Eksenli Time-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Time-like Loksodromlar

(9) daki helicoidal yüzeyi düşünelim. Meridyen eğrisini ($v=\text{sabit}$)

$$H(u) = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, g(u) + \lambda v) \quad (111)$$

şeklindedir. $H(u)$ meridyen eğrisinin u ya göre türevi

$$H_u(u) = (-f'(u) \sin v, f'(u) \cos v, g'(u)) \quad (112)$$

şeklindedir. $H(u)$ meridyen eğrisinin time-like olması için gerek ve yeter şart $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $f'^2(u) - g'^2(u) = -1$ olmasıdır.

H helikoidal yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$E = -1, F = -\lambda g'(u) \text{ ve } G = f^2(u) - \lambda^2 \quad (113)$$

dir. Böylece birinci temel form

$$ds^2 = -du^2 - 2\lambda g'(u)dudv + (f^2(u) - \lambda^2)dv^2 \quad (114)$$

şeklindedir.

$H(u, v)$ yüzeyi time-like dir. Çünkü $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $EG - F^2 = \lambda^2 f'^2(u) + f^2(u) > 0$ dir.

Time-like loksodrom eğrisi ile time-like meridyen eğrisi arasındaki sabit Lorentz time-like açısı aşağıdaki formül ile bulunur.

$$-\cosh \theta = \frac{-du - \lambda g'(u)dv}{\sqrt{du^2 + 2\lambda g'(u)dudv - (f^2(u) - \lambda^2)dv^2}}. \quad (115)$$

Bu eşitlikten time-like loksodromun diferansiyel denklemi

$$\left(\lambda^2 g'^2(u) + \cosh^2 \theta (f^2(u) - \lambda^2)\right) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 - (2\lambda g'(u) \sinh^2 \theta) \frac{dv}{du} = \sinh^2 \theta \quad (116)$$

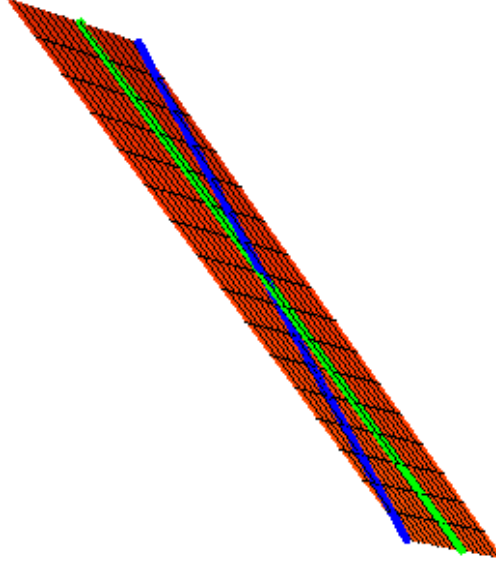
dir. Buradan genel çözüm

$$v = \int_{u_0}^u \frac{2\lambda g'(u) \sinh^2 \theta + \varepsilon \sqrt{\sinh^2 2\theta (\lambda^2 g'^2(u) + f^2(u) - \lambda^2)}}{2 \cosh^2 \theta (f^2(u) - \lambda^2) + 2\lambda^2 g'^2(u)} du, \varepsilon = \pm 1 \quad (117)$$

dir.

Örnek 7.2. $f(u) = u$, $g(u) = \sqrt{2}u$, $\lambda = 1$, $\theta = 1/4$, $\varepsilon = -1$, $u \in (0, 1/4)$ ve $u_0 = 0$ alınırsa $v \in (-0.07159, 0)$ elde edilir. Time-like loksodromun yay uzunluğu

0.129974 tür. Helikoidal yüzey $H(u, v)$ nin, meridyen eğrisinin ($v = -0.04$) ve time-like loksodrom $H(u, v(u))$ nun grafikleri aşağıdaki gibidir:



Şekil 7.2. Time-like dönme eksenli time-like helikoidal yüzey, time-like loksodrom (mavi), time-like meridyen eğrisi (yeşil)

7.3. Time-like Meridyenli Light-like Eksenli Time-like Helikoidal Yüzey Üzerindeki Time-like Loksodromlar

(10) daki helikoidal yüzeyi düşünelim. Meridyen eğrisini ($v = \text{sabit}$)

$$H(u) = \left(v(f(u) - g(u)), (1 - \frac{v^2}{2})f(u) + \frac{v^2}{2}g(u) + \lambda v, -\frac{v^2}{2}f(u) + (1 + \frac{v^2}{2})g(u) + \lambda v \right) \quad (118)$$

şeklindedir. Bu denklemin u ya göre türevi

$$H_u(u) = \left(vf'(u) - vg'(u), (1 - \frac{v^2}{2})f'(u) + \frac{v^2}{2}g'(u), -\frac{v^2}{2}f'(u) + (1 + \frac{v^2}{2})g'(u) \right) \quad (119)$$

dir. $H(u)$ meridyen eğrisinin time-like olması için gerek ve yeter şart $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $f'^2(u) - g'^2(u) = -1$ olmasıdır.

H helikoidal yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$E = -1, \quad F = \lambda(f'(u) - g'(u)) \quad \text{ve} \quad G = (f(u) - g(u))^2 \quad (120)$$

dir. Böylece birinci temel form

$$ds^2 = -du^2 + 2\lambda(f'(u) - g'(u))dudv + (f(u) - g(u))^2 dv^2 \quad (121)$$

ile verilir.

H helikoidal yüzeyi time-like tır. Çünkü $\forall u \in J \subset \mathbb{R}$ için $EG - F^2 = \lambda^2 (f'(u) - g'(u))^2 + (f(u) - g(u))^2 > 0$ dir.

Time-like loksodrom eğrisi ile time-like meridyen eğrisi arasındaki sabit time-like açı

$$-\cosh \theta = \frac{du + \lambda(f'(u) - g'(u))dv}{\sqrt{-du^2 - 2\lambda(f'(u) - g'(u))dudv - (f(u) - g(u))^2 dv^2}} \quad (122)$$

eşitliği ile verilir. Bu eşitlikten time-like loksodromun diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

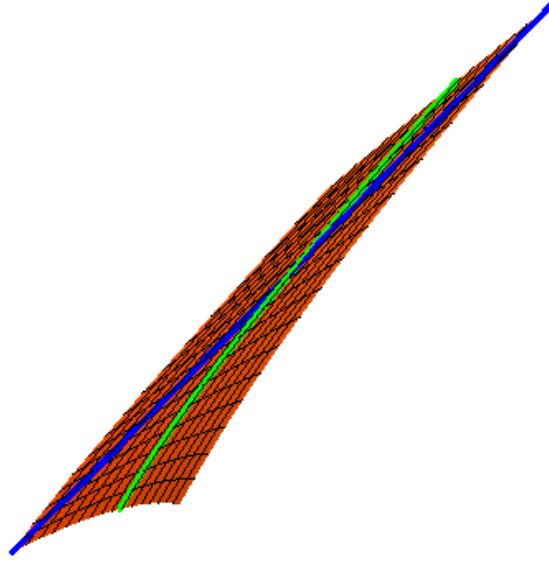
$$\begin{aligned} & \left(\lambda^2 (f'(u) - g'(u))^2 + \sinh^2 \theta (f(u) - g(u))^2 \right) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \\ & + \left(2\lambda(f'(u) - g'(u)) \cosh^2 \theta \right) \frac{dv}{du} = -\cosh^2 \theta \end{aligned} \quad (123)$$

Bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$v = \int_{u_0}^u \frac{2\lambda(f'(u) - g'(u)) \cosh^2 \theta + \varepsilon \sqrt{\sinh^2 2\theta (\lambda^2 (f'(u) - g'(u))^2 - (f(u) - g(u))^2)}}{2 \sinh^2 \theta (f(u) - g(u))^2 + 2\lambda^2 (f'(u) - g'(u))^2} du, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (124)$$

dir.

Örnek 7.3. $f(u) = \cosh u$, $g(u) = \sinh u$, $\lambda = 1$, $\theta = 1$, $\varepsilon = 1$, $u \in (1, 2)$ ve $u_0 = 0$ alınırsa $v \in (-0.601447, 2.23635)$ elde edilir. Time-like loksodromun yay uzunluğu 1.256 dır. Helikoidal yüzey $H(u, v)$ nin, meridyen eğrisinin ($v = 1.5$) ve time-like loksodrom $H(u, v(u))$ nun grafikleri aşağıdaki gibidir:



Şekil 7.3. Light-like dönme eksenli time-like helikoidal yüzey, time-like loksodrom (mavi), time-like meridyen eğrisi (yeşil)

Yorum 7.1. (110), (117) ve (124) denklemlerinde $\lambda = 0$ alınırsa E_1^3 deki time-like meridyenli time-like helikoidal yüzeyler üzerindeki time-like loksodromların diferansiyel denklemleri E_1^3 deki time-like meridyenli time-like dönel yüzeylerdeki time-like loksodromların diferansiyel denklemi ile çakışır.

SONUÇ

Babaarslan ve Munteanu, Minkowski 3-uzayındaki space-like veya time-like meridyenli dnel yüzeyler üzerindeki time-like loksodromların diferansiyel denklemlerini bulmuştu [3]. Ayrıca Babaarslan ve Yaylı, Minkowski 3-uzayında space-like veya time-like meridyenli dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromların diferansiyel denklemlerini bulmuştu [4]. Dönel yüzeylerin bir doğal genellemesi helikoidal yüzeyler olduğundan bu çalışmaları genelleştirerek Minkowski 3-uzayında space-like veya time-like meridyenli helikoidal yüzeyler üzerindeki space-like ya da time-like loksodromların diferansiyel denklemleri bulundu ve Mathematica program kullanılarak bazı örnekler verildi.

KAYNAKLAR

1. Alexander, J., Loxodromes: A Rhumb Way to Go, *Mathematics Magazine*, 77, 349-356, 2004.
2. Beneki, Chr. C., Kaimakamis, G. and Papantoniou, B. J., Helicoidal Surfaces in three-dimensional Minkowski space, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 275, 486-614, 2002.
3. Babaarslan, M. and Munteanu, M. I., Time-like loxodromes on rotational surfaces in Minkowski 3-space, *Annals of the Alexandru Ioan Cuza University-Mathematics*. Pages 41-54, ISSN (Online), ISSN (Print) 1221-8421, DOI: 10.2478/aicu-2013-0021, October 2013 (Baskıda).
4. Babaarslan, M. and Yayli, Y., Space-like loxodromes on rotational surfaces in Minkowski 3-space, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 409, 288-298, 2014.
5. Babaarslan, M. and Yayli, Y., Differential Equation of the Loxodrome on a Helicoidal Surface, *The Journal of Navigation*, doi:10.1017/S0373463315000181, 68(5), 962-970, 2015.
6. Capanna, A., Francaviglia, M. and Lorenzi, M.G., Architecture, Form, Expression. The Helicoidal Skyscrapers' Geometry. Proceedings of the 2012 Bridges Towson: Mathematics, Music, Architecture, Culture. Towson University, Maryland, USA, 2012.
7. Jensen, B., Electronic states on the helicoidal surface, *Physical Review A*, 80, 022101, 2009.
8. Ji, F. and Hu, Z. H., Helicoidal surfaces under the cubic screw motion in Minkowski 3-space, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 318(2), 634-647, 2006.
9. Ji, F. and Kim, Y. H., Mean curvatures and Gauss maps of a pair of isometric helicoidal and rotation surfaces in minkowski 3-space, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 368(2), 623-635, 2010.
10. Kos, S., Vranic, D. and Zec, D., Differential Equation of a Loxodrome on a Sphere, *The Journal of Navigation*, 52, 418-420, 1999.
11. Lee, S. and Varnado, J. H., Timelike surfaces of revolution with costant mean curvature in Minkowski 3-space, *Differential Geometry and Dynamical Systems*, 9, 82-102, 2007.
12. Levina, G. V. and Montgomery, M. T., A First Examination of the Helical Nature of Tropical Cyclogenesis, *Doklady Earth Sciences*, 434, 1285-1289, 2010.

13. Lopez, R., Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, *International Electronic Journal of Geometry*, 7(1), 44-107, 2014.
14. Monmonier, M. S., *Rhumb Lines and Map Wars: A social History of the Mercator projections*, University of Chicago Press, 2004.
15. Morales, Rigoberto E. M. and Rosa, Eugenio, S., Modeling of Free Surface Flow in a Helical Channel with Finite Pict, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 29, 345-353, 2007.
16. Noble, C. A., Note on loxodromes, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 12, 116-119, 1905.
17. Petrovic, M., Differential Equation of a Loxodrome on the Spheroid, *International Journal of Maritime Science and Technology "Our Sea"*, 54, 87-89, 2007.
18. Pollard, D. D. and Fletcher, R. C., *Fundamentals of Structural Geology*, Cambridge University Press, United Kingdom, 2005.
19. Ratcliffe, J. G., *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer, Graduate Texts in Mathematics 149, Second Edition, 2006.
20. Ugail, H., Marquez, M. C. and Yilmaz, A., On Bezier surfaces in three-dimensional Minkowski space, *Computers and Mathematics with Applications*, 62(8), 2899-2912, 2011.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Kayseri’de doğan Mustafa KAYACIK, ilk ve orta öğrenimini Kayseri’nin Develi ilçesinde sırasıyla Dumlupınar İlkokulu, Develi İmam Hatip Lisesinde tamamlamıştır. 1996 yılında kazandığı Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2000 yılında başarıyla bitirmiştir.

2000- 2009 yılları arasında özel kurumlarda öğretmenlik yapmış 2010 yılında Milli Eğitim Bakanlığına öğretmen olarak atanmıştır. Halen Milli Eğitim Bakanlığında öğretmen olarak çalışmaktadır.

2013 yılından beri Bozok Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünde yüksek lisans öğrenimi gören Mustafa KAYACIK, evli ve 3 çocuk babasıdır.

İletişim Bilgileri

Adres: Deniz yolu caddesi Akdeniz Prefabrik 07350 Kumluca/ANTALYA

Telefon: (505) 768 80 90

E-posta: mustafakayacik@windowlive.com