T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

OLASILIK TEORİSİ VE MATEMATİKSEL İSTATİSTİĞİN ELEMANLARI ÜZERİNE

Murat UYMAZ

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2016

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

OLASILIK TEORİSİ VE MATEMATİKSEL İSTATİSTİĞİN ELEMANLARI ÜZERİNE

Murat UYMAZ

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2016

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 70111312013 numaralı öğrencisi Murat UYMAZ' ın hazırladığı "**Olasılık Teorisi ve Matematiksel İstatistiğin Elemanları Üzerine**" başlıklı ~~Doktora/~~Yüksek Lisans tezi ile ilgili Tez Savunma Sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 01/06/2016 Çarşamba günü saat 11:00'te yapılmış, tezin onayına oy birliği / oy çokluğu ile karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU

Üye : Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV (Danışman)

Üye : Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 22/06/2016 tarih ve 19 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

22/06/2016

Yrd.Doç.Dr. Hamdun ADIBELLİ
Bozok Üniversitesi
Fen.Bil.Enst.Müd.V.

İÇİNDEKİLER

OLASILIK TEORİSİ VE MATEMATİKSEL İSTATİSTİĞİN ELEMANLARI ÜZERİNE

Murat UYMAZ

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2016; Sayfa; 202

Tez Danısmanı: Prof Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ÖZET

Gündelik yaşamımızda, pratik problemlerin çözümünde, ilmi araştırmalarda kesin determinizmin sağlanmadığı hallerle daima karşılaşırız. Doğada karşılaştığımız olaylarda rastlantılığın olgusunu yalnız tespit etmek doğadan istifade etmek için veya bir sıra olayları kontrol etmek için yeterli olmuyor. Olayların miktarca değerlendirilmesi yöntemlerini ve böyle olayların gidişini önceden belirleme metotlarını öğrenmek günceldir. Bu hem pratik hem de teorik problemlerin çözümü için gereklidir. Böyle problemlerin çözümü ve incelenmesi metotları matematiğin iki dalında olasılık teorisi ve matematiksel istatistik dallarında yapılır.

Bu tezde olasılık teorisi ve matematiksel istatistiğin esas elemanları ve prensipleri ele alınıp öğrenildi ve birçok örnekte incelenmesi yapıldı. Bu tezde olasılık teorisinin ve matematiksel istatistiğin önemli teoremleri ispatları ile birlikte verildi ve bu esas özellikler örneklerde incelendi.

Anahtar Kelimeler: Olasılık Teorisi, İstatistik, Kolerasyon, Tesadüfi Fonksiyonlar

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS ON STAFF

Murat UYMAZ

Bozok University
Gradute School of Natural and Applied Sciences
Deparment of mathematics
Master of Science Thesis

2016; Page; 202

Thesis Supervisor: Prof.Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ABSTRACT

In our daily/casual life we face ,in scientific research the state which exact determiantion isn’t provided in thr solution or practical problems.It isn’t enough to control the events series or to benefit from nature to only detect the concept of coincidence in the events of nature that we face.The learning of methods of detecting in advanse of such events and the methods of detecting in advance of such event and the methods of the amount of the events is current.This is necessary fort he solutsons of the problems and examination methods are done in two branches of mathematic,the possibility hteary and mathematical statistic.In this paper/thesis.It is handled and leanit that possibility theary,the main elements of mathematic statistic and its principles and it is examined in a lot of examples.In this paper/thesis it is given that the proof of important mathematical statistic teorems and possibility theoryy and these main features are examined with examples.

Keywords: Probability theory , statistics, correlation , Random Functions

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve alakasını kesmeyen, ortaya çıkan her türlü bilimsel problemin çözümünde yardımlarının gördüğüm tez danışmanım Prof. Dr. Mammad Mustafayev'e, bölüm başkanımız Doç. Dr. Akın Osman Atagün'e, yüksek lisans süresi boyunca desteklerini esirgemeyen bölüm hocalarımız Yrd. Doç. Dr. Abdullah Sönmezoğlu ve Yrd. Doç. Dr. Onur Oktay'a teşekkürü bir borç bilirim.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\boldsymbol{n}!$	: Birden n'ye Kadar Pozitif Tamsayıların Çarpımı
$\boldsymbol{P_n}$	: n Elemanlı Kümenin Kombinasyonlarının Sayısı
$\boldsymbol{A_n^m}$	: n Elemanın m Elemanlı Kombinezonlarının Sayısı
$\boldsymbol{P(A)}$	: A Olayının Olasılığı
$\bigcup_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A_k}$	: n Sayıda $A_1, A_2, A_3..., A_n$ Olaylarının Toplamı
$\bigcap_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A_k}$	: n Sayıda $A_1, A_2, A_3..., A_n$ Olaylarının Çarpımı
$\boldsymbol{\bar{A}}$	: A Olayının Aksi Olayı
$\boldsymbol{P(A \setminus B)}$	: A olayının B Olayı Gerçekleşmiş Olması Durumunda Gerçekleşmiş Olmasının Olasılığı
$\boldsymbol{M[x]}$	: x Değişkeninin Beklenen Değeri
$\boldsymbol{D[x]}$	: x Rastgele Değişkenin Varyansı
$\sigma_{\boldsymbol{x}}^2$	: x Rastgele Değişkenin Varyansı
$\boldsymbol{m_x(t)}$	: $X(t)$ Stokastik Prosesinin Matematik Gözlemesi Fonksiyonu
$\boldsymbol{K_x(t,t')}$	: Kolerasyon Fonksiyonu

1.GİRİŞ

Gündelik yaşamımızda, pratik problemlerin çözümünde, ilmi araştırmalarda kesin determinizmin sağlanmadığı hallerle daima karşılaşırız. Doğada karşılaştığımız olaylarda rastlantılığın olgusunu yalnız tespit etmek doğadan istifade etmek için veya bir sıra olayları kontrol etmek için yeterli olmuyor. Olayların miktarca değerlendirilmesi yöntemlerini ve böyle olayların gidişini önceden belirleme metotlarını öğrenmek günceldir. Bu hem pratik hem de teorik problemlerin çözümü için gereklidir. Böyle problemlerin çözümü ve incelenmesi metotları matematiğin iki dalında olasılık teorisi ve matematiksel istatistik dallarında yapılır.

Böylece, olasılık teorisinde tesadüfi olayların olasılığı, tesadüfi kemiyetler ve bu kemiyetlerin sayısal karakteristikleri, beklenen değerleri, dispersiyonu, dağılım fonksiyonları tanımlanır ve özellikleri incelenir[1].

Her bir tesadüfi kemiyetin üstte gösterilen sayısal ve karakteristiklerini ve kanunlarını belirlemek için yeterli sayıda deneyler ve müşahideler yapmak gerekir.

Bu deney ve müşahidelerin sonuçları ve aynı zamanda kaynaklardan alınmış olan bilgiler ve değerler etraflı olarak öğrenilir, analiz edilir, incelenir ve böylece ele alındığı olay için sayısal karakteristikler (beklenen değerler, dispersiyonlar) ve kanunlar (dağılım fonksiyonları) belirlenir[2]. Rastgele (tesadüfi) olaylar üzere yapılan müşahedelerin ve deneylerin sonuçlarını nota almak, onları gruplaştırmak ve analizini yapmak metotları ve yöntemleri matematiksel istatistikte belirlenir ve öğrenilip incelenir. Matematiksel istatistikte birçok problemler ele alınır. Bunlardan mesela, istatistik bilgilerin toplanılması ve gruplaştırılması; rastgele (tesadüfi) kemiyetlerin dağılım fonksiyonlarının belirlenmesi; dağılım fonksiyonunun ele alınmış rastgele (tesadüfi) kemiyete uygun gelen parametrelerin belirlenmesi; bir tesadüfi (rastgele) kemiyetin başka bir rastgele kemiyetle bağlantısının değerlendirilmesi[3]; belli olmayan dağılımın tipinin belirlenmesi; tipi belli olan dağılımın parametrelerinin değerleri hakkında faraziyelerin istatistik olarak yoklanılması gibi problemleri göstermek olur[4].

Olasılık teorisinin ve matematiksel istatistiğin metotları ve sonuçları birçok alanda uygulandığı gibi biyolojide, biyosistemlerde ve tıpta çok geniş şekilde istifade olunur ve uygulanılır[5]. Mesela, nöronların impulsunun aktifliği, beynin fonksiyonel sistemi vs. öğrenilir ve incelenir. Hafıza için matematiksel modeller verilir ve hafızanın çalışma mekanizması araştırılır. Genetik problemlerinin incelenmesinde de olasılık teorisi ve matematiksel istatistiğin metotları geniş şekilde kullanılır. Hücrede enerjinin oluşumu mekanizmi olasılık ve matematiksel istatistik yöntemleriyle incelenir. Hastalıkların belirlenmesindeki problemler olasılık teorisinin ve matematiksel istatistik metotlarının uygulanmasıyla çözülür. Bu tezde olasılık teorisinin ve matematiksel istatistik teorisinin uygulamada kullanılan metotları ele alınıp incelenir[6-11].

Böylece, bu tezde olasılık teorisi ve matematiksel istatistiğin esas elemanları ve prensipleri ele alınıp öğrenilir ve örneklerde incelemesi yapılır. Olasılık teorisinin ve mateatiksel istatistiğin önemli teoremleri ispatlanır ve esas özellikleri örneklerde incelenir.

2. KOMBİNATORİAL ANALİZİN ESAS ANLAMLARI VE SAYMA TEKNİKLERİ

Bu bölümde herhangi bir sonlu kümedeki elemanların sayısını veya herhangi bir deneyin olası sonuçlarının sayısının sayılmadan bulunması ve hesaplanması yöntemlerinin örneklerini vereceğiz. Bu tür problemlerin çözüm yöntemleri matematiğin kombinatorial analiz veya kombinatorika bölümünde verilir. Kombinatorial analizde genelde kümeler ve onların elemanlarından yapılmış kombinasyonlarla ilgili problemler çözülür. Mesela, birbirinden farklı rakamlardan oluşan $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kümesinin elemanlarından yapılmış 345, 534, 1036, 5671, 45 kombinasyonlarını ele alalım. Elemanların bu kombinasyonlarına dikkat edersek görüyoruz ki, bu kombinasyonların bazıları biri birinden rakamlarının sırası ile (mesela, 345 ve 534) bazıları onlara dahil olan rakamlarla (mesela, 1036 ve 5671), bazıları ise bunlarda bulunan rakamların sayısı ile (mesela, 345 ve 45) farklılık gösterir.

Böylece, kümenin elemanlarından yapılan kombinasyonların çok çeşitli olduklarını ve farklı şartları sağladıklarını kolaylıkla görüyoruz. Kombinasyonların yapılma kuralına bağlı olarak, bunlardan sade ve önemli olan üç çeşit kombinasyon seçilebilir:

1-Yer değiştirme (permütasyon),

2-Yerleştirme(aranjman),

3-Birleştirme (kombinezon).

Bunların burada ayrı ayrı tanımlarını verelim. Ama önce, kombinatorial analizde ve matematiğin diğer bölümlerinde sık sık rastlanan faktöriyelin tanımını verelim.

2.1.Faktöriyel Anlamı

1’ den n’ e kadar pozitif tam sayıların çarpımına n faktöriyel denir ve

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

olarak yazılır.

Ayrıca, $1!=1$ ve $0! = 1$ olarak tanımlanır[2].

Örnek 2.1:

$2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$,

$5! = 4! \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120$, $6! = 5! \cdot 6 = 120 \cdot 6 = 720$,

$7!-5! = 5!\cdot 6\cdot 7-5! = 5!\,(6\cdot 7-1) = 5!\cdot 41 = 120\cdot 41 = 4920,$

$$\frac{7!+5!}{6!}=\frac{5!(6\cdot 7+1)}{5!\cdot 6}=\frac{5!\cdot 43}{5!\cdot 6}=\frac{43}{6}.$$

Örnek 2.2: Aşağıdaki ifadeleri sadeleştirin.

a) $\dfrac{(n+1)!}{n!}$ b) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$ c) $\dfrac{1}{(n+1)!}+\dfrac{1}{n!}$

Çözüm:

a) $(n+1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot(n+1)$ ve $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$

olduğundan

$$\frac{(n+1)!}{n!}=n+1$$

bulunur.

b) $(n+1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$

$(n-1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)\cdot(n-1)$

olduğundan

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=n(n+1)$$

bulunur.

c) $(n+1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)$

$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots n$

olduğundan

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}=\frac{1+(n+1)}{(n+1)!}=\frac{n+2}{(n+1)!}$$

bulunur.

2.2.Yer Değiştirme (Permütasyon)

Farz edelim ki, A, B,C harfleri verilmiştir. Bu harflerden tüm mümkün olan üç harfli kombinasyonları yazalım[11].

ABC, CAB, BCA,
ACB, CBA, BAC.

Burada mümkün olan kombinasyonların sayısı 6 tanedir. Bu kombinasyonlar birbirinden yalnızca harflerin yerleşme sırası ile farklılık gösteriyor. Dikkat edecek olursak bu kombinasyonların her birinde harfler birbirinden farklı ve sayısı üçe eşittir.

n elemanın kombinasyonları birbirinden yalnızca elemanlarının sırası ile farklılık gösterirse; n elemanın böyle kombinasyonlarına onların yer değiştirmesi veya permutasyonu denir ve P_n ile gösterilir. Burada n kombinasyona (yer değiştirmeye) dahil olan elemanların sayısını gösteriyor.

n elemanlı kümenin kombinasyonlarının sayısını

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \qquad (2.1)$$

veya

$$P_n = n! \qquad (2.2)$$

formülü ile hesaplarız.

Böylece A,B,C elemanlarının kombinasyonlarının sayısı (2.2) formülüne esasen $P_3 = 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$ şeklinde bulunur.

Gerçektende kombinasyonun (yer değiştirmenin) birinci yerine üçüncü harf gelir. İkinci yerine üç harften yalnızca ikincisini kullana biliriz. Üçüncü yerine ise kalan yalnız bir harf gelebilir. Böylece, $3\cdot 2\cdot 1 = 6 = P_3$ elde edilir.

n elemanlı küme olduğunda n eleman, birinci yer n farklı yolla yerleştirilir. Bu yapıldıktan sonra ikinci yere geri kalan n-1 eleman n-1 farklı yolla yerleştirilir. Benzer olarak üçüncü yere ise n-2 eleman n-2 farklı yolla yerleştirilir ve böylece, çarpma ile P_n için (2.1) formülünü kullanırız.

2.3.Yerleştirme (Aranjman)

Farz edelim ki A,B,C,D harfleri verilmiştir. Bu harflerden yalnız 2 tanesini kullanarak kombinasyonları yazalım:

AC, AB, AD:
BA, BC, BD:
CA, CB, CD:
DA, DB, DC.

Burada mümkün olan kombinasyonların sayısı 12 tanedir.

Bu kombinasyonlara baktığımızda görüyoruz ki tüm aldığımız kombinasyonlar birbirinden ya harfleri ile ya da harflerin sırası ile farklılık gösteriyor (AB ve BA kombinasyonları farkı algılanır).

Birbirinden ya elemanları ya da elemanlarının sırası ile farklılık gösteren n elemanın m elemanlı kombinasyonlarına yerleştirme veya aranjman denir. (Buna bazen de n elemanın m elemanlı yer değiştirmeleri veya n elemanın m elemanlı permütasyonları da denir.)

n elemanın m elemanlı yerleştirmelerinin (aranjmanlarının) sayısı A_n^m sembolü ile gösterilir. Burada n tüm verilen elemanların sayısı, m ise her bir kombinasyondaki elemanların sayısıdır[10]. Doğal olarak $0 < m \leq n$ olduğu farz edilir.

n elemanın m elemanlı yerleştirmelerinin sayısını

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) \tag{2.3}$$

veya

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{2.4}$$

formülü ile hesaplarız.

$A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$ olduğundan bu sayı üstte ele aldığımız örneğin sonucu ile çakışıyor. Böyle ki, örnekte sıraların sayısı verilmiş tüm harflerin sayısına uygun geliyor, yani n = 4, sütunların sayısı ise 3 olduğundan tüm farklı kombinasyonların sayısı örnekte de $4 \cdot 3$ =12 oluyor.

A_n^m için (2.3) formülünü ele aldığımızda örnekteki hesaplama yöntemi ile elde ederiz. Gerçektende, n farklı eleman verilmiş olsun. Bu elemanlardan m eleman almakla yerleştirmeler yapmamız gerekir. Yani n farklı elemanı m yere ya elemanları, ya da elemanlarının sırasının değişmesiyle yerleştirmemiz gerekir. Burada birinci yere n eleman n farklı yolla yerleştirilebilir. İkinci yere geride kalan n-1 eleman n-1 farklı yolla yerleştirilebilir ve sonuçta m- ci yere geride kalan n- (m-1) eleman n – (m-1) farklı yolla yerleştirilebilir. Böylece çarpma ile tüm yerleştirmelerin sayısını bulursak (2.3) formülünü alırız. (2.4) formülü (2.3) formülünden direk alınır[10].

Not: $A_n^n = P_n = n!$ eşitliği açıktır.

Örnek 2.3:

a) $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

b) $\dfrac{A_{15}^3 + A_{15}^4}{A_{15}^5} = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13 + 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11} = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13 (1+12)}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11} = \dfrac{13}{132}$

.

Örnek 2.4: 1, 2, 3, 4, 5 rakamlarını birer defa kullanmak şartı ile kaç tane iki rakamlı sayı oluşturulur.

Çözüm: Şarta göre yapılacak iki rakamlı sayılar birbirinden ya rakamları ya da rakamlarının sırasıyla farklılık gösterdiğinden oluşturulacak ikililerin sayısı beş elemandan iki elemanlı yerleştirmelerinin (aranjmanlarının) sayısına eşittir: $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$. Böylece, iki rakamlı yirmi farklı sayı oluşturulur.

Örnek 2.5: A_6^3 ifadesini faktöriyel formülünü kullanarak hesaplayın.

Çözüm. $A_6^3 = \dfrac{6!}{(6-3)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$

2.4. Birleştirme (Kombinezon)

Birbirinden en az bir elemanı ile farklanan n elemanın m elemanlı tüm mümkün olan kombinasyonlarına birleştirme veya kombinezon denir[10] (n ve m doğal sayılar $m \le n$).

n elemanın m elemanlı birleştirme (kombinezon) sayısını sembolik olarak C_m^n, $C(n, m)$ veya $\binom{n}{m}$ şeklinde gösterilir.

C_m^n sayısını hesaplamak için genel formülü vermeden önce bir örneği inceleyelim.

A,B,C,D harflerinden oluşan ve en az bir elemanı (harfi) ile birbirinden farklanan aşağıdaki iki elemanlı (harfli) kombinasyonları yazalım:

AB, AC, AD, BC, BD, CD .

Buradan dört elemanın iki elemanlı birleştirmelerinin (kombinezonlarının) sayısının $C_4^2 = 6$ olduğunu görüyoruz.

Şimdi yazdığımız birleştirmelerin her bir kombinasyonunun tüm yer değiştirmelerini de yazalım:

AB, AC, AD, BC, BD, CD ;

BA, CA, DA, CB, DB, DC .

Sonuçta dört elemanın iki elemanlı yer değiştirmelerini (arranjmanlarını) bulmuş oluyoruz.

Buna bağlı olarak da C_4^2 için aşağıdaki denklemi yazabiliriz

$$C_4^2 \cdot P_2 = A_4^2.$$

Buradan da C_4^2 için $C_4^2 = \dfrac{A_4^2}{P_2}$ ifadesini buluruz. Böylece,

$$C_4^2 = \frac{A_4^2}{P_2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$$

olur.

Genel olarak n elemanın m elemanlı C_n^m sayıda birleştirmelerinin (kombinezonlarının) her biri için $P_m = m!$ sayıda yer değiştirmeleri (permütasyonları) olduğundan n elemanın m elemanlı birleştirmelerinde elemanların tüm mümkün olan yer değiştirmelerini de yaparsak sonuçta alınan yerleştirmelerin(arranjmanların) A_n^m sayısı için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m \ . \tag{2.5}$$

Buradan ise C_n^m için aşağıdaki formülü elde ederiz

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} \ . \tag{2.6}$$

Bu formülde $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ ve $P_m = m!$ olduğunu dikkate alırsak,

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} \tag{2.7}$$

buluruz**.** Buradaki C_n^m birleştirmeler sayısı için aşağıdaki

$$C_n^m = C_n^{n-m} \tag{2.8}$$

özelliğin doğru olduğunu gösterelim.

Gerçektende,

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} \quad , \quad C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-n+m)!\,(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

eşitliklerinden (2.8) eşitliğinin doğru olduğu bulunur.

Bu özelliğe esasen, $\frac{1}{2}n < m \le n$ olduğunda birleştirmeler sayısını C_n^{n-m} ile hesaplamak daha kolaydır.

Örnek 2.6: Sekiz kişiden kaç tane üçlü kurul oluşturulabilir.

Çözüm: Her kurul üç kişi alınarak yapılan sekiz kişinin bir birleştirmesidir (kombinezonudur). Buna göre' de

$$C_8^3 = \binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 56$$

kurul oluşturulabilir.

Örnek 2.7:

$$a)\ C_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!\,3!} = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{5!\,6\cdot 7\cdot 8}{5!\,3\cdot 2\cdot 1} = 56,$$

$$b)\ C_{10}^8 = \frac{10!}{(10-8)!\cdot 8!} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{8!\,9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 8!} = 45.$$

Örnek 2.8: 80 asker ve 3 subay vardır. 3 askerden ve 1 subaydan oluşan kaç tane yöntemle gözcü oluşturulur.

Çözüm: Askerleri

$$C_{80}^3 = \frac{80!}{77!\,3!} = 82160$$

yöntemle, 3 subay ise $C_3^1 = 3$ yöntemle seçildiğinden 3 asker ile 1 keyfi subay seçildiğinden aranan yöntemlerin sayısı

$$C_3^1 \cdot C_{80}^3 = 246480 \qquad \text{olur.}$$

3.OLASILIK TEORİSİNİN ESAS ANLAMLARI

3.1 Olasılık Teorisinin Konusu

Olasılık teorisi matematiğin, tesadüfi (rastlantı veya kesin olmayan) olaylarda kanuna uygunlukları inceleyip araştıran ve belirleyen bir dalıdır[2].

Tesadüfi veya rasgele olaylar belirli koşullar altında tekrarlandığında her zaman aynı sonuçları vermeyen olaylara denir[1].

Mesela, bir yarışa katılan atıcı hedefi vurabilir de vuramaya bilirde. Mesela, aynı şartlarda (aynı tüfeği kullanarak, mesafe aynı olduğunda, aynı hava şartlarında vs.) atıcı 100 atıştan 92 defa hedefi vurmuştur (yani atıcı 8' e yakın başarısızlığa uğramıştır). Şüphe yok ki, atıcı her 100 ateşten 92 başarı kazanamaya bilir. Atıcının başarısı bazen 90 veya 91, bazen 93 veya 94, bazen ise 92' den daha az veya daha fazla olabilir.

Böylece, bu örnekten görüyoruz ki, bir deneyin sonucunda herhangi bir rastgele olay, ya gerçekleşiyorsa yada gerçekleşmiyorsa o zaman bu deneyi aynı şartlarda çok sayıda tekrar etmekle olayın deneylerde gerçekleşmesinin sayısının deneylerin tekrarlanma sayısına orantısı ile bu rastgele olayı karakterize etmek olur.

Olasılık teorisi matematiğin bir dalı olmakla burada tesadüfi olaylar incelenerek olayların kütlevi tekrarlanmasında böyle kanuna uygunlukları bulunur ve incelenir.

Bu kanuna uygunlukları yazmak ve incelemek için burada önce olasılık teorisinin bazı esas anlamları ve tanımlarını verelim.

3.2. Deney. Tesadüfi (rastgele) Olayın Olasılığı

Bir takım verilmiş koşullarda tekrarlanarak gerçekleştirilen ve farklı sonuçlar verebilen her bir olaya, faaliyete, belirtiye, deney denir. Örneğin paranın, zarın atılmaları, hedefe ateş edilmesi olayları deneydir[3].

Olasılık teorisinde tesadüfi (rastgele) olay anlamı bu teorinin esas anlamlarındandır.

Belirli ve değişmez koşullar altında gerçekleştirilen bir deney sonucunda hasıl olabilen veya hasıl olamayabilen her bir olguya tesadüfi veya rastgele olay denir.

Böylece, tesadüfi olaylar gerçekleşmesi rastlantıya bağlı olan olaylardır. Mesela, paranın atılışında yazı yüzünün gelmesi veya atılan güllenin tespit edilen alana düşmesi esadüfi (rastgele) olaydır. Çünkü bu deneylerde beklenen sonuçlar (yazının çıkması, güllenin verilmiş alana düşmesi) gerçekleşmeye de bilir.

Örneklerdeki bu olayların her birinin gerçekleşmesinin belli bir imkan derecesi vardır. Olayları imkan derecesine göre karşılaştıra bilmemiz için her bir olaya onun imkan derecesini karakterize eden belli bir sayı karşı tutulur. Bu sayı büyük olduğunda olayların gerçekleşmesi imkanı da büyük olur. Böyle sayıya olayın olasılığı veya ihtimali adı verilir. Olayın olasılığı, onun mümkünlüğü (olanaklığı) derecesinin sayısal bir objektiv ölçüsüdür.

Verilmiş deneyde mutlaka gerçekleşen olaya kesin olay denir. Kesin olay deneyde her zaman elde edilen olaydır. Mesela, bir zarı attığımızda 6 sayısından büyük sayının elde edilememesi olayı kesin olaydır. Kesin olayın olasılığını 1 alırsak, o zaman tüm diğer mümkün, ama kesin olmayan, olaylar birden küçük olan ve birimin hisselerinden oluşan olasılıkla karakterize edilirler.

Kesin olaya zıt olan olay olanaksız (mümkün olmayan) olaydır. Olanaksız olay verilmiş deneyde elde edilemeyen olaya denir. Mesela, bir zarı attığımızda 12 sayısının elde edilebilmesi olanaksız (mümkün olmayan) olaydır. Doğal olarak olanaksız olayın olasılığı sıfır götürülüyor. Böylece, keyfi olayın olasılığı sıfırla bir arasında yerleşiyor.

Dikkat edelim ki, olayın olasılığının böyle tanımlanması ile olasılığın tanımına bir pratik anlam verilmiş oluyor.

Gerçektende, deney esnasında en çok gerçekleşen olaylar daha olasılıklı olay, çok az gerçekleşen olaylar daha az olasılıklı ve hemen hemen hiç gerçekleşmeyen olaylar ise çok az olasılıkla hesaplanıyor.

Böylece, olayın olasılığı olayın deneyde gerçekleşmesi frekansı (sıklığı) ile bağlantılı olduğunu görüyoruz. Bu yöntemin devamı olarak olayın frekansı anlamını ve olasılığın istatistiksel tanımını verelim.

3.3. Olayın Rölatif (nispi) Frekansı

Farz edelim ki, herhangi bir deney yapılıyor. A, bu deneyde gerçekleşe bilen ve gerçekleşemeye de bilen tesadüfi (rastgele) bir olaydır.

Farz edelim ki, aynı şartlar altında deney N kez yapılmıştır. A olayı bu deneylerde M kez gerçekleşmiştir ve (N-M) sayıda ise gerçekleşmemiştir. O zaman $\frac{M}{N}$ orantısına, A olayının bu deneyler dizisindeki nispi (rölatif) frekansı denir[4].

Örnek 3.1: Farz edelim ki, hedefe verilmiş olan top dan aynı koşullarda 6 seri ateş edilmiştir:

1-ci seride 5 ateş edilmiş, değme sayısı 2,

2- ci seride 10 ateş edilmiş, değme sayısı 6, 3- ci seride 12 ateş edilmiş, değme sayısı 7,

4- cü seride 50 ateş edilmiş, değme sayısı 27,

5- ci seride 100 ateş edilmiş, değme sayısı 49,

6- cı seride 200 ateş edilmiş, değme sayısı 102.

Hedefe değme olayını A ile gösterelim. A nın serilerdeki nispi frekansı aşağıdaki gibi bulunur:

1- ci seride $\frac{2}{5} = 0{,}40$;

2- ci seride $\frac{6}{10} = 0{,}60$;

3- cü seride $\frac{7}{12} = 0{,}58$;

4- cü seride $\frac{27}{50} = 0{,}54$;

5- ci seride $\frac{49}{100} = 0{,}49$;

6- cı seride $\frac{102}{200} = 0{,}51.$

Örnekten görüldüğü gibi olayın nispi frekansı tesadüfi olmakla tüm deneyler sayısı N' e bağlı olan bir sayıdır. N sayısı çok büyük olduğunda bu sayının sonraki büyümesine bakmayarak, genelde olayın nispi frekansı çoğu zaman az değişiyor ve böylece deneylerin sayısı arttıkça nispi frekans gittikçe rastgele sayı olmayıp genelde determinik bir sayı oluyor. Yani nispi frekans istatistik olarak karşımıza çıkıyor.

Ama öyle olaylar var ki, onların nispi frekansları deneylerin sayısını artırmamıza bakmayarak kararlaşmıyor.

Fizikte, Biyolojide, Ekonomide ve İlmin başka alanlarında nispi frekansları istatistik kararlı olan tesadüfi (rastgele) olaylara çok rastlanıyor.

İstatistik kararlı nispi frekans A olayının gelişinin olasılığını değerlendirmeye objektif olarak imkan veriyor. Böylece, üstteki bölümde not ettiğimiz gibi olasılık anlamı deneylerle belirlenen pratik anlamı olan istatistik kararlı nispi frekans anlamı ile bağlıdır ve $\frac{M}{N}$ orantısı yaklaşık olarak olasılığı istatistiksel olarak tanımlamamıza bir yaklaşım (bir yöntem) veriyor.

3.4. Olayın Olasılığının İstatistiksel Tanımı

Çoğunlukla ayrı ayrı olaylarla yapılan deneylerin sonuçları gösteriyor ki, büyük ekseri hallerde (nadir-az rast gelen hallerden başka) verilmiş tesadüfi A olayının büyük sayıda deneylerde gelişinin nispi frekansı bu olaya bağlı olan bir p sayısından çok az farklanır.

Tecrübelerden görünen bu pratik olgu sembolik olarak

$$\frac{M}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} p \qquad (3.1)$$

gibi gösterilir. Burada N deney sayısı, M bu deneylerde A olayının gerçekleşmesidir. Buradaki p sayısına tesadüfi A olayının olasılığı veya ihtimali denir ve sembolik olarak

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{p} \qquad (3.2)$$

gibi yazılır.

(3.1) bağlantısını aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

N deneyler sayısını sınırsız artırdığımızda A olayının nispi frekansı bu olayın gelişinin p olasılığına yaklaşıyor.

Dikkate alalım ki p olasılığı A olayının verilmiş deneylerde gelişinin mümkünlüğünün objektif karakteristiği olmakla A olayının kendi karakteri (özelliği) ile belirleniyor[5].

Örnek 3.2: Bir zarın 100 kez atılmasında 20 kez 1, 17 kez 2, 15 kez 3, 18 kez 4, 14 kez 5, 16 kez 6 gelmiştir. Gerçekleştirilmiş bu deneyler serisinde 6 sayısının gelmesi olasılığını bulunuz.

Çözüm: 100 atışta 16 kez 6 elde edilmiştir. Burada N=100 ve M=16, A=6. Bu nedenle 6 sayısının gelmesi olasılığı yaklaşık olarak aşağıdaki gibi hesaplanıyor:

$$\mathrm{p}(\mathrm{A}) \approx \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} = \frac{16}{100} = 0{,}16.$$

İleride göreceğiz ki olayların olasılığını bulurken her zaman onların deneylerde gerçekleşmesinin nispi frekansının bulunmasına gerek yoktur. Bir çok hallerde olayların olasılığı verilen olayın gerçekleştiği deneyi incelemek de bu olayın olasılığını hesaplamakla oluyor. Bir çok hallerde ise verilmiş olayların olasılığı, bu olaylarla bağlı olan diğer olasılığı belli olan olaylardan istifade ederek bulunur. Olasılık teorisinde böyle yöntemler vardır. Bu yöntemler olasılık teorisinin esas konusunu oluşturuyor. Ama böyle yöntemlerde elde edilen yöntem sonuçta deneyler esasında bulunan tecrübi belirtilere dayanıyor.

Önce olayların olasılığının (deneyler yapılmadan) vasıtasız hesaplama yöntemleri ile tanışalım. Bunun için olasılığın klasik tanımını verelim.

3.5. Olasılığın Klasik Tanımı ve Olasılığın Vasıtasız Hesaplanması

Bir sınıf deneyler vardır ki, onların mümkün sonuçlarının olasılığı deneyin kendi koşulları esasında bile vasıta değerlendirilebilir. Bunun için deneyin her bir farklı sonucu simetrikliğe sahip olmalıdır. Bu esastan da deneyde her bir sonucun objektif olarak aynı olanağa sahip olması gerekir.

Mesela, homojen ve simetrik yapılmış ve yüzlerinde 1,2,3,4,5,6 yazılmış oyun zarını attığımızda üst yüzde ℓ $(1 \le \ell \le 6)$ sayısının gelmesi olayının olasılığını bulalım. Zar simetrik ve homojen yapıldığında 1- den 6- ya kadar keyfi sayının gelişi aynı olanaklıdır. Zarı çok büyük N sayıda attığımızda ℓ sayısı veya herhangi 1,2,3,4,5,6 sayılarından biri üst yüzde $M = \frac{N}{6}$ kez gele bilir. Bu tecrübelerde tasdik edilir (doğrulanıyor).

Böylece, ℓ sayısının üst yüzde gelişinin nispi frekansı

$$\frac{N}{M} = \frac{\frac{N}{6}}{N} = \frac{1}{6}$$

sayısına yakın oluyor. Buna göre, ℓ sayısının veya herhangi 1,2,3,4,5,6 sayılarından birisinin üst yüzde gelmesinin olasılığının $\frac{1}{6}$ olduğu hesap edilir. Bu sayı deneydeki altı mümkün sonucun simetriklik özelliğini objektif olarak karakterize ediyor.

Tüm sonuçları simetrik olan deneylerde olayların olasılığını hesaplamak için benzer şekilde yöntem kullanmak ve uygulamak gerekiyor. Olayların olasılığının böyle hesaplanması yöntemine olasılıkların vasıtasız hesaplanması yöntemi denir[6].

Bu yöntemi uygulamaya daha yararlı şekilde vermemiz için önce aşağıdaki yardımcı anlamları verelim.

Tanım 3.1: Eğer verilmiş tesadüfi (rastgele) olaylardan keyfi ikisi verilmiş deneyde birlikte hiç bir zaman gerçekleşemezse, o zaman böyle olaylara bağdaşmayan (uyuşmayan) olaylar denir[2].

Bağdaşmayan olaylara örnekler:

1) Paranın atılışında yazı ve tura yüzlerinin gelişi olayları;
2) Bir ateşte hedefi vurma ve yan vurma olayları;
3) Oyun zarının bir atılışında 1,3,4 sayılarının birlikte gelişi olayları.

Tanım 3.2: Verilmiş deneyde (simetriklik esasında) birkaç olaydan hiçbirinin diğerinden (objektif olarak) daha üstün imkanlı olduğunu söylemek mümkün değilse, o zaman bu olaylara eşit imkanlı olaylar denir[2].

Eşit imkanlı olaylara örnekler:

1) Para atıldığında yazı ve tura yüzlerinin gelişi olayları;
2) Zarı attığımızda 1,2,4,5 sayılarının gelişi olayları;
3) İçinde birden ona kadar numaralanmış on tane bilardo bilyesi olan sandıktan bir bilye aldığımızda 1,2,3 numaralı bilyenin gelişi olayları.

Tanım 3.3: Verilmiş deneyde birkaç olaydan her bir deneyde bu olaylardan keyfi biri kesin gerçekleşirse ve bu olaylarla bağdaşmayan (uyuşmayan) hiçbir olay bu deneylerde gerçekleşmezse, o zaman bu olaylar tam gurup oluşturuyor denir[2].

Tam gurup oluşturan olaylara örnekler:

1) Parayı attığımızda yazının ve turanın geliş olayları;
2) Ateşte hedefe değme ve yan değme olayları;
3) Zarı attığımızda 1,2,3,4,5,6 sayılarının gelişi olayları;
4) İki ak ve üç siyah bilardo bilyesi olan sandıktan bir bilye götürdüğümüzde ak bilyenin ve siyah bilyenin gelişi olayları;
5) İki ateşte hedefi en az bir defa vurma ve en az bir defa yan vurma olayları.

Genelde, öyle olaylar sistemine rast gelmek oluyor ki, bunlar tam gurup oluşturuyor ve aynı zaman da eşit imkanlı ve bağdaşmayan olurlar. Böyle olaylar sistemine şans veya hal denir. Mesela, aynı zarı attığımızda 1, 2, 3, 4, 5, 6 sayılarının gelmesi olayı şanstır.

Eşit imkanlı, bağdaşmayan olayların tam gurubunun ele alalım.

Böyle gurubun bir olayının gerçekleşmesi herhangi bir verilmiş A olayının gerçekleşmesini getirirse o zaman gurubun bu olayı, A olayının gerçekleşmesi için elverişli şerait yaratır denir.

Örnek 3.3: Sandıkta 1- den 8- e kadar numaralanmış 8 bilardo bilyesi vardır. 1,2,3 rakamlı bilyeler kırmızı, kalanları ise siyah renktedir. Sandıktan bir bilye götürdüğümüzde 1 rakamlı bilyenin gelişi (2 veya 3 rakamlı bilyenin gelişi) olayı kırmızı bilyenin gelişi olayına elverişli şerait yaratır.

Tanım 3.4: Eğer verilmiş deneyde iki olay tam gurup oluşturuyor ve bağdaşmıyor ise, o zaman bu olaylara zıt veya aksi olaylar denir. A olayına zıt olan olay $\overline{A}$ ile işaret edilir.

Mesela, parayı attığımızda yazının ve turanın gelişleri olayı zıt olaylardır.

Eğer herhangi bir deneyin mümkün sonuçları deneyin kendi yapısına göre simetrikliğe sahip ise, o zaman deneyin tüm mümkün sonuçları halleri bir birini inkâr eden (bağdaşmayan) eşit imkânlı olayların tam gurubunu (sistemini) oluşturuyor. Böyle deneyler "şanslar şemasına,, veya "kutu şemasına,, getirilir denir[3]. Eğer deney şanslar şemasına getirilebilirse, o zaman bu deneydeki A olayının olasılığını aşağıdaki gibi tanımlamak olur.

Tanım 3.5: Farz edelim ki verilmiş deneyin tüm sonuçları eşit imkanlı, bağdaşmayan olayların tam gurubunu oluşturuyor. Bu deneyde A olayının gerçekleşmesi olasılığı bu olay için elverişli haller sayısının deneyin tüm mümkün sonuçları halleri sayısına orantısı gibi tanımlanıyor, yani

$$P(A)=\frac{m}{n} \quad . \tag{3.3}$$

Burada $P(A)-A$ olayının olasılığı; m, A olayı için elverişli haller sayısı; n - tam gurup oluşturan eşit imkânlı bağdaşmayan tüm mümkün haller sayısıdır.

Eğer herhangi bir U olayı için tam gurup oluşturan eşit imkânlı, bağdaşmayan olayların tüm n hallerinde U olayı için elverişli hal doğursa, o zaman bu olay kesin olay olur ve bu olayın olasılığı

$$P(U)=\frac{n}{n}=1$$

olur.

Eğer herhangi bir V olayı için tam gurup oluşturan eşit imkânlı, bağdaşamayan olayların n halinden hiç biri elverişli hal doğurmuyorsa, o zaman bu olay mümkün olamayan (olanaksız) olay oluyor ve bu olayın olasılığı

$$P(V)=\frac{0}{n}=0$$

olur. Böylece, bu tanımından anlaşılıyor ki,

$$0 \le p(A) \le 1.$$

Gerçektende, keyfi A olayı için

$$0 \le m \le n$$

olduğundan bu eşitsizliğin her yanının n, e bölersek üstündeki eşitsizliği alırız.

Olasılığın bu tanımına olasılığın klasik tanımı denir. (3.3) formülü ise olasılığın klasik formülüdür. Bu formülden yalnız ve yalnız mümkün sonuçları simetrikliğe sahip olan, yani şanslar şemasına getirilen deneylerde geçekleşe bilen olayların olasılığını vasıtasız hesaplamak için istifade edilebilir[4].

Örnek 3.4: İyi karıştırılmış 36 karttan bir kart seçilir. Bu karttın maça renkten olması olasılığını bulunuz.

Çözüm: Bu şanslar şemasıdır. A ile çekilen kartın maça renkten olması olayını gösterelim. A olayının elverişli haller sayısı m=9 ve tüm haller sayısı n=36.

Böylece, aranan olasılık aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Örnek 3.5: Aynı zamanda iki para atılıyor. Her iki paranın da tura gelmesi olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: Mümkün hallerin şemasını yapalım

	Birinci Para	**İkinci Para**
1 – ci hal	Tura	Tura
2 – ci hal	Tura	Yazı
3 – cü hal	Yazı	Tura
4 – cü hal	Yazı	Yazı

Tüm haller sayısı 4, Elverişli haller sayısı ise 1 dir.

Böylece, her iki parada da turanın gelişinin olasılığı $P(A)$ için buluruz:

$$P(A) = \frac{1}{4}.$$

Örnek 3.6: Sandıkta 2 beyaz ve 3 siyah bilardo bilyesi vardır. Sandıktan rastgele bir bilye çıkartılıyor. Bu bilyenin beyaz olması olasılığını bulunuz.

Çözüm. Beyaz bilyenin gelişi olayını A ile gösterelim. Tüm mümkün haller sayısı n = 5 ; A olayı için elverişli haller sayısı m = 2 dir.

Böylece; $P(A)=\dfrac{2}{5}$ dir.

Örnek 3.7: Sandıkta a sayıda beyaz ve b sayıda siyah bilardo bilyeleri vardır. Sandıktan rastgele iki bilye alınır. Alınan her iki bilyenin de beyaz olması olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: Seçilen bilyelerin her ikisinin de beyaz olması olayını B ile gösterelim. Tüm mümkün haller sayısını n ve B olayı için elverişli haller sayısını m sayılarını hesaplayalım:

$$n = C_{a+b}^{2} \quad ; \quad m = C_{a}^{2} \ ;$$

böylece,

$$P(B)=\frac{C_{a}^{2}}{C_{a+b}^{2}} \ \text{dir.}$$

Örnek 3.8: 100 mamul eşyadan 10 mamul eşya bozuk maldır. Rasgele 4 mal seçiliyor. Bunlardan 3'ünün bozuk olamamasının olasılığını bulunuz.

Çözüm: 100 maldan 4 mal aşağıdaki mümkün yollarla götürülür.

$$n = C_{100}^{4}.$$

4 maldan 3'ünün bozuk olmaması olayı A için elverişli halleri sayısı

$$m = C_{90}^{3} \cdot C_{10}^{1}$$

olur. O zaman aranan P(A) olasılığı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{90}^{3} \cdot C_{10}^{1}}{C_{100}^{4}}=\frac{1424}{4753}\approx 0{,}3.$$

Örnek 3.9: N mamul eşyalardan M mamul eşya bozuk maldır. Rastgele ℓ mal götürülüyor. Götürülen ℓ sayıda maldan tam p tane malın bozuk olmasının olasılığını bulunuz.

Çözüm: N sayıda maldan ℓ sayıda malı $n = C_{N}^{\ell}$ mümkün yolla seçmek olur. Elverişli haller sayısı

$$m = C_{M}^{p} \ C_{N-M}^{\ell-p}$$

formülü ile hesaplanıyor. Böylece, aranan olasılık aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$P(A)=\frac{C_{M}^{p} \, C_{N-M}^{\ell-p}}{C_{N}^{\ell}}.$$

Örnek 3.10: Kutuda aynı ölçüde 10 beyaz 5 siyah top vardır. Bu kutudan rastgele 5 top alınır.alınan toplardan 3 beyaz, 2 siyah olmasının olasılığını bulunuz.

Çözüm. Kutudan alınan toplardan 3'ünün beyaz 2'sinin siyah olması olayını A ile gösterelim. Kutuda olan 15 toptan 5 topu genelde

$$C_{15}^{5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3003$$

yolla seçe bildiğimizden A olayı için mümkün haller sayısı

$$n = C_{15}^{5}$$

olur.

A olayı için elverişli haller öyle hallerdir ki, bu hallerin her birinde 3 beyaz ve 2 siyah top vardır. Böyle hallerin sayısını bulalım.

Kutudaki 10 beyaz toptan 3 beyaz topu C_{10}^{3} yolla seçe biliriz. Kutudaki 5 siyah toptan 2 siyah topu C_{5}^{2} yolla götürebiliriz.

C_{10}^{3} sayıda seçile bilen her 3 beyaz topla birlikte C_{5}^{2} sayıda her defa 2 siyah top iştirak edebilir. Buna göre A olayı için elverişli haller sayısı

$$m = C_{10}^{3} \cdot C_{5}^{2} = 1200$$

olur.

Böylece olasılığın klasik formülünden buluruz:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1200}{3003} \approx 0,4 .$$

Örnek 3.11: Kutuda 1'den m'e kadar numaralanmış küpler vardır. Kutudan ardışık olarak rastgele küpler alınır. Ardışık alınan küplerin artma sırasıyla dizilmesinin olasılığını bulunuz.

Çözüm: Burada mümkün haller sayısı $n = P_m = m!$ sayısına eşittir. Elverişli haller sayısı ise 1 dır. Buna göre de olasılığın klasik tanımına esasen aranan olasılık

$$P(A) = \frac{1}{m!}$$

olur.

Örnek 3.12: Zarı bir defa attığımızda üst yüzde çift sayı gelmesi olasılığını bulunuz.

Çözüm: Zarı bir kez atarken çift sayı elde edilmesi olayını A ile işaret edelim. A olayı için tüm mümkün olan haller sayısı n=6. A olayı için elverişli haller sayısı m=3 olur.

Buna göre de,

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \text{ dir.}$$

Örnek 3.13: İki zarı birlikte attığımızda zarların üst yüzünde gelen sayıların toplamı uygun olarak 2, 6, 10, 12 olmasından oluşan A, B, C, D olaylarının olasılıklarını bulunuz.

Çözüm: İki zarı birlikte attığımızda birinci zarın her bir yüzü ile ikinci zarın her bir yüzü düşe bildiğinden tüm mümkün olaylar sayısı n=36 olur. A, B, C ve D olayları için elverişli haller sayısı ise aşağıdaki tabloda verilmiştir.

A	1+1=2	m=1
B	1+5=6, 2+4=6, 3+3=6, 4+2=6, 5+1=6	m=5
C	4+6=10, 5+5=10, 6+4=10	m=3
D	6+6=12	m=1

Böylece,

$$P(A)=\frac{1}{36}, \quad P(B)=\frac{5}{36}, \quad P(C)=\frac{3}{36}, \quad P(D)=\frac{1}{36}.$$

Örnek 3.14: Hedefe iki toptan ateş ediliyor. Birinci topun hedefin vurması olasılığı $\frac{8}{10}$, ikinci topun hedefi vurması olasılığı ise $\frac{7}{10}$ dur. İki toptan aynı anda bir hedefe ateş edildiğinde hedefin vurulması olasılığını bulunuz. Bu zaman herhangi bir toptan atılan ateş hedefe değerse hedef vurulmuş oluyor.

Çözüm: Bu problem aşağıdaki gibi modelleştirilerek kutu şemasına getirilebilir. İki kutuda her birinde 10 tane olmak üzere 1'den 10'a kadar numaralanmış bilardo bilyeleri vardır. Birinci kutudaki bilyelerin 8 –i kırmızı 2'si siyah, İkinci kutudaki bilyelerin 7'si kırmızı 3'ü siyahtır. Her kutuda bir bilye götürülür. Böylece, götürülmüş iki bilyeden en azından birinin kırmızı olması olasılığını bulunuz.

Birinci kutunun her bir bilyesi ikinci kutunun keyfi bilyesi ile birlikte götürüle bilir. Buna göre mümkün haller sayısı bu olayda $n = 10 \cdot 10 = 100$ oluyor.

Şimdi elverişli haller sayısını hesaplayalım.

Birinci kutunun her bir 8 kırmızı bilyesini ikinci kutunun keyfi bilyesi ile götürdüğümüzde götürülen bilyelerin her defa en az biri kırmızı olacaktır. Böyle haller sayısı $8 \cdot 10 = 80$ oluyor. Birinci kutunun her bir siyah bilyesi ile ikinci kutunun keyfi 7 kırmızı bilyesin de götürdüğümüzde götürdüğümüz bilyelerin biri daima kırmızı olacaktır. Böyle haller sayısı $2 \cdot 7 = 14$ oluyor.

Böylece tüm elverişli haller sayısı

$m = 80 + 14 = 94$ oluyor.

Götürülen bilyelerden en azından birisinin kırmızı olması olasılığı

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{94}{100} = 0,94$$

oluyor.

Not: Bu problemde biz ateş de olasılık problemini kutudan bu veya diğer bilyenin götürülmesinin olasılık problemine getirdik. Olasılık teorisinin birçok problemlerini de benzer yöntemle "kutu şemasına" getirmek oluyor. Buna göre kutudan bilyelerin götürülmesi ile ilgili olasılık problemlerine genelleşmiş olasılık problemi gibi bakmak gerekir.

3.6. Tesadüfî Kemiyet Anlamı

Olasılık teorisinin en önemli anlamlarından biri tesadüfî kemiyet anlamıdır. Rastladığımız üstteki örneklerde tesadüfî olayların sayılarla ifade edilerek sayılarla karakterize olduklarını görmüştük. Mesela, bozuk mamul malların sayısı, ateş de vuruşların sayısı, bir yılda herhangi bir ülkede doğan erkek ve kız çocuklarının sayıları vs. Böyle durum olasılık teorisi için tipik haldir. Bununla ilgili olarak sonucun tesadüfî (rastlantı) karakterli olması sayısının da tesadüfî (rastgele) olmasına getiriyor. Bu o anlama geliyor' ki deneyi tekrarladığımızda sayı beklenmedik şekilde değişiyor.

Deneyin sonucunda önceden belli olmayan bu veya diğer değerler alan kemiyete tesadüfî kemiyet denir. Böylece, tesadüfî kemiyet rastlantıya bağlı olarak bu veya diğer değerler alan değişkendir.

Tesadüfî kemiyetleri genelde büyük Latin harfleri X, Y, Z vs. gibi ve onların değerlerini ise küçük harflerle x, y, z vs. gibi işaret edeceğiz[1].

Tesadüfî Kemiyetlere Örnekler

1) Üç ateş de hedefin vurulmalarının sayısı ;

2) Bir iş günü süresinde telefon santrallerine müracaatlarının sayısı;

3) 10 tane ateş de vuruşların frekansı.

Bu üç örneğin her birinde de tesadüfî kemiyetler (rastgele değişkenler) önceden sayıla bilen ayrı ayrı, izole edilmiş değerler alıyor.

Birinci örnekte bu değerler:

0, 1, 2, 3;

İkinci örnekte:

1, 2, 3, 4…;

Üçüncü örnekte:

0 ; 0,1 ; 0,2 ; … ; 1,0 ;

sayılarıdır.

Sonlu veya sayılabilir (hesabi) sayıda birbirinden ayrılmış, izole edilmiş şekilde değerler alan tesadüfî kemiyetlere (rastgele değişkenlere) süreksiz, kesitli veya diskret tesadüfî kemiyetler denir.

Başka tipli tesadüfî kemiyetlerde vardır, mesela;

1) Bir bölgeye ateş zamanı güllenin düştüğü noktaların apsisi;

2) Analitik terazide cisimlerin tartılmasındaki hatalar;

3) Uçağın verilmiş yüksekliğe kalktığı andaki hızı;

4) Keyfi bir öğrencinin boyunun uzunluğu.

Böyle tesadüfî kemiyetlerin mümkün değerler kümesi birbirinden ayrılmamıştır, izole edilmemiştir; onların değerleri sürekli olarak herhangi bir sonlu veya sonsuz aralığı dolduruyor. Bu aralıkların sınırları bazen keskin ifade olunmuş oluyorlar. Ama genelde tesadüfî kemiyetlerin değerler kümesinin sınırları belirsiz şekilde oluyor. Mümkün değerleri sürekli olarak sonlu veya sonsuz bir aralığı dolduran tesadüfî kemiyetlere sürekli tesadüfî kemiyetler (sürekli rastgele değişkenler) denir.

Tesadüfî kemiyet anlamı olasılık teorisinde çok önemli rol oynar. Olasılığın ‘’klasik’’ teorisinde özellikle olaylarla işlemler yapıldığında, olasılığın çağdaş teorisinde mümkün oldukça tesadüfî kemiyetlerle çalışmaya ve faydalanmaya üstünlük verilir. Çağdaş olasılık teorisinde mümkün oldukça ‘’olaylar şemasından’’, “tesadüfî kemiyet şemasına” geçiş yapılıyor.

Burada olaydan tesadüfî kemiyete geçişin bir örneğini gösterelim.

Farz edelim ki, deneyin sonucunda A olayı gerçekleşe de bilir gerçekleşmeye de bilir. A olayı yerine A olayı geldiğinde 1 değerini, A olayı gelmediğinde ise 0 değerini alan X tesadüfî kemiyetini ele alabiliriz. Bu tesadüfî kemiyetin diskret (kesitli) tesadüfî kemiyet olduğu açıktır. Onun iki mümkün 1ve 0 değerleri vardır. Bu tesadüfî kemiyete A olayının karakteristik tesadüfî kemiyeti denir.

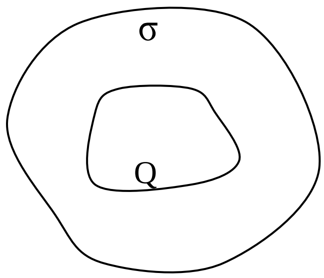
Pratikte olay yerine onların karakteristik tesadüfî kemiyeti üzerinde matematik işlemler yapmakla pratik problemlerin çözümü daha kolaylaşmış oluyor.

3.7. Geometrik Olasılık Anlamı

Olasılıkların olasılığını klasik $P(A)=\frac{m}{n}$ formülü ile hesapladığımızda eşit imkânlı, bağdaşmayan olayların tam gurubunu oluşturduğu mümkün haller sayısı n ve A olayı için elverişli haller sayısı m sonlu sayıda olması farz ediliyordu. Ama öyle olaylar vardır ki, onlar için mümkün ve elverişli haller sayısı sonsuz oluyor. Böyle olasılık problemlerinin bir kısmını çözmek için geometrik olasılık anlamı veriliyor.

Aşağıdaki problemi ele alalım.

Farz edelim ki, düzlem üzerinde bir σ bölgesi ve onun dâhilinde yerleşen bir Q bölgesi verilmiştir. (bk şekil 3.1) σ bölgesinden rastgele seçilen bir noktanın Q bölgesinden olmasının olasılığının bulunması istenir.



Şekil 3.1: Düzlemde σ bölgesi ve onun içindeki Q bölgesinin şekli

Bu problemi olasılığın klasik tanımının yardımı ile çözmek mümkün değildir. Bu problem için mümkün haller sayısı, σ bölgesindeki noktalar sayısı, elverişli haller sayısı ise Q bölgesindeki noktalar sayısı oluyor. Bu sayılar “sonsuz” olduğundan klasik formülden istifade ederek aranan olasılığı hesaplamak için elverişli haller sayısının mümkün haller sayısına orantısı bir sonuç vermez.

Böyle problemleri çözmek için geometrik olasılık anlamından istifade ediliyor. Bu tanımı vermek için, farz ediliyor ki, rastgele seçilen noktaların Q bölgesinden olmasının P (Q) olasılığı bu bölgenin ölçüsü (alanı) ile mütenasip olup onun formasına (şekline) ve tuttuğu yere bağlı değildir.

O zaman

$$P(Q) = k \cdot s(Q)$$

olur. Burada k mütenasiplik katsayısı ve s(Q) ise Q bölgesinin alanıdır. Mütenasiplik katsayısı k yı bulmak için Q=σ götürelim. Bu halde olay kesin olay olduğundan $P(\sigma) = 1$ olur ve

$$1 = k \cdot S(\sigma)$$

Buradan da k için aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$K = \frac{1}{S(\sigma)}.$$

Böylece,

$$P(Q) = \frac{S(Q)}{S(\sigma)} \tag{3.4}$$

formülünü buluruz.

(3.4) formülü ile bulunan olasılığa geometrik olasılık denir.

Geometrik olasılığın (3.4) formülü iki boyutlu uzayda verilmiştir. Bir boyutlu ve üç boyutlu uzaylarda verilmiş problemleri çözmek için (3.4) formülünde uygun olarak alan $(S(Q))$ uzunluk $(\ell(Q))$ ve hacim $(V(Q))$ götürülüyor ve uygun formüller;

$$P(A) = \frac{\ell(Q)}{\ell(\sigma)} \quad \text{ve} \quad P(A) = \frac{V(Q)}{V(\sigma)} \tag{3.5}$$

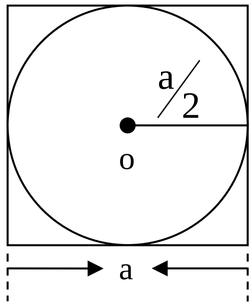
gibi yazılır.

Genel olarak bu formüller

$$P(Q) = \frac{\text{mes}Q}{\text{mes}\sigma} \tag{3.6}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada mes Q, Q bölgesinin ölçüsünü gösteriyor.

Örnek 3.15: Bir kenarının uzunluğu a’ya eşit olan karenin dâhiline daire çekilmiştir. (bk. Şekil 3.2)



Şekil 3.2: Kare içinde daire şekli

Karenin dahilinde rastgele görünen noktanın dairenin dahilinden olmasının olasılığını bulunuz.

Çözüm: Bir kenarının uzunluğu a- ya eşit olan karenin alanı

$$S(K) = a^2$$

ve onun dâhiline çekilen dairenin alanı ise

$$S(D) = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}a^2$$

olduğundan (3.4) formülüne esasen buluruz

$$P(A) = \frac{S(D)}{S(K)} = \frac{\frac{\pi}{4}a^2}{a^2} = \frac{\pi}{4}$$

Örnek 3.16: R yarıçaplı daire 2n sayıda eşit parçalara ayrılmıştır ve bu parçalar sırası ile kırmızı ve siyah renkte boyanmıştır. Hızla döndürülen bu daireye atılan güllenin kırmızı parçaya değmesi olasılığını bulunuz.

Çözüm: Dairenin alanı,

$$S(D) = \pi R^2$$

ve kırmızı renkle boyanmış parçaların toplam alanı

$$S(S) = n \cdot \frac{1}{2n}\pi R^2 = \frac{1}{2}\pi R^2$$

oluyor. Buna göre de istenilen olayın olasılığı (3.4) formülüne de esasen

$$P(A) = \frac{S(S)}{S(D)} = \frac{\frac{1}{2}\pi R^2}{\pi R^2} = \frac{1}{2}$$

olur.

Örnek 3.17: $[-2,2]$ Aralığından rastgele seçilen noktanın $[0,1]$ aralığından olması olasılığını bulunuz.

Çözüm:

$\sigma = [-2,2]$, $Q = [0,1]$, $\ell = [\sigma] = mes\sigma = 2 - (-2) = 4$, $\ell(Q) = mesQ = 1 - 0 = 1$

olduğundan istenilen olayın olasılığı (3.6) formülüne esasen

$$\mathrm{P}(\mathrm{Q}) = \frac{\mathrm{mesQ}}{\mathrm{mes}\sigma} = \frac{1}{4}$$

olur.

4.OLASILIK TEORİSİNİN ESAS TEOREMLERİ

Bir önceki bölümde biz olasılığın klasik tanımını ve olasılığın bulunması için klasik formül olarak adlandırılan formülü verdik. Bu formül ile şans şemasına getirile bilen olayların olasılığının hesaplanabildiğini gördük. Bu bölümde biz bir olayın olasılığının bulunmasını bu olayla bağlı olan diğer olasılığı belli olan veya olasılığı kolaylıkla hesaplanan olayların olasılıklarının yardımı ile bulunmasına getiren bilvasıta (dolaylı) yöntemlerle tanışacağız. Genelde tüm olasılık teorisi, esasen böyle bilvasıta metotlar sisteminden yapılmıştır. Böyle yöntemlerin esas amacı gerekli deneylerin, tecrübelerin sayısını minimuma indirgemektir. Bu metotları kullandığımızda her zaman bu veya diğer şekilde olasılık teorisinin esas teoremlerinden istifade etmiş oluruz. Bu teoremler iki çeşittir: olasılıkların toplanması teoremi ve olasılıkların çarpımı teoremleridir. Bu teoremler genelde şans şemasına getirilen olaylar için ispatlanıyor. Şans şemasına getirilemeyen olaylar için bu teoremler prensip veya ön doğru (postulat) gibi kabul olunur (kullanılır).

Bu teoremleri formüle etmemizden ve ispatlamamızdan önce bazı yardımcı anlamları: olayların toplamı ve olayların çarpımı anlamlarını verelim.

4.1. Olayların Toplamı ve Olayların Çarpımı Anlamı

Matematikle ilgili bilimlerin çoğunda ayrı ayrı objeler üzerinde aritmetik işlemlere benzer sembolik işlemler, toplam ve çarpma işlemleri tanımlanıyor ve uygulanıyor.

Mesela, mekanikte vektörlerin toplamı ve çarpımı, cebirde matrislerin toplamı ve çarpımı böyle işlemlerdendir. Bu işlemler belirli kuralları saklamakla ifadelerin matematik yazı şeklini sadeleştirir ve ilmi sonuçların alınmasına önemli yardımı olur. Olaylar üzerinde tanımlanan böyle benzer toplam ve çarpım işlemlerinin tanımlanması olasılık teorisinde çok faydalı olmuştur[11].

Tanım 4.1. A, B olaylarının hiç olmazsa birinin gelişinden, ya A olayının gelişinden, ya da B olayının gelişinden, ya da A ve B olaylarının her ikisinin gelişinden oluşan C olayına bu olayların toplamı denir.

A ve B olayının toplamı sembolik olarak A+B ya da $A \cup B$ ya da A ya B gibi işaret ediliyor. A+B işareti bağdaşmayan olayların toplamı için kullanılıyor. A ya B toplam işaretinde ’’ya’’ yazısı bu toplamda çıkarma karakteri taşımıyor. 4.1. tanımına uygun olarak bu olaylardan hiç olmazsa birinin gerçekleşmesi anlamını taşıyor. Mesela, A olayı hedefin birinci ateşte vurulması olayı B olayı hedefin ikinci ateş de vurulması olayı olursa C=A+B olayı hedefin genelde vurulması olayıdır. C olayı için hedefin hangi ateş de vurulduğu fark etmez. Birinci ateş demi ikinci ateş demi ya da her iki ateş demi C olayı için önemli olan hedefin vurulmasıdır.

Eğer özel halde A ve B olayları bağdaşmayan olaylar olursa, o zaman bu olayların birlikte gelişi aradan kalkıyor A ve B olaylarının toplamı ya A olayının ya da B olayının gelişi oluyor.

Genelde sonlu sayıda olayların toplamları hiç olmazsa bu olayların birinin gelişinden oluşan olaya denir. n sayıda $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ olaylarının toplamı uygun olarak ya

$$A_1 + A_2 + ... + A_n \text{ veya } \bigcup_{k=1}^{n} A_K$$

ya da

$$A_1 \text{ ya } A_2 \text{ ya } A_3 \text{ ya...ya } A_n$$

gibi işaret olunuyor.

İkiden çok olayların toplamına örnek olarak aşağıdaki deneye bakalım. Farz edelim ki, deney hedefe 5 kez ateş den ulaşıyor. Bu deneyde aşağıdaki olayları ele alalım:

A_0 – Hedefin bir tanede olsa vurulmaması;

A_1 – Hedefin düz bir kez vurulması;

A_2 – Hedefin düz iki kez vurulması;

A_3 – Hedefin düz üç kez vurulması;

A_4 – Hedefin düz dört kez vurulması;

A_5 – Hedefin düz beş kez vurulması.

O zaman

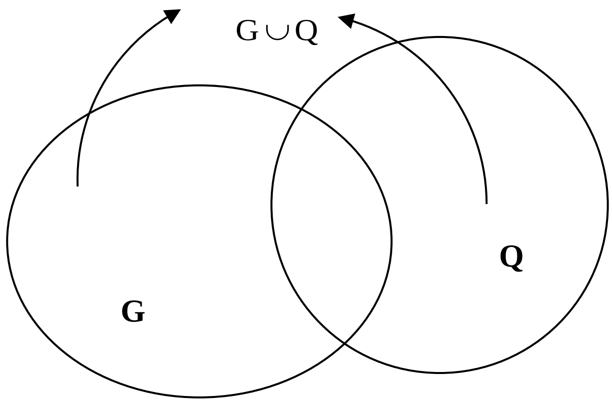
$$A = A_0 + A_1 + A_2$$

olayı hedefin en çok iki kez vurulması olayı olur,

$$B = A_3 + A_4 + A_5$$

olayı hedefin en az üç kez vurulması olayı olur[2].

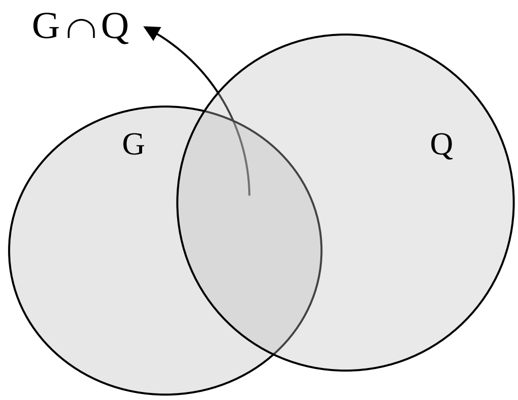
Örnek 4.1: Farz edelim ki A atılan güllenin G bölgesine düşmesi olayı, B ise atılan güllenin Q bölgesine düşmesi olaylarıdır. O zaman A+B olayı güllenin $G \cup Q$ bölgesine düşmesi olayı oluyor (bk. Şekil 4.1).



Şekil 4.1: G ve Q bölgelerinin şekli

Tanım 4.2: A ve B olaylarının her ikisinin de kesin gerçekleştiği, yani A olayı ve B olayının birlikte gerçekleştiği olaya bu olayların çarpımı denir.
A ve B olaylarının çarpımı AB veya $A \cap B$ ya da A ve B gibi işaret ediliyor. Mesela, eğer bir hedefe iki ateş ediliyorsa ve A hedefin birinci ateş de vurulması, B hedefin ikinci ateş de vurulması ise C=AB hedefin her iki ateş de vurulması olayıdır.
İkiden fazla sonlu sayıda olayların çarpımı bu olayların her birininde kesin gerçekleştiği olaydır. n sayıda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ olaylarının çarpımı $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$ veya $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ yada A_1 ve A_2 ve...ve A_n gibi işaret ediliyor[3].

Örnek 4.2: A ve B ile ateş de güllenin uygun olarak G ve Q bölgesine düşmesi olaylarını işaret edersek, o zaman C=AB çarpımı güllenin $G \cap Q$ bölgesine düşmesi olayı oluyor. (bk. şekil 4.2)



Şekil 4.2: G ve Q bölgelerinin kesişimi şekli

Tanım 4.3: Verilmiş deneyde A ve B olaylarının her ikisi de gerçekleşe bilirse bu olaylara bağdaşabilen (uyumlu) olaylar denir[2].

Örnek 4.3: Farz edelim ki, hedefe top dan üç kez ateş ediliyor. Bu ateş de aşağıdaki olayları tanımlayalım:

B_1 Birinci ateş de yan vurma,

B_2 İkinci ateş de yan vurma,

B_3 Üçüncü ateş de yan vurma,

olsun.

O zaman $B = B_1 \, B_2 \, B_3$ olayı üç ateş de hedefin hiçbir kez vurulmaması olayı oluyor.

Olayların toplam ve çarpımının tanımından doğrudan doğruya aşağıdaki özellikler alınıyor:

A+A=A,

A A=A.

Eğer B olayı A olayının özel bir hali ise o zaman

A+B=A

A B=B olur.

4.2. Olasılıkların Toplama Teoremi

Olasılıkların toplama teoremi aşağıdaki gibi ifade ediliyor.

Teorem 4.1: Farz eldim ki, verilmiş deneyde A_1 olayı $P(A_1)$ olasılığı ile ve A_2 olayı $P(A_2)$ olasılığı ile gerçekleşe bilir. A_1 ve A_2 olayları bağdaşmayan olaylardır. O zaman A_1 ve A_2 olaylarının toplamının olasılığı yani ya A_1 olayı ya da A_2 olayının gerçekleşmesi olayının olasılığı aşağıdaki formülle hesaplanıyor[2]:

$$P\left(A_1 \text{ veya } A_2\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right). \tag{4.1}$$

İspat: Farz edelim ki,

$$P(A_1) = \frac{m_1}{n} \; , \; P\left(A_2\right) = \frac{m_2}{n} \quad .$$

Burada n deneyde ki mümkün haller sayısı, m_1 ve m_2 ise uygun olarak A_1 ve A_2 olayları için elverişli haller sayısıdır. A_1 ve A_2 olayları teoremin koşuluna göre bağdaşmayan olaylar olduğundan A_1 ve A_2 olaylarının birlikte gerçekleşmesi için elverişli haller sayısı ‘’0’’ sayısına eşit olur. Ama ya A_1 olayının ya da A_2 olayının gerçekleşmesi, yani $A_1 + A_2$ olayı için elverişli haller sayısının $m_1 + m_2$ olması açıktır. Böylece,

$$P(A_1 \text{ veya } A_2) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A_1) + P(A_2)$$

dir. Bunun ispatı isteniyordu.

Benzer şekilde bu teoremi çift çift bağdaşmayan $A_1, A_2, ..., A_K$ olaylarının toplamı içinde tam matematik indüksiyon yöntemi ile ispatlanabilir.

$$P(A_1 \text{ veya } A_2 \text{ veya...veya } A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

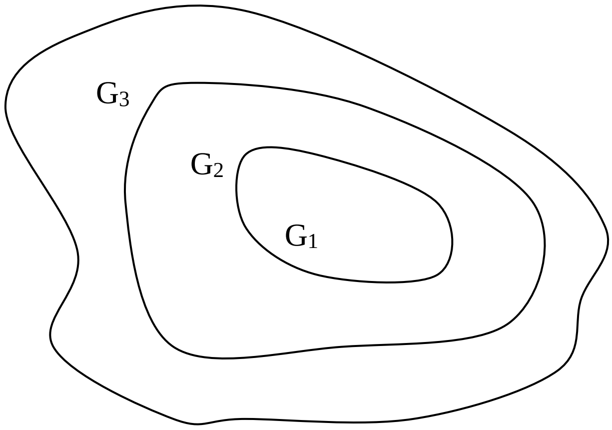
(4.2)

Bu eşitliği aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$P\left(\sum_{İ=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i). \qquad (4.3)$$

Not: Göründüğü gibi biz bu teoremi şans şemasına getirilebilen olaylar için ispatladık. Ama biz hesap edeceğiz ki, bu teorem olasılıkların vasıtasız hesaplana bilmediği hallerde de sağlanılıyor. Böyle kabul etmemiz aşağıdaki düşüncelere dayanıyor. Olayların olasılıkları büyük sayıda deneylerde (çok az rastlanan hallerden başka) olayların gerçekleşmesinin nispi frekanslarından az farklanıyor. Nispi frekansları verilmiş bağdaşmayan olaylar için teorem üstteki teoremin benzeri şeklinde ispatlanıyor. Bu not olayların çarpımı teoremi içinde geçerlidir. Olayların çarpımı teoreminde biz kutu şeması esasında ispatlayacağız.

Örnek 4.4: Kesişmeyen G_1, G_2, G_3 bölgelerinde oluşan bir G bölgesine ateş ediliyor (bk. Şekil 4.3).



Şekil 4.3: G_1, G_2 ve G_3 bölgelerinden oluşan bölgenin şekli

Güllenin

G_1 bölgesine düşmesinin olasılığı $P(A_1) = \dfrac{5}{100}$,

G_2 bölgesine düşmesinin olasılığı $P(A_2) = \dfrac{10}{100}$,

G_3 bölgesine düşmesinin olasılığı $P(A_3) = \dfrac{17}{100}$ olsun.

Güllenin G bölgesine düşmesi olasılığını bulunuz.

Çözüm: G bölgesine güllenin düşmesi olasılığını A ile işaret edelim. O zaman $A = A_1 + A_2 + A_3$ olduğunu elde ederiz. A_1, A_2, A_3 Olayları çift çift bağdaşmayan olaylar olduğu için;

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$= \frac{5}{100} + \frac{10}{100} + \frac{17}{100} = \frac{32}{100} = 0{,}32$$

olur.

Örnek 4.5: Üç silah deposu yalnız bir bomba ile bombalanıyor. Bombanın birinci depoya düşmesi olasılığı 0,01; ikinci depoya düşmesi olasılığı 0,008; üçüncü depoya düşmesinin olasılığı 0,025 dir. Bomba silah deposunun herhangi birine düştüğünde deponun üçü de patlıyor. Silah deposunun patlamasının olasılığını bulunuz.

Çözüm: Aşağıdaki olayları ele alalım:

$A-$ depoların üçünün de patlaması,

$A_1 -$ birinci depoya düşme,

$A_2 -$ ikinci depoya düşme,

$A_3 -$ üçüncü depoya düşme.

O zaman

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

olur. Bir bomba atıldığında A_1, A_2, A_3 olayları bağdaşmayan olaylar olduğundan buluruz:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &= 0{,}01 + 0{,}008 + 0{,}025 \\ &= 0{,}043. \end{aligned}$$

Hatırlatalım ki tam gurup oluşturan iki bağdaşmayan olaya zıt veya aksi olay demiştik ve A olayının aksi olayını $\overline{A}$ ile işaret etmiştik.

Mesela, aşağıdaki olaylar zıt olaylara örnektir:

1)A— ateş de hedefin vurulması,

$\overline{A}$ — ateş de yan vurma;

2)B — parayı attığımızda turanın gelişi,

$\overline{B}$ — yazının gelişi;

3) C — teknik sisteminin tüm elemanlarını sıradan çıkmadan (arızalanmadan) çalışması,

$\overline{C}$ — en azından sistemden arızalanıp sistemden çıkması(bozulması).

Tanıma göre A ve $\overline{A}$ olayları tam gurup oluşturduğundan deneyde bu olaylardan hükmen biri gerçekleşecektir, yani A ve $\overline{A}$ olayları için $A + \overline{A}$ olayı kesin olay olur. Bu durumu (4.1) formülünde dikkate alırsak olasılıkların toplama teoreminden aşağıdaki sonucu alırız.

Sonuç 4.1: Zıt olayların olasılıklarının toplamı 1- e eşittir.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \tag{4.4}$$

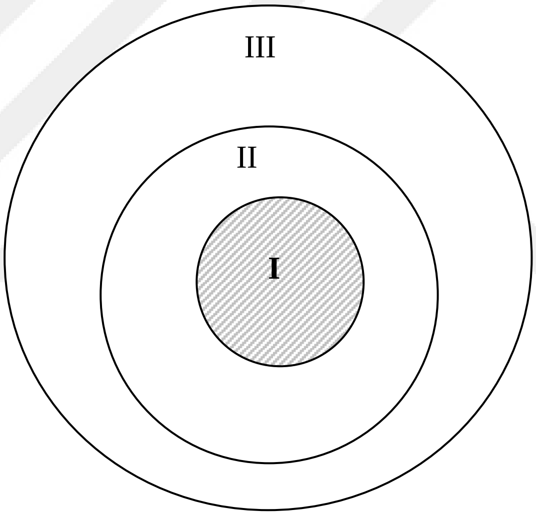
Bu sonucu olasılık teorisinin pratik uygulamalarında çok büyük önemi vardır. Pratikte çoğu zaman aksi $\overline{A}$ olayının olasılığını hesaplamak A olayının olasılığını hesaplamaktan daha kolay oluyor. Böyle hallerde $P(\overline{A})$ olasılığını hesaplayıp ve $P(A)=1-P(\overline{A})$ formülü ile A olayının olasılığı bulunur.

Örnek 4.6: Hedefe bir kez ateş ediliyor. A hedefin vurulması olayıdır. Hedefin vurulmasının olasılığı verilmiştir: $P(A)=p$. Hedefin yan vurulması olasılığını bulunuz.

Çözüm: Hedefin yan vurulması olayı A olayına zıt olan $\overline{A}$ olayıdır. Buna göre de (4.4) formülünden hedefin yan vurulması olasılığını aşağıdaki gibi hesaplarız:

$$P(\overline{A})=1-P\ .$$

Örnek 4.7: Dairevi hedef üç bölgeden oluşmuştur.(bk. Şekil 4.4). Bir ateş de birinci bölgenin vurulmasının vurulması olasılığı 0,23; ikinci bölgenin vurulması olasılığı 0,15; üçüncü bölgenin olasılığı 0,17 dir. Hedefin yan vurulması olasılığını bulunuz.



Şekil 4.4: Üç dairevi bölgenin şekli

Çözüm: A ile yan vurulma olayının işaret edelim. $\overline{A}$ hedefin vurulması olayı oluyor. O zaman;

$$\overline{A}=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3$$

Burada $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ uygun olarak birinci, ikinci ve üçüncü bölgelerin vurulmaması olaylarıdır. Böylece

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &= P(\overline{A_1}+\overline{A}_2+\overline{A_3}) \\ &= P(\overline{A}_1)+P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_3) \\ &= 0{,}15+0{,}23+0{,}17=0{,}55\,. \end{aligned}$$

Buradan

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}45.$$

Olasılıkların toplama teoreminden alınan ve sonuç (4.1)'i genelleştiren aşağıdaki sonucu inceleyelim.

Sonuç 4.2: Eğer $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ olayları bağdaşmayan olayların tam gurubunu oluşturuyorsa, o zaman onların olasılıklarının toplamı 1'e eşittir.

$$P(A_{11}) + P(A_{22}) + \ldots + P(A_{nn}) = 1 \qquad (4.5)$$

İspat: $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ olayları tam gurup oluşturduklarından bunların herhangi birisinin gerçekleşmesi olayı kesin olaydır. Böylece,

$$P(A_1 \text{ veya } A_2 \ldots \text{veya } A_n) = 1.$$

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ olayları bağdaşmayan olaylar olduğundan bunlara olayların toplama teoremini uygularız. Böylece

$$P(A_1 \text{ veya } A_2 \ldots \text{veya } A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$$

Buradan ise

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

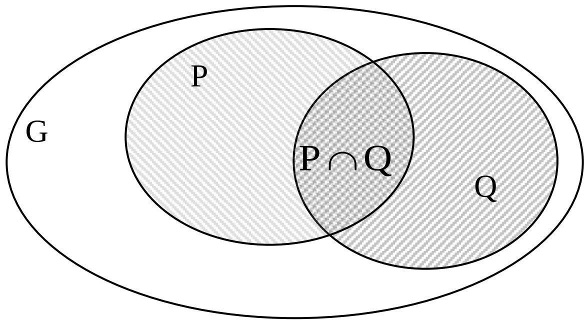
eşitliği bulunur. Sonuç ispatlandı.

Üzerine dikkatini çektiğimiz gibi, olasılıkların toplama teoremi (4.1) yalnız bağdaşmayan olaylar için doğrudur. Bağdaşan olayların toplamının olasılığı için aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 4.2: Bağdaşan olayların toplamının olasılığı aşağıdaki formülle hesaplanıyor

$$P(A \text{ veya } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ve } B) \qquad (4.6)$$

İspat: Bu formülün doğruluğunu geometrik olasılık anlamının yardımı ile gösterelim. Bunun için farz edelim ki, düzlemde G bölgesinin içinde kesişen iki P ve Q bölgeleri verilmiştir (bk. Şekil 4.5). G bölgesinden rastgele bir nokta götürülüyor. Noktanın P veya Q bölgelerinde olması olayların uygun olarak A ve B gibi gösterelim.



Şekil 4.5: Düzlemde G bölgesinin içinde kesişen P ve Q bölgelerinin şekli

O zaman noktanın $P \cup Q, P \cap Q$ bölgelerinden olması olayları $A \cup B$ ve $A \cap B$ gibi gösterilebilir. $P, Q, P \cap Q$ bölgenin alanlarını uygun olarak $S(P), S(Q), S(P \cap Q)$ ile gösterirsek $P \cup Q$ bölgesinin $S(P \cup Q)$ alanı için aşağıdaki eşitliği yazarız:

$$S(P \cup Q) = S(P) + S(Q) - S(P \cap Q).$$

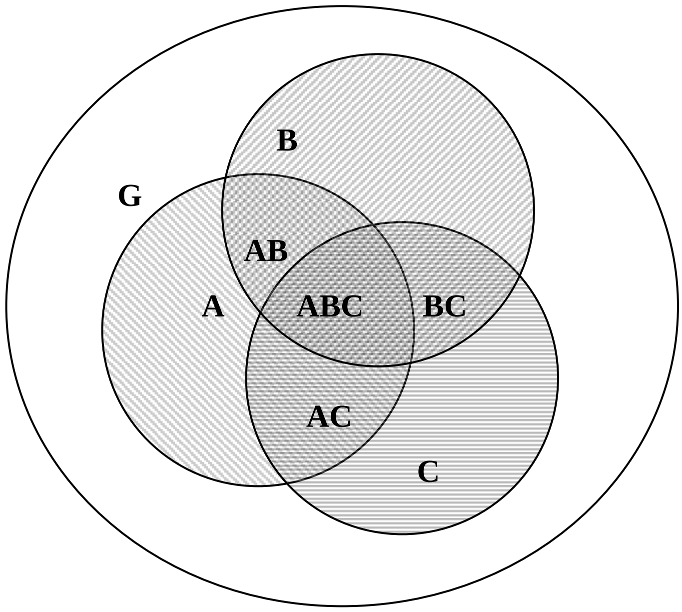
Bu eşitliğin her yanını G bölgesinin $S(G) \neq 0$ alanına bölersek, o zaman geometrik olasılığın tanımına esasen buluruz:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Bu formüle benzer olarak üç bağdaşan A,B,C olaylarının olasılığı için aşağıdaki formül doğrudur.

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Bu formülde geometrik gösterilişle ispatlanabilir (bk. Şekil 4.6).



Şekil 4.6: Kesişen bölgelerin şekli

Not edelim ki, 4.2 teoremini ve bu sonuncu eşitliği geometrik gösterilişle değil kutu şemasının yardımı ile de ispatlaya biliriz.

Tam matematik indüksiyon yönteminin yardımı ile keyfi sonlu sayıda bağdaşmayan olayların toplamının olasılığı için daha genel aşağıdaki formülü ispatlamak olur:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}(A_i)\right)=\sum_{i}P(A_i)-\sum_{i,j}P\left(A_i A_j\right)+\sum_{i,j,k}P\left(A_i A_j A_k\right)-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}P\left(A_1 A_2 \ldots A_n\right)$$

(4.7)

burada toplamlar i, j, k vs. indislerinin farklı değerleri için açılır.

Benzer formülleri olayların çarpımları için de elde edilebilir. Mesela, şekil (4.5) den doğrudan doğruya açıktır ki,

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B). \qquad (4.8)$$

Şekil 4.6 dan aşağıdaki formülün doğruluğu görülüyor:

$$\begin{aligned}P(ABC)=&P(A)+P(B)+P(C)-\\&-P(A+B)-P(A+C)-P(B+C)+P(A+B+C)\end{aligned} \qquad (4.9)$$

Keyfi sonlu sayıda olayların çarpımı için ise aşağıdaki formül doğrudur:

$$P(A_1,A_2,\ldots,A_n)=\sum_{i}P(A_i)-\sum_{i,j}P\left(A_i+A_j\right)+$$
$$+\sum_{i,j,k}P\left(A_i+A_j+A_k\right)+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1+\ldots+A_n)$$

(4.10)

(4.7) ve (4.10) formülleri olayların toplamının ve çarpımının olasılıklarını sağlayan ifadelerin dönüştürmelerinde ifadeleri sadeleştirmek için pratik olarak uygulanır.

4.3.Olayların Bağdaşmayanlığı, Bağdaşmayan Olayların Olasılıklarının Çarpımı Teoremi

Önce olayların bağdaşmayanlığı anlamını tanıyalım

Tanım 4.4: Eğer A olayının gelişinin olasılığı B olayının gerçekleşmiş olmasına ve gerçekleşmiş olmamasına bağlı değilse, o zaman A olayı B olayına bağlı değildir denir[2].

Mesela, iki paranın atılışı olayında A olayı birinci parada turanın gelişi olayı, B olayı ise ikinci parada turanın gelişi olayı olsun. Burada A olayının gelişinin olasılığının B olayının gerçekleşmiş olmasına ve gerçekleşmiş olmamasına bağlı olmadığı açıktır. Böylece, A olayı B olayına bağlı değildir.

Şimdi bağdaşmayan olaylar için olayların olasılıklarının çarpımı teoremini verelim.

Teorem 4.3: Eğer A ve B olayları bağdaşmayan ise, o zaman A ve B olaylarının birlikte gerçekleşmesinin olasılığı A ve B olaylarının uygun olasılıkların çarpımına eşittir[11].

$$P(A \text{ ve } B) = P(A) \cdot P(B) \tag{4.11}$$

İspat: Bu teoremi kutu şeması esasında ispatlayalım İki kutunun her birinde uygun olarak n_1 ve n_2 sayıda top vardır. Birinci kutuda topların m_1 tanesi kırmızı kalanları siyahtır. İkinci kutudaki topların m_2 tanesi kırmızı kalanları siyahtır.

Her kutudan bir tane top alınıyor. Alınan her iki topun kırmızı olması olasılığını bulunuz.

A birinci kutuda kırmızı topun gelişi olayı olsun. B ikinci kutudan kırmızı topun gelişi olsun. Bu olaylar bağdaşmayandır.

$$P(A) = \frac{m_1}{n_1} \text{ ve } P(B) = \frac{m_2}{n_2} \tag{4.12}$$

olduğu açıktır.

Her bir kutudan aynı zamanda birer topun alınmasında tüm mümkün haller sayısı $n = n_1 \cdot n_2$ oluyor. Her iki kutudan kırmızı topun gelişi için elverişli haller sayısı $m = m_1 \cdot m_2$ oluyor. A ve B olaylarının birlikte gelişinin olasılığı için,

$$P(A \text{ ve } B) = \frac{m}{n} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}$$

buluruz.

Burada (4.12) eşitliklerini dikkate alacak olursak

$$P(A \text{ ve } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Bununda ispatlanması isteniyordu.

Benzer şekilde n bağdaşmayan $A_1, A_2, \cdots, A_n$ olayları için aşağıdaki eşitlik ispatlanıyor:

$$P(A_1 \text{ ve } A_2 \dots \text{ve } A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n). \qquad (4.13)$$

Örnek 4.8: Hedefe iki tank dan birer ateş ediliyor. Birinci tankın hedefi vurması olasılığı $\frac{9}{10}$, ikinci tankın hedefi vurması olasılığı $\frac{5}{6}$ dır. Her iki tank dan aynı zaman da birer ateş edildiğinde hedefte iki vuruşun olması olasılığını bulunuz.

Çözüm: Burada $P(A) = \frac{9}{10}$ $\quad P(B) = \frac{5}{6}$

Hedef de iki vuruşun olması olasılığı P (A ve B) (4.11) formülüne esasen aşağıdaki gibi hesaplanıyor.

$$P(A \text{ ve } B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3}{4}$$

Örnek 4.9: Cihazın kesintisiz çalışması bu cihazı oluşturan üç parçanın her birinin kesintisiz çalışmasına bağlıdır. Parçaların belirli bir sürede (devirde) kesintisiz çalışmasının uygun olarak olasılıkları $P_1 = 0.6$, $P_2 = 0.7$, $P_3 = 0.9$ eşitlikleri ile veriliyor. Verilen bu devir için cihazın kesintisiz çalışmasının olasılığını bulunuz.

Çözüm: Bağdaşmayan olayların olasılıklarının çarpımı teoreminin (4.13) formülüne esasen buluruz :

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.9 = 0.378$$

Not: Eğer (4.6) formülünde a ve b olayları bağdaşmayan olaylar olursa, o zaman bu formül aşağıdaki şekilde yazılır.

$$P(A \text{ veya } B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B). \qquad (4.14)$$

Örnek 4.10: Burada örnek 2.14 de verilmiş problemi (4.14) formülünden istifade ederek çözünüz.

Çözüm: A olayı hedefin birinci toptan vurulması olayıdır. B olayı hedefin ikinci toptan vurulmasıdır. $P(A) = \frac{8}{10}$, $P(B) = \frac{7}{10}$. Olasılıkları bu eşitliklerle verilmiş iki toptan aynı zamanda bir hedefe ateş edildiğinde hedefin vurulması olasılığını (4.14) formülü esasında bulacak olursak

$$P(A \text{ veya } B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$=\frac{8}{10}+\frac{7}{10}-\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}=\frac{94}{100}=0.94 \text{ olur.}$$

Burada da doğal olarak önce aldığımız sonucu aldık.

Örnek 4.11: Bir atışta hedefin imha edilmesi olasılığı p dir. Hedefin Q sayısına eşit ve bu sayıdan büyük olasılıkla vurulması için gerekli olan atışların sayısını bulunuz.

Çözüm: Olasılıkların toplamı ve çarpımı teoremine esasen aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$1-(1-p)^n \le Q$$

Bu eşitsizliği n sayısına göre çözersek

$$n \ge \frac{\ell_n(1-Q)}{\ell_n(1-P)}$$

sonucunu buluruz.

4.4.Bağımlı Olaylar, Koşullu Olasılık, Olasılıkların Çarpımı Teoremi (Genel Hal)

Tanım 4.5: Eğer A olayının gelişinin olasılığı B olayının gerçekleşmiş olmasına ve gerçekleşmemiş olmamasına bağlı ise, o zaman A olayı B olayına bağlıdır denir.

A olayının, B olayı gerçekleşmiş olması durumunda gerçekleşmiş olmasının olasılığını P(A/B) ile işaret edeceğiz ve A olayının B koşulundaki koşullu olasılığı diyeceğiz[6].

Örnek 4.12: Kutuda üç ak ve iki siyah top vardır. Kutudan ardışık olarak iki top alınıyor. Birinci alış da kutudan ak topun gelişi olayıdır. A ikinci alış da kutudan ak topun gelişi olayıdır. $P(A/B)$ olasılığını ve $P(A/\overline{B})$ olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: A olayının B olayı gerçekleşmiş olması koşulundaki gerçekleşmesinin olasılığı aşağıdaki gibi bulunur:

$$P(A/B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

A olayının B olayı gerçekleşmiş olmaması koşulundaki (yani birinci çekilişte siyah top gelmiştir) gerçekleşmiş olması olasılığı $P(A/\overline{B})=\frac{3}{4}$ oluyor.

Bu sonuçları karşılaştırdığımızda

$$P(A/B)\neq P(A/\overline{B})$$

olduğunu görüyoruz. Böylece, bu örnekte A olayının B olayına bağlı olduğunu gördük.

Şimdi genel halde olasılıkların çarpımı teoremini formüle edelim ve ispatlayalım.

Teorem 4.4: İki olayın birlikte gerçekleşmesinin olasılığı olaylardan birinin olasılığının diğerinin, birinci olay gerçekleşmiş olması koşulunda hesaplanmış, koşullu olasılığına çarpımına eşittir.

$$P(AveB) = P(A) \cdot P(A/B) \tag{4.15}$$

İspat: Teoremin ispatını kutu şemasına getirilen olaylar için (yani olasılıkları olasılığın klasik tanımı esasında hesaplana bilen olaylar için) ispatlayalım.

Bunun için, farz edelim ki, kutuda n_1 tanesi beyaz ve n_2 tanesi siyah olan n tane top vardır. Farz edelim ki, n_1 tane beyaz topun n_1^* tanesi * (yıldız) işareti ile işaretlenmiştir.

Kutudan bir top alınıyor. Alınan topun * işaretli beyaz top olmasın olasılığını bulalım.

Farz edelim ki, B beyaz topun gelişi olayıdır. A ise * işaretli beyaz topun gelişi olayıdır. O zaman

$$P(B) = \frac{n_1}{n} \tag{4.16}$$

olması açıktır. Farz edelim ki, çekilişte beyaz top gelmiştir. Bu koşulda * işaretli beyaz topun gelişinin olasılığı

$$P(A/B) = \frac{n_1^*}{n_1} \tag{4.17}$$

oluyor.

* işaretli beyaz topun gelişi A ve B olaylarının çarpımı (A ve B) olayı olduğundan * işaretli beyaz topun gelişinin olasılığı P(A ve B) olasılığına eşit oluyor:

$$P(AveB) = \frac{n_1^*}{n}. \tag{4.18}$$

Ama

$$\frac{n_1^*}{n} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{n_1^*}{n_1}.$$

Bu sonuncu eşitlikte (4.16), (4.17), (4.18) eşitliklerini dikkate alırsak buluruz:

$$P(AveB) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Böylece, (4.15) formülü ispatlanmış oluyor.

Eğer baktığımız olay klasik şemaya getirilemiyorsa, o zaman (4.15) formülü koşullu olasılığın tanımı olarak alınır.

Şöyle ki, genelde B olayının gerçekleşmiş olması koşulunda A olayının gerçekleşmiş olmasının koşullu olasılığı

$$P(A/B) = \frac{P(AveB)}{P(B)}, \ (P(B) > 0)$$

formülü ile tanımlanıyor.

Not 1: Sonuncu formülü P (A ve B) için yazarsak buluruz:

$$P(BveA) = P(A) \cdot P(B/A). \qquad (4.19)$$

(4.15) ve (4.19) formüllerinin sol yanları eşit olduğundan sağ yanları da eşittir.Buna göre de aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$P(AveB) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A) \qquad (4.20)$$

Not 2: Eğer A olayı B olayına bağlı değilse,

O zaman;

$$P(A/B) = P(A). \qquad (4.21)$$

Gerçekten de A olayı B olayına bağlı değilse;

$$P(AveB) = P(A) \cdot P(B)$$

ve

$$P(AveB) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Bu eşitliklerden buluruz

$$P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Sonuncu eşitliğin her yanını $P(B) \neq 0$ şartında P(B) sayısına bölsek (4.21) eşitliğini alırız.

Not 3: A olayı B olayına bağlı değilse de, o zaman B olayı da A olayına bağlı değildir.

Gerçektende

$$P(AveB) = P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

sonuncu eşitliğin her yanını P(A) $\neq 0$ şartında P(A) ya bölsek

$$P(B) = P(B/A)$$

eşitliğini alırız. Böylece, B olayının da A olayına bağlı olmadığını anlarız.

Üçüncü not dan görüyoruz ki, olayların bağımlılığı ve bağdaşmayanlığı karşılıklıdır. Buna göre de, genelde iki olayın bağdaşmayanlığını aşağıdaki gibi tanımlarız.

İki olaydan birinin gerçekleşmesi diğerinin gerçekleşmesinin olasılığını değiştirmiyorsa böyle olaylara bağdaşmayan olaylar denir.

Olayların bağdaşmayanlığının anlamını keyfi sayıda olaylar içinde tanımlaya biliriz.

Verilmiş $A_1, A_2, \cdots, A_n$ keyfi götürülmüş biri geride kalan olayların her birine ve onların tüm mümkün olan keyfi çarpımına bağlı değildirse o zaman bu olaylara , karşılıklı bağlı olmayan veya bağlı olmayan olaylar denir.

Bağlı olmayan olaylar çift-çift bağlı olmayan olay oluyor. Ama bunun aksi her zaman doğru olmuyor.

Olasılıkların çarpımı teoremi de keyfi sayıda olaylar için genelleştirilebilir.

Sonlu n sayıda $A_1, A_2, \cdots, A_n$ olaylarının birlikte gerçekleşmiş olmasının $P(A_1 ve A_2 ve \ldots ve\ A_n)$ olasılığı için aşağıdaki formül doğrudur:

$$P(A_1 ve A_2 ve \ldots ve\ A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2) \ldots$$
$$\ldots P(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1}) \qquad (4.22)$$

Bu formül matematiksel indüksiyon yöntemi ile de ispatlana biliyor.

Farz edelim ki, burada özel halde $A_1, A_2, \cdots, A_n$ olayları bağdaşmayan olaylardır. O zaman bağdaşmayan olayların tanımına esasen aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz

$$P(A_2/A_1) = P(A_2),$$
$$P(A_3/A_1A_2) = P(A_3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P(A_{n-1}/A_1 \ldots A_{n-2}) = P(A_{n-1}),$$
$$P(A_n/A_1 \ldots A_{n-1}) = P(A_n).$$

Olayların bağdaşmayanlığı halinde bu eşitlikleri (4.22) formülünde yerine yazılırsak aşağıdaki formül bulunur:

$$P\left(A_1 ve A_2 ve \ldots ve A_n\right) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Böylece (4.13) formülü özel halde bağdaşmayan olaylar için (4.22) formülünden alınabiliyor.

Örnek 4.13: Kutuda 2 beyaz 3 siyah top vardır. Kutudan ardışık olarak iki top alınıyor. Alınan topların her ikisinin de beyaz olması olasılığını bulunuz.

Çözüm: A ile iki beyaz topun gelişini işaret edelim. A_1 birinci alış da beyaz topun gelişi, A_2 ikinci alışta beyaz topun gelişi olsun. $A = A_1 ve A_2$ olduğu açıktır. Olasılıkların çarpımı teoremine esasen

$$P(A) = P(A_1 ve A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0.1$$

Örnek 4.14: Önceki örneğin şartları saklanıyor. Ama topun birinci alıştan sonra top yeniden kutuya konuluyor ve kutuda toplar iyice karıştırılıyor.

Çözüm: Bu halde A_1 ve A_2 olayları bağdaşmayan olaylar oluyor ve

$$P(A) = P(A_1 ve A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = 0.16\,.$$

Örnek 4.15: Bir zarı bir defa attığımızda onun üst yüzünde gelen sayının çift olması olayını B ile, 6 sayısının gelişi olayını ise A ile işaret edelim. A olayının koşulsuz olasılığını ve B olayın gerçekleşmiş olması koşulunda A olayının gerçekleşmiş olmasının koşullu olasılığını bulunuz.

Çözüm: Burada mümkün haller sayısı n=6 ve A olayı için elverişli haller sayısı m=1 dir. Buna göre de

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

olur.

Şimdi farz edelim ki, B olayı gerçekleşmiştir, yani çift sayı gelmiştir. Çift sayının gelmesi için tüm haller sayısı üçtür, yani $n_1 = 3$ dür. zarda 6 gelmesi, aynı zamanda çift sayı gelmesinin elverişli haller sayısı $n_1^* = 1$dir. Böylece,

$$P(A/B) = \frac{1}{3},$$

olur. Bu sonucu koşullu olasılığın genel tanımı

$$P(A/B)=\frac{P(AveB)}{P(B)}, \quad (p(B)>0)$$

formülüne esasen de hesaplayabiliriz. Gerçektende,

$$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \text{ ve } P(A\,veB)=\frac{1}{6}$$

olduğundan

$$P(A/B)=\frac{P(A\,veB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Örnek 4.16: Bir kutuda 3 beyaz ve 2 siyah top vardır. Kutudan her defa bir top götürülmekle, kutudan ardışık olarak iki defa top alınır (alınan toplar yeniden kutuya konulmuyor). Alınan birinci topun beyaz olduğunu (B olayını) bilerek, ikinci kez alınan topun siyah olmasının (A olayı) olasılığını bulunuz.

Çözüm: B olayı gerçekleştikten sonra kutuda 2 beyaz ve 4 siyah top kalıyor. Buna göre siyah topun gelişinin olasılığı

$$P(A/B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

olur. Bu sonucu

$$P(A/B)=\frac{P(AveB)}{P(B)}$$

formülü ile de bulalım

$$P(B)=\frac{3}{7}, P(A\,veB)=\frac{12}{42}=\frac{2}{7}$$

olduğundan

$$P(A/B)=\frac{P(AveB)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{7}}=\frac{2}{3}$$

buluruz.

Örnek 4.17: Kutuda 8 tane beyaz, 5 tane siyah ve 7 tane kırmızı top vardır. Kutudan her defa bir top götürülmekle, üç defa ardışık olarak kutudan top alınır ve alınan toplar geri kutuya konulur. Alınan birinci topun beyaz (A olayı), ikinci topun siyah (B olayı), üçüncü topun kırmızı (C olayı) olması olasılığını bulunuz.

Çözüm: Kutudan birinci alınan topun beyaz olmasının (A olayının) olasılığı

$$P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

olur. A olayı gerçekleştikten sonra 19 top kalır ve onların 5 tanesi siyah renklidir. Buna göre de A olayının gerçekleşmiş olması koşulunda siyah topun gelişinin olasılığı

$$P(B/A) = \frac{5}{19}$$

oluyor. A ve B olaylarının her ikisinin gerçekleşmiş olması koşulunda kutudan kırmızı topun gelişinin olasılığı

$$P(C/AB) = \frac{7}{18}$$

gibi hesaplanıyor. Böylece, A, B ve C olaylarının birlikte gerçekleşmesinin olasılığı (4.22) formülüne esasen bulunur:

$$P(A \, ve B \, ve C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB)$$
$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{7}{18} = \frac{7}{171}$$

4.5. Tam Olasılık Formülü

Olasılık problemlerinin çözümünde olasılıkların toplama teoremi ve olasılıkların çarpma teoremleri her ikisi de birlikte uygulanıyor. Tam olasılık formülü olarak adlanan formül bu iki teoremlerin birlikte sonucu gibi alınan formüldür[1].

Tam olasılık formülünü yazalım. Bunun için farz edelim ki, A olayı çift-çift bağdaşmayan olayların tam gurubunu oluşturan

$$H_1, H_2 .. H_n$$

olaylarından yalnız ve yalnız herhangi biri ile gerçekleşe biliyor. Buradaki $H_1, H_2 .. H_n$ olaylarına hipotez denir. Farz olunur ki, $H_1, H_2 .. H_n$ olaylarının uygun $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ olasılıkları ve A olayının koşullu

$$P(A/H_1), P(A/H_2), \ldots, P(A/H_n)$$

olasılıkları bellidir.

O zaman A olayının P(A) olasılığının tam olasılık formülü aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n). \quad (4.23)$$

Böylece, bu formüle göre A olayının olasılığı her bir hipotezin olasılığının A olayının uygun hipotezin gerçekleşmiş olması koşulundaki koşulla olasılıklarına çarpımlarının toplamlarına eşittir.

Tam olasılık formülünü ispatlayalım.

$H_1, H_2 .. H_n$ hipotezleri tam gurup oluşturduğundan ve A olayı $H_1, H_2 .. H_n$ olaylarından yalnız biri ile gerçekleşe bildiğinden

$$A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$$

gibi yaza biliriz.

$H_1, H_2 ,,, H_n$ çift-çift bağdaşmayan olaylar olduğundan $AH_1, AH_2, \ldots, AH_n$ olayları da çift-çift bağdaşmayan olaylardır. Buna göre de sonuncu eşitlikle ifade olunmuş A olayına olasılıkların toplama teoremi uygulanırsa aşağıdaki sonucu buluruz:

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n).$$

Bu toplamın her bir teoremindeki $P(AH_i), i = 1,2,\ldots,n$ olasılıklarına olasılıkların çarpımı teoremini uygularsak

$$P(AH_i) = P(H_i) \cdot P(A/H_i), \; i = 1,2,\ldots,n$$

eşitliklerini alırız. Bunları üstteki eşitlikte dikkate alacak olursak

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$$

olur.

Örnek 4.18: Aynı şekilde iki kutunun birincisinde 2 siyah ve 3 beyaz, ikincisinde 2 siyah ve 1 beyaz top vardır. Bu kutulardan biri rastgele götürülüyor ve ondan bir top alınıyor. Alınan topun beyaz olması olasılığını bulunuz.

Çözüm: A herhangi bir kutudan beyaz topun çıkarılması olayı olsun. H_1 hipotezi çıkarılan beyaz topun birinci kutudan olması hipotezi, H_2 hipotezi ise çıkarılan topun ikinci kutudan olması hipotezi olsun. Kutuların seçilmesi aynı olasılıklı olduğundan

$$P(H_1)=\frac{1}{2}\ ,\ P(H_2)=\frac{1}{2}.$$

H_1 ve H_2 olaylarının gerçekleşmiş olması koşullarında A olayının koşulla olasılıkları uygun olarak aşağıdaki gibi hesaplanıyor

$$P(A/H_1)=\frac{3}{5},\quad P(A/H_2)=\frac{1}{3}\ .$$

Böylece, tam olasılık formülüne esasen buluruz

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{10}+\frac{1}{6}=\frac{7}{15}$$

Örnek 4.19: Aynı şekilde üç kutunun birincisinde 2 beyaz ve 3 siyah, ikincisinde 4 beyaz ve 5 siyah ve üçüncüsünde 3 beyaz ve 4 siyah top vardır. Bu kutulardan biri rastgele götürülüyor ve ondan bir top alınıyor. Alınan topun beyaz olması olasılığını bulunuz.

Çözüm: H_1 birinci kutu götürülmüştür hipotezidir, H_2 ikinci kutu götürülmüştür hipotezidir, H_3 üçüncü kutu götürülmüştür hipotezidir. Alınan topun beyaz olması olayı A olsun.

Kutuların seçilmesi aynı olasılıklı olduğundan

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$$

oluyor. $H_1\ H_2\ H_3$ Olaylarının her birinin ayrı ayrılık da gerçekleşmiş olması koşullarında A olayının koşullu olasılıkları uygun olarak

$$P(A/H_1)=\frac{2}{5},\ P(A/H_2)=\frac{4}{9},\quad P(A/H_3)=\frac{3}{7}$$

gibi hesaplanıyor. O zaman A olayının gerçekleşmesi olasılığı (4.23) tam olasılık formülü ile bulunuyor.

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}=\frac{401}{945}\approx 0.424\ .$$

Örnek 4.20: H_1, H_2, H_3 gibi üç makine bir fabrikada ki ürünlerin sırasıyla %50, %30, %20 sini üretmektedir. Bu makineler %3, %4, %5 gibi bozuk ürün vermektedir. Rastgele seçilen bir ürünün bozuk olması olasılığını bulunuz.

Çözüm: A ürünün bozuk olduğu olay olsun. O zaman olasılıkları tam olasılık formülüne göre buluruz.

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)$$

$$(0.50)\cdot(0.03)+(0.30)\cdot(0.04)+(0.20)\cdot(0.05)=0.037\ .$$

4.6 Hipotezlerin Olasılıkları Problemi. Bayes Formülü

Burada olasılıkların çarpımı teoreminin ve tam olasılık formülünün sonucu olarak alınan ve olasılık teorisinde çok önemli yeri olan Bayes formülünü veya hipotezler teoremini verelim.

Farz edelim ki, çift çift bağdaşmayan ve tam gurup oluşturan $H_1, H_2 .. H_n$ hipotezlerin $P(H_1), P(H_2),\dots,P(H_n)$ olasılıkları gerçekleştirilmeli olan bir deneyden önce bellidir. Deney gerçekleştiğinde sonuç da A olayı gerçekleşiyor. A olayının H_k olaylarına nazaran $P(A/H_k)$ k=1,2,…,n koşullu olasılıklarının belli olduğunu var sayalım. A olayının gerçekleşmesinin $H_1, H_2 .. H_n$ hipotezlerinin $P(H_1), P(H_2),\dots,P(H_n)$ olasılıklarını nasıl değiştirdiğini bulalım.

Bunun için biz A olayının gerçekleşmesi ile ilgili olarak $H_1, H_2 .. H_n$ hipotezlerinin A olayının gerçekleşmiş olması koşulundaki koşullu olasılıklarını

$$P(H_1/A), P(H_2/A),\dots,P(H_n/A)$$

bulmamız gerekiyor.

Olasılıkların çarpımı teoreminden buluruz

$$P(AH_i)=P(A)\cdot P(H_i/A)=P(H_i)P(A/H_i)$$

veya

$$P(A)\cdot P(H_i/A)=P(H_i)P(A/H_i).$$

Buradan

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}\ ,\ i=1,2,\dots,n.$$

Burada P(A) olasılığının (4.23) formülündeki ifadesini yerine yazarak buluruz:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{j=i}^{h} P(H_j)P(A/H_j)}\ . \qquad (4.24)$$

Bu (4.24) formülüne Bayes formülü veya hipotezler teoremi denir.

(4.24) formülünde bulunan, deneyden önce hesaplanmış $P(H_k)$ olasılıklarına apriori (önceki anlamını veren Latin sözüdür) olasılıklar ve deneylerden sonra hesaplanan $P(H_k / A)$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ olasılıklarına ise apesteriori (sonraki anlamını veren Latin sözüdür) olasılıklar denir[2].

Not: Dikkate alalım ki, $P(H_i / A)$ olasılıkları için aldığımız (4.24) Bayes formülünün paydası ''i'' indisine bağlı değildir.

Örnek 4.21: Bir hedefe iki tank bir birine bağlı olmadan her biri ateş ediyor. Birinci tankın hedefi vurması olasılığı $p_1 = 0.8$, ikinci tankın hedefi vurması olasılığı $p_2 = 0.4$ dür. Atışlardan sonra hedefin bir ateşle vurulduğu belli oluyor. Hedefin birinci tank tarafından vurulduğunun olasılığını bulunuz.

Çözüm: A ile hedefin bir gülle ile vurulması olayını işaret edelim. Ateş edene kadar aşağıdaki hipotezler mümkündü:

H_1— iki tankın ikisi de hedefi vuramaz,

H_2—iki tankın ikisi de hedefi vurur,

H_3— birinci tank hedefi vurur ikinci tank hedefi vuramaz,

H_4— birinci tank hedefi vuramaz ikinci tank hedefi vurur.

Bu hipotezlerin olasılıklarını olasılıkların çarpımı teoremine göre bulalım:

$$P(H_1) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) = 0.2 \cdot 0.6 = 0.12 \ ,$$
$$P(H_2) = p_1 \cdot p_2 = 0.8 \cdot 0.4 = 0.32 \ ,$$
$$P(H_3) = p_1 (1 - p_2) = 0.8 \cdot 0.6 = 0.48 \ ,$$
$$P(H_4) = (1 - p_1) \cdot p_2 = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08 \ .$$

H_1, H_2, H_3, H_4 hipotezlerinin gerçekleşmiş olması koşullarında A olayının koşullu olasılıklarını bulalım:

$$P(A / H_1) = 0, \ P(A / H_2) = 0, \ \ P(A / H_3) = 1, \ P(A / H_4) = 1.$$

Bayes formülünün yardımı ile

$P(H_1 / A)$, $P(H_2 / A)$, $P(H_3 / A)$ ve $P(H_4 / A)$ koşullu olasılıklarını hesaplayalım:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)}$$

$$=\frac{0\cdot 0.12}{0\cdot 0.12+0\cdot 0.32+1\cdot 0.48+1\cdot 0.08}=\frac{0}{0.56}=0\ ,$$

$$P(H_2/A)=\frac{0\cdot 0.32}{0.56}=0\ ,$$

$$P(H_3/A)=\frac{1\cdot 0.48}{0.56}=\frac{6}{7}\ ,$$

$$P(H_4/A)=\frac{1\cdot 0.08}{0.56}=\frac{1}{7}\ .$$

Böylece birinci tankın hedefi vurması olasılığı $\frac{6}{7}$ dir.

Örnek 4.22: Aynı şekilde 2 kutunun birincisinde 2 beyaz 5 siyah, ikincisinde ise 4 beyaz ve 7 siyah top vardır. Bu kutulardan biri rastgele seçilir ve içerisinden bir siyah top alınır. Topun birinci kutudan çıkarılması hipotezi H_1 ve topun ikinci kutudan çıkarılması hipotezi H_2. Hipotezlerinin deneyden sonraki olasılıklarını bulunuz.

Çözüm: Birinci kutunun götürülmesi hipotezi H_1, İkinci kutunun götürülmesi hipotezi H_2 olsun ve alınan topun beyaz olması olayı A olsun H_1 ve H_2 hipotezleri aynı imkanlı olduklarından

$$P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}\ \text{oluyor.}$$

Alınan beyaz topun birinci kutudan olması olasılığı $P(A/H_1)=\frac{2}{7}$, ikinci kutudan olması olasılığı $P(A/H_2)=\frac{4}{11}$ olduğu açıktır. Tam olasılık formülüne esasen

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{11}=\frac{25}{77}$$

olur.

Bayes formülüne esasen aranan $P(H_1/A)$ ve $P(H_2/A)$ olasılıkları,

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}}{\frac{25}{77}} = \frac{11}{25}\ ,$$

$$P(H_{2/}A) = \frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{11}}{\frac{25}{77}} = \frac{14}{25}$$

gibi bulunur.

5.TEKRARLANAN DENEYLER DİZİSİ

Olasılık teorisinin pratik uygulamalarında sıksık öyle problemlerle karşılaşıyoruz ki, bu problemlerde aynı deney aynı koşullarda veya farklı koşullarda birden çok sayıda tekrarlanıyor ve her deneyin sonunda herhangi bir A olayı ya gerçekleşiyor ya da gerçekleşmiyor. O halde bizi, genelde her deneyin sonucu değil, gerçekleştirilen kompleks deneyler serisinin sonucunda A olayının gelişinin genel sayısı ilgilendiriyor.

Mesela, aynı hedefe bir grup ateş edildiğinde bizi, her ateşin sonucu değil vuruşların genel sayısı ilgilendiriyor. Böyle problemlerde kompleks deneyler serisinde olayın keyfi verilmiş sayıda gerçekleşmesinin olasılığının bulunması esas problemlerdendir.

Bu bölümde böyle problemler ele alınıp, bu tür problemlerin çözüm yöntemleri verilecektir.

5.1. Bağımsız Deneyler

Kompleks deneyler dizisinde deneylerin sonucu olan rastgele A olayının verilmiş sayıda gerçekleşmesinin olasılığının bulunması problemi deneyler bağımsız olduğunda çok basit şekilde çözülür.

Eğer verilmiş deneyler kompleksinde her bir deneyin bu veya diğer sonuçlarının olasılıkları kalan deneylerin hangi sonuçlar gerçekleştirilmiş olmalarına bağlı değilse, o zaman bu deneylere bağımsız deneyler denir. Mesela, paranın ardışık olarak birkaç kez atılışı deneyleri bağımsız deneylerdir. İyice karıştırılmış iskambil destesinden rastgele bir kartın ardışık birkaç kez çekilişi deneyleri, her defa çekilen kart yerine konulup, iskambil destesi iyice karıştırıldığında bağımsız deneyler oluyor. Her ateşten önce nişan alma yeniden gerçekleştirilirse, o zaman birkaç ateş etme deneyi bağımsız deneyler olur.Ama bir nişan almakla bir kaç ateş ediliyorsa, o zaman ateşler serisi bağımlı deneyler olur[3].

Bağımsız deneyler aynı koşullarda ve farklı koşullarda gerçekleştirilebilir.Eğer bağımsız deneyler dizisi aynı koşullarda gerçekleştirilirse, o zaman A olayının tüm deneylerde gerçekleşmesi olayının olasılığı her deneyde aynı olur. İkinci halde, yani deneyler farklı koşullarda gerçekleştirildiğinde A olayının olasılığı deneyden deneye değişir. Bu halleri ayrı ayrı ele alalım.

5.2. Bernoulli Deneyleri, Bernoulli Formülü

Önce iki sonuçlu tekrarlanan bağımsız deneyler dizisi ile ilgili bir konkre örnek ele alalım.

Hedefe birbirine bağlı olmayan üç ateş ediliyor. Her bir ateşte hedefin vurulması olasılığı p'dir. Üç ateşten iki vuruşun greçekleşmesi olayının olasılığını bulalım.

Bunun için hedefe iki güllenin değmesi olayını B_2 ile A_1, A_2, A_3 ile uygun olarak birinci, ikinci ve üçüncü ateşte hedefin vurulmaları olaylarını, $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ ile uygun olayların zıt olaylar, yani yan vuruşlar işaret edilmiştir.

Üç ateşten tam olarak iki kez hedefin vurulması olayı B_2 üç halde gerçekleşebilir:

1) $A_1 A_2 \overline{A_3}$ - birinci ve ikinci ateşte vurma, üçüncü ateşte ise hedefin vurulamaması;
2) $A_1 \overline{A_2} A_3$ - birinci ateşte vuruş, ikinci ateşte yan vurma, üçüncü ateşte vuruş;
3) $\overline{A_1} A_2 A_3$ - birinci ateşte yan vurma, ikinci ve üçüncü ateşte vuruş.

Böylece, B_2 olayını bu olaylar çarpımının toplamı gibi yazabiliriz:

$$B_2 = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3$$

Bu toplama dahil olan $A_1 A_2 \overline{A_3}$, $A_1 \overline{A_2} A_3$, $\overline{A_1} A_2 A_3$ olayları bağdaşmayan olaylar ve A_1, A_2, A_3 olayları ise bağımsız olaylar olduğundan olasılıkların toplama ve çarpma teoremlerine göre buluruz:

$$P(B_2) = p.p(1-p) + p(1-p)p + (1-p)p.p = 3p^2(1-p) \quad .$$

Burada $1-p=q$ ile gösterirsek:

$$P(B_2) = 3p^2.q \quad .$$

Bu örnekte biz ilk kez Bernoulli tarafından bir sınıf deneyler dizisi için incelenmiş problemin genel şeması ile tanışmış olduk.

Şimdi bu problemi aşağıda genel halde ele alalım.

Farz edelim ki, aynı bir deney tekrarlanıyor, yani aynı koşullar kompleksinde tekrarlanıyor ve her bir deneyin yalnız iki sonucu vardır. A olayı ya gerçekleşiyor, ya da gerçekleşmiyor. Her bir deney sonucunda A olayının gerçekleşmesi olasılığı aynı sabit p(A)=p (0<p<1) sayısı, gerçekleşmemesi (yani $\overline{A}$ olayının gerçekleşmesi) olasılığı $p(\overline{A}) = 1-p = q$ sayısına eşittir.

Gerçekleştirilen böyle deneyler bağlı olmadığında bu deneylere Bernoulli deneyleri denir. Hatırlatalım ki, deneylerin bağlı olmaması o demekdir ki, her bir deney soncunda A olayının gerçekleşmesi olasılığı, diğer deneylerin sonuçlarına bağlı değildir.

Özel halde bu deneyler dizisinde $p = q = \frac{1}{2}$ olduğunda böyle Bernoulli deneylerine simetrik deneyler denir[2].

Şimdi farz edelim ki, bağlı olmayan bu deneyler n kez gerçekleştiriliyor. Bu deneyler sonucunda A olayının tam m kez gerçekleşmesinin $P_n(m)$ olasılığını bulmamız isteniyor.

Örnekte gördüğümüz gibi gerçekleştirilen n bağımsız deneyler serisinin sonucunda A olayının m kez ve bu olayla karşılıklı zıt olan $\overline{A}$ olayının n-m kez gerçekleşmesi farklı ardışıklıkla (kombinasyonlarla) mümkün olabilir. Bunu göstermek için A olayının n deneyde m kez gerçekleşmesi olayını B_m ile işaret edelim. A olayının i – inci deneyde gerçekleşmesi olayını A_i ve gerçekleşmemesi olayını ise $\overline{A}_i$ ile işaret edelim.

B_m olayının her gerçekleşmesinde A olayının m kez ve $\overline{A}$ olayının ise n – m kez farklı indislerle gerçekleşmesi gerektiği açıktır.

Böylece,

$$B_m = A_1 A_2 ....A_m \overline{A}_{m+1} .....\overline{A}_n + A_1 \overline{A}_2 A_3 ...\overline{A}_{n-1} A_n + ... + \overline{A}_1 \overline{A}_2 ....\overline{A}_{n-m} .A_{n-m+1} ...A_n,$$

ve burada her bir çarpımda A olayı m kez $\overline{A}$ olayı ise n – m kez dahil olur.

Böyle kombinasyonların sayısı C_n^m sayıdadır. Bu sayı n deneyden m sayısında A olayının gelmesinin varyantları sayısıdır.

$A_1, A_2, ..., A_n, \overline{A}_1, ..., \overline{A}_n$ olayları bağımsız olaylar olduğundan bu toplamda yer alan her bir kombinasyonun olasılığı olasılıkların çarpımı teoremine göre $p^m q^{n-m}$ sayısına eşittir. Her bir kombinasyona ise kendi aralarında bağdaşmayan olduğundan toplama teoremine göre B_m olayının olasılığı için sonuçda aşağıdaki ifadeyi alırız:

$$P(B_m) = P_n(m) = \underbrace{p^m q^{n-m} + ... + q^{n-m} p^m}_{C_n^m kez} = C_n^m p^m q^{n-m} .$$

Böylece, eğer n tane bağımsız deney gerçekleştiriliyorsa ve bu deneylerin her birinin sonucunda p olasılığı ile A olayı gerçekleşiyorsa, o zaman A olayının m kez gerçekleşmesinin olasılığı aşağıdaki formülle ifade edilir:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} . \qquad (5.1)$$

Burada $q = 1 - p$. Bu formüle **Bernoulli formülü** denir[1].

Bir çok problemleri incelediğimizde ise böyle bağlı olmayan deneylerin n kez gerçekleşmesinde A olayının en azından k kez gerçekleşmesi olayının olasılığını bulmamız isteniyor.

Bu halde gerçekleştirilen n deneyde A olayının en azından k kez gerçekleşmesinden oluşan $B_{m\geq k}$ olayı A olayının k kez gerçekleşmesinden oluşan $B_{m=k}$ olayının, $m=k+1$ kez gerçekleşmesinden oluşan ve $B_{m=k+1},...,B_{m=n}$ olaylarının toplamına eşittir:

$$B_{m\geq k} = B_{m=k} + B_{m=k+1} + ... + B_{m=n} = \sum_{j=k}^{n} B_{m=j} .$$

Buna göre de $B_{m\geq k}$ olayının, yani A olayının en az k kez gerçekleşmesinin $P_{n(m\geq k)} = P_{(B_m \geq k)}$ olasılığı $B_{m=j}(j=k,k+1,...,n)$ olaylarının uygun olarak $P_{n(j)},(j=k,k+1,...,n)$ olasılıklarının toplamına eşit olur:

$$P_n(m\geq k) = \sum_{j=k}^{n} P_n(j) \quad (5.2)$$

veya

$$P_n(m\geq k) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} P_n(j) \quad . \qquad (5.2)$$

Bazı hallerde (5.2) formülü ile $P_n(m\geq k)$ olasılığını hesaplama daha elverişli olur.

Örnek 5.1: Her 100 yeni doğan çocuğun genelde orta hesapla 51-i erkek çocuk ve 49-u kız çocuk oluyor. Bir ailede 5 çocuğun en az 3'ünün erkek çocuk olmasının olasılığını bulunuz.

Çözüm: Bu problemde n=5, p=0,51 ve q=0,49 olduğundan (5.1) ve (5.2) formüllerine göre buluruz:

$$P_5(m\geq 3) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3 p^3 q^2 + C_5^4 p^4 q +$$

$$+ C_5^5 p^5 = 10.(0{,}51)^3.(0{,}49)^2 + 5.(0{,}51)^4.(0{,}49) + (0{,}51)^5$$

$$= 0{,}318 + 0{,}166 + 0{,}035 \approx 0{,}519 .$$

Örnek 5.2: Metal para 10 kez atılıyor. Turanın üç kez gelişinin olasılığını bulunuz.

Çözüm: Farz edelim ki, $P_{10}(3)$, para 10 kez atıldığında üç kez turanın gelişi olasılığıdır. Bu halde turanın bir atışta gelişinin olasılığı $p=\frac{1}{2}$ dir. O zaman $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ olur. Bunları Bernolli formülü (5.1.) de yerine yazarsak buluruz.

$$P_{10}(3)=C_{10}^{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^{7}=\frac{10!}{3!.7!}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=$$

$$=\frac{7!.8.9.10}{7!.1.2.3}.\frac{1}{9^{10}}=\frac{8.3.5.}{1024}=\frac{15}{128}.$$

Örnek 5.3: Cereyan lambasının 1000 saat çalıştıkdan sonra bozulmasının olasılığı p = 0,2 dir. 5 lambadan en az 3'nün 1000 saatten sonra bozulmasının olasılığını bulunuz.

Çözüm: Her bir lambanın 1000 saat çalışmasını bir deney gibi düşünelim. Bu halde 5 deney gerçekleştirildiğini düşünebiliriz. Bizi "5 lambadan 3 lamba yanıyor" "5 lambadan 4 lamba yanıyor" "5 lambadan 5 lamba yanıyor" olayların herbiri bizi ilgilendiriyor. Bu olayların her birinin olasılıklarını ayrı ayrı Bernoulli formulüne göre hesaplayıp toplarsak istenilen olasılığı bulmuş oluruz:

$$P_5(m\geq 3)=P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)=C_5^3p^5q^2+C_5^4p^4q^1+$$

$$C_5^5p^5q^0=\frac{5!}{3!2!}.(0,2)^3.(0,8)^2+\frac{5!}{4!.1!}(0,2)^4.0,8+$$

$$+\frac{5!}{5!}(0,2)^5.1=0,0512+0,0084+0,000320$$

$$=0,0579.$$

5.3. Tekrarlanan deneyler dizisinde genel haller

Bernoulli deneylerinin genelleşmesi olan daha genel tekrarlanan bağımsız deneyler dizisine bakalım.

Farz edelim ki, $A_1,A_2,.....,A_K$ çift çift bağdaşmayan ve tam grup oluşturan olaylardır. Gerçekleştirilen deney sonucunda bu olaylar uygun olarak $P_1,P_2,....,P_k$ olasılıkları ile gerçekleşebilirler. Burada $P_1+P_2+...+P_k=1$ şartı sağlanıyor.O halde gerçekleştirilen bağımsız n deney sonucunda A_1 olayının m_1 kez, A_2 olayının m_2 kez, …., A_k olayının ise m_k kez gerçekleşmesinin olasılığı

$$P_n(m_1,m_2,....,m_k)=\frac{n!}{m_1!.m_2!...m_k!}P_1^{m_1}.P_2^{m_2}....P_K^{m_k} \qquad (5.3)$$

formülü ile hesaplanıyor. Burada $m_1+m_2+...+m_k=n$ şartının sağlandığını farzedelim.

Bu formülün ispatı Bernoulli formülünün ispatının benzeri şeklinde ispatlanır[2].

Örnek 5.4: Bir zar 10 kez atılıyor. Bu halde 1 sayısının 3 kez, çift sayıların 6 kez gelişi olaylarının olasılığını bulunuz.

Çözüm: Bu halde A_1 zarın 1 sayılı yüzünün gelişi olayı, A_2 2,4,6 sayılı yüzlerin gelişi olayı, A_3 ise 3 ve 5 sayılı yüzlerin gelişi olayıdır. Böylece,

$$P(A_1)=\frac{1}{6}, P(A_2)=\frac{3}{6}, \ P(A_3)=\frac{2}{6} \ \text{ ve}$$

$K_1=3, \ K_2=6, \ K_3=1$ oluyor.

(5.3.) formülüne göre buluruz:

$$P_{10}(3,6,1)=\frac{10!}{3!6!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3.\left(\frac{1}{2}\right)^6.\frac{1}{3}=0,002.$$

Örnek 5.5: Zar n kez atılıyor. i-inci yüzün k_i kez gelişinin $p_n(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6)$ olasılığını bulunuz. Burada $k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6=n$.

Çözüm: Her bir yüzün gelişinin olasılığı $\frac{1}{6}$ olduğundan (5.3.) formülüne göre buluruz:

$$P_n(k_1,k_2,...,k_6)=\frac{n!}{k_1!k_2!...k_6!}.\frac{1}{6^n}.$$

Bernoulli deneyinin ikinci bir genelleşmesi haline bakalım.

Bernoulli deneylerinde tekrarlanan deneylerin sonucu olan A olayının her bir deneyde aynı sabit $P(A)=p$ olasılığı vardır. Bernoulli deneylerinde bu olasılık deneyden deneye değişmez. Ama pratikde deneyleri aynı koşulda gerçekleştirmek olmuyor. Olayın olasılığı deneyden deneye değişir.

Mesela, değişen koşullarda (diyelim ki, hedefe kadar mesafa değiştiğinde) hedefe ateş edildiğinde ateşten ateşe hedefin vurulmasının olasılığı değişir.

Şimdi böyle halleri ele alalım.

Farz edelim ki, n bağlı olmayan deney gerçekleştiriliyor. Her bir deneyin sonucunda A olayı gerçekleşebilir yada gerçekleşmeyebilir. A olayının i numaralı deneyde gerçekleşmesinin olasılığı P_i, gerçekleşmemesinin olasılığı ise $1-p_i=q_i$ $(i=1,2,...,n)$ olsun. n deneyde A olayının m kez gelişinin $P_n(m)$ olasılığını bulmamız isteniyor.

n deneyde A olayının m kez gelişi olayını yine B_m ile gösterelim. Bu halde de

$$B_m=A_1,A_2,....A_m\overline{A}_{m+1}...\overline{A}_n+A_1A_2...\overline{A}_{n-1}A_n+....+A_1A_2...\overline{A}_{n-m}A_{n-m+1}....A_n.$$

Burada her bir çarpıma A olayı m kez, $\overline{A}$ olayı ise n-m kez dahildir. Buradaki kombinasyonların sayısı yine C_n^m olur.

Bu eşitliğe olasılıkların toplama ve çarpma teoremlerini uygulayarak bulunuz:

$$P_n(m) = p_1.p_2...p_m.q_{m+1}...q_n + p_1.q_2.p_3...q_{n-1}.p_n + ...$$
$$.... + q_1.q_2...q_{n-m}p_{n-m+1}...p_n.$$

Bu eşitliğin her bir teriminde p farklı indisle m kez, q ise farklı indisle n-m kez dahil oluyor. $P_n(m)$ olasılıklarını hesaplamak için;

$$\prod_{i=1}^{n}(q_i + p_i z) = \sum_{m=0}^{n} P_n(m) z^m \quad (5.4)$$

eşitliğinden faydalanılır.

Buradaki

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^{n}(q_i + p_i z)$$

polinomuna üretici polinom denir.

Buradaki $B_0, B_1, ..., B_n$ olayları tam grup oluşturduğundan

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1 \quad (5.5)$$

eşitliği sağlanır.

Bu hallerde de gerçekleştirilen n deneyde A olayının en azından k kez gerçekleşmesinin $B_{m\geq k}$ olayının $P_n(m \geq k)$ olasılığı çok önem taşır. Bu halde de

$$P_n(m \geq k) = \sum_{j=k}^{n} P_n(j) \quad (5.6)$$

veya

$$P_n(m \geq k) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} P_n(j) \qquad (5.6')$$

formülleri doğrudur.

Örnek 5.6: Aynı bir hedefe farklı mesafelerden 4 kez bağlı olmayan ateş ediliyor. Bu ateşlerde hedefin vurulmasının olasılıkları

$$P_1 = 0{,}1; \quad P_2 = 0{,}2; \quad P_3 = 0{,}3; \quad P_4 = 0{,}4.$$

Hedefin hiç vurulamaması, bir kez, iki kez, üç kez ve dört kez vurulmalarının

$P_4(0), P_4(1), P_4(2), P_4(3), P_4(4)$

olasılıklarını bulunuz.

Çözüm: Üretici fonksiyonu yazalım:

$$\varphi_y(z)=\prod_{j=1}^{4}(q_i+p_iz)=(0,9+0,1.z)(0,8+0,2.z).(0,7+0,3.z).$$

$$.(0,6+0,4z)=0,302+0,440z+0,215z^2$$

$$+0,040.z^3+0,002.z^4$$

Buradan

$$P_4(0)=0{,}302;\ \ P_4(1)=0{,}440;\ \ p_4(2)=0{,}215;\ \ P_4(3)=0{,}040;\ \ P_4(4)=0{,}002.$$

Örnek 5.7: İki zarın 4 kez atılışındaki toplamının 7 olması sayılarının gelişi olayının hiç gerçekleşmemesi olayının olasılığını bulunuz.

Çözüm: İki zarın atılışında tüm mümkün olan haller sayısı 36-dır. Toplamının 7'ye eşit olması yüzlerinin gelişi olayı A için elverişli haller sayısı 6 oluyor:

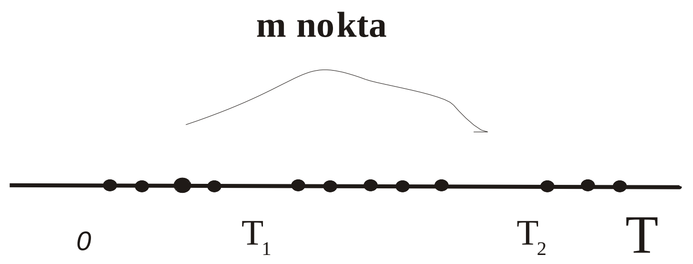
$$1+6=7;\ \ 6+1=7;\ \ 2+5=7;\ \ 5+2=7;\ \ 3+4=7;\ \ 4+3=7.$$

Buna göre de $p(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ ve $p(\overline{A})=\frac{5}{6}$.

Dört deneyde $\overline{A}$ olayının hiç gerçekleşmemesinin olayını B_0 ile işaret edersek, $p(B_o)=P_4(0)$ olur. Böylece, (5.1)formülüne göre buluruz:

$$P_4(0)=c_4^0p^0q^4=\left(\frac{5}{6}\right)^4\ \ p_4(0)=C_4^0p^0q^4=\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Örnek 5.8: $(0,T)$ aralığından rastgele n tane nokta götürülüyor. Bu noktaların m tanesinin (T_1,T_2) aralığından olmasının olasılığını bulunuz (bakınız şekil 5.1.).



Şekil 5.1: $(0,T)$ aralığında yerleşen noktaların şekli

Çözüm: Bu problemi tekrarlanan deneyler şemasına (Bernoulli şemasına) getirebiliriz. Gerçektende rastgele seçilmiş herhangi bir noktanın (t_1,t_2) aralığından olmasının (A olayının) olasılığı geometrik olasılık formülüne göre:

$$P(A)=\frac{T_2-T_1}{T}$$

oluyor. A olayının m kez gerçekleşmesi olayına ise n noktadan m sayıda noktanın (t_1,t_2) aralığında olması olayı gibi bakabiliriz. Bu olayı B_m ile işaret edersek:

$$P(B_m)=P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m} \quad (5.7)$$

formülünü almış oluyoruz.

Örnek 5.9: n parçadan oluşmuş cihaz t=0 anında çalışmaya başlıyor. Cihazın herhangi parçasının $(0,t)$ zaman aralığında bozulmasının olasılığı

$$P=\int_0^t \alpha(s)ds, \quad \alpha(t)\geq 0, \quad \int_0^\infty \alpha(t)dt=1 \qquad (5.8)$$

formülü ile hesaplanıyor.

t anına dek cihazın m tane parçasının bozulmasının olasılığını bulunuz.

Çözüm: Bu problemin çözümünüde Bernoulli şemasına getirebiliriz. Bu problemin çözümüde (5.7) formülü ile ifade edilir.

<u>En büyük olasılıklı sayı.</u> $P_n(m)$ olasılığının n sabit sağlandığında m sayısına bağlı fonksiyon gibi inceleyelim. $P_n(m)$ olasılığının m sayısına bağlılığı (5.1) Bernoulli formülü ile verilir. $P_n(m)$ olasılığının en büyük değer aldığı m_{max} sayısına en büyük olasılıklı sayı denir.

Kolaylıkla gösterebiliriz ki, $(n+1)p$ sayısı kesir olduğunda P_n (m) olasılığı m-nin fonksiyonu gibi en büyük değerini

$$m_{\max}=[(n+1)p] \qquad (5.9)$$

değerinde alır. Burada $[(n+1)p]$ sayısı $(n+1)p$ sayısından küçük olan en büyük tam sayıdır. $(n+1)p$ tam sayı olduğunda $P_n(m)$ olasılığı maksimum değerini m sayısının iki ardışık değerlerinde

$$m=m_1=(n+1)p \ ve \ m=m_2=m_1-1=np-q$$

alır.

Gerçektende $P_n(m)$ olasılığının iki ardışık $p_n(m-1)$ ve $p_n(m)$ değerlerinin oranlarını alırsak buluruz:

$$\frac{p_n(m-1)}{p_n(m)}=\frac{mq}{(n-m+1)p} \ .$$

Burada eğer

$$\frac{mq}{(n-m+1)\,p} < 1$$

oluyorsa, yani eğer;

$$m < (n+1)\,p$$

eşitsizliğini sağlayan m sayıları için;

$$P_n(m-1) < P_n(m)$$

eşitsizliği sağlanır.

Buna göre de $P_n(m)$ fonksiyonu m sayısı (5.9) eşitliği ile tanımlanan m_{max} tam sayısına kadar arttıkça artıyor ve $m = m_{\max}$ değerini aldığında $P_n(m)$ maksimum değerini alır.

Eğer $(n+1)\,p$ tam olursa, o zaman $m = (n+1)\,p$ olduğunda

$$\frac{P_n(m-1)}{P_n(m)} = 1$$

olur. Böylece, $m_1 = (n+1)\,p$ ve $m_2 = (n+1)\,p - 1$ olduğunda $P_n(m)$ maksimum değerini alır.

Örnek 5.10: a) $n = 10$ ve $p = \frac{1}{3}$ olduğunda, $(n+1)\,p = \frac{11}{3}$ olduğundan $m_{\max} = \left[{}^{11}\!/_{3} \right] = 3$ olur.

b) $n = 11$ ve $p = \frac{1}{2}$ olduğunda $(n+1)\frac{1}{2} = 6$. Buna göre de en büyük olasılıklı sayı bu halde iki tane olur. Yani $m_1 = 6,\ \ m_2 = 5$.

Bir çok pratik problemlerin çözümünde n deneyde A olayının k kez $m_1 \le k \le m_2$ gerçekleşmesinden oluşan $B_{m_1 \le k \le m_2}$ olayının olasılığının bulunması isteniyor. $B_{m_1 \le k \le m_2}$ olayını $B_{m_1}, B_{m_2+1}, ..., B_{m_2-1}, B_{m_2}$ olaylarının toplamı şeklinde yazarsak

$$B_{m_1 \le k \le m_2} = \bigcup_{k=m_1}^{m_2} B_{m=k}\ .$$

O zaman olasılıkların toplama teoremine göre buluruz:

$$P\left(B_{m_1 \le k \le m_2}\right) = \sum_{k=m_1}^{m_2} C_n^k p^k q^{n-k}\ . \qquad (5.11)$$

Örnek 5.11: Fabrikada 10^4 sayıda mal hazırlanmıştır. Bir malın bozuk olmasının olasılığı $p = 0,1$ - dir.

Bozuk olan malların toplam sayısının 1100 sayısından fazla olmamasının olasılığını bulunuz.

Çözüm: Burada $n = 10^4$, $p = 0,1$, $m_1 = 0$, $m_2 = 1100$ veriliyor ve (5.11) formülüne göre buluruz:

$$P\left(B_{m_1 \le k \le m_2}\right) = \sum_{k=0}^{1100} C_{10^4}^{k} (0,1)^k . (0,9)^{10^4 - k} \quad . \qquad (5.12)$$

6.RASTGELE DEĞİŞKENLER VE ONLARIN DAĞILIM KANUNLARI

Biz olasılık teorisinin esas anlamları bölümünde rastgele değişken anlamını vermiştik. Burada biz bu anlamın daha geniş anlamını verelim. Rastgele değişkenlerin karakteristiklerini belirleyelim.

Tanımladığımız gibi deney zamanı önceden belli olmayan bu veya diğer değerler alan değişkenine rastgele değişken denir. Biz kesikli ve sürekli rastgele değişken anlamlarını da verdik. Kesikli rastgele değişkenlerin alabileceği değerler önceden sayılabilirler. Ama sürekli rastgele değişkenlerin karakteristiklerini önceden sayılamaz ve belli bir aralığı doldurur.

Önce biz kesikli rastgele değişkenlerin karakteristiklerini öğrenelim.

6.1.Kesikli rastgele değişkenler, kesikli rastgele değişkenlerin dağılım kanunları

Tanım 6.1: Eğer x değişkeni deney zamanı sonlu veya sonsuz sayılabilir

$$x_1, x_2, ..., x_k, ...$$

değerlerini uygun olarak

$$p_1, p_2, ... p_k, ..$$

olasılıkları ile alıyorsa o zaman x değişkenine kesikli rastgele değişken denir.

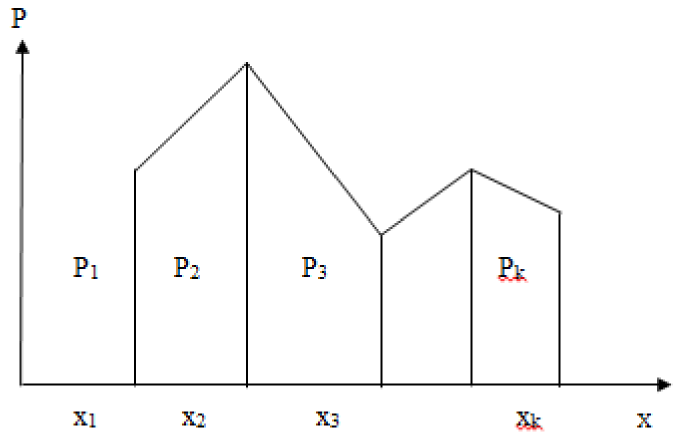
Tanımdan anlaşılıyor ki, kesikli rastgele değişkenin her bir x_k değerine p_k olasılığı uygun gelir.

p_k olasılığının x_k değerine fonksiyonel bağlılığına kesikli rastgele x değişkeninin olasılık dağılım kanunu denir[5].

Böyle bir bağlantı aşağıdaki tablo ile verilebilir:

Rastgele x değişkeninin mümkün değerleri	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	
Bu değerlerin olasılıkları	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

Bu tabloya uygun olarak xOp düzleminde (x_k, p_k) noktalarını bulup, bu noktaları doğru parçaları ile birleştirirsek dağılım kanununu grafik olarak olasılık dağılım çokköşegeni şeklinde alabiliriz (Bak. Şekil 6.1).



Şekil 6.1: (x_k, p_k) noktalarını birleştiren doğru parçalarının şekli

Dağılım kuralı analitik olarak

$$p_k = f(x_k)$$

şeklinde verilebilir.

x değişkeni $x_1, x_2, \ldots x_k, x_N$ değişkenlerinden kesin birini alacağından

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$$

eşitliği sağlanır.

Rasgele değişken sonsuz sayıda $x_1, x_2, \ldots$ değerler aldığında ise bu eşitlik

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 \qquad (6.1)$$

şeklinde olur.

x rastgele değişkeninin en büyük olasılıklı x_i değerine bu rastgele değişkeninin modası denir. Şekil 1-de x_2 rastgele değişkeninin modasıdır.

Örnek 6.1: x değişkeni oyun zarını bir kez attığımızda gelebilecek sayıların değişkeni olsun. x değişkeni 1,2,3,4,5,6 değerlerinden birini alabilir. Bu değerlerin her birini $P = \frac{1}{6}$ olasılığı ile alabilir. Böylece, bu değişkenin dağılım tablosu aşağıdaki gibi olur:

x	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Örnek 6.2: Sonsuz sayıda deneyde A olayının her deneyde gelmesi olasılığı p olsun. x, A olayının birinci kez geliş numarası olsun. x rastgele değişkeninin dağılım kanununu yazınız. p_1 olasılığı, A olayının birinci deneyde A olayının geliş olasılığı olsun:

$$p_1 = p(A) = p.$$

p_2 olasılığı A olayının birinci deneyde değil ikinci deneyde gelişi olasılığı olsun

$$p_2 = p(\bar{A} ve A) = (1-p).p.$$

p_3 olasılığı A olayının birinci ve ikinci deneyde A olayının gerçekleşmemesi 3-üncü deneyde gerçekleşmesi olasılığı olsun. O zaman.

$$p_3 = p(\bar{A} ve \bar{A} ve A) = (1-p)(1-p).p =$$

$$=(1-p)^2 p$$

ve s.

$$p_k = (1-p)^k .p \qquad . \qquad (6.2)$$

Bu kesikli rastgele değişkenin dağılım tablosu aşağıdaki gibi olur.

x	1	2	3	……	k	……
p	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2 p$	…….	$(1-p)^{k-1} p$	……

Burada

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = p.\frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

Hedefi birinci kez vurana dek ateş hakkında problem bu dağılıma getiriliyor.

Farz edelim ki, hedefi vurana dek ateş ediliyor. Her bir ateşte hedefin vurulması olasılığı p'dir. x birinci kez hedefin vurulduğu deneyin numarası olsun. x rastgele değişkeninin dağılımı üstteki tablo ile verilir.

Örnek 6.3: Her bir ateşte hedefin vurulması olasılığı p = 0,8 olsun. Bir güllenin, iki güllenin ve üç güllenin harçlandığı olaylarının olasılığını bulunuz.

Çözüm: x harçlanmış (tüketilmiş) güllelerin sayısı olsun. $P(x = x_1)$ x_1 sayıda güllenin tüketilmesi olasılığı olsun. O zaman,

$$P(x=1) = p = 0,8$$

birinci ateşte hedefin vurulması olasılığı oluyor.

$$P(x=2) = (1-p)p = (1-0,8).(0,8) = 0,16$$

birinci ateşte hedef vurulmamış, ikinci ateşte vurulması olasılığıdır.

$P(x=3)=(1-p)^2=(1-0,8).(1-0,8)=0,04$

üçüncü ateşte hedefin vurulup, vurulmamasına bağlı olmayarak ateş kesilir.
Sonuncu olasılığı

$1-P(x=1)-P(x=2)=1-0,8-0,16=0,04$

gibi hesaplayabiliriz.

Dağılım tablosu aşağıdaki gibi olur.

x	1	2	3
$P(x=x_0)$	0,8	0,16	0,04

6.2. Nispi frekans ve nispi frekansın tekrarlanan deneylerde olasılığı

Farz edelim ki, n tane seri deney (deneyler dizisi) yapılıyor. Her bir deney sonucunda A olayı p olasılığı ile gerçekleşebilir. n deneyler dizisinde A olayının gerçekleşmesinin (gelişiminin) nispi frekansını gösteren rastgele değişkeni x' le gösterelim. Böylece, x n deneyler dizisinde A olayının gelişinin nispi frekansıdır[3]. n deneyler dizisinde x rastgele değişkeninin dağılım kanununun bulunması istenir.
n deneyler dizisinde x rastgele değişkenin aşağıdaki değerlerden birini alması açıktır:

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n}{n}.$$

Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 6.1: x değişkeninin $\frac{m}{n}$ değerini almasının $P\left(x=\frac{m}{n}\right)$ olasılığı, yani n deneyde A olayının m kez, ama A olayının gerçekleşmemesi olayı olan $\overline{A}$ olayının n – m kez gerçekleşmesinin olasılığı

$$P\left(x=\frac{m}{n}\right)=C_n^m p^m q^{n-m}$$

formülü ile hesaplanır. Burada $C_n^m=\frac{n!}{(n-m)!m!}$, p sayısı A olayının bir deneyde gerçekleşmesi olasılığı olup $p=P(A)$ ve q ise A olayının gerçekleşmemesi olasılığıdır, yani $q=1-p=P(\overline{A})$.

İspat: n deneyler dizisinde A olayı m kez aşağıdaki ardışıklıkla gerçekleşebilir:

$$\underbrace{AA....A}_{m}\underbrace{\overline{A}\overline{A}....\overline{A}}_{n-m}$$

yani birinci m deneyde A olayı gerçekleşir, sonraki n – m deneyde A olayı gerçekleşmiyor (yani $\overline{A}$ olayı gerçekleşiyor). Böylece,

$$P(A) = p, \quad P(\overline{A}) = 1 - p = q$$

olduğundan olasılıkların çarpımı teoremine göre $\underbrace{A, A, ...A,}_{m}\underbrace{\overline{A}, \overline{A}, ...\overline{A},}_{n-m}$ olayının olasılığı

$$p^m.q^{n-m}$$

olur.

Ama A olayı n deneyde m kez aşağıdaki ardışıklıkla da gerçekleşebilir:

$$\underbrace{AA....A}_{m-1}\underbrace{\overline{A}\overline{A}....\overline{A}}_{n-m}\underbrace{A}_{1} \quad .$$

Bu olayın olasılığı da

$$p^{m-1}.q^{n-m}.p = p^m q^{n-m}$$

olur.

n deneyde A olayının m kez, $\overline{A}$ olayının ise n – m kez böyle gerçekleşmesi hallerinin mümkün sayısı

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

sayısı kadardır.

Böylece, toplama teoremine göre buluruz:

$$P\left(x = \frac{m}{n}\right) = \underbrace{p^m.q^{n-m} + p^m q^{n-m} + p^m q^{n-m}}_{C_n^m} =$$

$$= C_n^m p^m q^{n-m} \quad . \qquad (6.3)$$

Bununla da teorem ispatlanmış olur.

(6.3)formülü zaten x değişkeninin dağılım kanununu ifade eder. x değişkeninin dağılım kanununu tablo ile aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

x	$\frac{0}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$	$\cdots$	$\frac{m}{n}$	$\cdots$	$\frac{n}{n}$
$P\left(x = \frac{m}{n}\right)$	$1.q^n$	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\cdots$	$C_n^m p^m q^{n-m}$	$\cdots$	$1.p^n$

Aldığımız dağılım kanuna binom dağılım kanunu denir. Buna göre , $P\left(x=\frac{m}{n}\right)$ olasılığı $(q+p)^n$ ifadesinin binom açılış formülündeki

$$(q+p)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (6.4)$$

uygun terime eşittir.

Dikkate alalım ki, $(p+q)^n = 1^n = 1$ olduğundan x değişkeninin tüm mümkün alabileceği değerlerin olasılıklarının toplamı görüldüğü gibi 1'e eşittir.

Bir çok problemleri çözerken n deneyler dizisinde A olayının, mesela en az bir kez gerçekleşmesinin olasılığını belirlemek isteniyor. Bu olayın nispi frekansı $x \geq \frac{1}{n}$ eşitsizliğini sağlar. Bu olasılık aşağıdaki eşitlikten bulunur:

$$P\left(x \geq \frac{1}{n}\right) = 1 - P\left(x = \frac{0}{n}\right) = 1 - q^n \quad . \ (6.5)$$

A olayının en az k sayıda gerçekleşmesinin olasılığı ise aşağıdaki formülle bulunur:

$$P\left(x \geq \frac{k}{n}\right) = \sum_{m=k}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (6.6)$$

veya

$$P\left(x \geq \frac{k}{n}\right) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} C_n^m p^m q^{n-m}$$

Örnek 6.4: $n=8,\ p=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2}$ olduğunda x rastgele değişkeninin binom dağılım kanununu grafikle gösteriniz.

Çözüm: Bunun için aşağıdaki olasılıkları hesaplayalım:

$$P(x=0) = C_8^0 q^8 = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256},$$

$$P\left(x=\frac{1}{8}\right) = C_8^1 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{8}{1}.\frac{1}{256} = \frac{1}{32},$$

$$P\left(x=\frac{2}{8}\right) = C_8^2 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8.7}{1.2}.\frac{1}{2^8} = \frac{7}{64},$$

$$P\left(x=\frac{3}{8}\right) = C_8^3 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8.7.6.1}{1.2.3.2^8} = \frac{7}{32},$$

$$P\left(x=\frac{4}{8}\right)=C_8^4\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}.\frac{1}{2^8}=\frac{35}{128},$$

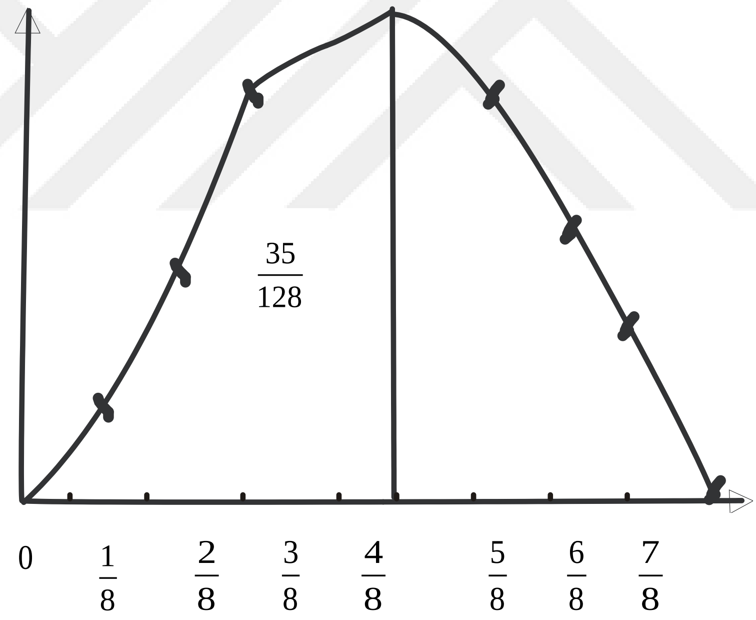
$$P\left(x=\frac{5}{8}\right)=C_8^5\,\frac{1}{2^8}=\frac{7}{32},$$

$$P\left(x=\frac{6}{8}\right)=C_8^6\,\frac{1}{2^8}=\frac{7}{64},$$

$$P\left(x=\frac{7}{8}\right)=C_8^7\,\frac{1}{2^8}=\frac{1}{32},$$

$$P\left(x=\frac{8}{8}\right)=C_8^8\,\frac{1}{2^8}=\frac{1}{256}\quad .$$

Bu değerlere uygun olarak dağılımının grafiği aşağıdaki gibi olur:



Şekil 6.2: Dağılımın grafiği

Örnek 6.5: A olayının her bir deneyde gerçekleşmesinin olasılığı p = 0,4'dür. A olayının:

a) 2 deneyde; b)3 deneyde; c) 10 deneyde iki kez gerçekleşmesi olasılıklarını hesaplayınız.

Çözüm:

a) Bu halde n = 2; p=0,4; q = 0,6:

$$p\left(x=\frac{2}{2}\right)=C_2^2p^2q^0=\frac{2.1}{1.2}(0,4)^2=0,16;$$

b) Bu halde $n=3,\ \ p=0,4,\ \ q=0,6;$

$$p\left(x=\frac{2}{3}\right)=C_3^2p^2q^1=\frac{3.2}{1.2}(0,4)^2.0,6=0,288;$$

c) Bu halde $n=10,\ \ p=0,4;\ \ q=0,6$

$$p\left(x=\frac{2}{10}\right)=C_{10}^2p^2q^8=\frac{10.9}{1.2}(0,4)^2.(0,6)^8=0,121.$$

Örnek 6.6: Hedefe 5 tane bağımsız ateş ediliyor. Her bir ateşte hedefin vurulmasının olasılığı p = 0,2'dir. Hedefin iptal edilmesi için hedefin üç kez vurulması yeterlidir. Hedefin iptal edilmesinin olasılığını bulunuz.

Çözüm: Burada n =5, p = 0,2, q = 0,8. Hedefin iptal edilmesinin olasılığının aşağıdaki formülle hesaplanacağı açıktır:

$$P_{iptal}=p\left(x=\frac{3}{5}\right)+p\left(x=\frac{4}{5}\right)+p\left(x=\frac{5}{5}\right)$$

veya aşağıdaki formülle hesaplanır.

$$P_{iptal}=1-\left[p\left(x=\frac{0}{5}\right)+p\left(x=\frac{1}{5}\right)+p\left(x=\frac{2}{5}\right)\right].$$

Birinci formüle göre buluruz:

$$P_{iptal}=C_5^3p^3q^2+C_5^4p^4q^1+C_5^5p^5=\frac{5.4.3}{1.2.3}(0,2)^3.(0,8)^2+$$

$$\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4.}(0,2)^4.0,8+1(0,2)^5=0,05792\approx 0,06\ .$$

Örnek 6.7: Bağımsız dört deney yapılıyor. Her bir deneyde A olayının gerçekleşmesinin olasılığı $p=0,5$'dir. A olayının en az iki kez gerçekleşmesinin olasılığını bulunuz.

Çözüm: Burada n=4, p=0,5, q=0,5:

$$p\left(x\geq\frac{2}{4}\right)=p\left(x=\frac{2}{4}\right)+p\left(x=\frac{3}{4}\right)+p\left(x=\frac{4}{4}\right),$$

veya

$$p\left(x\geq\frac{2}{4}\right)=1-\left[p\left(x=\frac{0}{4}\right)+p\left(x=\frac{1}{4}\right)\right].$$

Aşağıdaki olasılığı hesaplayalım.

$$p\left(x<\frac{2}{4}\right)=p\left(x=\frac{0}{4}\right)+p\left(x=\frac{1}{4}\right)=q^4+4q^3p^1=$$

$$=(0,5)^4+4.(0,5)^4=0,3125 \quad .$$

Böylece ikinci formüle göre aşağıdaki sonucu buluruz:

$$p\left(x\geq\frac{2}{4}\right)=1-\left[(0,5)^4+4.(0,5)^4\right]=0,6875\approx 0,69 \quad .$$

Örnek 6.8: Hazırlanmış kısımlardan birinin bozuk olma olasılığı $p=0,1$'dir. Hazırlanmış 3 kısımdan oluşan kısımların $m=0,\ m=1,\ m=2,\ m=3$ tanesinin bozuk olması olasılığını hesaplayınız.

Çözüm:

$$P\left(x=\frac{0}{3}\right)=C_3^0q^3=1.(0,9)^3=0,729,$$

$$P\left(x=\frac{1}{3}\right)=C_3^1pq^2=\frac{3}{1}.0,1.(0,9)^2=0,243,$$

$$P\left(x=\frac{2}{3}\right)=C_3^2p^2q=\frac{3.2}{1.2}.(0,1)^2.0,9=0,027,$$

$$P\left(x=\frac{3}{3}\right)=C_3^3p^3=(0,1)^3=0,001 \quad .$$

6.3. Kesikli rastgele değişkenin beklenen değeri(matematik gözlemesi)

Genelde rastgele değişkenin olasılık dağılım kanunu rastgele değişkeni tam karakterize eder. Pratikte çok halde rastgele değişkenin olasılık dağılımı kanununu vermek mümkün olmaz. Böyle durumlarda rastgele değişkenin olasılık özelliklerini onun başka karakteristikleri ile öğrenmek gerekir. Rastgele değişkenin böyle karekteristikleri onun sayısal karakteristikleridir[2].

Rastgele değişkenin sayısal karakteristikleri onu yaklaşık olarak miktarca karakterize eder. Bu sayısal karekteristiklerin yardımı ile bir çok problemler daha basit çözülebilir.

Rastgele değişkenin alabildiği değerlerin mesela, sayısal eksende nasıl dağıldığını, nasıl yerleştiğini karakterize etmek için beklenen değer, varyans, momentler ve s. gibi karakteristiklerden istifade edilir.

Rastgele değişkenin beklenen değeri onun en önemli sayısal karakteristiklerindendir.

Farz edelim ki, kesikli rastgele değişkenin alabileceği

$x_1, x_2, ... x_k, ...$

değerlerini uygun olarak

$p_1, p_2, ... p_k, ...$

olasılıkları ile alır.

O zaman

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_k x_k + ... \quad (6.7)$$

serisi mutlak yakınsak olduğunda bu toplama rastgele x değişkeninin beklenen değeri denir ve

$$M[x] = \sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k \quad (6.8)$$

ile gösterilir. Rastgele değişkeninin beklenen değerini bazen $E[x]$, m_x ve s. gibi de gösterilir.

(6.7) serisi mutlak yakınsak olmadığında x rastgele değişkeninin beklenen değeri yoktur denir.

x rastgele değişkeni sonlu sayıda $x_1, x_2, ..., x_n$ değerleri aldığında, o zaman (6.7) serisi daima mutlak yakınsak olur ve böylece, sonlu sayıda değerler alan rastgele değişkenin her zaman beklenen değeri var ve aşağıdaki

$$M[x] = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k \quad (6.9)$$

formülü ile tanımlanır.

Rastgele değişkenin beklenen değerine onun ortalama değeride denir. Beklenen değere rastgele değişkenin öyle ortalama değeridir ki, rastgele değişkenin alabileceği tüm değerler bu ortalama değerin komşuluğunda yerleşmiş olur.

Gerçektende, farz edelim ki N tane bağımsız deneyler dizisinde x rastgele değişkeni x_1 değerini n_1 kez, x_2 değerini n_2 kez ve s., x_m değerini ise n_m kez almıştır. O zaman olasılığın istatistik tanımına göre

$$p_k = P(x = x_k) = \frac{n_k}{N}$$

olur $(n_1 + n_2 + ... + n_m \leq N)$.

Böylece, bu rastgele değişkenin beklenen değeri için aşağıdaki yaklaşık formülü almış oluruz:

$$M\left[x\right]=\sum_{k=1}^{m}p_k x_k \approx \sum_{k=1}^{m}\frac{n_k}{N}x_k=\frac{n_1x_1+...+n_mx_m}{N} \quad .$$

Bu yaklaşık formülün sağ yanındaki ifade rastgele değişkenin bu deneyler dizisinde aldığı değerlerin aritmetik ortalamasıdır.

Bir çok hallerde deneyler sayısı N büyük olduğunda rastgele değişkenin x_k değerinin gerçekleşmesinin nispi frekansı $\frac{n_K}{N}$, x_k değerinin gerçekleşmesinin p_k olasılığına yaklaştığından, buradan böyle bir sonuç çıkar.

Bir çok rastgele değişkenlerin çok sayıda deneyler sonucunda aldığı değerlerin sayısal ortalaması, bu rastgele değişkenin beklenen değerine yaklaşır:

$$\frac{n_1x_1+n_2x_2+...+n_mx_m}{N}\xrightarrow[N\to\infty]{}M\left[x\right] \quad . \qquad (6.10)$$

Eğer özel halde x rastgele değişkeni $x_1, x_2, ...x_n$ değerlerini aynı $p=\frac{1}{n}$ olasılığı ile alırsa o zaman bu rastgele değişkenin beklenen değeri için

$$M\left[x\right]=p_1x_1+...+p_nx_n=p\left(x_1+x_2+....+x_n\right)=$$

$$=\frac{x_1+x_2+...x_n}{n} \qquad (6.11)$$

formülünü almış oluruz.

Dikkate alalım ki, eğer biz içinde N tane küre olan bir kutu düşünürsek ve bu kürelerden n_1 tanesini x_1 ile, n_2 tanesini x_2 ile, ve s. n_m tanesini x_m ile gösterirsek ($n_1+n_2+...+n_m=N$), o zaman kutudan bir tane küre aldığımızda beklenen $\overline{m}_x$ sayısı

$$\overline{m}_x=\frac{n_1x_1+n_2x_2+...+n_mx_m}{N} \qquad (6.12)$$

formülü ile hesaplanır.

Örnek 6.9: Farz edelim ki, bir ateşte hedefin vurulmasının olasılığı p = 0,4'tür. Üç ateşte hedefin vurulması sayısı x ile gösterelim. x rastgele değişkeninin beklenen değerini bulunuz.

Çözüm: x rastgele değişkeni aşağıdaki değerleri alabilir:

$$x_1=0,\quad x_2=1,\quad x_3=2,\quad x_4=3 \quad .$$

Bu rastgele değişkenin dağılım tablosunu yapalım. Bunun için n = 3, p = 0,4 ve q = 0,6 olmakla x rastgele değişkeninin x_1, x_2, x_3, x_4 değerlerinin gerçekleşme olasılıklarını tekrar deneyler esasında bulalım:

$p(x=0)=C_3^0(0,6)^3=0,216$,

$p(x=1)=C_3^1(0,4).(0,6)^2=0,432$,

$p(x=2)=C_3^2(0,4)^2.(0,6)=0,288$,

$p(x=3)=C_3^3(0,4)^3=0,064$.

Buna göre de rastgele değişkenin dağılım tablosu aşağıdaki gibi olur:

X	0	1	2	3	
$P(x=x_k)$	0,216	0,432	0,288	0,064	

Beklenen değerini (6.7) formülü ile hesaplarsak buluruz:

$m_x = 0.0,216 + 1.0,432 + 2.0,288 + 3.0,064 = 1,2$ vurma.

Örnek 6.10: Hedefe bir ateş ediliyor. Hedefin vurulmasının olasılığı p'dir. x rastgele değişkeni hedefin vurulmaları sayısı olsun. x'in beklenen değerini bulunuz.

Çözüm: Rastgele x değişkeninin dağılım tablosunu yapalım

X	0	1
p_k	1-p	p

Böylece, $m_x = 0.(1-p) + 1.p = p$

Örnek 6.11: Binom dağılımlı x kesikli rastgele değişkeninin beklenen değerini bulunuz.

Çözüm: Farz edelim ki, x rastgele değişkeni

0,1,2,…n

değerlerini

$$P(x=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

olasılıkları ile alır. Bu rastgele değişkeninin beklenen değerini hesaplayalım.

Tanıma göre

$$M[x]=\sum_{k=0}^{n} p_k x_k = \sum_{k=0}^{n} kp(x=k)$$

olur. Buradan da buluruz

$$M[x]=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad .$$

Burada

$$k.C_n^k = n.C_{n-1}^{k-1}$$

eşitliğinden yararlanarak buluruz:

$$M[x]=n.p\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

$$=n.p\left[p+(1-p)\right]^{n-1}=np \quad .$$

Böylece

$$M[x]=n.p \quad . \quad (6.13)$$

Buradan böyle bir sonuç çıkar. Bağlı olmayan n deney gerçekleştiğinde ve her deneyde A olayının gerçekleşmesinin olasılığı p ise, o zaman A olayının n deneyde gerçekleşmesi sayısını gösteren x rastgele değişkeninin beklenen değeri $M[x]$, (6.13) formülü ile heaplanır.

Özel halde (6.13) formülünde n hedefe edilen ateşlerin genel sayısı, p bir ateşte hedefin vurulması olasılığı olursa, o zaman $M[x]=n.p$ sayısı n ateşte hedefin beklenen vurulması sayısını gösterir. (6.13) formülünden yararlanılarak örnek 10 aşağıdaki gibi çözülür:

$$M[x]=n.p=3.0,4=1,2 \text{ vurma.}$$

Eğer (6.13) formülünde $M[x]$ ve p belli olursa bu formülden yararlanarak verilmiş beklenen değerini veren deneyler sayısını aşağıdaki formülle hesaplayabiliriz.

$$n=\frac{M[x]}{p} \quad . \quad (6.14)$$

Örnek 6.12: Bir ateşte hedefin vurulmasının olasılığı p = 0,2'dir. Hedefin vurulmaları sayısının beklenen değerin 5 olması için gerek olan gülle harçlanmasının sayısını bulunuz.

$$n=\frac{5}{0,2}=25 \text{ gülle.}$$

Benzer şekilde araştırmalar her alanda yapılabilir.

Örnek 6.13: Rastgele x değişkeninin dağılım tablosu aşağıda verilmiştir:

x	1	2	3	…	k	…
p_k	p	$(1-p)\,p$	$(1-p)^2\,p$	…	$(1-p)^{k-1}\,p$	…

Yani bu rastgele değişken geometrik dağılıma sahiptir. x rastgele değişkeninin beklenen değerini bulunuz.

Çözüm: (6.7) formülüne göre, q = 1-p ile göstermekle buluruz:

$$m_x = 1.p + 2pq + 3q^2p + ... + kq^{k-1}p + ... =$$

$$= p\left(1 + 2q + 3q^2 + ... + kq^{k-1} + ...\right) = p\left(q + q^2 + q^3 + ... + q^k + ...\right)_q' =$$

$$= p\left(\frac{q}{1-q}\right)_q' = p.\frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} \quad .$$

Böylece, $m_x = \dfrac{1}{p}$.

Dikkate alalım ki,

$$\lim_{p \to 1} m_x = 1$$

ve

$$\lim_{p \to 0} m_x = \infty$$

Son bağlantıları problemin anlamına göre açıklayabiliriz.

Gerçektende, eğer her bir deneyde A olayının gerçekleşmesinin olasılığı 1'e yakın olursa yani $p \approx 1$ olursa, o zaman A olayının birinci deneyde gerçekleşmesini beklemek olur, yani $m_x \approx 1$. Eğer A olayının deneylerde gerçekleşmesi olasılığı çok küçük ise $p \approx 0$ ise, o zaman A olayının gerçekleşmesi için çok sayıda deney yapmak gerekecektir yani $m_x \approx \infty$.

Bazen x rastgele değişkeninin beklenen değerine x rastgele değişkeninin olasılıklarının dağılım merkezi de denir.

Burada olasılıkların dağılım merkezi ismi mekanikteki "ağırlık merkezi" ismine benzer olarak kullanılmıştır. Eğer ox ekseni üzerinde $x_1, x_2, ...x_n$ apsisli noktalarda kütleleri uygun olarak $p_1, p_2, ...p_n$'e eşit olan cisimler yerleştirilmiş olursa, analitik geometriden bellidir ki, bu cisimlerin ağırlık merkezinin apsisi aşağıdaki formülle belirlenir:

$$x_m = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k p_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k}$$

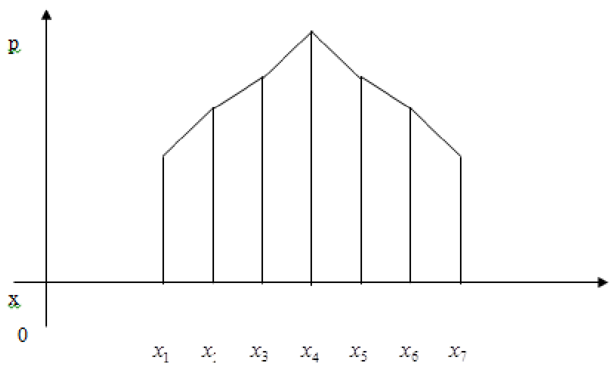
Eğer $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ olursa, o zaman

$$x_m = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \quad (6.15)$$

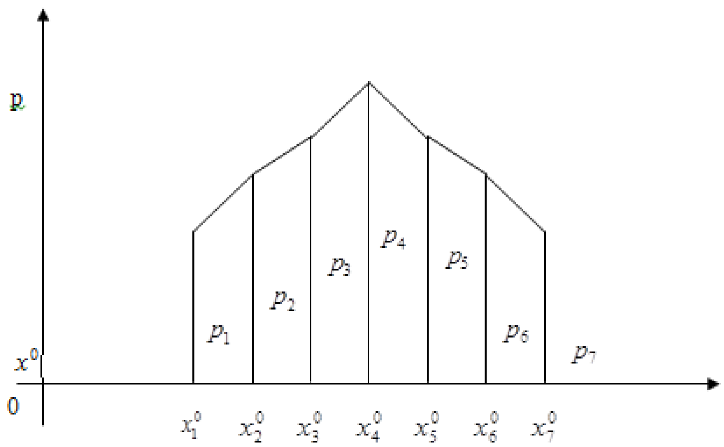
olur. (6.15) formülü (6.9) formülü ile şekline göre çakışıyor. Ama (6.9) formülü beklenen değer formülüdür.

Böylece, kütle merkezinin koordinatları ve beklenen değerin benzer formüllerle hesaplandığını gösterdik. Olasılıkların dağılım merkezi sözü de buradan benzer şekilde kullanılmıştır.

Farz edelim ki, x rastgele değişkeninin dağılımı kuralının grafiği verilmiştir (bkz. Şekil 6.3)



Şekil 6.3: Rastgele x değişkeninin dağılımının grafiği



Şekil 6.4: $x - m_x$ dağılımının grafiği

Farz edelim ki, bu rastgele değişkeninin beklenen değeri m_x 'dir. x rastgele değişkeni ile onun beklenen değerinin farkını ele alalım: $x-m_x$.

Bu $x-m_x$ rastgele değişkenine merkezleştirilmiş rastgele değişken denir ve X^o şeklinde gösterilir.

Bu rastgele değişkeninin dağılım kanunu aşağıdaki gibi olması açıktır:

X_o	$x_1^0 = x_1 - m_x$	$x_2^0 = x_2 - m_x$	$\cdots$	$x_k^0 = x_k - m_x$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

Bu dağılımın grafiği şekil 3'te verilmiştir.

6.4. Beklenen değerin özellikleri

Genelde beklenen değerin bir çok özellikleri vardır. Bu özelliklerden bazılarını kesikli rastgele değişkenler için burada verelim.

1. Sabitin beklenen değeri kendisine eşittir:

$$M[c]=c \quad . \qquad (6.16)$$

Gerçektende, sabit c sayısına ancak bir c değerini p = 1 olasılığı ile, diğer değerleri ise p = 0 olasılığı ile alan bir rastgele değişken gibi düşünebiliriz. Buna görede, sabitin beklenen değeri için, tanıma göre aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$M[c]=c.1=c \quad .$$

2. Merkezleştirilmiş rastgele değişkenin beklenen değeri sıfıra eşittir.

Gerçektende,

$$M[x-m_x]=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m_x)\,p_k=\sum_{k=1}^{n}x_k p_k-\sum_{k=1}^{n}m_x p_k=$$

$$=m_x-m_x\sum_{k=1}^{n}p_k=m_x-m_x.1=0 \quad .$$

3. Sabiti beklenen değer işaretinden dışarı çıkarabiliriz:

$$M[cx]=cM[x] \qquad (6.17)$$

İspat: x rastgele değişkeni x_k değerini p_k olasılığı ile alırsa, yani $p(x=x_k)=p_k$ ise, o zaman y = cx rastgele değişkeni de cx_k değerini bu p_k olasılığı ile alır:

$$P(y=cx_k)=p_k \quad .$$

Buna göre de

$$M[cx]=\sum_{k=1}^{m} cx_k p_k = c\sum_{k=1}^{m} p_k x_k = cM[x] \ .$$

4. İki rastgele değişkenin toplamının beklenen değeri onların beklenen değerlerinin toplamına eşittir:

$$M[x+y]=M[x]+M[y] \ . \quad (6.18)$$

İspat: Farz edelim ki, x kesikli rastgele değişkeni $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ değerlerini uygun olarak $p_1, p_2, ..., p_k, ...$olasılıkları ile y kesikli rastgele değişkeni ise $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ değerlerini $q_1, q_2, ..., q_n, ...$ olasılıkları ile alır. O zaman $x+y$ kesikli rastgele değişkeni $x_k + y_n \ (k, n = 1, 2, ...)$ değerlerini $p_{k,n} = P(x = x_k, y = y_n)$ olasılığı ile alır. Bu halde aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğu açıktır:

$$p_k = P(x = x_k) = \sum_{n=1}^{\infty} p(x = x_k, y = y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{k,n}$$

ve

$$q_n = p(y = y_n) = \sum_{k=1}^{\infty} p(x = x_k, y = y_n) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,n}$$

O zaman beklenen değerin tanımına göre buluruz:

$$M[x+y]=\sum_{k,n}^{\infty} p(x_k + y_n)P_{k,n} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(x_k + y_n)p_{k,n} =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} x_k\left(\sum_{n=1}^{\infty} p_{k,n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty} y_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} p_{k,n}\right)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} y_n q_n = M[x]+M[y] \ .$$

Bu özellikle keyfi sonlu sayıda rastgele değişkenlerin toplamı içinde sağlanır:

$$M\underbrace{[x+y+z+...+t]}_{n \tan e} = \underbrace{M[x]+M[y]+M[z]+...+M[t]}_{n \tan e} \quad (6.19)$$

Sonuç 1: a ve b sabit ve x kesikli rastgele değişken olduğunda $y = ax + b$ rastgele değişkenin beklenen değeri için aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$M[y]=aM[x]+b \ . \ (6.20)$$

Sonuç 2: İki rastgele değişkenin farkının beklenen değeri onların beklenen değerlerinin farkına eşittir:

$$M[x-y]=M[x]-M[y] \ . \ (6.21)$$

Gerçektende,

$$M[x-y]=M[x]+M[(-1)y]=M[x]+(-1)M[y]=M[x]-M[y] \quad .$$

5. Bağımsız iki rastgele değişkenin çarpımının beklenen değeri, onların beklenen değerlerinin çarpımına eşittir:

$$M[xy]=M[x]+M[y] \quad . \qquad (6.22)$$

İspat: Farz edelim ki x rastgele değişkeni $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ değerlerini uygun olarak $p_1, p_2, ..., p_k, ...$ olasılıkları ile y rastgele değişkeni ise $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ değerlerini $q_1, q_2, ..., q_n, ...$ olasılıkları ile alır. O zaman xy rastgele değişkeni $x_k y_n$ değerlerini uygun olarak

$$P[\{x=x_k\}.\{y=y_n\}]=P(x=x_k).P(y=y_n)=p_k.q_n$$

olasılığı ile alır. Buna göre

$$M[xy]=\sum_{k,n} x_k y_n p_k q_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_k y_n p_k q_n =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k . \sum_{n=1}^{\infty} y_n q_n = M[x].M[y].$$

Bu özellik keyfi sonlu sayıda bağımsız rastgele değişkenler için doğrudur:

$$M[\underbrace{x.y.z.....t}_{n \tan e}]=\underbrace{M[x].M[y].M[z].....M[t]}_{n \tan e} \quad . \qquad (6.23)$$

(6.23) özelliğine beklenen değerin multinlikativlik özelliği denir[6].

6. Keyfi x rastgele değişkeni için

$$|M[x]| \le M[|x|] \qquad (6.24)$$

eşitsizliği doğrudur.

(6.24) eşitsizliği aşağıdaki

$$\left|\sum_k x_k p_k\right| \le \sum_k |x_k|.p_k$$

eşitsizliğinin yardımı ile ispatlanır.

6.5.Varyans (dispersiya), Orta kuadratik (standart) sapma, Momentleri anlamları

x rastgele değişkeninin olasılıklarının dağılım merkezini belirleyen beklenen değerinden başka, onun dağılımının miktarca karakterize eden değişken rastgele değişkenin varyansıdır[5].

x rastgele değişkeninin varyansını $D[x]$ veya σ_x^2 ile göstereceğiz.

″Varyans″ sözü dağılma anlamındadır. Varyans rastgele değişkenin değerlerinin onun beklenen değerinden sapmalarının sayısal karakteristiğidir.

Tanım 6.1: Rastgele x değişkeninin ve onun beklenen değerinin farkının karesinin beklenen değerine rastgele x değişkeninin varyansı (dispersiyası) denir[4] (yani uygun merkezleştirilmiş rastgele değişkenin karesinin beklenen değerine bu rastgele değişkenin varyansı denir):

$$D[x] = M\left[(x-m_x)^2\right] \quad , \qquad (6.25)$$

veya

$$D[x] = \sum_{k=1}^{n}(x_k - m_k)^2\, p_k \quad . \qquad (6.26)$$

Varyans (dispersiya) rastgele değişkenin karesinin ölçüsüne eşittir. Bazen ölçüsü rastgele değişkenin ölçüsü ile çakışan değişkenle dağılımı karakterize etmek daha faydalı olur.

Böyle bir değişken <u>orta kuadratik (standart) sapmadır.</u>

Tanım 6.2: Rastgele değişenin standart sapması varyansının kare köküne denir[4]:

$$\sigma[x] = \sqrt{D[x]},$$

veya açık şekilde aşağıdaki gibi yazılır

$$\sigma[x] = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - m_x)^2\, p_k} \quad . (6.27)$$

Standart sapma σ_x ile gösterilir.

Not 6.1: Varyansı hesaplamak için (6.25) formülünü aşağıdaki şekilde ifade etmek daha faydalı olabilir:

$$D[x] = \sum_{k=1}^{n}(x_k - m_x)^2\, p_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^{\,2} p_k - 2\sum_{k=1}^{n} x_k m_x p_k + \sum_{k=1}^{n} m_x^{\,2} p_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^{\,2} p_k - 2m_x \sum_{k=1}^{n} x_k p_k + m_x^{\,2} \sum_{k=1}^{n} p_k =$$

$$= M\left[x^2\right] - 2m_x.m_x + m_x^{\,2} = M\left[x^2\right] - m_x^{\,2} \quad .$$

Böylece,

$$D[x] = M\left[x^2\right] - m_x^{\,2} \; (6.28)$$

yani varyans rastgele değişkenin karesinin beklenen değeri ile onun beklenen değerinin karesinin farkına eşittir.

Örnek 6.14: Hedefe bir kez ateş ediliyor. Hedefin vurulmasının olasılığı p'dir. Hedefin vurulması sayısının beklenen değerini, varyansını ve standart sapmasını bulunuz.

Çözüm. Vurulma sayısının tablosunu yapalım

x	1	0
p_k	p	q

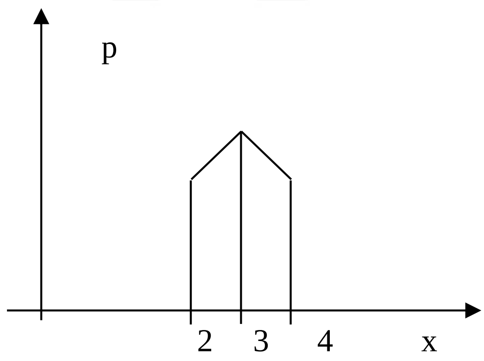
Burada $q = 1 - p$. Böylece;

$$\begin{cases} M[x] = 1.p + 0.q = p \\ D[x] = (1-p)^2.p + (0-p)^2.q = q^2.p + p^2.q = p.q, \\ \sigma[x] = \sqrt{pq} \quad . \end{cases} \qquad (6.29)$$

Standart sapma ve varyansının anlamını daha iyi anlamak amacı ile örneklere bakalım.

Örnek 6.15: x rastgele değişkeni aşağıdaki tabloda verilen dağılım kurallı bir rastgele değişkendir (bak. Şekil 6.5):

X	1	3	4
p_k	0,3	0,4	0,3



Şekil 6.5: x rastgele değişkeninin dağılım grafiği

Bu rastgele değişkenin, beklenen değerini, varyansını ve standart sapmasını bulunuz.

Çözüm:

$$M[x] = 2.0,3 + 3.0,4 + 4.0,3 = 3 \quad ,$$

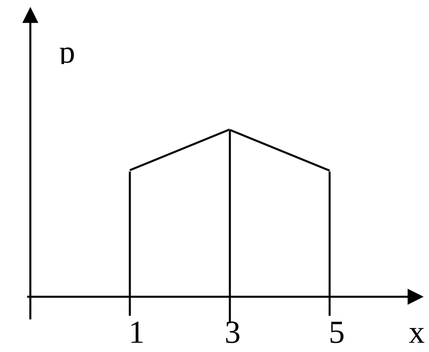
$$D[x] = (2-3)^2.0,3 + (3-3)^2 0,4 + (4-3)^2 0,3 = 0,6 \quad ,$$

$$\sigma[x] = \sqrt{D[x]} = \sqrt{0,6} = 0,77 \quad .$$

Örnek 6.16: Rastgele x değişkeninin dağılım tablosu aşağıdaki gibidir (bak. Şekil 6.6)

Çözüm:

x	1	3	5
p_k	0,3	0,4	0,3



Şekil 6.6: x rastge le değişkeninin dağılım grafiği

Bu rastgele değişkenin beklenen değerini, varyansını ve standart sapmasını bulunuz.

Çözüm:

$M[x] = 1.0,3 + 3.0,4 + 5.0,3 = 3$,

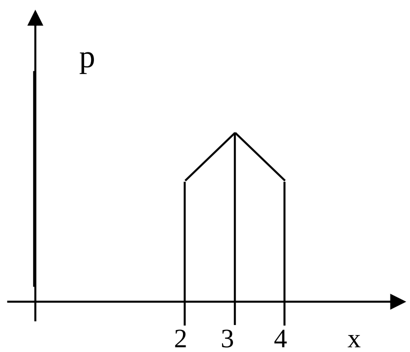
$D[x] = (1-3)^2 .0,3 + (3-3)^2 .0,4 + (5-3)^2 .0,3 = 2,4$,

$\sigma[x] = \sqrt{2,4} = 1,55$.

Birinci örnekte rastgele değişkenin dağılımı ikinci örnekteki rastgele değişkenin dağılımından azdır. Bu rastgele değişkenlerin uygun varyansları 0,6 ve 2,4'tür.

Örnek 6.17: Rastgele x değişkeninin dağılım tablosu aşağıdaki gibidir (bak. Şekil 6.7).

X	1	3	4
p_k	0,3	0,4	0,3



Şekil 6.7: x rastgele değişkeninin dağılım grafiği

Bu rastgele değişkenin beklenen değerini, varyansını ve standart sapmasını bulunuz.

Çözüm.

$M[x] = 3.1 = 3$,

$D[x] = (3-3)^2 .1 = 0$,

$\sigma[x]=0$.

Bu rastgele değişkenin dağılımı yoktur.

Not 2: Sabit sayıya olasılığı 1 olan rastgele değişken gibi düşünürsek o zaman $D[c]=0$ dır.Gerçektende, $M[c]=c$ olduğunu göstermiştik. Buna göre de (1) formülüne göre

$$D[c]=M\left[(c-c)^2\right]=M[0]=0 \quad .$$

Not 3: Mekanikteki terimlere uygun olarak $(x-m_x)$, $(x-m_x)^2$ değişkenlerin beklenen değerine birinci ve ikinci merkezleştirilmiş momentler adı verilir.

Üçüncü mertebeden merkezleştirilmiş moment anlamına da bakılır:

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-m_x)^3 p_k \quad .$$

Eğer rastgele değişken olasılık dağılım merkezine göre simetrik dağılmışsa, o zaman onun üçüncü mertebeden merkezleştirilmiş momenti sıfıra eşit olması açıktır.

Eğer rastgele değişkenin üçüncü mertebeden momenti sıfırdan farklı ise, o zaman rastgele değişken simetrik dağılamaz.

6.6. Rastgele değişkene bağlı fonksiyonlar

Farz edelim ki, x rastgele değişkeni tablo şeklinde dağılımı ile verilmiştir.

x	x_1	x_2	…..	x_k	….	x_n
p_k	p_1	p_2	…..	p_k	….	p_n

x rastgele değişkenine bağlı f(x) fonksiyonunu ele alalım:

$$y=f(x)$$

$y_k=f(x_k)$ değerleri y rastgele değişkeninin değerleri olacaktır. Eğer $y_k=f(x_k)$ değerlerinin her biri farklı ise o zaman y rastgele değişkeninin dağılım kuralını aşağıdaki tablo ile verebiliriz:

$y=f(x)$	$y_1=f(x_1)$	$y_2=f(x_2)$	…..	$y_k=f(x_k)$	….	$y_n=f(x_n)$
p_k	p_1	p_2	…..	p_k	….	p_n

Eğer $y_k=f(x_k)$ değerlerinden eşit olanlar varsa o zaman uygun sütunu birleştirmek gerekir. O zaman fonksiyonun değerini saklayıp uygun olasılıkları toplarız.

x rastgele değişkeninin $y = f(x)$ fonksiyonunun beklenen değeri aşağıdaki formülle bulunur:

$$M[f(x)] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k).p_k \quad . \qquad (1)$$

Aynı yöntemle bu fonksiyonun varyansı belirlenir:

$$D[f(x)] = M\left[\left(\left[(f(x)\right] - M[f(x)]\right)\right]^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_k) - m_{f(x)}\right)^2 p_k \quad .$$

Örnek: φ rastgele değişkeni aşağıdaki dağılım kanunu ile verilmiştir:

φ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
p_k	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3

Bu rastgele değişkene bağlı aşağıdaki fonksiyonu ele alalım:

$y = A\sin\varphi$.

y rastgele değişkeni için dağılım tablosunu yapalım:

y	-A	$-\frac{A\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{A\sqrt{2}}{2}$	A
p_k	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3

Bu fonksiyonun beklenen değerini bulalım:

$$M[A\sin\varphi] = -A.0,1 - \frac{A\sqrt{2}}{2}.0,1 + 0.0,2 + \frac{A\sqrt{2}}{2}.0,3 \quad ,$$

$$+A.0,3 = A\left(0,2 + \frac{\sqrt{2}}{2}.0,2\right) = A(0,2+0,14) = 0,34A \quad .$$

Bu tip problemlerle titreşim proseslerinde karşılaşabiliriz.

6.7. Sürekli Rastgele Değişken, Sürekli Rasgele Değişkenin Dağılım Yoğunluğu

Rastgele değişkenin alabildiği değerler herhangi bir sonlu veya sonsuz aralığı dolduruyorsa, o zaman böyle rastgele değişkene sürekli rastgele değişken denir.

Sürekli rastgele değişkene bir örnek gösterelim. Bir süre işletildikten sonra silindirin yarıçapı r ölçülür. Ölçme zamanı silindirin yarı çapının $\bar{x}$ değişkeni kadar büyüdüğü görülür. Problemden anlaşılır ki, $\bar{x}$ değişkeni rastgele değişken olup belli bir (a,b) aralığından keyfi değer alabilir[2].

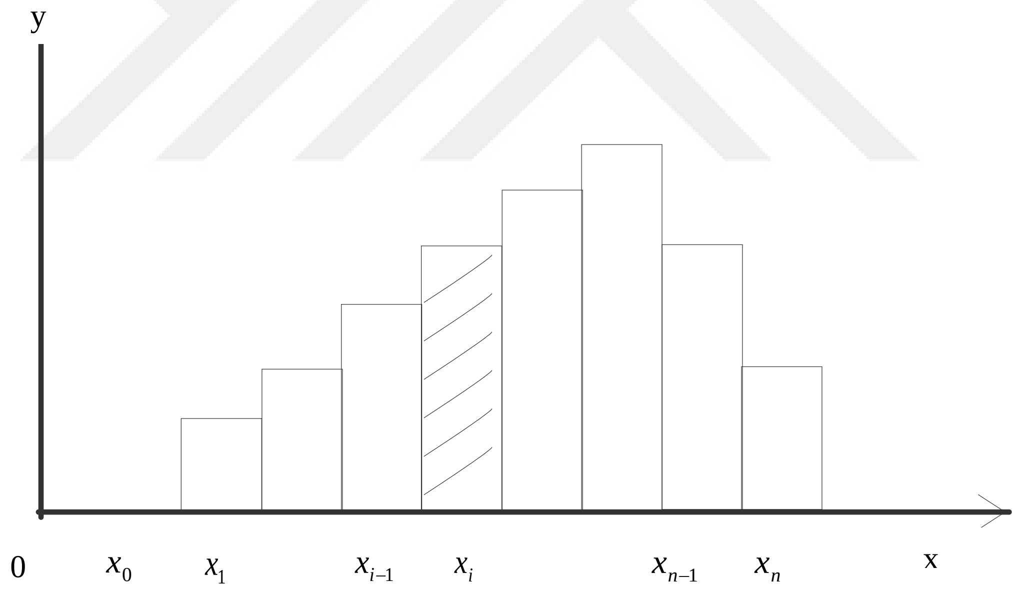
Böylece, bu değişken sürekli rastgele değişkendir.

(a,b) aralığında verilmiş sürekli $\bar{x}$ rastgele değişkenini ele alalım. (a,b) aralığı sonlu veya sonsuz aralık olabilir. Mesela (a,b) aralığı sonsuz $(-\infty, b), (a, \infty)$ veya $(-\infty, \infty)$ aralıkları şeklinde aralıkta olabilir. (a,b) aralığını keyfi $x_0, x_1, ..., x_n$ noktaları ile küçük (x_{i-1}, x_i), $(\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1})$ aralıklarına ayıralım.

Farz edelim ki, $\bar{x}$ rastgele değişkeninin (x_{i-1}, x_i) aralığına düşmesinin olasılığı bellidir. Bu olasılık

$$P(x_{i-1} < \bar{x} < x_i)$$

ile gösterilir ve bu olasılığı geometrik olarak tabanı Δx_i olan dikdörtgenin alanı gibi gösterelim (bkz. Şekil 6.8).



Şekil 6.8: $\bar{x}$ rastgele değişkeninin dağılım grafiği

Her bir (x_{i-1}, x_i) aralığı için $\bar{x}$ rastgele değişkeninin bu aralığa düşmesinin olasılığı belirlenir ve buna görede tabanı Δx_{i-1} olan uygun dikdörtgen yapılabilir. Böylece biz merdiven şekilli doğrular gibi gösterebiliriz (bak şekil 6.8).

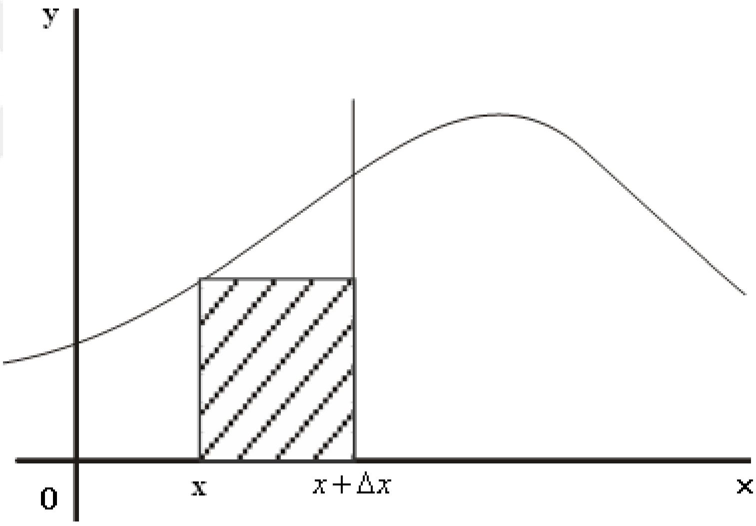
Tanım 1:Eğer öyle bir $y = f(x)$ fonksiyonu vardır ki,

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{p\left(x<\bar{x}<x+\Delta x\right)}{\Delta x} \qquad (1)$$

eşitliği her bir $x\in(a,b)$ için sağlanırsa, o zaman $f(x)$ fonksiyonuna $\bar{x}$ rastgele değişkeninin olasılık dağılım yoğunluğu denir. Bazen bu $f(x)$ fonksiyonuna "dağılım kanunu" veya "dağılım yoğunluğu" veya da "olasılık yoğunluğu" da denir. $\bar{x}$ ile biz sürekli rastgele değişkeni göstereceğiz. x ile ise veya x_k ile bu rastgele değişkenin değerini göstereceğiz. Ama, bazen anlaşılmasına engel olunmadığında x üzerindeki çizgiyi yazamayacağız $y=f(x)$ eğrisine ise olasılık dağılım eğrisi veya dağılım eğrisi denir[1] (bak. Şekil 6.9).

Limitin tanımına göre aşağıdaki yaklaşık eşitliği yazabi

$$P(x<\bar{x}<x+\Delta x)\approx f(x)\Delta x \qquad (2)$$



Şekil 6.9: $y=f(x)$ eğrisinin grafiği

Burada Δx küçük olduğunu kabul ederiz.

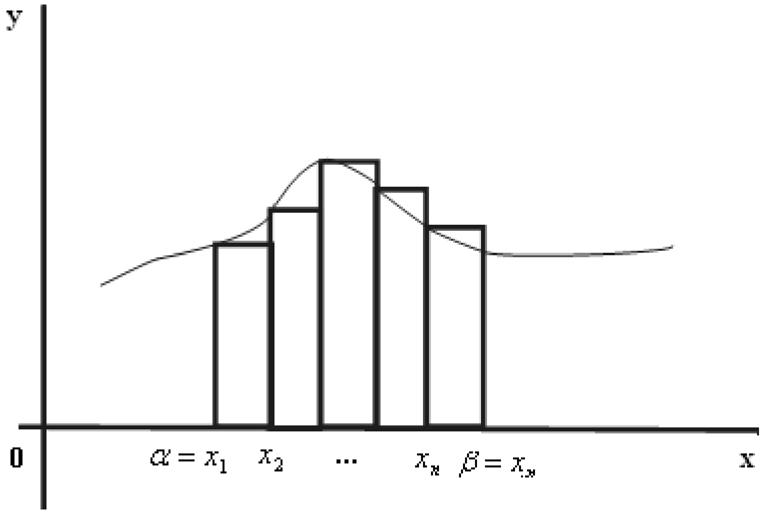
6.8. Rastgele değişkenin verilmiş aralığa düşme olasılığı

(2) yaklaşık formülünün yardımı ile rastgele değişkenin verilmiş aralığa düşmesinin olasılığını hesaplamak için formül yazabiliriz.

Gerçektende, farz edelim ki, f(x) fonksiyonu $\bar{x}$ rastgele değişkeninin dağılım yoğunluğudur. O zaman $\bar{x}$ rastgele değişkeninin değerinin herhangi bir (α,β) aralığına düşmesi olasılığı aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \quad . \qquad (3)$$

Bu eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. Bunun için (α, β) aralığını $\alpha = x_1, x_2, ..., x_{n+1} = \beta$ noktaları ile n tane küçük aralıklara ayıralım (bak. Şekil 6.10).



Şekil 6.10: $y = f(x)$ eğrisinin ayrılma grafiği

Bu aralıkların her biri için (2) yaklaşık formülünü uygulayalım:

$$p\left(x_1 < \bar{x} < x_2\right) \approx f(x_1).\Delta x,$$

$$p\left(x_2 < \bar{x} < x_3\right) \approx f(x_2).\Delta x,$$

……………………………….

$$p(x < \bar{x} < x_{n+1}) \approx f(x_n)\Delta x_n \quad .$$

Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak, o zaman sonuçta sol yanda $P(\alpha < \bar{x} < \beta)$ olasılığını alırız. Böylece,

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i \quad ,$$

bu yaklaşık eşitliktir. Bu eşitliğin her yanından $\max \Delta_i x \to 0$ şartında limit alırsak eşitliğin sağ yanındaki ifade $f(x)$ fonksiyonu integral toplamının limiti olur:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$

Farz edelim ki, sağda duran limit f(x) fonksiyonu için vardır. O zaman bu limit $f(x)$ fonksiyonunun (α,β) aralığındaki belirli integrali olur. Böylece

$$p\left(\alpha < \bar{x} < \beta\right) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \quad .$$

Bununla da (3) formülünün doğruluğu ispatlanmış olur.

Böylece, rastgele değişkenin dağılım yoğunluğunu bildiğimizde rastgele değişkenin değerinin verilmiş aralıkta olmasının olasılığını hesaplayabiliriz. Bu olasılık geometrik olarak uygun eğrisel yamuğun alanına eşit olur (bak şekil 6.11).

Dikkate alalım ki, sürekli rastgele değişken halinde $\bar{x}$ rastgele değişkeninin $\bar{x} = x_0$ değerinin olasılığı sıfıra eşittir.

Gerçektende, bunu göstermek için (2) formülünde $x = x_0$ yazarsak o zaman alırız:

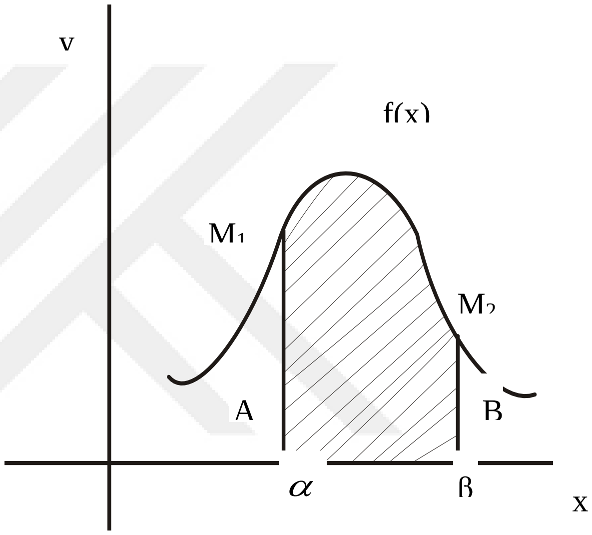
$$P\left(x_0 < \bar{x} < x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right).\Delta x \quad ,$$

Buradan

$$\lim_{\Delta x \to 0} P\left(x_0 < \bar{x} < x_0 + \Delta x\right) = 0,$$

veya

$$P\left(\bar{x} = x_0\right) = 0 \quad .$$



Şekil 6.11: $y = f(x)$ eğrisinin grafiği

Burada dikkate alalım ki, sürekli rastgele değişkenlerde bir olayın olasılığının 1 olması veya 0 olması bu olayın kesin veya mümkün olmayan olanaksız olay olması anlamına gelmez. Bu dediklerimize göre (3) formülünde $P(\alpha < \bar{x} < \beta)$ yerine $P(\alpha \le \bar{x} \le \beta)$ ifadesinide yazabiliriz.

Gerçektende,

$$P(\alpha \le \bar{x} \le \beta) = P(\bar{x} = \alpha) + P(\alpha < \bar{x} < \beta) + P(\bar{x} = \beta) = P(\alpha < \bar{x} < \beta) \quad .$$

Eğer $\bar{x}$ rastgele değişkeninin tüm mümkün değerleri (a,b) aralığında olursa, o zaman rastgele değişkenin değerinin (a,b) aralığında olması kesin olur ve buna göre de aşağıdaki formül yazılır:

$$\int_a^b f(x)dx = 1 \quad . \qquad (4)$$

Özel halde, rastgele değişkenin aldığı değerler aralığı, $(-\infty, \infty)$aralığı olursa, o zaman (4) formülü aşağıdaki gibi yazılır:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad . \qquad (5)$$

Ama, ele aldığımız problemin karakterinden alınırsa ki, $f(x)$ fonksiyonu sonlu bir (a,b) aralığında tanımlanmıştır, o zaman bu fonksiyonu tüm sonsuz $(-\infty, \infty)$ aralığına

$$f(x) = 0, \quad x \notin (a,b)$$

eşitliği ile tanımlayabiliriz. Bu halde (4) ve (5) eşitliklerinin her ikiside sağlanır. Rastgele değişkenin dağılım yoğunluğu rastgele değişkeni tam olarak belirler.

6.9. Ratsgele değişkenin dağılım fonksiyonu veya integral dağılım kanunu

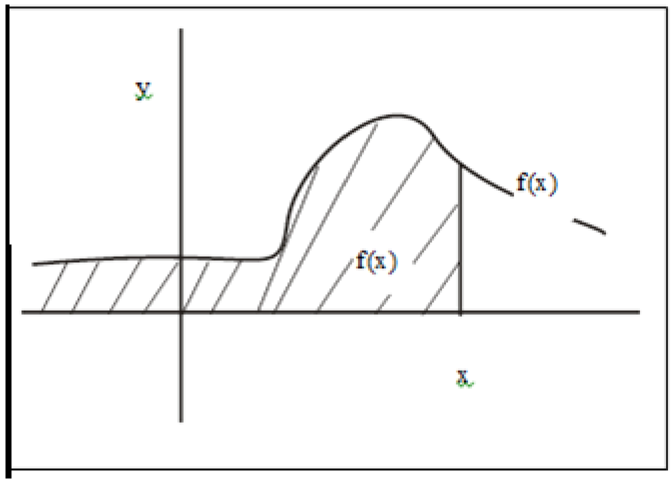
Farz edelim ki, $f(x)$ fonksiyonu değerleri $(-\infty < x < +\infty)$ aralığında yerleşen herhangi bir $\bar{x}$ rastgele değişkeninin dağılım yoğunluğudur.

O zaman aşağıdaki integralle tanımlanan

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi \qquad (1)$$

fonksiyonuna $\bar{x}$ rastgele değişkeninin olasılık dağılım fonksiyonu veya integral dağılım kanunu denir[1].

Olasılık dağılım fonksiyonu geometrik olarak tabanı $(-\infty, x)$ aralığı olan eğrisel yamuğun alanını gösterir. (bak şekil 6.12)



Şekil 6.12: Olasılık dağılım fonksiyonunun grafiği

Kesikli rastgele değişkenler için dağılım fonksiyonu rastgele değişkenin x'den küçük olan x_k değerlerinin olasılıklarının toplamı gibi tanımlanır:

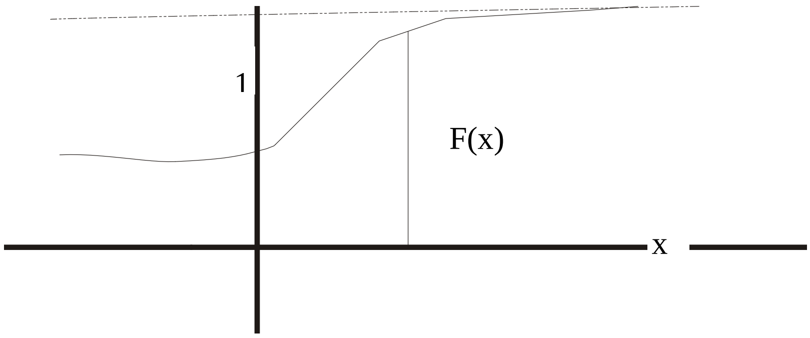
$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k \quad . \qquad (1')$$

Dikkate alalım ki,

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

formülüne göre, F(x) dağılım fonksiyonunun $\bar{x}$ rastgele değişkeninin x'den küçük değerler almasının olasılığı olduğunu görüyoruz (bak. Şekil 6.13):

$$F(x) = P(-\infty < \bar{x} < x) \quad . \qquad (2)$$



Şekil 6.13: $y = f(x)$ eğrisinin grafiği

Şekil 6.13'ten ise görüyoruz ki, F(x) fonksiyonunun değeri dağılım eğrisi ile x noktasının ordinatı ile ve ox ekseninin x'den soldaki kısmı arasında kalan alana eşittir.

F(x) fonksiyonunun grafiğine dağılımın integral eğrisi denir (bak şekil 6.13).

(1) eşitliğinde $x \to +\infty$ koşulunda limite geçersek bulunur:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \quad .$$

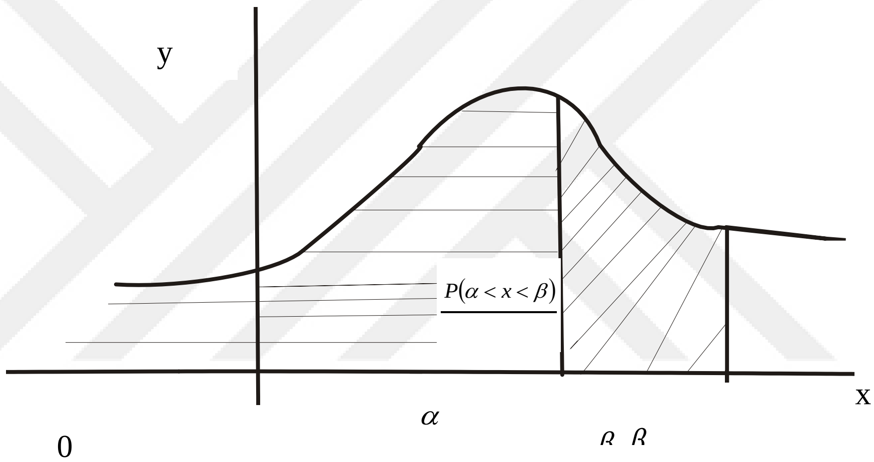
Rastgele $\bar{x}$ değişkeninin (α,β) aralığında olmasının olasılığı için aşağıdaki formülü de ispat edelim:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) \quad (3)$$

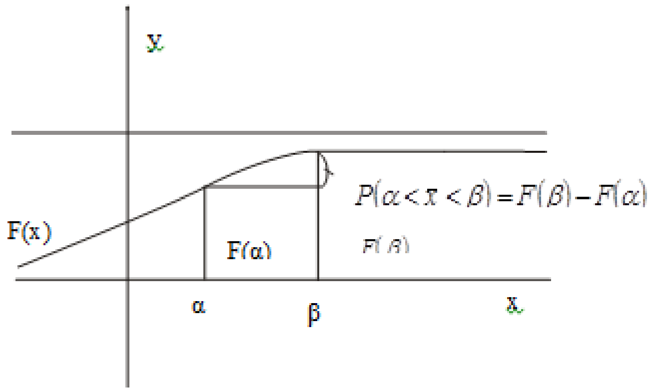
Bu formülü ispat etmek için $\bar{x}$ rastgele değişkeninin (α,β) aralığında olmasının olasılığı için önce ispat ettiğimiz formülden yararlanarak bulalım:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx - \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha) \quad .$$

(3) formülü şekil 6.14 ve şekil 6.15'de geometrik olarak gösterilmiştir.



Şekil 6.14: $P(\alpha < \bar{x} < \beta) = f(\beta) - f(\alpha)$ formülünün şekilde geometrik gösterilişi



Şekil 6.15: $P(\alpha < \bar{x} < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$ değerinin şekilde gösterilişi

Dikkate alalım ki, $f(x)$ yoğunluk dağılım fonksiyonu ile uygun F(x) dağılım fonksiyonu aşağıdaki formülle bağlıdır:

$$F'(x)=f(x). \qquad (4)$$

6.10. Düzgün dağılımlı rastgele değişken

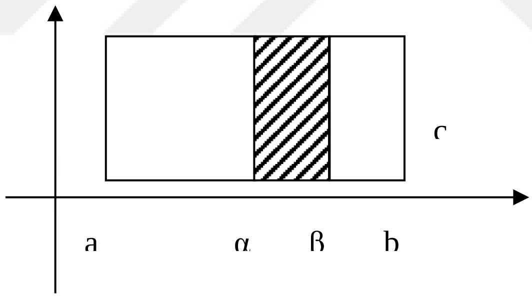
Düzgün olasılık dağılım kanunlu rastgele değişkeni ele alalım. Böyle rastgele değişkenlerin dağılım kanunları veya $f(x)$ dağılım yoğunluğu aşağıdaki gibi verilir:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<a \\ c & , \quad a<x<b \\ 0 & , \quad x>b \end{cases} \qquad (1)$$

(a,b) aralığında $f(x)$ yoğunluk fonksiyonu sabit c değerine eşit olur ve bu aralığın dışında ise sıfıra eşittir[2] (bak şekil 6.16.).

Böyle dağılıma düzgün yoğunluk kanunu da denir.

Düzgün yoğunluk kanunundaki c sabiti $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$ koşulundaki aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 6.16: (a,b) aralığında $f(x)$ yoğunluk fonksiyonunun c sabitine eşit olan değerinin gösterilişi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{a}^{b} cdx=c(b-a)=1 \quad .$$

Böylece,

$$c=\frac{1}{b-a} \text{ ve } b-a=\frac{1}{c} \quad .$$

Sonuncu eşitlikten görülüyor ki, düzgün dağılım için (a,b) aralığı sonlu olması gereklidir.

Rastgele $\bar{x}$ değişkeninin (α,β) aralığından değer alması olasılığını hesaplayalım:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a}.dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a} \quad .$$

Böylece, aradığımız olasılık için

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{\beta-\alpha}{b-a} \tag{2}$$

formülünü alırız. Bu geometrik olasılığa benzer bir formüldür.

Şimdi dağılımın integral kanununu belirleyelim:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi \quad .$$

Eğer $x < a$ olursa o zaman $f(x) = 0$ olduğundan

$$F(x) = 0 \quad , \quad a < x \quad .$$

Eğer $a < x < b,$ olursa, o zaman $f(x) = \frac{1}{b-a}$ olduğundan

$$F(x) = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}, \quad a \le x \le b \quad .$$

Eğer $b < x$ olursa, o zaman

$$f(x) = 0, \quad b < x$$

ve

$$\int_{b}^{\infty} f(x)dx = 0$$

olduğundan

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} dx = \frac{b-a}{b-a} = 1, \quad x \ge b \quad .$$

Böylece, dağılımın integral kanunu için aşağıdaki fonksiyonu buluruz.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < a \qquad \textit{olduğunda} \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , \quad a \le x < b \qquad \textit{olduğunda} \\ 0 & , \quad b \le x \qquad \textit{olduğunda} \end{cases} \tag{3}$$

Bu düzgün dağılımın dağılım integral kanunudur. Bu fonksiyona düzgün dağılımın dağılım fonksiyonu denir. Düzgün dağılımın yoğunluk fonksiyonu

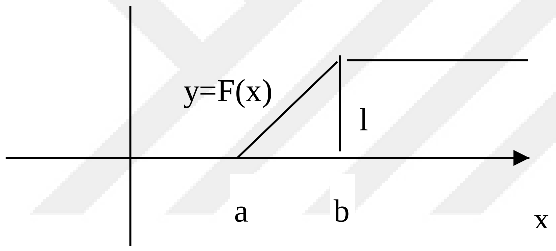
$$f(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<a \quad \textit{olduğunda}\\ \dfrac{1}{b-a} & , \quad a<x<b \quad \textit{olduğunda}\\ 0 & , \quad x>0 \quad \textit{olduğunda}\end{cases}$$

formülü ile tanımlanır.

Düzgün dağılım fonksiyonunun grafiği şekil 6.17'da verilmiştir:

Örnek 1: Herhangi bir değişkenin ölçülmesi zamanı yuvarlaklaştırma yapılır. Yuvarlaklaştırma zamanı yapılan hata düzgün olasılık dağılımlı rastgele bir değişkendir.

Mesela, eğer 2l bir bölgü birimindeki birimler sayısı ise, o zaman bu rastgele değişkenin dağılım yoğunluğu aşağıdaki formülle belirlenir.



Şekil 6.17 Düzgün dağılım fonksiyonunun grafiği

$$f(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<-l \quad \textit{olduğunda}\\ \dfrac{1}{2l} & , \quad -l<x<l \quad \textit{olduğunda}\\ 0 & , \quad l<x \quad \textit{olduğunda}\end{cases}$$

Burada $a=-l,\ b=l,\ c=\dfrac{1}{2l}$.

Örnek 2: Dönel hareket eden simetrik teker sürtünme sonucunda durur. Bu zaman hareket eden yarıçapla, hareket etmeyen yarıçap arasında kalan açının tekerinin durduğundan sonra aldığı değer rastgele değişkendir. Bu rastgele değişkenin dağılım yoğunluğu aşağıdaki gibi olur:

$$f(\theta)=\begin{cases}0 & , \quad \theta<0 \quad \textit{olduğunda}\\ \dfrac{1}{2\pi} & , \quad 0<\theta<2\pi \quad \textit{olduğunda}\\ 0 & , \quad 2\pi<\theta \quad \textit{olduğunda}\end{cases}$$

Örnek 3: $\bar{x}$ rastgele değişkeni -2 ve +2 değerlerini $p = \frac{1}{2}$ olasılığı ile alan kesikli rastgele değişkendir. Bu rastgele değişkenin dağılım fonksiyonunu yazınız.

Çözüm: Kesikli rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu

$$F(x)\sum_{x_k<x} p_k = P(\bar{x} < x)$$

formülü ile verilir.

$x \leq -2$ olduğunda $\{\bar{x} < x\}$ olayı mümkün olmayan olay olduğundan

$$F(x) = P\left(\bar{x} < x\right) = 0$$

olur. (-2< x ≤ 2) olduğunda $\{\bar{x} < x\}$ olayı $\left\{\bar{x} = -2\right\}$ olayına eşittir ve

$$F(x) = P(\bar{x} < x) = \frac{1}{2}$$

olur. x >2 olduğunda ise $\{\bar{x} < x\}$ olayı $\left\{\bar{x} = -2\right\}$ ve $\left\{\bar{x} = 2\right\}$ olaylarının toplamına eşittir.

Bu halde

$$F(x) = p\{\bar{x} < x\} = p\{\bar{x} = -2\} + p\{\bar{x} = 2\} = 1$$

bulunur.

Böylece $\bar{x}$ rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -2 \qquad \textit{olduğunda} \\ \frac{1}{2} & , \quad -2 < x \leq 2 \qquad \textit{olduğunda} \\ 1 & , \quad 2 < x \qquad \textit{olduğunda} \end{cases}$$

6.11. Normal ve üstel dağılımlar

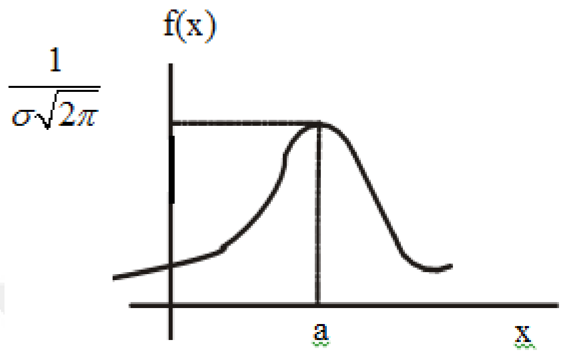
Olasılık teorisinde düzgün dağılımla beraber normal ve üstel dağılımlar en çok kullanılan dağılımlardandır.

1. Normal Dağılım: $\bar{x}$ rastgele değişkeninin yoğunluk dağılım fonksiyonu

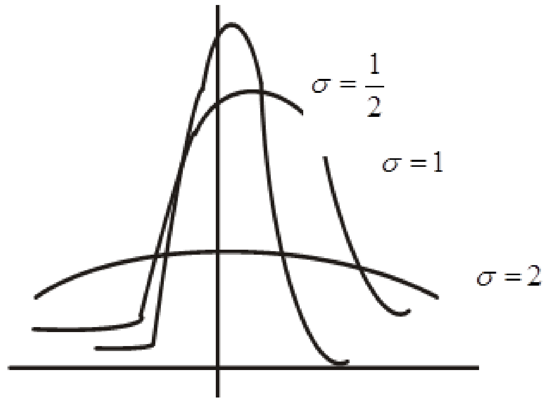
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty, \quad \sigma > 0 \qquad (1)$$

formülü ile verildiğinde, ona normal kanunlu veya Gauss kanunu ile dağılmış sürekli rastgele değişken denir. a ve σ sayılarına normal dağılım parametreleri denir[2]. Bu parametrelerin olasılık ve geometrik anlamları sonra açıklanacaktır.

(1) fonksiyonunun grafiğine normal eğri veya Gaus eğrisi denir. Bu eğrinin şekli σ parametrenin değerine bağlıdır (bak şekil 6.18).



Şekil 6.18: Normal eğrinin grafiği



Şekil 6.19: $f(x)$ fonksiyonunun grafiği

Şekil 6.19'de $a=0$ ve $\sigma^2=\frac{1}{4}$, $\sigma^2=1, \sigma^2=4$ değerleri için f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi σ parametresi küçüldükçe normal eğri ordinat eksenine yığılır ve bu eksen boyunca üste doğru toplanır.

σ parametresi arttıkça ise normal eğri apsis eksenine sıkılır ve bu eksen boyunca taraf tartılır.

2. Üstel dağılım: $\bar{x}$ rastgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & , \quad x>0 \quad \textit{olduğunda} \\ 0 & , \quad x\le 0 \quad \textit{olduğunda}\end{cases} \qquad (2)$$

olduğunda, ona üstel kanunla dağılmış rastgele değişken denir[11]. α sayısına üstel dağılımın parametresi denir. Bu halde $\bar{x}$ rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır:

$$\text{F(x)} = \begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0 \quad \textit{oldugunda}, \\ 0 \quad , & x\le 0 \quad \textit{oldugunda}.\end{cases} \qquad (3)$$

6.12. Bazı kesikli dağılımlı rastgele değişkenlerin dağılım fonksiyonları

Kesikli rastgele $\bar{x}$ değişkeni aldığı sonlu ve sayılabilir $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ değerlerinin ve bu değerleri alma olasılıkları

$$p(\bar{x} = x_k) = p_k, \quad k = 1,2,... \qquad (1)$$

verildiğinde bu rastgele dğişkenin dağılım kanunu belirlenmiş olur. Bu halde rastgele değişkenin dağılım kanununu tablo şeklinde de yazabiliriz:

$\bar{x}$	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

Kesikli rastgele değişkenin dağılım kanunu verildiğinde onun dağılım fonksiyonunu

$$F(x) = p(\bar{x} < x) = \sum_{x_k < x} p_k \qquad (2)$$

formülü ile belirleyebiliriz.

Kesikli rastgele değişkenin (2) formülü ile belirlenen dağılım fonksiyonu her bir x_k noktasında sürekli fonksiyon olup, bu noktada sıçrayışı p_k sayısına eşittir:

$$F(x_k + 0) - F(x_k) = p_k \quad (k = 1,2,...).$$

Olasılık teorisinde en çok uygulanan kesikli dağılımlar binom, Poisson, geometrik ve hipergeometrik dağılımlardır. Bu dağılımların burada dağılımı fonksiyonlarını yazalım.

1. Binom dağılımı: Farz edelim ki, bağlı olmayan n tane deney gerçekleştirilir. Her bir deneyde A olayının gerçekleşmesinin olasılığı her bir deneyde p sayısına eşittir. Bu deneyler dizisinde A olayının gerçekleşmesi sayısı $\bar{x}$ olsun. $\bar{x}$ rastgele değişkendir. $\bar{x}$ rastgele değişkeninin m sayısına eşit olmasının olasılığı Bernoulli formülü ile hesaplanır:

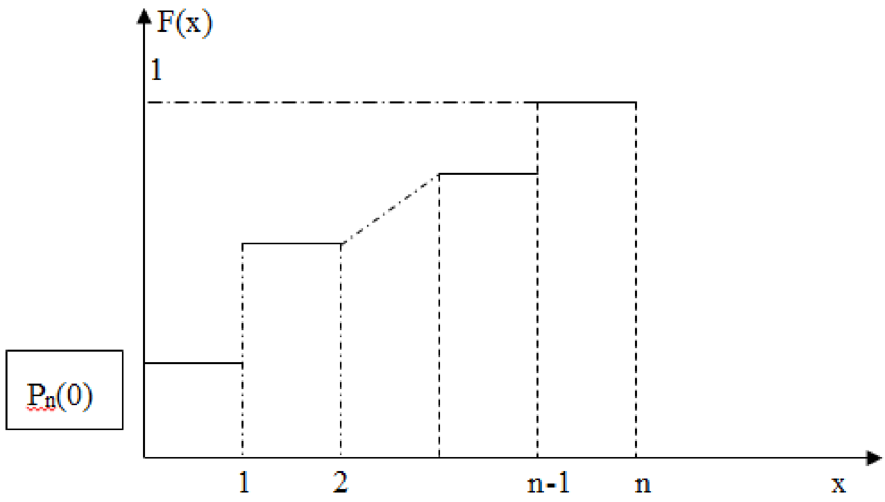
$$P_n(m) = P(\bar{x} = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p \quad . \qquad (3)$$

Olasılığı (3) formülü ile hesaplanan kesikli rastgele değişkenlere binom dağılımlı kesikli rastgele değişkenler denir. Bu formüldeki n ve p sayısına binom dağılımının parametreleri denir.

Bu rastgele değşkenin dağılım fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$F(x) = p(\bar{x} < x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \quad \textit{olduğunda} \\ \sum\limits_{k<x} p_n(k) & , \quad 0 < x \leq n \quad \textit{olduğunda} \\ 1 & , \quad x > n \quad \textit{olduğunda} \end{cases} \qquad (4)$$

Bu fonksiyon $x = 0,1,2,....n$ noktalarında süreksizdir ve onun grafiği merdiven şekilli doğrulardır (bak şekil 6.20).



Şekil 6.20: $F(x)$ fonksiyonunun grafiği

F(x) fonksiyonunun $x = m$ noktasındaki sıçrayışı

$$F(m+0) - F(m-0) = P_n(m)$$

sayısına eşit olur.

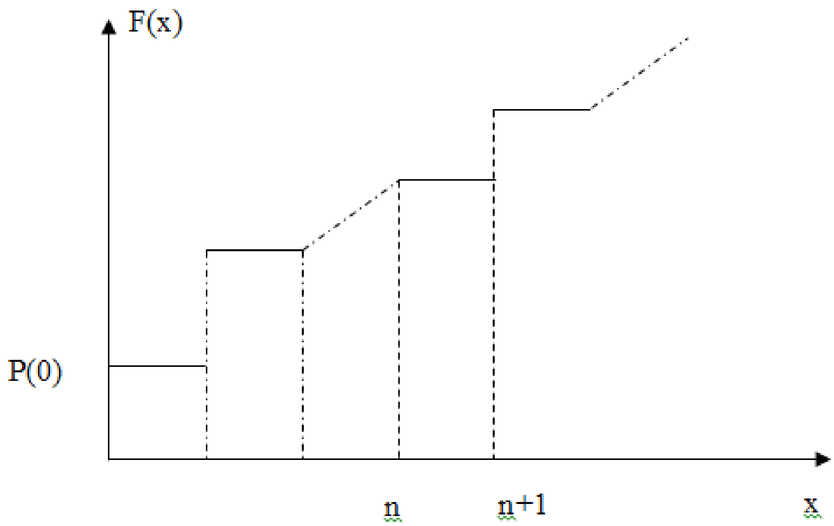
2. Poisson dağılımı: $m = 0,1,2,...$ değerlerini alan $\bar{x}$ rastgele değişkenini ele alalım. Farz edelim ki, $\bar{x}$ rastgele değişkeni $m(m = 0,1,2,...)$ değerlerini

$$P(m) = P(\bar{x} = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \qquad (5)$$

olasılığı ile alır. Bu formülde λ sabit bir sayıdır. (5) formülü ile olasılığı hesaplanan $\bar{x}$ rastgele değişkenlerine λ parametreli poisson dağılımlı rastgele değişken denir[2]. Bu rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu aşağıdaki formülle yazılır:

$$F(x) = p(\bar{x} < x) = \begin{cases} 0, \quad x \leq 0 \quad \textit{olduğunda}, \\ \sum\limits_{k<x} p(k), \quad x > 0 \, \textit{olduğunda} \end{cases} \qquad (6)$$

Bu fonksiyon $x = m(m = 0,1,....)$ noktalarında süreksizdir ve bu noktalarda onun sıçrayışı $P(m)$ sayısına eşittir. F(x) fonksiyonunun grafiği sonsuz sayıda basamağı olan merdiven şekilli fonksiyondur (bak şekil 6.21.).



Şekil 6.21: $F(x)$ fonksiyonunun grafiği

3. Geometrik dağılım: $\bar{x}$ rastgele değişkeni $m(m = 0,1,2,...)$ değerini

$$P(\bar{x} = m) = p(1-p)^m, \quad 0 < p < 1 \qquad (7)$$

olasılığı ile aldığında, bu rastgele değişkene p parametreli geometrik kanunla dağılmış kesikli rastgele değişken denir[2].

Bu rastgele değişkeninde dağılım fonksiyonu (6) formülü ile verilir ve bu grafiği de şekil 14'de gösterilmiş merdiven şekilli doğrulardır. Bu fonksiyonun her bir $x = m$ noktasındaki sıçrayışı

$$F(m+o) - F(m-o) = p(m) = p(1-p)^m$$

sayısına eşit olur.

4. Hipergeometrik dağılım:

$\bar{x}$ rastgele değişkeni $m = 0,1,...,\min(n, M)$ mümkün değerlerini

$$p(\bar{x} = m) = \frac{C_m^n C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \quad (7)$$

olasılığı ile aldığında, bu rastgele değişkene hipergeometrik kanunla dağılmış kesikli rastgele değişken denir. N, M ve n sayılarına hipergeometrik dağılımın parametreleri denir[3].

Bu rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu da (4) formülü ile verilir ve grafiğide şekil 13'deki gibidir. Ama bu halde F(x) fonksiyonunun her bir $x = m$ noktasındaki sıçrayışı

$$F(m+o) - F(m-o) = \frac{C_m^n C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

sayısına eşit olur.

6.13 Dağılım fonksiyonunun özellikleri

Farz edelim ki, reel değişenli F(x) fonksiyonu herhangi $\bar{x}$ rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonudur:

$$F(x) = F_{\bar{x}}(x) = p(\bar{x} < x) \; .$$

Bu halde keyfi $x_1 < x_2$ sayılar için

$$P(x_1 \le \bar{x} \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) \qquad (1)$$

eşitliği doğrudur. Bu formülde $x_1 = x, x_2 = x + \Delta x$ değerlerini alırsak aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$P(x \le \bar{x} \le x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) \; . \qquad (2)$$

F(x) fonksiyonu x noktasında sürekli olduğundan $\Delta x \to 0$şartında (2) eşitliğinin her yanından limite geçersek (2) eşitliğinin sağ yanındaki fark sıfıra yakınsak olur, ama F(x) fonksiyonu x noktasında süreksiz olduğunda ise bu limit dağılım fonksiyonunun bu noktadaki sıçrayışına eşit olur:

$$P(\bar{x} = x) = F(x+0) - F(x) \; . \qquad (3)$$

Böylece, sürekli $\bar{x}$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F(x) sürekli olduğunda rastgele $\bar{x}$ değişkeninin her bir konkre x değerini alması olayının olasılığı sıfıra eşittir:

$$P(\bar{x} = x) = 0 \; .$$

Bu sonucu "mümkün olmayan olayın olasılığı sıfıra eşittir" sonucundan farklandırmak gerekir. Sürekli $\bar{x}$ rastgele değişkenlerinde $\bar{x}$ değişkeninin x değerini sıfır olasılığı ile alması mümkündür.

Dağılım fonksiyonunun bir sıra genel özellikleride vardır.

1) Dağılım fonksiyonu azalmayan fonksiyondur

Gerçektende, olayın olasılığı negatif sayı olmadığından $x_1 < x_2$ koşulunu sağlayan keyfi x_1, x_2 sayıları için (1) formülünden alırız:

$$F(x_2) - F(x_1) \geq 0$$

veya

$$F(x_2) \geq F(x_1) \ .$$

Bu ise azalmayan fonksiyonunun tanımıdır.

2) Dağılım fonksiyonu için aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

$$F(+\infty) = \lim_{n \to +\infty} F(n) = 1 \qquad (4)$$

$$F(-\infty) = \lim_{n \to -\infty} F(n) = 0 \qquad (5)$$

İspat:

$A_n = \{\bar{x} < -n\}$ ve $B_n = \{\bar{x} < n\}$ olayları dizileri için

$$A_1 \supset A_2 \supset ..... \supset A_k \supset, ...,$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing \quad ,$$

$$B_1 \subset B_2 \subset ..... \subset B_n \subset, ...,$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega \quad .$$

Burada $\varnothing$ ile olanaksız (mümkün olmayan) olay, Ω ile ise kesin olay gösterilmiştir.

Buradan

$$F(-\infty) = \lim_{n \to \infty} F(-n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(\varnothing) = 0,$$

$$F(+\infty) = \lim_{n \to \infty} F(n) = \lim_{n \to \infty} P(B_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P(\Omega) = 1 \quad .$$

3) Dağılım fonksiyonu keyfi noktada soldan süreklidir, yani keyfi x noktasında

$$F(x - o) = F(x) \qquad (6)$$

eşitliği sağlanılır.

İspat: Monoton artan ve x noktasına yakınsak olan keyfi $\{x_n\}$ dizisini ele alalım: $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. Bu dizi x noktasına soldan yakınsaktır. Buna göre

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x-o).$$

Dizinin elemanları ile tanımlanmış

$$C_n = \{\bar{x} < x_n\}$$

olayları dizisini ele alalım. Bu olaylar dizisi için

$$C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \ldots \subset C_n \subset \ldots \ ,$$

ve

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \{\bar{x} < x\}$$

bağlantıları sağlanır.

Bu olaylar için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$F(x) = P(\bar{x} < x) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(C_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(\bar{x} < x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x-0) \ .$$

Bu özellikler dağılım fonksiyonunu tam olarak belirler. İspatlamak gerekir ki, verilmiş keyfi F(x) fonksiyonunun bir $\bar{x}$ rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu olması için bu fonksiyonunun 1), 2), 3), özelliklerini sağlaması gerekli ve yeterli şarttır. Bu radan aşağıdaki sonuç çıkar.

Sonuç. Reel değişkenli $f(x)$ fonksiyonu

$$\left.\begin{aligned} & f(x) \geq 0 \quad , \ -\infty < x < \infty \\ & \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \end{aligned}\right\} (7)$$

koşullarını sağladığında

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d(\xi) \quad (8)$$

fonksiyonu dağılım fonksiyonudur.

Her bir rastgele değişken kendi dağılım fonksiyonu ile bir değerli belirlenir. Ama dağılım fonksiyonunun verilmesi ile rastgele değişken bir değerli tanımlanmayabilir. Her rastgele değişkenin ancak bir dağılım fonksiyonu olduğu halde, bir fonksiyon farklı rastgele değişkenlerin dağılım fonksiyonu olabilir.

6.14. Sürekli rastgele değişkenlerin sayısal karakteristikleri

Dağılım yoğunluğu $f(x)$ olan $\bar{x}$ sürekli rastgele değişkeninin sayısal karakteristiklerini ele alalım.

Dağılım yoğunluğu $f(x)$ olan $\bar{x}$ sürekli rastgele değişkeninin beklenen değeri aşağıdaki ifade ile tanımlanır:

$$M[x]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad . \qquad (1)$$

Eğer rastgele $\bar{x}$ değişkeni yalnız $[a,b]$ aralığından değerler alırsa, o zaman $M[x]$ beklenen değeri

$$M[x]=\int_{a}^{b} xf(x)dx \qquad (1')$$

formülü ile ifade olunur.

(1') formülünü kesikli rastgele değişkenin beklenen değerinin tanımından elde ederiz. Gerçektende, bunun için $[a,b]$ aralığını (x_{k-1},x_k) aralıklarına ayıralım. Her bir aralıktan bir ξ_k noktasını ele alalım. Aşağıdaki

$$\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_n$$

değerlerini alabilen yardımcı kesikli ξ rastgele değişkenini dahil edelim. ξ kesikli değişkeninin uygun $\xi_1,.....,\xi_n$ değerlerini almasının olasılığı $p_1,p_2,...,p_n$ olsun. O zaman

$$p_1=f(\zeta_1)\Delta x_1,\;\; p_2=f(\zeta_2)\Delta x_2,...,\;\; p_k=f(\zeta_k)\Delta x_k,...,$$

$$p_n=f(x_n)\Delta x_n \quad .$$

Dikkate alalım ki, $f(\xi_k)\Delta x_k$ sayısı aynı zamanda $\bar{x}$ rastgele değişkeninin (x_{k-1},x_k) aralığından değer almasının olasılığıdır.

Böylece, ξ kesikli rastgele değişkeninin beklenen değeri:

$$M[\xi]=\sum_{k=1}^{n}\xi_k p_k$$

veya

$$M[\xi]=\xi_1 f(\xi_1)\Delta x_1+\xi_2 f(\xi_2)\Delta x_2+....+\xi_n f(\xi_n)\Delta x_n=$$

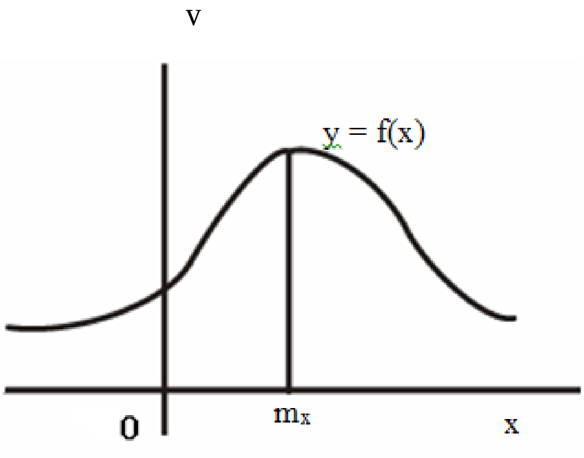
$$= \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(\xi_k) \Delta x_k \quad .$$

Sonuncu eşitlikte $\max \Delta x_k \to o$ şartı ile limite geçersek alırız:

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b x f(x) dx \quad .$$

Bu eşitliğin sağ yanındaki ifade $[a,b]$ aralığından keyfi x değerini alabilen $\bar{x}$ sürekli rastgele değişkeninin beklenen değeridir. (1) formülünü de benzer şekilde kesikli rastgele değişkenin beklenen değerinden yazabiliriz. Beklenen değer m_x gibide gösterilir.

Beklenen değere rastgele $\bar{x}$ değişkeninin olasılıklarının dağılım merkezi olarak adlandırılır (bak. Şekil 6.22).

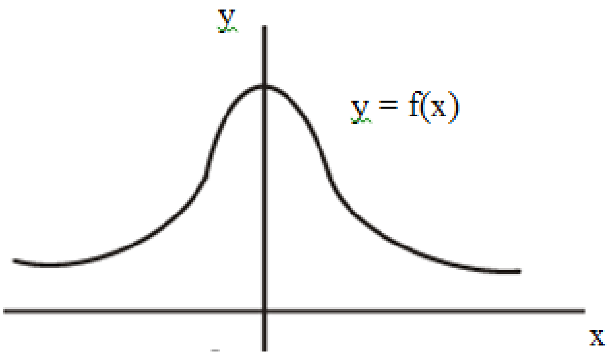


Şekil 6.22: Olasılık dağılım fonksiyonunun grafiği

Eğer dağılım eğrisi $y = f(x)$ 0y eksenine göre simetrik olursa, yani $f(x)$ fonksiyonu çift fonksiyon olursa, o zaman

$$M\left[\bar{x}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 0 \quad .$$

olması açıktır. Bu halde olasılıkların dağılım merkezi koordinat başlangıcı ile çakışır (bak şekil 6.23).



Şekil 6.23: Olasılık dağılım fonksiyonunun grafiği

Merkezleştirilmiş $\bar{x} - m_x$ rastgele değişkenini ele alalım

Merkezleştirilmiş rastgele değişkeninin

beklenen değerini bulalım.

$$M\left[\bar{x}-m_x\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-m_x\right)f\left(x\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty}xf\left(x\right)dx-m_x\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)dx=m_x-m_x.1=0\,.$$

Böylece, merkezleştirilmiş rastgele değişkeninin beklenen değeri sıfıra eşittir.

$\bar{x}$ rastgele değişkeninin varyansı uygun merkezleştirilmiş rastgele değişkenin karesinin beklenen değeri gibi tanımlanır:

$$D\left[\bar{x}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-m_x\right)^2 f\left(x\right)dx\ . \qquad (2)$$

$\bar{x}$ rastgele değişkeninin varyansının kare köküne ise bu rastgele değişkenin standart (orta kuadratik) sapması denir ve

$$\sigma\left[\bar{x}\right]=\sqrt{D\left[\bar{x}\right]}=\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-m_x\right)^2 f\left(x\right)dx} \qquad (3)$$

formülü ile tanımlanır.

Varyans ve standart sapma rastgele değişkenin değerlerinin beklenen değerden sapmalarını karakterize eder.

Rastgele $\bar{x}$ değişkeninin dağılım yoğunluk fonksiyonuna en büyük değer veren değerine onun modası denir. Rastgele değişkenin modasını M_0 ile göstereceğiz. Şekil 15 ve 16'da rastgele değişkenin modası onun beklenen değeri ile çakışır.

Aşağıdaki,

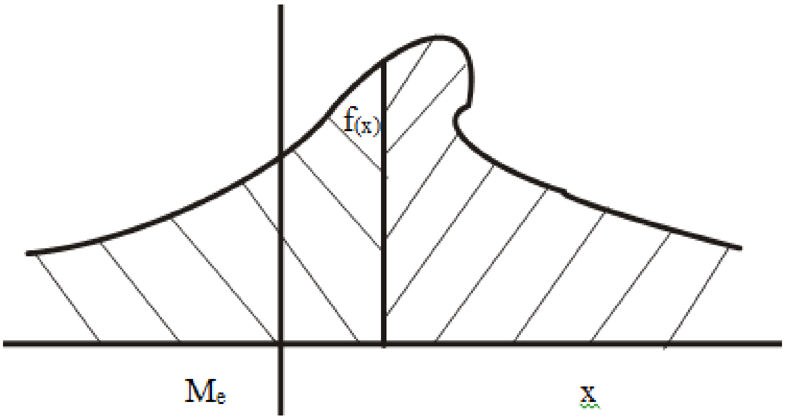
$$\int_{-\infty}^{M_e} f\left(x\right)dx=\int_{M_e}^{\infty} f\left(x\right)dx=\frac{1}{2} \quad (4)$$

eşitliğini sağlayan M_e sayısına rastgele değişkenin medianası denir. Sonucu eşitliği aşağıdaki gibi de yazabiliriz:

$$P\left(\bar{x}<M_e\right)=P\left(M_e<\bar{x}\right)=\frac{1}{2}\ .$$

Yani rastgele $\bar{x}$ değişkeninin M_e'den küçük ve büyük değer alması eşit olasılıklıdır.

Dikkat edelim ki, $\bar{x}$ rastgele değişkeni M_e değerini almayadabilir (bak. Şekil 6.24).



Şekil 6.24: $f(x)$ fonksiyonunun grafiği

6.15. Normal dağılımlı rastgele değişkenin beklenen değeri

Normal dağılımlı rastgele değişkenin olasılık dağılım yoğunluğu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (1)$$

formülü ile ifade edilir.

Önce gösterilim ki, (1) dağılım yoğunluğu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

eşitliğini sağlar.

Bunu göstermek için

$$\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} = t, \quad dx = \sqrt{2}\sigma dt \quad .$$

Değişken değiştirmesi yapalım. Bu halde buluruz.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = 1 \quad .$$

Burada biz

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

eşitliğinden yararlandık.

Şimdi normal dağılımlı rastgele değişkenin beklenen değerini bulalım. Tanıma göre

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x.\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx. \qquad (2)$$

Burada aşağıdaki değişken değiştirmesini yaparsak

$$\frac{x-a}{\sqrt{2}.\sigma}=t$$

buluruz.

$$x=a+\sqrt{2}\sigma t, \qquad dx=\sqrt{2}\sigma dt \ .$$

Böylece ,

$$m_x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(a+\sqrt{2}\sigma t\right)e^{-t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}a\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt+$$

$$+\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-t^2}dt \ .$$

Sağda birinci integral $\sqrt{\pi}$ değerine eşittir. İkinci integrali hesaplayalım:

$$\int_{-\infty}^{\infty}te^{-t^2}dt=dt=-\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}=0 \ .$$

Böylece,

$$m_x=a \ . \qquad (3)$$

(1) formülündeki a parametresi rastgele değişkenin uygun beklenen değerine eşit olduğunu buluruz. $x=a$ noktası olasılıkların dağılım merkezi olur. Bu noktaya dağılım merkezi de diyebiliriz.

$x=a$ olduğunda $f(x)$ en büyük değerini alır. Buna göre de $x=a$ sayısı $\bar{x}$ rastgele değişkeninin modası olur. (1) eğrisi $x=a$ eksenine göre simetrik olduğundan

$$\int_{-\infty}^{a}f(x)dx=\int_{a}^{\infty}f(x)dx=\frac{1}{2}$$

olduğundan $x=a$ normal dağılımın medianası olur.

Eğer (1) formülünde $a=0$ alınırsa aşağıdaki fonksiyon elde edilir:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \ . \qquad (4)$$

Bu eğri 0y eksenine göre simetriktir.

6.16. Normal dağılım kanunlu rastgele değişkenin varyansı ve standart (orta kuadratik) sapması

Farz edelim ki, $\bar{x}$ rastgele değişkeninin dağılım yoğunluğu

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad (1)$$

formülü ile verilmiştir. Bu halde $m_x = a = 0$ dır. Bu rastgele değişkenin varyansını hesaplayalım. Tanıma göre aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$D\left[\bar{x}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \quad .$$

Aşağıdaki değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} = t$$

o zaman

$$D\left[\bar{x}\right] = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t.2t.e^{-t^2} dt \quad .$$

Bu integrali parça parça integrallersek buluruz:

$$D\left[\bar{x}\right] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left[-te^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right] \quad .$$

Burada

$$\lim_{t\to\infty} t.e^{-t^2} = 0 \text{ ve } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \quad ,$$

olduğundan son olarak buluruz:

$$D\left[\bar{x}\right] = \sigma^2 \quad . \quad (2)$$

Buradan da buluruz:

$$\sigma\left[\bar{x}\right] = \sqrt{D\left[\bar{x}\right]} = \sigma \quad . \qquad (3)$$

Böylece, (1) formülündeki σ^2 parametresi uygun rastgele değişkenin varyansı olduğunu gösterdik. Buradan görüyoruz ki, σ^2 varyansı küçük oldukça rastgele değişkenin dağılımıda küçük olur.

7.STOKASTİK PROSESLER (SÜRECLER) TEORİSİNİN ELEMANLARI

7.1 Tesadüfi (Stokastik) Proses Anlamı

Şimdiye dek biz rastgele değişkenleri öğrendik. Hatırlatalım ki, her bir rastgele değişken gerçekleştirilen deney sonucunda önceden belli olmayan, yalnız bir değer alan değişendir. Başka bir ifadeyle rastgele değişken olaylar kümesi Ω={ω} da tanımlanmış bir değerli sayısal fonksiyonlardır. Elemanları basit olaylar olan Ω kümesine elementer olaylar uzayı da denir[7]. Böylece, her bir rastgele değişken, her bir olaya karşı önceden belli olmayan yalnız bir sayı karşı grtiren bir sayısal değerli fonksiyondur. Mesela, ateş zamanı güllenin değdiği noktanın apsisi, bir ateşte nişanlamanın yatay hatası vs. böyle rastgele değişkenlere örnek olarak gösterilebilir.

Böyle benzer olayları ele alarak, yani uygun rastgele değişkenleri inceleyerek biz tesadüfi olayları sanki "statikada" öğrenmiş olduk. Bu halde her bir deney yaptığımızda koşulların değişmediğini farz ederdik. Ama biz pratikte öyle olaylara rastlarız ki, deney prosesinde (deneyin gerçekleştiği sürede) bu olay zamana bağlı olarak sürekli değişir. Mesela, hareket eden hedefe ateş zamanı, hedefi takip etme açısı, kontrol edilen roketin kontrol prosesinde teoretik yörüngesinden sapması böyle rastgele değişkenlere örnek olabilir.

Deney prosesinde böyle değişen rastgele değişkenlere adi rastgele değişkenlerden farklı olarak, tesadüfi fonksiyonlar veya tesadüfi prosesler veyahut da stokastik prosesler denir.

Böyle tesadüfi olaylar, yani tesadüfiliği bir proses gibi öne çıkan olaylar olasılık teorisinin stokastik prosesler bölümünde öğrenilir. Bu bilime bazen tesadüfi olayların dinamiği de denir[8].

Şimdi biz tesadüfi fonksiyonun tanımını verelim. Tesadüfi fonksiyonun tanımını rastgele değişkenin tanımına benzer şekilde verebiliriz.

Bunun için rastgele değişkenin tanımını bir daha hatırlayalım. Biz deney zamanı sonucunda önceden belli olmayan bu veya diğer değeri alan değişkene rastgele değişken dedik.

Bu tanıma uygun olarak tesadüfi fonksiyonu tanımlamak istersek, bu tanım şöyle olur:

Deney sonucu bu veya diğer şekil alan fonksiyona tesadüfi fonksiyon denir[8].

Deney sonucunda tesadüfi fonksiyonun aldığı konkret şekle tesadüfi fonksiyonun realizasyonu denir.

Eğer bir stokastik proses üzerinde deneyler grubu gerçekleştirsek, o zaman biz bu stokastik prosesin realizasyon ailesini veya realizasyon grubunu almış oluruz.

Buradan görürüz ki, stokastik proses $t \geq 0$ parametresine bağlı bir parametreli

$$\xi(t) = \xi(t,\omega), \qquad \omega \in \Omega, \quad t \geq 0$$

fonksiyonlar ailesidir.

Diğer yandan, $\xi(t) = \xi(t,\omega)$ stokastik prosesi (tesadüfi prosesi) her bir t≥0 sabiti için Ω uzayında tanımlanmış reel değerli bir fonksiyondur.

Stokastik prosesin parametresi adlandıran t argumenti adeta zaman rolünü oynar. t değişkeni kesikli değerler (mesela $t = 0,1,2,...,n,...$) alırsa böyle stokastik prosese kesikli zamanlı stokastik proses denir. Eğer t parametreli sonlu veya sonsuz aralıktan değerler alırsa böyle stokastik prosese sürekli zamanlı stokastik proses denir[7].

Genelde her bir adi ξ rastgele değişkenine de stokastik proses gibi bakılabilir. Gerçekten de, t parametresinin aldığı değerler kümesi olarak $\{t_0\}$ bir elemanlı kümesini alırsak, o zaman $\xi(t_0) = \xi$ olur.

Böylece, her bir stokastik proses gerçekte bir iki değişkenli,

$$\xi = \xi(t,\omega), \quad \omega \in \Omega, \qquad t \geq 0$$

fonksiyonudur. ξ fonksiyonunun t ve ω değişkenlerine bağlı olduğu açıktır. Bu fonksiyon t-nin her bir $t=t_0$ değerinde bir rastgele değişkendir. $\xi(t_0,\omega)$ değerine $\xi(t,\omega)$ stokastik prosesinin t_0 anındaki durumu denir. Ama ω değişkeninin her bir $\omega=\omega_0$ değerinde $\xi(t,\omega)$ stokastik prosesi $t \geq 0$ değerlerinde tanımlanmış bir reel değerli $\xi(t,\omega_0)$ fonksiyonu olur. Bu $\xi(t,\omega_0)$ fonksiyonuna $\xi(t,\omega)$ stokastik prosesinin bir realizasyonu veya stokastik prosesinin yörüngesi denir. Böylece, stokastik prosesin her bir realizasyonu adi bir fonksiyon, adi bir yörünge verir.

Böylece, stokastik prosese bir t parametresine bağlı rastgele değişkenlerin bir $\xi(t)$ kümesi gibi bakabiliriz, ya da stokastik prosesin realizasyonlarının $\xi(t)$ fonksiyonlar kümesi gibi bakabiliriz.

7.2. Stokastik Proseslere Örnekler

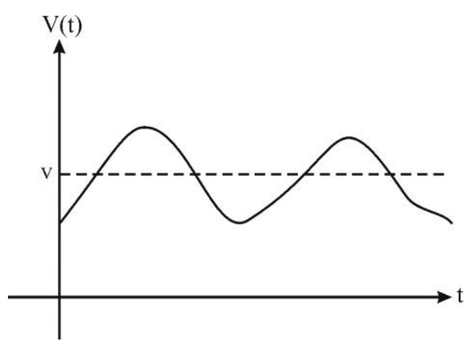
Ayrı ayrı örneklere geçmeden önce dikkate alalım ki, determinik sistemlerde böyle belirsizliklerle karşılaşılır. Mesela, teorik mekanikte sistemin her hangi bir t anındaki durum vektörü x(t) herhangi bir t_0 $(t_0 < t)$ anındaki x_0 durumu ile tam olarak belirlenir. Mekanikte sistemin durumu denildiğinde sistemin maddesel noktalarının uzaydaki koordinatlarının verilmesi ve bu noktalarda maddesel noktaların hızının verilmesi anlaşılır.

Ama klasik mekanik dışında durum böyle değildir, karmaşıktır. Burada herhangi t_0 anında sistemin durumunu bilmekle t_0 anından sonra gelen anlar için $(t > t_0)$ sistemin durumu tek değerli olarak belirlene bilinmiyor. Yalnız biz sistemin durumunun belli bir olasılıkla belli bir kümedeki durumlardan biri olacağını söyleyebiliriz. Eğer biz x_0 ile sistemin t_0 anındaki durumunu işaret etsek ve E ile sistemin tanımdaki durumlar kümesini işaret etsek, o zaman t anında sistemin durumu,

$$P\{t_0, x_0; t; E\} \tag{7.1}$$

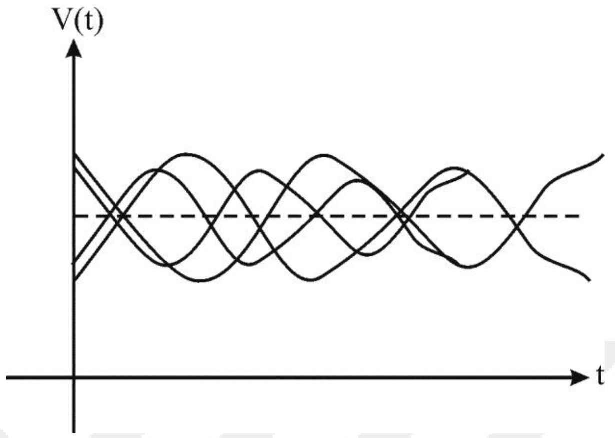
olasılığı ile E durumlar kümesinde bir duruma geçeceğini söyleyebiliriz. Eğer biz ilave olarak $t < t_0$ aralığında sistemin durumunu bildiğimizde (7.1) olasılığının değeri değişmezse, o zaman böyle prosese Markof tipli prosesler veya irsiyetsiz (sonuçsuz sistem) prosesler de denir. Şimdi ayrı ayrı örnekleri ele alalım.

Örnek 7.1: Savaş uçağı dövüş kursunda, uçağın daima havada teorik olarak sabit V hızı ile uçması gereklidir. Ama uçağın hızı, bu ortalama nominal V hızı etrafında daima değişir ve zamana bağlı tesadüfi bir fonksiyon olur. Tatbikat daki bu uçuşa bir deney gibi bakabiliriz. Bu halde biz tesadüfi V(t) hız fonksiyonunun bu uçuşta bir realizasyonunu almış oluruz (Bak. Şek.7.1).



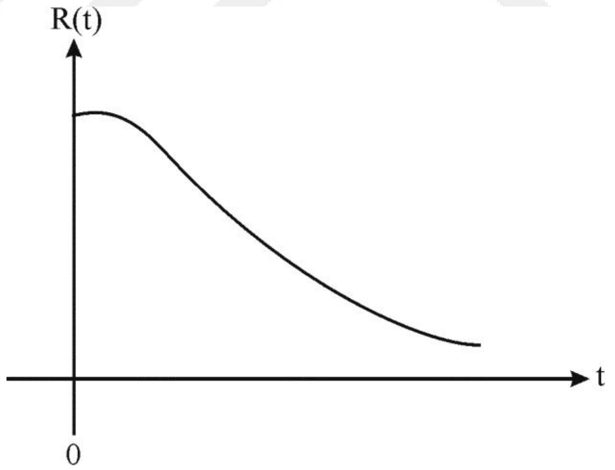
Şekil 7.1: Tesadüfi V(t) hız fonksiyonunun bir realizasyonunun grafiği

Uçuştan uçuşa (deneyden deneye) V(t) fonksiyonunun realizasyonunun şekli değişir. Eğer biz uçağa hızın değişimini otomatik yazan bir pribor yerleştirsek her bir uçuşta önceki uçuşlardan farklı şekiller alırız. Sonuçta birkaç uçuşta tesadüfi V(t) fonksiyonunun realizasyonlarının ailesini almış oluruz (Bak. Şek. 7.2).



Şekil 7.2: V(t) tesadüfi fonksiyonunun realizasyonu ailesinin şekli

Örnek 7.2: Kontrol edilen roketi hedefe yönlendirdiğimizde yönlendirmenin R(t) hatası roketin ağırlık merkezinden teoretik yörüngesine dek mesafesini gösterir ve zamanın tesadüfi fonksiyonudur (Bak. Şek. 7.3).



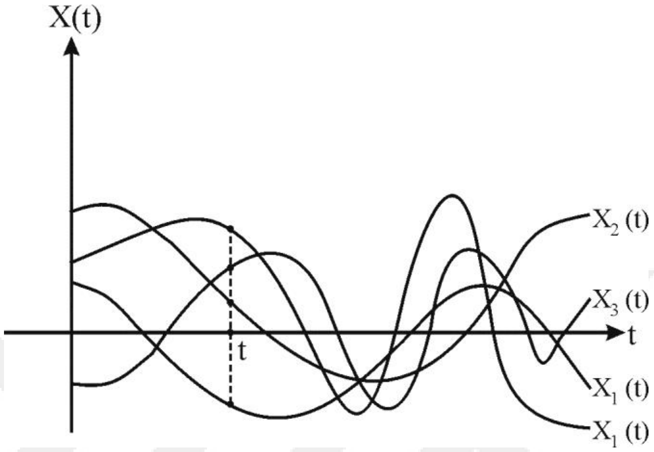
Şekil 7.3: R(t) hata fonksiyonunun grafiği

Pratikte böyle örnekler çok sayıda gösterebiliriz. Gösterdiğimiz örneklerde argument t zamandır. Ama öyle örnekler gösterilebilir ki, değişen argument başka parametreler olur. Mesela atmosferin ayrı, ayrı katlarında havanın temperaturu h yüksekliğinin tesadüfi fonksiyonudur.

Aynı zamanda birçok değişkene bağlı tesadüfi fonksiyonlara da rastlanır. Mesela, atmosferin durumu (temperatura, basınç, rüzgar) dört değişkenli tesadüfi fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar x, y, z koordinatlarına ve t zamanına bağlı tesadüfi fonksiyonlardır. Herhangi bir X(t) tesadüfi fonksiyonunu ele alalım. Farz edelim ki, bu tesadüfi X(t) fonksiyonu için n tane bağlı olmayan deney yapılmıştır. Sonuçta ise X(t) tesadüfi fonksiyonunun n tane,

$$X_1(t), X_2(t), \ldots\ldots, X_n(t)$$

realizasyonu alınmıştır (Bak. Şek. 7.4).



Şekil 7.4: X(t) rastgele fonksiyonunun realizasyonlarının grafikleri

X(t) fonksiyonunun her bir realizasyonu adi bir fonksiyondur.

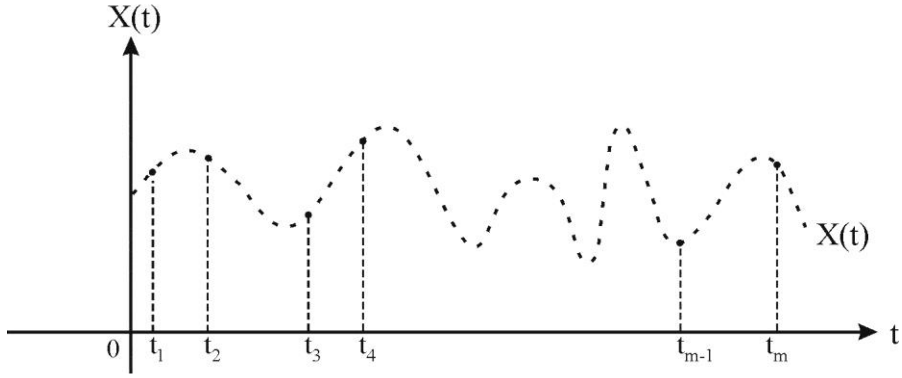
Şimdi t argumentinin herhangi bir değerini sabitleyelim. Bu halde X(t) fonksiyonu rastgele değişkene dönüşür. Bu rastgele değişkene bazen X(t) tesadüfi fonksiyonunun kesiği denir. Eğer biz X(t) tesadüfi fonksiyonunun n deneyde realizasyonlarının kesiğini alırsak X(t) rastgele değişkenin n deneyde aldığı değerleri alırız.

Böylece, biz görüyoruz ki, tesadüfi fonksiyon rastgele değişkenin ve fonksiyonun özelliklerini özünde sağlar. Böylece, eğer biz argumentin bir değerini sabit tutarsak bu fonksiyon adi tesadüfi değişkene dönüşür, ama deneyde ise adi fonksiyona dönüşür.

Buna göre de bazen biz X(t) fonksiyonuna tesadüfi fonksiyon, bazen ise rastgele değişken gibi bakacağız.

7.3. Tesadüfi Fonksiyonun Tesadüfi Değişenler Sisteminin Genişlemesi Gibi (Tesadüfi Fonksiyonun Dağılım Kanunu)

Belli bir zaman aralığında her hangi bir tesadüfi X(t) fonksiyonunu ele alalım (Bak. Şekil 7.5).



Şekil 7.5: Tesadüfi X(t) fonksiyonunun grafiği

Genelde biz tesadüfi fonksiyonun yalnız her hangi bir realizasyonunun grafiğini çizebiliriz. Ama geometrik olarak tesadüfi fonksiyonu belirlemek amacı ile kesik kesik hatlarla gösteririz. Bu halde X(t) tesadüfi fonksiyonunun mümkün realizasyon kümesini göstermiş oluruz.

Farz edelim ki, tesadüfi fonksiyonun değişmesi t_1, t_2,..., t_n zaman anlarında herhangi bir priborla yazılır.

Üstte söylediğimiz gibi herhangi bir t anında tesadüfi fonksiyon adi rastgele değişkene dönüşür. Buna göre de priborun yardımı ile t_1, t_2,…, t_n anlarında tespit edilmiş,

$$X(t_1), X(t_2),.....X(t_n) \qquad (7.2)$$

değerleri n tane rastgele değişkenlerdir. Eğer priborun imkanları büyük olup ayrı ayrı zaman aralıklarında tesadüfi fonksiyonun değerlerini yazmış olsa, o zaman tesadüfi fonksiyonun değişmesi halinde daha çok bilgi elde etmiş oluruz. Böylece, biz tesadüfi fonksiyonun incelenmesini yaklaşık olarak (7.2) rastgele değişkenler sisteminin incelenmesine getirmiş oluruz. Eğer n sayısı büyütülürse böyle değişme nispeten daha dakik olur. n sayısını sonsuza yaklaştırdığımızda (7.2) sisteminde olan tesadüfi kemiyetler sayısı sonsuz olur[8].

Böylece, genelde tesadüfi fonksiyonu biz sonsuz sayıda rastgele değişkenler kümesi gibi ele alabiliriz.

Bu tür yönteme esasen biz tesadüfi fonksiyonun dağılım kanunu anlamını verebiliriz.

Bellidir ki, bir rastgele değişkenin dağılım kanunu bir değişkenli fonksiyon, iki rastgele değişkenin birlikte dağılım kanunu iki değişkenli fonksiyon olur,… vs. Dikkate alalım ki çok değişkenli olasılık karakteristiklerinden istifade edip uygulamak genelde çok zorluklarla karşılanır.

Böylece, farz edelim ki t_1, t_2,..., t_n sonlu sayıda zaman anlarına uygun olarak X(t) tesadüfi fonksiyonunun,

$$X_1 = X(t_1),\ X_2 = X(t_2),..., X_n = X(t_n)$$

değerleri tespit edilmiştir. n tane

X_1, X_2,..., X_n

rastgele değişkenlerinin birlikte dağılım fonksiyonuna X(t) tesadüfi fonksiyonunun n boyutlu dağlım fonksiyonu denir. Böylece X(t) tesadüfi fonksiyonunun n boyutlu dağılım fonksiyonu,

$$F_{t_1,t_2,...,t_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = P\left(X(t_1) < X_1, X(t_2) < X_2, ..., X(t_n) < X_n\right) \quad (7.3)$$

formülü ile yazılır.

Genellikle t anında X(t) tesadüfi fonksiyonunun değerlerinin dağılım fonksiyonu,

$$F_t(x) = P\left(X(t) < X\right) \quad (7.4)$$

dağılım fonksiyonu ile tanımlanır. (7.4) fonksiyonuna X(t) tesadüfi fonksiyonunun bir boyutlu dağılımı denir. (7.4) fonksiyonunun t-nin tüm değerlerinde belli olmasıyla X(t) prosesi hiç de tam belli olmaz. $F_t(x)$ fonksiyonu X(t)-nin keyfi t anında dağılım kanununu karakterize etse de t-in farklı değerlerinde X(t)-in bağlantısı hakkında hiçbir malumat vermiyor. Buna göre de tesadüfi prosesin tam karakteristiği için onun mümkün olan tüm sonlu ölçülü dağılımları verilmelidir. n=2 halinde alınan dağılım fonksiyonuna X(t) rastgele değişkeninin iki boyutlu dağılım fonksiyonu denir. Aynı şekilde X(t) tesadüfi prosesinin 3, 4,… boyutlu dağılım fonksiyonları tanımlanır.

Böylece, kesikli tesadüfi prosesin sonlu boyutlu dağılımlarını,

$$P_{t_1,...,t_n}(X_1, X_2, ..., X_n) = P\left(X(t_1) = x_1, ..., X(t_n) = x_n\right)$$

olasılığı ile verebiliriz.

Sürekli tesadüfi prosesinin sonlu boyutlu dağılımları ise,

$$F_{t_1,t_2,...,t_n}(x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} P_{t_1,...,t_n}(x_1, ..., x_n)\ dx_1...dx_n$$

formülü ile tanımlayabiliriz. Burada $P_{t_1,...,t_n}(x_1, ..., x_n)$ yoğunluk fonksiyonudur.

Sonlu boyutlu dağılımlardan istifade ederek tesadüfi proseslerin esas özelliklerini ve onlarla bağlı olan ayrı ayrı olayların olasılıklarını bulabiliriz. Ama söylediğimiz gibi çok değişkenli dağılım fonksiyonlarından istifade etmek çoğu zaman zordur. Buna göre de tesadüfi proseslerle ilgili bir sıra problemleri çözmek için, stokastik proseslerin esas karakteristikleri olan matematik gözlemeden (beklenen değerden), varyans (dispersion) ve kovaryans fonksiyonlarından istifade edilir[8].

7.4. Stokastik Proseslerin Karakteristikleri

Dikkate alalım ki, rastgele değişkenlerin ve uygun olarak tesadüfi fonksiyonların dağılım kanunlarından istifade etmeden onların sayısal karakteristiklerinden istifade etmekle problemleri çözebilmek uygulamalı olasılık teorisinin esasıdır.

Sayısal karakteristiklerin yardımı ile problem basit şekilde ve çabuk çözülebilir.

Dikkate alalım ki, rastgele değişkenlerin sayısal karakteristikleri belli sayılar olur. Ama stokastik proseslerin karakteristikleri genelde sayı değil fonksiyonlardır.

X(t) stokastik prosesinin matematik gözlemesi (beklenen değeri)

$$m_x(t) = M\left[x(t)\right] \tag{7.1}$$

fonksiyonuna denir. Bu fonksiyon tesadüfi değildir.

$m_x(t)$ fonksiyonunun herhangi bir $t=t_0$ noktasındaki değeri, t-nin bu değerine uygun olan $X(t_0)$ rastgele değişkeninin matematik gözlemesine eşittir:

$$m_x(t_0) = M\left[X(t_0)\right].$$

Kesikli ve sürekli stokastik proseslerin matematik gözlemesi uygun olarak,

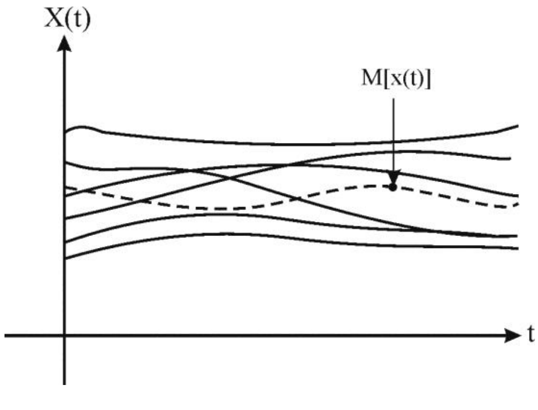
$$m_x(t) = \sum_k kP\left(X(t) = k\right),$$

ve

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xP_t(x)\,dx.$$

eşitlikleri ile hesaplanır.

Tanımdan açıktır ki, X(t) prosesinin matematik gözlemesi öyle orta fonksiyondur ki, bu prosesin tüm realizasyonları bu fonksiyonun etrafında yerleşir (Bak. Şekil 7.6).



Şekil 7.6: X(t) fonksiyonunun realizasyonu ve M[x(t)] orta değerinin grafiği

Benzer şekilde tesadüfi prosesin varyansı (dispersionu) tanımlanır.

Böylece, X(t) tesadüfi prosesinin varyansı $D_x(t)$, tesadüfi olmayıp,

$$D_x(t) = D\left[X(t)\right] \qquad (7.2)$$

fonksiyonuna denir.

Bu fonksiyonun keyfi $t=t_0$ noktasındaki değeri t-in bu değerine uygun olan $X(t_0)$ rastgele değişkeninin varyansına eşittir:

$$D_x(t_0) = D\left[X(t_0)\right].$$

Tesadüfi prosesin varyansı negatif olmayan fonksiyondur. Bu fonksiyonun kareköküne, yani,

$$\sigma_x(t) = +\sqrt{D[X(t)]} \qquad (7.3)$$

fonksiyonuna bu prosesin orta kuadratik sapması denir[7].

Tesadüfi prosesin varyansı t-nin her bir değerinde onun tüm realizasyonlarının orta fonksiyonu etrafında nasıl "dağıldığını" karakterize eder. Başka bir deyişle varyans, tesadüfi prosesin "tesadüfilik derecesini" karakterize eder.

Matematik gözleme ve varyans, tesadüfi prosesin en esaslı karakteristikleri olmalarına rağmen bu karakteristikler tesadüfi prosesin esas özelliklerini tam ifade etmiyor. Aynı matematik gözlemesi ve varyansı olan, ama farklı iç yapıya sahip olan tesadüfi proseslerin farklı durumları arasındaki bağlılığı kovaryans fonksiyonunun yardımı ile karakterize edebiliriz.

X(t) tesadüfi prosesinin kovaryans fonksiyonu tesadüfi olmayan iki değişkenli $K_x(t,t')$ fonksiyonu olup aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$K_x(t,t') = M\left[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')\right] \qquad (7.4)$$

burada,

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t), \qquad \overset{\circ}{X}(t) = X(t') - m_x(t')$$

eşitliğinde $t = t'$ yazarsak,

$$K_x(t,t) = M\left[\overset{\circ}{X}(t)^2\right] = M\left[(X(t) - m_x(t))^2\right] = D_x(t)$$

olduğu görülür. Yani $t = t'$ olduğunda prosesin kovaryans fonksiyonu onun varyansına eşit olur.

Kovaryans fonksiyonunun tanımından açıktır ki, bu fonksiyon negatif değer almıyor ve simetriktir:

$$K_x(t,t') = K_x(t',t)$$

Kovaryasyon fonksiyonuyla bağlı, normalleştirilmiş kovaryasyon fonksiyonu aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$r_x(t,t') = \frac{K_x(t,t')}{\sigma_x(t)\,\sigma_x(t')}. \qquad (7.5)$$

Bu fonksiyon X(t) ve $X(t')$ değişkenlerinin korelasyon katsayısını ifade eder. $t = t'$ olduğunda,

$$r_x(t,t) = \frac{K_x(t,t)}{\left[\sigma_x(t)\right]^2} = \frac{D_x(t)}{\left[\sigma_x(t)\right]^2} = 1. \qquad (7.6)$$

Kovaryans fonksiyonunun başka özellikleri de vardır. Bunlardan bazılarını burada verelim.

X(t) tesadüfi fonksiyonuna tesadüfi olmayan y(t) fonksiyonunu ilave etsek (toplasak) yeni tesadüfi fonksiyon elde ederiz:

$$Y(t) = X(t) + y(t)\ . \qquad (7.7)$$

Bu fonksiyonun matematik gözlemesi aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$m_y(t) = m_x(t) + y(t)\ . \qquad (7.8)$$

Bu formüle matematik gözlemeyi uygularsak:

$$M[Y] = M[X] + M[y].$$

Tesadüfi Y(t) fonksiyonunun kovaryasyon fonksiyonunu bulalım:

$$K_y(t,t') = M\left[\mathring{Y}(t)\mathring{Y}(t')\right] = M\left[\left(Y(t) - m_y(t)\right)\left(Y(t) - m_y(t')\right)\right]$$

$$= M\left[\left(X(t) + y(t) - m_x(t) - y(t)\right)\left(X(t') + y(t') - m_x(t') - y(t')\right)\right] \qquad (7.9)$$

$$= M\left[\left(X(t) - m_x(t)\right)\left(X(t') - m_x(t')\right)\right] = K_x(t,t').$$

Böylece, tesadüfi fonksiyona tesadüfi olmayan toplam ilave edildiğinde tesadüfi fonksiyonun kovaryans fonksiyonu değişmiyor.

Şimdi tesadüfi X(t) fonksiyonunu tesadüfi olmayan y(t) fonksiyonu ile çarpalım, o zaman:

$$Y(t) = y(t)\,X(t) \qquad (7.10)$$

Y(t) fonksiyonunun matematik gözlemesini bulduğumuzda tesadüfi olmayan y(t) çarpanını matematik gözleme işaretinden dışarı alırsak buluruz:

$$m_y(t) = M\left[y(t)X(t)\right] = y(t)m_x(t) \ . \qquad (7.11)$$

Şimdi (7.10) formülü ile tanımlanmış Y(t) tesadüfi fonksiyonunun kovaryasyon fonksiyonunu bulalım:

$$\begin{aligned} K_y(t,t') &= M\left[\mathring{Y}(t)\mathring{Y}(t')\right] = M\left[\left(Y(t)-m_y(t)\right)\left(Y(t')-m_y(t')\right)\right] \\ &= M\left[\left(y(t)X(t)-y(t)m_x(t)\right)\left(y(t')X(t')-y(t')m_x(t')\right)\right] \\ &= M\left[y(t)y(t')\left(x(t)-m_x(t)\right)\left(x(t')-m_x(t')\right)\right] \\ &= y(t)y(t')K_x(t,t'). \end{aligned} \qquad (7.12)$$

Böylece, tesadüfi fonksiyon tesadüfi olmayan y(t) fonksiyonu ile çarpıldığında bu tesadüfi fonksiyonun kovaryans fonksiyonu $y(t)y(t')$ fonksiyonu ile çarpılır[7].

Özel olarak y(t)=c olursa, o zaman,

$$K_y(t,t') = c^2 K_x(t,t') \qquad (7.12')$$

formülü elde edilir.

Burada kullanılan

$$\mathring{X}(t) = X(t) - m_x(t) \qquad (7.13)$$

tesadüfi fonksiyonuna merkezleştirilmiş tesadüfi fonksiyon denir.

Merkezleştirilmiş tesadüfi fonksiyonun matematik gözlemesinin sıfır olduğu açıktır.

Merkezleştirilmiş $\mathring{X}(t)$ fonksiyonunun kovaryansı X(t) fonksiyonunun kovaryansı ile çakışır:

$$K_{\mathring{X}}(t,t') = M\left[\mathring{X}(t)\mathring{X}(t')\right] = K_x(t,t') \ . \qquad (7.14)$$

Aşağıdaki,

$$X_N(t) = \frac{\mathring{X}(t)}{\sigma_x(t)} \qquad (7.15)$$

fonksiyonuna normalleştirilmiş tesadüfi fonksiyon denir.

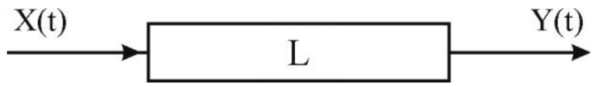
Normalleştirilmiş tesadüfi fonksiyonun kovaryansı için aşağıdaki formül bulunur:

$$K_{X_N}(t,t') = \frac{K_x(t,t')}{\sigma_x(t)\,\sigma_x(t')} = r_x(t,t'). \qquad (7.16)$$

Bu fonksiyonun varyansı bire eşittir: $K_{X_N}(t,t) = 1$.

7.5 Tesadüfi Fonksiyonların Lineer Dönüşümleri

L operatörlü lineer sistemin girişine X(t) tesadüfi fonksiyonu etki etsin. O zaman sistemin bu X(t) etkisine reaksiyonu genelde tesadüfi Y(t) fonksiyonu olur. Bunu sembolik olarak aşağıdaki gibi gösterebiliriz:



Şekil 7.7: Girişi X(t) çıkışı Y(t) olan L operatörlü sistemin sembolik gösterilişi

Bu şematik yazılışı matematiksel sembolla

$$Y(t) = L\left[X(t)\right] \qquad (7.1)$$

şeklinde yazılır.

Farz edelim ki, tesadüfi X(t) fonksiyonunun karakteristikleri, matematik gözlemesi $m_x(t)$ ve kovaryans fonksiyonu $K_x(t,t')$ verilmiştir.

Çıkış fonksiyonu, Y(t) tesadüfi fonksiyonunun $m_y(t)$ ve $K_y(t,t')$ karakteristik fonksiyonlarını bulalım. Kısaca girişin karakteristik fonksiyonları, esasında çıkışın karakteristik fonksiyonlarını bulalım.

Önce gösterelim ki, bu problemi homojen lineer operatör için çözmek yeterlidir.

Gerçekten de farz edelim ki, L operatörü homojen değildir ve aşağıdaki formülle verilir:

$$L\left[X(t)\right] = L_0\left[X(t)\right] + y(t) \ , \qquad (7.2)$$

burada L_0-Lineer homojen operatördür, y(t)-belli tesadüfi olmayan fonksiyondur. O zaman,

$$m_y(t) = M\left[L_0\left(X(t)\right)\right] + y(t) \qquad (7.3)$$

yani çıkışın matematik gözlemesine sadece y(t) ilave olunur. Kovaryasyon fonksiyonunun ise tesadüfi olmayan fonksiyon ilave ettiğimizde değişmediğini biliriz. O halde biz, bundan sonra L operatörü olarak lineer homojen operatör ele alacağız.

Önce bu problemi özel lineer operatörler halinde çözelim.

7.5.1. Tesadüfi Fonksiyonunun İntegrali

X(t) tesadüfi fonksiyonu ve bu tesadüfi fonksiyonun matematik gözlemesi $m_x(t)$ ve kovaryasyon fonksiyonu $K_x(t,t')$ verilmiş olsun. Tesadüfi Y(t) fonksiyonu X(t) fonksiyonu ile ve lineer homojen integralleme operatörü ile aşağıdaki gibi bağlıdır[9]:

$$Y(t)=\int_0^t X(S)\,dS \tag{7.4}$$

(7.4) formül ile tanımlanmış Y(t) fonksiyonunun $m_y(t)$ ve $K_y(t,t')$ karakteristiklerini bulalım.

Bunun için (7.4) integralini toplamın limiti gibi alırız:

$$Y(t)=\int_0^t X(S)\,dS=\lim_{\Delta T_i\to 0}\sum_i X\ (S_i)\Delta S_i\,. \tag{7.5}$$

(7.5) eşitliğinin her yanında matematik gözleme operatörünü alırsak, matematik gözlemenin toplama teoremine esasen,

$$m_y(t)=M[Y(t)]=\lim_{\Delta T_i\to 0}\sum_i M\left[X(S_i)\right]\Delta S_i=\lim_{\Delta T_i\to 0}\sum_i m_x(S_i)\Delta S_i=\int_0^t m_x(S)\,dS\,. \tag{7.6}$$

Böylece,

$$m_y(t)=\int_0^t m_x(S)dS. \tag{7.7}$$

Yani, integralin matematik gözlemesi integral altı tesadüfi fonksiyonun matematik gözlemesinin integraline eşittir.

Şimdi $K_y(t,t')$ kovaryans fonksiyonunu bulalım. Bunun için merkezleştirilmiş tesadüfi $\overset{\circ}{X}(t)$ ve $\overset{\circ}{Y}(t)$ fonksiyonlarına geçelim:

$$\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-m_x(t)\,, \qquad \overset{\circ}{Y}(t)=Y(t)-m_y(t)\,.$$

Bu halde aşağıdaki eşitliğin doğru olduğu açıktır:

$$\overset{\circ}{Y}(t)=\int_0^t \overset{\circ}{X}(S)\,dS\,. \tag{7.8}$$

Kovaryasyon fonksiyonunun tanımından:

$$K_y(t,t')=M\left[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')\right]$$

burada,

$$\overset{\circ}{Y}(t)=\int_{0}^{t}\overset{\circ}{X}(S)dS,\qquad \overset{\circ}{Y}(t')=\int_{0}^{t}\overset{\circ}{X}(S')dS' \quad . \tag{7.9}$$

(7.9) ifadelerini taraf tarafa çarpalım:

$$\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')=\int_{0}^{t}\overset{\circ}{X}(S)dS\int_{0}^{t}\overset{\circ}{X}(S')dS' . \tag{7.10}$$

Buradan da, buluruz

$$\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')=\int_{0}^{t}\int_{0}^{t'}\overset{\circ}{X}(S)\overset{\circ}{X}(S')dSdS' . \tag{7.11}$$

Bu eşitliğin her yanından matematik gözleme götürürsek aşağıdaki formül elde edilir:

$$K_y(t,t')=M\left[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')\right]=\int_{0}^{t}\int_{0}^{t'}M\left[\overset{\circ}{X}(S)\overset{\circ}{X}(S')\right]dSdS' .$$

Böylece, Y(t) tesadüfi fonksiyonunun kovaryans fonksiyonu için aşağıdaki formülü alırız:

$$K_y(t,t')=\int_{0}^{t}\int_{0}^{t'}K_x(S,S')dSdS' . \tag{7.12}$$

7.5.2. Tesadüfi Fonksiyonun Türevi

Tesadüfi X(t) fonksiyonunun $m_x(t)$ ve $K_x(t,t')$ karakteristikleri verilmiştir. Y(t) tesadüfi fonksiyonu X(t) tesadüfi fonksiyonu ile lineer homojen diferansiyelleme operatörü esasında aşağıdaki gibi bağlanmıştır[9]:

$$Y(t)=\frac{dX(t)}{dt} . \tag{7.13}$$

Y(t) tesadüfi fonksiyonunun matematik gözlemesi $m_y(t)$ ve kovaryasyon fonksiyonu olan $K_y(t,t')$, fonksiyonlarını bulalım.

Bunun için türev operatörünü limit şeklinde ifade edelim:

$$Y(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t} . \tag{7.14}$$

Sonuncu, eşitliğin her iki yanından matematiksel gözleme alsak buluruz:

$$m_y(t)=M\left[Y(t)\right]=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{m_x(t+\Delta t)-m_x(t)}{\Delta t}=\frac{dm_x(t)}{dt} .$$

Böylece,

$$m_y(t)=\frac{dm_x(t)}{dt} \qquad , \qquad (7.15)$$

yani, türevin matematik gözlemesi, matematik gözlemenin türevine eşittir.

$K_y(t,t')$ fonksiyonunu bulmak için $\overset{\circ}{Y}(t)$ ve $\overset{\circ}{X}(t)$ merkezleştirilmiş fonksiyonlarına geçelim. O zaman

$$\overset{\circ}{Y}(t)=\frac{d\overset{\circ}{X}(t)}{dt} \qquad (7.16)$$

eşitliğinin doğruluğu açıktır.

Tanıma esasen,

$$K_y(t,t')=M\left[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')\right].$$

Bu eşitlikte $\overset{\circ}{Y}(t)$ ve $\overset{\circ}{Y}(t')$ fonksiyonlarının ifadelerini yerine yazarsak:

$$K_y(t,t')=M\left[\frac{d\overset{\circ}{X}(t)}{dt}.\frac{d\overset{\circ}{X}(t')}{dt'}\right]$$

şimdi Matematik gözleme altında olan bu çarpımı karışık türev şeklinde yazalım:

$$\frac{d\overset{\circ}{X}(t)}{dt}.\frac{d\overset{\circ}{X}(t')}{dt'}=\frac{\partial^2\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')}{\partial t\,\partial t'}. \qquad (7.17)$$

Diferansiyelleme ve matematik gözleme işlemlerinin yerlerini değiştirebildiğimizden buluruz:

$$K_y(t,t')=M\left[\frac{\partial^2\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')}{\partial t\,\partial t'}\right]=\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial t'}M\left[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')\right]=\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial t'}K_x(t,t'). \qquad (7.18)$$

Böylece, aşağıdaki

$$K_y(t,t')=\frac{\partial^2 K_x(t,t')}{\partial t\,\partial t'} \qquad (7.19)$$

formülü elde edilir.

İntegralleme ve diferansiyelleme için ispat ettiğimiz bu formüllerin tüm lineer homojen operatörler için sağlandığını ispatlayabiliriz. Bu genel formülleri ispatsız olarak burada verelim. Eğer X(t) tesadüfi fonksiyonu lineer homojen L operatörü ile Y(t) tesadüfi fonksiyonuna dönüştürülürse, yani,

$$Y(t)=LX(t)$$

ve X(t) fonksiyonunun matematik gözlemesi $m_x(t)$ ve kovaryans fonksiyonu $K_x(t,t')$ fonksiyonları belli ise, o zaman Y(t) fonksiyonunun matematik gözleme fonksiyonu $m_y(t)$ ve kovaryans $K_y(t,t')$ fonksiyonları aşağıdaki formüllerle bulunur:

$$m_y(t) = Lm_x(t)\ , \qquad (7.20)$$

$$K_y(t,t') = L^{(t)}L^{(t')}\left[K_x(t,t')\right]. \qquad (7.21)$$

Bu (7.21) formülünde L operatörü $K_x(t,t')$ fonksiyonuna iki kez etki eder, bir kez t' diğer kez ise t argumentine göre alınır.

Y(t) tesadüfi fonksiyonunun varyansı ise aşağıdaki formülle bulunur:

$$D_y(t) = K_y(t,t)\ . \qquad (7.22)$$

Dikkat edilirse varyans, tesadüfi yan etkiler ortamında sistemin çalışmasının dakikliğini karakterize eder.

Örnek 7.3: X(t) tesadüfi fonksiyonunun matematik gözlemesi $m_x(t) = \sin t$ fonksiyonu ile verilir, kovaryasyon fonksiyonu ise,

$$K_x(t,t') = D_x e^{-\alpha(t'-t)^2}$$

fonksiyonu ile verilir. Burada D_x pozitif sabit olup X(t) fonksiyonunun varyansıdır. X(t) fonksiyonunun türevinin matematik gözlemesini ve varyansını bulunuz.

Çözüm. Bunun için,

$$Y(t) = \frac{d}{dt} X(t)$$

fonksiyonunun matematik gözlemesini ve kovaryansını bulalım.

Genel kuralı uygularsak:

$$m_y(t) = \frac{d}{dx} m_x(t) = \cos t$$

$$K_y(t,t') = \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial t'} K_x(t,t') = 2D_x \alpha e^{-\alpha(t'-t)^2}\left[1 - 2\alpha\left(t' - t^2\right)\right]$$

Bu eşitlikte $t = t'$ alarak buluruz:

$$D_y(t) = 2D_x\alpha$$

veya

$$D_y = 2D_x\alpha$$

olur.

7.6. Tesadüfi Fonksiyonların Toplanması

Bu paragrafta toplanan tesadüfi fonksiyonların karakteristikleri verildiğinde toplamın karakteristik fonksiyonlarının bulunması probleminden bahsedilecektir.

Bu problem, toplanan tesadüfi fonksiyonlar birbiriyle bağlı olmadığında çok basit şekilde çözülür. Genel halde ise verilmiş toplanan fonksiyonlarla karşılıklı kovaryasyon fonksiyonlarının da bilinmesi gerekir.

X(t) ve Y(t) tesadüfi fonksiyonlarının korelasyon (veya kovaryasyon) fonksiyonu t ve t' argumentlerine bağlı aşağıdaki eşitlikte tanımlanan tesadüfi olmayan fonksiyondur:

$$R_{xy}(t,t') = M\left[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{Y}(t')\right]. \qquad (1)$$

Karşılıklı korelasyon fonksiyonunun tanımından onun aşağıdaki özelliği alınır:

$$R_{xy}(t,t') = R_{yx}(t',t). \qquad (2)$$

Çoğu zaman $R_{xy}(t,t')$ yerine normalleştirilmiş karşılıklı korelasyon fonksiyonundan istifade edilir:

$$r_{xy}(t,t') = \frac{R_{xy}(t,t')}{\sigma_x(t)\,\sigma_y(t')} . \qquad (3)$$

Eğer her bir t ve t' için karşılıklı korelasyon fonksiyonu sıfıra eşit ise, o zaman X(t) ve Y(t) tesadüfi fonksiyonları bağlı değildir veya korelasyon olmamışlardır denir.

Tesadüfi X(t) ve Y(t) fonksiyonlarının matematik gözlemesini kovaryasyon fonksiyonlarını ve karşılıklı kovaryasyon fonksiyonlarını bularak bu fonksiyonların toplamının karakteristik fonksiyonlarını da bulabiliriz. Böylece,

$$Z(t) = X(t) + Y(t) \qquad (4)$$

olsun. O zaman matematik gözlemenin toplama teoremine esasen buluruz:

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t) . \qquad (5)$$

Yani iki tesadüfi fonksiyon toplandığında onların matematik gözlemeleri de toplanır.

Z(t) fonksiyonunun kovaryans fonksiyonu $K_z(t,t')$ fonksiyonunu bulmak için merkezleştirilmiş tesadüfi fonksiyonlara, yani $\overset{\circ}{Z}(t)$, $\overset{\circ}{X}(t)$ ve $\overset{\circ}{Y}(t)$ fonksiyonlarına geçelim:

$$\overset{\circ}{Z}(t) = \overset{\circ}{X}(t) + \overset{\circ}{Y}(t) \qquad (6)$$

olduğu açıktır (Gerçekten de (4)-den (5)-i taraf tarafa çıkarırsak (6) bulunur).

Kovaryasyon fonksiyonunun tanımından:

$$K_z(t,t') = M\left[\overset{\circ}{Z}(t)\overset{\circ}{Z}(t')\right] = M\left[\left(\overset{\circ}{X}(t)+\overset{\circ}{Y}(t)\right)\left(\overset{\circ}{X}(t')+\overset{\circ}{Y}(t')\right)\right]$$

$$= M\left[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')\right] + M\left[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{X}(t')\right] + M\left[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{Y}(t')\right] + M\left[\overset{\circ}{Y}(t')\overset{\circ}{Y}(t')\right]$$

veya

$$K_z(t,t') = K_x(t,t') + K_y(t,t') + R_{xy}(t,t') + R_{xy}(t',t) \qquad (7)$$

yazılır.

X(t) ve Y(t) fonksiyonları korelasyon bağlantısında olmadığında $R_{xy}(t,t') = 0$ olur ve (7) formülü daha basit şekil alır:

$$K_z(t,t') = K_x(t,t') + K_y(t,t')\ , \qquad (8)$$

yani korelasyon bağıntısında olmayan iki tesadüfi fonksiyonu topladığımızda onların kovaryasyon fonksiyonları toplanır.

Bu formüller keyfi sayıda toplam içinde genelleştirilebilir.

Eğer X(t) tesadüfi fonksiyonu n tane tesadüfi fonksiyonun toplamından oluşmuş olursa, yani,

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t) \qquad (9)$$

o zaman bu fonksiyonun matematik gözlemesi aşağıdaki formülle ifade edilir:

$$m_x(t) = \sum_{i=1}^{n} m_{x_i}(t)\ , \qquad (10)$$

kovaryasyon fonksiyonu ise,

$$K_x(t,t') = \sum_{i=1}^{n} K_{x_i}(t,t') + \sum_{i\neq j} R_{x_i x_j}(t,t') \quad . \qquad (11)$$

Eğer $X_i(t)$ fonksiyonlarının tümü korelasyon bağlantısında değillerse, o zaman (11) formülü aşağıdaki basit şekli alır:

$$K_x(t,t') = \sum_{i=1}^{n} K_{x_i}(t,t')\ . \qquad (12)$$

Şimdi burada özel bir hali ele alalım. Farz edelim ki, X(t) tesadüfi fonksiyondur ve bu fonksiyonun matematik gözlemesi m_x kovaryasyon fonksiyonu ise $K_x(t,t')$ dür. Y ise rastgele değişkendir. Bu rastgele değişkenin matematik gözlemesi m_y ve varyansı ise D_y dir. Farz edelim ki, X(t) fonksiyonu ve Y tesadüfi değişkeni korelasyon bağıntısında değildirler. Yani her bir t için,

$$M\left[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{Y}\right]=0$$

dır. X(t) ile Y-yi toplarsak,

$$Z(t)=X(t)+Y \qquad (13)$$

tesadüfi fonksiyonunu buluruz.

Z(t) fonksiyonunun karakteristiklerini belirleyelim:

$$m_z=m_x(t)+m_y \qquad (14)$$

eşitliği açıktır.

Dikkat edilirse,

$$K_y(t,t')=M\left[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')\right]=M\left[\overset{\circ}{Y}{}^2\right]=D_y. \qquad (15)$$

Buna göre de,

$$K_z(t,t')=K_x(t,t')+D_y\ . \qquad (16)$$

7.7. Kompleks Tesadüfi Fonksiyonlar

Tesadüfi fonksiyonlar teorisine matematik metotlar uygulanırken tesadüfi fonksiyonların kendisini ve onların karakteristik fonksiyonlarını kompleks şeklinde yazmak daha faydalı olur. Bununla ilgili olarak kompleks rastgele degişken ve kompleks tesadüfi fonksiyon anlamlarını vermeliyiz.

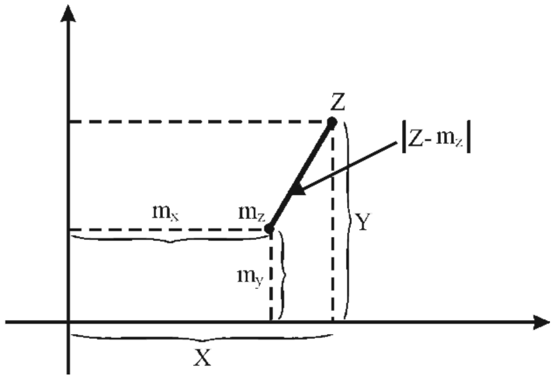
Önce biz kompleks rastgele degişkeni tanıyalım:

Farz edelim ki, X ve Y herhangi rastgele degişkenlerdir. O zaman,

$$Z=X+iY \qquad (1)$$

şeklinde olan rastgele degişkene kompleks rastgele degişken denir. burada $i=\sqrt{-1}$ sanal birimdir.

Kompleks rastgele degişkeni geometrik olarak kompleks düzlemde bir tesadüfi nokta gibi gösterebiliriz (Bak. Şekil 7.8).



Şekil 7.8: Kompleks rastgele değişkenin kompleks düzlemde gösterilişi

$Z = X + iY$ kompleks rastgele degişkenin matematik gözlemesi,

$$m_z = m_x + im_y \qquad (2)$$

kompleks sayısına denir.

m_z sayısı Z kemiyetinin bir ortalama değeridir. Geometrik olarak, bu bir orta noktadır öyle ki, bu noktanın etrafında z tesadüfi noktasının dağılımı gerçekleşir.

Kompleks tesadüfi $Z = X + iY$ değişkenin varyansı,

$$D_z = M\left[\overset{\circ}{Z}\,\overline{\overset{\circ}{Z}}\right] = M\left[\left|\overset{\circ}{Z}\right|^2\right] \qquad (3)$$

formülü ile tanımlanır. Burada,

$$\overset{\circ}{Z} = Z - m_z$$

olup merkezleştirilmiş rastgele degişkendir. Geometrik olarak kompleks rastgele degişken varyansı tesadüfi Z noktasından onun matematik gözlemesine kadar olan mesafesinin karesinin geometrik ortalamasına eşittir. Varyans tesadüfi Z noktasının matematik gözleme etrafındaki (komşuluğundaki) dağılımını karakterize eder.

Kompleks rastgele degişkeninin varyansını onun reel ve sanal kısımlarının varyansları ile ifade edelim.

$$\overset{\circ}{Z} = Z - m_z = X + iY - m_x - im_y = \overset{\circ}{X} + i\overset{\circ}{Y}$$

olduğundan,

$$D_z = M\left[\left|\overset{\circ}{Z}\right|^2\right] = M\left[\overset{\circ}{X}^2 + \overset{\circ}{Y}^2\right] = M\left[\overset{\circ}{X}^2\right] + M\left[\overset{\circ}{Y}^2\right]$$

veya

$$D_z = D_x + D_y \qquad (4)$$

formülünü buluruz.

Yani kompleks rastgele degişkenin varyansı onun reel ve sanal kısımlarının varyanslarının toplamına eşittir.

Varyansın tanımından bellidir ki, varyans daima pozitiftir. Yalnız tesadüfi olmayan değişkenin varyansı sıfıra eşit olabilir.

Şimdi iki kompleks rastgele degişkenin korelasyon momentini tanımlayalım.

$Z_1 = X_1 + iY_1$ ve $Z_2 = X_2 + iY_2$ gibi verilmiş iki kompleks rastgele degişkenin korelasyon momenti aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$K_{z_1 z_2} = M\left[\overset{\circ}{Z}_1 \overline{\overset{\circ}{Z}_2}\right]. \qquad (5)$$

Dikkat edelim ki, üstteki hat kompleks eşleniği gösterir.

İki kompleks rastgele degişkenin korelasyon momentini onların reel ve sanal kısımlarının korelasyon momentleri ile ifade edelim:

$$\begin{aligned} K_{z_1 z_2} &= M\left[\overset{\circ}{Z}_1 \overline{\overset{\circ}{Z}_2}\right] = M\left[\left(\overset{\circ}{X}_1 + i\overset{\circ}{Y}_1\right)\left(\overset{\circ}{X}_2 + i\overset{\circ}{Y}_2\right)\right] \\ &= \left(M\left[\overset{\circ}{X}_1 \overset{\circ}{X}_2\right] + M\left[\overset{\circ}{Y}_1 \overset{\circ}{Y}_2\right]\right) + i\left(M\left[\overset{\circ}{X}_2 \overset{\circ}{Y}_1\right] - M\left[\overset{\circ}{X}_1 \overset{\circ}{Y}_2\right]\right) \qquad (6) \\ &= \left(K_{x_1 x_2} + K_{y_1 y_2}\right) + i\left(K_{x_2 y_1} - K_{x_1 y_2}\right). \end{aligned}$$

Burada $K_{x_1 x_2}$, $K_{y_1 y_2}$, $K_{y_1 x_2}$, $K_{x_1 y_2}$ sayıları sırasıyla (X_1, X_2), (Y_1, Y_2), (X_2, Y_1), (X_1, Y_2) rastgele degişkenlerinin korelasyon momentleridir.

Bu değişkenler kendi aralarında korelasyon bağıntısında değillerse, o zaman Z_1 ve Z_2 değişkenlerinin de korelasyon momenti sıfıra eşit olur.

Şimdi kompleks tesadüfi fonksiyonu ve onların karakteristiklerini tanımlayalım.

Aşağıdaki şekilde verilen fonksiyonlara kompleks tesadüfi fonksiyonlar denir:

$$Z(t) = X(t) + iY(t) \;. \qquad (7)$$

Bu eşitlikte X(t) ve Y(t) reel tesadüfi fonksiyonlardır.

(7) formülü ile verilen kompleks tesadüfi fonksiyonun matematik gözlemesi

$$m_z(t) = m_x(t) + im_y(t) \qquad (8)$$

formülü ile tanımlanır.

Varyansı ise aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$D_z(t) = M\left[\overset{\circ}{Z}(t) + \overline{\overset{\circ}{Z}(t)}\right] = M\left[\left|\overset{\circ}{Z}(t)\right|^2\right]. \qquad (9)$$

Burada,

$$\overset{\circ}{Z}(t) = Z(t) - m_z(t) = \overset{\circ}{X}(t) + i\overset{\circ}{Y}(t) \ . \qquad (10)$$

(9) formülünden görüyoruz ki, kompleks tesadüfi fonksiyonun varyansı reel ve pozitiftir. Kolaylıkla aşağıdaki formülün doğru olduğunu gösterebiliriz:

$$D_z(t) = D_x(t) + D_y(t) \ . \qquad (11)$$

Kompleks tesadüfi fonksiyonun korelasyon fonksiyonu ise aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$K_z(t,t') = M\left[\overset{\circ}{Z}(t)\overline{\overset{\circ}{Z}}(t')\right], \qquad (12)$$

burada,

$$\overline{\overset{\circ}{Z}}(t') = \overset{\circ}{X}(t') + i\overset{\circ}{Y}(t') \ ,$$

$t' = t$ olduğunda kompleks fonksiyonun varyansı

$$K_Z(t,t) = D_z(t) \qquad (13)$$

olur. (12) formülünden direkt olarak aşağıdaki formülü bulabiliriz:

$$K_z(t,t') = K_x(t,t') + K_y(t,t') + i\left(R_{xy}(t',t) - R_{xy}(t,t')\right) \ . \qquad (14)$$

Burada X(t) ve Y(t) tesadüfi fonksiyonları Z(t) kompleks tesadüfü fonksiyonunun reel ve sanal kısımlarıdır. $R_{xy}(t,t')$ ise X(t) ve Y(t) fonksiyonlarının karşılıklı korelasyon fonksiyonlarıdır. Eğer kompleks tesadüfi fonksiyonun reel ve sanal kısımları korelasyon bağlantısında değillerse, o zaman $R_{xy}(t,t') \equiv 0$ ve

$$K_z(t,t') = K_x(t,t') + K_y(t,t') \qquad (15)$$

formülünü buluruz.

8.TESADÜFİ FONKSİYONLARIN SPEKTRAL (KANONİK) AÇILIMLARI

8.1. Spektral (Kanonik) Açılım Metodunun İdeyası (Anafikri). Tesadüfi Fonksiyonların Elementer (Sade) Tesadüfi Fonksiyonların Toplamı Şeklinde Gösterilişi

Önceki bölümde biz tesadüfi fonksiyonların lineer dönüşümlerinin genel kuralları ile tanıştık. Gördük ki, tesadüfi fonksiyonların lineer dönüşümünde bu fonksiyonların matematik gözlemeleri üzerinde aynı lineer dönüşüm yapılır, ama bu fonksiyonların korelasyon fonksiyonları üzerinde aynı lineer dönüşüm iki kez (bir defa t' değişenine göre ikinci kez ise t değişenine göre) yapılır[8].

Böylece, matematik gözlemenin bu lineer dönüşümdeki dönüştürülme kuralı çok sadedir ve pratik olarak hiçbir zorlukla karşılaşılmaz. Ama korelasyon fonksiyonunun iki kez dönüştürülmesi kuralı pratikte birçok hallerde karmaşık işlemleri beraberinde getirir ve genel metotların uygulanmasında birçok zorluklarla karşılaşılır.

Gerçektende, sade bir lineer integral operatör

$$Y(t) = \int_0^t X(S)\,dS \qquad (1)$$

integralini ele aldığımızda, bu dönüşüme uygun olarak korelasyon fonksiyonuna aşağıdaki gibi bu operatörle iki kez dönüşüm yapılır:

$$K_y(t,t') = \int_0^t \int_0^{t'} K_x(S,S')\,dS\,dS' \qquad (2)$$

Çoğu durumda $K_x(t,t')$ korelasyon fonksiyonu deneyden alınmış olur ve tablo şeklinde verilmiş olur. Analitik ifadesi belli değilse, bu durumda (2) integralini sayısal olarak hesaplamak gerekir, bu ise birçok zorluklara bağlıdır. $K_x(t,t')$ fonksiyonunu analitik olarak interpolasiya ettiğimizde veya analitik olarak approksime ettiğimizde ise yine (2) integralinin hesaplanmasında birçok hesaplama zorlukları ile karşılaşılır. Lineer dönüşüm diferansiyel operatör olduğunda bu zorluklara yeni zorluklar da eklenir.

Bununla ilgili olarak, pratik problemleri çözdüğümüzde çoğu zaman daha basit dönüşüm metotlar uygulanır. Bunlardan biri tesadüfi fonksiyonların spektral açılımı metodudur.

Spektral açılım metodu uygulanırken dönüşüm yapılacak tesadüfi fonksiyon, dönüşümden önce elementer tesadüfi fonksiyonların toplamı şeklinde seriye veya integrale açılır. Aşağıdaki,

$$X(t) = V\,y(t) \qquad (3)$$

Şeklinde yazılmış fonksiyonda y(t) tesadüfi olmayan determinik fonksiyon, V ise adi rastgele degişken olduğunda (3) şeklinde gösterilen X(t) tesadüfi fonksiyonuna elementer tesadüfi fonksiyon denir.

Elementer tesadüfi fonksiyonlar en basit tip tesadüfi fonksiyonlardır. (3) eşitliğinde yalnız V tesadüfidir.

X(t) tesadüfi fonksiyonunun tüm realizasyonları, y(t) fonksiyonunun grafiğinden ordinat ekseninde ölçücüyü değiştirmekle almak mümkün olur. Absis eksenide X(t) tesadüfi fonksiyonunun realizasyonlarından biri olur.

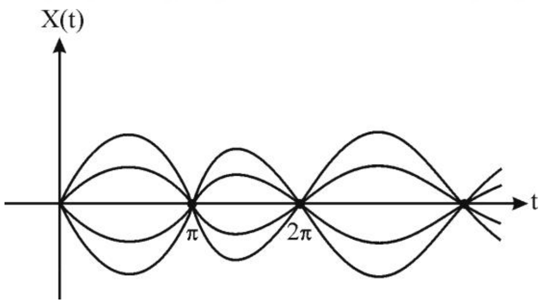
Şekil 8.1 ve Şekil 8.2-de uygun olarak elementer

$$X(t) = V \sin \mathrm{t}$$

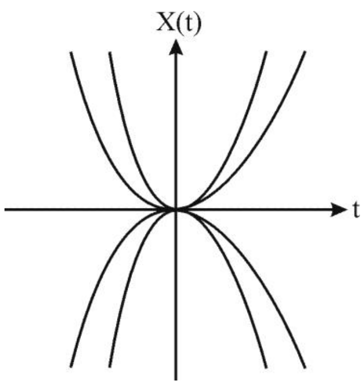
ve

$$X(t) = V\,\mathrm{t}^2$$

tesadüfi fonksiyonlarının realizasyonları gösterilmiştir.



Şekil 8.1: $X(t) = V \sin t$ fonksiyonunun grafiği



Şekil 8.2: $X(t) = Vt^2$ fonksiyonunun grafikleri

Elementer tesadüfi fonksiyonun esas özelliği odur ki; bu fonksiyonlarda iki özellik tesadüfilik ve değişkene bağlılık birbirinden ayrılmıştır. ‘’Tesadüfilik’’ V katsayısında birleştirilmiştir, ‘’zamana bağlılık’’ ise determinik (adi) y(t) fonksiyonunda birleştirilmiştir

Elementer tesadüfi fonksiyonun karakteristiğini bulalım. Böylece,

$$m_x(t) = M\left[Vy(t)\right] = m_v.y(t) \ ,$$

burada m_v sayısı V rastgele değişkeninin matematik gözlemesidir.

Özel olarak $m_v=0$ olduğunda X(t) tesadüfi fonksiyonunun matematik gözlemesi sıfır olur:

$$m_x(t) = 0 \ .$$

Bellidir ki, tesadüfi fonksiyonları merkezleştirilmiş şekle saldığımızda merkezleştirilmiş tesadüfi fonksiyonlarının matematik gözlemesi sıfıra eşit olur.

Bundan sonra biz merkezleştirilmiş elementer tesadüfi fonksiyonları ele alacağız. Yani,

$$V = \overset{\circ}{V}, \qquad m_v = 0 \qquad \text{ve} \qquad m_x(t) \equiv 0$$

olduğunu farz edeceğiz.

Elementer tesadüfi fonksiyonların korelasyon fonksiyonunu hesaplayalım. Böylece, tanıma esasen X(t) elementer tesadüfi fonksiyonunun korelasyon fonksiyonu için buluruz:

$$K_x(t,t') = M\left[X(t)X(t')\right] = y(t)y(t')M\left[V^2\right] = y(t)y(t')D_v \, .$$

Burada D_v sayısı v rastgele değişkeninin varyansıdır.

Elementer tesadüfi fonksiyonların lineer dönüşümleri çok kolay şekilde bulunur. Mesela, $X(t) = Vy(t)$ elementer tesadüfi fonksiyonunu diferansiyellediğimizde V, t-ye bağlı olmadığından türev işaretinden dışarı alınabilir:

$$X'(t) = Vy'(t).$$

Benzer şekilde,

$$\int_0^t X(S)\,dS = V\int_0^t y(S)\,dS \, .$$

Genel halde, lineer L operatörü için

$$L\left[X(t)\right] = VL\left[y(t)\right] \qquad (4)$$

formülü doğrudur.

Böylece, tesadüfi fonksiyonların spektral açılımı, esasında onların elementer tesadüfi fonksiyonlarının toplamı şeklinde ifade edilmesidir.
Aşağıdaki tesadüfi fonksiyonu ele alalım:

$$X(t) = m_x(t) + \overset{\circ}{X}(t)\ . \qquad (5)$$

Farz edelim ki, bu tesadüfi fonksiyon aşağıdaki şekilde gösterilmiştir:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{m} V_i y_i(t) \qquad . \qquad (6)$$

Burada V_i matematik gözlemeleri sıfır olan rastgele değişkenler, $y_i(t)$ fonksiyonları belli determinik fonksiyonlardır. $m_x(t)$ fonksiyonu ise X(t) tesadüfi fonksiyonunun matematik gözlemesidir.
Tesadüfi X(t) fonksiyonunun (6) şeklinde gösterilişine spektral açılımı veya kanonik açılımı denir. V_1, V_2,..., V_m rastgele değişkenlerine açılımın katsayıları denir. $y_1(t)$,..., $y_m(t)$ fonksiyonlarına koordinat fonksiyonları denir.
Bu halde L lineer dönüşümün çıkışı için aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$Y(t) = L[X(t)] = L[m_x(t)] + \sum_{i=1}^{m} V_i L[y_i(t)] \qquad (7)$$

Burada,

$$m_y(t) = L[m_x(t)],$$

$$\psi_i(t) = L[y_i(t)]$$

ifadeleri yerine yazılırsa:

$$Y(t) = m_y(t) + \sum_{i=1}^{m} V_i \psi_i(t) \qquad (8)$$

sade (kanonik) açılımı bulunur. (8) formülü Y(t) tesadüfi fonksiyonun spektral açılımıdır.

8.2. Tesadüfi Fonksiyonun Spektral (Kanonik) Açılımı

X(t) tesadüfi fonksiyonunu ele alalım. Farz edelim ki, X(t) aşağıdaki şekilde toplama açılmıştır:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{m} V_i y_i(t). \qquad (1)$$

Burada V_1, V_2,..., V_m katsayıları tesadüfi değişkenler olup, matematik gözlemelerenin sıfır olduğu kabul edilir[2]. Farz edelim ki V_1, V_2,..., V_m

katsayılarının korelasyon katsayıları $\|K_{ij}\|$ matrisi ile verilir. Tesadüfi X(t) fonksiyonunun korelasyon fonksiyonunu ve varyansını bulalım.

Tanıma esasen,

$$K_x(t,t') = M\left[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')\right]. \qquad (2)$$

Bu formülde

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{i=1}^{m} V_i y_i(t), \qquad (3)$$

$$\overset{\circ}{X}(t') = \sum_{j=1}^{m} V_j y_j(t'), \qquad (4)$$

alıp (3) ve (4) ifadelerini birbirine çarpıp ve çarpımdan matematik gözleme işlemi alırsak buluruz:

$$\begin{aligned} K_x(t,t') &= M\left[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')\right] = M\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} V_i V_j y_i(t) y_i(t')\right] \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} M\left[V_i V_j\right] y_i(t) y_j(t') \end{aligned} \qquad (5)$$

Burada,

i=j olduğunda,

$$M[V_i V_i] = M[V_i^2] = K_{ii} = D_i .$$

D_i göründüğü gibi V_i rastgele değişkeninin varyansıdır.

Burada $i \neq j$ olduğunda ise,

$$M[V_i V_j] = K_{ij}$$

olup, V_i ve V_j rastgele değişkenlerinin korelasyon momentleridir. Bunları (5) formülünde yerine yazarsak, aşağıdaki açılımı buluruz:

$$K_x(t,t') = \sum_{i=1}^{m} y_i(t) y_i(t') D_i + \sum_{i \neq j}^{m} y_i(t) y_j(t') K_{ij} . \qquad (6)$$

(6) formülünde $t = t'$ alsak X tesadüfi fonksiyonunun varyansını buluruz:

$$D_x(t) = \sum_{i=1}^{m} \left[y_i(t)\right]^2 D_i + \sum_{i \neq j} y_i(t) y_j(t) K_{ij} . \qquad (7)$$

V_i katsayıları birbiriyle korelasyon bağlantılarında olmadığında yani $i \neq j$ olduğunda $K_{ij} = 0$ olursa o zaman (6) ve (7) ifadeleri çok basit şekil alır:

$$K_x(t,t') = \sum_{i=1}^{m} y_i(t) y_i(t') D_i . \qquad (6')$$

Böylece, bu halde

$$D_x(t)=\sum_{i=1}^{m}\left[y_i(t)\right]^2 D_i \qquad (7')$$

olur.

Bu halde tesadüfi fonksiyonun (1) açılımına çoğu zaman "Kanonik" açılım denir.

Böylece, X(t) tesadüfi fonksiyonunun

$$X(t)=m_x(t)+\sum_{i=1}^{m}V_i y_i(t) \qquad (8)$$

açılımında $m_x(t)$ tesadüfi fonksiyonun matematik gözlemesi, $y_1(t)$, $y_2(t)$,..., $y_m(t)$ koordinat fonksiyonları veya baz fonksiyonları, V_1, V_2,..., V_m matematik gözlemeleri sıfır olan ve birbirleri ile korelasyon bağlantısında olmayan rastgele değişkenler olduğunda bu açılıma X(t) tesadüfi fonksiyonunun "kanonik" açılımı denir.

Bu halde X(t) tesadüfi fonksiyonunun korelasyon fonksiyonunun

$$K_x(t,t')=\sum_{i=1}^{m}y_i(t)\,y_i(t')\,D_i \qquad (9)$$

ifadesine korelasyon fonksiyonunun kanonik açılımı denir. X(t) tesadüfi fonksiyonunun varyansı ise

$$D_x(t)=\sum_{i=1}^{m}\left[y_i(t)\right]^2 D_i \qquad (10)$$

formülü ile verilir.

Bu formüllerde toplamların sayısı sonsuza götürülebilir. Bundan dolayı kanonik açılım integral şeklinde de ifade edilir.

Kanonik açılımdan (spektral açılım) kompleks tesadüfi fonksiyonlar için de istifade edilir.

Burada kompleks tesadüfi fonksiyonların kanonik açılımlarının da tanımını verelim.

Aşağıdaki şekilde verilen

$$X(t)=Vy(t) \qquad (11)$$

tesadüfi fonksiyonunda, V rastgele değişkeni ve y(t) fonksiyonu determinik olmakla uygun olarak kompleks sayı ve kompleks fonksiyon oldığunda X(t) tesadüfi fonksiyonuna elementer kompleks tesadüfi fonksiyon denir.

(11) formülü ile verilen elementer kompleks tesadüfi fonksiyonunun korelasyon fonksiyonunu bulalım. Tanıma esasen, buluruz:

$$K_x(t,t')=M\left[Vy(t)\overline{Vy(t')}\right] \qquad (12)$$

Buradanda

$$K_x\left(t,t'\right)=y\left(t\right)\overline{y\left(t'\right)}M\left[\left|V^2\right|\right]$$

veya

$$K_x\left(t,t'\right)=y\left(t\right)\overline{y\left(t'\right)}D \qquad (13)$$

alınır, burada $D=M\left[\left|V\right|^2\right]$ Kompleks tesadüfi V değişkenin varyansıdır.

Kompleks X(t) tesadüfi fonksiyonunun

$$X\left(t\right)=m_x\left(t\right)+\sum_{i=1}^{m}V_i y_i\left(t\right) \qquad (14)$$

açılımında; $V_1, V_2, ..., V_m$ matematik gözlemeleri sıfır olan birbiriyle korelasyon bağıntılarında olmayan rastgele değişkenler olduğunda ve $m_x(t)$, $y_1(t), ..., y_m(t)$ kompleks tesadüfi olmayan fonksiyonlar olduğunda X(t) kompleks tesadüfi fonksiyonunun kanonik açılımı denir. Burada $m_x\left(t\right)$ X(t) nin matematik gözlemesidir.

Kompleks tesadüfi X(t) fonksiyonu (14) formülü ile verildiğinde onun korelasyon fonksiyonu aşağıdaki formülle ifade edilir:

$$K_x\left(t,t'\right)=\sum_{i=i}^{m}y_i\left(t\right)\overline{y_i\left(t'\right)}D_i\ , \qquad (15)$$

burada D_i sabitleri uygun olarak V_i rastgele değişkenlerinin varyansı olup,

$$D_i=M\left[\left|V_i\right|^2\right] \qquad (16)$$

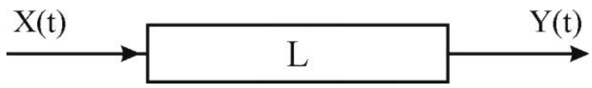
ifadesi ile tanımlanır.

(15) formülünde $t=t'$ alırsak (14) formülü ile verilen kompleks X(t) tesadüfi fonksiyonunun varyansı için aşağıdaki formülü buluruz:

$$D_x\left(t\right)=\sum_{i=1}^{m}\left|y_i\left(t\right)\right|^2 D_i\ . \qquad (17)$$

8.3.Kanonik Açılımlarla Verilmiş Tesadüfi Fonksiyonların Lineer Dönüşümleri

Farz edelim ki, operatörü L ile verilen bir lineer sistemin girişine X(t) tesadüfi fonksiyonu verilir, yani sembolik olarak[2]:



Şekil 8.3: Girişi X(t) çıkışı Y(t) olan L operatörlü lineer sistemin sembolik gösterilişi

Bu halde sistem X(t) fonksiyonunu L operatörü ile dönüştürür ve sistemin çıkışında tesadüfi Y(t) fonksiyonunu buluruz:

$$Y(t) = L\left[X(t)\right]. \qquad (1)$$

Şimdi farz edelim ki, X(t) fonksiyonu aşağıdaki kanonik açılımla verilmiştir:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{k} V_i y_i(t). \qquad (2)$$

Bu etkiye sistemin reaksiyonunu hesaplayalım. Sistemin operatörü L lineer olduğundan, buluruz:

$$Y(t) = L[X(t)] = L[m_x(t)] + \sum_{i=1}^{K} V_i L[y_i(t)]. \qquad (3)$$

Bu son (3) eşitliğine dikkat edersek bu eşitliğin Y(t) tesadüfi fonksiyonunun kanonik açılımı olduğunu görürüz. Gerçekten de,

$$m_y(t) = L\left[m_x(t)\right] \qquad (4)$$

Y(t) fonksiyonunun matematik gözlemesidir ve

$$L[y_i(t)] = \psi_i(t) \qquad (5)$$

fonksiyonları ise Y(t) fonksiyonu için koordinat (baz) fonksiyonlarıdır.
Böylece sistemin çıkışında,

$$Y(t) = m_y(t) + \sum_{i=1}^{K} V_i \psi_i(t) \qquad (6)$$

tesadüfi fonksiyonunu bulmuş oluruz. Bu fonksiyonun korelasyon fonksiyonu ve varyansı aşağıdaki formüllerle bulunur:

$$K_y(t,t') = \sum_{i=1}^{K} \psi_i(t)\psi_i(t')D_i, \qquad (7)$$

$$D_y(t) = \sum_{i=1}^{K} [\psi_i(t)]^2 D_i. \qquad (8)$$

9.STASİONAR TESADÜFİ PROSESLER

9.1 Esas Anlamlar

Pratikte böyle tesadüfi proseslere rastlanır ki , bu tesadüfi proseslerin olasılık karakteristikleri t zamanına bağlı olmuyor, daha dakik desek t ekseni boyunca argümentin keyfi ötelemesine (sürüştürmesine) bağlı olmuyor. Böyle tesadüfi proseslere stasionar tesadüfi prosesler denir[7].

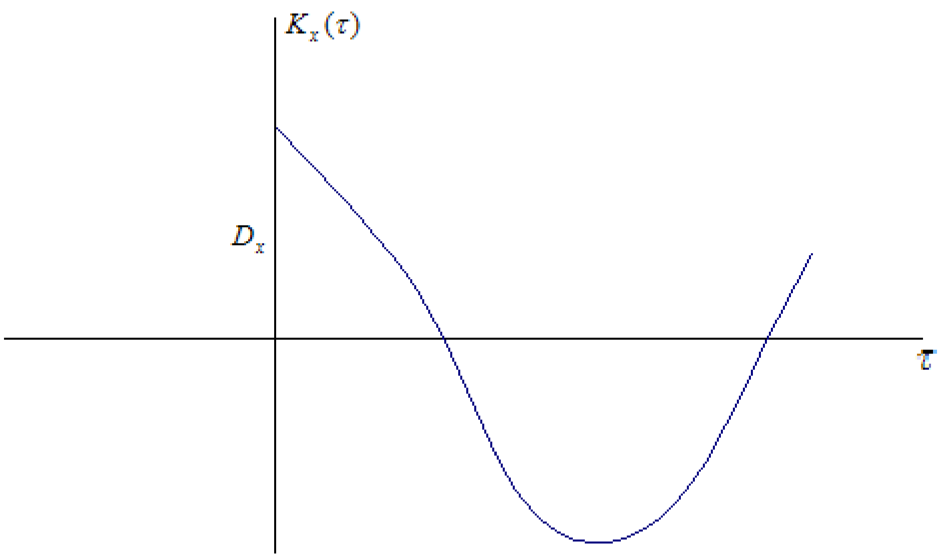
Böyle stasionar tesadüfi prosesler için

$$K_x(t, t+\tau) = K_x(\tau) \qquad (1)$$

koşulunun keyfi t ve keyfi τ için sağlanması istenir. Stasionar tesadüfi proseslerin matematik gözlemesi ve dispersiyası d_x sabittir

$$D_x(t) = K_x(t,t) = K_x(0) = \text{Const} . \qquad (2)$$

Bundan sonra yalnız merkezleştirilmiş tesadüfi prosesleri ele alacağımızdan stasionar tesadüfi proseslerin matematik gözlemesi üzerine şart getirmiyoruz. Merkezleştirilmiş tesadüfi proseslerin matematik gözlemesi sıfıra eşittir. Böylece stasionar tesadüfi prosesin korelasyon fonksiyonu t , t' değişkenlerine bağlı olmayıp yalnız bu değişkenlerin farkına yani $\tau = t - t'$ bağlıdır.



Şekil 9.1: $K_x(\tau)$ korelasyon fonksiyonunun grafiği

Her bir prosesin korelasyon fonksiyonu t ve t' argümentlerine göre simetrik olduklarından :

$K_x(t,t') = K_x(t',t)$

stasionar tesadüfi prosesleri için burada $t' - t = \tau$ ele almakla ;

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau) \tag{3}$$

eşitliğini elde ederiz,yani stasionar tesadüfi proseslerin korelasyon $K_x(\tau)$ fonksiyonlarının, τ argümentinin çift fonksiyonu olduğunu alırız.

Buna göre de stasionar tesadüfi proseslerinin korelasyon fonksiyonlarını

$\tau > 0$ için tanımlamak yeterli olur (bak şekil 9.1).

Pratikte $K_x(\tau)$ korelasyon fonksiyonu yerine çoğu zaman normalleştirilmiş korelasyon fonksiyondan istifade olunur :

$$\rho_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{D_x}, \tag{4}$$

burada $D_x = K_y(0)$ stasionar prosesin sabit dispersiyasıdır. $\rho_x(\tau)$ fonksiyonu stasionar tesadüfi fonksiyonun τ aralığının uç noktalarındaki kesiklerin korelasyon katsayısıdır. $\rho_x(0) = 1$ olduğu açıktır. Genelde

$K(0) \geq 0$; $K(\tau) = K(-\tau)$; $K(\tau) \leq K(0)$ şartları sağlanır.

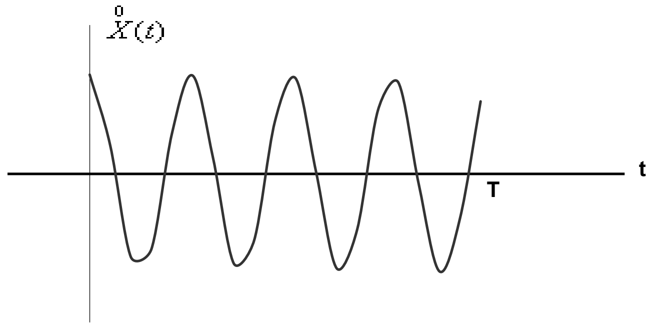
9.2 Sonlu Zaman Aralığında Stasionar Tesadüfi Prosesin Spektral Açılımı

"Spektr" anlamı tek tesadüfi prosesler teorisinde değil , bu anlam matematikte , fizikte ve teknik problemlerin çözümünde çok geniş kullanılır.

Eğer herhangi bir titreşim yapan proses ayrı ayrı frekanslı titreşimlerin harmonikalerinin toplamı şeklinde gösterilmişse (yani harmonik titreşimlerin toplamı şeklinde gösterilmişse), o zaman titreşim yapan prosesin spektri farklı frekanslar üzerinde genlik dağılımını gösteren fonksiyondur.

Spektr verilmiş proseste hangi tip titreşimin daha fazla olduğunu ve genelde titreşimin dahili yapısını gösterir. Tamamen bunun analojisi olarak (benzeri olarak) stasionar tesadüfi prosesinde spektral gösterilişini verilebilir. Ama burada yalnız tesadüfi prosesin genliği tesadüfi kemiyet olur.Böylece, stasionar tesadüfi prosesin spektri onun dispersiyasının farklı farklı frekanslara göre dağılımını gösterir[8].

Stasionar tesadüfi prosesin spektrini tanımlamak için merkezleştirilmiş $\overset{0}{X}(t)$ tesadüfi stasionar prosesini ele alalım. Farz edelim ki bu prosesi biz müşahede ederiz (bak şekil 9.2).



Şekil 9.2: $\overset{0}{X}(t)$ fonksiyonunun grafiği

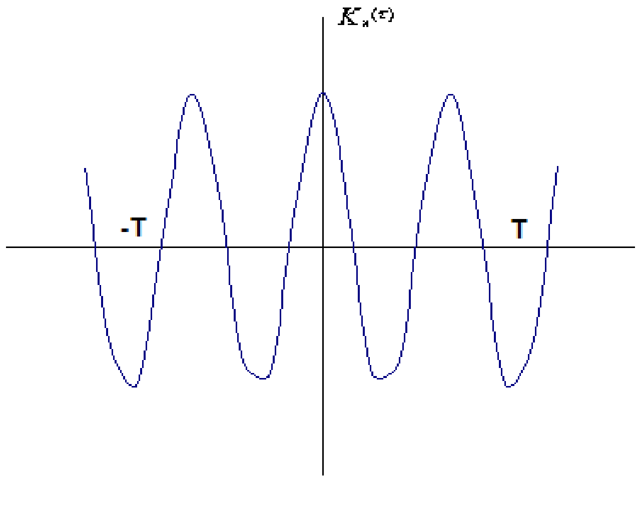
Farz edelim ki, bu tesadüfi fonksiyonun korelasyon fonksiyonu verilmiştir ve

$K_x(t, t+\tau) = K_x(\tau)$,

$K_x(\tau)$ çift fonksiyondur:

$K_x(\tau) = K_x(-\tau)$.

Buna göre bu fonksiyonun $K_x(\tau)$ eksenine göre grafiği simetrik olacak.(bak şekil 9.3).



Şekil 9.3: $K_x(\tau)$ korelyasyon fonksiyonunun grafiği

t ve t′ değişkenleri 0'dan T 'ye dek değiştiğinde τ = t′-t değişkeni –T 'den T 'ye dek değişir.

Bellidir ki, (-T,T) aralığında çift olan fonksiyon bu aralıkta Fourier serisine açılır. Bu halde yalnız çift harmonikalerden (yani kosinüslerden) istifade olunur. Gerçekten de:

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_x Cos\omega_k \tau \qquad (5)$$

burada

$$\omega_k = k\omega_1 \; ; \; \omega_1 = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T} \; ; \; \omega_k = \frac{\pi_k}{T}, \qquad (6)$$

D_k katsayıları ise aşağıdaki formüllerle tanımlanır:

$$\left.\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} K_x(\tau)d\tau, \\ D_k &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} K_x(\tau)Cos\omega_k\tau \; d\tau, \qquad k \neq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Bu formüllerdeki, $K_x(\tau)$ ve $Cos\omega_k\tau$ fonksiyonları çift fonksiyonlar olduklarından (7) ifadesindeki formülleri aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\left.\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{T}\int_{0}^{T} K_x(\tau)d\tau, \\ D_k &= \frac{2}{T}\int_{0}^{T} K_x(\tau)Cos\omega_k\tau \; d\tau, \qquad k \neq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

$K_x(\tau)$ korelyasyon fonksiyonunun (5) ifadesinde τ = t′-t almakla yine t ve t′ değişkenlerine geçelim. Bunun için

$$Cos\omega_k\tau = Cos\omega_k(t' - t) = Cos\omega_k t' Cos\omega_k t + Sin\omega_k t' Sin\omega_k t$$

açılımından faydalanarak buluruz.

$$K_x(t,t') = \sum_{k=0}^{\infty} D_k Cos\omega_k t' Cos\omega_k t + D_k Sin\omega_k t' Sin\omega_k t. \qquad (9)$$

(9) açılımı $K_x(t,t')$ korelyasyon fonksiyonunun kanonik açılımıdır. Bu açılımın koordinat fonksiyonları ω_1 in tekrarları olan frekansların kosinüs ve sinüsleridir

$Cos\omega_k\tau$, $Sin\omega_k\tau$, (k=0,1,2,3,…).

Korelyasyon fonksiyonunun kanonik açılımına dayanarak tesadüfi fonksiyonun kendisinin bu koordinat fonksiyonları üzerine açılımlarını yazabiliriz. Bu halde bu tesadüfi fonksiyonun dispersionları uygun olarak D_k olur. Bu D_k lar korelyasyon fonksiyonunun kanonik açılımındaki katsayılardır. (7) formülleri ile ifade edilen D_k katsayılarının keyfi korelyasyon $K_x(\tau)$ fonksiyonları için negatif olmadıklarını gösteririz.

Böylece $\overset{0}{X}(t)$ tesadüfi fonksiyonu aşağıdaki şekilde kanonik seriye açılılır:

$$\overset{0}{X}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (U_k Cos\omega_k t + V_k Sin\omega_k t). \tag{10}$$

Bu açılımdaki V_k ve U_k katsayıları birbiri ile korelyasyon bağlantısında olmayan ve matematik gözlemleri sıfır olan aynı indisli katsayıların aynı dispersionu olan tesadüfi kemiyetlerdir:

$$D(U_k) = D(V_k) = D_k. \tag{11}$$

D_k dispersiyaları ise korelyasyon fonksiyonunun yardımı ile (7) veya (8) formülleri ile belirlenir.

Böylece (0,T) aralığında biz $\overset{0}{X}(t)$ tesadüfi fonksiyonunun $Cos\omega_k t$ ve $Sin\omega_k t$ koordinat fonksiyonları üzerine kanonik açılımını yazdık. Stasionar tesadüfi fonksiyonunun (10) şeklindeki, açılımına stasionar tesedüfi fonksiyonun spektral açılımı denir.

Stasionar tesadüfi fonksiyonların spektral teorisi onların bu spektral açılımlarına dayanır.

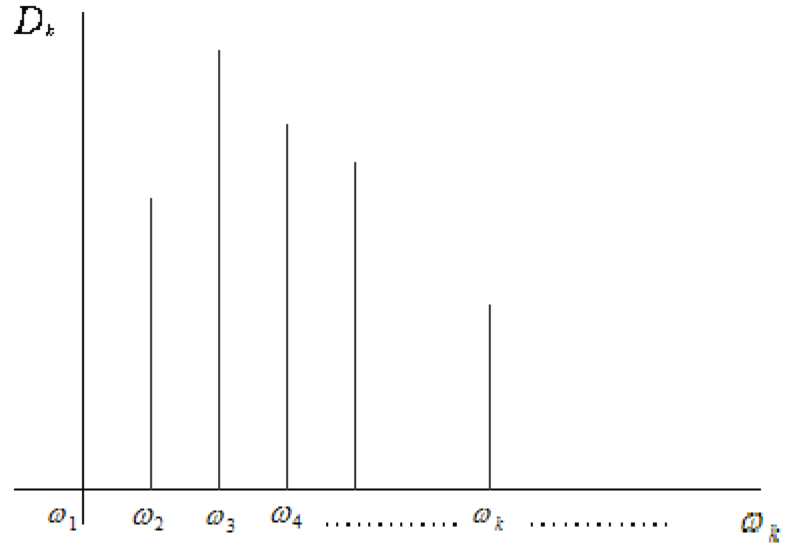
Spektral açılım stasionar tasadüfi fonksiyonun farklı farklı $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ frekanslarda harmonik titreşimler üzerine açılımını gösterir. Bu açılımda genlikler tesadüfi kemiyetlerdir. (10) spektral açılımı ile verilmiş $\overset{0}{X}(t)$ tesadüfi fonksiyonunun dispersionunu bulalım.

Korelyasyon olunmamış tesadüfi katsayılı lineer açılımlı fonksiyonların dispersionu hakkındaki teoreme esasen buluruz

$$D_x = D[\overset{0}{X}(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} (Cos^2\omega_k t + Sin^2\omega_k t) D_k = \sum_{k=0}^{\infty} D_k. \tag{12}$$

Böylece stasionar tesadüfi fonksiyonun dispersionu onun spektral açılımındaki harmoniklerinin dispersionlarının toplamına eşittir. (12) formülü gösterir ki, $\overset{0}{X}(t)$ fonksiyonunun dispersionu belli şekilde ayrı ayrı frekanslar üzerine dağılmıştır. Bazı frekanslara daha çok dispersion, bazılarına ise daha az dispersion uygun gelir.

Dispersionların frekanslar üzerine dağılımlarını grafik olarak gösterebiliriz (bak şekil 9.4)



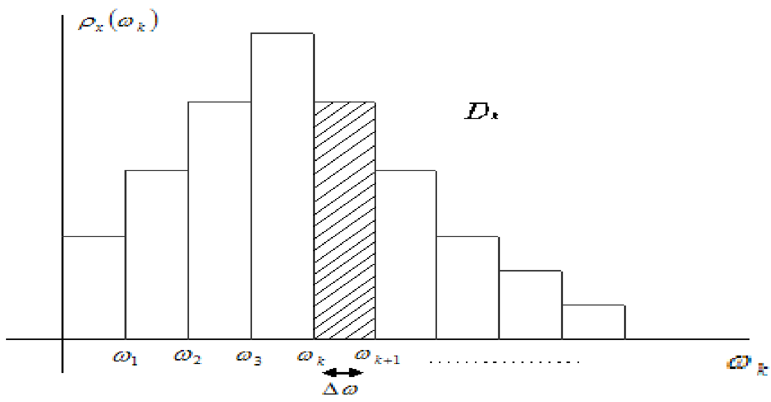
Şekil 9.4: **Dispersiyonların frekanslar üzere dağılım grafiği**

9.3.Sonsuz Aralıkta Stasionar Tesadüfi Fonksiyonun Spektral Açılımı, Stasionar Tesadüfi Fonksiyonun Spektral Yoğunluğu

Önce , stasionar tesadüfi fonksiyonun spektral yoğunluğu anlamını verelim. Bu bize sonsuz aralıkta stasionar tesadüfi fonksiyonun spektral açılımını almaya imkan verecektir. Komşu frekanslar arasındaki mesafeyi $\Delta\omega$ ile gösterelim:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T} = \omega_1 .$$

Her bir $\Delta\omega$ aralığını esas (taban) almakla alanı D_k dispersionuna eşit olan dikdörtgen yapalım (bak şekil 9.5).



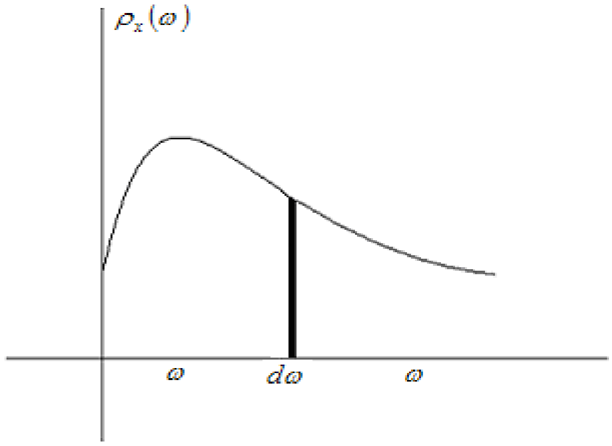
Şekil 9.5: $P_x(\omega_k)$ dağılımın grafiği

Böylece, biz istatistik dağılımın histogramını hatırlatan bir merdiven şekilli diyagram alırız. ω_k noktasının yanında yerleşen Δω bölgesindeki diyagramın yüksekliği :

$$S_x(\omega_k) = \frac{D_k}{\Delta\omega} \qquad (13)$$

formülü ile gösterilir, ve bu bölgede dispersionun ortalama yoğunluğunu ifade eder. Tüm diyagramın toplam alanı tesadüfi prosesin dispersionuna eşittir[11].

Şimdi biz eğer T aralığını sınırsız büyütsek, o zaman Δω→0 ve merdiven şekilli eğri, düzgün bir $S_x(\omega)$ eğrisine yakınsar (bak şekil 9.6).



Şekil 9.6: $S_x(\omega)$ eğrisinin grafiği

Bu eğri dispersionların sürekli spektrin frekansına göre yoğunluk dağılımını ifade eder. $S_x(\omega)$ fonksiyonuna dispersionların spektral yoğunluğu adı verilir. Kısaca, stasionar tesadüfi $\overset{0}{X}(t)$ fonksiyonunun spektral yoğunluğu da denir.

$S_x(\omega)$ eğrisi ile sınırlanmış alan $\overset{0}{X}(t)$ eğrisinin disperyasına eşit olması açıktır:

$$D_x = \int_0^\infty S_x(\omega)d\omega. \qquad (14)$$

Stasionar tesadüfi kemiyetin bu yeni karakteristiği spektral yoğunluğu stasionar prosesin frekans terkibini tasvir eder (gösterir). Ama bu karakteristik tam serbest olmayıp prosesin korelasyon fonksiyonu ile tamamen belirlenir. Diskret D_k spektrlerinin $K_x(\tau)$ korelasyon fonksiyonu ile ifade edilebildiği gibi $S_x(\omega)$ spektral yoğunluk fonksiyonu da korelasyon yoğunluk fonksiyonu ile ifade edilir. Bu bağlantı aşağıdaki formüllerle verilir :

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} K_x(\tau) Cos\,\omega\tau d\tau\,, \qquad (15)$$

ve

$$K_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) Cos\,\omega\tau t\omega\,. \qquad (16)$$

Bu formüller Fourier dönüşümleridir. Böylece, korelasyon fonksiyon ve spektral yoğunluk fonksiyonları birbirleriyle Fourier dönüşümleri ile ifade edilirler.

Pratikte $S_x(\omega)$ spektral yoğunluk fonksiyonu yerine çoğu zaman normalleştirilmiş spektral yoğunluk fonksiyonundan yararlanılır.

$$S_x(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{D_x} \qquad (17)$$

Kolaylıkla gösterebiliriz ki, normalleştirilmiş korelasyon $\rho_x(\tau)$ fonksiyonu ve normalleştirilmiş spektral yoğunluk fonksiyonları $S_x(\omega)$ aynı Fourier dönüşümleri ile bağlıdırlar:

$$\left.\begin{aligned} \rho_x(\tau) &= \int_0^{\infty} S_x(\omega) Cos\,\omega(\tau) d\omega\,, \\ S_x(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \rho_x(\tau) Cos\,\omega(\tau) d\tau\,. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Birinci eşitlikte $\tau = 0$ alsak ve $\rho_x(0) = 1$ olduğunu dikkate alırsak, buluruz:

$$\int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega = 1\,. \qquad (19)$$

Yani normalleştirilmiş spektral yoğunluk fonksiyonunun sınırladığı alan bire eşittir.

Örnek 9.1: X(t) tesadüfi fonksiyonunun normalleştirilmiş korelasyon fonksiyonu

$$\rho_x(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\tau}{\tau_0} & 0 \le \tau \le \tau_0\,, \\ 0 & \tau > \tau_0\,. \end{cases}$$

X(t) tesadüfi fonksiyonunun normalleştirilmiş spektral yoğunluğunu bulunuz.

Çözüm: $S_x(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \rho_x(\tau) Cos\omega(\tau) d\tau = \frac{2}{\pi}\int_0^{\tau_0}(1-\frac{\tau}{\tau_0}) Cos\omega(\tau) d\tau$

$$= \frac{2}{\pi \tau_0 \omega^2}(1 - Cos\omega \tau_0).$$

Örnek 9.2: Normalleştirilmiş spektral yoğunluk $S_x(\omega)$ fonksiyonu $[\omega_1, \omega_2]$ aralığında sabittir. Bu aralık dışında ise sıfıra eşittir. Tesadüfi X(t) fonksiyonunun normalleştirilmiş korelyasyon $K_x(\tau)$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $\omega_1 < \omega_2 < \omega_0$ aralığında $S_x(\omega)$ fonksiyonunun değeri

$$S_x(\omega)(\omega_2 - \omega_1) = 1$$

eşitliğinden bulunur. Buradan

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Böylece,

$$\rho_x(\tau) = \int_{\omega_1}^{\omega_1} S_x(\omega) Cos\omega(\tau) d\tau = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}\int_{\omega_1}^{\omega_2} Cos\omega(\tau) d\tau = \frac{1}{\tau(\omega_2 - \omega_1)}(Sin\omega_2\tau - Sin\omega_1\tau)$$

$$= \frac{1}{\tau(\omega_2 - \omega_1)} Cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\tau) Sin(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\tau).$$

10.MATEMATİKSEL İSTATİSTİĞİN ELEMANLARI

10.1 Matematiksel İstatistiğin Esas Anlamları

10.1.1 Matematiksel İstatistiğin Problemleri Hakkında

Olasılık teorisinde tesadüfi olayların olasılığı, tesadüfi kemiyetler ve bu kemiyetlerin sayısal karakteristikleri: Matematik beklentisi, dispersionu v.s. tanımlandı.

Her bir tesadüfi kemiyetin üstte gösterdiğimiz kanuna uygunluklarını ve sayısal karakteristiklerini belirlemek için yeterli kadar deneyler ve müşahedeler yapmak gerekir. Bu deney ve müşahedelerin sonuçları ve aynı zamanda diğer kaynaklardan alınmış istatistik bilgiler etraflıca öğrenilir, analiz edilir ve böylece ele alınan (incelenen) olay için uygun gelen kanuna uygunluklar (olasılık yoğunluk fonksiyonu v.s.) belirlenir[8].

Kütlevi tesadüfi olaylar üzerinde yapılan müşahedelerin sonuçlarını nota almak, onları gruplaştırmak ve analiz etmek metodları matematiksel istatistik ilminde belirlenir. Matematiksel istatistikte bir çok problemler öğrenilir. Bunlardan istatistik bilgilerin (malumatların) toplanması ve gruplaştırılmasını, aranan (belirlenen) dağılım fonksiyonunun ve dağılımın belli olmayan parametrelerinin değerlendirilmesini (onların yaklaşık değerlerinin bulunmasını), bir tesadüfi kemiyetin başka tesadüfi kemiyetlere bağlılığının değerlendirilmesini, belli olmayan dağılımın tipi ve tipi belli olan parametrelerinin değerleri hakkında iddiaların istatistik yoklanmasını vs. göstermek olur. Biz burada bu problemlerin çözüm metotlarını açıklayacağız.

10.1.2 Baş Yığım ve Seçme Yığım Anlamları

Farz edelim ki, sonlu veya sonsuz sayıda aynı çeşitli (aynı tip) objeler çokluğuna bakılır ve bu çokluğun elemanlarının bir X alâmetini (veya özelliğini) sağlayıp sağlamadığı incelenir. Genelde, baktığımız X alâmeti tesadüfi kemiyettir ve onun değeri bir elemandan başka elemana geçildiğinde değişebilir.

Mesela, bir fabrikada hazırlanmış mamulatın talep olunan ölçülere uygun olması alâmeti, detaların belli ölçülerinin dakikliği alâmeti vs. incelenebilir.

Baktığımız çokluğa baş yığım, çokluğa dahil olan her bir elemana ise baş yığımın elemanı denir. Baş yığıma N sayıda eleman dahil olursa N sayısına baş yığımın hacmi denir[7].

Mesela, Ankara'da bir yıl süresinde doğan çocukların sayısı, baş yığım olabilir. Bu çocukların kilosu veya onların boyu X alâmeti olarak gösterilebilir.

İstanbul'da veya Ankara'da yaşayan nüfus baş yığım olabilir.

Çokluğu oluşturan elemanların sayısı az olduğunda, onun tüm elemanlarının gösterilen X alâmetini (veya özelliğini) sağlayıp sağlamadığını yoklamak olur. Ama elemanların sayısı çok olduğundan bu alâmetin tüm elemanlar için yoklanması mümkün olmayabilir. Genelde, çokluğun elemanlarının gösterilen X alâmetini sağlayıp sağlamadığını yoklamak çok zaman büyük zorlukla bağlı olur. Ve bu iş büyük masraf talep eder. Buna göre de, çoğu zaman bakılan çokluğun (baş yığımdan) tesadüfi olarak sonlu az sayıda seçilen elemanlar incelenir ve alınan sonuca esasen genel çokluğun (baş yığımın) elemanlarının gösterilen X alâmetini sağlayıp sağlamadığı hakkında belli bir fikir söylenir.

Bu halde müşahede olunan baş yığımdan tesadüfi seçilen küçük $n < N$ hacimli çokluk seçme yığım veya kısaca seçme ile adlandırılır. Seçme yığımı oluşturan n elemanlar sayısına seçme yığma hacmi denir.

Seçme yığım farklı farklı yöntemlerle yapılabilir. Mesela, varsayalım ki, hacmi N olan baş yığımdan tesadüfi(rasgele) olarak bir eleman seçilir, araştırılır, onun X alâmetini sağlayıp sağlamadığı belirlenip not alındıktan sonra bu eleman yine baş yığıma kaydırılır. Sonra rasgele olarak başka bir eleman seçilip öğrenilir ve baş yığıma kaydırılır. Bu proses n kez tekrar edilir. Bu yöntemle yapılan seçme yığım tekrarlı seçme yığım adlanır[2].

Tekrarlı seçmede, bir eleman birkaç kez seçilebilir.

Eğer rasgele seçilip öğrenildikten sonra bir daha baş yığıma kaydırılmazsa, o zaman bu yöntemle yapılan seçmeye tekrarsız seçme yığım denir. Tekrarsız seçmede bir eleman yalnızca bir kez seçilebilir. Buna göre de tekrarsız seçmede daha çok eleman müşahide olunabilir. Tekrarsız seçmede alınan sonuçlar baş yığımı daha iyi karakterize eder.

Genellikle seçme yığım öyle olmalıdır ki o baş yığımın özelliklerini daha doğru ifade etsin. Buna seçme yığımın temsilci (nümayendeli) olması özelliği denir.

Baş yığımın tüm elemanlarının seçme yığıma düşmesi olasılığı aynı olmalıdır. Seçme yığımın tüm elemanları baş yığımdan tesadüfi seçilmelidir. Bu halde seçme yığımın nümayendelilik(reprezentaivlik) özeliği sağlanılır.

Genellikle matematiksel istatistiğin esas problemi baş yığımdan tesadüfi(rasgele) seçilen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ az sayıda seçme yığımının özelliklerine esasen baş yığımın uygun özellikleri hakkında doğru dürüst sonuçlar almaktır.

10.1.3 Basit İstatistik Yığım, İstatistik Dağılım Fonksiyonu

Farz edelim ki, her hangi bir tesadüfi kemiyeti öğrenilir ve bu kemiyetin dağılım kanunu önceden bize belli değildir. Bu tesadüfi kemiyetin olasılık dağılım fonksiyonu F(x)–in belirlenmesi bizden talep olunur. Bu amaçla X tesadüfi kemiyetini gerçekleştirebilecek bir seri, bağlı olamayan deneyler yapılır ve müşahedeler edilir. Bu deneylerin her birinde X tesadüfi kemiyeti belli değerler alır. Tesadüfi kemiyetin deneyler serisi sonucunda müşahide olunmuş değerlerin kümesi birinci (ilk) istatistik materyali (bilgileri) oluşturuyor. Bu bilgiler yığımı üzerinde işlemler yapılacak, ilmi analizler yapılacak ve anlamlı sonuçlara varılacaktır. Tesadüfi kemiyetin böyle değerler kümesine veya baş yığımına sade (basit) istatistik seri veya yığım denir[7]. Adeta sade istatistik yığımı tablo şeklinde yazırlar. Tablonun birinci satırında (veya sütununda) deneyin *i* numarası ikinci satırında ise *i* numaralı deneyde tesadüfi kemiyetin müşahide olunmuş değeri yazılır.

Örnek 10.1: β açısı uçaktan hedefe bomba atarken uçağın simetrik düzlemi ile hız vektörü arasındaki açı olsun. Bu açıya düzenleme açısı da denir. Bu proseste β tesadüfi değerler alan kemiyetdir. Bu uçaktan 20 tane bomba atılmıştır ve her bir atışta binde bir radyan hata ile β açısının değerleri ölçülmüştür. Müşahedenin sonuçları basit istatistik seri şeklinde tabloda verilmiştir:

Basit istatistik seri tablosu

i	β_i	i	β_i	i	β_i
1	-20	8	-30	15	-10
2	-60	9	120	16	20
3	-10	10	-100	17	30
4	30	11	-80	18	-80
5	60	12	20	19	60
6	70	13	40	20	70
7	-10	14	-60		

Basit istatistik seri istatistik materyalin(bilgilerin) ilkin şeklidir. Onun üzerinde farklı farklı yöntemlerle işlemler yapılabilir. Bunlardan biri mesela basit istatistik seri esasında tesadüfi kemiyetin istatistik dağılım fonksiyonu $F^*(x)$ - in yazılmasıdır.

Verilmiş istatistik materyalde(bilgilerde) X <x olayının frekansına tesadüfi X kemiyetine istatistik dağılım fonksiyonu denir ve aşağıdaki gibi işaret edilir:

$$F^*(x) = P^*(X < x) \qquad (3.1)$$

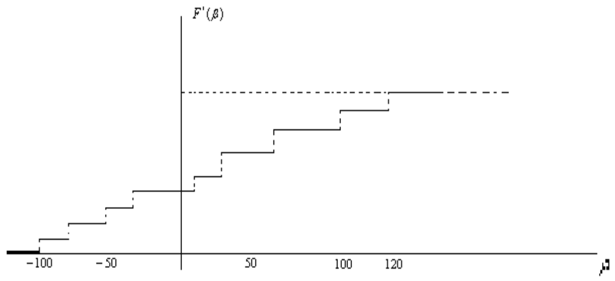
Burada $P^*(X < x)$, $X < x$ olayını istatistik bilgiler yığımındaki frekansı, mesela N deneyler dizisinde X tesadüfi kemiyetinin x değerinden küçük değerlerinin sayısı M ise o zaman $P^*(X < x) = \frac{M}{N}$, $F^*(x)$ ise X tesadüfi kemiyetinin istatistik dağılım fonksiyonudur.

Böylece, verilmiş x'de istatistik dağılım fonksiyonunun değeri $F^*(x)$'i bulmak için X tesadüfi kemiyetinin x'den küçük değerler aldığı deneylerin sayısı M'i bulup genel deneyler sayısı N'e bölmek yeterlidir.

Örnek 10.2: Önceki örnekte değerleri verilmiş β tesadüfi kemiyetinin istatistik dağılım fonksiyonunu yazalım.

Çözüm: β' nın müşahide olunan en küçük değeri -100' e eşittir ve buna göre de $F^*(-100) = 0$. -100 değeri yalnız bir kez müşahide olunmuştur. Buna göre de -100 değerinin frekansı $\frac{M}{N} = \frac{1}{20}$ olur. Böylece, $F^*(\beta)$ fonksiyonunun β = -100 noktasında $\frac{1}{20}$ değerine eşit olan sıçrayışı vardır. [-100,-80] aralığında $F^*(\beta)$ fonksiyonunun değeri $\frac{1}{20}$ olur. β = -80 noktasında $F^*(\beta)$ fonksiyonunun değeri $\frac{2}{20}$ olan sıçrayış vardır. Çünkü, -80 değeri iki kez müşahide olunmuştur v.s.

Bu tesadüfi kemiyetin istatistik dağılım fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekilde olur:



Şekil 10.1: $F^*(\beta)$ istatistik dağılım fonksiyonunun grafiği

Olayın gerçekleşme frekansı onun olasılığının yaklaşık değeri olduğu gibi ve çok hallerda deneyler sayısı çok büyük olduğunda olayın olasılığına yaklaştığı gibi $F^*(x)$ istatistik dağılım fonksiyonu tesadüfi X kemiyetinin F(x) dağılım fonksiyonunun yaklaşması gibi götürülebilir ve deneyler sayısı N sonsuz büyüdüğünde $F^*(x)$ istatistik dağılım fonksiyonu tesadüfi kemiyetin teorik dağılım fonksiyonu F(x)' e yaklaşır. İstatistik dağılım fonksiyonu $F^*(x)$ teorik dağılım fonksiyonu F(x)' in özelliklerini sağlar:

1. $F^*(x)$ fonksiyonu azalmayan fonksiyondur.
2. $F^*(x)$ fonksiyonunun değerleri [0,1] aralığında bulunur, yani $0 \le F^*(x) \le 1$.
3. x_1 değeri X tesadüfi kemiyetinin en küçük değeri ise, o zaman $X < x_1$ için $F^*(x) = P^*(X < x_1) = 0$,

x_k değeri X' in en büyük değeri ise, o zaman $x > x_k$ için;

$F^*(x) = P^*(x_k < X) = 1$

olur.

Hatırlatmak gerektir ki, $F^*(x)$, $X < x$ olayının olasılığını değil, bu olayın frekansını gösterir.

Prensipçe, istatistik dağılım fonksiyonu $F^*(x)$' i yazdıktan sonra tesadüfi kemiyetin deneyden alınan değerlerinin tasvir edilme problemi bitmiş, çözülmüş hesap edilebilir.

Ama deneyler sayısı çok büyük olduğunda $F^*(x)$ üstte gösterilen yöntemle yazılması çok zorlaşır. Böyle hallerde istatistik yığımdan yani baş yığımdan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tesadüfi seçme yığım ayrılır. Seçilen bu x_k değerlerine variantlar, bu değerlerin artan ardışık şeklinde

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$$

yazılışına ise variasiya serisi(dizisi) denir.

$x_{(1)} = \min\{x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}\}$, $x_{(n)} = \max\{x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}\}$.

Bulunmuş bu variasiya dizisi için $F_n^*(x)$ istatistik dağılım fonksiyonuna emprik dağılım fonksiyonu denir ve $F_n^*(x)$' le işaret edilir.

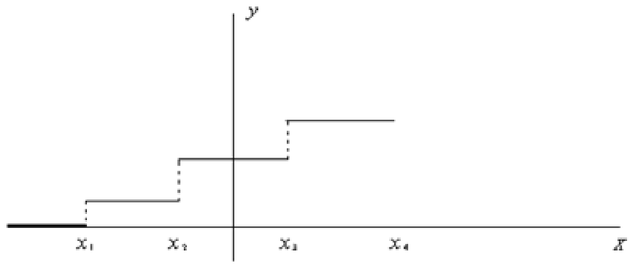
Eğer tesadüfi seçmeni teşkil eden $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$ sayılarının x' den küçük olanlarının sayısını $\mu_n(x)$ ile işaret edersek o zaman

$$F_n^*(x) = \frac{\mu_n(x)}{n} \qquad (3.2)$$

formülünü almış oluruz.

Seçmenin emprik dağılım fonksiyonunun grafiğini çizelim. $y = F_n^*(x)$ fonksiyonu seçmenin iki komşu elemanları arasında $\frac{1}{n}$' in katına(misillemesine) eşit olur, yani $\frac{m}{n}$ şeklinde sabit değerler alır. Seçmenin x_k noktaları bu fonksiyonun sonlu sıçrayışlı süreksiz noktalarıdır ve bu noktalarda onun sıçrayışı $\frac{1}{n}$ (veya m tane x_k noktası çakıştığında $\frac{m}{n}$ sayısına eşittir.

Bu onu gösteriyor ki, $F_n^*(x)$ fonksiyonunun grafiği de $F^*(x)$' in grafiği gibi merdiven şekillidir (bak şekil 10.1 ve şekil 10.2):



Şekil 10.2: $F_n^*(x)$ fonksiyonunun grafiği

Bazı hallerde daha açık ve daha kolaylık için tesadüfi kemiyetin dağılım fonksiyonu F(x) yerine tesadüfi kemiyetin dağılım fonksiyonu f(x)' nunu bulurlar.

10.1.4 İstatistik Seri(Dizi). Histogramma

Önceki paragrafta gösterdik ki deneyler sonucunda, veya ölçmeler sonucunda tesadüfi kemiyetin müşahide olunmuş değerleri ilkin basit material olup iki satırdan oluşan bir tablo da yerleştirilir. Birinci satırda deneylerin(ölçmelerin) numaraları *i*, ikinci satırda ise ölçülen x tesadüfi kemiyetinin *i*-inci ölçmedeki aldığı x_i değeri yerleştirilir.

i	1	2	3	…	i	…	n
x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	x_n

Böyle tabloya basit istatistik seri(veya dizi) adını verdik.

Deneyler(veya ölçmeler) sayısı çok büyük olduğunda bu tabloyu analiz etmek, incelemek çok zorluklar türetir. Buna göre de elde edilmiş basit istatistik seri esasında gruplaştırma yapılır. Gruplaştırma aşağıdaki şekilde yapılır.

x tesadüfi kemiyeti için alınmış değerlerin tüm aralığı eşit kısmı $(a_0,a_1),(a_1,a_2),\ldots,(a_{\lambda-1},a_\lambda)$ aralıklarına bölünür ve (a_{k-1},a_k) aralığında x tesadüfi kemiyetinin aldığı değerler sayısını m_k ile işaret edelim. Aralığın sonuna düşen değerleri ise ya sol yada sağ aralığa ait ederler(bazen bu aralığın sonuna düşen değerlerin sayısını yarıya bölüp sağ ve sol aralıkların her ikisine de ait ederler.) Bu zaman m_k sayısı $[a_{k-1},a_k]$ aralığında x kemiyetinin değerleri frekansını,

$$P_k^* = \frac{m_k}{n} \qquad (4.1)$$

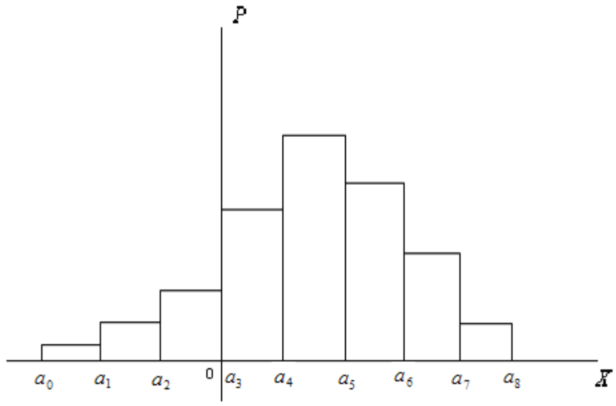
sayısı ise x kemiyetinin $[q_{k-1},q_k]$ aralığına uygun değerlerin nispi frekansını gösteriyor. Aşağıdaki eşitliğin sağlandığı açıktır:

$$\sum_{k=1}^{\lambda} P_k^* = 1. \qquad (4.2)$$

Böyle işlemler sonucuna esaslanarak üç satırdan oluşan bir tablo yazılır. Bu tablonun birinci satırında a_k sayılarının artması yönünde $[a_{k-1},a_k]$ aralıkları yerleştirilir, ikinci satırında bu aralıklara uygun m_k frekansları, üçüncü satırında uygun olarak $P_k^* = \frac{m_k}{n}$ nispi frekansları yerleştirilir:

Aralıklar	(a_0,q_1)	(a_1,a_2)	…	(a_{k-1},a_k)	…	$(a_{\lambda-1},a_\lambda)$
m_k	m_1	m_{1_2}	…	m_k	…	m_λ
P_k^*	P_1^*	P_2^*	…	P_k^*	…	P_λ^*

Bu işlem gruplaştırılmalıdır. Gruplaştırma işlemi geometrik olarak da gösterilir. Bu aşağıdaki gibi yapılır. 0X ekseni üzerinde $a_0, a_1, a_2, ..., a_\lambda$ noktalarını işaretlerler. Her bir $[a_{k-1}, a_k]$ parçasında, bu parça tabana götürülmekle alanı P_k^* sayısına eşit olan dik dörtgen yapılır. Sonuçta alına figüre(şekle) histogramma denir (bak şekil 10.3).



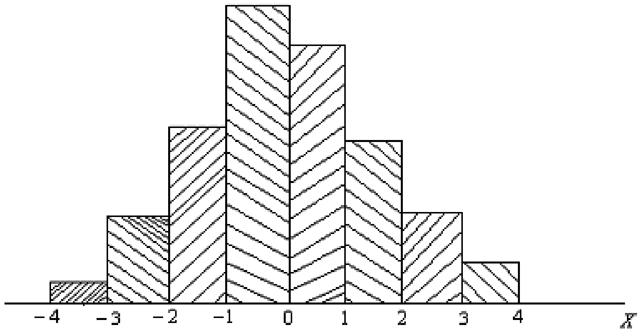
Şekil 10.3: Histogramın grafiği

Örnek 10.3: Yer üzerinde hedefe uçaktan ateş etme zamanı nişanlamanın hatasının 500 kez ölçülmesi yapılmıştır. Ölçmelerin sonuçları radyanın binde biri kadar hata ile aşağıdaki istatistik seri de tablo şeklinde verilmiştir:

I_i aralık	(-4;-3)	(-3;-2)	(-2;-1)	(-1;0)	(0;1)	(1;2)	(2;3)	(3;4)
m_i	6	25	72	133	120	80	46	10
P_i^*	0,012	0,050	0,144	0,266	0,240	0,176	0,092	0,020

Burada I_i ile nişanlamaların hatalarının değerlerinin aralıkları işaret olunmuş, m_i bu aralıktaki müşehideler sayısı(hataların değerler sayısı), $P_i^* = \frac{m_i}{n}$ uygun nispi frekanslardır.

Bu örneğin, yani nişanlamanın histogramını yapsak aşağıdaki gibi alınır (bak şekil 10.4).



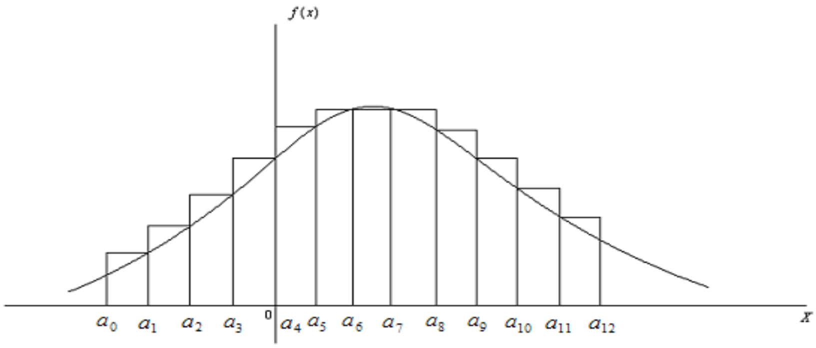
Şekil 10.4: Ele alınmış Örnek 10.3 ün histogramının şekli

Histogramın yapılma yönteminden görülüyor ki, onun tam alanı birime eşittir.

Eğer biz deneyler sayısını çoğaltsak(artırsak) ve (a_{k-1}, a_k) aralıklarının uzunluğunu(ölçüsünü) gittikçe küçültsek tesadüfi kemiyetin histogramı bir eğriye y = f(x) eğrisine yaklaşır ki, bu eğrinin 0X ekseni ile arasındaki alan 1' e eşit olur. Bu eğri x tesadüfi kemiyetinin olasılık yoğunluk dağılımıdır, yani

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < \bar{x} < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

fonksiyonudur (bak şekil 10.5).



Şekil 10.5: f(x) fonksiyonunun grafiği

Gruplaştırma ve histogramma esasında yaklaşık olarak daha az hata ile istatistik dağılım fonksiyonu $F^*(x)$-i bulmak olur. Pratikte istatistik dağılım fonksiyonunu bulmak için birkaç nokta götürürler. Bu noktalar olarak istatistik seride iştirak eden (a_{k-1}, a_k) aralıklarının sınır noktaları olan $a_0, a_1, ..., a_\lambda$ noktalarını götürmek daha elverişli(faydalı) olur. O zaman

$$
\left.
\begin{aligned}
&F^*(a_0) = 0\,,\\
&F^*(a_1) = P_1^*\,,\\
&F^*(a_2) = P_1^* + P_2^*\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&F^*(a_k) = P_1^* + P_2^* + \dots + P_k^*\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&F^*(a_\lambda) = P_1^* + P_2^* + \dots + P_\lambda^* = 1
\end{aligned}
\right\} \qquad (4.3)
$$

xoy düzleminde (a_k , $F^*(a_k)$) noktalarını çizip bu noktaları kırık çizgi veya bir düzenli eğri ile birleştirsek alınan eğri istatistik dağılım fonksiyonunun yaklaşık grafiği olur.

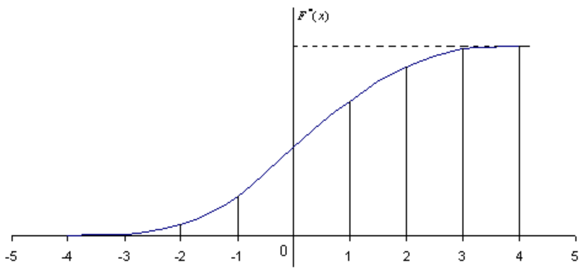
Örnek 10.4: Örnek1 de bakılan nişanlamanın hatalarının istatistik serisine esasen yaklaşık olarak istatistik dağılım fonksiyonunu bulun.

Çözüm: (4.3) formülünü esasen, alırız:

$F^*(-4) = 0$; $F^*(-3) = 0{,}012$; $F^*(-2) = 0{,}012+0{,}050 = 0{,}062$; $F^*(-1) = 0{,}206$;

$F^*(0) = 0{,}472$; $F^*(1) = 0{,}712$; $F^*(2) = 0{,}888$; $F^*(3) = 0{,}980$; $F^*(4) = 1{,}000$

Böylece bu bulunanlara esasen istatistik dağılım fonksiyonunun grafiği Şekil 10.6 daki gibi olur.



Şekil 10.6: İstatistik dağılım fonksiyonunun grafiği

İstatistik materyal üzerinde sonraki işlemler aşağıdaki gibi yapılır. (a_{k-1}, a_k) aralığının orta noktası $\tilde{x}_k$ ile işaret edilir ve bu değer ölçmenin (müşahidenin) m_k -kez tekrarlanan değeri gibi götürülüyor. Bundan sonra gruplaştırmayı veren tablo yerine aşağıdaki tablo yapılır.

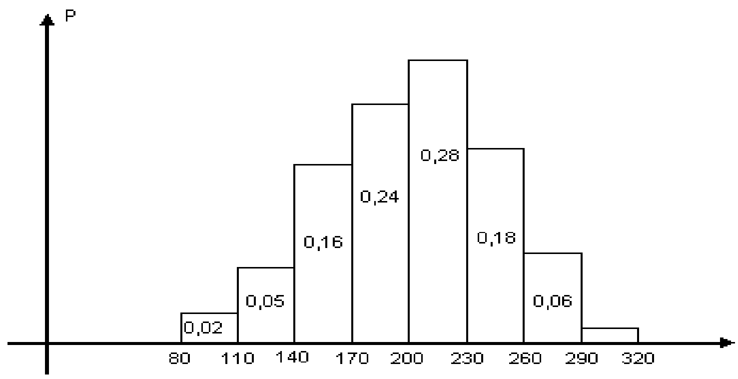
$\tilde{x}_k$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	...	$\tilde{x}_k$	...	$\tilde{x}_\lambda$
m_k	m_1	m_2	m_3	...	m_k	...	m_λ
P_k^*	P_1^*	P_2^*	P_3^*	...	P_k^*	...	P_λ^*
						...	

Bu işlem öyle hesaptan yapılmıştır ki, (a_{k-1}, a_k) aralığındaki tüm değerler apsisler üzere birbirine yakındır ve buna göre de bunların her birini x_k^* aralığın orta noktasına eşit olduğunu hesap ederler.

Örnek 10.5: Hedefin 100 kez uzaklığı belirlenmesindeki sonuçlara esasen aşağıdaki gruplaştırma yapılmıştır.

Aralıklar	80-110	110-140	140-170	170-200	200-230	230-260	260-290	290-320
m_k	2	5	16	24	28	18	6	1
P_k^*	0,02	0,05	1,16	0,24	0,28	0,18	0,06	0,01

Bu tablo esasında aşağıdaki histogramma çekilebilir:



Şekil 10.7: Histogramın grafiği

Sonra ise üstte gösterilmiş yöntem ile esasında aşağıdaki tabloyu yaparız:

$\tilde{x}_k$	95	125	155	185	215	245	275	305
m_k	2	5	16	24	28	18	6	1
P_k^*	0,02	0,05	0,16	0,24	0,28	0,18	0,06	0,01

Örnek 10.6: Aşağıdaki tabloya göre emprik dağılım fonksiyonunu bulunuz.

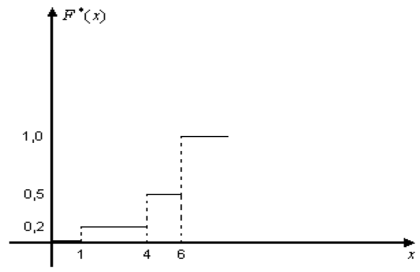
Tablo:

x_k	1	4	6
P_k^*	10	15	25

Çözüm: Önce seçme yığımın hacmini bulalım:

n = 10 + 15 + 25 = 50.

Bu fonksiyonun grafiği aşağıda gösterilmiştir:



Şekil 10.8: $F^*(x)$ fonksiyonunun grafiği

Bu tablo esasında gruplaştırma yapın ve dağılım yoğunluğu $f^*(x)$ histogrammasını çiziniz.

Variantın en küçük değeri bir dir:

$$x_1 = 1$$

$x < x_1$ olayının nispi frekansı sıfır olduğundan

$$F^*(x_1) = P^*(x < x_1) = 0.$$

$x_2 = 4$ değerinde $x < 4$ olayının nispi frekansı $\frac{10}{50}$ olduğundan

$$F^*(x_2) = P^*(x < 4) = \frac{10}{50} = 0,2$$

olur. Böylece $1 \le x \le 4$ olduğunda $F^*(x) = 0,2$, $x < 6$ götürsek x' in 6' dan küçük değerleri iki tanedir :1 ve 4. X değişkeni 1 değerini 10 kez, 4 değerini ise 15 kez aldığından

$$F^*(x_3) = F^*(6) = P_1^* + P_2^* = \frac{10}{50} + \frac{15}{50} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}.$$

Böylece, $4 < x < 6$ olduğunda $F^*(x) = 0{,}5$. x' in en büyük değeri $x_3 = 6$ olduğundan $x > 6$ olduğundan $F(x) = 1$ olur.

Böylece,

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ 0{,}2 & , \quad 1 < x < 4 \\ & \\ 0{,}5 & , \quad 4 < x < 6 \\ 1 & , \quad x > 6 \end{cases}$$

10.1.5 İstatistik Dağılımın Sayısal Karakteristikaleri

Biz tesadüfi kemiyetlerin sayısal karakteristikalarını, matematik gözlemesini, dispersiyasasını, orta kuadratik sapmasını ve farklı mertebeden momentlerini tanımladık. Tesadüfi kemiyetin bu sayısal karakteristikaları olasılık teorisinde esas rol oynar. İstatistik dağılımlar içinde analojik sayısal karakteristikalar tanımlanır. Tesadüfi x kemiyetinin her bir sayısal karakteristikasının istatistik analojisi vardır.

Farz edelim ki, her hangi bir x tesadüfi kemiyetini müşahide ettiğimizde(veya ölçme yaptığımızda) x tesadüfi kemiyeti için aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n .$$

Bu değerlere biz X tesadüfi kemiyetinin özel değerleri gibi bakabiliriz. Böylece, x_i tesadüfi x kemiyetinin i' inci müşahededeki(deneydeki) değeri, n ise müşahidelerin(deneylerin) sayısıdır.

Belirlenen x tesadüfi kemiyetinin münasip değeri olarak alınmış $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ değerlerini sayısal ortalaması(hesabi ortalaması) gütürülüyor:

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (1)$$

m_x^* kemiyetine istatistik ortalama denilir. İstatistik ortalamanın matematik gözleme ile bağlantısını göstermek için, farz edelim ki, x tesadüfi kemiyeti x_1 değerini n_1 kez, x_2 değerini n_2 kez, x_3 değerini ise n_3 kez v.s. almıştır. O zaman

$$\mathrm{m}_x^* = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = x_1\frac{n_1}{n} + x_2\frac{n_2}{n} + ... + x_\upsilon\frac{n_\upsilon}{n} = x_1P_1^* + x_2P_2^* + ... + x_\upsilon P_\upsilon^* \qquad (2)$$

(2) formülünden tesadüfi kemiyetin istatistik ortasının yaklaşık olarak onun matematik gözlemesine eşit olduğunu görmek olur. Böylece

$$\mathrm{m}_x^* = \mathrm{m}_x$$

Örnek 10.7: 10 yaşında 100 kız çocuğun çekisi aşağıdaki tabloda verilmiştir:

$x_{(kq)}$	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
m	2	1	6	8	20	21	18	17	3	4	2	3

10 yaşında kız çocuğu için münasip çekini bulalım:

$$\mathrm{m}_x^* = \frac{19.2 + 20.1 + 21.6 + 22.8 + ... + 30.3}{100} = 24{,}26 \text{ kg.}$$

Eğer deneyler sayısı n çok büyük olursa o zaman istatistik ortanın (1) formülü ile hesaplanması zorlaşır. Buna göre de istatistik artanı hesaplamak için üstteki paragrafın sonunda verilmiş aşağıdaki tablodan istifade etmek faydalıdır:

$\overline{x_k}$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	...	$\overline{x_k}$	...	$\overline{x_\lambda}$
m_k	m_1	m_2	...	m_k	...	m_λ
P_k^*	P_1^*	P_2^*	...	P_k^*	...	P_λ^*

Burada $\overline{x_k}$ değeri $(\mathrm{a}_{k-1}, \mathrm{a}_k)$ aralığının ortasıdır. Böylece tesadüfi X kemiyetinin istatistik orta değeri için aşağıdaki formülü alırız.

$$\mathrm{m}_x^* = \frac{\overline{x_1}m_1 + \overline{x_2}m \ + ... + \overline{x_\lambda}m_\lambda}{n} \quad ,$$

veya

$$\mathrm{m}_x^* = \sum_{k=1}^{\lambda} \overline{x_k}P_k^* \qquad . \qquad (3)$$

İstatistik orta için aldığımız bu (3) değerin orta çekileştirilmiş(ağırlaştırılmış) değer denir. n → ∞ halinde istatistik ortanın matematik gözlemeye yaklaştığını göstermek olur.

Uygun olarak istatistik dispersiya aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$\mathrm{D}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x^*)^2}{n}. \qquad (4)$$

Bu kemiyet X tesadüfi kemiyetinin münasip değeri olan istatistik ortadan ssapma derecesini karakterize eder. İstatistik kuadratik sapma ise uygun olarak $\sigma^* = \sqrt{D^*}$ formülü ile belirlenir.

Deneyler sayısı n çok büyük olduğunda ise istatistik dispersiya üstteki tablo esasında aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$\mathrm{D}^* = \sum_{k=1}^{\lambda}(\overline{x_k} - m_x^*)^2 P_k^* . \qquad (5)$$

Örnek 10.8: Üstteki paragrafta örnek:3' ün sonunda verilmiş tablo esasında istatistik orta ve istatistik dispersiyanın değerlerini hesaplayın.

Çözüm:

$m_x^* = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\overline{x_i}}{n} = \sum_{k=1}^{\lambda}\overline{x_k}P_k^* =$ 95.0,02 + 125.0,05 + 155.0,16 + 185.0,24 + 215.0,28 + 245.0,18 + 275.0,06 + 305.0,01 = 201,20 ,

$D^*\left[\overline{x}\right] = \dfrac{\sum_{k=1}^{\lambda}(\overline{x_k} - m_k^*)^2}{n} = \sum_{k=1}^{\lambda}(\overline{x_k} - m_x^*)^2 P_k^* = \sum_{k=1}^{\lambda}\overline{x}_k^{2} P_k^* - (m_k^*)^2 =$ 95^2 .0,02 + 125^2 .0,05 + 155^2 .0,16 + 185^2 .0,24 + 215^2 .0,28 + 245^2 .0,18 + 275^2 .0,06 + 305^2 .0,01 – $(201,20)^2$ = 1753,56 .

Dikkat edelim ki, istatistik dispersiyayı (4) formülü yerine aşağıdaki formülle hesaplamak daha faydalıdır:

$$\mathrm{D}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x^*)^2}{n-1}. \qquad (6)$$

Bu notun ispatı üzerinde durmayacağız.(6) formülünün sağ yanı (4) formülünün sağ yanından $\dfrac{n}{n-1}$ çarpımı ile farklanır. Bu çarpım genelde 1'e çok yakın olduğundan pratik problemlerde bunları birbirine eşit götürebiliriz.

Tesadüfi kemiyetin r mertebeli istatistik momenti(veya istatistik başlangıcı)

$$q_r = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^r \qquad (7)$$

formülü ile tanımlanır. Buradan

$$q_1 = m_x^*$$

olduğu açıktır.

Tesadüfi kemiyetin r mertebeli merkezi istatistik momenti ise

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - m_x^*)^r$$

formülü ile tanımlanır. Burada r = 2 olduğunda

$$m_2 = D^*[\overline{x}]$$

olduğu açıktır.

10.1.6 Dağılım Kanununun Parametrelerinin Belirlenmesi Lyapunov Teoremi

Farz edelim ki, $\overline{x}$ tesadüfi kemiyettir. Mesela, a ölçülen kemiyetinin ölçme zamanı sonuçlarıdır. Böylece, $\overline{x}$ ölçmenin sonucudur. δ ölçmenin hatası olsun. O zaman bu kemiyetler aşağıdaki bağıntı vardır:

$$\delta = \overline{x} - a \qquad , \qquad \overline{x} = a + \delta \qquad (1)$$

Çok sayıda deneyler ve müşahideler gösterir ki, sistematik hataları kaldırdıktan, yani her ölçmede sabit olan hataları kaldırdığımızdan sonra dağılım merkezi koordinat başlangıcında olan normal dağılım kanununa tabe olur. Bunu teorik olarak esaslandırmak olur.

Bundan ilave, eğer herhangi bir tesadüfi kemiyet çok sayıda tesadüfi kemiyetlerin toplamından oluşursa, o zaman bu tesadüfi kemiyet birkaç sınırlama koşulu altında normal dağılım kanununa tabii olur. Bu iddia Lyapunov' a mahsus olan merkezi limit teoremi ile verilir. Bu teoremi biz bir kadar sadeleştirilmiş şekilde verelim.

Teorem 10.1: Eğer bağımsız $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}$ tesadüfi kemiyetlerinin her birinci matematik gözlemesi a olan (genelliği bozmadan farz edelim ki a=0) dispersiyası ise σ^2 olan aynı bir dağılım kanununa sahiptirler, o zaman n sayısı sınırsız artığında

$$\overline{y_n} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\overline{x_i}$$

toplamının dağılım kanunu normal dağılım kanunundan çok az farklanır. Burada $\overline{y_n}$ öyle normalleştirilmiştir ki, $M[\overline{y_n}] = 0$ ve $D[\overline{y_n}] = 1$ olur.

Lyapunov teoreminin pratik önemi aşağıdakinden ibarettir. Farz edelim ki, bir tesadüfi kemiyet ele alınmıştır. Mesela, bu tesadüfi kemiyet her hangi kemiyetin verilmiş değerden sapması (meyli) olabilir. Bu sapma(bu meyil) bir çok faktörlerin (amillerin) etkisi altında oluşmuştur. Bu amiller sapmaya öz kendi toplamını vermiştir. Mesela ateş edildiği zaman, güllenin hedeften sapması bir çok amillere bağlıdır. Hedefin uzaklığının belirlenmesi hatasına, nişan alma hatasına, güllenin hızlanması hatasına v.s. bağlıdır. Bize tesadüfi kemiyete etki gösteren tüm amiller ve onların dağılım fonksiyonları da belli olmayabilir. Ama Lyapunov teoreminden alınır ki, genel sapma tesadüfi kemiyetinin dağılım kanunu normal dağılım kanunudur.

Lyapunov teoreminden alınır ki, eğer

$$\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$$

kemiyetleri herhangi bir kemiyetlerin ölçmeleri (müşahedeleri) sonuçları ise ve bunların her biri tesadüfi kemiyet ise bunların aritmetik ortalaması

$$\bar{x} = \frac{\overline{x_1} + \overline{x_2} + \ldots + \overline{x_n}}{n}$$

bir tesadüfi kemiyet olmakla n' in büyük değerlerinde normal dağılıma çok yakın bir dağılım kanununa sahip olur. Burada $\overline{x_i}$ tesadüfi kemiyetlerinin her birinin aynı dağılım kanununa sahip olması farz edilir.

Teoremin birkaç ilave koşullarda toplamların dağılım kanunu aynı olmadığı hallerde de doğru olduğu ispatlanır. Ele alınan pratik problemlerde bu koşullar adeta sağlanır. Deneyler gösteriyor ki, terimlerin sayısı 10 olduğunda toplamın normal dağılım kanununa tabii olmasını kabullenmek oluyor.

$\bar{a}$ ve $\bar{\sigma}^2$ ile matematik gözlemlerinin ve dispersiyanın yaklaşık değerlerini işaret edelim. O zamanda $\bar{\bar{\delta}}$ ve $\bar{x}$ tesadüfi kemiyetlerinin yaklaşık dağılım kanunlarını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\bar{f}(\delta) = \frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2\bar{\sigma}^2}}, \qquad (2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{a})^2}{2\bar{\sigma}^2}}. \qquad (3)$$

Burada $\overline{a}$ ve $\overline{\sigma}^2$ parametreleri deney sonuçlarının (müşahide değerlerinin) yardımı ile aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\overline{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i , \tag{4}$$

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{a})^2 . \tag{5}$$

Örnek10.9: 1.4' de örnek:3' de alınmış tablo ve bu tablo esasında §.5'de örneğin sonuçlarına esasen tesadüfi kemiyetin dağılım kanununun ifadesini yazınız.

Çözüm: 1.5'de gösterilmiş örnekteki hesaplamalar esasında buluruz:

$$\overline{a} = m_x^* = 201,$$

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1}D^* = \frac{100}{99}.1754 = 1771,$$

$$\overline{\sigma} = \sqrt{1771} = 41.$$

Parametrelerin bu değerlerini (3) formülünde nazara alsak buluruz:

$$f(x) = \frac{1}{41\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-201)^2}{2.1771}} .$$

Not: Eğer biz herhangi bir x tesadüfi kemiyeti için istatistik dağılımın fonksiyonunu yazmışsak verilmiş x tesadüfi kemiyetinin normal dağılım kanununa sahip olup olmadığını belirlemek için aşağıdaki yöntemden istifade olunur.

Farz edelim ki, x tesadüfi kemiyeti için aşağıdaki değerleri almışız

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n .$$

Sonra ise merkezleştirilmiş tesadüfi kemiyetin aşağıdaki değerleri belirlenmiştir:

$$y_1, y_2, y_3, ..., y_n$$

y_i değerlerinin mutlak değerlerinin artması yönünde bu değerleri sıralarlar. Eğer n tek ise o zaman orta sapma veya orta hata E olarak $|y_{ort}|$ değerini $\frac{n-1}{2}+1$ yerde duran değere götürülür. n çift sayı olduğunda ise $\frac{n}{2}$ ve $\frac{n}{2}+1$ yerinde duran değerlerinin ortalaması götürülür.

Sonra ise ortalama aritmetik hatayı aşağıdaki formülle tanımlarız:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n}|y_i|}{n} . \tag{6}$$

(5) formülü ile orta kuadratik formülü buluruz:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \qquad (7)$$

Sonra ise

$$\frac{E_{st}}{d} \text{ ve } \frac{E_{st}}{\bar{\sigma}}$$

orantılarını belirleriz.

Normal kanuna tabii olan tesadüfi kemiyetler için $\frac{E}{d}$ ve $\frac{E}{\sigma}$ orantıları 0,8453 ve 0,6745 olur. Eğer $\frac{E_{st}}{d}$ ve $\frac{E_{st}}{\bar{\sigma}}$, 0,8453 ve 0,6745 den %10 tertibinde farklanırsa, o zaman şartı olarak tesadüfi y kemiyeti normal kanuna tabidir denir.

11.MATEMATİK İSTATİSTİKTE DEĞERLENDİRMELER

11.1. Baş Yığım Parametrelerinin Değerlendirilmesi

Farz edelim ki, baktığımız x tesadüfi kemiyetinin (ve baş yığımın) dağılım fonksiyonu belli değildir. Bu fonksiyonu bulmak için bağlı olmayan n tane deney yapılmıştır ve sonuçda x tesadüfi kemiyetinin $x_1, x_2,..., x_n$ değerleri bulunmuştur (baş yığım verildiğinde ise baş yığımdan rasgele olarak $x_1, x_2,..., x_n$ seçme yığım ayırırız).

Bulunmuş $x_1, x_2,...,x_n$ değerleri esasında x tesadüfi kemiyetinin dağılım fonksiyonu F(x) belirlemek ola bilir mi sorusu karşımıza çıkmaktadır. Elbette (muhakkak) müşahide sonucunda alınmış $x_1, x_2,..., x_n$ değerlerine esasen aranan F(x) dağılım fonksiyonu hakkında belli bir fikir söylemek için bu müşahedelerin sayısı (seçmenin hacmin n sayısı) çok büyük olmalıdır. Pratikte ise adeta müşahidelerin sayısı sınırlı olup 10, 20 veya daha az sayıda olur. Böyle hallerde bu değerlere esasen dağılım fonksiyonu hakkında esaslı fikir söylemek mümkün olmuyor.

Ama bir çok durumda dağılım fonksiyonu F(x) belli olmasa da, onun hangi şekilde fonksiyon olduğu veya belli bir sayıda parametrelere bağlı olan fonksiyonlar sınıfına dahil olduğu belli olur:

$F(x)= F(x,\theta_1, \theta_2,..., \theta_n)$.

Böyle hallerde, belli olmayan F(x) dağılım fonksiyonunun bulunması problemi bu fonksiyonun $\theta_1, \theta_2,..., \theta_n$ parametrelerinin $x_1, x_2,..., x_n$ seçme yığımın değerlerine esasen uygun şekilde seçilmesine getirilir. Elbette (Muhakkak) bu yöntemle $\theta_1,..., \theta_n$ parametrelerinin yalnız yaklaşık değerlerinin bulunmasından bahsedebiliriz.

Parametrelerin yaklaşık olarak değerlerinin bulunmasına bu parametrelerin değerlendirilmesi denir[7].

Matematiksel istatistiğin bu önemli problemini bir parametreye bağlı dağılım fonksiyonu halinde ele alalım. farz edelim ki, x tesadüfi kemiyetinin bağlı olmayan deneyler sonucunda,

$$x_1, x_2,..., x_n$$

değerleri alınmıştır (veya baş yığımdan seçme $x_1, x_2,..., x_n$ yığımı alınmıştır). Farz edelim ki, bu tesadüfi kemiyetin dağılım fonksiyonu bir θ parametresine bağlı bir F(x,θ) fonksiyonlar sınıfından olması bize bellidir. θ parametresinin $x_1, x_2,..., x_n$ değerlerine esasen değerlendirilmesi istenir. Yani θ parametresinin $x_1, x_2, ..., x_n$ değerlerine bağlı olan bir yaklaşık $\theta_n^*(x_1,..., x_n)$ değerinin bulunması talep edilir.

Seçme yığıma bağlı olan her bir

$$\theta_n^* = \theta_n^*(x_1, x_2, ..., x_n)$$

fonksiyonuna istatistik denir. Her bir θ_n^* istatistiği dağılım fonksiyonunun belli olmayan parametrelerinin değerlendirilmesi adlanır.

Böyle bir soru karşıya çıkar. Hangi koşulları sağlayan $\theta_n^*(x_1, ..., x_n)$ fonksiyonuna θ parametresi için en iyi değerlendirme hesap edilir.

Bu sorunu inceleyelim. Farz edelim ki, x_1, x_2,..., x_n sayıları aynı dağılım fonksiyonuna sahip olan X_1, X_2,..., X_n tesadüfi kemiyetlerinin uygun değerleridir. O zaman,

$$\theta_n^* = \theta_n^*(X_1, X_2, ..., X_n)$$

fonksiyonu bağlı olmayan ve aynı $F(x,\theta)$ dağılım fonksiyonu olan n sayıda X_1, X_2,..., X_n tesadüfi kemiyetin veya bir tane n-boyutlu,

$$X = (X_1, X_2, ..., X_n)$$

tesadüfi vektörünün fonksiyonu olur. Her bir seçmeye $\theta_n^*(X_1, X_2, ..., X_n)$ fonksiyonunun bir değeri, argumentlerin,

$$X_K = x_K \qquad (k = 1,2,...,n)$$

değerlerine uygun olan değerleri gibi bakabiliriz.

Tesadüfi X_K kemiyetleri bağlı değildir ve onların aynı $F(x,\theta)$ dağılım fonksiyonu vardır. Buna göre n-boyutlu,

$$X=(X_1,X_2,...,X_n)$$

tesadüfi fonksiyonunun dağılım fonksiyonu,

$$F_x(t_1, t_2, ..., t_n) = P(x_1 < t_1, ..., X_n < t_n) =$$

$$= P(x_1 < t_1).P(X_2 < t_2)...P(X_n < t_n) =$$

$$= F(t_1)F(t_n)...F(t_n)$$

eşitliği ile bir değerli tanımlanmış olur ve aranan θ parametresine bağlıdır. O zaman,

$$\theta_n^*(X) = \theta_n^*(X_1, X_2, ..., X_n)$$

fonksiyonunun dağılım fonksiyonu da θ parametresine bağlı olur.

$\theta_n^*(X_1, X_2, ..., X_n)$ fonksiyonu öyle seçilmelidir ki, onun değerleri aranan (tesadüfi olmayan) θ parametresinin değerine çok yakın olsun. Böylece,

$$M\left[\theta_n^*(X_1,...,X_n)\right]=\theta$$

eşitliği sağlanmalıdır.

Tanım 11.1: Her bir n sayısı için,

$$M\left[\theta_n^*(X_1,X_2,...,X_n)\right]=\theta \qquad (1)$$

eşitliğini sağlayan $\theta_n^*(X_1,...,X_n)$ fonksiyonuna θ parametresinin kaydırılmamış değerlendirilmesi denir. Aksi halde

$$M\left[\ \theta_n^*(X_1,X_2,...,X_n)\ \right]\neq\theta$$

olduğunda ise $\theta_n^*(X_1,X_2,...,X_n)$ kaydırılmış değerlendirme adlanıyor.

Değerlendirme kaydırılmamış olduğunda, bazen ona düzeliş vermekle onu kaydırılmamış değerlendirme şekline getirmek olur. Eğer θ_n^* değerlendirmenin θ parametresinden $\theta_n^*-\theta$ kaydırılması (veya sapması) çok küçük ise onda seçmenin hacmi büyük olduğunda dikkate almamak olur. Seçmenin hacmi küçük olduğunda bu $\theta_n^*-\theta$ kaydırmasını dikkate almamak olur. Buna göre de seçmenin hacmi küçük olduğunda kaydırmanın olmaması çok büyük ehemmiyet oluşturur.

θ_n^* fonksiyonunun değerlerinin aranan θ parametresine yakın olması için θ_n^* kemiyetinin θ komşuluğunda dağılımı da küçük olmalıdır. θ_n^* kemiyeti değerlerinin θ komşuluğunda dağılımı iki mertebeli $M\left[(\theta_n^*-\theta)^2\right]$ momenti ile karakterize olunuyor. Bu momentin en küçük değer alması şartındaki değerlendirilme daha iyi hesap edilir. θ_n^* değerlendirmesi kaymamış olduğunda $M\left[(\theta_n^*-\theta)^2\right]$ iki mertebeli moment onun $D\left[\theta_n^*\right]$ dispersiyasına eşit olur, yani θ_n^* - in varyansına eşit olur[2].

Tanım 11.2: Verilmiş θ_n^* ve θ_n^{**} değerlendirmeleri için,

$$M\left[(\theta_n^*-\theta)^2\right]<M\left[(\theta_n^{**}-\theta)^2\right] \qquad (2)$$

eşitsizliği sağlandığında, θ_n^* değerlendirilmesi θ_n^{**} değerlendirmesine nazaran daha efektif değerlendirme adlanır[11].

$$\gamma=\inf_{\theta_n^*} M\left[(\theta_n^*-\theta)^2\right] \qquad (3)$$

eşitliğini sağlayan θ_n^* fonksiyonuna efektif değerlendirme denir.

Efektif değerlendirmenin dispersiyası(varyansı) en küçük mümkün dispersiya olur.

Seçme yığım büyük oldğunda parametrenin değerlendirilmesi her hangi bir anlamda (olasılığa göre, orta kuadratik anlamda) bu parametrenin kendisine yaklaşsın.

Tanım 11.3: θ_n^* değerlendirmesi $n \to \infty$ koşulunda olasılığa göre θ parametresine yakınsak ise, yani ∀ε>0 sayısı için,

$$\lim_{n \to 0} P\left(\left|\theta_n^* - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1$$

eşitliği sağlanırsa θ_n^* − e θ-nın esaslı değerlendirilmesi denir[11].

11.2. Değerlendirmenin Dakikliği (Tamlığı) ve İtibarlılık Aralığı

Farz edelim ki, baş yığımın F(x,θ) dağlım fonksiyonu bir θ parametresine bağlıdır. Bu parametrenin seçmenin uygun karakteristik sayıları ile değerlendirilmesinin yöntemlerini bir önceki paragrafta verdik. Orada parametreler için bulunmuş değerler bir sayı olduğu için onlara noktavi (noktasal) veya skaler değerlendirme denir. Noktavi değerlendirmeler belli tesadüfi kemiyetlerin özel değerleridir ve bunlar aranan parametrenin kendi değerlerinden genelde farklanabilir. Buna göre de belli olmayan parametrelerin bulunan değerlerinin dakikliği ve itibarlılığının öğrenilmesi matematik istatistiğin önemli problemlerinden biridir.

Parametreler için bulunmuş değerlerin dakiklik ve itibarlılık problemleri aralık değerlendirme yöntemi ile incelenir.

Farz edelim ki, aranan θ parametresi için θ_n^* değerlendirilmesi bulunmuştur. ε>0 keyfi pozitif sayı olsun. θ_n^* değerlendirmesinin θ-ya yakın olmasını,

$$\left|\theta_n^* - \theta\right| < \varepsilon \qquad (1)$$

eşitsizliği ile karakterize etmek olur. Bu eşitsizliği sağlayan ε>0 sayısı ne kadar küçük olursa, θ_n^* değerlendirilmesi de θ-ya o kadar yakın olur.

Böylece, (1) eşitsizliğini sağlayan ε sayısı değerlendirmenin dakikliğini ifade eder. Ama θ_n^* genelde tesadüfi kemiyet olduğundan (1) eşitsizliğinin hükmen sağlanmasını hükmetmek olmaz. (1) eşitsizliğinin ancak, belli bir olasılıkla sağlanmasını söylemek olur.

Farz edelim ki, keyfi 0<α<1 sayısı için öyle ε>0 sayısı varsa ki,

$$P\left(\left|\theta_n^* - \theta\right| < \varepsilon\right) = P\left(-\varepsilon < \theta_n^* - \theta < \varepsilon\right) = P\left(\theta_n^* - \varepsilon < \theta < \theta_n^* + \varepsilon\right) = \alpha$$

eşitsizliği sağlanır. Yani uçları tesadüfi kemiyetler olan

$$\left(\theta_n^* - \varepsilon, \theta_n^* + \varepsilon\right)$$

aralığının belli olmayan θ parametresini örtmesinin (onu öz içine almasının) olasılığı α sayısına eşittir.

Bu halde

$$\left(\theta_n^* - \varepsilon, \theta_n^* + \varepsilon\right)$$

aralığında itibarlılık aralığı, $\theta_n^* - \varepsilon$ ve $\theta_n^* + \varepsilon$ sayılarına itibarlılık sınırları ve α sayısına itibarlılık olasılığı veya olasılık katsayısı denir.

İtibarlılık aralığı, bulunmuş değerlendirmenin dakikliğini, itibarlılık olasılığı ise değerlendirmenin itibarlılığını karakterize eder.

İtibarlılık aralığının daha genel tanımını da verebiliriz.

Uçları $a_1=a_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $a_2=a_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ tesadüfi kemiyetleri olan ve

$$P\left[a_1 < \theta < a_n\right] = \alpha$$

eşitsizliğini sağlayan (a_1, a_2) aralığına θ parametresinin itibarlılık aralığı denir.

Birçok pratik problemlerin çözümünde belli olmayan dağılımın parametrelerinin değerlendirilmesinin itibarlılık aralıklarının bulunmasını talep eder. Verilmiş α itibarlılık olasılığına uygun olan itibarlılık aralıkları ayrı-ayrı yöntemlerle bulunur. Elbette, bu zaman çaba gösterirler ki, bulunan itibarlılık aralıklarının uzunluğu mümkün olduğu kadar küçük olsun.

Burada biz normal dağılımın belli olmayan parametrelerinin değerlendirilmesi için itibarlılık aralıklarını bulalım.

Farz edelim ki, dağılımı normal kanuna tabi olan baş yığımın (veya x tesadüfi kemiyetinin) dispersiyası (varyansı) bellidir:

$$\sigma^2 = D\left[x\right] \ .$$

Ama bu tesadüfi kemiyetin matematik gözlemesi belli değildir: a=?

Bu belli olmayan a parametresinin $x_1, x_2, ..., x_n$ seçmesinin

$$\overline{x} = \frac{1}{h}\sum_{K=1}^{h} x_K$$

orta değeri vasıtasıyla değerlendirilmesinin itibarlılık aralığını bulmak gerekir.

Eğer biz seçmeyi teşkil eden $x_1, x_2, ..., x_n$ sayılarını bağlı olmayan ve aynı bir normal kanunla dağılmış tesadüfi $x_1, x_2,..., x_n$ kemiyetlerinin değerleri gibi götürsek o zaman $\overline{x}$ kemiyeti de bu a, σ parametreli normal kanunla dağılmış olur ve

$$M[\bar{x}] = a = M[x]$$

$$D[\bar{x}] = \frac{D[x]}{h} = \frac{\sigma^2}{n}$$

eşitlikleri sağlanırlar.

Bu halde

$$P(x_1 < x < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$$

formülüne esasen normal dağılımlı x tesadüfi kemiyeti için buluruz:

$$P(x_1 < x < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x_2-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x_1-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)$$

eşitliğini alırız.

Burada,

$$\phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^s e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

fonksiyonu belli Laplace fonksiyonudur.

Özel halde,

$$P(|x - a| < \varepsilon) = P(a - \varepsilon < x < a + \varepsilon) =$$

$$= \phi\left(\frac{a+\varepsilon-a}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\varepsilon-a}{\sigma}\right) = 2.\phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

veya

$$P(|x-a| < \varepsilon) = P(x - \varepsilon < a < x + \varepsilon) = 2\phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

olur.

Burada x yerine $\bar{x}$ götürdüğümüzde σ^2 yerine ise $\frac{\sigma^2}{h}$ yazmamız gereklidir ve sonuçta,

$$P(\bar{x} - \varepsilon < a < \bar{x} + \varepsilon) = 2\phi\left(\frac{\sqrt{h}\varepsilon}{\sigma}\right)$$

eşitliği alınır.

Sonuncu eşitlikte $t = \dfrac{\sqrt{h}\varepsilon}{\sigma}$ işaret edersek buluruz:

$$P\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{h}}\, t < a < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{h}}\, t_\alpha\right) = \alpha \qquad (2)$$

eşitliği alınır ki, bu a parametresinin α itibarlılık olasılığına uygun olan itibarlılık aralığının,

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{h}}\, t_\alpha,\ \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{h}}\, t_\alpha\right)$$

aralığının olduğunu gösterir.

Dikkate alalım ki, α sayısı verildiğinde,

$$2\phi(t_\alpha) = \alpha$$

eşitliğine esasen Laplace fonksiyonunun değerleri tablosunda t_α bulunur.

Mesela, α=0,98 götürüldüğünde,

$$2\phi(t_\alpha) = 0{,}98$$

veya

$$\phi(t_\alpha) = 0{,}49$$

olur ve tablodan t_α= 2,3263 bulunur.

α=0,999 götürdüğümüzde t_α=3,29 bulunur.

Böylece,

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{h}}\, t_\alpha,\ \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{h}}\, t_\alpha\right)$$

aralığının belli olmayan a=M[x] parametresinin öz içine almasının, yani onu örtmesinin olasılığı α sayısına eşittir. (2) eşitliğinden klasik değerlendirme adlanan,

$$|\bar{x} - a| < \frac{\sigma}{\sqrt{h}}\, t_\alpha$$

veya

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{h}}\, t_\alpha < a < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{h}}\, t_\alpha$$

eşitsizlikleri alınır.

Örnek 11.1: Farz edelim ki, a kemiyetini belirlemek için 10 kez ölçme yapılmıştır.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
xi	35,6	35,9	36,1	35,9	36,1	36,2	36,6	36,1	35,9	36,2

σ=D[x]= 0,28 olduğunda a kemiyetinin α= 0,99 olasılığı ile yerleştiği aralığı bulun.

Çözüm: Ölçme sonuçlarının orta değerini bulalım:

$$\overline{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 36{,}06$$

α= 0,99 olduğundan $\phi(t_\alpha) = 0{,}495$ olur ve Laplace fonksiyonunun değerleri tablosundan t_α= 2,576 buluruz. Böylece ölçmenin dakikliği,

$$\varepsilon = \frac{0{,}28}{\sqrt{10}}.2{,}56 = 0{,}23$$

olur. Böylece, α= 0,99 olasılığı ile itibar etmek olur ki, α-nın esil değeri $(\overline{x} - 0{,}23;\ x + 0{,}23)$ veya (335,83; 36,29) itibarlılık aralığında yerleşir.

$a \approx \overline{x} = 36{,}06$ da götürebilirdir.

Burada Laplace fonksiyonunun uygulanması olarak Laplace teoremini de ispatsız verelim. Laplace teoreminde n bağımsız deney zamanı her bir deneyde A olayının olasılığı p olduğunda A olayının α sayısından az olmamak ve p sayısından büyük olmamak şartıyla gerçekleşmesi sayısının olasılığı gösterilir.

Laplace teoremi aşağıdaki gibi ifade olunur:

Teorem: n sayıda bağımsız deney gerçekleştirildiğinde, her bir deneyde A olayının gerçekleşmesinin olasılığı p ise o zaman aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$P(\alpha < m < \beta) = \frac{1}{2}\left[\phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{2}\sqrt{npq}}\right) - \phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{2}\sqrt{npq}}\right)\right] \quad .$$

Burada m sayısı n deneyde A olayının gerçekleşmesi sayısı ve uygun olarak q= 1-p, p(α<m<β) sayıları n deneyde A olayının gerçekleşmesi sayısı ve m-nin α ve β sayıları arasında olmasının olasılığıdır.

Örnek 11.2: Fabrikada hazırlanan mamulün yararsız olmasının olasılığı p= 0,01-dir. 1000 mamulden arızalı olanların sayısının 20-den çok olmamasının olasılığını bulunuz.

Çözüm: Bu halde,

h= 1000, p= 0,01, q= 0,99, α=0, β= 20 .

Böylece,

$$\frac{\alpha - np}{\sqrt{2}\sqrt{npq}} = \frac{0 - 10}{\sqrt{2}\sqrt{9,9}} = -2,25 \quad ,$$

$$\frac{\beta - np}{\sqrt{2}\sqrt{npq}} = \frac{20 - 10}{\sqrt{2}\sqrt{9,9}} = 2,25 \quad .$$

Laplace teoremine esasen buluruz:

$P(0 \le m \le 20) = \frac{1}{2}\left[\phi(2,25) - \phi(-2,25)\right] = \phi(2,25)$. θ(x) için tablodan buluruz:

$$P(0 \le m \le 10) = 0,9985$$

11.3. Normal Dağılım Kanunun Parametrelerinin Student Dağılımının Yardımı ile Değerlendirilmesi (Student Dağılımı)

Biz önceki paragrafta normal kanunla dağılmış x tesadüfi kemiyetinin $\sigma^2 = D[x]$ dispersiyası belli olduğunda ve matematik gözlemesi ise belli olmadığında, belli olmayan a=M[x] matematik gözlemesinin x tesadüfi kemiyetinin bağımsız n deneylerden alınmış, $x_1, x_2, ..., x_n$ değerleri esasında bulunmuş,

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_K$$

orta değeri vasıtasıyla değerlendirilmesinin aşağıdaki aralığını bulduk:

$$\left|\bar{x} - a\right| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\alpha$$

veya

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\alpha < a < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\alpha$$

Burada t_α , $2\phi(t_\alpha) = \alpha$ denkleminin köküdür. α itibarlılık olasılığı olup a parametresinin $\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\alpha, x + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\alpha\right)$ aralığına düşmesi olasılığıdır. $\phi(t)$ ise Laplace fonksiyonudur.

Eğer x tesadüfi kemiyetinin dispersiyası belli olmazsa, yani $\sigma = \sqrt{D[x]}$ kemiyeti belli olmazsa, üstte yazdığımız değerlendirmesinden istifade etmek olmaz[11].

Bu halde x tesadüfi kemiyetinin n tane bağımsız deney sonucunda elde edilen x_1, x_2, ..., x_n değerleri esasında x tesadüfi kemiyetinin $\overline{x}$ orta değeri ve $\overline{S}^2$ (varyansı) dispersiyası aşağıdaki formüllerle bulunur:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} x_K \quad , \\ &ve \\ &\overline{S} = \sqrt{\frac{\sum_{K=1}^{n}\left(\overline{x} - x_K\right)^2}{n-1}} \quad . \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Bu parametreler esasında aşağıdaki eşitlikle belirlenen T tesadüfi kemiyetine bakılır:

$$T = \frac{\overline{x} - a}{\frac{\overline{S}}{\sqrt{n}}} \quad . \tag{2}$$

Genelde, gösterilir ki, T tesadüfi kemiyetinin dağılım yoğunluğu aşağıdaki formülle verilen Student dağılımına malikdir (sahiptir).

$$S_n(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi}\ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} \quad . \tag{3}$$

Burada Γ (t) fonksiyonu Gama fonksiyonudur.

Student dağılımı (3) den görüldüğü gibi bu dağılım x tesadüfi kemiyetinin a ve normal dağılım parametrelerine bağlı değildir. Student dağılımı yalnız deneyler sayısı n sayısına bağlıdır (burada n sayısı baş yığımın veya seçme yığımın hacmini de gösterilebilir).

Student dağılımı yoğunluğu fonksiyonu çift fonksiyon olduğundan,

$$\left|\frac{\overline{x} - a}{\frac{\overline{S}}{\sqrt{n}}}\right| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlanması olayının olasılığı aşağıdaki olasılıkla hesaplanır:

$$P\left(|T|<\varepsilon\right)=P\left(\left|\frac{\bar{x}-a}{\frac{\bar{S}}{\sqrt{n}}}\right|<\varepsilon\right)=2\int_0^{\varepsilon}S_n(t)dt \quad .$$

Buradan,

$$P\left(|\bar{x}-a|<\frac{\bar{S}}{\sqrt{n}}\varepsilon\right)=2\int_0^{\varepsilon}S_n(t)dt$$

veya

$$P\left(\bar{x}-\frac{S}{\sqrt{n}}\varepsilon<a<\bar{x}+\frac{S}{\sqrt{n}}\varepsilon\right)=2\int_0^{\varepsilon}S_n(t)dt$$

bağlantısı alınır.

Bu sonuncu bağlantıyı

$$2\int_0^{t_\alpha}S_n(t)dt=\alpha \qquad (4)$$

eşitliğinden bulunan t_α sayısının yardımı ile aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$P\left(|\bar{x}-a|<\frac{\bar{S}}{\sqrt{n}}t_\alpha\right)=\alpha$$

veya

$$P\left(\bar{x}-\frac{\bar{S}}{\sqrt{n}}t_\alpha<a<\bar{x}+\frac{\bar{S}}{\sqrt{n}}t_\alpha\right)=\alpha$$

Böylece, $\left(\bar{x}-\frac{\bar{S}}{\sqrt{n}}t_\alpha,\ \bar{x}+\frac{\bar{S}}{\sqrt{n}}t_\alpha\right)$ aralığının belli olmayan a=M[x] parametresini öz dahiline alması olasılığı α sayısına eşittir. Burada t_α sayısı (4) eşitliğinden bulunur ve

$$\left(\bar{x}-\frac{\bar{S}}{\sqrt{n}}t_\alpha,\ \bar{x}\,\frac{\bar{S}}{\sqrt{n}}t_\alpha\right)$$

aralığı a parametresinin α itibarlılık olasılığına uygun itibarlılık aralığıdır. Dikkate alalım ki, α sayısı verildiğinde t_α sayısı Student dağılımının değerler tablosundan bulunur.

Böylece, belli olmayan a parametresinin itibarlılık aralığını bulmak için x_1, x_2, ..., x_n değerlerine esasen $\bar{x}$ ve $\bar{S}$ kemiyetleri, (4) eşitliğinden t_α kemiyeti bulunur. Sonra ise bu değerlerden istifade etmekle aranan aralığın uçları olan $\overline{x} - \frac{\overline{S}}{\sqrt{n}} t_\alpha$ ve

$\overline{x} + \frac{\overline{S}}{\sqrt{n}} t_\alpha$ itibarlılık sınırları bulunur.

Örnek 11.3: x tesadüfi kemiyeti normal dağılım kanununa sahiptir. Bu tesadüfi kemiyetin n= 15 bağlı olmayan deney sonuçları esasında orta $\overline{x}$ değeri için, $\overline{x} = 18{,}3$ değeri bulunmuştur. Düzeltilmiş, orta kuadratik sapma için S=0,6 bulunmuştur. Matematik gözleminin itibarlılık aralığını bulun. Bunun için itibarlılık olasılığı α= 0,95 götürün.

Çözüm: α= 0,95 sayısına uygun olarak Student dağılımının değerler tablosundan uygun t_α değerinin

$$t_\alpha = 2{,}145$$

olduğunu buluruz. Bulunmuş bu değer esasında,

$$\varepsilon = t_\alpha . \frac{S}{\sqrt{n}} = 2{,}145 . \frac{0{,}6}{4} = \frac{1.2870}{4} = 0{,}32 \ .$$

Böylece,

$$\overline{x} - \varepsilon = 18{,}3 - 0{,}32 = 17{,}97 \ ,$$

ve

$$\overline{x} + \varepsilon = 18{,}3 + 0{,}32 = 18{,}63 \ .$$

Buradan da itibarlılık aralığı için

$$P(17{,}97 < a < 18{,}63) = 0{,}95$$

olasılığı ile verilmiş tesadüfi kemiyetin matematik gözlemesi (17,97; 18,63) aralığında yerleşir.

11.4 Ölçme Sonuçlarının Matematik İstatistik Yöntemleriyle İşlenmesi

Ölçtüğümüz kemiyetin reel değeri x olduğunda ve ölçme zamanı sonuçta aldığımız değer ise x_n olursa, o zaman,

$$|x_* - x| \le \Delta(x_*)$$

eşitsizliğini sağlayan $\Delta(x_*)$ sayısına mutlak (absolyut) hata denir.

$$\left|\frac{x_* - x}{x_*}\right| \le S(x_*)$$

eşitsizliğini sağlayan $S(x_n)$ sayısına ise nispi hata denir.

Şimdi farz edelim ki, her hangi bir x kemiyeti n defa ölçülmüştür. Ölçme sonucunda alınan değerler,

$x_1, x_2, ..., x_n$

olsun. Tüm ölçmelerin aynı yöntemle ölçüldüğünü farz edelim. Ölçmelerden alınan orta değeri,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ile gösterelim. Ölçme zamanı alınan sonuçların orta $\bar{x}$ değeri etrafında dağılmasının orta kuadratik meyili σ ile karakterize olunur. Orta değer reel değere yaklaşmayı gösterir.

Düzeltilmiş dispersiya (varyans)

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

formülü ile hesaplanır.

Orta değerin orta kuadratik hatası,

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

formülü ile hesaplanır.

Her bir ölçme zamanı en büyük hata

$S_{müm}=3.S$

ile hesaplanır. Bu formülle hesaplamaya üç sigma kuralı denir.

Ölçmenin dakikliği ise aşağıdaki yöntemle bulunabilir. Ölçmenin mutlak hatasını biz,

$$\Delta(\bar{x}_S) = |a - \bar{x}| = \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha$$

formülü ile bulabiliriz. Buradaki t_α Student dağılım $S_n(t)$ fonksiyonunun yardımı ile,

$$2\int_0^{t_\alpha} S_n(t)\,dt = \alpha$$

denkleminden bulunur.

Böylece, ölçülen kemiyetin itibarlılık aralığı,

$$\bar{x} - \Delta(\bar{x}_S) < a < \bar{x} + \Delta(\bar{x})$$

veya

$$\bar{x} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}$$

olur.

Böylece, ölçmenin sonuçlarını işlemek için aşağıdaki işlemleri yapmak gerekir:

1. Orta $\bar{x}$ değerini bulmalı,
2. Ölçmede orta kuadratik hatayı bulmalı S hesaplanmalı;
3. En büyük hatayı hesaplamalı

   $S_{müm}=3.S$,

4. Orta değerin orta kuadratik hatasını

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

hesaplamalı;

5. n sayıda ölçme zamanı itibarlılık olasılığı α-ya göre ölçmenin $\Delta(\bar{x})$ absolut hatasını bulmalı.

Örnek 11.4: Kapilyarın diametri (çapı) 10 kez ölçülmüştür. Aşağıdaki değerler alınmıştır:

x_1= 2,93mk,	x_2= 2,82mk,	x_3= 2,81mk,	x_4= 2,85mk,
x_5= 2,87mk,	x_6= 2,86mk,	x_7= 2,85mk,	x_8= 2,85mk,
x_9= 2,93mk,	x_{10}= 2,84mk .		

Bu ölçümler için üstte gösterdiğimiz işlemleri yapalım:

1. Orta değeri bulalım:

$$\bar{x} = \frac{2,85 + 2,82 + 2,81 + 2,85 + 2,87 + 2,86 + 2,85 + 2,85 + 2,83 + 2,84}{10}$$

$$= 2,84\text{mk} .$$

2. orta kuadratik hatayı bulalım:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2,83 - 2,84)^2 + (2,82 - 2,84)^2 + (2,81 - 2,84)^2 + (2,84 - 2,84)^2 + ...}{9}}$$

= 0,019mk .

3. Mümkün olan en büyük hata

$S_{\text{en büyük hata}}$=3.S=3.0,019= 0,057mk .

4. Orta değerin orta kuadratik hatası

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}019}{\sqrt{10}} = \frac{0{,}019}{3{,}162} = \frac{19}{3162} = 0{,}006\text{mk} .$$

5. Ölçmenin mutlak hatası

$$\Delta(\bar{x}) = t_{\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} = 2{,}262.0{,}006 = 0{,}013 .$$

Nisbi hata

$$\delta(\bar{x}) = \frac{\Delta(\bar{x})}{|\bar{x}|} = \frac{0{,}013}{2{,}84} \cong 0{,}4\% .$$

Böylece, kapilyarların diametri (çapı)

$$x = (2{,}84 \pm 0{,}01)\text{mk olacaktır.}$$

Yani,

$$\bar{x} - \Delta(\bar{x}) < a < \bar{x} + \Delta(\bar{x})$$

itibarlık aralığı,

2,84-0,01< a <2,84+0,01 veya 2,83 < a < 2,85 olur.

12.KOLERASYON TEORİSİNİN ELEMANLARI

12.1. İstatistik ve Korelasyon Bağlantısı Regresyon Denklemleri

Olasılık teorisinde ve matematik istatistikte x ve y kemiyetleri arasında bağlılık bu teorilerin kendi açısından öğrenilir. Genelde x ve y değişkenleri arasında bağlılık iki bakımdan fonksiyon bağlılık gibi ve korelasyon bağlılığı gibi ayrı ayrı öğrenilir.

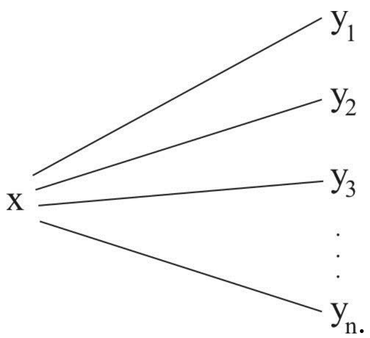
Bilindiği gibi x ve y kemiyetleri (değişkenleri) arasındaki bağlılık fonksiyon bağlılığı ise, o zaman x-in her bir değerine y-nin ancak bir tane değeri karşı tutulur(getirilir). Fonksiyon bağlılıklarla biz matematiğin analiz kursunda çok geniş olarak tanıştık. x ve y değişkenlerinin fonksiyon bağlılığını biz genelde $y = f(x)$ gibi yazarız ve y değişkeni x-in fonksiyonudur deriz. Bu bağlılıkta x değişkeninin her bir değerine y değişkeninin yalnız bir değeri karşılık gelir. Mesela, doğrusal sabit v hızlı harekette gidilen yol s, t zamanının fonksiyonu olup,

$$s = vt$$

formülü ile gösterilir. Burada gidilen yol zamanın fonksiyonudur.

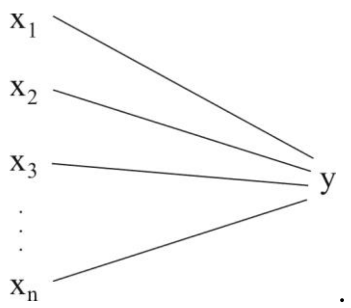
Doğada, cemiyet bağlantılarında, biyolojide ve ilmin başka dallarında x ve y değişkenleri arasında öyle bağlılıklara rastlanır ki, x-in bir değerine y değişkeninin birden çok sayıda $y_1, y_2, ..., y_n$ değerleri uygun gelir[2].

Böylece,



Mesela, insanların çekisini y- ile, boyunu ise x ile işaret etsek, aynı boylu insanların (kişilerin) ağırlığı (çekisi) genelde farklı olabildiğinden aynı bir x değerine karşı farklı $y_1, y_2, ..., y_n$ değerleri karşılık gelebilir. Böylece, bu örnekte olduğu gibi x değişkeninin bir değerine y-nin birkaç değeri uygun gelebilir.

Aksine aynı ağırlıkta ama farklı boylu kişiler bulabildiğimizden x-in $x_1, x_2, ..., x_n$ değerlerine y değişkeninin bir tane y değerinin karşılık geldiği halde olabilir:



Değişkenlerden birinin (mesela x-in) her bir değerine y-nin çok sayıda değerleri uygun gelirse değişkenler arasındaki böyle bağlantıya istatistik bağıntı denir.

İstatistik bağıntının özel bir hali korelasyon bağlantısıdır.

Bir kemiyetin değişmesi diğer bir kemiyetin orta değerinin değişmesine sebep olursa böyle bağlantıya korelasyon bağıntısı denir.

Sınav zamanı öğrencinin bilgisi ile onun aldığı puan arasındaki bağlantı, deniz ve göllerde suyun tuzluluğunun konsantrasyonu ile atmosfer çöküntüsünün miktarı arasındaki bağlantı vs. korelasyon bağıntısıdır.

Tıpta diagnoz belirlemede korelasyon bağıntısından çok geniş istifade edilir. Böyle ki, organizmanın dahili organları, tokuma ve hücreleri tümlükte bir sistem oluşturur ve bir biri ile korelasyon bağıntısındadır.

Simptomların (alametlerin) belirlenmiş değerlerine göre hastalığın çeşidi (nevi) belirlenir.

Çok sayıda simptomların değerlerini toplamakla belli bir hastalığa diagnoz belirlenir.

Farz edelim ki, müşahade zamanı aynı zamanda ölçtüğümüz x ve y kemiyetleri için aşağıdaki değerler alınmıştır:

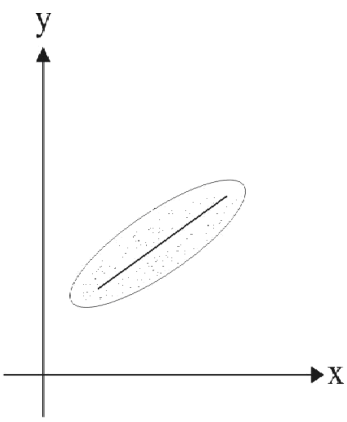
$$x = x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \quad ,$$
$$y = y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n \, .$$

Alınan bu değerlere uygun olarak $x \circ y$ düzleminde

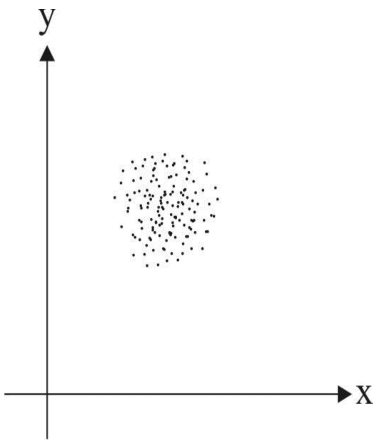
$$(x_1, y_1), (x_2, y_{21}), \ldots\ldots, (x_n, y_n)$$

çiftlerine uygun noktaları gösteririz. Alınan noktalar kümesine korelasyon alanı denir.

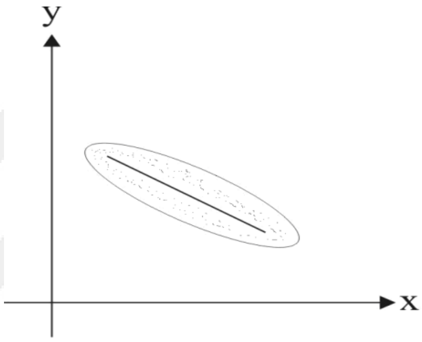
Bu halde eğer x ve y arasında bağlantı varsa, o zaman korelasyon alanı elips şeklinde olur.



Şekil 12.1: Düz mütenasip asılılığın dağılımı

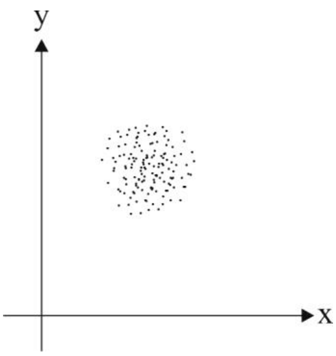


Şekil 12.2: Tesadüfi kemiyetin aldığı değerler



Şekil 12.3: Ters mütenasip asılılığın dağılımı

Bu halde noktalar en çok elipsin baş ekseni üzere daha çok toplanır. Yanlara gittikçe noktaların sayısı azalır.
Elipsin baş eksenine bağlantının regresyon hattı denir.
Eğer regresyon hattı x ekseni ile iki açı oluşturursa bağlantı doğrusal bağlantı olur(y=kx şekilli bağlantı olur). Aksi halde bağlantı $y = \frac{k}{x}$ şeklinde olur.
x ve y arasındaki bağlantı zayıf olursa o zaman noktaların dağılımı çok olur.



x ve y değişkenleri arasındaki bağlantı regresyon hatları ile değerlendirilebilir.

x-in her bir değerine uygun y değişkeninin orta değerini bulalım:

$$\bar{y}_x = \frac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n} .$$

Orta değer olasılık yoğunluğunun merkezi olduğundan bu halde korelasyon bağlantısı aşağıdaki fonksiyon bağlantıya dönüşür:

$$\bar{y}_x = f(x) . \qquad (1)$$

(1) eşitilğine y-nin x-e nazaran regresyonu denir. Aynı şekilde her bir y-ye uygun olan x-in orta değerini bulursak:

$$\bar{x}_y = \varphi(y) \qquad (2)$$

fonksiyon bağlantısı yazarız. (2) bağlantısına ise x-in y-ye nazaran regresyonu denir.
Korelasyon analizinde esasen iki problem incelenir:

1. Değişkenler arasındaki bağlantıyı bulmak. Yani (1) ve (2) denklemlerinin hangi şekilde denklemler olduğunu belirlemek.

2. Bağlantının güçlü veya zayıf olmasını açıklamak.

Önce birinci problem üzerinde dayanalım.

(1) ve (2) denkemleri doğru denklemleri de olabilir. Regresyon hatları doğru hat olduğunda (1) ve (2) denklemleri de doğru denklemleri ile yazılır:

$$\bar{y}_x = ax + b \quad \text{ve} \quad \bar{x}_y = cy + d . \qquad (3)$$

Regresyon hattı parabolik hat olduğunda onun denklemi

$$y = ax^2 + bx + c$$

şeklinde yazılabilir.

Bu denklemlerdeki katsayılar a, b, c, d parametreleri farlı farklı yöntemlerle bulunur. Mesela bu parametrelerin bulunması için en yaygın kullanılan yöntem en küçük kareler yöntemidir.

x ve y değişkenleri arasında korelasyon bağlantısının formasının şekli belirlendikten sonra, yani (1) ve (2) denklemleri yazıldıktan sonra bu denklemler esasında x ve y değişkenleri arasındaki bağlantının güçlü veya zayıf olması problemi incelenir. Yani ikinci problemin çözümüne geçilir. Bu problemi çözmek için de yeni anlamlardan istifade edilir. Mesela korelasyon katsayısı anlamı dahil edilir[2].

12.2. Korelasyon Katsayısı

Bir değişkenin regresyon hattı komşulğunda (etrafında) ikinci (diğer) değişenin değerlerinin sapmalarını değerlendirmek için bazı yeni anlamlardan istifade edilir.

x ve y değişkenleri arasında olan korelasyonda sapma derecesi gruplar arası dispersiya (orta kuadratik sapma) ile karakterize olunur.

x-e göre gruplar arası dispersiyon

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

ile, y-e göre gruplar arası dispersiyon ise,

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}$$

formülleri ile belirlenir.

x ile y arasında olan bağıntıyı karakterize etmek için $G_{x,y}$ bağlantı momenti tanımlanır:

$$G_{x,y} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)$$

$G_{x,y}$ bağlantı momenti x ve y değişkenlerinin orta değerlerinden (şartı merkezlerden) olan sapmalarının (meyillerinin) çarpımıdır.

x ve y tesadüfi kemiyetleri veya tesadüfi prosesler arasındaki bağlantıyı R korelasyon katsayısı ile karakterize etmek olur. Korelasyon katsayısı R aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$R = \frac{G_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

veya

$$R = \frac{\mu}{\sigma_x \sigma_{.y}}$$

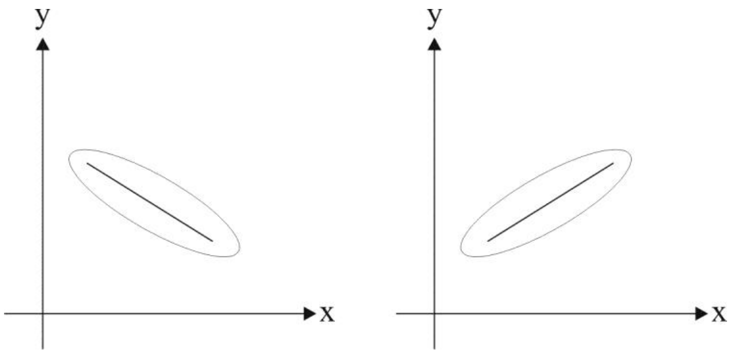
gibi tanımlanır.

R katsayısının değeri negatif birim ile pozitif birim arasında değişir:

$$-1 \le R \le 1 .$$

R-nin negatif değer alması x ve y-nin arasında ters mütanasiplik($y = \frac{k}{x}$) bağlantısı olduğunu gösterir, yani kemiyetin birinin artması ile ikinci buna mütenasip olarak azalır.

R sayısı pozitif değer aldığında ise x ve y arasındaki bağlantı düz mütenasip bağıntı olduğunu gösterir. Birinin artmasıyla diğeri de artar.



R = ±1 olması x ve y arasında tam korelasyon olmasını gösterir.

Eğer R=0 olursa x ve y arasında bağlantı yoktur.

$0,4 \le R \le 0,7$ aralığında olduğunda bağlantı zayıftır. Ama $0,7 \le R \le 1$ olduğunda x ve y arasında bağlantı güçlü hesap edilir.

Korelasyon alanında noktaların regresyon hattına yakın olması (bu hattın etrafında toplanması) kriteri,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

toplamlarının minimum değer alması demektir. Başka bir deyişle bunun için dispersiyonlar regresyon hatları komşuluğunda noktaların toplanması için minimum değerler almalıdır.

Bağlantının güçlü veya zayıf olması regresyon katsayıları ile de karakterize edilebilir.

Regresyon katsayıları aşağıdaki eşitliklerle tanımlanır:

$$\rho_{y,x} = R\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \quad \text{ve} \quad \rho_{x,y} = R\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

Regresyon katsayıları büyük oldukça bağlantı güçlü olur.

Bağlantının yoğunluğu x ve y kemiyetleri arasında olan yakınlık (bağlılık) derecesiyle belirlenir.

Kemiyetin her hangi birinin, mesela x-in herhangi bir değerine, diğer kemiyetin y-nin orta değeri ne kadar yakın olursa o zaman bağlantı bir o kadar yoğun olur. Eğer bu değerler birbirinden çok farklanıyorsa o zaman bağlantı da zayıf hesap olunur.

Bağlantının yoğunluğu regresyon hatları arasında kalan φ açısı ile de belirlenebilir. φ açısı büyük oldukça bağlantı zayıf olur. $\varphi \to 0$ olduğunda x ile y arasında bağlantı yoğun olur ve bağlantı güçlü olur. φ =0 olduğunda yoğunluk büyüktür.

Dikkate alalım ki, $(x_i, \bar{y}_i)$ noktaları ve $(\bar{x}_i, y_i)$ noktaları doğru bir hat boyunca yerleşirse o zaman regresyon hatları doğru hatlar olur.

Bu halde x ve y arasındaki bağlılık doğrusal bağlılık olur ve aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\bar{y}_x = ax + b, \qquad \bar{x}_y = cy + d.$$

Buradaki a, b, c, d parametrelerini $\bar{y}$, $\bar{x}$, σ_x, σ_y ve R karakteristiklerine göre de belirlenebilir.

Mesela:

$$a = R\frac{\sigma_y}{\sigma_x},$$

$$b = \bar{y}_x - ax$$

gibi bulunabilir. Bu yazdığımız eşitlikler x ve y çiftinin birlikte dağılımı normal dağılım olursa doğru olur.

12.3. En Küçük Kareler Yöntemiyle Deney Sonuçları Değerleri Esasında Fonksiyonun Parametrelerinin Hesaplanması

Farz edelim ki, deney sonuçları esasında y değişkeninin x değişkenine bağlılığının fonksiyonunu yazmak talep olunur:

$$y = y(x) \qquad (1)$$

Farz edelim ki, deney esasında x-in uygun değerlerine esasen y-nin aşağıdaki değerleri bulunmuştur:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

y = y(x) fonksiyonunun şekli belirlenmiştir:

$$y = y(x, a, b, c, ...)$$

Burada a, b, c, ... parametrelerinin değerlerinin belirlenmesi istenir. Bu parametreleri belirlemek için en küçük kareler metodunda aşağıdaki,

$$S(a, b, c, ...) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - y(x_i, a, b, c, ...)\right)^2 \qquad (2)$$

fonksiyonu yapılır. a, b, c,... parametreleri öyle seçilir ki, bu toplam için

$$S(a, b, c, ...) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - y(x_i, a, b, c, ...)\right]^2 \to \min. \qquad (3)$$

olsun.

Bunun için aşağıdaki gerekli koşular yazılır:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial c} = 0,... \tag{4}$$

(4) şartlarını açık yazarsak buluruz:

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - y(x_i, a, b, c,...)]\frac{\partial y(x_i, a, b, c,...)}{\partial a} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - y(x_i, a, b, c,...)]\frac{\partial y(x_i, a, b, c,...)}{\partial b} = 0, \tag{5}$$

....

Buradaki denklemlerin sayısı bilinmeyen parametrelerin sayısına eşit olur.

Örnek 12.1: Bağlantının genel şekli

$y = ax + b$

formasında olduğunda,

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)]^2 \tag{6}$$

gibi olur. Bu halde (5) sistemi,

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - b_n = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

şeklini alır.

Örnek 12.2: Aranan fonksiyonun şekli,

$y = ax^2 + bx + c$

şeklinde olduğunda,

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \left(ax_i^2 + bx_i + c\right)\right]^2 \tag{8}$$

gibi yazılır.

(5) sistemi ise aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 - a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 - b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - c\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i - cn = 0\ .
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Bu sistemden a, b, c parametreleri bulunur.

13.İSTATİSTİK FARZİYELERİN (HİPOTEZLERİN) YOKLANILMASI

x tesadüfi kemiyetinin (veya x tesadüfi kemiyetine uygun olan baş yığımın) dağılım fonksiyonu bazen bize belli olmuyor. Bazen ise dağılım fonksiyonunun genel şekli belli olur (mesela, normal dağılım, Poisson dağılımı, Bernolli dağılımı vs. gibi) ama bu dağılımların incelenen tesadüfi kemiyet için parametrelerinin bulunması gerekir. Bu zaman ele alınan tesadüfi kemiyet halinde dağılımın θ parametresinin belli bir θ^* değerine eşit olması veya θ^*-dan büyük veya küçük değerler alması vs. gibi belli hipotezler, iddialar söylenilir. Tüm böyle faraziyelere, iddialara istatistik faraziyeler veya hipotezler denir[11].

Mesela, ele alınmış tesadüfi kemiyetin normal dağılımlı tesadüfi bir kemiyet olması fikri, dağılımın θ parametresinin θ^* değerine eşit, yani $\theta = \theta^*$ değer alması fikri vs. istatistik faraziyelerdir.

İstatistik faraziyelerin doğru olup olmaması empirik (deneyler) sonuçları veya seçme yığım esasında yoklanılır, belirlenir. Buna ise istatistik yoklama veya istatistik belirleme denir.

Faraziyeleri yoklamak için bir tesadüfi K kriterinden (ölçüsünden) istifade edilir. K kriterisi olarak istatistikte farklı farklı kriterler alınır. Mesela, K kriteri olarak istatistik dağılım fonksiyonu $F^*(x)$ ile teorik dağılım fonksiyonu F(x)-için farkının modülünün maksimal değeri,

$$D = \max \left| F^*(x) - F(x) \right|$$

alınabilir veya

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} \left| F^*(x) - F(x) \right|^p g(x)\, dx \text{ , } p \geq 1,\ g(x) \geq 0 \text{ vs.}$$

İstatistik faraziyelerin yoklanmasında başka krizerler de görülebilir. Mesela, Pirsonun "χ^2 Kriterisi" vs.

İleri sürülen (iddia edilen) her bir faraziyeye esas veya sıfırıncı faraziye denir. Esas faraziye H_0 ile işaret edilir. Esas faraziyeye zıt olan her bir faraziyeye alternatif (esas faraziyeyi redd eden faraziye) denir ve H_1 ile işaret edilir.

Faraziyeler genelde basit ve karmaşık (mürekkep) olur.

İddia edilen faraziyede ancak bir fikir, bir niyet olursa bu faraziye basit faraziye adlanır. Basit faraziye adeta bir hükümden ibaret olur. Mesela, tesadüfi kemiyetin

dağılımı normal dağılım olduğunda ve bu dağılımda tesadüfi kemiyetin dispersiyonunu gösteren σ^2 parametresi belli olduğunda normal dağılımda matematik gözlemini gösteren a parametresinin 3 sayısına eşittir fikri (iddiası) basit faraziyedir.
Karmaşık (mürekkep) faraziye sonlu veya sonsuz sayıda basit faraziyelerden oluşmuş olur.
Mesela, üstel dağılımın λ parametresinin $\lambda > 4$ olması faraziyesi karmaşık faraziyedir. Bu faraziye sonsuz sayıda $\lambda = a_k$ ($a_k > 4$) basit faraziyelerden oluşmuştur.
Böylece, her bir esas faraziyenin doğruluğunu belirlemek için dağılım kanunu belirli olan bir K kriterisi götürülür. x tesadüfi kemiyetinin her bir seçme veya deney sonuçlarına: $x_1, x_2, ..., x_n$ bir K kriterisinin bir değeri uygun gelir.
Esas faraziyeyi yoklamak için götürülen K tesadüfi kriterisi farklı farklı yöntemlerle tanımlanır. Mesela, ele alınan x tesadüfi kemiyetinin dağılım fonksiyonunun F(x) fonksiyonu olmasından oluşmuş faraziyeyi yokladığımızda x tesadüfi kemiyetinin deney sonuçları $x_1, x_2, ..., x_n$ esasında $F_n^*(x)$ istatistik dağılım fonksiyonu arasındaki meyle esasen farklı farklı meyiller belirlenir:

$$D\left(F, F^*\right) = \sup_x \left|F_n^*(x) - F(x)\right|,$$

$$D\left(F, F^*\right) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\left|F_n^*(x) - F(x)\right|^p dx, \; p \geq 1$$

$$g(x) \geq 0$$

vs.
Böyle tanımlanmış tesadüfi D=K(x) kemiyetleri ile farklı uzlaşma kriterleri alınır.
Seçilmiş uzlaşma kriterine esasen baktığımız K kriterinin değerleri kümesi kesişmeyen iki alt kümeye ayrılır:

1. S böhran bölgesine

ve

2. Faraziyenin kabul olunma G bölgesine ayrılır.

Deney sonucunda alınan

$x_1, x_2, ..., x_n$

değerlerine esasen K(x) kemiyeti hesaplanır. Bu değer S böhran bölgesine ait olursa, yani

$K(x) \in S$

olursa o zaman H_0 esas faraziyesi reddedilir (kabul edilmez) K(x)-in bulunmuş değeri G kabul edilme bölgesine dahil olursa, yani

$$K(x) \in G$$

olursa o zaman H_0 esas faraziyesi kabul edilir.

İstatistik faraziyeler yoklanırken iki çeşit sehve (yanlışlığa) tesadüf edilir. Yani iki nevi hata ile karşılaşırız.

Birinci nevi sehv (yanlış), H_0 esas farziyesi doğru olduğu halinde onun reddolunmasıdır. Böyle sehvler (hatalar), doğru olan H_0 faraziyesinin reddedilme

$$\alpha = P_{H_0}(K(x) \in S)$$

olasılığı ile karakterize edilir.

İkinci çeşit hata ise H_0 esas faraziyesi doğru olmadığı halde onun kabul olunmasıdır. Bu halde alternatif H_1 faraziyesi doğru olur. Ama sehven doğru olmayan H_0 faraziyesi kabul olunur. Böyle sehvler,

$$\beta = P_{H_1}(K(x) \in G)$$

olasılığı ile karakterize edilir.

1-β sayısına ele alınan kriterinin gücü (kuvveti) denir.

Birinci çeşit sehvin karakterize eder. α olasılığı belli olduğunda β sayısını en küçük seçmeye çalışılır. Bununla kriteriler içerisinde gücü büyük olan seçilmeye çalışılır.

Esas faraziyeyi yoklamak için kriter seçme yöntemini bir örnekle gösterelim.

Farz edelim ki, tesadüfi x kemiyetinin dağılım fonksiyonunun F(x) fonksiyonu olması faraziyesini deney sonucunda x kemiyetinin almış olduğu

$$x_1, x_2, ..., x_n$$

değerlerinin vasıtasıyla yoklamak gerektir. Bu amaçla Ox eksenini $a_1 < a_2 < ... < a_m$ noktaları ile m+1 sayıda kesişmeyen,

$$(-\infty, a_1), [a_1, a_2), [a_2, a_3), ..., [a_{m-1}, a_m), [a_m,\infty) \qquad (1)$$

yarım aralıklarına ayıralım.

(1) aralıklarında yerleşen $x_1, x_2, ..., x_n$ sayılarının artma sırasyıla sıralandığını farz edelim ve P_k^* ile (a_{k-i}, a_k) aralığında olması tezliği gösterilsin: $P_k^* = \frac{v_x}{n}$. Burada v_k, (a_k, a_{k+1}) aralığında x tesadüfi kemiyetinin değerlerinin sayısı, n ise deneyler sayıdadır.

X kemiyetinin değerlerinin (1) aralıklarında yerleşmesinin p_k olasılıklarını F(x) teorik fonksiyonunun yardımı ile hesaplayabiliriz:

$$p_1 = p(x \in (-\infty, a_1)) = p(x < a_1) = F(a_1)$$

$$p_k = p(a_{k-1} < x < a_k) = F(a_k) - F(a_{k-1}), \qquad k = 2, 3, ..., m,$$

$$p_{m+1} = p(a_m \le x < \infty) = 1 - F(a_m),$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} p_k = 1 .$$

Şimdi farz edelim ki, esas faraziye H_0 faraziyesi x tesadüfi kemiyetinin F(x) dağılım fonksiyonuna sahip olmasıdır. H_0 iddiasını kabul etmek veya reddetmek için bir K kemiyeti dahil edelim. Bu K kemiyeti öyle seçilmelidir ki, istatistik dağılım fonksiyonu $F^*(x)$ ile F(x) teorik dağılım fonksiyonunun farklanma derecesini göstersin. K kemiyeti farklı farklı yöntemlerle seçilebilir. Mesela, K kriterisi olarak,

$$K_1 = \sum_{K=1}^{m+1} \left[p_K - p_K^*\right]^2 ,$$

$$K_2 = \sum_{K=1}^{m+1} c_K \left[p_K - p_K^*\right]^2 ,$$

(Bu arada $c_K \geq 0$ olmakla "ağırlık"lardır.)

$$K_3 = \max\left|F(x) - F^*(x)\right|$$

vs. götürebiliriz.

Şimdi farz edelim ki, K kriterisi her hangi bir yöntemle seçilmiştir. Bu kriterinin kendisi tesadüfi bir kemiyettir. Bu tesadüfi kemiyetin dağılım kanunu x tesadüfi kemiyetinin dağılım kanununa ve $x_1, x_2,..., x_n$ sonuçlarını almak için yapılan deneyler sayısına da bağlıdır. Eğer H_0 esas iddiası doğru ise, o zaman K kemiyetinin dağılım kanunu x tesadüfi kemiyetinin dağılım kanunuyla (F(x) fonksiyonuyla) ve n sayısıyla belirlenebilir.

Şimdi farz edelim ki, K kemiyetinin dağılım kanunu bize bellidir. Farz edelim ki, deneyler sonucund bizim götürdüğümüz ölçü K kriteri bir K_0 değeri almıştır. Bu K_0 değeri esasında H_0 iddiasını kabul edip ya da reddedebilir miyiz?

Bunu açıklamak için önce farz edelim ki, H_0 iddiası doğrudur. Bu zaman,

$$K \geq K_0$$

olayının olasılığını hesaplarız. Eğer bu olasılık çok küçük olursa, o zaman H_0 iddiasını reddetmek gerekir. Bu halde H_0 reelliğe uygun değildir. Eğer $P(K \geq K_0)$ olasılığı yeterli kadar büyük ise, o zaman deneylerden alınan değerlerin H_0 iddiasına zıt olmadığını alırız.

K kriterinin seçilmesi problemi incelenmiştir. K kriterinin bazı seçilişlerinde K kemiyetinin dağılım kanununu basit özellikleri olduğu ve n sayısının büyük değerlerinde F(x) fonksiyonuna bağlı olmadığı gösterilmiştir. Matematiksel istatistikte ölçü kriteri olarak böyle uzlaşma kriterlerinden istifade edilir.

Böyle uzlaşım kriterlerinden biri de Pirsonun "χ^2-Kriterisi"dir.

K. Pirson göstermiştir ki,

$$K = \sum_{i=1}^{m+1} c_i \left(p_i^* - p_i\right)^2 \qquad (1)$$

kriterinde ağırlık katsayılarını

$$c_i = \frac{n}{p_i} \qquad (2)$$

şeklinde seçersek, o zaman n deneyler sayısının büyük değerlerinde K tesadüfi kemiyeti basit özelliklere sahiptir ve bu K kriteri pratik olarak dağılım fonksiyonu F(x)-e ve deneyler sayısı n sayısına bağlı olmaz. Yalnız aralıkların bölge sayısına bağlı olur. n sayısının büyük değerlerinde K-nın dağılım kanunu "χ^2 dağılımına" yaklaşır.

c_i katsayılarını (2) şeklinde seçtiğimizde sapma ölçüsü kriterisi χ^2 şeklinde işaret edilir.

$$\chi^2 = n.\sum_{i=1}^{m+1} \frac{\left(p_i^* - p_i\right)^2}{p_i} \qquad (3)$$

Bu formülde,

$$p_i^* = \frac{v_i}{n} \qquad (4)$$

olduğunu dikkate alırsak bu formülü,

$$\chi^2 = \sum_{K=1}^{m+1} \frac{\left(v_i - np_i\right)^2}{np_i} \qquad (5)$$

şeklinde de yazabiliriz

χ^2 dağılımı bir r parametresine bağlıdır. r parametresine dağılımın serbestlik derecesi denir. Serbestlik sayısı r aralıkların sayısı ile bağımsız koşullar sayısı farkına eşittir. Bağımsız koşullar p_i^* nispi frekansları üzerine konur. Bu koşullara bağlantı koşulları da denir. Böyle koşullara örnek olarak,

$$\sum_{i=1}^{n+1} p_i^* = 1$$

(Bu koşul her zaman yazılır) koşulu ola bilir.

Eğer biz teorik dağılımı öyle seçmeye çalışırsa ki, teoretik ve istatistik ortalamalar birbirine eşit olsun, o zaman,

$$\sum_{i=1}^{m+1} \tilde{x}_i p_i^* = m_x$$

koşulu yazılır. Burada $\tilde{x}_i$ (a_{i-1}, a_i) aralığının orta noktasıdır.

Bundan ilave teoretik ve istatistik dispersiyaların(varyansların) da çakışmasını sağlamışı taleb olunabilir, yani

$$\sum_{i=1}^{m+1} \left(\tilde{x}_i - m_x^*\right)^2 p_i^* = D_x$$

koşulunun sağlanması istenebilir.

χ^2 dağılımı için özel tablo tertip edilmiştir. Bu tablodan istifade ederek χ^2 her bir değerine göre ve serbestlik derecesi r sayısının değerine göre χ^2 kanunu ile dağılmış kemiyetin verilmiş değerden büyük olması olasılığı p olasılığını bulmak olur. Tabloda olan sayılar χ^2 dağılımının değerleridir.

χ^2 dağılımı teoretik ve istatistik dağılımların uzlaşma derecesini değerlendirmeye imkan verir. Farz edelim ki, X tesadüfi kemiyeti F(x) dağılım kanunu ile dağılmıştır. O zaman tablodan bulunmuş p olasılığı teorik ve istatistik dağılımlarının (5) farkının ölçü kriterisi deneylerden divek müşahide olunmuş χ^2 değerinden küçük olmadığı olasılığını gösterecektir. Eğer bu olasılık p çok küçük olursa, o zaman deneyler sonucunun H_0 hipotezine zıt olması alınır. O zaman H_0 faraziyesini doğruya uygun gelmeyen faraziye gibi atmak gerekir. Aksine alınan p olasılığı büyük olursa o zaman H_0 faraziyesini deney verilenlerine zıt gelmeyen bir faraziye gibi sağlamak gereklidir.

Böylece, χ^2 kriterinden teoretik ve itsatistik dağılım fonksiyonlarının uzlaşmasını değerlendirilmesini aşağıdaki etaplara ayırabiliriz:

1. (4) veya (5) formülü esasında χ^2 değerini bulmalı.

2. Serbestlik derecesini bulmalı

$$r = m+1-S$$

burada m+1 aralıkların sayısı S ise bağımsız koşulların sayısıdır.

3. Bulunmuş r ve χ^2 değerlerine esasen χ^2 dağılımı tablosundan verilmiş χ^2 değerinden dağılımı χ^2 olun r serbestlik derecesine sahip kemiyetin değerinin büyük olmasının olasılığı bulunur.

4. Eğer bu olasılık çok küçük olursa, o zaman H_0 faraziyesi doğruluğa uygun olmayan fikir gibi atılır. Eğer bu olasılık büyük ise o zaman H_0 hipotezi sağlanır.

SONUÇ

Gündelik yaşamımızda, pratik problemlerin çözümünde, ilmi araştırmalarda kesin determinizmin sağlanmadığı hallerle daima karşılaşırız. Doğada karşılaştığımız olaylarda rastlantılığın olgusunu yanlız tespit etmek doğadan istifade etmek için veya bir sıra olayları kontrol etmek için yeterli olmuyor. Olayların miktarca değerlendirilmesi yöntemlerini ve böyle olayların gidişini önceden belirleme metodlarını öğrenmek günceldir. Bu hem pratik hem de teorik problemlerin çözümü için gereklidir. Böyle problemlerin çözümü ve incelenmesi metodları matematiğin iki dalında olasılık teorisi ve matematiksel istatistik dallarında yapılır.

Bu tezde olasılık teorisi ve matematiksel istatistiğin esas elemanları ve prensipleri ele alınıp öğrenildi ve birçok örnekde incelenmesi yapıldı. Bu tezde olasılık teorisinin ve matematiksel istatistiğin önemli teoremleri ispatları ile birlikte verildi ve bu esas özellikler örneklerde incelendi.

KAYNAKLAR

1. Feller, William; An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Wiley, New York 1968.

2. Gnedenko, Boris Vladimirovich; The Theory of Probability, Çev: George Yankovsky, Mir Publishers, Moscow 1969.

3. Hudson, D.Y.; Statistics Lectures on Elementary Statistics and Probability, Mir Publishers, Moscow 1967.

4. Kolmogorov, Andrey Nikolaevich; Osnovnıye ponyatiya teori veroyatnostey, Nauka 1974.

5. Loeve, Michel; Probability Theory, Princeton Universty Press, New Jersey 1960.

6. Memmedov, R.; Ali Riyaziyat Kursu III, Maarif neşriyatı, Bakü 1984.

7. Pablovsky, Z.; Vvedeniye v matematiçeskuyu Statistikye, Statistika, 1967.

8. Papoulis, Athanasios; , Probability, Random Variables and Stochastic Processes, New York 1991.

9. Piskunov, Nikolai; Differantial and Integral Calculus, Mir Publishers, Moscow 1969.

10. Riordan, John; Introduction to Combinatorial Analysis, Princeton Universty Press, New Jersey 1978.

11. Şahbazov, A.A.; Ehtimal Nezeriyyesi ve Riyazi İstatika, Elm Neşriyatı, Bakü 1968.

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Yozgat'ta doğan Murat UYMAZ, İlk, orta ve lise öğrenimini sırasıyla Yozgat Fatih Sultan Mehmet İlkokulu, İstiklal Lisesi ve Erdoğan Akdağ Anadolu Lisesinde tamamlamıştır. 1996 yılında kazandığı Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünü 2000 yılında başarıyla bitirmiştir.

Şubat 2013 yılında yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başladı. Prof. Dr. Mammad MUSTAFYEV danışmanlığında hazırladığı " Olasılık Teorisi ve Matematiksel İstatistiğin Elemanları Üzerine" başlıklı tezi ile Yüksek Lisans öğrenimine devam etmektedir.

2000 yılından beri M.E.B bağlı sırasıyla Sarıkaya Küçükçalagıl İ.Ö.O ,Serpil Akdağ Lisesi, Yozgat Lisesinde çalıştı. Halen Yozgat Şehitler Fen Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır. Evli ve üç çocuk babasıdır

<u>İletişim Bilgileri</u>

Adres: Yeni Cami Mah. Güzeltaş St. B Blok Kat:1 No:4 MERKEZ/YOZGAT

Telefon: (505) 359 72 73

E-posta: muymaz66@mynet.com