

**T.C.  
BOZOK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Yüksek Lisans Tezi**

**BOOLE YAKIN HALKALAR VE BOOLE İDEALLER**

**Melek TAŞ**

**Tez Danışmanı  
Yrd. Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR**

**Yozgat 2016**



**T.C.  
BOZOK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Yüksek Lisans Tezi**

**BOOLE YAKIN HALKALAR VE BOOLE İDEALLER**

**Melek TAŞ**

**Tez Danışmanı  
Yrd. Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR**

**Yozgat 2016**

T.C.  
BOZOK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111314006 numaralı öğrencisi Melek TAŞ'ın hazırladığı “Boole Yakın Halkalar ve Boole İdealler” başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 09/12/2016 Cuma günü saat 10:00'da yapılmış, tezin onayına oy birliği ile karar verilmiştir.

**Başkan** : Yrd. Doç. Dr. Emin AYGÜN



**Jüri Üyesi (Danışman)** : Yrd. Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR



**Jüri Üyesi** : Yrd. Doç. Dr. Hürmet Fulya AKIZ



**ONAY:**

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun ..19../12../2016 tarih ve 38. sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

..19../12../2016



Doc. Dr. Fuat KOKSAL  
Müdür

# İÇİNDEKİLER

## Sayfa

<b>ÖZET</b> .....	<b>iii</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>iv</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	<b>v</b>
<b>KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ</b> .....	<b>vi</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. TEMEL BİLGİLER</b> .....	<b>3</b>
2.1. Yakın Halkalar .....	3
2.2. Yakın Halka Modülleri (R-Gruplar).....	6
2.3. Yakın Halkaların Alt Yapıları .....	8
2.4. Yakın Halkaların Asal İdealleri.....	9
<b>3. BOOLE HALKALAR</b> .....	<b>13</b>
3.1. Halka .....	13
3.2. Boole Halka.....	13
<b>4. YAKIN HALKALARDA BOOLE YAPILAR</b> .....	<b>18</b>
4.1. Boole Yakın Halkalar .....	18
4.2. Boole İdealler .....	20
4.3. Boole Halkadan Boole Yakın Halka Elde Etme Metodu .....	24
<b>SONUÇ</b> .....	<b>29</b>
<b>KAYNAKLAR</b> .....	<b>30</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	<b>32</b>

# BOOLE YAKIN HALKALAR VE BOOLE İDEALLER

**Melek TAŞ**

**Bozok Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı  
Yüksek Lisans Tezi**

**2016; Sayfa: 32**

**Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR**

## ÖZET

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalışmayla ilgili literatür bilgisi verilmiştir. Yakın halkalar ve Boole halkalar ile ilgili temel bilgiler detaylı olarak sırasıyla ikinci ve üçüncü bölümde verilmiştir. Orijinal bir çalışmadan oluşan dördüncü bölümde ise Boole yakın halka kavramı yakın halkaların ideallerine genişletilerek ilk kez Boole ideal kavramı tanımlanmıştır. Elde edilen yeni tanımla birlikte Boole idealler ile mevcut olan diğer yapılar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Her Boole idealin aynı zamanda bir IFP ideal olduğu ancak tersinin doğru olmadığı ispatlanmıştır. Yakın halkalardaki asal idealler ile Boole idealler arasında bazı ilişkiler elde edilmiştir. Yine, Boole yakın halkaların sıfırlayan ideallerinin de Boole ideal olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca, kendisi Boole olmadığı halde Boole ideale sahip çeşitli yakın halkalar örnek olarak incelenmiştir. Son olarak, verilen bir Boole halkadan Boole yakın halka elde etme yöntemi ile bir Boole yakın halka elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Yakın halka, Boole halka, Boole yakın halka, Boole ideal, IFP ideal.

# BOOLEAN NEAR RINGS AND BOOLEAN IDEALS

**Melek TAŞ**

**Bozok University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics  
Master of Science Thesis**

**2016; Page: 32**

**Thesis Supervisor: Assist. Prof. Dr. Funda TAŞDEMİR**

## ABSTRACT

This thesis consists of four sections. In the first section, the literature knowledge about the study has been given. Basic knowledges about the near rings and Boolean rings have been given detailed in the second and third section, respectively. In the fourth section, which consists of an original study, the concept of Boolean near ring extended to ideals of near-rings, called Boolean ideals. With the obtained new concept the relationships between Boolean ideals and the other concepts in the literature have been examined. It has been proved that a Boolean ideal is also an IFP ideal but the converse is not true. Some relationships between prime ideals and Boolean ideals in near-rings have been obtained. Also, it has been proved that annihilator ideals of Boolean near-rings are also Boolean ideals. Moreover it has been examined but that some examples to illustrate some near rings, which is not a Boolean near-ring, have Boolean ideals. Finally, a Boolean near ring has been obtained from a given Boolean ring through the method of obtaining a Boolean near ring.

**Keywords:** Near ring, Boolean ring, Boolean near ring, Boolean ideal, IFP ideal.

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimi boyunca ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek aldığım ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabrından dolayı değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR'e, teşekkürlerimi sunarım.

Beni cesaretlendiren, benden bilgi ve desteklerini esirgemeyen bölümümüzün kıymetli hocaları Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU, Yrd. Doç. Dr. Hürmet Fulya AKIZ, Öğr. Gör. Dr. Mehmet EKİCİ, Arş. Gör. Hüseyin KAMACI ve Arş. Gör. Dr. Demet TAYLAN'a ve ayrıca matematik bölümünün tüm değerli hocalarına teşekkürlerimi sunarım.

Tüm bu çalışmalar sırasında oluşan sıkıntılarımı paylaşan, yaşamımın her anında özveriyle beni destekleyen çok kıymetli anneme ve babama sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.



## KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ

- $A^t$  :  $A$  kümesinin tümleyeni
- $H$  : Halka
- $IFP$  : Araya çarpan alma özelliği
- $Kar(H)$  : Halkanın karakteristiği
- $LSD$  : Sol iç dağılmalı
- $RSD$  : Sağ iç dağılmalı
- $R$  : Yakın halka
- $R_0$  :  $R$  yakın halkasının sıfır simetrik kısmı
- $R_c$  :  $R$  yakın halkasının sabit kısmı
- $R/P$  : Bölüm yakın halkası
- $S(G)$  :  $G$ 'den  $G$ 'ye tüm fonksiyonların kümesi
- $S_0(G)$  :  $S(G)$ 'de sıfırı koruyan tüm fonksiyonların kümesi
- $S_c(G)$  :  $S(G)$ 'de tüm sabit fonksiyonların kümesi
- $(0:G)$  :  $G$ 'nin sıfırlayanı
- $0_G$  :  $G$ 'nin sıfır elemanı

## 1. GİRİŞ

Genelleştirilmiş halkalar olan yakın halkalara ilk adım, 1905 senesinde Dickson tarafından atılmıştır. Dickson [1], günümüzde yakın cisim adı verilen dağılma özelliğinin tek taraflı sağlandığı cisimlerin varlığını kanıtlamıştır.

Yakın halkalar, ilk işlemin değişmeli olması gerekmediği ve ikinci işlemin ilk işlem üzerine dağılma yönünün tek yönlü olduğu bir yapıdır [2]. Bu iki özellikten dolayı halkalarda bilinen çoğu kavram yakın halkalarda farklılık göstermiştir. Özellikle, halkalarda tanımlanan tek bir asallık türü mevcutken yakın halkalarda asallık ile ilgili çok fazla tanım mevcuttur. Bu konuda ilk olarak Van der Walt [3], Laxton [4], Ramakotaiah [5], Beidleman [6], Holcombe [7] ve Ramakotaiah ve Rao [8] tarafından çalışmalar yapılmıştır. Daha sonra, Booth ve diğ. [9] yeni bir asallık türü olan e-asallık, Reddy ve Murty [10] ise c-asallık kavramını tanımlamıştır.

Asal idealler arasındaki ilişkiler birçok yakın halka çalışan için büyük bir araştırma konusu olmuş ve halen de olmaktadır [11-18]. Son zamanlarda yakın halkalardaki asallık kavramının yakın halkaların modüllerine aktarılması ile literatüre farklı asal ideal tanımları girmiştir [19-20].

Halka teorisinde de önemli bir rol oynayan Boole halkalar yakın halkalarda da aynı rolü sürdürmektedir. Boole halkalar, tüm elemanları idempotent olan halkalardır [21]. Boole halkalar tanımı gereğince, kullanışlı sonuçların ortaya çıkmasına yol açmıştır. Bunlar, Boole halkaların değişmeli olması, ilk işleme göre her elemanın tersinin kendisine eşit olması, alt halkalarının ve homomorfik görüntülerinin de Boole olması, asal ideallerinin aynı zamanda maksimal ideal olması gibi pek çok kullanışlı özelliklerdir.

Halkalardaki Boole olma özelliği yakın halkalara aktarılarak Boole yakın halkalar tanımlanmıştır [2]. Ancak, yakın halkanın tanımından dolayı, Boole yakın halkalarda Boole halkalarda karşılaştığımız bazı sonuçlara ulaşamayız. En temel olarak, Boole halkalar değişmeli özelliğini sağlıyorken Boole yakın halkalarda bu durum söz konusu değildir. Ancak Boole yakın halkalar sağ değişmeli yakın halkalardır [22].

Clay ve Lawyer [23], birimli bir Boole halkadan Boole yakın halka elde etmenin yolunu göstermiş bu yolla elde edilen yakın halkalara özel yakın halkalar adını vermiştir. Ayrıca bu yakın halkalar sağ değişmeli yakın halkalardır.

Halkalardaki pek çok kavramın yakın halkalara genişletilmesi ve elde edilen farklı sonuçlar nedeniyle Boole yakın halka yapısının da ideallere genişletilmesi merak konusu olmuştur. Bu nedenle, bu tezde, Boole yakın halka kavramı ideal yapısına genişletilerek ilk kez Boole ideal tanımlanmıştır. Bu tanımla, Boole yakın halkaların tüm ideallerinin Boole ideal olduğu açıktır. Ayrıca, kendisi Boole olmadığı halde ideali Boole olabilen yakın halkaların olduğu örneklerle gösterilmiştir. Yine, Boole ideallerin, literatürde önemli bir yer tutan IFP idealler ve asal idealler ile ilişkisi incelenmiştir. Üstelik, Boole yakın halkaların sıfırlayan ideallerinin de Boole ideal olduğu ispatlanmıştır. Son olarak, Clay ve Lawyer [23] tarafından verilen yakın halka elde etme metodu sağ yakın halkalara uygulanarak birimli bir Boole halkadan Boole yakın halka elde edilmiştir.

## 2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, temel bilgi niteliğinde olan ve tezin diğer bölümlerinde ortak olarak kullanılan yapılar verilecektir. Yakın halka teorisi çalışan matematikçiler için temel kaynak olarak kullanılan ilk baskısı 1977 ve yeni baskısı 1983 yılı olan Günter Piltz'e ait '*Near-rings*' [2] bu bölüm için temel kaynak olarak alınmıştır.

### 2.1. Yakın Halkalar

Genelleştirilmiş halkalar olan yakın halkalara ilk adım 1905 senesinde Dickson tarafından atılmıştır. Dickson, tek taraflı dağılma özelliğine sahip olan cisimlerin varlığını kanıtlamıştır. Günümüzde bu cisimler yakın cisim olarak adlandırılmaktadır.

Yakın halkalar, halkalardan farklı olarak, ilk işleme göre değişmeli olması gerekmeyen ve tek taraflı dağılma özelliğinin sağlandığı, genelleştirilmiş halkalardır.

Yakın halkalar aşağıdaki şekilde tanımlanır.

**Tanım 2.1.1.** ([2]) Boştan farklı bir  $R$  cümlesi üzerinde iki ikili işlem "+" ve "." olsun. Eğer,

a)  $(R, +)$  değişmeli olması gerekmeyen bir grup,

b)  $(R, \cdot)$  bir yarı grup,

c)  $\forall a, b, c \in R$  için aşağıdaki iki dağılma özelliğinden en az birisi sağlanıyorsa ise

$$\text{i) } (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{veya} \quad \text{ii) } a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$(R, +, \cdot)$  üçlüsüne bir *yakın halka* denir.

Eğer (a), (b) ve (i) şartı sağlanıyorsa,  $R$ 'ye bir sağ yakın halka, (a), (b) ve (ii) şartı sağlanıyorsa,  $R$ 'ye bir sol yakın halka denir. Yani, dağılma özelliğinin yönü, yakın halkanın sağ yakın halka ya da sol yakın halka olarak adlandırılmasını belirler.

Bu tez çalışmasında kullanılan her yakın halka terimi sağ yakın halkayı ifade edecektir. Bulunan sonuçlar sol yakın halkalar için de benzer şekilde sağlanmaktadır.

**Örnek 2.1.2.**  $(G, +)$  herhangi bir grup olsun.

$$S(G) = \{h: G \rightarrow G \mid h \text{ bir fonksiyon}\}$$

ile tanımlanan cümle, fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri altında bir yakın halkadır.

**Örnek 2.1.3.**  $(G, +)$  herhangi bir grup ve “ $0_G$ ” bu grubun etkisiz elemanı olmak üzere fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri altında aşağıdakiler birer yakın halkadır.

a)  $S_0(G) = \{h: G \rightarrow G \mid h(0_G) = 0_G\}$

b)  $S_c(G) = \{h: G \rightarrow G \mid h \text{ sabit}\}$

**Örnek 2.1.4.**  $(R, +)$  bir grup ve bu grup üzerinde ikinci işlem,  $\forall a, b \in R$  için;

$$ab = \begin{cases} a, & b \neq 0 \\ 0, & b = 0 \end{cases}$$

ile verilsin. Bu durumda,  $R$  bir yakın halka olur. Bu yakın halka literatürde *aşıkak yakın halka* olarak adlandırılır.

**Örnek 2.1.5.** Her grup için bir yakın halka elde edilebilir. Gerçekten,  $(R, +)$  grubu üzerinde ikinci işlem,  $\forall a, b \in R$  için,

$$a \cdot b = 0$$

ile tanımlanırsa,  $(R, +, \cdot)$  bir yakın halkadır.

**Özellikler 2.1.6.** ([2])  $R$  bir yakın halka olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler vardır.

a)  $\forall a \in R$  için,  $0a = 0$  'dir.

b)  $\forall a, b \in R$  için,  $(-a)b = -ab$  'dir.

**İspat: a)**  $\forall a \in R$  için, sağdan dağılma özelliğinden,

$$0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$$

ve buradan  $0a = 0$  bulunur.

**b)**  $\forall a, b \in R$  için, sağdan dağılma özelliği ve (a) kullanılarak,

$$(-a)b = (0 - a)b = 0b - ab = 0 - ab = -ab$$

elde edilir.

**Tanım 2.1.7.** ([2])  $R$  bir yakın halka olsun.

**a)**  $R_0 = \{r \in R \mid r0 = 0\}$  cümlesine  $R$  yakın halkasının sıfır-simetrik kısmı,

**b)**  $R_c = \{r \in R \mid r0 = r\} = \{r \in R \mid \forall r' \in R \text{ için } rr' = r\}$  cümlesine  $R$  yakın halkasının sabit kısmı denir.

$R_0$  ve  $R_c$  birer yakın halka olup,  $R = R_0$  ise  $R$  yakın halkasına *sıfır-simetrik* yakın halka ve  $R = R_c$  ise  $R$  yakın halkasına *sabit* yakın halka denir.

**Örnek 2.1.8.** ([2])  $(S(G))_0 = S_0(G)$  ve  $(S(G))_c = S_c(G)$  dir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} (S(G))_0 &= \{h \in S(G) \mid h \circ 0 = 0\} \\ &= \{h \in S(G) \mid h(0) = 0\} \\ &= S_0(G) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (S(G))_c &= \{h \in S(G) \mid h \circ 0 = h\} \\ &= \{h \in S(G) \mid h \text{ sabit}\} \\ &= S_c(G) \end{aligned}$$

## 2.2. Yakın Halka Modülleri (R-gruplar)

Halkalarda modül kavramının, yakın halkalara aktarılmasıyla oluşan  $R$ -grup kavramı aşağıdaki gibi tanımlanır:

**Tanım 2.2.1.** ([2])  $(G, +)$  bir grup ve  $R$  bir yakın halka olsun.

$$\delta : R \times G \rightarrow G$$

$$(r, g) \rightarrow rg$$

olsun. Eğer  $\forall a, b \in R$  ve  $\forall g \in G$  için;

$$(a + b)g = ag + bg$$

ve

$$(ab)g = a(bg)$$

şartları sağlanıyorsa  $(G, \delta)$  ikilisine bir  $R$ -grup yani  $R$  üzerinde yakın modül denir. Kısaca  $R^G$  ile gösterilir. Eğer  $R$ , birimi 1 olan birimli bir yakın halka ise,  $\forall g \in G$  için,

$$1g = g$$

şartını sağlayan  $G$ ,  $R$ -grubuna, üniter  $R$ -grup denir.

**Örnek 2.2.2. a)**  $R$  bir yakın halka olsun.

$$\delta : R \times R \rightarrow R$$

$$(a, b) \rightarrow ab$$

altında  $(R, +)$  bir  $R$ -gruptur. Bu  $R$ -grup kısaca  $R^R$  ile gösterilir.

**b)**  $G$  bir grup olsun. Bu durumda,  $\delta : S(G) \times G \rightarrow G$

$$(h, g) \rightarrow h(g)$$

altında,  $G$  bir  $S(G)$ -gruptur. Gerçekten,  $\forall h_1, h_2 \in S(G)$  ve  $\forall g \in G$  için,

$$(h_1 + h_2)g = (h_1 + h_2)(g) = h_1(g) + h_2(g) = h_1g + h_2g$$

ve

$$(h_1h_2)g = (h_1h_2)(g) = h_1(h_2(g)) = h_1(h_2g)$$

sağlanır.

$R$ -grup kavramıyla ilgili bazı temel özellikler aşağıdadır.

**Özellikler 2.2.3.**  $R$  bir yakın halka ve  $G$  bir  $R$ -grup olsun. Bu durumda,

- a)  $\forall g \in G$  için  $0g = 0_G$ ,
- b)  $\forall g \in G$  ve  $\forall a \in R$  için  $(-a)g = -ag$ ,
- c)  $\forall a \in R_0$  için  $a0_G = 0_G$ ,
- d)  $\forall g \in G$  ve  $\forall r \in R_c$  için  $rg = r0_G$ 'dir.

**İspat:** a)  $\forall g \in G$  için,

$$0g = (0 + 0)g = 0g + 0g$$

ve dolayısıyla  $0g = 0_G$  dir.

b)  $\forall g \in G$  ve  $\forall a \in R$  için,

$$(-a)g = (0 - a)g = 0g - ag = 0_G - ag = -ag$$

dir.

c)  $\forall a \in R_0$  için,

$$a0_G = a(00_G) = (a0)0_G = 00_G = 0_G$$

dir.

d)  $\forall g \in G$  ve  $\forall r \in R_c$  için,



$$rg = (r0)g = r(0g) = r0_G$$

elde edilir.

### 2.3. Yakın halkaların Alt Yapıları

**Tanım 2.3.1.** ([2])  $R$  bir yakın halka ve  $(S, +)$ ,  $(R, +)$ 'nin bir alt grubu olsun. Eğer,  $\forall s_1, s_2 \in S$  için  $s_1 s_2 \in S$  sağlanıyorsa,  $S$ 'ye  $R$ 'nin bir *alt yakın halkası* denir.

**Örnek 2.3.2.**  $R_0$  ve  $R_c$ ,  $R$  yakın halkasının alt yakın halkalarıdır. Gerçekten,  $\forall a, b \in R_0$  için,

$$(a - b)0 = a0 - b0 = 0 - 0 = 0$$

yani,  $(R_0, +)$ ,  $(R, +)$ 'nin bir alt grubudur.  $\forall a, b \in R_0$  için,

$$(ab)0 = a(b0) = a0 = 0$$

dır. Buradan,  $R_0 R_0 \subseteq R_0$  olur. Şimdi,  $\forall a, b \in R_c$  için,

$$(a - b)0 = a0 - b0 = a - b$$

yani,  $(a - b) \in R_c$  olur. Bu ise,  $(R_c, +)$  grubunun  $(R, +)$ 'nin bir alt grubu olduğunu gösterir.  $\forall a, b \in R_c$  için,

$$(ab)0 = a(b0) = ab$$

dir. Böylece,  $R_c R_c \subseteq R_c$  elde edilir.

**Tanım 2.3.3.**  $R$  bir yakın halka ve  $G$  bir  $R$ -grup olsun.  $G$ 'nin

$$RA \subseteq A$$

şartını sağlayan bir  $A$  alt grubuna  $G$ 'nin bir  $R$ -alt grubu denir ve  $A \leq_R G$  ile gösterilir.

**Tanım 2.3.4.**  $R$  bir yakın halka,  $G$  bir  $R$ -grup,  $A$  ve  $B$   $G$ 'nin herhangi iki alt cümlesi olsun. Bu durumda,

$$(A : B) = \{r \in R \mid rB \subseteq A\}$$

ile verilir.

#### 2.4. Yakın Halkaların Asal İdealleri

**Tanım 2.4.1.** ([2])  $R$  bir yakın halka ve  $I$ ,  $R$ 'nin bir normal alt grubu olsun. Bu durumda, eğer,

a)  $IR \subseteq I$

b)  $\forall a, b \in R$  ve  $\forall i \in I$  için,  $a(b + i) - ab \in I$

şartları sağlanıyorsa,  $I$ 'ya  $R$  yakın halkasının bir *ideali* denir ve  $I \trianglelefteq R$  ile gösterilir. Eğer, sadece a) şartı sağlanıyorsa  $I$ ,  $R$ 'nin bir sağ ideali, sadece b) şartı sağlanıyorsa  $I$ ,  $R$ 'nin bir sol ideali adını alır ve sırasıyla  $I \trianglelefteq_r R$  ve  $I \trianglelefteq_l R$  ile gösterilir.

**Tanım 2.4.2.** ([11])  $(R, +, \cdot)$  bir yakın halka olsun.

a)  $\forall x, y, z \in R$  için  $xyz = xzy$  ise  $R$ 'ye *sağ değişmeli*,

b)  $\forall x, y, z \in R$  için  $xyz = yxz$  ise  $R$ 'ye *sol değişmeli*,

c)  $\forall x, y, z, t \in R$  için  $xyzt = xzyt$  ise  $R$ 'ye *medial* yakın halka denir.

Birkenmeier ve Heatherly [11] bu özdeşliklere “Üç Özdeşlikler” adını vermiş ve bu üç özdeşliği sağlayan yakın halkalar teorisini geliştirmişlerdir. Yakın halka literatürünün incelenmesi sonucunda bu özdeşliklerden birini sağlayan birçok yakın halkanın olduğu görülmüştür. Pilz [2] yakın halkalarda sağ değişmelilik için “zayıf değişmeli” kavramını kullanmıştır. Hem sağ hem de sol değişmeli olan yakın halkalara *değişmeli yakın halkalar* denir.

**Tanım 2.4.3.** ([12])  $(R, +, \cdot)$  bir yakın halka olsun.

a)  $\forall x, y, z \in R$  için  $xyz = xzyz$  ise  $R$  yakın halkasına *sağ iç dağılmalı (RSD)*,

b)  $\forall x, y, z \in R$  için  $xyz = xyxz$  ise  $R$  yakın halkasına *sol iç dağılmalı (LSD)*

yakın halka denir.

**Örnek 2.4.4.**  $(R, +)$  Klein-4-grubu üzerinde çarpma işlemi aşağıdaki tablo ile verilen  $(R, +, \cdot)$  sağ değişmeli bir yakın halkadır.

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	a	a
b	0	b	b	b
c	0	c	c	c

**Örnek 2.4.5.**  $(\mathbb{Z}_8)$   $R = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$  üzerinde toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki tablolar ile verilen bir yakın halkadır.

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	0	5	6	7	4
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	0	1	2	7	4	5	6
4	4	7	6	5	0	3	2	1
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	5	4	7	2	1	0	3
7	7	6	5	4	3	2	1	0

.	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	0	2	0	0	0	0
3	0	3	2	1	4	5	6	7
4	0	4	2	6	4	0	6	2
5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	4	4	0	6	2
7	0	7	0	7	0	5	0	5

$(R, +, \cdot)$  yakın halkası sol değişmeli ve LSD yakın halka değildir.  $S = \{0,2,5,7\}$ ,  $R$ 'nin bir alt yakın halkası olmak üzere  $S$  sol değişmeli ve LSD yakın halkadır.

**Tanım 2.4.6.**  $([7,9,13])$   $R$  bir yakın halka ve  $P \triangleleft R$  olmak üzere;

- a)  $\forall X, Y \triangleleft R$  için  $XY \subseteq P$  iken  $X \subseteq P$  veya  $Y \subseteq P$  ise  $P$ 'ye 0-asal,
- b)  $\forall X, Y \triangleleft_l R$  için  $XY \subseteq P$  iken  $X \subseteq P$  veya  $Y \subseteq P$  ise  $P$ 'ye 1-asal,
- c)  $\forall X, Y \leq_R R$  için  $XY \subseteq P$  iken  $X \subseteq P$  veya  $Y \subseteq P$  ise  $P$ 'ye 2-asal,

- d)  $x, y \in R$  için  $xRy \subseteq P$  iken  $x \in P$  veya  $y \in P$  ise  $P$ 'ye 3-asal,  
e)  $x, y \in R$  için  $xy \in P$  iken  $x \in P$  veya  $y \in P$  ise  $P$ 'ye  $c$ -(tam) asal,  
f)  $x, a, b \in R$  için  $xra - xrb \in P$  olacak şekildeki  $\forall r \in R$  için  $x \in P$  veya  $a - b \in P$  ise  $P$ 'ye  $e$ -asal ideal denir.

**Tanım 2.4.7.** Eğer  $R$  yakın halkasının sıfır ideali  $v = 0,1,2,3,c,e$  olmak üzere  $v$ -asal ideal ise,  $R$  yakın halkasına bir  $v$ -asal yakın halka denir [14].

$P \triangleleft R$  ve  $v = 0,1,2,3,c,e$  için  $P$ 'nin  $v$ -asal ideal olması için gerek ve yeter şart  $R/P$ 'nin bir  $v$ -asal yakın halka olmasıdır.

Yakın halkalar üzerinde  $e$ -asallık 3-asallığı, 3-asallık 2-asallığı, 1-asallık 0-asallığı, ve yakın halka sıfır-simetrik ise 2-asallık 1-asallığı gerektirir. Bunların tersleri, yakın halka sıfır-simetrik olsa dahi genelde doğru değildir.

Asal ideallere benzer olarak yarı asal idealler de aşağıdaki şekilde tanımlanır.

**Tanım 2.4.8.** ([7,9,13])  $R$  bir yakın halka ve  $P \triangleleft R$  olmak üzere;

- a)  $\forall X \triangleleft R$  için  $X^2 \subseteq P$  iken  $X \subseteq P$  ise  $P$ 'ye 0-yarı-asal ideal,  
b)  $\forall X \triangleleft_l R$  için  $X^2 \subseteq P$  iken  $X \subseteq P$  ise  $P$ 'ye 1-yarı-asal ideal,  
c)  $\forall X \leq_R R$  için  $X^2 \subseteq P$  iken  $X \subseteq P$  ise  $P$ 'ye 2-yarı-asal ideal,  
d)  $\forall x \in R$  için  $xRx \subseteq P$  iken  $x \in P$  ise  $P$ 'ye 3-yarı-asal ideal,  
e)  $\forall x \in R$  için  $x^2 \in P$  iken  $x \in P$  ise  $P$ 'ye  $c$ -yarı asal ideal denir.

**Tanım 2.4.9.** ([3])  $R$  bir yakın halka olsun. Eğer  $R$ 'nin sıfır ideali  $v=0,1,2,3,c$  olmak üzere  $v$ -yarı asal ideal ise,  $R$  yakın halkasına bir  $v$ -yarı asal yakın halka denir.

$P \triangleleft R$  ve  $v = 0,1,2,3,c$  olsun. Bu durumda  $P$   $v$ -yarı asaldır gerek ve yeter şart  $R/P$  bir  $v$ -yarı asal yakın halkadır.

**Önerme 2.4.10.** ([2])  $v = 0,1,2,3,c$  için  $P \triangleleft R$   $v$ -asal olsun. Bu durumda  $P$   $v$ -yarı asaldır.

**Önerme 2.4.11.** ([14])  $R$  sıfır-simetrik bir yakın halka ve  $P \triangleleft R$  olsun. Bu durumda,  $P$   $c$ -yarı-asal  $\Rightarrow P$  3-yarı-asal  $\Rightarrow P$  2-yarı-asal  $\Rightarrow P$  1-yarı-asal  $\Rightarrow P$  0-yarı-asaldır.



### 3. BOOLE HALKALAR

#### 3.1. Halka

**Tanım 3.1.1.** ([21]) Boştan farklı bir  $H$  cümlesi üzerinde iki ikili işlem “+” ve “.” olsun. Eğer,

a)  $(H, +)$  değişmeli bir grup,

b)  $(H, .)$  bir yarı-grup,

c)  $\forall a, b, c \in H$  için aşağıdaki iki dağılma özelliği de sağlanıyor ise

$$\text{i) } (a + b).c = a.c + b.c \quad \text{ve} \quad \text{ii) } a.(b + c) = a.b + a.c$$

$(H, +, .)$  üçlüsüne *halka* denir.

**Örnek 3.1.2.**  $H$  bir halka olmak üzere  $M_n(H)$  elemanları  $H$  halkasına ait olan bütün  $n \times n$  karesel matrislerin kümesi olsun. O takdirde bu küme üzerinde toplama işlemi olarak matrislerin bilinen toplama işlemi ve çarpma işlemi olarak da bilinen matris çarpımını gözönüne alırsak o zaman  $(M_n(H), +, .)$  birimli fakat değişmeli olmayan bir halka teşkil eder. Bu durumda,  $M_n(\mathbb{Z})$ ,  $M_n(\mathbb{Q})$ ,  $M_n(\mathbb{R})$ ,  $M_n(\mathbb{C})$  kümeleride birer halkadır.

#### 3.2. Boole Halka

**Tanım 3.2.1.** ([21])  $H$  bir halka olsun.  $\forall a \in H$  için  $a^2 = a$  ise  $H$ 'ye bir *Boole halka* denir. Yani her elemanı idempotenttir.

**Örnek 3.2.2.**  $X$  herhangi bir küme ve  $P(X)$ ,  $X$ 'in kuvvet kümesi olsun.

$\forall A, B \in P(X)$  için,  $A + B = A \Delta B$  ve  $A.B = A \cap B$  ile tanımlanan  $(P(X), +, .)$  birimli ve değişmeli bir Boole halkadır. Gerçekten,  $A, B, C \in P(X)$  için,

$$A + B \in P(X)$$

ve simetrik fark işleminin birleşme özelliğinden,

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

dir.  $\emptyset$  birim elemandır ve her elemanın tersi kendisine eşittir. Ayrıca simetrik fark işleminin değişme özelliğinden  $(P(X), +)$  abelyen bir gruptur.  $(P(X), \cdot)$  nin bir yarı-grup olduğu ve dağılma özellikleri ise kesişim ve fark işlemlerinin özelliklerinden açıktır. Böylece,  $(P(X), +, \cdot)$  bir halkadır. Üstelik;  $P(X)$  değişmeli ve birimi  $X$  olan birimli bir halkadır. Ayrıca,  $A \in P(X)$  için  $A^2 = A.A = A \cap A = A$  olup  $(P(X), +, \cdot)$  bir Boole halkadır.

**Önerme 3.2.3.** ([21])  $H$  bir Boole halka olmak üzere  $a \in H$  için,  $a = -a$  'dır.

**İspat:**  $H$  bir Boole halka olduğundan  $a \in H$  için,  $a^2 = a$  'dır.

$$\begin{aligned} a + a &= (a + a)^2 = (a + a). (a + a) \\ &= (a + a). a + (a + a). a \\ &= a^2 + a^2 + a^2 + a^2 \\ &= a + a + a + a \end{aligned}$$

Buradan,

$$a = -a$$

dır.

**Önerme 3.2.4.** ([21])  $H$  bir Boole halka ise  $H$  değişmelidir.

**İspat:**  $H$  bir Boole halka olmak üzere;

$$\begin{aligned} a, b \in H \text{ için, } a + b &= (a + b)^2 = (a + b). (a + b) \\ &= (a + b). a + (a + b). b \\ &= a^2 + b. a + a. b + b^2 \end{aligned}$$

$$= a + b.a + a.b + b$$

Buradan,

$$0 = b.a + a.b$$

bulunur. Ve ayrıca,

$$b.a = -(a.b)$$

olur.

Önerme 3.2.3'den  $-(a.b) = a.b$  'dir. Yani  $b.a = -(a.b) = a.b$  olup değişme özelliği sağlanır.

**Not:** Önerme 3.2.4.'den Boole halkalar değişmeli olduğundan Boole halkasının her sağ (sol) ideali Boole halkasının bir idealidir.

**Sonuç 3.2.5.**  $H$  bir Boole halka olsun. Bu durumda  $Kar(H) = 2$  'dir.

**İspat:**  $H$  bir Boole halka olduğundan Önerme 3.2.3'den,  $a = -a$  yani,

$$2a = a + a = 0 \text{ olup } Kar(H) = 2 \text{ bulunur.}$$

**Önerme 3.2.6.** Bir Boole halkasının bir alt halkası da Boole halkadır. Üstelik, Boole halkasının bir homomorfik görüntüsü de Boole'dür.

**İspat:**  $H$  bir Boole halka ve  $S$ , de  $H$  halkasının alt halkası olsun. Bu durumda,  $\forall x \in S$  için,  $x \in H$  olduğundan  $x$  idempotenttir. Yani  $S$ , Boole halkadır.

$\Pi: H \rightarrow T$  bir halka epimorfizmi olsun. Bu durumda,  $t \in T$  ise  $\exists h \in H$  için,

$t = \Pi(h)$ 'dir. Buradan,

$$t^2 = \Pi(h).\Pi(h)$$

$$= \Pi(h^2)$$

$$= \Pi(h)$$

$$= t$$



Yani  $T$ 'nin her elemanı idempotenttir. Böylece;  $T$  Boole halkadır.

**Önerme 3.2.7.**  $H$  bir Boole halka ve  $I \triangleleft H$  olmak üzere  $H/I$  'da bir Boole halkadır.

**İspat:**  $H$  bir Boole halka olsun. Bu durumda  $H/I$  de bir halkadır. Diğer taraftan,

$H$  bir Boole halka olduğundan  $x \in H$  için,  $x^2 = x$  'tir.  $x + I \in H/I$  için,

$$(x + I)^2 = (x + I) \cdot (x + I)$$

$$= x^2 + I$$

$$= x + I$$

dir. Böylece;  $H/I$  bir Boole halkadır.

**Önerme 3.2.8.**  $H$  bir cisim olsun. Eğer;  $H$  Boole ise bu durumda  $H \cong \mathbb{Z}_2$  'dir.

**İspat:**  $0 \neq x \in H$  olsun.  $x^2 = x$  olduğundan,

$$x^2 - x = 0$$

dir. Böylece,

$$x(x - 1) = 0$$

olup,  $H$  cisim olduğundan  $H$  aynı zamanda sıfır-bölensiz olacağından, ve ayrıca  $0 \neq x$  olduğundan  $x = 1$  bulunur. Buradan,

$$H = \{0,1\} \cong \mathbb{Z}_2$$

dir.

**Önerme 3.2.9.**  $H$  birimli bir Boole halka olsun. Bu durumda,  $H$  nin her asal ideali maksimaldir.

**İspat:**  $P$ ,  $H$  halkasının bir asal ideali olsun.  $P$ 'nin maksimal olduğunu göstermek için  $H/P$  'nin cisim olduğunun gösterilmesi yeterlidir.  $H$  birimli bir Boole halka olduğundan, Önerme 3.2.4 ve Önerme 3.2.7'den  $H/P$  ' de birimli ve değişmeli bir

halkadır. Dolayısıyla  $H/P$  'nin cisim olduğunu göstermek için yalnızca sıfırdan farklı her elemanın tersi olduğunu göstermek yeterlidir.

$P \neq x + P \in H/P$  olsun. Buradan  $x \notin P$  olup  $H$  Boole halka olduğundan,

$$x^2 + P = x + P$$

olup, buradan

$$x(x - 1) = x^2 - x \in P$$

dir.  $x \notin P$  ve  $P$  asal ideal olduğundan

$$x - 1 \in P$$

bulunur.

Buradan,

$$x + P = 1 + P$$

dir. Sonuç olarak,  $H/P = \{P, 1 + P\}$  yani  $H/P$  cisimdir.

## 4. YAKIN HALKALARDA BOOLE YAPILAR

### 4.1. Boole Yakın Halkalar

Bu bölümde, halkalardaki pek çok kavramın yakın halkalara genişletildiği gibi Boole yakın halkalar da halka teoride önemli bir rol oynayan ideal yapısına genişletilmiştir. Bunun için öncelikle Boole yakın halkaları detaylı olarak verelim.

**Tanım 4.1.1.** ([2])  $R$  bir yakın halka olsun.  $x \in R$  için,  $x^2 = x$  ise  $R$  'ye bir *Boole yakın halka* denir.

**Örnek 4.1.2.** Örnek 3.2.2'deki  $(P(X), \Delta, \cap)$  halkası aynı zamanda birimli, değişmeli bir Boole yakın halkadır.

**Örnek 4.1.3.** Örnek 2.4.4'deki  $(R, +, \cdot)$  bir Boole yakın halkadır.

**Örnek 4.1.4.**  $S_0(\mathbb{Z}_2) = \{f \in S(\mathbb{Z}_2) \mid f(0) = 0\}$  kümesi fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri ile bir Boole yakın halkadır.

**Örnek 4.1.5.** Her sabit yakın halka sağ değişmeli bir Boole yakın halkadır.

**Örnek 4.1.6.** Aşık her yakın halka bir Boole yakın halkadır.

**Önerme 4.1.7.** Bir Boole yakın halkanın bir alt yakın halkası da Boole yakın halkadır. Üstelik; Boole yakın halkanın bir homomorfik görüntüsü de Boole'dür.

**İspat:**  $R$  bir Boole yakın halka ve  $S$ , de  $R$  yakın halkasının alt yakın halkası olsun. Bu durumda,  $\forall x \in S$  için,  $x \in H$  olduğundan  $x$  idempotenttir. Yani  $S$ , Boole yakın halkadır.  $\Pi: R \rightarrow T$  bir yakın halka epimorfizmi olsun. Bu durumda,  $t \in T$  ise  $\exists r \in R$  için,  $t = \Pi(r)$ 'dir. Buradan,

$$t^2 = \Pi(r) \cdot \Pi(r)$$

$$= \Pi(r^2)$$

$$= \Pi(r)$$

$$= t$$

Yani,  $T$ 'nin her elemanı idempotent böylece;  $T$  Boole yakın halkadır.

**Teorem 4.1.8.** ([23]) Her Boole yakın halka sağ değişmelidir.

**Not:** Boole yakın halkalar sağ değişmelidir ancak değişmeli olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnek bunu gösterir.

**Örnek 4.1.9.** Örnek 2.4.4. deki  $(R, +, \cdot)$  yakın halkası sağ değişmeli Boole bir yakın halkadır. Ancak  $c \cdot a = c \neq a = a \cdot c$  olduğundan değişmeli değildir.

**Tanım 4.1.10.** ([8])  $R$  bir yakın halka olsun.  $a, b \in R$  için,  $ab = 0$  olması her

$r \in R$  için  $arb = 0$  olmasını gerektiriyorsa  $R$  yakın halkasına araya çarpan alma özelliğini sağlıyor veya kısaca *IFP* yakın halka denir.

Eğer  $P \triangleleft R$  ve  $R/P$  bir *IFP* yakın halka ise bu durumda  $P$ 'ye  $R$ 'nin *IFP* ideali adı verilir [17].

**Lemma 4.1.11.** Her Boole yakın halka bir *IFP* yakın halkadır.

**İspat:**  $R$  bir Boole yakın halka ve  $a, b, r \in R$  için  $ab = 0$  olsun. Bu durumda Teorem 4.1.8'den

$$arb = abr = 0r = 0$$

olur. Buradan  $R$ , bir *IFP* yakın halkadır.

**Teorem 4.1.12.**  $R$  bir Boole yakın halka ve  $P \triangleleft R$  olmak üzere  $R/P$  de bir Boole yakın halkadır.

**İspat:**  $R$  bir yakın halka olduğunda  $R/P$ 'nin de bir yakın halka olduğu açıktır. Diğer taraftan,

$x + P \in R/P$  için,

$$(x + P)^2 = (x + P) \cdot (x + P) = x \cdot x + P = x^2 + P = x + P$$

dir.

Buradan  $R/P$  bir Boole yakın halkadır.

Boole yakın halkalar ideal yapısına genişletilerek Boole ideal tanımlanmıştır.

## 4.2. Boole İdealler

**Tanım 4.2.1.**  $R$  bir yakın halka ve  $P \triangleleft R$  olsun. Eğer,  $R/P$  bir Boole yakın halka ise  $P$ 'ye  $R$ 'nin bir Boole ideali denir.

**Önerme 4.2.2.**  $R$  bir yakın halka ve  $P \triangleleft R$  olsun.  $P$ , Boole idealdir gerek ve yeter şart  $x \in R$  için,  $x^2 - x \in P$  dir.

**İspat:** Boole idealin tanımından açık olarak görülür.

**Sonuç 4.2.3.**  $R$  bir Boole yakın halkadır gerek ve yeter şart  $\{0\} \triangleleft R$  Boole idealdir.

**İspat:** Boole idealin tanımından açık olarak görülür.

**Sonuç 4.2.4.**  $R$  bir Boole yakın halkadır gerek ve yeter şart  $R$ 'nin tüm idealleri Boole idealdir.

**İspat:**  $R$  bir Boole yakın halka ve  $P \triangleleft R$  olsun.  $\forall x \in R$  için  $x^2 = x$  olduğundan  $x^2 - x = 0 \in P$  olup  $P$  bir Boole idealdir. Tersine ise açıktır.

**Sonuç 4.2.5.**  $R$  bir sabit yakın halka olmak üzere,  $P \triangleleft R$  ise,  $P$  Boole idealdir.

**İspat:**  $R$  bir sabit yakın halka ve  $x \in R$  ise,  $x^2 = x$  olup  $x^2 - x = 0 \in P$  dir. Böylece,  $P$  Boole idealdir.

Aşağıdaki verilen örneklerde, kendisi Boole olmadığı halde Boole ideale sahip yakın halkalar verilmiştir.

**Örnek 4.2.6.** Örnek 2.4.5'deki  $(R, +, \cdot)$  yakın halkası Boole yakın halka değildir. Fakat  $\{0,2,5,7\} \triangleleft R$  Boole idealdir.

**Örnek 4.2.7.** ([13])  $R = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$  cümlesi aşağıdaki tablolardaki toplama ve çarpma işlemleri ile verilen bir yakın halka olmak üzere,

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	0	5	6	7	4
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	0	1	2	7	4	5	6
4	4	7	6	5	0	3	2	1
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	5	4	7	2	1	0	3
7	7	6	5	4	3	2	1	0

.	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1	0
2	0	2	0	2	0	2	2	0
3	0	3	0	3	0	3	3	0
4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	4	5	4	5	4	5	5	4
6	4	6	4	6	4	6	6	4
7	4	7	4	7	4	7	7	4

$(R, +, \cdot)$  Boole olmayan bir yakın halkadır. Ancak,  $P = \{0,1,2,3\} \triangleleft R$  bir Boole idealdir.

**Örnek 4.2.8.**  $(\mathbb{Z}_6, +)$  toplamsal grubu üzerinde aşağıdaki tablo ile verilen çarpma işlemi altında  $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$  bir sağ değişmeli yakın halkadır.

$R = (\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$  olmak üzere

.	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	3	1	5	3	1	5
2	0	2	4	0	2	4
3	3	3	3	3	3	3
4	0	4	2	0	4	2
5	3	5	1	3	5	1

$R$  bir Boole yakın halka değildir.  $P_1 = \{0,3\}$  ve  $P_2 = \{0,2,4\}$   $R$ 'nin iki ideali olmak üzere,  $P_1$  Boole ideal olmadığı halde  $P_2$  bir Boole idealdir.

**Örnek 4.2.9.**  $R = \{0,1,2,3\}$  Klein-4 grubu olsun.  $R$ 'deki çarpma işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

.	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	0	0	0	0
3	1	1	1	3

Bu durumda  $(R, +, \cdot)$  bir yakın halkadır.  $R$ 'nin idealleri  $\{0\}$ ,  $\{0,1\}$ ,  $\{0,2\}$  ve  $R$  dir. Bu durumda,  $R$  Boole değildir, ancak  $P_1 = \{0,2\}$  Boole idealdir.

**Örnek 4.2.10.**  $R, S_3$  simetrik grubu aşağıdaki tablolar ile verilen toplama ve çarpma işlemleri altında bir yakın halka olsun [15].

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	0	5	4	3	2
2	2	4	0	5	1	3
3	3	5	4	0	2	1
4	4	2	3	1	5	0
5	5	3	1	2	0	4

.	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	1	1
3	1	1	3	3	1	1
4	0	0	4	4	0	0
5	0	0	5	5	0	0

Burada,

$$S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

dir. Ve ayrıca,

$$0 \rightarrow e, \quad 1 \rightarrow (23), \quad 2 \rightarrow (13), \quad 3 \rightarrow (12), \quad 4 \rightarrow (132), \quad 5 \rightarrow (123)$$

dir.  $R$ 'nin idealleri  $P = \{0, 4, 5\}$  ve aşık idealerdir.  $R$  bir Boole yakın halka değildir ancak  $P = \{0, 4, 5\}$   $R$ 'nin bir Boole idealidir.

Aşağıdaki önermeler ile yakın halkalarda Boole idealler ile  $IFP$  idealler arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

**Önerme 4.2.11.**  $R$  bir yakın halka ve  $P \triangleleft R$  olsun. Eğer  $P$ , Boole ideal ise  $IFP$  idealdir.

**İspat:**  $P, R$ 'nin bir Boole ideali ise bu durumda  $R/P$  bir Boole yakın halkadır. Lemma 4.1.11'den  $R/P$   $IFP$  yakın halkadır.  $IFP$  ideal tanımından;  $R/P$   $IFP$  yakın halka ise  $P$   $IFP$  idealdir.

Önerme 4.2.11'in tersi doğru değildir. Yani, her  $IFP$  ideal bir Boole ideal değildir. Aşağıdaki örnek bunu gösterir.

**Örnek 4.2.12.** Örnek 4.2.9'daki  $R$  yakın halkasının idealleri  $\{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}$  ve  $R$  dir.  $R$ 'nin  $\{0,1\}$  ideali bir  $IFP$  idealidir ancak Boole ideal değildir.

**Sonuç 4.2.13.**  $R$  bir Boole yakın halka ve  $P \triangleleft R$  olsun. Bu durumda,  $P$ ,  $IFP$  idealdir.

**İspat:**  $R$  bir Boole yakın halka ise Sonuç 4.2.4'den tüm idealleri Boole idealdir. Önerme 4.2.11'den tüm idealleri  $IFP$  'dir.

**Önerme 4.2.14.**  $R$  bir yakın halka ve  $P \triangleleft R$  olsun.  $P$ , Boole ideal ise aynı zamanda  $c$ -yarı asaldir.

**İspat:**  $a \in R$  için,  $a^2 \in P$  olsun.  $P$ , Boole ideal olduğundan  $a^2 - a \in P$  'dir. Bu durumda,  $a^2 \in P$  olduğundan  $a \in P$  'dir. Sonuç olarak,  $P$   $c$ -yarı asal idealdir.

**Sonuç 4.2.15.**  $R$  bir yakın halka ve  $P \triangleleft R$  olsun.  $P$ , Boole ideal ise aynı zamanda  $3$ -yarı asaldir.



**İspat:**  $P$  Boole ideal ise Önerme 4.2.14'den  $P$  c-yarı asal idealdir. Üstelik; Önerme 2.4.11'den  $P$  c-yarı asal ideal ise 3-yarı asal idealdir.

**Önerme 4.2.16.**  $R$  bir Boole yakın halka olsun. Bu durumda,  $x \in R$  için,  $(0: x)$ ,  $R$ 'nin bir Boole idealidir.

**İspat:** Lemma 4.1.11'den  $R$  bir Boole yakın halka ise  $R$ , bir *IFP* yakın halkadır. Üstelik;  $R$  bir *IFP* yakın halka ise  $x \in R$  için  $(0: x) \triangleleft R$  'dir [2]. Bu durumda,  $(0: x)$ 'in  $R$ 'nin bir Boole ideali olduğunu göstermek için,  $a \in R$ , için

$a^2 - a \in (0: x)$  olduğu gösterilmelidir.  $R$  bir Boole yakın halka olduğundan

$a^2 - a = 0$  'dir. Bu durumda  $x \in R$  için,

$$(a^2 - a).x = 0$$

olup

$$a^2 - a \in (0: x)$$

bulunur. Böylece,  $(0: x)$   $R$ 'nin bir Boole idealidir.

**Önerme 4.2.17.**  $R$ , bir Boole yakın halka olsun.  $S \subseteq R$  ise,  $(0: S)$   $R$ 'nin bir Boole idealidir.

**İspat:** Lemma 4.1.11'den  $R$ , bir Boole yakın halka ise  $R$ , aynı zamanda bir *IFP* yakın halkadır. Üstelik,  $R$  bir *IFP* yakın halka ise  $S \subseteq R$  için  $(0: S) \triangleleft R$  'dir [2].

$R$  Boole yakın halka olduğundan  $x \in R$  için,  $x^2 = x$  olup  $x^2 - x = 0$  'dir. Böylece  $S \subseteq R$  için,

$$(x^2 - x).S = 0$$

yani

$$(x^2 - x) \in (0: S)$$

dir.

### 4.3. Boole Halkadan Boole Yakın Halka Elde Etme Metodu

Son olarak, bu bölümde, verilen bir Boole halkadan Boole yakın halka elde etme metodunu kullanarak bir Boole yakın halka elde edelim.

$(B, +, \wedge)$  birimi "1" olan bir Boole halkası olsun.  $\wedge$  işlemi  $a': a + 1$  olmak üzere

$$a \vee b: (a' \wedge b)'$$

ile tanımlansın.  $x \in B$  ise  $a, b \in B$  için,  $*_x$  işlemi

$$a *_x b: a \wedge (b \vee x)$$

olarak tanımlandığında  $(B, +, *_x)$  sağ değişmeli bir Boole yakın halkadır. Üstelik;  $x = 0$ 'dır gerek ve yeter şart  $(B, +, *_x)$  bir Boole halkadır.

Boole halkalardan elde edilen bu yakın halkalara *özel Boole yakın halkalar* denir.

**Örnek 4.3.1.**  $0 \neq X$  olmak üzere  $B = P(X)$  Örnek 4.1.2.'deki  $(P(X), \Delta, \cap)$  birimli ve değişmeli Boole halkası olmak üzere  $(P(X), \Delta, *_Y)$  bir sağ değişmeli Boole yakın halkadır. Gerçekten,  $Y \in P(X)$  olmak üzere  $\forall A, B \in P(X)$  için,

$$A *_Y B = A \cap (B \cup Y)$$

ile tanımlanır. Burada,

$$A \cup B: (A' \cap B)'$$

ve

$$A': A \Delta X = (A - X) \cup (X - A) = \emptyset \cup A^t = A^t$$

dir.

**a)**  $(P(X), \Delta)$ 'nin grup olduğu açıktır.

**b)**  $(P(X), *_Y)$  bir yarı gruptur. Gerçekten,

$\forall A, B, C \in P(X)$  için,

$$A *_Y B = A \cap (B \cup Y) \in P(X)$$

dir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} (A *_Y B) *_Y C &= (A \cap (B \cup Y)) \cap (C \cup Y) \\ &= A \cap ((B \cup Y) \cap (C \cup Y)) \\ &= A \cap ((B \cup Y) \cap (C \cup Y \cup Y)) \\ &= A \cap ((B \cap (C \cup Y)) \cup Y) \\ &= A *_Y (B \cap (C \cup Y)) \\ &= A *_Y (B *_Y C) \end{aligned}$$

olup  $(P(X), *_Y)$  birleşmelidir.

c)  $\forall A, B, C \in P(X)$  için,

$$\begin{aligned} (A \Delta B) *_Y C &= (A \Delta B) \cap (C \cup Y) \\ &= ((A \Delta B) \cap C) \cup ((A \Delta B) \cap Y) \\ &= ((A \cap C) \Delta (B \cap C)) \cup ((A \cap Y) \Delta (B \cap Y)) \\ &= [((A \cap C) \cup (B \cap C)) - ((A \cap C) \cap (B \cap C))] \\ &\quad \cup [((A \cap Y) \cup (B \cap Y)) - ((A \cap Y) \cap (B \cap Y))] \\ &= [((A \cup B) \cap C) - (A \cap B \cap C)] \cup [((A \cup B) \cap Y) - (A \cap B \cap Y)] \\ &= [((A \cup B) \cap C) \cap (A \cap B \cap C)'] \cup [((A \cup B) \cap Y) \cap (A \cap B \cap Y)'] \end{aligned}$$

Diğer taraftan,

$$(A *_Y C) \Delta (B *_Y C) = (A \cap (C \cup Y)) \Delta (B \cap (C \cup Y))$$

$$\begin{aligned}
&= (A\Delta B) \cap (C \cup Y) \\
&= ((A\Delta B) \cap C) \cup ((A\Delta B) \cap Y) \\
&= ((A \cap C) \Delta (B \cap C)) \cup ((A \cap Y) \Delta (B \cap Y)) \\
&= [((A \cap C) \cup (B \cap C)) - ((A \cap C) \cap (B \cap C))] \cup \\
&\quad [((A \cap Y) \cup (B \cap Y)) - ((A \cap Y) \cap (B \cap Y))] \\
&= [((A \cup B) \cap C) \cap (A \cap B \cap C)'] \cup [((A \cup B) \cap Y) \cap (A \cap B \cap Y)']
\end{aligned}$$

Buradan  $(P(X), \Delta, *_Y)$  bir yakın halkadır. Üstelik;

$$\begin{aligned}
A *_Y A &= A \cap (A \cup Y) \\
&= (A \cap A) \cup (A \cap Y) \\
&= A \cup (A \cap Y) \\
&= A
\end{aligned}$$

olduğundan  $(P(X), \Delta, *_Y)$  bir Boole yakın halkadır. Diğer taraftan;  $\forall A \in P(X)$  için,

$$A *_Y E = E *_Y A = A$$

olacak şekilde  $E \in P(X)$  olmadığından birimli değildir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
A *_Y B &= A \cap (B \cup Y) \\
&\neq B \cap (A \cup Y) \\
&= B *_Y A
\end{aligned}$$

olup değişmeli de değildir ancak sağ değişmelidir. Gerçekten,

$$A *_Y (B *_Y C) = A *_Y (B \cap (C \cup Y))$$

$$\begin{aligned}
&= A \cap [B \cap (C \cup Y) \cup Y] \\
&= A \cap [(B \cup Y) \cap (C \cup Y)] \\
&= A \cap ((C \cup Y) \cap ((B \cup Y) \cup Y)) \\
&= A \cap ((C \cap (B \cup Y)) \cup Y) \\
&= A *_Y (C \cap (B \cup Y)) \\
&= A *_Y (C *_Y B)
\end{aligned}$$

$Y = \emptyset$  için,

$$A *_Y B = A \cap (B \cup Y) = A \cap B$$

olacağından  $(P(X), \Delta, *_y)$  bir Boole halka olduğu kolaylıkla görülür.

## SONUÇ

Bu tezde, Boole yakın halka kavramı ideal yapısına genişletilerek Boole ideal tanımlanmıştır. Bu tanımla, Boole yakın halkaların tüm ideallerinin Boole ideal olduğu açıktır. Ayrıca, kendisi Boole olmadığı halde ideali Boole olabilen yakın halkaların olduğu örneklerle gösterilmiştir. Yine, Boole ideallerin literatürde önemli bir yer tutan IFP idealler ve asal idealler ile ilişkisi incelenmiştir. Üstelik; Boole yakın halkaların sıfırlayan ideallerinin de Boole ideal olduğu ispatlanmıştır. Son olarak, Clay ve Lawyer [23] tarafından verilen yakın halka elde etme metodu sağ yakın halkalara uygulanarak birimli bir Boole halkadan Boole yakın halka elde edilmiştir.

## KAYNAKLAR

1. Dickson, L. E., Definitions of a Group and a Field by Independent Postulates, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 6, 198-204, 1905.
2. Pilz, G., *Near-rings*, 2nd Ed., Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland, 1983.
3. Van Der Walt A. P. J., Prime Ideals and Nil Radicals in Near-rings, *Arch. Math.*, 15, 408-14, 1964.
4. Laxton R. R., Prime Ideals and The Ideal Radical of a Distributively Generated Near-ring, *Math. Z.*, 83, 8-17, 1964.
5. Ramakotaiah D., Radicals for Near-rings, *Math. Z.*, 97, 45- 56, 1967.
6. Beidleman J., Strictly Prime Distributively Generated Near-rings, *Math. Z.*, 100, 97-105, 1967.
7. Holcombe, W. L. M., *Primitive Near-rings*, Ph. D. Dissertation, University of Leeds, 1970.
8. Ramakotaiah, D., Rao, G. K., IFP Near-rings, *J. Austral. Math. Soc.(Series A)*, 27, 365-370, 1979.
9. G. L. Booth, N. J. Groenewald, S. Veldsman, A Kurosh-Amitsur prime radical for near-rings, *Comm. Algebra* 18, pp. 3111-3122, 1990.
10. Reddy Y. V., Murty C. V. L. N., Semi-symmetric ideals in near rings. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 16 (1): 17-21, 1985.
11. Birkenmeier, G. F., Heatherly, H., Medial Near-rings, *Monatsh. Math.*, 107, 89-110, 1989.
12. Birkenmeier, G. F., Heatherly, H., Left self distributive near-rings, *J. Aust. Math. Soc.*, 49, 273-296, 1990.
13. Groenewald N. J., Different Prime Ideals In Near-rings, *Comm. Algebra*, 19, 2667- 75, 1991.
14. Booth G. L., Groenewald N. J.,  $v$ -Prime and  $v$ -Semiprime Near-Rings, *Math. Japonica*, 43, 425-30, 1996.
15. Booth G. L., Groenewald N. J., Different Prime Ideals in Near-rings II, *Rings and Radicals* (B. J. Gardner, Liu Shaoxue, R. Wiegandt (eds.)), Shijiazhaung 1994, *Pitman Res. Notes Math.*, 346, 131-9, 1996.

16. Aygün, E., Yakın halkalarda N-Grupsallar Ve v-Asal İdealler Üzerine, Doktora Tezi, Erciyes Üniversitesi, Kayseri, 2006.
17. Atagün, A. O., IFP Ideals in Near-rings, Hacet. J. Math. Stat., 39, 17-21, 2010.
18. Kamacı, H., Yakın halkalarda P-Regülerlik Ve P-v-Asallık, Yüksek Lisans Tezi, Bozok Üniversitesi, Yozgat, 2014.
19. Taşdemir, F., Atagün, A. O., Altındış, H., Equiprime N-Ideals of monogenic N-groups, Hacet. J. Math. Stat. 40, pp. 37-382, 2011.
20. Taşdemir, F., Atagün, A. O., Altındış, H., Different prime N-ideals and IFP N-ideals, Indian J. Pure Appl. Math. 44, pp. 527-542, 2013.
21. Hungerford T. W., Algebra, ed: S. Axler, F. W. Gehring, K. Ribet, Springer-Verlag, Newyork, pp. 502, 2003.
22. Hansen, D. J. J. Luh, Boolean near-rings and weak commutativity, J. Austral. Math. Soc. Series A 47, pp. 103-107, 1989.
23. J. R. Clay, D. A. Lawyer, Boolean near-rings, Canad. Math. Bull. 12, pp. 265-273, 1969.



## ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Balıkesir’de doğan Melek TAŞ, ilköğretim ve lise öğrenimini sırasıyla Atatürk İlköğretim Okulu ve Özel Balıkesir Anadolu Lisesinde tamamlamıştır. 2009 yılında kazandığı Bozok Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2013 yılında bitirmiştir.

2014 yılında başlamış olduğu yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında devam etmektedir.

### **İletişim Bilgileri**

**Adres:** AtatürkMah. Çimen Sok. No:10 Karesi/Balıkesir

**Telefon:** (532) 427 4918

**E-posta:** tasmelek10@gmail.com