T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

FOURİER SERİLERİNİN MUTLAK HAUSDORFF TOPLANABİLMESİ ÜZERİNE

Hande ÖZARSLAN

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

Yozgat 2016

T.C
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

FOURİER SERİLERİNİN MUTLAK HAUSDORFF TOPLANABİLMESİ ÜZERİNE

Hande ÖZARSLAN

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

Yozgat 2016

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı 70111312004 numaralı öğrencisi Hande ÖZARSLAN' ın hazırladığı "**Fourier serilerinin mutlak Hausdorff toplanabilmesi üzerine**" başlıklı Yüksek Lisans tezi ile ilgili Tez Savunma Sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği uyarınca 01/06/2016 Çarşamba günü saat 10:00'da yapılmış, tezin onayına oy birliği ile karar verilmiştir.

Başkan : Doç.Dr. Muammer KULA

Üye : Yrd. Doç.Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU(Danışman)

Üye : Yrd. Doç.Dr. Onur OKTAY

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 22./06./2016 tarih ve 19 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

22/06/2016

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

Yrd.Doç.Dr. Handan ADIBELLİ
Bozok Üniversitesi
Fen.Bil.Enst.Müd.V.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

FOURİER SERİLERİNİN MUTLAK HAUSDORFF TOPLANABİLMESİ ÜZERİNE

Hande ÖZARSLAN

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2016; Sayfa:32

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ÖZET

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın amacı Fourier serilerinin mutlak Hausdorff toplanabilmesini incelemektir.

Birinci bölümde toplanabilme teorisinin tarihsel gelişimi hakkında bilgi verildi. İkinci bölümde bu çalışmada kullanılan temel tanım ve teoremler verildi. Üçüncü ve Dördüncü bölümde Fourier serilerinin mutlak toplanabilme ve mutlak Hausdorff toplanabilmesi ile ilgili bir teoremin ispatı incelendi. Bu teoremleri ispatlamak için kullanılan lemmalar verildi. Beşinci bölümde Fourier serilerinin eşlenik serilerinin mutlak Hausdorff toplanabilmesi ile ilgili bir teoremin ispatı incelendi.

Anahtar Kelimeler: Fourier serisi, Hausdorff toplanabilme, Mutlak Hausdorff Toplanabilme, Mutlak Euler toplanabilme, Sınırlı salınımlılık.

ON THE ABSOLUTE HAUSDORFF SUMMABILITY OF FOURIER SERIES

Hande ÖZARSLAN

Bozok Universty
Graduate Scholl of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2016; Page:32

Thesis Supervisor: Assistant Professor Doctor Abdullah SONMEZOGLU

ABSTRACT

The aim of this study which compose of five parts, is to investigate on the absolute Hausdorff summability of Fourier series.

summability is given. In the second chapter, the basic definitions and theorems used in this study are given. In the first chapter, information about the historical development of the theory of

In the third and fourth chapter, the proof of a theorem with respect to on the absolute summability and absolute Hausdorff summablity of Fourier series is investigated. Using lemmas to prove this theorem are given. In the fifth chapter, the proof of a theorem with respect to on the absolute Hausdorff summablity of conjugate series of Fourier series is investigated.

Keywords: Fourier series, Hausdorff summability, Absolute Hausdorff summability, Absolute Euler summability, Bounded variation.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ortaya çıkan her türlü problemin çözümünde yardımlarını gördüğüm danışmanım Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU, sevgili eşim Yavuz Çağrı ÖZARSLAN’ a teşekkür ederim.

SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\boldsymbol{S[f]}$: f fonksiyonunun Fourier serisi

$\{\boldsymbol{S_n}\}$: Reel veya kompleks sayılar dizisi

$(\boldsymbol{a_{nv}})$: Satır ve sütun sayısı sonsuz olan kompleks terimli bir matris

$\boldsymbol{\mu_n}$: Moment sabiti

$(\boldsymbol{H},\boldsymbol{\mu})$: Hausdorff dönüşümü

$(\boldsymbol{C},\boldsymbol{\alpha})$: α. mertebeden Cesa’ro dönüşümü

$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{\alpha})$: α. mertebeden Euler dönüşümü

$\boldsymbol{a_n}$: Fourier katsayısı

$\boldsymbol{\chi}$: Karakteristik fonksiyon

$\boldsymbol{BV}[\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}]$: [0,1] aralığında tanımlı sınırlı salınımlı fonksiyonların uzayı

$\boldsymbol{g_\delta^+}(\mathbf{x})$: g fonksiyonunun δ. mertebeden ileri kesirli integrali

$\boldsymbol{g_\delta^-}(\mathbf{x})$: g fonksiyonunun δ. mertebeden geri kesirli integrali

$\Delta\boldsymbol{\mu_n} = \boldsymbol{\mu_n}$-$\boldsymbol{\mu_{n+1}}$:$\mu_n$ nin simetrik farkı

$\boldsymbol{S_n}$=$\boldsymbol{O}(\mathbf{1})$: $\{\boldsymbol{S_n}\}$ dizisi sınırlı

$\boldsymbol{S_n}$=$\mathbf{o(1)}$: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$=0

$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\sim\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a})$ **:** $\lim\limits_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}$=1

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$=$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ =$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ $m>0$, $n>0$

$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{n})=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$, $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$, $\Gamma(n+1)=n!$ $n>0$

1.GİRİŞ

Toplanabilme teorisi özel bir yakınsaklık türüdür. Analiz ve uygulamalı matematikte bir çok uygulamaları vardır. Serilerin yakınsaklığının incelenmesi Leonardo Euler (1707-1784) in döneminde yapılmış olup bu serilerden yakınsak olmayanlar çok az ilgi gördü. Euler $f(1) = s$ ve küçük z değeri (uzunluğu oldukça küçük z değeri) için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ serisinin $f(z)$ değerine yakınsaması halinde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ıraksak serisini $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ şekline dönüştüren toplam metodunu geliştirdi. Bu yolla $|z| < 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$$

yakınsaması vardır. Böylece

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \frac{1}{z+1}\Big]_{z=1} = \frac{1}{2}$$

dır. Bununla birlikte $z \neq 1$için

$$\frac{1-z^2}{1+z^3} = 1 - z^2 + z^3 - z^5 + z^6 - \cdots$$

$$\frac{1-z^2}{1+z^3} = \frac{1+z}{1+z+z^2}$$

olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \left[\frac{1+z}{1+z+z^2}\right]_{z=1} = \frac{2}{3}$$

dır. Bu şekilde Eulerin yorumuyla $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisine neredeyse herhangi bir değer karşılık gelmektedir.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) sonsuz işlemlerin matematik analizinde kullanılması fikrini tanıtmaya yardımcı olmuştur. Binom teoremi erken yaşlarda Gauss tarafından geliştirilmiştir ve bu ona bir kuvvet serisinin bir fonksiyona yakınsaması kavramıyla ilgilenmesine neden oldu. Bu tabiî ki öncelikle matematikçiler tarafından ortaya atılan bazı anl8msız fikirlerin ortadan kaldırdı. Bunların arasında hipergeometrik seriler ve bu şekildeki serilerin yakınsaklığı tartışması oldu.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Gauss ve Abel ile birlikte matematik analizine dikkat çekilmesini tanıtmada öncülük etmiştir. Kuvvet serilerinin yakınsaklığı ve ıraksaklığıyla ilgili fikirlerini şekillendirmiştir. Onun çalışmalarının günümüzdeki birçok matematiksel aktivitede temelini atmıştır.

Niels Henrik Abel (1802-1829), 19. yüzyılın ilk zamanında yakınsaklık ve ıraksaklıkla ilgili fikirlere katkı yapan üçüncü öncülerdendi. Onun en önemli teoremi olarak bilinen Abel teoremi günümüzde çokça kullanılır.

Bu çalışma esas olarak ($-\pi,\pi$) aralığüında Lebesque anlamında integrallenebilen 2π periyotlu bir f fonksiyonun Fourier serisinin $|H,\mu|$ mutlak Hausdorff toplanabilmesi ele alınmıştır. Mutlak Hausdorff toplanabilme metodu,[**1**] de ele alınan Fourier serilerinin mutlak Cesa'ro toplanabilmesinin bir genellemesi olarak adlandırılmaktadır.

1917 de Hurwitz ve Silverman [**2**] de C Cesa'ro matrisi ile değişmeli olan üçgensel matrislerin sınıfını tanımlamışlardır. Bu değişim problemi, operatör teorisinin bilinen değişim problemlerinin çoğundan önce gelmektedir. Hurwitz ve Silverman (μ_k) reel ve kompleks bir dizi ve Δ,

$$\Delta\mu_k = \mu_k - \mu_{k+1} \,, \Delta^{n+1}\mu_k = \Delta(\Delta^n\mu_k)$$

ile tanımlı ileri fark operatörü olmak üzere

$$h_{nk} = \binom{n}{k}\Delta^{n-k}\mu_k \,, \qquad 0 \leq k \leq n$$

formuna sahip matris sınıfını bulmuşlardır.

1921 de Hausdorff [**3**] da aynı değişim problemi çözmüştür ve Hausdorff matrislerinin regülerliği ve konservatif için gerekli ve yeterli şartları vermiştir. Bu toplanabilme metodunun diziden diziye tanımlanan dönüşüm olduğu [**4**] te belirtilmiştir. Fourier serisinin mutlak Hausdorff toplanabilmesinin özel durumu olan mutlak Hölder toplanabilme tanımı ise [**5**] te verilmiştir.

Bu çalışmada bahsedilen ve [**6**] da tanımlanan Hausdorff toplanabilme yardımıyla oluşturulan bu çalışma boyunca ;

i)$f(x) \in L(a,b)$ ile f fonksiyonunun (a,b) de Lebesque anlamında integrallenebilirliğini,

ii) $\varphi(t) \in BV(0.\pi)$ ile φ fonksiyonunun (0,π) aralığında sınırlı salınımlı olduğu;

iii)$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$ ile $\sum a_n$ serisinin mutlak yakınsaklığı;

iv) (μ_n) reel veya kompleks değerli bir dizi olmak üzere p. mertebeden μ_n lerin farkı;

p=0 için $\Delta^0 \mu_n = \mu_n$

p≥ 1 için $\Delta^p \mu_n = \Delta^{p-1}\mu_n - \Delta^{p-1}\mu_{n+1}$

şeklinde gösterilecektir.

Bunların dışında K, her durumda aynı olması gerekmeyen pozitif bir sabiti gösterecektir.

2.TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1: F reel veya kompleks sayıların kümesi $v = 0,1,2,3..$ için $a_{nv} \in F$ olmak üzere $A = (a_{nv})$ sonsuz matris ve $\{s_n\}$ dizisi F de bir dizi olsun.

$\{S_n\}$ dizisinden $\{t_n\}$ dizisne dönüşüm

$t_n = \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} S_v \qquad (n = 0,1,2,3..)$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\{t_n\}$ dizisine $\{S_n\}$ dizisinin $A-$ dönüşümü dizisi denir. Bu A dönüşümünün var olabilmesi için her n için $\sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} S_v$ serisinin yakınsak olması gerekir [**7**].

Tanın 2.2: Bir $A = (a_{nv})$ sonsuz matrisi verilmiş olsun. Eğer A matrisi yakınsak her diziyi yakınsak diziye dönüştürüyor ve aynı zamanda limiti de koruyorsa A matrisine regülerdir denir [**7**].

Teorem 2.3: Bir A matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart

i) Her v için $\lim_{n\to\infty} a_{nv} = 0$

ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} = 1$

iii) Her n için $\sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}| \leq M$ olacak şekilde n den bağımsız bir M pozitif reel sayının var olmasıdır [**7**].

Bu teoreme Silvermann-Toeplitz Teoremi denir.

Tanım 2.4: Verilen bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (S_n) olsun. Ayrıca $A = (A_{nv})$ sonsuz matrisinin yardımıyla $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin veya (S_n) dizisinin (t_n) dönüşüm dizisi $t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k$ ile verilsin. $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisine veya (S_n) dizisine t değerine A- toplanabilirdir denir [**7**].

Tanım 2.5: $\{\mu_n\}$ dizisine karşılık gelen $\{S_n\}$ dizisinin Hausdorff dönüşümü

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \mu_k s_k$$

ile tanımlanır[**3**].

Tanım 2.6: $f(x)$**,** $(-\pi, \pi,)$ aralığında L Lebesque anlamında integrallenebilen 2π periyotlu periyodik fonksiyon olsun. Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi

$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)$

ile tanımlanır. Ayrıca$f(x)$ fonksiyonun Fourier serisinin eşlenik serisi ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx)$$

ile tanımlanır[**8**].

Teorem 2.7: (Riemann-Lebesgue Teoremi**):** $f(x)$, ($-\pi,\pi$) aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilir olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \ dx = 0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, dx = 0$$

dır [**8**]**.**

Teorem 2.8: (**1.** Ortalama Değer Teoremi)**:** f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve g fonksiyonu $[a,b]$ integrallenebilir olsun. Bu durumda

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)g(x)dx$$

elde edilir ki bu iyi bilinen ortalama değer teoremi olur [**4**].

Teorem 2.9: (2. Ortalama Değer Teoremi): $g:[a,b]\to R$ pozitif ,monoton olarak azalan bir fonksiyon ve $f:[a,b]\to R$ integrallenebilir olsun.Bu durumda

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a^+)\int_a^x f(t)dt$$

olacak şekilde $x\in(a,b)$ vardır [**4**]**.**

Teorem 2.10: $H:[a,b]\to R$ monoton ve pozitif bir fonksiyon olsun. g:$[a,b]\to R$ integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\int_a^b H(t)g(t)dt = H(a^+)\int_a^x g(t)dt + H(b^-)\int_x^b g(t)\,dt$$

olacak şekilde $x\in(a,b)$ vardır [**4**].

Teorem 2.11: $\{\mu_n\}$ dizisi için bir Hausdorff dönüşümünden regüler olması için gerek ve yeter şart $\chi(x)=\chi(0^+)=0$, $\chi(1)=1$ ve $\mu_n=\int_0^1 x^n d\chi(x)$ olacak şekilde [0,1] aralığında $\chi(x)$ sınırlı salınımlı fonksiyonun bulunmasıdır [**4**].

Teorem 2.12: $\{\mu_n\}=\int_0^1 x^n\, d\chi(x)$ moment sabiti olmak üzere

i) (H,μ) Hausdorf metodunun regüler olabilmesi için gerek ve yeter şart μ_n nin regüler moment sabiti olmasıdır.

ii) (H,μ) nin yakınsaklığı koruyan dönüşüm olması için gerek ve yeter şart μ_n nin moment sabiti olmasıdır [**4**]**.**

Teorem 2.13: (Fejer Teoremi) $f(x_0 \pm 0)$ limitlerinin ve her ikisi sonsuz ve ikisi de aynı işaretli var olduğu x_0 noktasında $S[f]$ nın$(C,1)$ ortalamasını gösteren

$$\sigma_n(x_0) = \sigma_n(x_0, f) = \frac{2}{\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{sin\left(\frac{n+1}{2}\right)t}{2sin\frac{t}{2}} \right\}^2 dt,$$

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

değerin yakınsaktır.

Özel olarak f fonksiyonunun her süreklilik noktasında $\sigma_n(x_0) \to f(x_0)$ dır. Süreklilik noktasında her bir kapalı aralığı üzerinde σ_n nin yakınsaklığı düzgündür [**8**].

Tanım 2.14: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\{S_n\}$ kısmi toplamlar dizisi ile verilen sonsuz bir seri olsun. diziden diziye

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \mu_k s_k \qquad (2.1)$$

dönüşümü $\{S_n\}$ dizisinin $\{t_n\}$ Hausdorff ortalaması dizisini tanımlar [**3**].

$\lim_{n\to\infty} t_n = s$ ise $\{S_n\}$ dizisine s değerine Hausdorff toplanabilirdir. Eğer $\{t_n\}$ sınırlı sanımlı yani

$$\sum |t_n - t_{n-1}| < \infty \qquad (2.2)$$

ise $\{s_n\}$ dizisine mutlak (H,μ_n) veya $|H, \mu_n|$ toplanabilirdir denir.

Hausdorff ortalaması ilk olarak sistematik bir şekilde 1921'de F. Hausdorff [**3**] tarafından tartışılmıştır.

$$\mu_n = \gamma_n \qquad (0< \gamma < 1)$$

olduğunda (2.1) de iyi bilinen diziden diziye

$$t_n = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \gamma^v (1-\gamma)^{n-v} S_v \qquad (2.3)$$

Euler dönüşümüne indirgenir.

Bu metot $(0 < \gamma < 1)$ için regülerdir.

Cesa'ro ve Hölder [**5**] metodları da Hausdorff metodunun özel durumlarıdır. (H,μ_n) konservatif olması için gerek ve yeter şart $\chi(x)$şeklinde bir fonksiyonun korunumlu olmasıdır.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{i) } \chi(x) \text{ sınırlı salınımlı} & 0 \le x \le 1 \\ \text{ii) } \mu_n = \int_0^1 x^n \, d\chi(x) & n = 1,2,3 \dots . \end{array}\right\} \quad (2.4)$$

olacak şekilde $\chi(x)$ moment fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

Genelliği bozmaksızın $\chi(x) = 0$ kabul edebiliriz.

Bunlara ek olarak $\chi(x)$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{iii) } \chi(x+) = \chi(0) = 0 & \chi(x),\ x = 0 \text{ da sağdan süreklidir.} \\ \text{iv) } \chi(x) = 1 & \end{array}\right\} \quad (2.5)$$

şartlarını sağlıyorsa bu durumda μ_n regüler moment sabiti ve (H,μ) bir regüler Hausdorff dönüşümdür.

(0,1) aralığının içindeki süreksizlik noktalarında $\chi(x)$in değerleri

$$\chi(x) = \frac{1}{2}[\chi(x+0) + \chi(x-0)]\,, \quad 0 < x < 1$$

olarak keyfi bir biçimde değiştirilebilir. Sonra da (0,1) kapalı aralığında $\chi(x)$'in sınırlı salınımlı reel bir fonksiyon olduğunu kabul edelim.

Knopp ve Lorentz [**9**] ispatladı ki (H,μ_n) konservatif ya da regüler diziden diziye bir dönüşüm tanımlarsa bu durumda bu mutlak regüler veya mutlak konservatif dönüşüm tanımlar. Aynı sonuç Hilda Morley [**5**] tarafından bağımsız bir şekilde ispatlanmıştır. Fakat bunların aksine olarak M.S. Ramanujan **[10]** ters sonucunu ispatladı. Böylece yukarıdaki 2 sonuçtan '' Hausdorff matrisi , diziden diziye mutlak konservatif veya mutlak regüler dönüşüm tanımlar ⇔ Hausdarff matrisi aynı türün regüler veya konservatif dönüşümü tanımlar. '' sonucu çıkar.

$\chi(x)$, (2.5) şartlarını sağladığında (H,μ) mutlak yakınsaklığı koruyan dönüşümdür.

Hausdorff metodunun Fourier serilerine ve bağlantılı serilere uygulaması hakkında Hille ve Tamarkin [**11**] birkaç teorem ispatlamıştır. Onlar gösterir ki $\chi(x)$ kütle fonksiyonu üzerindeki dolaylı ya da dolaysız şartlar altında (H,μ) Fourier etkili olur.

$f(t)$; 2π periyotlu fonksiyon ve $(-\pi, \pi)$ aralığında (L) Lebesgue integrallenebilir olsun. Genelliği bozmadan

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt = 0 \tag{2.6}$$

$$\varphi(t) = \varphi_u(t) = \frac{1}{2}\{f(t+u) + f(t-u)\}$$

ve

$$\varphi(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n(u) \cos nt \tag{2.7}$$

öyle ki $A_n(u)=a_n \cos nu + b_n \sin nu$ olmak üzere$f(t)$ nin $t = u$ daki Fourier serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(u)$$

olsun.

$$\left.\begin{aligned} g_\delta^+(x) &= \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^x (x-v)^{\delta-1} g(v)dv, \qquad \delta > 0 \\ g_\delta^-(x) &= \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^x (v-x)^{\delta-1} g(v)dv, \qquad \delta > 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

ifadeleri sırasıyla δ . ileri ve geri kesirli integrallerini tanımlar. Bu integrallerin $\delta > 0$ için hemen hemen her yerde mevcut olduğu iyi bilinir.

0<$\delta < 1$ ve $h(t)$ fonksiyonu $g(t)$ fonsiyonunun δ. ileri kesir integrali ise bu durumda genellikle$h(t)$, $q(t)$ile adlandırılan farklı bir fonksiyonun δ. geri kesirli integrali de olur. Fakat bu genelde doğru değildir. $h(t)\delta$.geri integral olmaksızın δ. ileri integral olabileceğini göstermek için örnek oluşturmak mümkündür veya tersi de olabilir. Bu tip sonuçları Kuttner [**12**] detaylı şekilde tartışmıştır.

İyi bilinir ki **[4]** Euler ve Cesa'ro toplanabilme metotları karşılaştırılamaz. Yani hiçbiri bir diğerini içermez. Fourier serilerine uygulaması açısından bu iki toplanabilme metodu farklı

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(u)$$

davranır. Biri Fourier etkili iken diğeri değildir.

Bosanquet mutlak Cesa'ro metodunu Fourier Serisine uygulanması hakkında aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 2.15: $\varphi(t) \in BV\ (0,\pi\ )$ ise $\alpha > 0$ için $f(t)$ nin Fourier serisi $t = u$ noktasında $|C,\alpha|$ toplanabilirdir[**1**].

Yukarıdaki uyarı ve Teorem 2.15 göz önüne alındığında $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(u)$ serisinin mutlak Euler toplanabilmesini garanti etmek için $\varphi(t)$ nin sınırlı salınımlı olup olmadığını sormak çok doğaldır.

Bu soruya Teorem 4.2 negatif (olumsuz) cevap verir.

Tanım 2.16: Ölçümü sıfır olan cümle dışında bir fonksiyon sınırlı ise bu fonksiyona esas sınırlıdır denir **[4]**.

3. MUTLAK TOPLANABİLME

Bu bölümde öncelikle mutlak toplanabilme metodu ile ilgili lemmalar verildi. Bu lemmalar 4.bölümdeki teoremlerin ispatında kullanıldı. Ayrıca mutlak toplanabilme ile sınırlı salınımlılık arasındaki ilişki araştırıldı. Son olarak ise Hausdorff metodunun özel bir durumu olan (C,α) metodu ile ilgili teoremin Hausdorff metodu ile ilgili teoremin indirgenmiş şekli olduğu bir örnekle incelendi.

Lemma 3.1 $b-a\leq\infty$ olmak üzere $f_n(x)$, (a,b) aralığında ölçülebilir olsun. Bu durumda (a,b) aralığında (L) integrallenebilen her λ(x) integrallenebilirdir ve $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_a^b \lambda(x)f_n(x)dx\right|<\infty$ olması için gerek ve yeter şart $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ serisinin (a,b) deki her x için esas olarak sınırlı olmasıdır [**1**].

Lemma 3.2' i ifade etmeden önce aşağıdaki bilgilere ihtiyaç vardır.

£ , seriden seriye

$$C_n=\sum_{v=0}^{\infty} £_{n,v}\, a_v \tag{3.1}$$

dönüşümü ile verilen herhangi bir toplanabilme metodu olsun. £ nin regüler veya mutlak regüler olması gerektiği kabul edilmez ancak

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|£_{n,v}\right|<\infty$$

olduğu kabul edilebilir. Başka bir ifadeyle

1+0+0+0+…

serisi mutlak (£) toplanabilirdir.

$$\sum_{v=0}^{\infty} a_v \tag{3.2}$$

serisinin mutlak (£) toplanabilir olup olmadığı göz önüne alındığında başka bir ifadeyle $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$ nin mutlak yakınsak olup olmadığı gözönüne alındığında a_0. terimini ihmal edersek bu farklılık oluşturmaz. (3.1) den a_0=0 alınması gerektiği sonucu çıkar.

(3.2) serisi sınırlı salınımlı fonksiyonun Fourier serisi olsun.

(2.7) ve (2.8) gösterimden hareketle

$$a_v=A_v(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(t)\cos vt\,dt \quad (v\geq 1) \tag{3.3}$$

$$a_0=0$$

(3.1) de

$$C_n = \frac{2}{\pi}\left[\sum_{v=1}^{\infty} £_{n,v} \int_0^{n} \varphi(t)\, cos\; vt\; dt\right] \qquad (v\geq 1)$$

$$=-\frac{2}{\pi}\left[\sum_{v=1}^{\infty} \frac{£_{n,v}}{v} \int_0^{\pi} d\varphi(t)\, sin\; vt\right]. \qquad (3.4)$$

çözümlenirse (toplam ve birleşmenin tersi mümkünse)

$$C_n = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi(t) £_n(t) \qquad (3.5)$$

$$£_n(t) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{£_{n,v}}{v} \sin vt$$

e indirgenir. Her sabit n için ;

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{£_{n,v}}{v} sin\; vt \qquad (3.6)$$

serisi $0\leq t \leq 1$ için sınırlı olarak yakınsak olsun. Bu durumda $(0,\pi)$ de sınırlı salınımlı herhangi bir φ(t) fonksiyonu için (3.5) geçerlidir.

Şimdi Lemma 3.2'yi ifade etme durumundayız.

Lemma 3.2: (3.2) ve (3.6) şartları sağlıyorsa bu durumda £ metodunun herhangi sınırlı salınımlı fonksiyonun Fourier serisinin |£| toplanabilmesini sağlayan metot olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=1}^{\infty} |£_n(t)| \qquad (3.7)$$

serisinin $(0,\pi)$ *de* esas olarak sınırlı olmasıdır. Daha güçlü olarak (3.7) şartı her sınırlı salınımlı fonksiyonun Fourier serisinin |£| toplanabilmesi için yeter şarttır ve her mutlak sürekli fonksiyonun Fourier serisinin |£| toplanabilmesi için gerek şarttır[**6**].

İspat: (3.6) şartı sağlandığında bu durumda (3.5) şartı

$$C_n=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} £_n(t) d\varphi(t)$$

geçerlidir. Böylece (3.7) den ve φ nın sınırlı salınımlı olmasından

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|=\sum_{n=0}^{\infty}\left|-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} £_n(t)d\varphi(t)\right|$$

$$\leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|d\varphi(t)| \sum_{n=0}^{\infty}|£_n(t)|$$

$$<\infty$$

$$\varphi\,(t)\in BV\,(o,\pi)\Rightarrow \int_0^{\pi}|d\varphi(t)|<K$$

Böylece yeterlilik kısmının ispatı tamamlanır.

Gereklilik kısmının ispatı Lemma 3.1 den yararlanılarak yapılır.

Lemma 3.3: $\sum_{v=1}^{n} v\binom{n}{v}x^{v}(1-x)^{n-v}=nx$

dır [**13**].

İspat: 1= $\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}x^{v}(1-x)^{n-v}$ x'e göre türevini alalım.

0=$\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}[v\,x^{v-1}(1-x)^{n-v}-x^{v}\,(n-v)(1-x)^{n-v-1}]$

0=$\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\left[x^{v-1}(1-x)^{n-v-1}[v(1-x)-(n-)x]\right]$

0=$\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\left[x^{v-1}\,(1-x)^{n-v-1}[v-vx-nx+vx]\right]$

0=$\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}[x^{v-1}(1-x^{n-v-1}\,v-x^{v}(1-x)^{n-v-1}\,n]$

$\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}x^{v}(1-x)^{n-v-1}$ n=$\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\,x^{v-1}(1-x)^{n-v-1}$

$n\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}x^{v}(1-x)^{n-v-1}$ = $\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}x^{v}(1-x)^{n-v}$ v

$nx\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}x^{v}(1-x)^{n-v}$ = $\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}$ v $x^{v}(1-x)^{n-v}$

=$nx\,(x+1-x)^{n}$

= nx

Lemma 3.4: t_n ve S_n sırasıyla $\sum_{n=0}^{\infty}C_n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ serilerinin n. kısmi toplamları olsun. Diziden diziye

$$t_n = \sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\,\Delta^{n-v}\mu_v\,S_v$$

Hausdorff dönüşümü

$$C_n = \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{\infty}\binom{n}{v}\,\Delta^{n-v}\mu_v\,(\mathrm{v}\,a_v\,) \qquad (n\geq 1)$$

$$C_0 = a_0$$

olarak seriden seriye şeklinde düzenlenebilir.

Bu [**9**] dan bilinir.

Lemma3.5: $g(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları (0,1) aralığında Lebesgue integrallenebilirse δ >0 için

$\int_0^1 g_\delta^{+}(x)q(x))\,dx = \int_0^1 q(x)\,g_\delta^{-}\,(x)\,dx$

dır [**14**].

İspat :$g_\delta^{+}(x) = \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^1(x-v)^{\delta-1}\,g(x)dx$

$g_\delta^{-}(x) = \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_x^1(v-x)^{\delta-1}\,q(v)dv$

$\int_0^1 g_\delta^{+}(x)\,q(x)dx$

=$\int_0^1\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^x(x-v)^{\delta-1}\,g(x)dx\,q(v)dv$

=$\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^1\int_0^x(x-v)^{\delta-1}\,g(x)q(v)\,dx\,dv$

$=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^1\int_v^1(x-v)^{\delta-1}\, g(v)\, q(x)dx\, dv$

$=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^1\int_x^1(v-x)^{\delta-1}\, g(x)q(x)dx\, dv$

$=\int_0^1\frac{1}{\Gamma(\delta)}\ \int_x^1(v-x)^{\delta-1}\, g(v)dv\, q(x)dx$

$=\int_0^1 q_\delta^-\, g(x)dx$

dır.

Lemma 3.6: δ sabit olmak üzere 0<δ<1 ve küçük z kompleks sayısı için $|1-z|\le 1$ olsun. Bu durumda yeteri derecede büyük n ler için düzgün olarak $|1-z|\le 1$ şartını sağlayan z ler için ve 0$\le x\le 1$ için

$\int_0^x(x-v)^{\delta-1}(1-vz)^n$ dv = $O\ (\frac{1}{n|z|^\delta}$) dır **[6].**

İspat: I_2 , max (0 , x-$\frac{1}{n|z|}$)<v<x aralığında integrali göstermek üzere

I=$\int_0^x(x-v)^{\delta-1}(1-vz)^n$ dv

$= I_1+I_2$

olsun.

$x\le\frac{1}{n|z|}$ olursa x-$\frac{1}{n|z|}\le 0 \Rightarrow$ max (0,x-$\frac{1}{n|z|}$)<x<x

olur. Yani I_2=I ⇒ I_1=0 olur.

(3.8) den ($|1-z|\le 1$) olduğundan 0$\le v\le 1$ için

$|1-vz|\le 1$ dır. Gerçekten

$|1-z|\le 1 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}\le 1$ den 0$\le v\le 1$ için

$|1-vz|=\sqrt{1-v(x+iy)}=\sqrt{(1-vz)^2+v^2y^2}$

$=\sqrt{1-2vx+v^2x^2+v^2y^2}=\sqrt{(1-vx)^2+y^2}\le 1$

$=\sqrt{v^2(x-1)^2+y^2v^2}\le$v

$=\sqrt{v^2x^2-2v^2x+x^2+v^2y^2}\le v$

$|1-vz|\le\sqrt{v^2x^2-2v^2x+x^2+v^2y^2}$

$|1-vz|\le v\le 1$

dır.

I=I_1+I_2

$=\int_0^{x-\frac{1}{n|z|}}(x-v)^{\delta-1}(1-vz)^n\, dv+\int_{x-\frac{1}{n|z|}}^x(x-v)^{\delta-1}(1-vz)^n\, dv$

I_2=$\int_{x-\frac{1}{n|z|}}^{x}(x-v)^{\delta-1}(1-vz)^n\,dv$

$|I_2| \leq \int_{x-\frac{1}{n|z|}}^{x}(x-v^{\delta-1}|1-vz|^n\,dv$

$|I_2| \leq \int_{x-\frac{1}{n|z|}}^{x}(x-v)^{\delta-1}\,1\,dv$

$|I_2| \leq \frac{(x-v)^{\delta}}{\delta} \Big|_{x}^{x-\frac{1}{n|z|}}$

$|I_2| \leq \frac{1}{\delta}(\frac{1}{n|z|})^{\delta}$ => I_2=O($\frac{1}{n^{\delta}|z|^{\delta}}$) dır.

I_1=$\int_0^{x-\frac{1}{n|z|}}(x-v)^{\delta-1}(1-vz)^n$ integraline kısmi integrasyon metadunu uygularsak

I_1=-$\frac{1}{(n+1)z}\left[(x-v)^{\delta-1}(1-vz)^{n+1}\right]_0^{x-\frac{1}{n|z|}}$

$+\frac{(1-\delta)}{(n+1)z}\int_0^{x-\frac{1}{n|z|}}\ (x-v)^{\delta-2}\ (1-vz)^{n+1}\,dv$

$|I_1| \leq \frac{1}{|n+1||z|}\,(\frac{1}{n|z|})^{\delta-1}\ .\ 1$+$\frac{1}{(n+1)|z|}\left[x^{\delta-1}\right]$+$\frac{1}{(n+1)|z|}\int_0^{x-\frac{1}{n|z|}}(x-v)^{\delta-2}1dv$

$|I_1| \leq \frac{1}{(n+1)|z|}\,(\frac{1}{n|z|})^{\delta-1}$+$\frac{1}{(n+1)|z|}\,x^{\delta-1}$+$\frac{1}{(n+1)|z|}\,x^{\delta-1}$

$|I_1| \leq \frac{1}{(n|z|)^{\delta}}$+$\frac{x^{\delta-1}}{(n+1)|z|}$ +$\frac{1}{(n+1)|z|}\ .\frac{1}{(n|z|)^{\delta-1}}-\ \frac{x}{(n+1)|z|}$

$\quad\leq\ \frac{2}{(n|z|)^{\delta}}$

$\Rightarrow I_1$=O$\left(\frac{1}{n^{\delta}|z|^{\delta}}\right)$

Sonuç olarak I=I_1+I_2=O$\left(\frac{1}{n^{\delta}|z|^{\delta}}\right)$ dır.

Lemma 3.7: (a_n) negatif olmaya reel sayıların azalan bir dizisi (b_n) de herhangi bir reel terimli dizi olsun. m ve n , $n > m$ şartını sağlayan doğal sayılar ise,

$|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k| \leq a_m max_{m\leq p\leq n}\left|\sum_{k=m}^{p} b_k\right|$

dır $[\mathbf{15}]$.

İspat:$B_p=\sum_{k=m}^{p} b_k$ ve $M_{max}\{|B_m|,|B_{m+1}|,\dots,|B_n|\}$ olsun.

Abel formülünden

$|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k| \leq |a_n B_n| + \sum_{k=m+1}^{n-1}|B_k(a_k-a_{k+1})| \leq Ma_n$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

Bir örnek olarak göstereceğiz ki Teorem 4.1 in şartları (alternatifleri) $\alpha > 0$ iken (C, α) toplanabilme durumunda sağlanır. Bu durumda;

$\chi(x) = 1-(1-x)^{\alpha}$

seçelim. δ' yı , $\alpha > \delta > 0$ olacak şekilde seçersek $\chi(x)-1$ fonksiyonunun $-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha-\delta)}(1-x)^{\alpha-\delta-1}$ in (δ+1). geri kesirli integrali olduğu kolayca gösterilebilir.

Gerçekten

$$\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\int_x^1 (v-x)^{\delta} \text{-} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha-\delta)}(1-v)^{\alpha-\delta-1}dv$$

$$v-x=(1-x)t$$

$$dv=(1-x)dt$$

$$1-v=1-x-(1-t)t$$

dönüşümünden

$$=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\delta+1)\Gamma(\alpha-\delta)}\int_0^1 (1-x)^{\delta}t^{\delta}(1-x)^{\alpha-\delta-1}(1-t)^{\alpha-\delta-1}(1-x)dt$$

$$=-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\delta+1)\Gamma(\alpha-\delta)}(1-x)^{\alpha}\int_0^1 t^{\delta}(1-t)^{\alpha-\delta-1}dt$$

$$=-\frac{\Gamma(1+\alpha)(1-x)^{\alpha}}{\Gamma(\delta+1)\Gamma(\alpha-\delta)}\beta(\delta+1, \alpha-\delta)$$

$$=-\frac{\Gamma(1+\alpha)(1-x)^{\alpha}}{\Gamma(\delta+1)\Gamma(\alpha-\delta)}.\frac{\Gamma(\delta+1).\Gamma(\alpha-\delta)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$=-(1-x)^{\alpha}$$

elde edilir. Diğer taraftan δ , 0<δ<1 olacak şekilde seçilirse bu durumda $\chi(x)$,

$$\frac{\alpha}{\Gamma(1-\delta)}\left\{x^{-\delta}+(1-\alpha)\int_0^x (1-v)^{\alpha-2}(x-v)^{-\delta}dv\right\}$$

nın (δ+1). ileri kesirli integralidir. Gerçekten

$$\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\int_o^x (x-v)^{\delta}\int_0^v (1-t)^{\alpha-2}(v-t)^{-\delta}\,dt\,dv \tag{3.8}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\int_0^x\int_0^v (x-v)^{\delta}(1-t)^{\alpha-2}(v-t)^{-\delta}dt\,dv$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\int_0^x\int_t^x (x-v)^{\delta}(1-t)^{\alpha-2}(v-t)^{-\delta}dv\,dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\int_0^x\int_v^x (x-t)^{\delta}(1-v)^{\alpha-2}(t-v)^{-\delta}dt\,dv$$

$$t-v=(x-v)u \qquad -t=(v-x)u-v$$

$$dt=(x-v)du \qquad x-t=(x-v)+(v-x)u=(x-v)(1-u)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\int_0^x (1-v)^{\alpha-2}\int_0^1 (x-v)^{-\delta}u^{-\delta}(x-v)(x-v)^{\delta}(1-u)^{\delta}du\,dv$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\int_0^x (1-v)^{\alpha-2}(x-v)\Gamma(1-\delta)\Gamma(1+\delta)\,dv$$

$=\Gamma(1\text{-}\delta)\int_0^x(1-v)^{\alpha-2}\,(x-v)dv$

$1-v=y \quad -dv=dy$

$=-\Gamma(1\text{-}\delta)\int_1^{1-x}y^{\alpha-2}\,(x+y-1)dy$

$=\Gamma(1\text{-}\delta)\int_{1-x}^1[(x-1)y^{\alpha-2}+y^{\alpha-1}]\,dy$

$=\Gamma(1\text{-}\delta)\left[\frac{(x-1)y^{\alpha-1}}{\alpha-1}+\frac{y^{\alpha}}{\alpha}\right]\Big|\begin{matrix}1\\1-x\end{matrix}$

$$=\Gamma(1\text{-}\delta)\left[\frac{x-1}{\alpha-1}+\frac{1}{\alpha}+\frac{(1-x)^{\alpha}}{\alpha-1}-\frac{(1-x)^{\alpha}}{\alpha}\right] \qquad (3.9)$$

olup bu (3.9) ifadenin her iki yanını $\frac{\alpha(1-\alpha)}{\Gamma(1-\delta)}$ ile çarpalım.

$=\alpha(1\text{-}\alpha)\left[\frac{x-1}{\alpha-1}+\frac{1}{\alpha}+\frac{(1-x)^{\alpha}}{\alpha-1}-\frac{(1-x)^{\alpha}}{\alpha}\right]$

$=\alpha(1\text{-x})+1\text{-}\alpha\text{-}\alpha(1-x)^{\alpha}\text{-}(1\text{-}\alpha)(1-x)^{\alpha}$

$=1\text{-}\alpha\text{x-}(1-x)^{\alpha}$

elde edilir. Ayrıca

$\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\int_0^x(x-v)^{\delta}\,\frac{\alpha}{\Gamma(1-\delta)}v^{-\delta}\,dv$

$=\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\int_0^x(x-v)^{\delta}\,\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}v^{-\delta}$ dv $\qquad v=xu$ dönüşümünden

$=\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\int_o^1(x-xu)^{\delta}\,x^{-\delta}u^{-\delta}\,\frac{\alpha x}{\Gamma(1-\delta)}$ du

$=\frac{\alpha x}{\Gamma(\delta+1)\Gamma(1-\delta)}\int_0^1(1-u)^{\delta}u^{-\delta}$ du

$=\frac{\alpha x}{\Gamma(\delta+1)\Gamma(1-\delta)}\frac{\Gamma(\delta+1)\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(2)}$

$=\alpha x$

sonuç olarak elde edilir.

$\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}.\frac{\alpha}{\Gamma(1-\delta)}\int_0^x(x-v)^{\delta}\left[v^{-\delta}+(1-\alpha)\int_0^v(1-t)^{\alpha-2}\,(v-t)^{-\alpha}\,dt\right]$ dv

$=\alpha x+1\text{-}\alpha x\text{-}(1-x)^{\alpha}=1\text{-}(1-x)^{\alpha}=\chi(\text{x})$

elde edilir.

Böylece Teorem 4.1' i içerir. (H,μ_n) , (C,α) nın genellemesidir. Özel olarak $\mu_n=\frac{1}{n+1}$ seçersek (H,μ_n) Hausdorff toplanabilme (C,1) toplanabilme metoduna indirgenir.

$\Delta(\mu_n)=\mu_n-\mu_{n+1}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\int_0^1x^n\,(1-x)dx\Delta^2(\mu_n)=\Delta(\mu_n)\text{-}\Delta(\mu_{n+1})$

$=\int_0^1 x^n(1-x)dx - \int_0^1 x^{n+1}(1-x)dx = \int_0^1 x^n (1-x)^2 dx$

.

.

$$\Delta^{n-v}(\mu_n) = \int_0^1 x^v (1-x)^{n-v} dx$$

elde edilir. O halde Beta fonksiyonu da kullanılarak

$t_n = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \Delta^{n-v} \mu_v S_v$

$= \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \int_0^1 x^v (1-x)^{n-v}\, dx\, S_v$

$= \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \frac{\Gamma(v+1)\Gamma(n-v+1)}{\Gamma(n+2)} S_v$

$= \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \frac{v!(n-v)!}{(n+1)!} S_v$

$= \sum_{v=0}^{n} \frac{n!}{(n-v)!v!} \frac{v!(n-v)!}{(n+1)!} S_v$

$= \sum_{v=0}^{n} \frac{S_v}{n+1}$

dır. Bu (S_n) dizisinin Hausdorff dönüşümünün (C,1) aritmetik ortalama dönüşümüne indirgendiğini gösterir.

4. FOURİER SERİLERİNİN MUTLAK HAUSDORFF TOPLANABİLMESİ

Teorem 4.1.Eğer

i) φ(t) ∈ BV (0,π)

ii) (H,μ) konservatif

iii) Bazı $g(x)$ ∈ L(0,1) için

$$\begin{cases} \chi(x) = g^{+}_{1+\delta}(x) + c & (\delta > 0) \\ \chi(x) = g^{-}_{1+\delta}(x) + c & (\delta > 0) \end{cases}$$

ise bu durumda $t = u$ noktasında $f(t)$ nin Fourier serisi $|H$, μ| toplanabilirdir[**6**].

İspat: Hipotez (ii) den (H,μ) konservatif olduğundan

$$\mu_n = \int_0^1 x^n \ \chi(x)$$

olacak şekilde $[0,1]$ de sınırlı salınımlı olduğundan χ fonksiyonu vardır.

Lemma 3.4’ü kullanarak burada bahsedilen $|H$, μ| toplanabilme için Lemma 3.2 de ki rotasyonla

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_n(t) &= \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \Delta^{n-v} \mu_n \ sinvt \\ &= \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \Delta^{n-v} sinvt \int_0^1 x^v \ (1-x)^{n-v} \, \mathrm{d}\chi(\mathrm{x}) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} x^v \ (1-x)^{n-v} sinvt \ \mathrm{d}\chi(\mathrm{x}) \\ &= \int_0^1 \mathrm{I}_n(x,t) \mathrm{d}\chi(\mathrm{x}) \end{aligned} \tag{4.1}$$

sonucu elde edilir. Burada

$$\mathrm{I}_n(x,t) = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \ x^v (1-x)^{n-v} sinvt \tag{4.2}$$

dır. Burada konservatif Hausdorff metodu için Lemma 3.2’ nin (3.7) şartı 0<t<π için

$$\sum = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 l_n(x,t) d\chi(x) \right| \tag{4.3}$$

nın esas sınırlı olma şartına indirgenir. Şimdi;

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{n<\frac{1}{t}} |\mathrm{L}_n(t)| \qquad , \qquad \sum\nolimits_2 = \sum_{n \geq \frac{1}{t}} |\mathrm{L}_n(t)|$$

yazalım.

$$\begin{aligned} |I_n(x,t)| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \ x^v (1-x)^{n-v} \ sinvt \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v} vt \\ &\leq \frac{t}{h} \sum_{v=1}^{n} v \ \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v} \end{aligned}$$

$\leq \frac{t}{n} nx$

$\leq xt$

olduğundan

$\mathrm{I}_n(x,t)$=$O(x,t)$ dır. Böylece ;

$$\Sigma_1 = \Sigma_{n<\frac{1}{t}} \left| \int_0^1 \mathrm{I}_n(x,t) d\chi(x) \right|$$

$$\leq \Sigma_{n<\frac{1}{t}} \int_0^1 |\mathrm{I}_n(x,t) d\chi(x)|$$

$$= O(t) \Sigma_{n<\frac{1}{t}} \int_0^1 x |d\chi(x)|$$

(ii) den χ sınırlı salınımlı olduğundan

$$\Sigma_1 = O(t) \Sigma_{n<\frac{1}{t}} \int_0^1 |d\chi(x)|$$

$$= O(t) \Sigma_{n<\frac{1}{t}} 1$$

$$= O(t) \Sigma_{n<\frac{1}{t}} 1$$

$$= O(t) \frac{1}{t} = O(t)$$

elde edilir. Şimdi

$\Sigma_2 = O$(t) olduğunu ispatlamaya geçelim; 0 < δ< 1 için χ(x)=$g_{1+\delta}$ (x)+c ise

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\delta)} \int_x^1 (v-x)^{\delta-1} g(x)\, dv + c$$

olup Gamma fonksiyonunun $\Gamma(1+\delta) = \delta\Gamma(\delta)$ özelliğini kullanarak

$$d\chi(x) = \chi'(x)\, dx$$

$$= \frac{-\delta}{\Gamma(1+\delta)} \int_x^1 (v-x)^{\delta-1} g(x) dv$$

$$= -\frac{\delta}{\Gamma(1+\delta)} \int_x^1 (v-x)^{\delta-1} g(x) dx\, dv$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_x^1 (v-x)^{\delta-1} g(x) dx\, dv$$

$$d\chi(x) = -g_\delta^-(x) dx$$

elde edilir. Böylece Lemma 3.5 ten

$$\int_0^1 \mathrm{I}_n(x,t) dt = -\int_0^1 \mathrm{I}_n(x,t)\, g_\delta^-(x) dx$$

$$= -\int_0^1 \mathrm{I}_{n,\delta}^+(x,t) g(x) dx$$

dır. Burada $\mathrm{I}_{n,\delta}^+$, x'in fonksiyonu olarak $\mathrm{I}_n(x,t)$ 'nin δ. ileri kesirli integrali anlamındadır. Bu yüzden;

$\sum_2 = \sum_{n\geq\frac{1}{t}} |£_n(t)|$

$\leq \sum_{n\geq\frac{1}{t}} \int_0^1 |\mathrm{I}_{n\delta}^{+}(x,t) g(x)| dx$

$= \int_0^1 |g(x)| \left\{\sum_{n\geq\frac{1}{t}} |\mathrm{I}_{n\delta}^{+}(x,t)|\right\} dx$

elde edilir. $g(x)$ fonksiyonu (0,1) de Lebesgue anlamında integrallenebilir olduğundan $\int_0^1 |g(x)|\, dx$ sonludur. Yani g∈ $L(0,1) \Rightarrow \int_0^1 |g(x)|\, dx < \infty$ dır. O halde $\sum_2 = O(1)$ olduğunu göstermek için x' e göre düzgün olarak

$\sum_{n\geq\frac{1}{t}} |\mathrm{I}_{n\delta}^{+}(x,t)| = O(1)$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$z = 1 - e^{it}$ olmak üzere

$\mathrm{I}_n(x,t) = \frac{1}{n} \mathrm{I}_m \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v} e^{ivt}$

$= \frac{1}{n} \mathrm{I}_m (1 - x\text{z})^n$

yazılabilir. Bu yüzden ;

$\mathrm{I}_{n\delta}^{+}(x,t) = \frac{1}{n\Gamma(\delta)} \int_0^x (x-v)^{\delta-1}\, \mathrm{I}_m (1-xz)^n dv$

dır. z=1-e^{it}olduğundan $|1-\text{z}|=1$ dir. Böylece (3.8) sağlanır. Yani z=1-e^{it} ile birlikte Lemma 3.6 dan ve t→ 0 iken $\left|1-e^{it}\right| \sim$t olmasından yararlanarak

$\mathrm{I}_{n\delta}^{+}(x,t) = O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}|\text{z}|^{\delta}}\right)$

$= O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}\left|1-e^{it}\right|^{\delta}}\right)$

$= O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}|t|^{\delta}}\right)$

elde edilir. Böylece $\sum \frac{1}{n^{\delta+1}} < \infty$ olduğundan

$\sum_{n\geq\frac{1}{t}} |\mathrm{I}_{n\delta}^{+}(x,t)| = O(1) \qquad \sum_{n\geq\frac{1}{t}} \frac{1}{n^{1+\delta} t^{\delta}} = O(1)$ dır.

Fakat χ(x)=$g_{1+\delta}^{+}$(x) +c (0 < δ < 1) ise x'e göre düzgün olarak $\mathrm{I}_{n\delta}^{-}(x;t) = O(\frac{1}{1+\delta t^{\delta}})$ istenen olduğunu gösterebilmek sonuç elde edilecektir. Şimdi;

$\mathrm{I}_{n\delta}^{-}(x,t) = \frac{1}{n\Gamma(\delta)} \int_x^1 (v-x)^{\delta-1}\, \mathrm{Im}\left\{1-v+ve^{it}\right\}^n dv$

$= \frac{1}{n\Gamma(\delta)} \int_x^1 (v-x)^{\delta-1}\, \mathrm{Im}\left\{e^{int}(v+(1-v)e^{-it})^n\right\} \mathrm{d}v$ $\quad v - x = u$ dünüşümünden

$= \frac{1}{n\Gamma(\delta)} \int_0^{1-x} u^{\delta-1}\, \mathrm{Im}\left\{e^{int}(x+u+(1-x-u)e^{-it}\right\}^n du$

$1 - x - u = y$ dönüşümünden

$=\frac{1}{n\Gamma(\delta)}\int_0^{1-x}(1-x-y)^{\delta-1}\ \mathrm{Im}\{e^{int}(1-y+ye^{-it})^n\}\ \mathrm{dy}$

$=\frac{1}{n\Gamma(\delta)}\int_0^{1-X}(1-x-y)^{\delta-1}\ \mathrm{Im}\{e^{int}(1-vz)\}^n dv$

elde edilir. Burada z =1-e^{-it} dır. Böylece Lemma 3.6 dan yine istenen sonuç elde edilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.2: Sınırlı salınımlı herhangi bir fonksiyon Fourier serisi mutlak Euler toplanabilmek zorunda değildir [**6**].

İspat: Euler toplanabilmesi durumundaki (4.3) şartı 0<t<π için

$$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n(\gamma,t)| \tag{4.4}$$

nın esas sınırlı olma şartına indirgenir. Daha sonra bunun sonucu olarak bu şartın (4.4)'i sağlamadığını göstereceğiz.$\frac{1}{t}$' den büyük en küçük tamsayı için $N = N(t)$ ve $\frac{1}{t^2}$ ' den küçük en büyük tamsayı için $M = M(t)$ seçersek bu durumda

$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n(\gamma,t)| \geq \sum_{n=N}^{M}|I_n(\gamma,t)|$

olduğu açıktır.

Çünkü

$N(t)$ =$inf\left\{m \in \mathrm{I}N : m > \frac{1}{t}\right\}$

$M(t) = sup\left\{m \in \mathrm{I}N : m < \frac{1}{t^2}\right\}$

dır. Böylece teoremin ispatlamak için t→0 iken

$$\sum_{n=N}^{M}|I_n(\gamma,t)| \to \infty \tag{4.5}$$

göstermek yeterlidir. Daha önce (4.2)' de verilen formüllerle

$I_n(\gamma,t)$=$\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n}\binom{n}{v}\gamma^v(1-\gamma)^{n-v}\sin vt$

$=\frac{1}{n}\ I_m\{1-\gamma+\gamma e^{it}\}^n$

$=\frac{1}{n}\rho^n \sin n\theta$

elde edilir. Burada(Demovre formülünü kullanarak)

ρ^2=1-4γ(1-γ)$sin^2\frac{t}{2}$ ve θ=arctan$\frac{\gamma sint}{1-\gamma+\gamma cost}$ dır. 0 <$\gamma < 1$ ve 0 < t < π için 0< ρ < 1 olduğundan

$\sum_{n=N}^{M}|I_n(\gamma,t)|$=$\sum_{n=N}^{M}\frac{1}{n}\rho^n|sin\, n\theta|$

$\geq \sum_{n=N}^{M} \frac{1}{n}\ \rho^n sin^2 \text{n}\theta$

$=\frac{1}{2} \sum_{n=N}^{M} \frac{\rho^n}{n} (1 - cos2n\theta)$

sonucu çıkar. Böylece

$$\sum_{n=N}^{M} \frac{\rho^n}{n} cos2n\theta = O(1) \quad (4.6)$$

ve t $\rightarrow 0^{+}$iken

$\sum_{n=N}^{M} \frac{\rho^n}{n} \rightarrow \infty$ olduğunu ispatlarsak istenen sonuç elde edilir. t sabiti için

$\frac{\rho^n}{n}$ n'nin azalan fonksiyonudur. Çünkü

$F(n)=\frac{\rho^n}{n}$ $\qquad 0 < \rho < 1$

$F'(n)=\frac{n\frac{\rho^n}{n\rho}-\rho^n}{n^2} < 0$

dır. O halde

$$\left|\sum_{n=N}^{M} \frac{\rho^n}{n}\ cos\ 2n\theta\right| \leq \frac{\rho^N}{N}\ max_{N\leq n\leq M} \left|\sum_{v=N}^{n} cos\ 2v\theta\right| \leq \frac{\rho^N}{N\ sin\ \theta} \leq \frac{1}{N\ sin\ \theta} \quad (4.7)$$

dır. Fakat $0 < \gamma < 1$ ve küçük t ler için $\theta \sim \gamma t$ dır. Böylece t$\rightarrow 0^{+}$ iken $sin\,\theta \sim \gamma t$, N$\sim \frac{1}{t}$ olduğundan (4.6) elde edilir. (4.7) i ispatlamak için c sabitini her bir durumda birbirine çok yakın ama aynı olması gerekmeyen kesinlikle pozitif sabit olacak şekilde seçelim. Böylece yeteri derecede küçük t için

ρ^2=1-4$\gamma(1-\gamma)sin^2 \frac{t}{2} \geq 1 - ct^2 \geq e^{-ct^2}$dir.

Bu yüzden n<$\frac{1}{t^2}$ için $\rho^n \geq e^{-cnt^2}$dır.Gerçekten

$\rho^2 \geq e^{-ct^2} \;=>\; \rho \geq e^{-c\frac{t^2}{2}}$

$\rho \geq e^{-c\frac{t^2}{2}} \geq e^{-ct^2}$=>n<$\frac{1}{t^2}$=>n$t^2 < 1 \;=>\; -c < -cnt^2$

$e^{-c} < e^{-cnt^2}$=>$\rho^n \geq e^{-cnt^2} > e^{-c} = c$

dır. Böylece (4.7) ten M ve N nın tanımını da kullanarak

$\sum_{n=N}^{m} \frac{\rho^n}{n} \geq c \sum_{n=N}^{M} \frac{1}{n}$

$\geq c \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} - c \sum_{n=N}^{M} \frac{1}{n}$

$\geq clogM - clogN$

$\geq clog\,\frac{1}{t^2}$-clog$\frac{1}{t}$

$\geq c\log\frac{1}{t}$

$N \sim \frac{1}{t}$ $\quad M \sim \frac{1}{t^2}$ olduğundan t$\rightarrow 0^{+}$ için limit alınırsa

$\sum_{n=N}^{M} \frac{\rho^n}{n} \rightarrow \infty$

elde edilir ki bu (4.7) sonucunun çıktığını gösterir ve teoremin ispatını tamamlanır.

5.FOURİER SERİLERİNİN EŞLENİK SERİLERİNİN MUTLAK HAUSDORFF TOPLANABİLMESİ

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx+b_n sinnx)$$

serisinin conjugate(eşlenik)serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n cosnx-a_n sinnx)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(x) \qquad (5.1)$$

dır.

$$\psi(t)=\psi_x(\mathrm{t})=\frac{1}{2}\{f(x+t)-f(x-t)\}$$

$$h(\mathrm{t})=\frac{\psi(t)}{log\frac{k}{t}}, \qquad (k>\pi) \qquad (5.2)$$

$$h_1(\mathrm{t})=\frac{1}{t}\int_0^t h(u)\,\mathrm{du}$$

yazalım. Ayrıca

i) (H,μ) konservatif

ii) $\int_0^1 loglog\frac{B}{1-x}|d\chi(x)|<\infty$

iii) $\int_0^1 log\frac{2}{x}d\chi(x)<\infty$

şartını sağlıyorsa $(H,\mu)\in\mathcal{M}$ ile gösterilir. Bu 3 şartı sağlayan (H,μ) Hausdorff dönüşümlerin sınıfı $\mathcal{M}$" ile gösterilecektir. Yani $(H,\mu)\in\mathcal{M}$ ise i,ii,ve iii şartları sağlanır.

Teorem 5.1: Eğer

i) h(t) $log\frac{k}{t}\in BV(0,\pi)$

ii) $\frac{h(t)}{t}\in L(0,\pi)$

iii) $(H,\mu)\in\mathcal{M}$

şartları sağlanıyorsa bu taktirde $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n(\theta)}{log(n+1)}$ serisi $|H,\mu|$ toplanabilirdir[**16**].

Teoremi ispatlamak için aşağıdaki lemmalara ihtiyaç vardır.

Lemma 5.1: t_n ve τ_n sırasıyla $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ serisinin ve $\{na_n\}$ dizisinin Hausdorff dönüşümlerini (ortalamalarını) göstersin. Bu durumda

$$\tau_n=n(t_n-t_{n-1}) \qquad (\mathrm{n}\geq 1)$$

dır [**9**].

Lemma 5.2:

i) $F(t)\ log\frac{k}{t} \in BV(0,\delta)$

ii) $\frac{F(t)}{t} \in L(0,\delta)$, $\delta>0$

olması için gerek ve yeter şartlar

i) $F(0+) = 0$

ii) $\int_0^{\delta} log\frac{k}{t}|dF(t)|<\infty$

olmasıdır [**17**].

Lemma 5.3:

i) $\sum_{v=1}^{n} v\binom{n}{v} z^v = nz\,(1+z)^{n-1}$

ii) $\sum_{v=1}^{n} v^2\binom{n}{v} z^v = nz\,(1+z)^{n-1} + n(n+1)z^2(1+z)^{n-2}$

dır [**16**].

İspat:$(1+z)^n = \sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v} z^v$

z'ye göre sırasıyla bir ve iki kere diferansiyelini alarak elde edilir.

Lemma 5.4:

$\int_0^{\pi} log\frac{k}{t} sinnt \sim \frac{log\,n}{n}$

z'ye göre sırasıyla bir ve iki kere diferansiyeli alarak elde edilir [**18**].

Lemma 5.5:

$0 < x < 1$, c pozitif, $A > \pi$ olmak üzere A pozitif sabit ve

I=$\int_{\frac{A}{tx}}^{\infty} \frac{exp\{-cx(1-x)t^2y\}}{ylogy}$ dy

olsun. Bu taktirde $o < t \le \pi$ de düzgün olarak

I=$O(loglog\frac{B}{1-x})$, (B>e)

dır [**16**].

Lemma 5.6:

0 < x < 1 , n, v pozitif sayılar , $v \le \frac{nx}{2}$ ise bu durumda

$\sum_{p=1}^{v}\binom{n}{p} x^p(1-x)^{n-p} \le \frac{4(1-x)}{nx}$

dır [**16**].

Lemma 5.7:

0 < x < 1 ve

$$I(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n-l}\Delta\left\{\frac{1}{log(v+1)}\right\}\sum_{p=1}^{v}\binom{n}{p}x^p(1-x)^p \quad (5.3)$$

olsun. Bu durumda

$I(x) = O(log\frac{2}{x})$ dır [**16**].

0 < x < 1 , 0 < t< π için

$M(n,x,t)=\sum_{v=1}^{n} v\binom{n}{v} x^v(1-x)^{n-v}\frac{sinvt}{log(v+1)}$

$l(n,x,t) = \sum_{v=1}^{n} v\binom{n}{v} x^v(1-x)^{n-v}sinvt$

l_v(n,x,t)=$\sum_{p=1}^{v} p\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p}sinpt$

$G(n,x,t)=\int_t^{\pi} log\frac{k}{u}l(n,x,t)du$

$K(n,x,t))=\int_0^t log\frac{k}{u}\, l(n,x,u)du$

olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar elde edilir. c bir pozitif sabit olmak üzere

$$K(n,x,t) = O(t^2 log\frac{k}{t})\{nx+n^2x^2\} \quad (5.4)$$

$$\left|\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}x^v(1-x)^{n-v}e^{ivt}\right|$$
$$\leq \left|(1-x+xe^{it})^n\right|$$
$$\leq exp\,\{-cx(1-x)t^2n\} \quad (5.5)$$

dır [**16**].

$$G(n,x,t)=O(log\frac{k}{t}\, exp\{-cx(1-x)t^2n\} \quad (5.6)$$

dır.

$|sinvt| \leq vt$ yi kullanarak Lemma 5.3' ten dolayı

$|K(n,x,t)| \leq \int_0^t ulog\frac{k}{u}\left(\sum_{v=1}^{n}v^2\binom{n}{v}x^v(1-x)^{n-v}du\right)$

$=\{nx+n(n-1)x^2\}\int_0^t u\, log\frac{k}{u}$ du

bulunur ki bu (5.4) ün ispatıdır. Yine c bir pozitif sabit olmak üzere

$\left|(1-x+xe^{it})^n\right|=\left[1-4x(1-x)sin^2\frac{t}{2}\right]^{\frac{n}{2}}$ =

$exp\left\{-log\left[1-4x(1-x)sin^2\frac{t}{2}\right]\right\}$

$\leq exp\left\{-2nx(1-x)sin^2\frac{t}{2}\right\}$

$\leq exp\{-cx(1-x)t^2n\}$

bulunur ki bu (5.5) in ispatı için 2. Ortalama değer teoremini uygulamak suretiyle

$G(n,x,t)= log\frac{k}{t}(\Re(1-x+xe^{it})^n - \Re\,(1-x+xe^{ix})^n)$

olup $\lambda \geq t$ olduğundan (5.5) ‘i kullanarak

$G(n,x,t)=O(log\frac{k}{t}\,e^{-cx(1-x)t^2n}\,)$

bulunur[**16**].

Şimdi Lemma 5.2’den dolayı Teorem 5.1 aşağıdaki teoreme denk olacaktır.

Teorem 5.2:

i) $h(0+) = 0$

ii) $\int_0^{\pi} log\frac{k}{t}|dh(t)| < \infty$

iii) $(H,\mu) \in \mathcal{M}$

şartlarını sağlıyorsa bu durumda $\sum\frac{B_n(\theta)}{log(n+1)}$ serisini $|H,\mu|$ toplanabilirdir [**16**].

İspat:$B_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(t)log\frac{k}{t}\sin nu\,du$

olduğundan böylece $h(0+) = 0$ ve $\int_t^{\pi} log\frac{k}{u}sinku\,du$ sınırlı olmasından dolayı kısmi integrasyonla

$$B_n(\theta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} dh(t)\int_t^{\pi} log\frac{k}{u}sinnu\,du \quad (5.7)$$

elde ederiz. Böylece Lemma5.1 ve $\sum|t_n - t_{n-1}| < \infty$ den $\sum\frac{B_n(\theta)}{log(n+1)}$ serisi $|H,\mu|$ toplanabilirdir $\Leftrightarrow \sum=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{v=1}^{n}\binom{n}{v}\Delta^{n-v}\mu_v\frac{vB_v}{log(v+1)}\right|<\infty$ dır.

Yine (H,μ) konservatif olduğundan (5.7) yi kullanarak

$$\sum\leq\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|dh(t)|\int_0^1|d\,\chi(x)|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left|\int_t^{\pi} log\frac{k}{u}M(n,x,u)\right|du \quad (5.8)$$

elde ederiz.

$$N(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left|\int_t^{\pi} log\frac{k}{u}\,M(n,x,u)\right|$$

olsun. Bu durumda Abel dönüşümünden

$$M(n,x,t)=\sum_{v=1}^{n-1}\Delta\left\{\frac{1}{log(v+1)}\right\}l_v(n,x,t)+\frac{l(n,v,t)}{log(n+1)}$$

olduğundan

$N(x,t)$=$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n-1}\Delta\left\{\frac{1}{log(v+1)}\right\}\left|\int_t^{\pi} log\frac{k}{u}l_v(n,v,u)du\right|$+$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|G(n,x,t,9|}{n\,log(n+1)}$

= $\sum_1+\sum_2$

yazılabilir. Şimdi t≤ $M\leq\pi$ için 2. Ortalama Değer Teoreminden

$\int_t^{\pi} log\frac{k}{u}l_v(n,x,u)\,du$ =$log\frac{k}{t}\int_t^{\pi} l_v\,(n,x,t)du$

=$log\frac{k}{t}\left[-\sum_{p=1}^{v}\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p}\cos pu\right]_t^{\mu}$

olduğundan Lemma 5.7 den

$$\sum_1=O(log\frac{k}{t})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n-1}\Delta\left\{\frac{1}{log(v+1)}\right\}\sum_{p=1}^{v}\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p}$$

$$=O(log\frac{k}{t}\,log\frac{2}{x}) \tag{5.9}$$

elde ederiz.$\sum_2$ yi ele almak için A, A>π şartını sağlayan bir pozitif sabit olmak üzere

$\sum_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|G(n,x,t)|}{n\,log(n+1)}$

=$\sum_{n<\left(\frac{A}{tx}\right)+1}\frac{|G(n,x,\pi)|}{n\,log(n+1)}$+$\sum_{n\geq\left(\frac{A}{tx}\right)+1}\frac{|G(n,x,t)|}{n\,log(n+1)}$

=$\sum_{21}+\sum_{22}$

olarak yazalım. Şimdi

$\sum_{21}'=\sum_{n<\left(\frac{A}{tx}\right)+1}\frac{|K(n,x,\pi)-K(n,x,t)|}{n\,log(n+1)}$

$\leq\ \sum_{n<\left(\frac{A}{tx}\right)+1}\frac{|K(n,x,\pi)|}{n\,log(n+1)}$+$\sum_{n<\left(\frac{A}{tx}\right)+1}\frac{|K(n,x,t)|}{n\,log(n+1)}$

diyelim. Lemma 5.4 ü kullanarak

$K(n,x,t)$=$\int_0^{\pi} log\frac{k}{u}\ l(n,x,t)$du

=$\sum_{v=1}^{n}v\binom{n}{v}\ x^v(1-x)^{n-v}\int_0^{\pi} log\frac{k}{u}$ sinvu du

=$O(\sum_{v=1}^{n}log(v+1)\binom{n}{v}x^v(1-x)^{n-v})$

olduğunu görürüz. Bu yüzden A>π için

$\sum_{21}'$ = O (1) $\sum_{n<\left(\frac{A}{tx}\right)+1}\frac{1}{n}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}x^v(1-x)^{n-v}$

$=O$ (1)$\sum_{n<\left(\frac{A}{tx}\right)+1}\frac{1}{n}=O(log\frac{2A}{tx})$

$$=O\ (log\frac{k}{t}+log\frac{2}{x}) \tag{5.10}$$

dır. 0<t<π için $(log\frac{k}{t})^{-1}$ ve 0<x≤ 1 için $(log\frac{2}{x})^{-1}$ sınırlı olmasından (5.4) den

$\sum_{21}''$ = $O\ (t^2\ log\frac{k}{t})\sum_{n<\left(\frac{A}{tx}\right)+1}\frac{x+nx^2}{log(n+1)}$

$= O\ (1) = O(log\frac{k}{t})$

iken

$\sum'_{21} \ = O\ (\ log\frac{k}{t}\ \log\frac{2}{x})$

dır. Böylece $\sum'_{21}$ ve $\sum''_{21}$ kullanılarak (5.10) dan dolayı

$$\sum'_{21} = O(log\frac{k}{t}\ log\frac{2}{x}) \tag{5.11}$$

elde ederiz. Diğer taraftan (5.6) i kullanılarak

$$\sum_{22} = O\ (\log\frac{k}{t})\sum_{n\geq\left(\frac{A}{tx}\right)+1}\frac{exp\{-cx(1-x)t^2n\}}{n\ log(n+1)}$$

elde edilir.

$$T(y) = \frac{exp\{-cx(1-x)t^2y\}}{ylogy}$$

$T(y)$, y nin azalan fonksiyonu olduğundan

$$T(n) \leq \int_{n-1}^{n} T(y)dy$$

elde ederiz. Bu yüzden

$$\sum_{n\geq\left(\frac{A}{tx}\right)+1} T(n) \leq \int_{\frac{A}{tx}}^{\infty} T(y)dy$$

dır. Sonuç olarak Lemma 5.5 ten

$$\sum_{22} = O(log\frac{k}{t})\int_{\frac{A}{tx}}^{\infty}\frac{exp\{-cx(1-x)t^2y\}}{ylogy}dy$$

$$= O\ (log\frac{k}{t}loglog\frac{B}{1-x}) \tag{5.12}$$

dır. Böylece (5.11) ve (5.12) sonuçları toparlayarak (5.9) dan

$$\sum_2 = O(\log\frac{k}{t}\ log\frac{2}{x}) + O(log\frac{k}{t}log\ log\frac{B}{1-x}) \tag{5.13}$$

elde ederiz ki sonuç olarak (2.13) ve (2.8) den dolayı (5.7) den

$N(x,t) = \mathrm{O}(log\frac{k}{t}\ )\left\{log\frac{2}{x} + loglog\frac{B}{1-x}\right\}$ buluruz. Böylece (5.6) dan dolayı son olarak (iii) hipotezinden de yararlanılarak

$$\sum = O(1)\int_0^{\pi} log\frac{k}{t}|dh(t)|\int_0^1\left\{log\frac{2}{x} + loglog\frac{B}{1-x}\right\}|d\chi(x)|$$

$$= O(\int_0^{\pi} log\frac{k}{t}|dh(t)|\ )$$

$$= O(1)$$

elde ederiz ki bu teoremin ispatını tamamlar.

SONUÇ

Bu çalışmada Fourier serileri ile bu serilerin eşlenik serilerinin (H,μ) mutlak Hausdorff toplanabilmesi ile ilgili literatürde yer alan teoremlerin ispatı incelendi. Bu metotla ilgili teoremlerin ispatını yapmak için faydalanılan lemmalardan bazılarının ispatı incelendi ve bu lemmaların teoremler üzerindeki etkileri araştırıldı. Hausdorff metodunun özel durumu olan (C,α) metodu ile ilgili bir teoremin ifadesi verildi. Bu teoremin çalışmanın esas kısmını oluşturan Hausdorff metodunun özel bir durumu olması bir örnekle incelendi. Ayrıca (E,α) metodu özel bir Hausdorff metodu olmasına rağmen sınırlı salınımlı bir fonksiyonun Fourier serisinin mutlak Euler toplanmak zorunda olmadığına dair bir teoremin ispatı incelendi. Çalışmada kullanılan temel tanımlar ve teoremin verildikten sonra ispatı incelenen teoremlerin nasıl kullanıldığı tartışıldı. Karakteristik fonksiyon üzerinde bulunan sınırlı salınımlı olma şartının kaldırılamayacağı görüldü. Hausdorff metodunun regüler olması durumu teoremlerin ispatında kolaylıklar sağladı ve bu regülerlik şartının kaldırılması halinde ispatların yapılmasında problem oluşturduğu görüldü. Ayrıca moment sabitinin Hausdorff toplanabilme metodunun regüler ve konservatif olmasındaki önemi gözlendi. δ. mertebeden ileri ve geri kesirli integraller üzerinde χ sınırlı salınımlı fonksiyonun etkisi görüldü. Fourier serileri ile bu serilerin eşlenik serilerinin Hausdorff toplanabilmesi incelenirken bu serilerin kısmi toplamlar dizisinin ele alınmasının ispatlardaki rolü gözlendi Ayrıca çalışmada kullanılan bazı fonksiyonların Lebesgue anlamında integrallenebilir olması ve ikinci ortalama değer teoreminin teoremleri ispatında kolaylıkla sağladığı görüldü. Çalışmada ispatı incelenen teoremlerden yararlanılarak Fourier serileri ile bu serilerin eşlenik serilerinin Hausdorff toplanabilmesi ile ilgili literatürde olmayan teoremler üzerinde çalışabilir.

KAYNAKLAR

1. Bosanquet, L. S., Note on the absolute summability (C) of a Fourier Series , J. London Math. Soc.,11, 11-15,1936.

2. Hurwitz, W.A., Silverman, L.L., On the consistency and equivalence of certain definitions of summability, Trans. Amer. Math. Soc., 18,1-20, 1917.

3. Hausdorff, F., Summationmethoden und Momentfolgen I., Math. Z., 9, 74-109,1921.

4. Hardy, G. H., Divergent series, Oxford, 1949.

5. Morley, H., A theorem on Hausdorff transformations and its applications to Cesa'ro and Holder means, J. London Math. ,Soc., 25, 168-173, 1950.

6. Tripathy. N., On the absolute Hausdorff summability of Fourier series, J. London Math.Soc., 44, 15-25, 1969.

7. Petersen, G. M., Regular matrix transformations, Cambridge, 1966.

8. Zygmund, A., Trigonometric series, Cambridge, 1959.

9. Knopp, K., Lorentz, G. G., Beitrage zur absoluten Limitierung, Arch. Math.,2, 10-16, 1949.

10. Ramanujan, M. S., Quart. J. Math. Oxford ser., 8, 197-213, 1957.

11. Hille, E., Tamarkin, J. D., On the summability of Fourier series III, Math. Ann., 108, 527-577, 1933.

12. Kuttner, B.. Some theorems on fractional derivatives, Proc.London Math.Soc., (3), 3, 480-497, 1953.

13. Widder, D. V., The Laplace Transform, 152, Princeton, 1946.

14. Kuttner, B.. On the second theorem of consistency for Riesz summability (II), J..London Math.Soc., 27, 207-217, 1952.

15. Balcı, M., Matematik Analiz 2, Ankara , 1997.

16. Tripathy, N., Dash, T., On The absolute Hausdorff summability factor of the conjugate series of a Fourier series., Indian J. Pure Appl.Math.16(10) , 1138-1161, 1985.

17. Mohanty, R., Proc. Lond. Math.Soc., (2) 52, 295-320, 1951.

18. Mohanty, R., Ray, B. K., Proc. Camb. Phil. Soc., 65, 75-85, 1969.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Çorum'da doğan Hande ÖZARSLAN ilköğretimini Albayrak İlköğretim Okulunda lise öğrenimini Çorum Atatürk Y.D.A. Lisesinde tamamlamıştır. 2007 yılında kazandığı Kayseri Erciyes Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünü 2011 yılında tamamlamıştır.

2012 yılında Kayseri Erciyes Üniversitesinde formasyon eğitimini bitirdikten sonra aynı yıl yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Matematik Anabilim dalında başlamıştır.

2013 yılında Çorum Çalışma ve İş Kurumuna atanmıştır.

Evli ve 1 çocuk annesidir.

İletişim Bilgileri:

Adres: Buhara Evler Mah. 21. Sok. Zehra Güler Apt. no:10/3 ÇORUM/MERKEZ

İş Adresi: Cengiz Topel Cad. No:122 ÇORUM/MERKEZ

Telefon: 0545 5201450 - 0364 2138339/154

E posta: Hande.ozarslan@iskur.gov.tr