T.C

BOZOK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

TOPOLOJİK UZAYLARIN DİZİSEL ANLAMDA İNCELENMESİ

Lokman KOÇAK

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Hürmet Fulya AKIZ

Yozgat 2017

T.C

BOZOK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

TOPOLOJİK UZAYLARIN DİZİSEL ANLAMDA İNCELENMESİ

Lokman KOÇAK

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Hürmet Fulya AKIZ

Yozgat 2017

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Bölümü Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111314004 numaralı öğrencisi Lokman KOÇAK' ın hazırladığı "**Topolojik Uzayların Dizisel Anlamda İncelenmesi**" başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 22/03/2017 Çarşamba günü saat 14:00'da yapılmış, tezin onayına oy birliği/oy çokluğu ile karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. MURAT BABAARSLAN

Jüri Üyesi (Danışman) : Yrd. Doç. Dr. Hürmet Fulya AKIZ

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun ..14.../..04.../2017 tarih ve .11.. sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

..14../..04../2017

Doç. Dr. Fuat KÖKSAL
Müdür

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TOPOLOJİK UZAYLARIN DİZİSEL ANLAMDA İNCELENMESİ

Lokman KOÇAK

Bozok Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

2017; Sayfa: 27

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Hürmet Fulya AKIZ

ÖZET

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde tezin amacı açıklanmış ve tezde kullanılan kavramlarla ilgili literatür bilgisi verilmiştir.

İkinci bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan Hausdorffluk, süreklilik, dizisel süreklilik ve yakınsaklık hakkında temel bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde bir topolojik uzayda dizisel açık ve dizisel kapalı cümlelerden bahsedilmiş ve dizisel uzaylar incelenmiştir.

Dördüncü bölüm özgün olarak hazırlanmıştır. Bu bölümde dizisel açık cümleler yardımıyla dizisel Hausdorffluk tanımı yapılmış ve bu yapının Hausdorfflukla olan ilişkisi incelenmiştir. Ayrıca dizisel Hausdorff uzayların özel bir hali olan tam dizisel Hausdorffluk tanıtılmış ve örneklendirilmiştir.

SEQUENTIALLY CONTENTS ON TOPOLOGICAL SPACES

Lokman KOÇAK

Bozok University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Master of Sciences Thesis

2017; Page: 27

Thesis Supervisor: Asist. Prof. Dr. Hürmet Fulya AKIZ

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, the aim of the thesis is explained and the literatüre review is given.

In the second chapter, the notions of Hausdorff space, continuity, sequentially convergence, which will be used on the following pages are given.

In the third chapter, the notions of sequentially open and sequentially closed sets in a topological space are discussed.

Finally, the fourth chapter is prepared originally. Sequentially Hausdorff spaces are introduced by sequentially open sets and the relationships between Hausdorff spaces and sequentially Hausdorff spaces are discussed. Additinally, the notion of full sequentially Hausdorff spaces are given and examplified.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardımlarını esirgemeyen, tecrübelerinden faydalandığım danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Hürmet Fulya AKIZ hocama sabrından ve hoşgörüsünden dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca bu eğitimimi tamamlamamda yardımı dokunan, desteklerini ve tecrübelerini esirgemeyen bölümümüzün kıymetli hocaları, Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU, Doç. Dr. Murat BABAARSLAN, Yrd. Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR, Öğr. Gör. Dr. Funda BABAARSLAN, Öğr. Gör. Dr. Mehmet EKİCİ, Arş. Gör. Hüseyin KAMACI ve Aksaray Üniversitesinden katılım inceliği gösteren Sayın Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN' a teşekkürlerimi sunarım.

Tüm bu çalışmalar sırasında sıkıntılarımı paylaşan, yaşamımın her anında desteklerini hissettiğim kıymetli aileme sonsuz teşekkürü bir borç bilirim. Aynı zamanda bu çalışmamda desteği dokunan mesai arkadaşlarım Nurhan ATABEY, Pembe NALDÖKEN ve Hazal BAKKAL' a teşekkürlerimi sunarım.

1. GİRİŞ

Topoloji ve matematiğin diğer bilim dallarında, Hausdorff uzay kavramı, ayırma aksiyomları içerisinde en çok kullanılan aksiyomdur. Bir Hausdorff uzay, birbirinden farklı herhangi iki noktasının ayrık açık komşuluklara sahip olduğu bir topolojik uzaydır. Hausdorff bir topolojik uzayda yakınsak bir dizinin limiti tekdir [1-5].

Dizilerdeki yakınsaklık kavramı yardımıyla, topolojik uzaylardaki açık ve kapalı cümlelerden daha genel olan dizisel açık ve dizisel kapalı cümle tanımı yapılmıştır [6-10]. Her açık cümle dizisel açıktır. Dizisel uzaylarda ise açıklık ve dizisel açıklık kavramları birbirine denktir. Bu kavramlar daha sonraları topolojik uzayların farklı konularına genişletilmiştir. Bunlardan biri, boş ve kendisinden başka dizisel açık ve dizisel kapalı alt kümesi bulunmayan dizisel irtibatlı topolojik uzaylardır. Her dizisel irtibatlı uzay irtibatlıdır [11-14]. Daha sonraları, G-metodu başlığı altında, G-dizisel açıklık, G-dizisel kapalılık, G-dizisel süreklilik [15], G-dizisel kompaktlık [16], G-süreklilik [17], G-yakınsaklık, G-dizisel irtibatlılık kavramları üzerinde çalışılmıştır [18-20].

Bu çalışmada ise Hausdorffluk kavramından daha geniş bir yapı olan dizisel Hausdorffluk kavramı tanıtılmıştır ve örneklendirilmiştir. Bir uzayda birbirinden farklı herhangi iki noktasının ayrık dizisel açık komşulukları varsa, bu uzaya dizisel Hausdorfftur denir. Her Hausdorff uzay dizisel Hausdorfftur. Dizisel uzaylarda bu iki kavram birbirine denktir. Ayrıca dizisel Hausdorff uzayların özel bir hali olan tam dizisel Hausdorff uzayların tanımı verilmiştir. Konunun anlaşılması için örneklere başvurulmuştur. Hausdorff uzaylarda gözlenen bazı özellikler, yeni tanımlanan bu uzaylar için de tekrar gözden geçirilmiştir.

2. BÖLÜM

Bu bölümde, Hausdorff uzay, süreklilik, kompakt uzaylardan ve topolojik uzaylarda dizilerden bahsedilmiştir. Bu bölüm oluşturulurken literatürde temel kabul edilen Brown [4], Bourbaki [1] ve Rotman [2] kaynaklarının yanı sıra Mucuk [5] den de faydalanılmıştır.

2.1 Hausdorff uzay

Tanım 2.1.1 (X,τ) bir topolojik uzay olsun. $x,y\in X$ farklı noktaları için $x\in G, y\in H$ ve $G\cap H=\varnothing$ olacak şekilde G ve H açık cümleleri varsa bu uzaya bir *Hausdorff uzayı* denir.

Örnek 2.1.2 X cümlesi üzerinde diskre topoloji bir Hausdorff uzaydır. Çünkü alınan farklı x ve y tek nokta cümleleri açık cümlelerdir.

Örnek 2.1.3 X cümlesi üzerinde indiskre topoloji Hausdorff uzay değildir. Çünkü alınan farklı x ve y noktalarını içeren tek açık cümle X in kendisidir.

Örnek 2.1.4 $\mathbb{R}$ cümlesi üzerinde tümleyeni sayılabilir topoloji Hausdorff uzay değildir. Kabul edelim ki bu topoloji Hausdorff uzay olsun. $x,y\in\mathbb{R}$ için $x\in G$ ve $y\in H$, $G\cap H=\varnothing$ olacak şekilde G ve H açık cümleleri vardır. G açık ise G^C sayılabilirdir ve aynı şekilde H açık ise H^C sayılabilirdir. Buradan $G\cap H=\varnothing \Rightarrow G^C\cup H^C=\mathbb{R}$ olacaktır ki bu bir çelişkidir. Çünkü iki sayılabilir cümlenin birleşimi sayılamaz olamaz. O halde bu topoloji Hausdorff uzay değildir.

2.2 Süreklilik

Tanım 2.2.1 (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu için $x_0\in X$ noktası verilsin. Eğer V, $f(x_0)$ ın açık komşuluğu için

$f(U) \subseteq V$ olacak şekilde x_0 noktasının U açık komşuluğu varsa f fonksiyonu x_0 noktasında *süreklidir* denir. f fonksiyonu X in her noktasında sürekli ise f ye bir *sürekli fonksiyon* denir.

Örnek 2.2.2. $X = \{1,2,3\}$ cümlesi üzerinde $\tau = \{X, \varnothing, \{2\}, \{2,3\}\}$ ve $Y = \{a,b,c\}$ cümlesi üzerinde $\sigma = \{Y, \varnothing, \{a\}, \{a,c\}\}$ topolojisi verilsin. Bir $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu $f(2) = a$, $f(3) = c$ ve $f(1) = b$ ile tanımlansın. $f(2) = a$ nin açık komşulukları $\{a\}$, $\{a,c\}$ ve Y olup 2 nin $U = \{2\}$ açık komşuluğu için $f(U) \subseteq \{a\}$ $f(U) \subseteq \{a,c\}$ ve $f(U) \subseteq Y$ olduğundan f fonksiyonu 2 noktasında süreklidir. Benzer olarak $f(3) = c$ nin açık komşulukları $\{a,c\}$ ve Y olup buna karşılık 3 ün $U = \{2,3\}$ açık komşuluğu için $f(U) \subseteq \{a,c\}$ ve $f(U) \subseteq Y$ olduğundan f fonksiyonu $3 \in X$ de süreklidir. Fakat $f(1) = b$ in V açık komşuluğu için $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde 1 nin hiçbir U açık komşuluğu yoktur. Çünkü 1 noktasının tek açık komşuluğu X dir. O halde f fonksiyonu $1 \in X$ noktasında sürekli değildir.

Teorem 2.2.3 (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart Y deki her açık cümlenin ters görüntüsünün X de açık olmasıdır.

İspat: f sürekli bir fonksiyon ve V de Y de açık bir cümle olsun. $f^{-1}(V)$ nin X de açık olduğunu göstermeliyiz. $x \in f^{-1}(V)$ için $f(x) \in V$ ve f sürekli olduğundan $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde x in bir U açık komşuluğu vardır. Buradan $x \in U \subseteq f^{-1}(V)$ olup $f^{-1}(V)$ cümlesi X de açıktır.

Aksine Y deki açık cümlelerin $f^{-1}(V)$ ters görüntüsü X de açık olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $f(x)$ in bir V açık komşuluğu verilsin. $U = f^{-1}(V)$ cümlesi x in açık bir komşuluğu olup $f(U) \subseteq V$ dir. O halde f fonksiyonu keyfi bir x noktasında sürekli olduğundan süreklidir.

2.3 Kompakt uzaylar

Tanım 2.3.1 (X,τ) topolojik uzay ve $A\subseteq X$ olsun. A cümlesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü var ise A ya *kompakt cümle* denir. Bir başka deyişle eğer X cümlesinin her açık örtüsünün bir sonlu örtüsü var ise (X,τ) topolojik uzayına *kompakt uzay* denir.

Örnek 2.3.2 Boş olmayan bir X cümlesi üzerinde diskre topoloji ve $A\subseteq X$ cümlesi kompakt bir uzaydır. Eğer sonlu bir $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ cümlesinin açık bir G örtüsü her bir $a_i\in A$ için $a_i\in G_{a_i}$ olacak şekilde $G_{a_i}\in G$ seçilerek sonlu açık bir $G=\{G_{a_i}:a_i\in A\}$ alt örtüsü elde edilir. Eğer A sonsuz bir cümle ise kompakt değildir. Çünkü $G=\{\{a\}:a\in A\}$ sınıfı A nın açık bir örtüsü olduğu halde sonlu bir alt örtüsü bulunamaz.

Örnek 2.3.4 X cümlesi üzerinde tümleyeni sonlu topolojisini ele alalım, $A\subseteq X$ alt cümlesi kompakttır. A cümlesinin açık örtüsü $G=\{G_i:i\in I\}$ olsun. $G_{i_0}\in G$ için $G_{i_0}^c$ sonlu olacağından $A\cap G_{i_0}^c=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ sonlu olur. Burada G sınıfı A nın bir örtüsü olduğundan her bir $a_k\in A\cap G_{i_0}^c$ için $a_k\in G_{i_k}$ olacak şekilde $G_{i_k}\in G$ vardır. Buradan

$$A\cap G_{i_0}^c\subseteq G_{i_1}\cup...\cup G_{i_n}$$

olur. Dolayısıyla $A\subseteq G_{i_0}^c\cup\left(A\cap G_{i_0}^c\right)\subseteq G_{i_0}^c\cup G_{i_1}\cup...\cup G_{i_n}$ olup A kompakttır.

Örnek 2.3.5 $\mathbb{N}$ üzerinde tümleyeni sayılabilir topoloji kompakt değildir. Çünkü $n\in\mathbb{N}$ için $G_n=\{n,n+1,...\}$ ve $G_n^c=\mathbb{N}\setminus G_n$ olmak üzere $\Im=\{G_n^c:n\in\mathbb{N}\}$ sınıfı $\mathbb{N}$ nin açık bir örtüsüdür. Fakat bu örtünün sonlu bir alt örtüsü yoktur.

Teorem 2.3.6 Hausdorff bir topolojik uzayın kompakt bir alt cümlesi kapalıdır.

İspat: (X,τ) Hausdorff uzay ve $A \subseteq X$ alt cümlesi kompakt olsun. A^c nin açık olduğunu gösterelim. $x \in A^c$ olsun. X Hausdorff uzay olduğundan $a \in A$ için $a \in G_a$ ve $a \in H_x$, $G_a \cap H_x = \varnothing$ olacak şekilde G_a ve H_x açık alt cümleleri vardır. Buradan $\{G_a : a \in A\}$ sınıfı A nın açık bir örtüsüdür. Aynı zamanda A cümlesi kompakt olduğundan bu açık örtünün sonlu bir $\{G_{a_1},....,G_{a_n}\}$ alt örtüsü vardır. Buradan $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{a_i}$ olur. $G_x = \bigcup_{i=1}^{n} G_{a_i}$ ve $H_x = \bigcap_{i=1}^{n} H_{a_i}$ olmak üzere $G_x \cap H_x = \varnothing$ olarak seçilmelidir. Aksi halde alınacak bazı i ler için $G_x \cap H_x \neq \varnothing$ olurdu. Bu ise bu kümelerin ayrık olmasıyla çelişirdi. O halde $A \cap H_x = \varnothing$ olup $x \in H_x \subseteq A^c$ den A^c cümlesi açık ve A kapalıdır.

2.4 Topolojik uzaylarda diziler

Tanım 2.4.1 (X,τ) bir topolojik uzay (a_n) terimleri X de olan bir dizi ve $a \in X$ olsun. Eğer $a \in X$ nın her G açık komşuluğu için $n > n_0$ olduğunda $a_n \in G$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa; yani a nın her açık komşuluğunda dizinin belli bir indisten sonraki terimleri bulunuyorsa (a_n) dizisi $a \in X$ noktasına yakınsar denir. Bir (a_n) dizisinin a ya yakınsaması

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

veya

$$a_n \to a$$

ifadelerinden biri ile gösterilir.

Örnek 2.4.2 $X \neq \varnothing$ bir cümle ve $\tau = \{\varnothing, X\}$ olsun. Bu uzaydaki herhangi bir (a_n) dizisi her $a \in X$ noktasına yakınsar. Çünkü $a \in X$ noktasının tek açık komşuluğu X dir. Bütün terimleri X de bulunduğundan indiskre topolojiye göre bir dizi X in her noktasına yakınsar.

Örnek 2.4.3 $(\mathbb{R}, U)$ alışılmış topolojiye göre,

1) $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisini ele alalım. 0 ın her ε komşuluğu için $n > n_0$ olduğundan $a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $(a_n) \to 0$ dır.

2) $(a_n) = n$ dizisini ele alalım. Aldığımız her nokta için ε komşuluğunda dizinin terimleri bu aralıkta yer alamaz. Dolayısıyla hiçbir noktaya yakınsamaz.

3) $(a_n) = \left(-\frac{1}{n}\right)$ dizisini alalım. (a_n) dizisi sıfıra yakınsar. Çünkü $0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ şeklindeki her açık aralık (a_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç tüm terimlerini içerir. Bu durumda $(a_n) \to 0$ dır.

4) $(a_n) = (-1)^n$ dizisini göz önüne alalım. $(a_n) = (-1, 1, -1, 1, ...)$ olup aldığımız her ε için o komşulukta -1 veya 1 yer almaz.

5) $(a_n) = 1$ dizisini ele alalım. $(a_n) = 1$ dizisinde 1 in her ε komşuluğu için $n > n_0$ olduğundan $(a_n) \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. O halde $(a_n) \to 1$ dır.

Örnek 2.4.4 Her $a \in \mathbb{R}$ için $G_a = (a, \infty)$ olmak üzere $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau = \{G_a : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \varnothing\}$ topolojisi verilsin.

1) $(a_n) = \left(-\frac{1}{n}\right)$ dizisini ele alalım. $x \leq 0$ için x her G_a açık komşuluğu için dizinin belli bir teriminden sonra terimleri bu aralık içinde kalır. Yani $(a_n) \to 0$ dır.

2) $(a_n) = n$ dizisini ele alalım. Dizinin terimleri sonsuza gittiğinden her $x \in \mathbb{R}$ için $a_n \in G_a$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ yoktur. Yani dizini belli bir indisten sonraki değerleri boşta kalır. (a_n) dizisi hiçbir değere yakınsamaz.

3) $\left(a_n\right)=\left(\frac{n+1}{n}\right)$ dizisini ele alalım. $x \leq 1$ için x her G_a açık komşuluğu için dizinin belli bir teriminden sonra terimleri bu aralık içinde kalır. Yani $\left(a_n\right) \rightarrow 1$dir.

4) $\left(a_n\right)=\left(a, a, \ldots\right)$ dizisini ele alalım. $x \leq a$ için dizinin terimleri aralık içinde kalır. Dolayısıyla $\left(a_n\right) \rightarrow a$ dır.

Örnek 2.4.5 $\mathbb{Z}$ tamsayılar cümlesi üzerindeki tümleyeni sonlu topoloji ile göz önüne alalım.

a) $(a_n)=(1,2,3,\ldots)$ dizisi $\mathbb{Z}$ nin her noktasına yakınsar

b) $\left(a_n\right)=((-1)^n)$ dizisi $\mathbb{Z}$ nin hiçbir noktasına yakınsamaz.

Önerme 2.4.6 $X \neq \varnothing$ cümlesi üzerinde $\tau=P(X)$ diskre topoloji olsun. Bu uzaydaki herhangi bir (a_n) dizisi bir $a \in X$ noktasına yakınsar ancak ve ancak dizinin belli bir indisten sonraki tüm terimleri a dır.

İspat: Kabul edelim ki $(a_n) \rightarrow a \in X$ olsun. Diskre topolojide $\{a\}$ tek nokta cümlesi $a \in X$ nın bir açık komşuluğudur. O halde belli bir indisten sonraki dizinin tüm terimleri a olmalıdır.

Diğer taraftan (a_n) dizisi $(a_n)=(a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, a, \ldots)$ şeklinde ise $(a_n) \rightarrow a$ açıktır.

Önerme 2.4.7 Hausdorff bir (X,τ) topolojik uzayında yakınsak bir dizinin limiti tektir.

İspat: Kabul edelim ki (X,τ) Hausdorff uzayında bir (a_n) dizisi a ve b gibi farklı iki değere yakınsasın. (X,τ) uzayı Hausdorff olduğundan $G \cap H=\varnothing$ olacak şekilde a ve b nin sırasıyla G ve H açık komşulukları vardır. Diğer yandan $(a_n) \rightarrow a$ olduğundan $n>n_1$ için $a_n \in G$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ ve $(a_n) \rightarrow b$ olduğundan $n>n_2$ için $a_n \in H$ olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. O halde $n_0=\max\{n_1, n_2\}$ olarak seçilirse $n > n_0$ için $a_n \in G \cap H$ dır. Bu ise $G \cap H = \varnothing$ olmasıyla çelişir. O halde $a = b$ olmak zorundadır.

Önerme 2.4.8 X sonsuz bir cümle olmak üzere X üzerinde $\tau = \{A \subseteq X : A^C \textit{ sayılabilir}\} \cup \{\varnothing\}$ tümleyeni sayılabilir topolojisi olsun. X de bir (a_n) dizisi verilisin. $(a_n) \to a$ olması için gerek ve yeter şart (a_n) dizisinin $(a_n) = (a_1, a_2, ..., a_{n_0}, a, a, ...)$ şekilde olmalıdır.

Not: Bir X topolojik uzayında (a_n) bir dizi ve bu dizinin terimlerinin cümlesi $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Eğer $a_n \to a$ ise $a \in A'$ olması gerekmez.

Örneğin $(\mathbb{R}, U)$ da $(a_n) = (a, a, ...)$ sabit dizisinde $a_n \to a$ dır, fakat a noktası $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{a\}$ cümlesinin bir yığılma noktası değildir.

O halde bir dizinin limit noktasının dizinin terimlerinden oluşan cümlenin bir yığılma noktası olması gerekmez. Fakat bu ifade bazı limit noktaları için doğru olabilir.

Örnek 2.1.12 $\mathbb{R}$ nin alışılmış topolojisine göre $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi $0 \in \mathbb{R}$ noktasına yakınsar, ve $0 \in \mathbb{R}$ noktası $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ nin bir yığılma noktasıdır.

Not: Bir X topolojik uzayında (a_n) bir dizi ve bu dizinin terimlerinin cümlesi $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Eğer $a \in A'$ ise $a_n \to a$ olması gerekmez.

Örneğin $\mathbb{R}$ alışılmış topolojisine göre $(a_n) = \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)$ dizisinde 1 ve -1 noktaları $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ nın yığılma noktalarıdır. Fakat bu noktalar (a_n) dizisinin limit noktaları değildir.

Örnek 2.1.13. $\mathbb{R}$ alışılmış topolojisine göre $(a_n) = \left(\frac{1}{n+1}\right)$ dizisinin $X = (0,1)$ cümlesinde ne bir limit noktası vardır nede $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ cümlesinin bir yığılma noktası vardır.

3.BÖLÜM

3.1 Dizisel uzaylar

Bu bölümde dizisel açık ve dizisel kapalı cümle kavramı tanıtıldı. Ayrıca kavramlar yardımıyla dizisel uzayların tanımı verildi.

Tanım 3.1.1 [8] X bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun. Eğer A daki bir noktaya yakınsayan her dizi için dizinin belli bir indisten sonraki terimleri A da ise A ya *dizisel açık* cümle denir.

Önerme 3.1.2 [8] Her açık cümle dizisel açıktır.

İspat: A cümlesi açık olsun. A nın dizisel açık olduğunu göstermek için bir $a \in A$ seçelim. (a_n) dizisi a ya yakınsayan bir dizi olsun. A cümlesi açık olduğundan a elemanının bir açık komşuluğu olup (a_n) dizisinin belli bir indisten sonraki terimleri bu komşuluk içerisinde kalmalıdır. O halde A dizisel açıktır.

Örnek 3.1.3 Boştan farklı bir X cümlesi üzerinde tanımlanmış diskre topolojiye göre her alt cümle açık olacağından dizisel açıktır.

Örnek 3.1.4 X cümlesi üzerindeki indiskre topolojiye göre X in kendisinden ve boştan farklı olan hiçbir alt cümlesi dizisel açık değildir.

Örnek 3.1.5 X üzerinde tümleyeni sayılabilir topoloji olmak üzere X in her alt cümlesi dizisel açıktır. Gerçekten (a_n), X de bir dizi $(a_n) \to a$, $a \in A$ olsun. Tümleyeni sayılabilir topolojiye göre bir dizinin yakınsak olması için dizi $(a_n) = (a, a, a, ...)$ şeklinde veya $(a_n) = (a_1, a_2, ..., a_{n_0}, a, a, ...)$ şeklinde olmalıdır. O halde belli bir indisten sonraki terimler A da kalacaktır. Dolayısıyla bu topolojiye göre her alt cümle dizisel açıktır.

Sonuç 3.1.6 [8] Her dizisel açık cümle açık değildir.

Örnek 3.1.7 X sonsuz bir cümle, X üzerinde tümleyeni sonlu topoloji göz önüne alınsın. Bir $A \subseteq X$ için A^C sonlu olsun. A sonsuz bir cümle (a_n), X de bir dizi ve $a \in A$ için $(a_n) \to a$ olsun. (a_n) dizisinin belli bir indisten sonraki terimleri A da bulunur. O halde A dizisel açıktır. Diğer taraftan A^C sonsuz bir cümle olsun. A sonlu veya sonsuz bir cümle olabilir. Bu durumda terimleri farklı ve A^C de bulunan bir (a_n) dizisi a noktasına yakınsadığı halde, dizinin belli bir indisten sonraki terimleri A da kalmaz.

Sonuç 3.1.9 [8] Dizisel açık cümlelerin keyfi birleşimleri de dizisel açıktır.

İspat: $X \neq \varnothing$ ve $i \in I$ olmak üzere A_i ler de X in dizisel açık alt cümleleri. $\bigcup_{i \in I} A_i$ cümlesinin de dizisel açık olduğunu gösterelim. (x_n), X de bir dizi olsun. Kabul edelim ki $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ ve $(x_n) \to x$ olsun. O halde (x_n) dizisinin belli bir indisten sonraki terimleri $\bigcup_{i \in I} A_i$ de olmalıdır. $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ olduğundan $x \in A_{i_0}$ olacak şekilde $i_0 \in I$ vardır. A_i ler dizisel açık olduğundan (x_n) dizisinin belli bir indisten sonraki terimleri A_{i_0} da kalır. O halde $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ olduğundan $\bigcup_{i \in I} A_i$ de dizisel açıktır.

Önerme 3.1.10 [8] Bir (X, τ) topolojik uzayında tüm dizisel açık kümelerin sınıfı bir topoloji olup bu topoloji τ dan daha incedir.

Tanım 3.1.11 [8] X bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. A cümlesinde bir (a_n) dizisi $x \in X$ e yakınsıyor iken $x \in A$ oluyorsa bu kümeye *dizisel kapalıdır* denir.

Önerme 3.1.12 [8] Eğer bir cümle kapalı ise dizisel kapalıdır.

İspat: A cümlesi kapalı ve (a_n) $x \in X$ noktasına yakınsayan A da bir dizi olsun. Bu durumda $x \in A$ olmalıdır. Aksi durumda A^C, x in bir açık komşuluğu olur ve dizinin belli indisten sonraki elemanları A^C da kalır. Bu ise (a_n) nin A da bir dizi olmasıyla çelişir. Yani A dizisel kapalıdır.

Örnek 3.1.13 Boştan farklı bir X cümlesi üzerinde tanımlanmış diskre topolojiye göre her alt cümle kapalı olacağından dizisel kapalıdır.

Örnek 3.1.14 X cümlesi üzerinde indiskre topolojiye göre X in kendisinden ve boştan farklı olan hiçbir alt cümlesi dizisel kapalı değildir.

Örnek 3.1.15 X üzerinde tümleyeni sonlu topoloji göz önüne alınsın. $A \subseteq X$ için A nın dizisel kapalı olduğunu gösterelim. Yani (a_n), A da bir dizi $x \in X$ noktası için $(a_n) \to x$ iken $x \in A$ olduğunu gösterelim. A sonlu ise kapalıdır. Kapalı her cümle dizisel kapalıdır. Eğer A sonsuz ise tümleyeni sonlu topolojide terimleri faklı olan bir dizi her noktaya yakınsar. Yani $x \in A$ olabilir. Aynı zamanda $x \notin A$ da olabilir. O halde A sonsuz iken dizisel kapalı değildir.

Örnek 3.1.16 X üzerinde tümleyeni sayılabilir topolojiye göre bir $A \subseteq X$ için A dizisel kapalıdır. Bunu göstermek için (a_n), A da bir dizi $x \in X$ $(a_n) \to x$ yakınsasın. Bu topolojiye göre $(a_n) \to x$ dir ancak ve ancak $(a_n) = (a_1, a_2, ..., a_{n_0}, x, x, ...)$ dir. Bu durumda $x \in A$ olur. O halde bu topolojiye göre her alt cümle dizisel kapalıdır.

Sonuç 3.1.17 [9] Dizisel kapalı kümelerin keyfi kesişimi dizisel kapalıdır.

İspat: X bir topolojik uzay ve $\{A_i : i \in I\}$ sınıfı da X in dizisel kapalı alt cümlelerinin bir sınıfı olsun. Bu durumda $\bigcap_{i \in I} A_i$ cümlesinin de dizisel kapalı olduğunu gösterelim. (x_n) dizisinin terimleri $\bigcap_{i \in I} A_i$ cümlesinden alınsın ve kabul edelim ki $(x_n) \to x$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ olduğunu gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in \bigcap_{i \in I} A_i$ olduğundan her $i \in I$ için $x_n \in A_i$ dir. Her bir A_i cümlesi dizisel kapalıdır. O halde $(x_n) \to x$ ve $x \in X$ iken $x \in A_i$ dir. Her $i \in I$ için $x \in A_i$ olduğundan $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ dir. Dolayısıyla $\bigcap_{i \in I} A_i$ dizisel kapalıdır.

Önerme 3.1.18 [9] X topolojik uzayında bir $A \subseteq X$ alt cümlesi dizisel açıktır ancak ve ancak A^C dizisel kapalıdır.

İspat: A dizisel açık olsun. A^C dizisel kapalı olduğunu gösterelim. A^C de bir (x_n) dizisi $x \in X$ e yakınsasın $x \in A^C$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $x \notin A^C$ olsun. O halde $x \in A$ olur. A dizisel açık olduğundan A daki bir elemana yakınsayan her dizinin belli bir indisten sonraki terimleri A da olmalıdır. Fakat (x_n) dizisi A^C de bir dizidir. O halde bu bir çelişkidir. Bu durumda $x \in A^C$ olur. A^C dizisel kapalıdır.

Diğer yandan A^C dizisel kapalı olsun. A dizisel açık olduğunu gösterelim. X deki bir (a_n) dizisi A nın bir elemanına yakınsasın. Dizinin belli bir indisten sonraki terimleri A da bulunmalıdır. Kabul edelim ki bu terimler A^C de olsun. Bu durumda A^C deki yeni (a_{n_k}) dizisi de a ya yakınsar. Fakat A^C dizisel kapalı olduğundan $a \in A^C$ olmalıdır. O halde kabulümüz yanlıştır. A dizisel açıktır.

Tanım 3.1.19 [8] X bir topolojik uzay olsun. Eğer bu uzayda her dizisel açık cümle açık ise; veya buna denk olarak her dizisel kapalı cümle kapalı ise bu uzaya *dizisel uzay* denir.

Önerme 3.1.20 [8] X uzayında her açık cümle dizisel açık olacağından aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) X uzayı diziseldir.
(b) Herhangi bir A alt kümesi açıktır ancak ve ancak dizisel açıktır.
(c) Herhangi bir A alt kümesi kapalıdır ancak ve ancak dizisel kapalıdır.

Örnek 3.1.21 X sayılamaz bir cümle olmak üzere X üzerinde tümleyeni sayılabilir topolojiye göre her alt cümle dizisel açıktır. Ancak her dizisel açık cümle açık olamayacağından bu uzay dizisel uzay değildir.

Tanım 3.1.22 [8] X ve Y topolojik uzaylar, $f : X \to Y$ bir fonksiyon, $x \in X$ ve (x_n) terimleri X den alınan bir dizi olsun. Eğer (x_n) dizisi x noktasına yakınsarken $\left(f\left(x_n\right)\right)$ dizisi de $f\left(x\right)$ noktasına yakınsıyorsa f fonksiyonu *dizisel süreklidir* denir.

Önerme 3.1.23 [8] Her sürekli fonksiyon dizisel süreklidir.

İspat: $f : X \to Y$ sürekli bir fonksiyon ve $\left(x_n\right) \to x$ olsun. $\left(f\left(x_n\right)\right) \to f\left(x\right)$ olduğunu göstermek için $f\left(x\right)$in bir G açık komşuluğunu alalım. f sürekli olduğundan $f^{-1}(G)$ de x in açık komşuluğudur. $\left(x_n\right) \to x$ olduğundan $n > n_0$ için $x_n \in f^{-1}(G)$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. O halde $f\left(x_n\right) \in G$ olup $\left(f\left(x_n\right)\right) \to f\left(x\right)$ dir.

Tanım 3.1.24 [8] $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $A \subseteq X$ dizisel açık alt cümlesi için $f(A)$ görüntüsü de dizisel açık ise f fonksiyonu bir *dizisel açık fonksiyon* olarak adlandırılır.

Benzer olarak $A \subseteq X$ dizisel kapalı alt kümesi için $f(A)$ dizisel kapalı ise f fonksiyonu bir *dizisel kapalı fonksiyondur* denir.

3.2 Dizisel Kompakt Uzaylar

Tanım 3.2.1 [5] $\left(X, \tau\right)$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A cümlesindeki her $\left(a_n\right)$ dizisinin A da bir $\left(a_{n_k}\right)$ yakınsak alt dizisi var ise A cümlesine *dizisel kompakt uzay* denir.

Örnek 3.2.2 Bir $\left(X, \tau\right)$ topolojik uzay, bir $A \subseteq X$ sonlu alt cümlesi dizisel kompakttır. Çünkü A sonlu olduğundan Adaki bir $\left(a_n\right)$ dizisinin sonsuz tekrar eden en az bir $(a_{n_k}) = (a_{n_0}, a_{n_0}, ...)$ alt dizisi Ada yakınsaktır.

Örnek 3.2.4 Boştan farklı bir X cümlesi üzerinde tümleyeni sayılabilir topolojiyi ve $A \subseteq X$ alt cümlesini ele alalım. A cümlesi sonlu olduğundan Adaki bir $\left(a_n\right)$

dizisinin sonsuz tekrar eden $(a_{n_k})=(a_{n_0},a_{n_0},...)$ alt dizisi $a_{n_0}\in A$ noktasına yakınsar. O halde dizisel kompakttır. Eğer A sonsuz ise dizisel kompakt değildir. Çünkü tümleyeni sayılabilir topolojiye göre yakınsak bir dizi $(a_1,a_2,...,a_{n_0},a,a,...)$ şeklinde olmalıdır. O halde A sonsuz olduğunda A da terimleri farklı olan bir (a_n) dizi bu diziye yakınsak olan herhangi bir alt dizisi bulunamaz.

Önerme 3.2.5 [5] Dizisel kompakt olan bir topolojik uzayın kapalı alt cümleleri de dizisel kompakttır.

Önerme 3.2.6 [5] $f:X\to Y$ sürekli bir fonksiyon ve $A\subseteq X$ alt cümlesi dizisel kompakt ise $f(A)$ da dizisel kompakttır.

İspat: $f:X\to Y$ sürekli bir fonksiyon ve $A\subseteq X$ dizisel kompakt bir cümle olmak üzere $f(A)$ da bir (b_n) dizisi verilsin. Her $n\in\mathbb{N}$ için $f(a_n)=b_n$ olacak şekilde A da bir (a_n) dizisini seçelim. A dizisel kompakt olduğundan (a_n) dizisinin A da yakınsak olan bir (a_n) alt dizisi vardır.

4. BÖLÜM

4.1. Dizisel Hausdorff Uzaylar

Bu bölümde dizisel Hausdorff uzay kavramını tanıtılıp, dizisel açık ve dizisel kapalı cümleler yardımıyla bazı özellikler verilecektir.

Tanım 4.1.1 X bir topolojik uzay ve $x, y \in X$ noktaları da ayrık iki nokta olsun. Eğer X in $x \in G$, $y \in H$ ve $G \cap H = \varnothing$ olacak şekilde G ve H dizisel açık alt cümleleri mevcut ise X e bir *dizisel Hausdorff uzay* veya kısaca *dizisel Hausdorff* tur denir.

Örnek 4.1.2 Topolojik uzaylarda her açık cümle dizisel açık olduğundan diskre topoloji dizisel Hausdorff tur.

Örnek 4.1.3 $X \neq \varnothing$ bir cümle ve τ da X üzerinde tümleyeni sayılabilir topoloji olsun. Bu durumda her alt cümle dizisel açık olacağından $x, y \in X$ birbirinden farklı noktalar olmak üzere $G = \{x\}$ ve $H = \{y\}$ seçelim. Bu durumda $G \cap H = \varnothing$ olup (X, τ) dizisel Hausdorff tur.

Örnek 4.1.4 Her $a \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau = \{G_a = (a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing\}$ topolojisi göz önüne alınsın. $(\mathbb{R}, \tau)$ topolojik uzayı dizisel Hausdorff değildir.

Örnek 4.1.5 Birinci sayılabilir her uzay dizisel Hausdorff tur.

Önerme 4.1.6 Her Hausdorff uzay dizisel Hausdorff tur.

İspat: (X, τ) bir topolojik uzay $x, y \in X$ uzayın farklı iki noktası olsun. X Hausdorff olduğundan $x \in G$, $y \in H$ ve $G \cap H = \varnothing$ olacak şekilde ayrık açık cümleler vardır. Her açık cümle dizisel açık olduğundan (X, τ) dizisel Hausdorff tur.

Aşağıdaki örnekte her dizisel Hausdorff uzayın Hausdorff olmadığını gösterelim.

Örnek 4.1.7 $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi üzerinde τ tümleyeni sayılabilir topoloji göz önüne alınsın. O halde $\{x\}$ ve $\{y\}$ cümleleri sırasıyla x ve y yi içeren ayrık cümlelerdir. Aynı zamanda bu uzayda her alt cümle dizisel açık olduğundan bu cümleler de dizisel açık olup uzay dizisel Hausdorff tur. Ancak X uzayı Hausdorff değildir.

Önerme 4.1.8 Dizisel Hausdorff bir uzayda yakınsak bir dizinin limiti tektir.

İspat: Kabul edelim ki (X,τ) dizisel Hausdorff bir uzay ve (x_n) de terimleri X den alınan bir dizi olsun. (x_n) dizisi x, y gibi farklı iki noktaya yakınsasın. Buradan $x \in G$ ve $y \in H$ olacak şekilde ayrık G ve H dizisel açık cümleleri vardır. G dizisel açık olduğundan G deki x noktasına yakınsayan (x_n) dizisi için $n \geq n_1$ olduğunda $x_n \in G$ olacak şekilde n_1 doğal sayısı vardır. Diğer yandan H dizisel açık olduğundan H daki y noktasına yakınsayan (x_n) dizisi için $n \geq n_2$ olduğunda $x_n \in H$ olacak şekilde n_2 doğal sayısı vardır. Eğer n_0 sayısı n_1 ve n_2 nin maksimumu olarak seçilirse bu durumda $x_n \in G \cap H$ olacak şekilde $n \geq n_0$ bulunur. Ancak $G \cap H = \varnothing$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde X te bir dizinin limiti tektir.

Önerme 4.1.9 (X,τ) bir dizisel uzay olsun. Bu durumda (X,τ) dizisel Hausdorff tur ancak ve ancak Hausdorff tur.

Önerme 4.1.10 (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer (X,τ) nın her dizisel kapalı alt cümlesi kapalı ise (X,τ) dizisel Hausdorff tur.

Örnek 4.1.7 den, $(\mathbb{R},\tau)$ topolojik uzayı dizisel Hausdorff tur fakat $\mathbb{R}$ nin kapalı olmayan dizisel kapalı alt kümesi mevcuttur.

Sonuç 4.1.11 Eğer (X,τ) bir dizisel Hausdorff uzay değilse bu durumda X in kapalı olmayan en az bir dizisel kapalı alt cümlesi vardır.

Önerme 4.1.12 (X,τ) bir dizisel Hausdorff uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda A üzerindeki τ_A alt topolojisi ile birlikte dizisel Hausdorff tur.

İspat: $a,b \in A$ olsun. Dolayısıyla $A \subseteq X$ olduğundan $a,b \in X$ olur. X dizisel Hausdorff olduğundan $a \in G$, $b \in H$ ve $G \cap H = \varnothing$ olacak şekilde G ve H dizisel açık cümleler vardır. $G \cap A \in \tau_A$ ve $H \cap A \in \tau_A$ olacak şekilde alt topolojiye göre ayrık $G \cap A$ ve $H \cap A$ cümleleri bulunur. $(G \cap A) \cap (H \cap A) = (G \cap H) \cap A = \varnothing$ olacağından τ_A dizisel Hausdorff tur.

Önerme 4.1.13 (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ birebir, örten, sürekli ve dizisel açık fonksiyon olsun. Eğer (X,τ) dizisel Hausdorff ise (Y,σ) de dizisel Hausdorff tur.

İspat: (X,τ) dizisel Hausdorff olsun. Bu durumda Y ninde dizisel Hausdorff olduğunu göstermek için $y_1, y_2 \in Y$ olacak şekilde farklı iki nokta seçelim. f birebir ve örten olduğundan $f(x_1) = y_1$ ve $f(x_2) = y_2$ olacak şekilde iki farklı $x_1, x_2 \in X$ noktaları vardır. Buradan $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$ ve $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ olacak şekilde G_1 ve G_2 dizisel açık cümleleri vardır. Sırasıyla x_1 ve x_2 noktalarına yakınsayan (x_n) ve $(x_n^{'})$ dizilerinin belli bir indisten sonraki terimleri de sırasıyla G_1 ve G_2 de dir. f fonksiyonu sürekli olduğundan dizisel süreklidir. O halde $f(x_n)$ ve $f(x_n^{'})$ dizileri sırasıyla $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ noktalarına yakınsar. Böylece $f(G_1)$ ve $f(G_2)$ dizisel açık cümleleri için $f(G_1) \cap f(G_2) = \varnothing$ olup ispat tamamlanır.

Tanım 4.1.14 X sonsuz bir cümle, (X,τ) dizisel Hausdorff uzay ve x ve y X de farklı iki nokta olsun. x e yakınsayan ve terimleri birbirinden farklı olan bir (x_n) dizisi ile y ye yakınsayan ve terimleri birbirinden farkı olan bir (y_n) dizisi için; x_n in hiçbir terimi H alt cümlesi tarafından ve y_n in hiçbir terimi G alt cümlesi tarafından içerilmiyor ise (X,τ) uzayına bir *tam dizisel Hausdorff uzay* denir.

Not: Terimlerin birbirinden farklı olma şartı kaldırılırsa tam dizisel Hausdorff uzay dizisel Hausdorff uzaya denk olur. Çünkü (X,τ) dizisel Hausdorff olduğunda farklı x ve y noktaları için $(x_n) = (x,x,x,...) \to x$ ve $(y_n) = (y,y,y,...) \to y$ olacak şekilde x_n ve y_n dizileri vardır.

Önerme 4.1.15 Her tam dizisel Hausdorff uzay dizisel Hausdorff tur.

Örnek 4.1.17 $X \neq \varnothing$ bir küme ve τ X üzerinde tümleyeni sayılabilir topoloji olsun. Buradan (X,τ) tam dizisel Hausdorff değildir.

Örnek 4.1.18 $\mathbb{R}$ üzerinde U alışılmış topoloji olsun. $x, y \in \mathbb{R}$ farklı iki nokta ve $x < y$ olarak göz önüne alınsın. x ve y noktaları arasındaki mesafe α olsun. x ve y için sırasıyla $\left(x-\frac{\alpha}{3}, x+\frac{\alpha}{3}\right)$ ve $\left(y-\frac{\alpha}{3}, y+\frac{\alpha}{3}\right)$ ayrık açık cümlelerini seçelim. Bunlar aynı zamanda dizisel açıktır. Seçilen $(x_n)=\left(x-\frac{1}{n}\right)$ dizisinin hiçbir terimi $\left(y-\frac{\alpha}{3}, y+\frac{\alpha}{3}\right)$de yer almaz. Benzer şekilde seçilen $(y_n)=\left(y+\frac{1}{n}\right)$ dizisinin hiçbir terimi $\left(x-\frac{\alpha}{3}, x+\frac{\alpha}{3}\right)$de yer almaz. Böylece $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış topoloji tam dizisel Hausdorff uzaydır.

Örnek 4.1.19 Her $a \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau = \{G_a = (a,\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing\}$ göz önüne alınsın. Burada ki $(\mathbb{R},\tau)$ topolojik uzayı tam dizisel Hausdorff değildir.

Sonuç 4.1.21 Tam dizisel Hausdorff uzayda bir dizinin limiti tektir.

Önerme 4.1.22 Her metrik uzay tam dizisel Hausdorff tur.

Önerme 4.1.23 (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu birebir, örten, sürekli ve dizisel açık fonksiyon olsun. Eğer (X,τ) tam dizisel Hausdorff ise (Y,σ) de tam dizisel Hausdorff tur.

İspat: y_1 ve $y_2 \in Y$ farklı noktalar olsun. f fonksiyonu birebir ve örten olduğundan $f(x_1)=y_1$ ve $f(x_2)=y_2$ olacak şekilde farklı $x_1, x_2 \in X$ noktaları vardır. Önerme 4.1.13 den (Y,σ)nin dizisel Hausdorff uzay olduğunu biliyoruz. Yani $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$ ve $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ olacak şekilde G_1 ve G_2 dizisel açık cümleleri vardır. (X,τ) tam dizisel Hausdorff olduğundan sırasıyla x_1 ve x_2 noktalarına yakınsayan

(x_n) ve $(x_n^{'})$ dizileri için (x_n) in G_2 da ve $(x_n^{'})$ nin G_1 de hiçbir terimi bulunmaz. Buradan da sırasıyla $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ noktalarına yakınsayan $(f(x_n))$ ve $(f(x_n^{'}))$ dizileri için $(f(x_n))$ in $f(G_2)$ da ve $(f(x_n^{'}))$ nin de $f(G_1)$ de hiçbir terimi bulunmaz. Dolayısıyla (Y,σ) tam dizisel Hausdorff tur.

KAYNAKLAR

[1] Bourbaki, N., Elements of Mathematics: General Topology, Addison-Wesley, 1966.

[2] Rotman, J. J., An Introduction to Algebraic Topology, Springer-Verlag, New York Inc., 460 pages, 1988.

[3] Massey W. S., Algebraic Topology: An Introduction, Springer-Verlag New York

Inc., 553 pages, 1990.

[4] Brown, R., Topology and groupoids, Booksurge PLC, 2006.

[5] Mucuk, O., Topoloji ve Kategori, Nobel Yayınları, Ankara, 2011.

[6] Dudley, R. M., On Sequentially Convergence, Trans. Amer. Math. Soc. 112, pp. 483-507, 1964.

[7] Cullen, H. F., Unique Sequentially Limits, Bull. Unione. Mat. Ital., 1965.

[8] Franklin, S. P., Spaces in Which Sequences Suffice, Fund. Math. 57 1965, 107-115.

[9] Franklin, S. P., "Spaces in Which Sequences Suffice II", Fund. Math. 61 1967, 51-56.

[10] Huang, Q. and Lin, S.. Notes on sequentially connected spaces, Acta Mathematica Hungarica, 110, 1-2, , 158-164. 2006

[11] Fedeli, A. and Le Donne, A., 2002. On good connected preimages, Topology and its Applications, 125, 489-496.

[12] Császár, Á., 2003. γ-connected sets, Acta Mathematica Hungarica., 101, 1-2, 273-278.

[13] Çakallı, H., Sequential defnitions of connectedness, Applied Mathematics Letters. 25, 461-465, 2012.

[14] Çakallı H. and Mucuk O., On Connectedness Via A Sequential Method, Revista de la union Matematica Argentina, pp.101-109, 2013.

[15] Mucuk O., Sahan T., On G-Sequential Continuity, Filomat, pp.1181-1189, 2014.

[16] Çakallı, H., Sequential definitions of compactness, Applied Mathematics Letters., 21, 6, 594-598, 2008.

[17] Çakallı, H., 2011. On G-continuity, Computers and Mathematics with Applications, 61, 2, 313-318.

[18] Fridy, J.A., 1985. On statistical convergence, Analysis, 5, 301-313,

[19] Fridy, J.A. and Orhan, C., 1993. Lacunary statistical convergence, Pacific Journal of Mathematics, 160, 1, 43-51.

[20] Iwinski, T.B., 1972. Some remarks on Toeplitz methods and continuity, Comment.Math. Prace Mat. 17, 37-43.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Erzincan’da doğan Lokman KOÇAK, ilköğretim ve lise öğrenimini Kırşehir’de sırasıyla 24 Aralık İlköğretim Okulu ve Sıddık Demir Anadolu lisesinde tamamlamıştır. 2009 yılında kazandığı Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesini 2013 yılında bitirmiştir.

2014 yılında başlamış olduğu yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında devam etmektedir.

Adres: Yenice Mah. Atatürk Bulvarı Özyurt Apt. No:22 Merkez/KIRŞEHİR

Telefon: (505) 108 8084

E-posta: lkmn.kck.40@gmail.com