T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

NORMLU UZAYLARDA VE BANACH VE HİLBERT UZAYLARINDA ELEMANLARIN YAKLAŞIM PROBLEMLERİ ÜZERİNE

Raziye AKTAŞ

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2017

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

NORMLU UZAYLARDA VE BANACH VE HİLBERT UZAYLARINDA ELEMANLARIN YAKLAŞIM PROBLEMLERİ ÜZERİNE

Raziye AKTAŞ

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2017

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111315016 numaralı öğrencisi Raziye AKTAŞ'ın hazırladığı ''Normlu Uzaylarda ve Banach ve Hilbert Uzaylarında elemanların yaklaşım problemleri üzerine" başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 03/11/2017 Cuma günü saat 14:00'da yapılmış, tezin onayına oy birliği ile karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Adive Nihal TUNCER

Jüri Üyesi (Danışman) : Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Mehmet EKİCİ

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 08/11/2017 tarih ve 30 sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

08/11/2017

Doç. Dr. Fuat KÖKSAL
Müdür

İÇİNDEKİLER

NORMLU UZAYLARDA VE BANACH VE HİLBERT UZAYLARINDA ELEMANLARIN YAKLAŞIM PROBLEMLERİ ÜZERİNE

Raziye AKTAŞ

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2017; Sayfa: 41

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ÖZET

Bu tezde normlu uzaylarda, Banach ve Hilbert uzaylarında elemanların alt uzay elemanları ile yaklaşım problemlerinin açıklanması ele alındı, incelendi ve öğrenildi. Elemanların sonlu boyutlu alt uzay elemanları ile yaklaşımında en iyi yaklaşım elemanının varlığı ele alındı ve incelendi. Güçlü normlu uzaylarda elemanların alt uzay elemanları ile yaklaşımında en iyi yaklaşım elemanının tekliği gösterildi. Normlu uzaylarda her yerde yoğun lineer manifoldlar tanımlandı ve bu tür lineer manifoldlara örnekler gösterildi. Her yerde yoğun lineer manifoldların normlu uzayın elemanlarının bu lineer manifold elemanları ile yaklaşımındaki önemleri gösterildi.

Separabel normlu uzaylarda elemanların yaklaşımı ele alınıp incelendi. Hilbert uzaylarında da elemanların alt uzay elemanları ile yaklaşımı ele alınıp incelendi. Özellikle Hilbert uzayında elemanların birçok kabarık (convex) küme elemanları ile yaklaşımında en iyi yaklaşım elemanın varlığı ve tekliği ele anlınıp incelendi. Elemanın Fourier serisine açılımının, Fourier polinomunun verilmiş elemanının en iyi yaklaşım polinomu olduğu gösterildi.

Anahtar kelimeler: Normlu Uzaylar, Banach Uzayı, Hilbert Uzayı, En iyi yaklaşım elemanının varlığı, Fourier serisi, Elemanların alt uzay elemanları ile yaklaşımı

ABOUT THE APPROACHES OF ELEMENTS ON NORMED SPACE AND BANACH AND HILBERT SPACES

Raziye AKTAŞ

Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2017; Page: 41

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ABSTRACT

In this thesis, the explanations of the problem of approach with subspace elements of elements in normed Banach and Hilbert spaces were discussed, studied and learned. The presence of the best approach element in the approach of the elements with the finite dimensional subspace elements has been studied. In the case of strong normed spaces, the best approach element is uniquely shown in the approach of elements with subspace elements. In normal spaces, dense linear manifolds are defined everywhere, and examples are shown in linear linear manifolds. The importance of everywhere dense linear manifolds in the approach of normed space elements with these linear manifold elements has been shown.

In the Separable normed spaces, the approach of the elements was studied. In Hilbert spaces, the approach of the elements with subspace elements has been studied. Particularly in Hilbert space, the existence and uniqueness of the best approximate element in the approach of many convex cluster elements has been studied. It has been shown that the Fourier series expansion of the element is the best approximation polynomial of the given element of the Fourier polynomial.

Keywords: Normed Spaces, Banach Spaces, Hilbert Spaces, Existence of the best approach element, Fourier series, Approach of elements with subspace elements

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlamam da desteklerini esirgemeyen başta danışman hocam sayın Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV ve bölüm başkanımız Sayın Doç. Dr. Murat BABAARSLAN olmak üzere bölümümüzün değerli öğretim üyelerinden Yrd. Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU, Yrd. Doç. Dr. Hürmet Fulya AKIZ, Yrd. Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR, Yrd. Doç. Dr. Mehmet EKİCİ, Yrd. Doç. Dr. Funda BABAARSLAN ve diğer hocalarım ile her zaman arkamda duran, destekleyen ve bu günlere gelmemi sağlayan değerli aileme, beyim Ahmet AKTAŞ ve kızım Duru AKTAŞ' a sonsuz teşekkürü borç bilirim.

KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ

max $\boldsymbol{A}$ **:** A'nın en büyük elemanı, maksimumu

$\|\boldsymbol{A}\|$ **:** A operatörünün normu

$\boldsymbol{A'}$ **:** A kümesinin limit noktaları kümesi

$\boldsymbol{\bar{M}}$ **:** M kümesinin kapanışı

C$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ **:** $[a,b]$ aralığında tanımlanmış reel değerli sürekli fonksiyonların normlu uzayı

$\boldsymbol{C}^{\mathbf{k}}_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}$ **:** $[a,b]$ aralığında k kez sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonların normlu uzayı

$\|\boldsymbol{x}\|_{C^{\mathrm{k}}_{[\mathrm{a,b}]}} = \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{0}}^{\boldsymbol{k}} \max\limits_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]} \left|\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{i})}(\boldsymbol{t})\right|$: $C^{\mathrm{k}}_{[\mathrm{a,b}]}$ uzayında $x(t)$ elemanının normu

$\boldsymbol{S_r}(\boldsymbol{x_0})=\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{M}: \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}\| < \boldsymbol{r}\}$ **:** x_0 noktasının r komşuluğu

$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{L})=\boldsymbol{inf}_{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}\|$ **:** Normlu E uzayında x noktasından L alt uzayına dek uzaklık

1. GİRİŞ

Bu tezde normlu uzaylarda, Banach ve Hilbert uzaylarında elemanların yaklaşım problemleri (Appraksimasyon problemleri) ele alındı. Öncelikle bu problemlerde kullanılan tanım ve teoremler verildi. Bu tezde ilk önce normlu uzaylarda elemanların alt uzay elemanları ile yaklaşım problemlerinin açıklaması verildi ve elemanların sonlu boyutlu alt uzay elemanları ile yaklaşımında en iyi yaklaşım elemanının varlığı gösterildi.Güçlü normlu uzaylarda elemanların alt uzay elemanlarıyla yaklaşımında en iyi yaklaşım elemanının tek olduğu gösterildi. Normlu uzaylarda her yerde yoğun lineer manifoldlar bu normlu uzayın elemanlarının yaklaşımında çok önemlidir. Bu yüzden normlu uzaylarda her yerde yoğun lineer manifoldlar tanımlandı ve böyle lineer manifoldlara örnekler gösterildi. Separabel normlu uzaylarda elemanın yaklaşımında sayılabilir her yerde yoğun kümelerin çok büyük önemi vardır. Bu yüzden tezde separabel normlu uzaylar da ele alındı. Hilbert uzayında elemanların alt uzay elemanlarıyla yaklaşım problemi öncelikle ele alındı. Özellikle Hilbert uzayında elemanların kapalı kabarık küme elemanlarıyla yaklaşımında en iyi yaklaşım elemanının varlığı ve tekliği gösterildi. Hilbert uzaylarında elemanların alt uzay elemanlarıyla yaklaşımında en iyi yaklaşım elemanının varlığı ve tekliğinin özellikleri incelendi. Hilbert uzayında elemanın ortonormal sistem üzere Fourier serisine açılımının bu serinin kısmi toplamının verilmiş eleman için en iyi yaklaşım elemanı olduğu gösterildi. Elemanların yaklaşım problemleri ayrı ayrı pratik problemlerin çözümünde çok geniş kullanılır [1-7].

2. TEMEL BİLGİLER

2.1. Lineer Uzayların Tanımı

Tanım 2.1. $x, y, z \ldots$ elemanlarının E kümesinde aşağıdaki iki cebirsel işlem tanımlandığında

1. E kümesinden alınan her bir $x, y \in E$ elemanlarına karşı bu elemanların toplamı olarak adlandırılan belli bir $x + y \in E$ elemanı karşı getirilebildiğinde ve

2. Her bir $x \in E$ elemanına ve her bir skaler λ sayısına karşı bu elemanın λ sayısı ile çarpımı olarak adlandırılan belli bir $\lambda x \in E$ elemanı karşı getirilebildiğinde ve bu işlemler her bir $x, y, z \in E$elemanları ve her bir skaler λ, μ sayıları için aşağıdaki özellikleri (aksiyomları) sağladığında E kümesine lineer uzay denir:

1. $x + y = y + x$;

2. $x + (y + z) = (x + y) + z$;

3. Öyle $0 \in E$ elemanı vardır ki, $x + 0 = x$;

4. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

5. $1.x = x$, $0.x = 0$ (soldaki sıfır skaler sayıyı gösterir ancak sağdaki 0 E kümesinin elemanıdır);

6. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

Lineer uzayda $\lambda, \mu, \ldots$ sayıları reel sayılar olduğunda lineer E uzayına reel lineer uzay denir.

$\lambda, \mu, \ldots$ sayıları kompleks sayılar olduğunda lineer E uzayına kompleks lineer uzay denir.

$-x = (-1)x$ elemanına x elemanının ters (aksi) elemanı denir. x elemanı ile y elemanının fark işlemi

$$x - y = (x + (-y))$$

eşitliğiyle tanımlanır.

2.2. Lineer Uzaylara Örnekler

Örnek 2.2.1. Derecesi k sayısını aşmayan tüm reel katsayılı polinomların kümesini $\mathcal{P}_k$ ile gösterelim. Polinomların toplamı polinom ve polinomların λ sayısı ile çarpımı polinom olduğundan $\mathcal{P}_k$ polinomlar kümesinin lineer uzay oluşturduğu görülür.

Örnek 2.2.2. $[a, b]$ aralığında tanımlanmış reel değerli sürekli fonksiyonların kümesini $\mathcal{C}_{[a,b]}$ ile gösterelim.

$x(t) \in \mathcal{C}_{[a,b]}, y(t) \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ fonksiyonları için $x(t) + y(t) \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ ve $\lambda x(t) \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ olduğundan $\mathcal{C}_{[a,b]}$ uzayının lineer uzay olduğu açıktır.

Örnek 2.2.3. $[a, b]$ aralığında tanımlanmış k kez sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonların kümesini $\mathcal{C}^k_{[a,b]}$ ile gösterelim.

$x(t) \in \mathcal{C}^k_{[a,b]}, \lambda x(t) \in \mathcal{C}^k_{[a,b]}$ olduğunda sağlandığı için ve $x(t), y(t) \in \mathcal{C}^k_{[a,b]}$ iken $x(t) + y(t) \in \mathcal{C}^k_{[a,b]}$ olduğundan $\mathcal{C}^k_{[a,b]}$ kümesi de lineer uzay oluşturur.

2.3. Lineer Uzayda Elemanların Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığının Tanımı

Lineer E uzayından alınan x_1, x_2, …, x_n elemanları için tümü sıfıra eşit olmayan öyle α_1, α_2, … α_n sayıları bulunur ki,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

eşitliği sağlandığında x_1, x_2, …, x_n elemanlarına lineer bağımlı elemanlar denir.

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ eşitliği ancak ve ancak α_1=α_2=…=α_n=0 olması durumunda sağlanıyorsa x_1, x_2, …, x_n elemanlarına lineer bağımsız elemanlar denir.

2.4. Sonlu ve Sonsuz Boyutlu Lineer Uzaylar

Lineer uzayda m sayıda lineer bağımsız eleman bulunduğunda ve m + 1 sayıda tüm elemanlar lineer bağımlı olduklarında ele alınan bu lineer uzaya m boyutlu lineer uzay denir.

Tanım 2.4.1. m boyutlu E lineer uzayından alınmış lineer bağımsız m sayıdaki elemanlar sistemine lineer E uzayında baz denir.

E, m boyutlu bir lineer uzay ve x ise bu uzaydan alınmış bir eleman olsun. Ayrıca $e_1, e_2,...,e_m$ elemanlar sistemi lineer E uzayında baz olsun. Bu şartlar sağlandığında $e_1, e_2,\ldots, e_m, x$ elemanlar sistemi lineer bağımlı sistem olur.Yani öyle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \alpha_{m+1}$ sayıları bulunur ki, bu sayılardan en azından bir tanesi sıfırdan farklı olur ve

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_m e_m + \alpha_{m+1} x = 0$$

eşitliği sağlanır.

$\alpha_{m+1} = 0$ olamaz aksi halde $e_1, e_2,...,e_m$ sistemi lineer bağımlı olurdu.

Üstteki eşitlikten

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_m e_m \qquad (2.1)$$

açılımı elde edilir.

Burada $\xi_k = -\frac{\alpha_k}{\alpha_{m+1}}$, k=1,2,…,m olur.

(2.1) açılımına x elemanının $e_1, e_2,...,e_m$ bazındaki açılımı ve $\xi_1, \xi_2,\ldots, \xi_m$ katsayılarına x elemanının $e_1, e_2,...,e_m$ bazındaki koordinatları denir.

Kolaylıkla (2.1) açılımının tek olduğu gösterilebilir.

Tanım 2.4.2. Lineer E uzayında her bir doğal n sayısı için n sayıda lineer bağımsız eleman bulunduğunda lineer E uzayına sonsuz boyutlu lineer uzay denir.

Lineer $C_{[a,b]}$ ve lineer $C_{[a,b]}^{k}$, k ≥ 1 uzayları sonsuz boyutlu lineer uzaylardır. Bu uzaylarda yerleşen 1,t,t^2,…, t^n,… elemanlar sistemini ele alalım. Her bir n sayısı için 1,t,t^2 …, t^n,… sistemi lineer bağımsız sistem oluşturur.

2.5. Lineer Manifoldun Tanımı

Tanım 2.5. E lineer uzayından $\tilde{E}$ alt kümesini alalım. Bu $\tilde{E}$ kümesinden alınmış her bir $x, y \in \tilde{E}$ elemanları ve her bir α *ve* β skaler sayıları için $\alpha x + \beta y \in \tilde{E}$ olduğunda $\tilde{E}$ kümesine lineer E uzayında lineer manifold veya alt uzay denir.

$C_{[a,b]}^{k}$, k≥1 lineer uzayı lineer $C_{[a,b]}$ uzayında lineer manifolt (alt uzay) oluşturduğu açıktır.

2.6. Lineer Uzaylarda Kabarık (Convex) Kümelerin Tanımı

E kümesinin lineer uzay olduğunu varsayalım.

x_1, x_2 elemanları E uzayından alınmış elemanlar olsun.

t ∈ [0,1] olmak üzere;

$$x = (1 - t)\, x_1 + t x_2$$

elemanlar kümesine lineer E uzayında x_1 ve x_2 noktalarını birleştiren parça denir.

Tanım 2.6. W kümesi lineer E uzayından alınmış bir küme olsun. W kümesinden alınmış her bir $x_1, x_2 \in$ W için bu x_1, x_2 noktalarını birleştiren parça W kümesine dahil olduğu halde W kümesine kabarık (convex) küme denir.

Kolaylıkla lineer E uzayındaki her bir L lineer manifoltunun ve $x_0 \in$ E olmakla

$$x_0 + L = \{x_0 + u, \quad u \in L\}$$

kümesinin lineer E uzayında kabarık küme oluşturduğu gösterilir.

2.7. Normlu Uzayın Tanımı

Lineer E uzayında her bir $x \in E$ elemanına karşı bu elamanın normu olarak adlandırılan negatif olmayan $\|x\|$ sayısı karşı getirildiğinde ve aşağıdaki üç aksiyom (özellik) sağlandığında lineer E uzayına normlu uzay denir.

1. $\|x\| = 0$ ancak ve ancak x = 0 olduğunda;

2. $\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|$;

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

normun 3'üncü özelliğine üçgen eşitsizliği denir.

Her bir $x, y \in E$ için kolaylıkla

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \quad (2.2)$$

eşitsizliği ispatlanır. (2.2) eşitsizliğine ters üçgen eşitsizliği denir.

Normlu E uzayında $x, y \in E$ elamanları arasındaki uzaklık

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

formülü ile tanımlanır.

$C_{[a,b]}$ lineer uzayında x(t) $\in$ $C_{[a,b]}$ elemanının normu

$$\|x\| = \max_{[a.b]}|x(t)|$$

formülü ile tanımlanır.

$C^k_{[a,b],k\geq 1}$ lineer uzayında x(t) $\in C^k_{[a,b]}$ elemanının normu

$$\|x\|_{C^k_{[a,b]}} = \sum_{i=0}^{k} \max_{[a,b]} \left|x^{(i)}(t)\right|$$

formülü ile tanımlanır. Burada $x^{(i)}(t)$ ifadesi $x(t)$ fonksiyonunun i-ci mertebeden türevini gösterir.

Normlu E uzayında $\{x_n\} \subset$ E dizisini ele alalım.

$x_0 \in$ E elemanı için n$\longrightarrow \infty$ şartında

$$\|x_n - x_0\| \longrightarrow 0$$

olduğunda x_0 elemanına $\{x_n\}$ dizisinin limiti denir.

Normlu E uzayından bir M kümesi alalım.

Bu M kümesi için öyle R>0 sayısı bulunursa ki, her bir x∈M için $\|x\|$≤R şartı sağlandığında M kümesine sınırlı küme denir.

2.8. Güçlü (Ciddi) Normlu Uzayların Tanımı

Normlu E uzayında;

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

eşitliği $\lambda > 0$ olmakla yalnız y = λx halinde sağlandığında normlu E uzayına Güçlü (ciddi, kesin) normlu uzay denir.

2.9. Normlu Uzaylarda Açık ve Kapalı Kümelerin Tanımı

Tanım 2. 9. 1. E normlu uzay, M ise bu uzaydan alınmış bir küme olsun.

Her bir $x_0 \in$ M noktası için öyle r >0 sayısı bulunursa ki,

$$S_r(x_0) = \{x \in \text{ M}: \|x - x_0\| < r\} \subset M$$

şartı sağlandığında M kümesine normlu E uzayında açık küme denir.

Buradaki $S_r(x_0)$ kümesine x_0 noktasının r komşuluğu denir.

$S_r(x_0)$ kümesi merkezi x_0 noktasında yarıçapı r olan açık yuvardır.

$\emptyset$ (boş küme) açık küme olarak alınır.

Tanım 2.9.2. M ⊂ E olsun, $a \in$ E noktasının keyfi alınmış, $S_r(a)$ komşuluğunda M kümesinde a - dan farklı bir x noktası bulunursa a noktasına M kümesinin limit noktası denir.

Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 2.9.2. a noktasının M ⊂ E kümesinin limit noktası olması için gerek ve yeter şart öyle $\{x_n\} \subset$ M, $x_n \neq a$ (n=1,2,…) dizisinin olmasıdır ki, n⟶ ∞ şartında $\|x_n - a\| \longrightarrow 0$ şartı sağlansın, yani M kümesinden a noktasına yakınsak olan ve $x_n \neq a$ şartını sağlayan $\{x_n\}$ dizisinin olmasıdır.

Tanım 2.9.3. Tüm limit noktalarını içinde sağlayan M ⊂ E kümesine kapalı küme denir. ∅ (boş küme) kapalı küme olarak alınır.

Tanım 2.9.4. M ⊂ E olsun M' kümesi M kümesinin tüm limit noktaları kümesi olsun.

$\bar{M} = M' \cup$ M kümesine M kümesinin kapanışı denir.

2.10. Normlu Uzaylarda Alt Uzayın Tanımı

Tanım 2.10.1. Normlu E uzayında kapalı L lineer manifolduna normlu E uzayında alt uzay denir.

Kolaylıkla derecesi k sayısını aşmayan $\mathcal{P}_k$ polinomlar kümesinin $C_{[a,b]}$ normlu uzayında alt uzay oluşturduğu gösterilir.

Normlu E uzayında x noktasından L alt uzayına dek uzaklık

$$\rho(x,L)=inf_{u \in L}\|x-u\| \qquad (2.3)$$

formülü ile tanımlanır.

Dikkate alalım ki,

$$\mathcal{M} = \{\|x-u\|, u \in L\}$$

sayısal kümesi 0 sayısı ile alttan sınırlıdır.

Bu yüzden $\rho(x,L)$ sayısı her zaman vardır.

Böylece, $\rho(x,L)$ ifadesinin aşağıdaki özellikleri vardır:

1) Her bir $u \in L$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\|x-u\| \geq \rho(x,L)$$

2) $\rho(x,L)$ < r eşitsizliği sağlandığında öyle $u_r \in L$ elemanı bulunur ki,

$$\|x-u_r\| < r$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu özellikler infimumun tanımının özellikleridir.

Aşağıdaki lemma doğrudur.

Lemma 2.10.2. $x \in L$ olduğunda $\rho(x,L)$=0 olur; ama $x \notin L$ olduğunda $\rho(x,L)$>0 olur.

Burada L kümesi E normlu uzayında alt uzaydır.

2.11. Sonlu Boyutlu Lineer Uzaylarda Normların Equivalentliği (Eşdeğerliliği)

Tanım 2.11.1. E'nin bir lineer uzay olduğunu varsayalım. Lineer E uzayında iki yöntemle $\|x\|^{(1)}$ ve $\|x\|^{(2)}$ normlarının tanımlandığını varsayalım. Bu normlar için öyle $\alpha > 0$ ve β>0 sayıları bulunursa ki, her bir $x \in$ E için,

$$\alpha\|x\|^{(1)} \leq \|x\|^{(2)} \leq \beta\|x\|^{(1)}$$

eşitsizliği sağlandığında $\|x\|^{(1)}$ ve $\|x\|^{(2)}$ normları equivalenttir(eşdeğerdir) denir.

Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 2.11.1. Her bir sonlu boyutlu lineer uzayda tanımlanmış tüm normlar equivalenttir (eşdeğerdir).

3. NORMLU UZAYLARDA ELAMANLARIN ALT UZAY ELEMANLARI İLE YAKLAŞIMI

3.1. $\rho(\mathrm{x}, \mathrm{L})$ Sayısının x Elemanının L Alt Uzay Elemanlarıyla Yaklaşımının Karakterizasyonu Olmasının Açıklaması

$\rho(\mathrm{x}, \mathrm{L})$ sayısı x elemanının L alt uzay elemanlarıyla yaklaşımında en iyi yaklaşımı karakterize ediyor. Özel halde öyle $u^* \in \mathrm{L}$ elemanı bulunursaki bu u^* elemanı için

$$\rho(\mathrm{x}, \mathrm{L}) = \|x - u^*\|$$

eşitliği sağlandığından u^* elemanına x elemanının L alt uzay elemanlarıyla yaklaşımındaki en iyi yaklaşım elemanı denir.

Genelde en iyi yaklaşım elemanı olmayabilir. En iyi yaklaşım elemanı tek olmayadabilir. Ama normlu uzayda L alt uzay sonlu boyutlu olduğunda x elemanının L alt uzay elemanlarıyla yaklaşımında en iyi yaklaşım elemanı vardır.

3.2. Elemanların Sonlu Boyutlu Alt Uzay Elemanlarıyla Yaklaşımında En İyi Yaklaşım Elemanının Varlığı Hakkında Teorem

Sonlu boyutlu alt uzay elemanlarıyla yaklaşımında aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 3.2. L kümesinin E normlu uzayında sonlu boyutlu alt uzay olduğunu varsayalım.

Her bir x∈ E için öyle $u^* \in \mathrm{L}$ elemanı bulunur ki, bu eleman için

$$\rho(\mathrm{x}, \mathrm{L}) = \|x - u^*\|$$

eşitliği sağlanır.

(Bu u^*elemanı tek olmayadabilir)

İspat. $x \notin L$ olduğunu var sayalım. Bu halde $\rho(\mathrm{x}, \mathrm{L})$=d>0 olur. L alt uzayının sonlu m boyutlu olduğunu ve $e_1, e_2, \ldots, e_m$ elemanlar sisteminin L alt uzayında baz oluşturduğunu varsayalım.

u ∈ L elemanının $\{e_k\}_{k=1}^{m}$ bazındaki açılımı

$$u = \sum_{k=1}^{m} \xi_k e_k$$

olsun. m boyutlu L lineer uzayında u ∈ L elemanının normunu

$$\|u\|_{L^m} = (\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Euclide normunu ele alalım. Dikkate alalım ki L'de E normlu uzayının $\|x\|$ normuda tanımlanmıştır. Ama L sonlu boyutlu olduğundan L uzayında bu normlar equivalenttirler. Yani öyle α > 0 ve β>0 sayıları bulunur ki;

$$a\|u\|_{L^m} \leq \|u\| \leq \beta\|u\|_{L^m} \tag{3.1}$$

Biz burada L lineer manifoldunu $\|u\|_{L^m}$ Euclide normu ile birlikte L^m ile gösterdik. (L^m- Euclide uzayıdır)

Şimdi L^m uzayında $\|x - u\|$ fonksiyonunu ele alalım. $\|x - u\|$ fonksiyonu L^m uzayında tanımlanmış sürekli fonksiyondur. Bu aşağıdaki değerlendirmeden görülür. Burada

$\|x - u\|$ nun u ya bağlı L^m de sürekli olmasını göstermek ve u_1, u_2 ∈ L^m elemanları için aşağıdaki değerlendirmeyi yapalım;

$$|\|x - u_1\| - \|x - u_2\|| \leq \|u_1 - u_2\| \leq \beta\|u_1 - u_2\|_{L^m}$$

u_1 ve u_2 elamanları L^m den alınmış keyfi elamanlar olduğundan keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı aldığımızda $\delta = \frac{\varepsilon}{\beta}$ olarak seçersek $\|u_1 - u_2\|_{L^m} < \delta$ şartında

$$|\|x - u_1\| - \|x - u_2\|| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanacaktır. Böylece $\|x - u\|$ ifadesi u değişkenine bağlı L^m de düzgün süreklidir.

Şimdi gösterelim ki $\|x - u\|$ ifadesi u değişkenine nazaran en küçük değerini yalnız

$$\|u\|_{L^m} \leq r, \qquad r = a^{-1}\,(d + 1 + \|x\|)$$

kapalı sınırlı yuvarında alabilir.

Gerçektende $\|u\|_{L^m} > r$ olduğunda (bakınız(3.1))

$$\|x-u\| \geq \|u\| - \|x\| \geq \alpha\|u\|_{L^m} - \|x\| > \alpha r - \|x\| = d+1$$

Böylece bu eşitsizlikten $\|x-u\|$ fonksiyonu en küçük değerini $\|u\|_{L^m} \leq r$ yuvarı dışında alamaz.

Ama $\|u\|_{L^m} \leq r$ yuvarı L^m de kapalı sınırlı küme olduğundan ve $\|x-u\|$ fonksiyonu bu yuvarda sürekli olduğundan öyle $u^* \in$ L elamanı bulunur, $\|u^*\|_{L^m} \leq r$ şartı ve

$$\rho(x, L) = \|x-u^*\|$$

eşitliği sağlanır. Böylece teorem ispatlanmış oldu.

3.3. Güçlü Normlu Uzaylarda Elemanların Alt Uzay Elemanlarıyla Yaklaşımında En İyi Yaklaşım Elemanının Tekliği Hakkındaki Teorem

En iyi yaklaşım elamanının tekliği aşağıdaki teoremde garanti edilir.

Teorem 3.3. Güçlü(ciddi) normlu E uzayında her bir x ∈ E elamanının her bir L alt uzay elamanlarıyla yaklaşımında birden fazla en iyi yaklaşım elamanı olamaz.

İspat. Varsayalım ki, güçlü normlu bir E uzayında öyle x elemanı bulunur ki ve bu uzayda öyle L alt uzayı bulunur ki, bu x elamanının L alt uzay elemanlarıyla yaklaşımında iki tane u_1^* ve $u_2^* \epsilon L$ en iyi yaklaşım elamanları bulunur, yani u_1^*, u_2^* için

$$\|x-u_1^*\| = \|x-u_2^*\| = d = inf_{u \in L} \|x-u\|$$

eşitlikleri sağlanır.

$d = 0$ olduğunda $u_1^* = u_2^*$ alınır.

$d > 0$ olduğunu var sayalım;

$$\left\|x - \frac{u_1^* + u_2^*}{2}\right\| = \left\|\frac{x-u_1^*}{2} + \frac{x-u_2^*}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}\|x-u_1^*\| + \frac{1}{2}\|x-u_2^*\| = d$$

Böylece, $\left\| x - \frac{u_1^* + u_2^*}{2} \right\| = d$ olur. Ama bu halde,

$$\|(x - u_1^*) + (x - u_2^*)\| = \|x - u_1^*\| + \|x - u_2^*\| > 0$$

eşitsizliği bulunur.

E güçlü normlu uzay olduğundan öyle $\lambda > 0$ sayısı bulunur ki

$$x - u_2^* = \lambda(x - u_1^*)$$

Buradan da $\lambda \neq 1$ olduğunda

$$\mathrm{x} = (1 - \lambda)^{-\mathbf{1}}(u_2^* - \lambda u_1^*) \in \mathrm{L}$$

alınır. Bu olamaz çünkü $d > 0$ olduğundan,

$x \notin L$ dir. Böylece $\lambda = 1$ olması gerekir. Bu durumda ise $u_1^*= u_2^*$ olduğu görülür.Teorem ispatlanmış oldu.

Şimdi biz burada normlu uzaylarda her yerde yoğun lineer manifoldları tanımlayalım ve her yerde yoğun lineer manifold elamanlarıyla normlu uzayın elamanlarının gereken mertebeden yaklaştırılabildiğine dikkat edelim.

3.4. Normlu Uzayda Her Yerde Yoğun Lineer Manifoldlar ve Her Yerde Yoğun Lineer Manifoldların Normlu Uzayın Elemanlarının Bu Lineer Manifold Elemanlarıyla Yaklaşımındaki Önemi

Yaklaşım teoresinde çok önemi olan aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 3.4. E normlu uzay L ise bu uzayda bir lineer manifold olsun (L ⊂ E). Keyfi alınmış $x \in E$ elamanı için ve keyfi alınmış $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle $u \in L$ elamanı bulunursa ki

$$\|x - u\| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlandığında L lineer manifolduna normlu E uzayında her yerde yoğun lineer manifold denir.

L lineer manifoltunun normlu E uzayında her yerde yoğun olduğunu ve $x \in E$ olduğunu varsayalım. Bu halde ε =1, $\varepsilon = \frac{1}{2}, \dots, \varepsilon = \frac{1}{n}, \dots$ olarak ele aldığımız x elamanı için öyle $u_1 \in$ L, $u_2 \in$ L, ..., $u_n \in$ L, ... elemanları buluruz ki,

$$\|x - u_n\| < \frac{1}{n} , \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece, bu eşitsizlikten $n \to \infty$ şartında $u_n \to x$ olduğu görülür.

Böylece, L lineer manifoldu normlu E uzayında her yerde yoğun olduğunda her bir $x \in E$ elamanı için öyle $\{u_n\} \subset L$ dizisi bulunur ki, $n \to \infty$ şartında $u_n \to x$ olduğu görülür.

Buradan da $\bar{L}$= E olduğu görülür.

Matematik analizde Weierstrass'ın birinci teoreminde;

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k cos k\mathrm{t} + B_k sin k\mathrm{t})$$

trigonometrik polinomlarının $[-\pi, \pi]$ aralığında tanımlanmış sürekli olan ve $x(-\pi) = x(\pi)$ şartını sağlayan fonksiyonların $C_{[-\pi,\pi]}$, $\|x\|$=$max_{[-\pi,\pi]}|x(t)|$ normlu uzayında her yerde yoğun lineer manifold olduğu gösterilir.

Böylece; $x(t) \in C_{[-\pi,\pi]}$ fonksiyonu ele aldığımız bu trigonometrik polinomlarla istenilen mertebeden yaklaştırılabilir.

Matematik analizde Weierstrass'ın ikinci teoreminde $\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ şeklindeki tüm polinomlar kümesinin $C_{[a,b]}$ normlu uzayında her yerde yoğun lineer manifold oluşturduğu gösterilir.

Böylece her bir $x(t) \in C_{[a,b]}$ fonksiyonu istenilen mertebeden

$$P_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k t^k$$

polinomu ile yaklaştırılabilir.

Şimdi biz burada Banach uzayında her yerde yoğun lineer manifold elemanları ile elemanların yaklaşımını ve Hilbert uzaylarında elemanların kapalı kabarık alt küme elemanları ile ve alt uzay elemanlarıyla yaklaşım problemlerini ele alıp incelemek için gereken bilgileri vereceğiz.

4. BANACH UZAYLARI VE HİLBERT UZAYLARI HAKKINDA BAZI BİLGİLER

4.1. Skaler Çarpımlı Uzayların Tanımı

4.1.1. Euclide Uzayının Tanımı

Tanım 4.1.1. E reel lineer uzayında her bir x, y ∈ E çiftine karşı bu elemanların skaler çarpımı olarak adlandırılan reel (x,y) sayısını karşı getirmek mümkün olduğunda ve bu skaler çarpım aşağıdaki skaler çarpım özelliklerini (aksiyomlarını) sağladığında lineer E uzayına Euclide uzayı denir:

1) $(x,x) \geq 0$, $(x,x) = 0$ ancak ve ancak x = 0 olduğunda;

2) $(x,y) = (y,x)$

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$

4) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$

Her bir Euclide uzayında aşağıdaki formülle,

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} \tag{4.1}$$

norm tanımlanarak Euclide uzayı normlu uzaya dönüştürülür.

4.1.2. Uniter Uzaylar

Tanım 4.1.2. U kompleks lineer uzayında her bir $x, y \in$ U çiftine karşı bu elemanların skaler çarpımı olarak adlandırılan belli bir (x, y) kompleks sayısı karşı getirildiğinde ve bu skaler çarpım aşağıdaki aksiyomları sağladığında kompleks lineer U uzayına üniter uzay denir.

1) $(x,x) \geq 0$, $(x,x) = 0$ ancak ve ancak x = 0 olduğunda;

2) $(x,y) = \overline{(y,x)}$ (buradaki çizgi kompleks eşleniği gösterir);

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$

4) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$

üniter uzayda da aşağıdaki,

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

formülü ile elemanın normu tanımlanarak U üniter uzayı normlu uzaya dönüştürülür.

4.1.3. Elemanların Ortogonalliği ve Ortonormal Sistemler

E uzayının skaler çarpımlı uzay olduğunu var sayalım.

x, y ∈ E için (x, y) = 0 olduğunda x ve y elemanlarına ortogonal elemanlar denir ve $x \perp y$ gibi gösterilir.

E skaler çarpımlı uzayından her biri sıfırdan farklı $x_1, x_2, \ldots, x_m$ elemanlarının alındığını var sayalım.

Bu elemanlar için;

$$(x_i, x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

şartı sağlandığında $x_1, x_2, \ldots, x_m$ elemanlar sistemine ortonormal sistem denir.

Ortonormal sistemin elemanlar sisteminin lineer bağımsız sistem oluşturduğu kolaylıkla ispatlanır.

Dikkate alalım ki;

Lineer bağımsız sistemin elemanlarından Gram-Schmidt ortogonalleştirme yöntemi ile ortonormal sistem elde edilir.

Burada biz skaler çarpımın iki önemli özelliğini de verelim.

4.1.4. Skaler Çarpımın İki Özelliği

4.1.4.1. Skaler Çarpımın Sürekliliği

n → ∞ şartında $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ olduğunda

n → ∞ şartında $(x_n, y_n) \to (x, y)$ olur.

4.1.4.2. Skaler Çarpımın Paralelkenar Özelliği

Skaler çarpımlı E uzayında her bir x, y ∈ E çifti için;

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

eşitliği sağlanır.

4.2. Banach Uzayları

4.2.1. Fundamental Dizilerin (Cauchy Dizilerinin) Tanımı

Tanım 4.2.1. X uzayının normlu uzay olduğunu ve $\{x_n\}$ elemanlar dizisinin bu uzaydan alınmış, dizi olduğunu var sayalım.

$\{x_n\} \subset$ X dizisi için keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı aldığımızda öyle N sayısı bulunursa ki, her bir $n > N$ ve her bir $p = 1, 2, 3, \dots$ doğal sayıları için,

$$\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlandığında bu $\{x_n\}$ dizisine normlu X uzayında fundamental dizi veya Cauchy dizisi denir.

4.2.2. Banach Uzayının Tanımı

Tanım 4.2.2. Normlu uzayda her bir fundamental dizi bu uzayda yakınsak olduğunda bu uzaya tam uzay denir.

Tam normlu uzaya Banach Uzayı denir.

Örneğin; $C_{[a,b]}$ normlu uzayı Banach uzayıdır.

Sonlu ve sonsuz boyutlu Banach uzayları vardır. Mesela E^m Euclide uzayı sonlu boyutlu Banach uzayıdır. Ama $C_{[a,b]}$ uzayı sonsuz boyutlu Banach uzayıdır.

Burada biz sayılabilir bazlı Banach uzayının tanımını verelim.

4.2.3. Sayılabilir Bazlı Banach Uzayları

X uzayının sonsuz boyutlu Banach uzayı olduğunu var sayalım. $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ dizisi X Banach uzayından alınmış elemanlar dizisi olsun. X uzayından alınmış her bir $x \in X$ elemanı tek yakınsak,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \tag{4.2}$$

serisi şeklinde göstermek mümkün olduğunda $\{e_k\}_1^{\infty}$ dizisine X Banach uzayında baz denir. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ katsayılarına x elemanının $\{e_k\}$ bazındaki koordinatları denir. Bu durumda X Banach uzayına sayılabilir bazlı Banach uzayı denir.

Mesela, $C_{[a,b]}$ uzayı sayılabilir bazlı Banach uzayıdır.

4.3. Hilbert Uzaylarının Tanımı

Skaler çarpımlı uzay,skaler çarpımın doğurduğu norma göre tam uzay olduğunda bu skaler çarpımlı uzaya Hilbert uzayı denir ve H ile gösterilir.

5. SEPARABEL NORMLU UZAYLARDA ELEMANLARIN YAKLAŞIM ANLAMI(APPRAKSİMASYONU) ÜZERİNE

5.1. Separabel Normlu Uzayların Tanımı

X normlu uzayı sayılabilir sayıda elemanlı her yerde yoğun küme olduğunda normlu X uzayına separabel uzay denir.

5.2. Separabel Normlu Uzaylara Örnekler

Örnek 5.2.1. $E' = (-\infty, +\infty)$ uzayı separabel normlu uzaydır. Bu uzayda rasyonel sayılar kümesi sayılabilir her yerde yoğun kümedir. Burada her bir reel sayı istenilen dakiklikle(mertebeden, dereceden) rasyonel sayı ile yaklaştırılabilir.

Örnek 5.2.2. Her bir sonlu boyutlu uzay separabel uzaydır. Burada bir baz alıp değişmez olduğunu varsayalım. Bu durumda tüm rasyonel koordinatlı elemanların kümesi bu sonlu boyutlu uzayda sayılabilir her yerde yoğun küme oluşturur.

Örnek 5.2.3. $C_{[a,b]}$ uzayı separabel normlu uzaydır. Bu uzayda rasyonel katsayılı polinomların tüm kümesi sayılabilir her yerde yoğun küme oluşturur. $C_{[a,b]}^{k}$uzayıda separabel uzaydır.

Örnek 5.2.4. Sayılabilir bazlı Banach uzayı separabel uzay oluşturur. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ elemanlar dizisinin X Banach uzayında baz oluşturduğunu varsayalım. Bu durumda r_k rasyonel sayı ve n keyfi doğal sayı olduğunda tüm $\sum_{k=1}^{n} r_k e_k$ toplamlar kümesi X uzayında sayılabilir her yerde yoğun küme oluşturur.

Separabel normlu uzaylarda her bir x elamanını sayılabilir her yerde yoğun kümenin elemanları ile istenilen dakiklikle (mertebeden, dereceden) yaklaştırabiliriz.

6. HİLBERT UZAYINDA ELEMANLARIN ALT UZAY ELEMANLARIYLA YAKLAŞIMI ÜZERİNE

6.1. Hilbert Uzayında Elemanların Kapalı Kabarık Küme Elemanları İle Yaklaşımında En İyi Yaklaşım Elemanının Varlığı ve Tekliği Hakkında Teorem

Teorem 6.1. M kümesinin H Hilbert uzayında kapalı kabarık küme olduğunu varsayalım. $x \notin M$ olsun. Bu şartlar sağlandığında,

$$\rho(x, M) = inf_{u \in M}\|x - u\| = \|x - y\|$$

eşitliğini sağlayan tek bir tane y ∈ M elemanı vardır.

İspat. $\rho(x, M) = inf_{u \in M}(x, M) = d > 0$ şartı $x \notin M$olduğunda kolaylıkla gösterilir. Bu yüzden infimumun tanımına esasen

$$d < d + \frac{1}{n}, n = 1,2, \ldots$$

eşitsizliği sağlandığından öyle $U_n \in M$ elemanı bulunur ki,

$$d < \|x - u_n\| < d + \frac{1}{n} \tag{6.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

Önce bu eşitsizliği sağlayan $\{u_n\}$ dizisinin fundamental dizi olduğunu gösterelim.

$\{u_n\}$ dizisinin fundamental dizi olduğunu göstermek için $x - u_n$ ve $x - u_{n+p}$ elemanları için paralelkenar eşitliğini kullanalım. Bu paralelkenarın köşegenleri $u_{n+p} - u_n$ ve $2x - u_n - u_{n+p}$ olduğundan paralelkenar eşitliği aşağıdaki şekilde yazılır.

$$2\|x - u_n\|^2 + 2\|x - u_{n+p}\|^2 = \|u_n - u_{n+p}\|^2 + \|2x - u_n - u_{n+p}\|^2$$

Burada M kümesi kabarık (convex) küme olduğundan,

$$\frac{u_n + u_{n+p}}{2} \in M$$

olur. Bu yüzdende,

$$\left\|2x - u_n - u_{n+p}\right\|^2 = 4\left\|x - \frac{u_n + u_{n+p}}{2}\right\|^2 \geq 4d^2$$

değerlendirmesi bulunur.

(6.1) eşitsizliğini kullanarak,

$$\|x - u_n\|^2 < \left(d + \frac{1}{n}\right)^2 ve \left\|x - u_{n+p}\right\|^2 < \left(d + \frac{1}{n+p}\right)^2$$

eşitsizliklerini yazabiliriz.

Üstteki değerlendirmeleri kullanarak aşağıdaki değerlendirmeyi buluruz.

$$\left\|u_n - u_{n+p}\right\|^2 = 2\|x - u_n\|^2 + 2\left\|x - u_{n+p}\right\|^2 - 4\left\|x - \frac{u_n + u_{n+p}}{2}\right\|^2 <$$

$$< 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{n+p}\right)^2 - 4d^2 = \frac{4d}{n} + \frac{4d}{n+p} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{(n+p)^2} \to 0$$

yani $n \to \infty$ şartında $\left\|u_n - u_{n+p}\right\| \to 0$ olduğu bulunur.

Böylece, $\{u_n\}$ dizisinin fundamental dizi olduğu ispatlanmış olur. H Hilbert uzayı olduğundan $\{u_n\}$ dizisi bir $y \in H$ elemanına yakınsaktır. M kümesi kapalı küme olduğunda $y \in M$olur.

(6.1) eşitsizliğinin her yanından $n \to \infty$ şartında limit aldığımızda,

$$\|x - y\| = d = inf_{u \in M}\|x - u\| = \rho(x, M)$$

eşitliğini buluruz. Böylece, $x \in H$ elemanının M kümesinde en iyi yaklaşım elemanı olduğunu ispatladık.

Şimdi bu en iyi y yaklaşım elemanının tek olduğunu ispatlayalım.

Bunu ispatlamak için aksini farz edelim.

Farz edelim ki, ikinci bir $y^* \in M$ elemanı var ki, $\|x - y^*\| = d$ eşitliği sağlanır.

Paralelkenar eşitliğini kullanarak.

$$4d^2 = 2d^2 + 2d^2 = 2\|x - y\|^2 + 2\|x - y^*\|^2 = \|y - y^*\|^2 +$$

$$+4\left\|x - \frac{y+y^*}{2}\right\|^2 \geq \|y - y^*\|^2 + 4d^2$$

Buradan da,

$$0 \geq \|y - y^*\|^2$$

alınır. Bu yalnız $\|y - y^*\| = 0, yani\ y = y^*$ olduğu halde sağlanır.Teorem ispatlandı.

6.2. Hilbert Uzayında x Elemanının L Alt Uzay Elemanlarıyla Yaklaşımında En İyi Yaklaşım Elemanının Varlığı ve Tekliği ve Diğer Özellikleri Üzerine

H Hilbert uzayı $L \subset H$ ise H Hilbert uzayında alt uzay olduğunu, yani kapalı lineer manifold olduğunu var sayalım. Bu durumda $x \in H$ ancak $x \notin L$ olduğunda x noktasından L alt uzayına dek uzaklık

$$\rho(x, L) = inf_{u \in L}\|x - u\|$$

formülü ile tanımlanır.

Dikkate alalım ki,

Hilbert veya Banach uzayında alt uzaylar kapalı kabarık küme oluştururlar. Bu yüzden de önceki kısımdaki teoremden aşağıdaki sonuç bulunur.

Sonuç 6.2.1. x noktasının L alt uzay elemanları ile yaklaşımında tek bir tane en iyi $y \in L$ yaklaşım elemanı bulunur ki,

$$\rho(x, L) = \|x - y\|$$

eşitliği sağlanır.

Buradan da bir önemli sonuç alınır.

Teorem 6.2.1 $\rho(x, L) = \|x - y\|$, $y \in L$ eşitliği sağlandığında x - y farkı L alt uzayına dik (ortogonal) olur. Yani $(x - y) \perp L$ özelliği sağlanır.

İspat. Burada biz her bir $h \in L$ elemanı için,

$$(x - y, h) = 0$$

eşitliğinin sağlandığını göstermemiz gerekir.

λ parametresinin kompleks parametre olduğunu (H reel hilbert uzayı olduğunda ise λ parametresinin reel parametre olduğunu) varsayalım.

Bu durumda her bir λ için,

$$\|x - y + \lambda\, \mathrm{h}\| \geq \|x - y\|$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu eşitsizlik aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$(x - y + \lambda\, \mathrm{h}, x - y + \lambda\, \mathrm{h}) \geq (x - y, x - y)$$

Bu sonuncu eşitsizlikte sadeleştirme yaparak aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\lambda(h, x - y) + \bar{\lambda}(x - y, h) + \lambda\bar{\lambda}\|h\|^2 \geq 0$$

bu sonuncu eşitsizlik her bir λ için sağlanır.

Bu eşitsizlikte

$$\lambda = -\frac{(x - y, h)}{\|h\|^2}$$

aldığımızda aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$-\frac{|(x - y, h)|^2}{\|h\|^2} \geq 0.$$

Bu eşitsizliğin her bir $h \in L$ için sağlanması için,

$$(x-y,h)=0$$

eşitliğinin her bir $h \in L$ için sağlanması gerekir.

Sonuç 6.2.2. L kümesinin H Hilbert uzayında alt uzay olduğunu varsayalım. Bu şartlar sağlandığında her bir $x \in H$ için aşağıdaki açılım doğrudur:

$$x=y+z \quad ,y \in L, \quad z \perp L \tag{6.2}$$

ve bu açılım tektir.

Bu sonucu ispatlamak için y elemanı olarak x elemanının L alt uzay elemanları ile yaklaşımındaki en iyi yaklaşım elemanını almak yeterlidir.

Böylece z olarak ise $z=(x-y)$ aldığımızda $(x-y) \perp L$ olur ve (6.2) açılımınında tek olduğu görülür.

(6.2) açılımındaki y elemanına x elemanının L alt uzayına ortogonal projeksiyonu da denir.

(6.2) açılımı sağlandığında

$$\|x\|^2=\|y\|^2+\|z\|^2$$

eşitliği (Pisagor eşitliği) sağlanır.

Gerçekten de,

$$\|x\|^2=(x,x)=(y+z,y+z)=(y,y)+(y,z)+(z,y)+(z,z)=\|y\|^2+\|z\|^2$$

olur.

Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 6.2.2. H Hilbert uzayında x elemanının $\{\varphi_k\}$ ortogonal sistemi üzerine Fourier serisine açılımında bu serinin S_n kısmi toplamı

$$L_n=S_p\{\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n\}$$

alt uzayında x elemanının L_n alt uzay elemanlarıyla yaklaşımında en iyi yaklaşım elemanı olur.

İspat. Bu teoremi ispatlamak için skaler çarpımlı sonsuz boyutlu E uzayında Fourier serisinin tanımını verelim. $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ sisteminin E'de ortogonal sistem olduğunu var sayalım, yani $\varphi_k \neq 0 \quad (k = 1,2, \dots)$; $(\varphi_i, \varphi_j) = 0,\ i \neq j$ şartları sağlanır. Bu halde,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \cdots + a_n \varphi_n + \cdots$$

serisine E uzayında $\{\varphi_k\}$ ortogonal sistemi üzere seri denir. $x \in E$ alalım. Aşağıdaki,

$$c_k = \frac{\{x, \varphi_k\}}{\|\varphi_k\|^2}, \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

eşitlikleriyle tanımlanan c_k sayılarına x elemanının $\{\varphi_k\}$ sistemi üzere Fourier katsayıları denir. Uygun olarak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \cdots + c_n \varphi_n + \cdots$$

serisine x elemanının ortogonal $\{\varphi_k\}$ sistemi üzere Fourier serisi denir. Aşağıdaki,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$$

kısmi toplamına x elemanının Fourier polinomu denir.

Şimdi ortogonal $\{\varphi_k\}$ sisteminin n elemanını $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ elemanları alalım. Tüm mümkün olan

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$$

lineer kombinasyonlarını alalım. Bu lineer kombinasyonların kümesi,

$$L_n = S_p\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$$

şeklinde gösterilir.

L_n kümesinin n - boyutlu alt uzay oluşturduğu açıktır.

Şimdi $x \in E$ elemanını alalım. x elemanı ile u_n elemanı arasındaki uzaklığın karesini alalım;

$$\Delta_n^2 = \|x - u_n\|^2$$

skaler çarpımın özelliklerini kullanarak aşağıdaki eşitliği buluruz.

$$\Delta_n^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k,\ \ x - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k\right) =$$

$$= (x, x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\varphi_k, x\right) - \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k \left(x, \varphi_k\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{a}_k \left(\varphi_k, \varphi_k\right)$$

x elemanının c_k Fourier katsayısını kullanarak,

$$(x, \varphi_k) = c_k \|\varphi_k\|^2, \quad (\varphi_k, x) = \overline{(x, \varphi_k)} = \overline{c_k}\ \|\varphi_k\|^2$$

eşitliklerini buluruz. Bu eşitlikleri üstte bulduğumuz eşitlikte kullanarak aşağıdaki eşitliği buluruz;

$$\Delta_n^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{c_k} \left\|\varphi_k\right\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k}\ c_k \left\|\varphi_k\right\|^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{a_k} \left\|\varphi_k\right\|^2,$$

Burada,

$$\|a_k - c_k\|^2 = (a_k - c_k)(\overline{a_k} - \overline{c_k}) = a_k \overline{a_k} - a_k \overline{c_k} - c_k \overline{a_k} + |c_k|^2$$

eşitliğini kullanarak;

$$\Delta_n^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 . \left\|\varphi_k\right\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |a_k - c_k|^2 . \left\|\varphi_k\right\|^2$$

eşitliğini buluruz.

Şimdi,

$$d_n = \rho(x, L_n) = inf_{u_n \epsilon L_n} \|x - u_n\| = inf_{a_1, a_2, \dots, a_n} \Delta_n$$

olur.

Burada Δ_n ifadesinin $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$ ifadesine yani n tane $a_1, a_2, \dots, a_n$ katsayılarına bağlı olduğu görülür. Üstteki sonuncu eşitlikten d_n en küçük değerinin $a_k = c_k$ $(\mathrm{k} = 1, 2, \dots, \mathrm{n})$ olduğu halde bulunduğu görülür.

Böylece, x elemanının L_n alt uzay elemanlarıyla yaklaşımında en iyi yaklaşım elemanının $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ kısmi toplamının olduğu alınır. Teorem ispatlandı.

7. SONUÇ

Bu tezde normlu uzaylarda, Banach ve Hilbert uzaylarında elemanların alt uzay elemanlarıyla yaklaşım problemleri ele alındı ve incelendi. Elemanların sonlu boyutlu alt uzay elemanlarıyla yaklaşımında en iyi yaklaşım elemanının varlığı gösterildi ve güçlü normlu uzaylarda ise elemanların alt uzay elemanlarıyla yaklaşımında en iyi yaklaşım elemanının tekliği gösterildi. Normlu uzaylarda her yerde yoğun lineer manifoldların elemanların yaklaşımındaki önemi gösterildi. Separabel normlu uzaylarda elemanların sayılabilir her yerde yoğun kümelerin elemanlarıyla yaklaşımı ele alınıp incelendi. Hilbert uzaylarında elemanların alt uzay elemanlarıyla yaklaşımında en iyi yaklaşım elemanının varlığı ve tekliği gösterildi. Hilbert uzaylarında elemanın tam ortonormal sistem üzere Fourier serisine açılımında bu serinin kısmi toplamının verilen elemanın en iyi yaklaşım elemanı olduğu gösterildi.

8. KAYNAKLAR

1. Trenogin V.A., (2002), “Functional Analysis”, "Nauka", "Moscow".
2. Yosida,K, (1980), “Functional Analysis”, "Springer-Verlag", "Newyork".
3. Eberhard Z., (1991), “Applied Functional Analysis”, "Singer-Yerlag", "Newyork".
4. Lyusternik L.A., (1965), “Sobolev V.I. Elementi Funktionalnogo Analiza.M”, Nauka".
5. Habibzade E., (1978), "Funksional Analiz"., "Bakı", "Maarif".
6. Halilov Z.I., (1949), "Normlu Lineer Uzaylarda Lineer Denklemler", "Bakı", Azer. "Elmler Akademisi".
7. Mamedov R., (1967), " Fonksiyonların Lineer Operatörlerle Yaklaşımı", "Bakı" Azer. "Devlet Neşriyatı".

9. ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Adana'da doğan Raziye AKTAŞ, ilköğrenimini Akşemsettin İlk Öğretim Okulunda, orta öğrenimini ise Adana Ahmet Kurttepeli Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesinde ve yüksek öğrenimini de 2005-2009 yılları arasında Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde tamamlamıştır. 2010 yılında Fırat Üniversitesinde Pedagojik Formasyon eğitimi almıştır. Ocak 2016 da ise Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans yapmaya başlamıştır. Evli ve bir çocuk annesidir. Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV danışmanlığında hazırladığı "Normlu uzaylarda ve Banach ve Hilbert uzaylarında elemanların yaklaşım problemleri üzerine" başlıklı tezine devam etmektedir.

İletişim Bilgileri:

Adres : Karatepe Mahallesi Hoca Ahmet Yesevi Caddesi Eser Akbay Sitesi A Blok Kat: 2 No: 4 Yozgat/Merkez

Cep : 0506 994 15 27

E-posta : 01.raziyeaktas@gmail.com