BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİLATERAL DİZİLER İÇİN FARK DİZİ UZAYLARI

Rıdvan Cem DEMİRKOL

HAZİRAN 2016

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİLATERAL DİZİLER İÇİN FARK DİZİ UZAYLARI

Hazırlayan

Rıdvan Cem DEMİRKOL

Danışman

Doç. Dr. Harun POLAT

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Tunay BİLGİN

Doç. Dr. Harun POLAT

Yrd. Doç. Dr. Muhammed ÇINAR

HAZİRAN 2016

Rıdvan Cem DEMİRKOL tarafından hazırlanan "**Bilateral Diziler İçin Fark Dizi Uzayları**" adlı tez çalışması 30/06/2016 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Prof. Dr. Tunay BİLGİN (Başkan)	----------
Doç. Dr. Harun POLAT (Danışman)	----------
Yrd. Doç. Dr. Muhammed ÇINAR (Üye)	----------

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 27/07/2016 gün ve 26/01 Sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Mehmet Cihan AYDIN

Enstitüsü Müdürü

ÖZET

BİLATERAL DİZİLER İÇİN FARK DİZİ UZAYLARI

Rıdvan Cem DEMİRKOL

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Harun POLAT

Haziran 2016, 93 sayfa

Bu çalışmada ilk olarak konuya ait temel tanım ve teoremler, önceki çalışmalardan örnekler ve kullanılan materyal ve yöntem verildi.

Daha sonra bazı fark dizi uzaylarının tanımı, bu dizi uzaylarının dual uzayları ve bazı matris dönüşümleri verildi. Ardından bilateral dizilerin fark dizileri tanımlandı. Bu dizi uzaylarının bazı topolojik özellikleri incelendi. Bu fark dizi uzaylarının dual uzayları hesaplanarak matris dönüşümleri karakterize edildi.

Son olarak da bazı sonuç ve öneriler verilerek çalışma sonlandırıldı.

Anahtar Kelimeler: Bilateral dizi, Fark dizi uzayı, Dualler, Matris dönüşümleri.

ABSTRACT

DIFFERENCE SEQUENCE SPACES
OF BILATERAL SEQUENCES

Rıdvan Cem DEMİRKOL

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Advisor: Assoc. Prof. Dr. Harun POLAT
June 2016, 93 pages

In this study fundamental definitons and theorems, examples from former studies, used method and material are given firstly.

Then definitons of some difference sequence spaces, their duals, and some matrix transformations are given. Next, difference sequence spaces of bilateral sequences are defined. Some topological properties of them are investigated. Their matrix transformations are characterized by computing dual spaces of these difference sequence spaces.

Finally, it is concluded by given some result and comments.

Key Words: Bilateral sequence, Difference sequence space, Duals, Matrix Maps.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen hocalarım başta Doç. Dr. Harun POLAT, Yrd. Doç. Dr. Muhammed ÇINAR ve Arş. Gör. M. Talat Sarıaydın'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
Δ	Fark operatörü
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
ω	Karmaşık sayılar üzerinde tanımlı bütün dizilerin kümesi
l_1	Mutlak yakınsak dizilerin kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
l_∞	Sınırlı dizilerin kümesi
c_0	Sıfıra yakınsak dizilerin kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
X^*	X normlu uzayının sürekli dual uzayı
X^α	X dizi uzayının $\alpha-$ duali
X^β	X dizi uzayının $\beta-$ duali
X^γ	X dizi uzayının $\gamma-$ duali
(X, Y)	X dizi uzayını Y dizi uzayına dönüştüren matrisler
$X(\Delta)$	X dizi uzayının fark dizisi
$X(\Delta, \mathbb{Z})$	X bilateral dizi uzayının fark dizisi
c	Yakınsak dizilerin kümesi

1. GİRİŞ

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

1.1.1. Tanım: Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinden ibaret olan fonksiyonlara dizi denir. Diziler değer kümelerine göre çeşitli adlar alırlar. Eğer dizinin değer kümesi $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi ise diziye karmaşık terimli, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise diziye reel terimli, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ise diziye rasyonel terimli dizi denir.

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{N} \to \mathbb{C} \\ n &\to (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_{3,}...) \end{aligned}$$

dizisinin genel terimi (x_n) olur [1].

1.1.2. Tanım: Tanım kümesi $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinden ibaret olan fonksiyonlara bilateral dizi denir. Bilateral diziler değer kümelerine göre çeşitli adlar alırlar. Eğer bilateral dizinin değer kümesi $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi ise diziye karmaşık terimli, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise diziye reel terimli, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ise diziye rasyonel terimli bilateral dizi denir.

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \\ n &\to f(n) = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (..., x_{-3,}x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_{3,}...) . \end{aligned}$$

bilateral dizisinin genel terimi $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ olur $[2, 3, 4, 5]$.

1.1.3. Tanım: (x_n) herhangi bir dizi olsun. $\forall n \in N$ için $|x_n| \leq M$ olacak şekilde M reel sayısı varsa yani (x_n) dizisinin bütün terimleri için bir alt ve üst sınır varsa (x_n) dizisine sınırlı dizi denir [1].

1.1.4. Tanım: $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ herhangi bir bilateral dizi olsun. $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $|x_n| \leq M$ olacak şekilde M reel sayısı varsa yani $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisinin bütün terimleri için bir alt ve üst sınır varsa $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisine sınırlı bilateral dizi denir [2].

1.1.5. Tanım: (x_n) herhangi bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n \geq N(\varepsilon)$ olduğunda $|x_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa (x_n) dizisi a sayısına yakınsaktır denir.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

ile gösterilir [1].

1.1.6. Tanım: $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ herhangi bir bilateral dizi olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $\forall |n| \geq N(\varepsilon)$ olduğunda $|x_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisi a sayısına yakınsaktır denir.

$$\lim_{|n|\to\infty} x_n = a$$

ile gösterilir [3].

1.1.7. Tanım: (x_n) herhangi bir dizi olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $\forall n, m \geq N(\varepsilon)$ olduğunda $|x_n - x_m| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir [1].

1.1.8. Tanım: $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ herhangi bir bilateral dizi olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $\forall |n|, |m| \geq N(\varepsilon)$ $(n, m \in \mathbb{Z})$ olduğunda $|x_n - x_m| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisine bir Cauchy dizisi denir.

1.1.9. Tanım: (x_n) herhangi bir dizi olsun. Genel terimi

$$\begin{aligned}
s_1 &= x_1 \\
s_2 &= x_1 + x_2 \\
s_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \\
&. \\
&. \\
&. \\
s_n &= x_1 + x_2 + ... + x_n
\end{aligned}$$

olan (s_n) dizisini göz önüne alalım. $((x_n), s_n)$ ikilisi seri olarak adlandırılır. (x_n) terimine serinin genel terimi ve (s_n) dizisine serinin kısmi toplamlar dizisi denir. Eğer kısmi toplamlar dizisi bir s sayısına yakınsıyorsa yani

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

oluyorsa $((x_n), s_n)$ serisi yakınsak ve serinin toplamı s sayısıdır denir. Yakınsak olmayan seriye ıraksaktır denir [1].

1.1.10. Tanım: $\sum_{k=1}^{\infty} |s_k|$ serisi yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} s_k$ serisine mutlak yakınsak seri denir [1].

1.1.11. Tanım: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k$ bilateral serisinin kısmi toplamlar dizisi olan $s_n = \sum_{k=-n}^{n} x_k$

$(n \to \infty)$ için bir s sayısına yakınsak ise $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k$ serisi yakınsaktır denir.

$$s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k = \sum_{k=-\infty}^{0} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

ile gösterilir [2, 3].

1.1.12. Tanım: X boş olmayan bir küme olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna X de bir metrik ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir. $\forall x, y, z \in X$ için,

M1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2. $d(x, y) = d(y, x)$

M3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ [1].

1.1.13. Tanım: $X = (X, d)$ bir metrik uzay ve (x_n), X de bir Cauchy dizisi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa X metrik uzayına tam uzay denir [1].

1.1.14. Tanım: G boş olmayan bir küme ve $\circ$, G üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan G kümesine $\circ$ işlemi altında bir değişmeli grup denir. $\forall x, y, z \in G$ için,

G1. $x \circ y \in G$

G2. $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

G3. $\forall x \in G$ için $x \circ e = x$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır.

G4. $\forall x \in G$ için $x \circ a = a \circ x = e$ olacak şekilde bir $a \in G$ vardır.

G5. $x + y = y + x$ [6].

1.1.15. Tanım: F boş olmayan bir küme olsun. $(F, +, \cdot)$ kümesi toplamaya göre değişmeli bir grup ve çarpma işlemine göre de sıfır elemanı hariç değişmeli bir grup ise F ye bir cisim denir [6].

1.1.16. Tanım: V boş olmayan bir küme ve F reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan V cümlesine F cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzay denir. $\forall\ \alpha, \beta \in F$ ve $\forall x, y, z \in V$ için,

V1. $x + y \in V$

V2. $(x + y) + z = x + (y + z)$

V3. $\forall x \in V$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in V$ vardır.

V4. $\forall x \in V$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in V$ vardır.

V5. $x+y=y+x$

V6. $\alpha x\in X$

V7. $\alpha\left(x+y\right)=\alpha x+\alpha y$

V8. $\left(\alpha+\beta\right)x=\alpha x+\beta x$

V9. $\alpha\left(\beta x\right)=\left(\alpha\beta\right)x$

V10. $\forall x\in V,\ \exists 1\in F$ öyle ki $1x=x$ (Buradaki 1, F nin birim elemanıdır.) [1].

1.1.17. Tanım: N, F cismi üzerinde bir vektör uzay olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\|\cdot\|:N\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna N de bir norm ve $(N,\|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x,y\in N$ ve $\alpha\in F$ için,

N1. $\|x\|=0\Leftrightarrow x=\theta$

N2. $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$

N3. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ [1].

1.1.18. Tanım: N normlu bir vektör bir uzay olsun. N norm metriğine göre tam ise N bir Banach uzayıdır denir [1].

1.1.19 Tanım: X bir Banach dizi uzayı olmak üzere $\forall x\in X$ için

$$\begin{aligned} P_k &: X\to\mathbb{C} \\ x &\to P_k\left(x\right)=x_k\quad (k=1,2,...)\end{aligned}$$

dönüşümü sürekli ise X uzayına bir BK-uzayı denir [7].

X ve Y iki Banach uzayı $T:X\to Y$ bir dönüşüm olsun. $\left(x_n\right)$, X de herhangi bir dizi ve $x\in X$ olmak üzere

$$x_n\to x\ \Rightarrow\ T\left(x_n\right)\to T\left(x\right)$$

ise koordinatsal süreklidir denir.

1.1.20. Tanım: X boş olmayan bir küme ve τ, X in elemanlarından oluşan alt cümlelerinin bir ailesi olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan τ ya X de bir topoloji ve (X,τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

T1. $X,\varnothing\in\tau$.

T2. τ ya ait elamanların herhangi sayıdaki birleşimi τ ya aittir.

T3. τ ya ait elemanların sonlu sayıdaki kesişimi τ ya aittir [1].

1.1.21. Tanım: $X=(X,\tau)$ ve $Y=(Y,\rho)$ iki topolojik uzay ve $f:X\to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer f dönüşümü birebir, örten, sürekli ve f^{-1} de sürekli ise f fonksiyonuna X den

Y ye bir homeomorfizm denir. Bu durumda X ve Y uzaylarına topolojik denk uzaylar denir. $X \simeq Y$ ile gösterilir [1].

1.1.22. Tanım: Vektör uzaylarda tanımlanmış olan dönüşümlere operatör denir [8].

1.1.23. Tanım: V ve V' aynı F cismi üzerinde tanımlanmış olan iki vektör uzay olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $T : V \to V'$ operatörüne lineer operatör denir. $\forall x, y \in V$ ve $\alpha \in F$ skaleri için,

L1. $T(x+y) = T(x) + T(y)$

L2. $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ [8].

1.1.24. Tanım: $N_1 = (N_1, \|\cdot\|_1)$, $N_2 = (N_2, \|\cdot\|_2)$ iki normlu uzay ve $T : N_1 \to N_2$ bir lineer dönüşüm olsun. T dönüşümü normu koruyorsa yani $\forall x \in N_1$ için $\|T(x)\|_2 = \|x\|_1$ oluyorsa T ye lineer izometri denir. Eğer T birebir ve örten bir lineer izometri ise T dönüşümüne lineer izomorfizm denir. Bu durumda N_1 ve N_2 normlu uzaylarına izomorfik uzaylar denir. N_1 ve N_2 uzayları izometrik olarak izomorf iseler N_1 ve N_2 uzayları denk uzaylardır denir. $N_1 \simeq N_2$ ile gösterilir [9].

1.1.25. Tanım: $N_1 = (N_1, \|\cdot\|_1)$, $N_2 = (N_2, \|\cdot\|_2)$ iki normlu uzay ve $T : N_1 \to N_2$ bir lineer operatör olsun. $\forall x \in N_1$ için $\|T(x)\|_2 \leq K\|x\|_1$ olacak şekilde bir $K \geq 0$ reel sayısı bulunabiliyorsa T ye sınırlı lineer operatör denir [8].

1.1.26. Tanım: V bir vektör uzay olmak üzere $F = \mathbb{R}$ veya $F = \mathbb{C}$ olsun.

$$f : V \to F$$

operatörüne fonksiyonel denir [8].

1.1.27. Tanım: V bir vektör uzay olsun. V üzerinde sınırlı lineer fonksiyonellerin cümlesi

$$\|f\| = \sup_{x \in X, x \neq \theta} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in X, \|x\|=1} |f(x)|$$

normu ile bir normlu uzaydır. Bu uzaya V nin sürekli dual uzayı denir. V^* ile gösterilir [8].

1.1.28. Tanım: X bir dizi uzayı olsun.

$$\begin{aligned}
X^{\alpha} &= \left\{ a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty, \ \forall x \in X \right\}, \\
X^{\beta} &= \left\{ a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k < \infty, \ \forall x \in X \right\}, \\
X^{\gamma} &= \left\{ a = (a_k) : \sup_{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right| < \infty, \ \forall x \in X \right\}
\end{aligned}$$

X^{α}, X^{β}, X^{γ} uzaylarına sırasıyla X in $\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$ duali denir [10].

1.1.29. Tanım: $B(X)$ bilateral dizilerin bir uzayı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} B^{\alpha}(X) &= \left\{ a=(a_k)_{-\infty}^{\infty} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k x_k| < \infty,\ \forall x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in B(X) \right\} \\ B^{\beta}(X) &= \left\{ a=(a_k)_{-\infty}^{\infty} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x_k < \infty,\ \forall x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in B(X) \right\} \\ B^{\gamma}(X) &= \left\{ a=(a_k)_{-\infty}^{\infty} : \sup \left| \sum_{k=-n}^{n} a_k x_k \right| < \infty,\ \forall x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in B(X) \right\} \end{aligned}$$

kümeleri sırasıyla $B(X)$ bilateral dizi uzayının $\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$ dualleridir [3, 10].

1.1.30. Teorem: Bir X Banach uzayının bir Y alt uzayının tam olması için gerek ve yeter şart Y nin X de kapalı olmasıdır [8].

1.1.31. Teorem: (X, d) bir metrik uzay $M \subset X$ ve $\overline{M}$, M nin kapanışını göstersin. $x \in \overline{M}$ olması için gerek ve yeter şart $x_n \to x$ olacak şekilde M de bir (x_n) dizisinin mevcut olmasıdır [8].

1.1.32. Tanım: X, Y boştan farklı iki küme ve $X, Y \subset \omega$ olsun. $A = (a_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ kompleks sayıların sonsuz bir matrisi olsun. Bir $x = (x_k) \in X$ dizisinin Ax dönüşüm dizisi $\forall n \in N$ için $A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ serisi yakınsak olmak üzere $Ax = (A_n(x)) \in Y$ dizisidir. A ya X den Y ye bir matris dönüşümü ve Ax ise x in A dönüşüm dizisidir denir. (X, Y) ile de X den Y ye bütün A matrislerinin sınıfını göstereceğiz [11].

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bütün dizilerin kümesi ω, bütün sınırlı dizilerin kümesi l_∞, bütün yakınsak dizilerin kümesi c, bütün sıfıra yakınsak dizilerin kümesi c_0 ile gösterilir. Bu kümelerin her biri ayrı ayrı birer vektör uzaydır. $X = l_\infty, c$ veya c_0 olmak üzere $\forall x \in X$ için

$$\|x\|_\infty = \sup |x_k|$$

normu ile bir Banach uzaydır. Bu dizi uzaylarının topolojik ve geometrik özellikleri birçok yazar tarafından incelenmiştir. Bu dizi uzayları toplanabilme çalışmalarında önemli bir yer tutmaktadır. Toplanabilme teorisinin önemli konularından biri sonsuz matrislerle yapılan dönüşümlerdir. Örneğin X, Y boştan farklı iki dizi uzayı ve $A = (a_{nk})_{n,k=1}^\infty$ kompleks sayıların sonsuz bir matrisi olmak üzere bir $x = (x_k) \in X$ dizisinin Ax dönüşüm dizisi $\forall n \in N$ için

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k < \infty$$

iken $Ax = (A_n(x)) \in Y$ dizisidir. A ya X den Y ye bir matris dönüşümü ve Ax ise x in A dönüşüm dizisidir denir. Birçok yazar tarafından yeni dizi uzayları oluşturulup bu dizi uzayların topolojik ve geometrik özellikleri incelenerek bilinen dizi uzaylarına matris dönüşümleri yapılmıştır.

Kızmaz 1981 yılında $X = l_\infty, c$ ve c_0 olmak üzere fark dizilerini fark dizilerini $\Delta x = x_k - x_{k+1}$ ile

$$X(\Delta) = \{x \in \omega : \Delta x \in X\}$$

şeklinde tanımladı. Bu dizi uzaylarının topolojik özelliklerini inceleyerek ve dual uzaylarını hesaplayarak matris dönüşümlerini karakterize etti [12]. Ahmad ve Mursaleen bu dizi uzaylarını $p = (p_n)$ pozitif reel sayıların bir dizisi olmak üzere $X(p, \Delta)$ şeklinde genelleştirdi [13]. Sarıgöl $X = l_\infty$ için $\Delta_r x = (k^r \Delta x_k)_{k=1}^\infty$ olmak üzere $X(\Delta_r)$ dizi uzayını $r < 1$ için tanımladı [14]. Mursaleen, Gaur ve Saifi $X = l_\infty$ için $X(p; \Delta_r)$ dizi uzayı üzerinde $r > 0$ için çalıştılar [15]. Choudhary ve Mishra $X = c_0$ için $X(\Delta_r)$ dizi uzayını $r \geq 1$ için tanımlayarak bir BK- uzayı olduğunu gösterdiler [16]. Gnanaseelan ve Srivastava $u = (u_k)$ sıfırdan farklı karmaşık sayıların dizisinin bazı koşulları sağlaması durumunda $X(u; \Delta)$ dizi uzayını tanımladılar [17]. Malkowsky bu dizi uzayını $u = (u_k)$ dizisi üzerinde herhangi bir koşul olmaksızın tanımlayarak bir BK- uzayı olduğunu gösterdi [18]. Choudhary ve Mishra'nın yaptığı tanımı genelleştiren Gaur ve Mursaleen $X = c_0$ olmak üzere $X(p; \Delta_r)$ dizi uzaylarını $r \geq 1$ için tanımlayarak, $\alpha-$ ve $\beta-$ duallerini bulup bazı matris dönüşümlerini incelediler [19]. Et $X = l_\infty, c$ ve c_0 için ikinci mertebeden fark dizi uzaylarını tanımlayarak, bir Banach uzayı olduğunu gösterdi [20]. Et ve Çolak $X = l_\infty, c$ ve c_0 için m. mertebeden fark dizi uzaylarını tanımladılar [21]. Ayrıca Gaur ve Mursaleen [22] de modülüs; Mursaleen, Khan ve Qamaruddin [23] de Orlicz fonksiyonları yardımıyla yeni fark dizi uzayları tanımladılar. Orhan C_p ve C_∞ olacak şekilde bazı Cesaro fark dizi uzaylarını tanımladı [24]. Başarır $C(p)$ dizi uzayını tanımladı [25]. Et m.mertebeden genelleştirilmiş Cesaro fark dizilerini $C_p(\Delta^m)$ ve $C_\infty(\Delta^m)$ olacak şekilde tanımladı [26]. Altay ve Başar bazı Euler fark dizilerini e_0^r, e_c^r ve e_∞^r şeklinde tanımladılar [27]. Polat ve Başar m. mertebeden genelleştirilmiş Euler fark dizilerini $e_0^r(\Delta^m)$, $e_c^r(\Delta^m)$ ve $e_\infty^r(\Delta^m)$ şeklinde tanımladılar [28].

Bilateral diziler ile ilgili çalışmalar Laurent serileri, Fourier serileri ve fonksiyonların hipergeometrik serilerle gösterimi ile ilgili alanlarda yoğunlaşmıştır. Saavedra ve Rodriguez karmaşık terimli $l^2(\mathbb{Z})$ bilateral dizisinde hiper-devirli bilateral öteleme operatörü üzerinde çalıştı [29]. Menet $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $l^p(\mathbb{Z})$ ve $c_0(\mathbb{Z})$ bilateral dizi uzayları için genelleştirdi [30]. Shakrin $l_\infty(\mathbb{Z})$, $1 \leq p < \infty$ için $l^p(\mathbb{Z})$ ve $c_0(\mathbb{Z})$ bilateral dizi uzaylarını ağırlıklı bilateral öteleme operatörü için bazı sonuçlar elde etmek için kullandı [31, 32]. Simon ve Marko $l_\infty(\mathbb{Z}^n, X)$, $l_p(\mathbb{Z}^n, X)$ ve $c_0(\mathbb{Z}^n, X)$ $X-$değerli Banach bilateral dizi uzaylarını çeşitli tipteki operatörlerin karakterizasyonlarını bulmak için kullandı [33]. Agrawal ve Srivastava $l\left(\mathbb{Z}, X, \overline{\lambda}, \overline{p}\right)$ bilateral dizi uzayını tanımladı [2]. Yine Agrawal ve Srivastava $c\left(\mathbb{Z}, X, \overline{\lambda}, \overline{p}\right)$ ve $c_0\left(\mathbb{Z}, X, \overline{\lambda}, \overline{p}\right)$ bilateral dizilerin uzaylarını tanımlayıp sürekli duallerini buldular [3, 34].

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu çalışma için dizi uzayları, fark dizi uzayları, dualler, matris dönüşümleri ve bilateral diziler hakkında temel kavramlar araştırıldı. Araştırılan bu konular hakkında literatür taraması yapılarak gerekli kitap, makale ve tez çalışmaları incelendi. Çalışmanın ana materyalini Kızmaz [12] tarafından 1981 yılında yayınlanan ve bazı fark dizi uzaylarını tanımlayan "On Certain Sequence Spaces" adlı makale oluşturmaktadır. Bunun yanında bir önceki bölümde verilen fark dizi uzayları ile ilgili bazı çalışmalarında konuya önemli katkıları olmuştur. Ayrıca Agrawal ve Srivastava $[2, 3, 34]$ de bazı bilateral dizi uzaylarını tanımladılar. Bu ise bize bilateral diziler ve fark dizi uzayları arasında bir ilişkinin olabileceğini gösterip çalışmanın ana konusunu oluşturdu. Çalışmada bulunan bulgular detaylı ve anlaşılır bir şekilde ispat edildi.

4. BULGULAR

Bu bölümde ilk olarak Kızmaz [12] tarafından tanımlanan sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak dizilerin fark dizi uzayları incelendi. Elde edilen sürekli, $\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$ dualleri verilerek karakterize edilen matris dönüşümleri verildi. Daha sonra bilateral dizi uzaylarının fark dizi uzayları tanımlandı. Bu fark dizi uzaylarının dualleri hesaplanarak matris dönüşümleri karakterize edildi.

4.1. Fark Dizi Uzayları

4.1.1. Tanım: l_∞, c ve c_0 sırasıyla sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak kompleks terimli dizi uzayları olmak üzere

$$\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$$

normu ile normlu lineer uzaylardır [1].

Kızmaz [12] de $\Delta x = \Delta(x_k) = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} l_\infty(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in l_\infty\} \\ c(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c\} \\ c_0(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\} \end{aligned}$$

fark dizi uzaylarını tanımladı. Bu uzayların

$$\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile Banach uzayı olduğunu gösterdi.

4.1.2. Teorem: $(l_\infty(\Delta),\ \|\cdot\|_\Delta)$ bir Banach uzayıdır [12].

İspat: $l_\infty(\Delta)$ bir lineer uzaydır.

i. $\forall x, y \in l_\infty(\Delta)$ alalım. Böylece $\Delta x,\ \Delta y \in l_\infty$ ve

$$\begin{aligned} \Delta(x+y) &= ((x_k + y_k) - (x_{k+1} + y_{k+1})) \\ &= (x_k - x_{k+1}) + (y_k - y_{k+1}) \\ &= \Delta x + \Delta y \end{aligned}$$

elde edilir. l_∞ lineer uzay olduğundan $\Delta x + \Delta y \in l_\infty$ olur. Böylece $\Delta(x+y) \in l_\infty$ bulunur. O halde $x + y \in l_\infty(\Delta)$ elde edilir.

ii. $\forall x \in l_\infty(\Delta)$ ve herhangi bir λ skaleri için

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda x) &= (\lambda x_k - \lambda x_{k+1}) \\ &= \lambda(x_k - x_{k+1}) \\ &= \lambda(\Delta x)\end{aligned}$$

olur. l_∞ lineer olduğundan $\lambda(\Delta x) \in l_\infty$ olur. Böylece $\Delta(\lambda x) \in l_\infty$ bulunur. O halde $\lambda x \in l_\infty(\Delta)$ elde edilir. Böylece $l_\infty(\Delta)$ bir lineer uzaydır.

$(l_\infty(\Delta),\ \|\cdot\|_\Delta)$ bir normlu uzaydır.

$$\begin{aligned}\|\cdot\|_\Delta &: l_\infty(\Delta) \to \mathbb{R} \\ \|x\|_\Delta &= |x_1| + \|\Delta x\|_\infty\end{aligned}$$

N1. $\forall x \in l_\infty(\Delta)$ için $\|x\|_\Delta = 0 \Leftrightarrow |x_1| = 0$ ve $\|\Delta x\|_\infty = 0$ olur.

$$\|\Delta x\|_\infty = \sup_k |x_k - x_{k+1}| = 0$$

olması ancak

$$|x_k - x_{k+1}| = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

olması ile mümkündür.

$$|x_1| = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}|x_1 - x_2| &= 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0,\ x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ |x_2 - x_3| &= 0 \Leftrightarrow x_2 - x_3 = 0,\ x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \\ &. \\ &. \\ &. \\ |x_k - x_{k+1}| &= 0 \Leftrightarrow x_{k-}x_{k+1} = 0,\ x_k = 0 \Rightarrow x_{k+1} = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $x = (x_k) = (0, 0, 0, ...0, ...) = \theta$ bulunur.

N2. λ herhangi bir skaler olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|_{\Delta} &= |\lambda x_1| + \|\Delta(\lambda x)\|_{\infty} \\
&= |\lambda|\,|x_1| + \sup_k |\lambda x_k - \lambda x_{k+1}| \\
&= |\lambda| \left(|x_1| + \sup_k |x_k - x_{k+1}| \right) \\
&= |\lambda|\,\|x\|_{\Delta}
\end{aligned}$$

elde edilir.

N3. $\forall x, y \in l_{\infty}(\Delta)$ için

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_{\Delta} &= |x_1 + y_1| + \|\Delta(x+y)\|_{\infty} \\
&= |x_1 + y_1| + \sup_k |(x_k + y_k) - (x_{k+1} + y_{k+1})| \\
&\leq |x_1| + \sup_k |x_k - x_{k+1}| + |y_1| + \sup_k |y_k - y_{k+1}| \\
&= \|x\|_{\Delta} + \|y\|_{\Delta}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(l_{\infty}(\Delta), \|\cdot\|_{\Delta})$ bir normlu uzaydır.

$l_{\infty}(\Delta)$ tamdır. $(x^n) = (x_k^n) = (x_1^n, x_2^n, ...)$ olacak şekilde $l_{\infty}(\Delta)$ de bir Cauchy dizisi alalım. O halde $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall n, m \geq N(\varepsilon)$ için $\|x_k^n - x_k^m\|_{\Delta} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. Yani

$$\|x_k^n - x_k^m\|_{\Delta} = |x_1^n - x_1^m| + \|\Delta x_k^n - \Delta x_k^m\|_{\infty} \to 0 \quad (\forall k \in \mathbb{N} \text{ ve } n, m \to \infty)$$

elde edilir. Buradan

$$|x_k^n - x_k^m| \to 0 \quad (\forall k \in \mathbb{N} \text{ ve } n, m \to \infty)$$

bulunur. Böylece $(x_k^n) = (x_1^n, x_2^n, ...)$ dizisi $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisi olur. $\mathbb{C}$ nin tamlığından $\forall (x_k^n) \in \mathbb{C}$ için

$$\lim_{n\to\infty} x_k^n = x_k \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

olacak şekilde bir $x_k \in \mathbb{C}$ vardır. Ayrıca $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki

$$|x_1^n - x_1^m| < \varepsilon, \quad \left|x_{k+1}^n - x_{k+1}^m - (x_k^n - x_k^m)\right| < \varepsilon \quad (\forall n, m \geq N(\varepsilon),\ \forall k \in \mathbb{N})$$

olur. $\forall n \geq N(\varepsilon)$ için

$$\begin{aligned}
\lim_m |x_1^n - x_1^m| &= |x_1^n - x_1| \leq \varepsilon \\
\lim_m \left|x_k^n - x_k^m - \left(x_{k+1}^n - x_{k+1}^m\right)\right| &= \left|x_k^n - x_k - \left(x_{k+1}^n - x_{k+1}\right)\right| \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada ε, k ya bağlı olmadığından

$$\sup_k \left|x_k^n - x_k - \left(x_{k+1}^n - x_{k+1}\right)\right| \leq \varepsilon$$

bulunur. Sonuç olarak $\forall n \geq N(\varepsilon)$ için $\|x^n - x\|_\Delta \leq 2\varepsilon$ olur. Buradan da

$$\|x_k^n - x_k\|_\Delta \to 0 \quad (n \to \infty)$$

elde edilir.

Şimdi $x \in l_\infty$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} |x_k - x_{k+1}| &= \left|x_k - x_k^{N(\varepsilon)} + x_k^{N(\varepsilon)} - x_{k+1}^{N(\varepsilon)} + x_{k+1}^{N(\varepsilon)} - x_{k+1}\right| \\ &\leq \left|x_k^{N(\varepsilon)} - x_{k+1}^{N(\varepsilon)}\right| + \|x_k^{N(\varepsilon)} - x_k\|_\Delta \\ &= O(1) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $x = (x_k) \in l_\infty(\Delta)$ olur.

4.1.3. Teorem: $l_\infty(\Delta)$ bir $BK-$uzayıdır [12].

İspat: $l_\infty(\Delta)$ bir Banach uzayı ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\|x^n - x\|_\Delta \to 0$ iken $|x_k^n - x_k| \to 0$ $(n \to \infty)$ olduğundan $l_\infty(\Delta)$ sürekli koordinatlara sahiptir.

4.1.4. Teorem: Aşağıdaki şekilde tanımlanan s operatörü bir sınırlı lineer operatördür [12].

$$\begin{aligned} s &: l_\infty(\Delta) \to l_\infty(\Delta) \\ x &\to sx = t = (0, x_2, x_3, ...) \end{aligned}$$

İspat: $\forall x, y \in l_\infty(\Delta)$ ve λ herhangi bir skaler olmak üzere

i. $s(x+y) = (0, x_2 + y_2, x_3 + y_3, ...) = (0, x_2, x_3, ...) + (0, y_2, y_3, ...) = s(x) + s(y)$

ii. $s(\lambda x) = (0, \lambda x_2, \lambda x_3, ...) = \lambda(0, x_2, x_3, ...) = \lambda s(x)$ olduğundan s lineerdir. Ayrıca $x = (x_k) \in l_\infty(\Delta)$ için

$$\begin{aligned} \|s(x_k)\|_\Delta &= |t_1| + \|\Delta(t_k)\|_\infty \\ &= 0 + \sup_{k \in \mathbb{Z}} \{|\Delta t_1|, |\Delta t_2|, |\Delta t_3|, ...\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|x\|_\Delta &= |x_1| + \|\Delta(x_k)\|_\infty \\ &= |x_1| + \sup_{k \in \mathbb{Z}} \{|\Delta x_1|, |\Delta x_2|, |\Delta x_3|, ...\} \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\|s(x_k)\|_{\Delta} \leq K \|x_k\|_{\Delta}$$

olacak şekilde bir $K > 0$ vardır. Böylece s bir sınırlı lineer operatördür.

Şimdi de $s[l_{\infty}(\Delta)]$ kümesini tanımlayalım.

$$s[l_{\infty}(\Delta)] = sl_{\infty}(\Delta) = \{x = (x_k) : x \in l_{\infty}(\Delta),\ x_1 = 0\} \subset l_{\infty}(\Delta)$$

dir. Burada $s[l_{\infty}(\Delta)]$, $l_{\infty}(\Delta)$ ın bir alt uzayı olduğundan $s[l_{\infty}(\Delta)]$ lineer uzayı

$$\begin{aligned} \|x\|_{\Delta} &= |x_1| + \|\Delta x\|_{\infty} \\ &= \|\Delta x\|_{\infty} \end{aligned}$$

ile bir normlu uzaydır..

4.1.5. Teorem: Aşağıdaki şekilde tanımlanan Δ operatörü bir lineer homeomorfizmdir [12].

$$\begin{aligned} \Delta &: sl_{\infty}(\Delta) \to l_{\infty} \\ x &= (x_k) \to \Delta x = y = (x_k - x_{k+1}) \end{aligned}$$

İspat: i. Δ lineerdir. $\forall x, z \in sl_{\infty}(\Delta)$ ve λ bir skaler olmak üzere.

$$\Delta(x + z) = \Delta x + \Delta z \text{ ve } \Delta(\lambda x) = \lambda \Delta x$$

olduğundan Δ lineerdir.

ii. Δ birebirdir. $x, z \in sl_{\infty}(\Delta)$ alalım. $\Delta(x) = \Delta(z)$ ise $\Delta(x - z) = 0$ bulunur. Bu halde

$$\Delta(x - z) = (x_k - z_k) - (x_{k+1} - z_{k+1}) = 0$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} x_1 - z_1 - (x_2 - z_2) &= 0,\ x_1 = z_1 = 0 \Rightarrow x_2 = z_2 \\ x_2 - z_2 - (x_3 - z_3) &= 0,\ x_2 = z_2 \Rightarrow x_3 = z_3 \\ &. \\ &. \\ &. \\ x_k &= z_k,\ \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

bulunur. O halde $x = z$ elde edilir. Böylece Δ birebirdir.

iii. Δ örtendir. $\forall y \in l_\infty$ için $y_k = \Delta(x_k)$ olacak şekilde en az bir $x \in sl_\infty(\Delta)$ vardır. Gerçekten

$$x = \begin{cases} 0, \ k = 1 \\ -\sum_{v=1}^{k} y_{v-1}, \ k > 1 \end{cases}$$

olarak seçilirse $y_k = \Delta(x_k)$ elde edilir. Böylece Δ örtendir.

iv. Δ sınırlıdır. $\forall x \in sl_\infty(\Delta)$ için

$$\|\Delta\| = \sup\left\{\frac{\|\Delta(x)\|_\infty}{\|x\|_\Delta} : x \neq \theta, \ x \in sl_\infty(\Delta)\right\} = 1$$

olur. Böylece $\|\Delta(x)\|_\infty \leq \|\Delta\|\|x\|_\Delta$, $\|\Delta\| = 1$ olduğundan sağlanır. Böylece Δ sınırlıdır.

v. Δ^{-1} sınırlıdır.

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} &: \ l_\infty \to sl_\infty(\Delta) \\ x &\to \ \Delta^{-1}(x_k) = y_k \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. O halde $\forall x \in l_\infty$ için

$$\|\Delta^{-1}\| = \sup\left\{\frac{\|\Delta^{-1}(x)\|_\Delta}{\|x\|_\infty} : x \neq \theta, \ x \in l_\infty\right\} = 1$$

olur. Böylece $\|\Delta^{-1}(x)\|_\Delta \leq \|\Delta^{-1}\|\|x\|_\infty$, $\|\Delta^{-1}\| = 1$ olduğundan sağlanır. Böylece Δ^{-1} sınırlıdır.

Bu halde Δ bir lineer homeomorfizmdir. Buradan $sl_\infty(\Delta)$ ve l_∞ uzayları denk topolojik uzaylardır.

Ayrıca

$$\begin{aligned} \Delta &: \ sl_\infty(\Delta) \to l_\infty \\ x &\to \ \Delta x \\ \|x\|_\Delta &= \ \|\Delta x\|_\infty \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} &: \ l_\infty \to sl_\infty(\Delta) \\ x &\to \ \Delta^{-1}(x) \\ \|x\|_\infty &= \ \|\Delta^{-1}(x)\|_\Delta \end{aligned}$$

olduğundan Δ ve Δ^{-1} operatörleri normu koruyan dönüşümlerdir.

4.1.6. Teorem: l_∞^* ve $[sl_\infty(\Delta)]^*$ sırasıyla l_∞ ve $sl_\infty(\Delta)$ uzaylarının sürekli duallerini göstersin. Bu takdirde

$$\begin{aligned} T &: [sl_\infty(\Delta)]^* \to l_\infty^* \\ f_\Delta &\to T(f_\Delta) = f_\Delta \circ \Delta^{-1} = f \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan T dönüşümü bir lineer izometridir [12].

İspat: i. T lineerdir. $\forall f_\Delta,\, g_\Delta \in [sl_\infty(\Delta)]^*$ ve λ bir skaler olmak üzere

$$\begin{aligned} T(f_\Delta + g_\Delta) &= (f_\Delta + g_\Delta) \circ \Delta^{-1} \\ &= f_\Delta \circ \Delta^{-1} + g_\Delta \circ \Delta^{-1} \\ &= T(f_\Delta) + T(g_\Delta) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T(\lambda f_\Delta) &= (\lambda f_\Delta) \circ \Delta^{-1} \\ &= \lambda(f_\Delta \circ \Delta^{-1}) \\ &= \lambda T(f_\Delta) \end{aligned}$$

olduğundan T lineerdir.

ii. T normu korur. $F = \mathbb{R}$ veya $F = \mathbb{C}$ olsun.

$$\begin{aligned} [sl_\infty(\Delta)]^* &= \{f_\Delta \mid \ f_\Delta : sl_\infty(\Delta) \to F,\ f_\Delta \text{ lineer ve sınırlı}\} \\ \|f_\Delta\| &= \sup\{\|f_\Delta(x)\| : \|x\|_\Delta = 1\} \\ &= \sup\{|f_\Delta(x)| : \|x\|_\Delta = 1\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} l_\infty^* &= \{T(f_\Delta) \mid T(f_\Delta) : l_\infty \to F,\ T(f_\Delta) \ \text{ lineer ve sınırlı}\}\, 4.1 && (1) \\ \|T(f_\Delta)\| &= \sup\{\|T(f_\Delta(x))\| : \|x\|_\infty = 1\} \\ &= \sup\{|T(f_\Delta(x))| : \|x\|_\infty = 1\} \\ &= \sup\left\{\left|f_\Delta \circ \Delta^{-1}(x)\right| : \|x\|_\infty = 1\right\} \\ &= \sup\{\left|f_\Delta\left(\Delta^{-1}(x)\right)\right| : \|x\|_\infty = 1\} && (2) \end{aligned}$$

elde edilir. $\Delta^{-1} : l_\infty \to sl_\infty(\Delta)$ olduğundan $x \in l_\infty$ için $\Delta^{-1}x = y \in sl_\infty(\Delta)$ olacaktır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|y\|_\Delta &= \|\Delta^{-1}(x)\|_\Delta \\ &= \|\Delta\left(\Delta^{-1}(x)\right)\|_\infty \\ &= \|x\|_\infty = 1 \end{aligned}$$

olur. Bu ifade (1) de yerine yazılırsa

$$\|T(f_\Delta)\| = \sup\{|f_\Delta(y)| : \|y\|_\Delta = 1\} = \|f_\Delta\|$$

elde edilir. Böylece T normu korur.

iii. T birebirdir. $\forall f_\Delta, g_\Delta \in [sl_\infty(\Delta)]^*$ olmak üzere $T(f_\Delta) = T(g_\Delta)$ olsun. O halde

$$f_\Delta \circ \Delta^{-1} = g_\Delta \circ \Delta^{-1}$$

olur. Buradan $f_\Delta = g_\Delta$ elde edilir. Böylece T birebirdir.

iv. T örtendir. $\forall f \in l_\infty^*$ için $T(f_\Delta) = f = f_\Delta \circ \Delta^{-1}$ olacak şekilde en az bir $f_\Delta \in [sl_\infty(\Delta)]^*$ vardır. Gerçekten

$$\begin{aligned} T(f_\Delta) &= T(f \circ \Delta) \\ &= (f \circ \Delta) \circ \Delta^{-1} \\ &= f \circ \left(\Delta \circ \Delta^{-1}\right) = f \end{aligned}$$

olur. Böylece T örtendir. Buradan T bir lineer izomorfizmdir.

Böylece $[sl_\infty(\Delta)]^*$ ile l_∞^* denk topolojik uzaylardır denir. Benzer yolla $sc(\Delta)$ ile c ve $sc_0(\Delta)$ ile c_0 uzaylarınında topolojik olarak denk olduğu gösterilebilir. Yine buradan

$$[sc(\Delta)]^* \simeq [sc_0(\Delta)]^* \simeq l_1$$

elde edilir.

4.2. Fark Dizi Uzaylarının $\alpha-$, $\beta-$, $\gamma-$ Dualleri

4.2.1. Lemma: $\sup_k |x_k - x_{k+1}| < \infty$ olması için gerek ve yeter şart

i. $\sup_k k^{-1}|x_k| < \infty$,

ii. $\sup_k \left|x_k - k\,(k+1)^{-1}\,(x_{k+1})\right| < \infty$

olmasıdır [12].

İspat: $(\Rightarrow)$ $\sup_k |x_k - x_{k+1}| < \infty$ olsun.

$$\begin{aligned} |x_k| &= |x_k - x_{k+1} + x_{k+1} - x_1 + x_1| \\ &\leq |x_k - x_{k+1}| + |x_{k+1} - x_1| + |x_1| \\ &= |x_k - x_{k+1}| + |x_1 - x_{k+1}| + |x_1| \end{aligned} \tag{3}$$

(2) eşitsizliğinde $|x_1 - x_{k+1}|$ ifadesi için

$$\begin{aligned} |x_1 - x_{k+1}| &= |x_1 - x_2 + x_2 + x_3 - x_3 + ... - x_k + x_k - x_{k+1}| \\ &\leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + ... + |x_k - x_{k+1}| \\ &\leq k \cdot \sup_k |x_k - x_{k+1}| = O\,(k) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (2) eşitsizliği için t bir sabit olmak üzere

$$|x_k| \leq O\,(k) + t$$

bulunur. Buradan

$$\sup_k |x_k|\, k^{-1} < \infty$$

elde edilir. Böylece (i) sağlanır.

$$\begin{aligned} \left|x_k - k(k+1)^{-1}(x_{k+1})\right| &= \left|k(k+1)^{-1}(x_k - x_{k+1}) + (k+1)^{-1}\,(x_k)\right| \\ &\leq \left|k(k+1)^{-1}(x_k - x_{k+1})\right| + \left|(k+1)^{-1}\,(x_k)\right| \\ &= \frac{k}{k+1}\,|x_k - x_{k+1}| + \frac{1}{k+1}\,|x_k|\,, \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \end{aligned} \tag{4}$$

$\frac{k}{k+1} < 1$ $(\forall k \in \mathbb{N})$, kabulümüzden $\sup_k |x_k - x_{k+1}| < \infty$ ve (i) den $\sup_k k^{-1}\,|x_k| < \infty$ olduğundan (3) eşitsizliğinde supremum alınırsa

$$\begin{aligned} \sup_k \left|x_k - k(k+1)^{-1}(x_{k+1})\right| &\leq \sup_k \left(\frac{k}{k+1}\,|x_k - x_{k+1}|\right) + \sup_k \left(\frac{1}{k+1}\,|x_k|\right) \\ &= O(1) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\sup_k \left|x_k - k(k+1)^{-1}(x_{k+1})\right| < \infty$$

elde edilir. Böylece (ii) sağlanır.

($\Leftarrow$) (i) ve (ii) sağlansın.

$$\begin{aligned}
\infty &> \left|x_k - k(k+1)^{-1}(x_{k+1})\right| = \left|-x_k + k(k+1)^{-1}(x_{k+1})\right| \\
&= \left|k(k+1)^{-1}(x_{k+1}-x_k) - (k+1)^{-1}(x_k)\right| \\
&\geq \left|k(k+1)^{-1}(x_{k+1}-x_k)\right| - \left|(k+1)^{-1}(x_k)\right| \\
&= \frac{k}{k+1}\left|x_{k+1}-x_k\right| - \frac{1}{k+1}\left|x_k\right| \\
&= \frac{k}{k+1}\left|x_k-x_{k+1}\right| - \frac{1}{k+1}\left|x_k\right|
\end{aligned}$$

olur. Buradan $|x_k - x_{k+1}| < \infty,\ \forall k \in \mathbb{N}$. Böylece $\sup_k |x_k - x_{k+1}| < \infty$ elde edilir.

(Pn) pozitif sayıların monoton artan bir dizisi olmak üzere:

4.2.2. Lemma: $\sup_n |\sum_{k=1}^{n} c_k| < \infty$ ise $\sup_n \left(p_n \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{n+k+1}}{P_{n+k}}\right|\right) < \infty$ olur [12].

İspat: Abel kısmi toplamlar formülünden

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{n+k+1}}{P_{n+k}} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{v=1}^{k} c_{n+v-1}\right)\left(\frac{1}{P_{n+k}} - \frac{1}{P_{n+k+1}}\right)$$

ve

$$P_n\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{n+k-1}}{P_{n+k}}\right| = O(1)$$

elde edilir.

4.2.3. Lemma: $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ serisi yakınsak ise $\lim_n \left(P_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{n+k-1}}{P_{n+k}}\right) = 0$ olur.

İspat: $\forall k \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{v=1}^{k} c_{n+v-1}\right| = \left|\sum_{v=n}^{n+k-1} c_v\right| = o(1)$ olduğundan ve 4.2.2. Lemma kullanılarak

$$P_n\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{n+k-1}}{P_{n+k}}\right| = o(1)$$

elde edilir.

4.2.4. Sonuç: (P_n) yukarıdaki gibi tanımlansın [12].

(**a**) $\sup_n |\sum_{v=1}^{n} P_v a_v| < \infty$ ise $\sup_n \left|P_n \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| < \infty$ olur.

4.2.2. Lemmada c_k yerine $P_{k+1}a_{k+1}$ yazarsak

$$P_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{n+k-1}}{P_{n+k}} = P_n \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = O(1)$$

elde edilir.

(**b**) $\sum_{k=1}^{\infty} P_k a_k$ yakınsak ise $\lim_n P_n \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0$ olur.

4.2.3. Lemma da c_k yerine $P_{k+1}a_{k+1}$ yazarsak istenilen elde edilir.

(**c**) $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k$ yakınsaktır ancak ve ancak $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ olmak üzere $nR_n = o(1)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} R_k$ yakınsaktır.

4.2.4. Sonuç (b) de $P_n = n$ yazılır ve Abel kısmi toplamlar formülü kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^{n} ka_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} R_k - nR_{n+1}$$

elde edilir.

4.2.5. Teorem: $R_k = \sum_{v=k+1}^{\infty} a_v$ olmak üzere

(**1**) $(sl_\infty(\Delta))^\alpha = \{a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} k\,|a_k| < \infty\} = D_1$

(**2**) $(sc(\Delta))^\beta = \{a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} ka_k$ yakınsaktır, $\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| < \infty\} = D_2$

(**3**) $(sc_0(\Delta))^\gamma = \{a = (a_k) : \sup_n |\sum_{k=1}^{n} ka_k| < \infty,\ \sum_{k=1}^{\infty} |R_k| < \infty\ \} = D_3$

olur [12].

İspat: (**1**) $a \in D_1$ olsun. Herhangi bir $x \in sl_\infty(\Delta)$ alalım.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| a_k x_k \frac{k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} k\,|a_k| \left(\frac{|x_k|}{k} \right)$$

olur. $x \in sl_\infty(\Delta)$ olduğundan 4.2.1. Lemmadan $\sup_k k^{-1}|x_k| < \infty$ bulunur. Ayrıca $a \in D_1$ kabulünden $\sum_{k=1}^{\infty} k\,|a_k| < \infty$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| = \sum_{k=1} k\,|a_k| \left(\frac{|x_k|}{k} \right) < \infty$$

elde edilir. Böylece $a \in (sl_\infty(\Delta))^\alpha$ olur.

$a \in (sl_\infty(\Delta))^\alpha$ olsun. O halde $\forall x \in sl_\infty(\Delta)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty$ olur. Özel olarak

$$x = (x_k) = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ k, & k \geq 2 \end{cases}$$

olarak seçilirse

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,|a_k| = |a_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty$$

elde edilir. Böylece $a \in D_1$ olur. O halde $D_1 = (sl_\infty(\Delta))^\alpha$ elde edilir.

(**2**) $a \in D_2$ olsun. Herhangi bir $x \in sl_\infty(\Delta)$ alalım. $\Delta : sl_\infty(\Delta) \to l_\infty$ dönüşümünden $\Delta x_k = y_k$ olacak şekilde tek bir $y \in l_\infty$ vardır. Buradan

$$x_k = -\sum_{v=1}^{k} y_{v-1},\ y_0 = 0$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k x_k &= -\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{v=1}^{k} y_{v-1} \right) \\ &= -\sum_{k=1}^{n-1} R_k y_k + R_n \sum_{k=1}^{n-1} y_k \end{aligned} \tag{5}$$

elde edilir. $a \in D_2$ kabulünden ve 4.2.4. Sonuç (c) den $\sum_{k=1}^{\infty} R_k y_k$ mutlak yakınsak ve $R_n \sum_{k=1}^{n-1} y_k \to 0$ $(n \to \infty)$ olur. O halde $\forall x \in sl_\infty(\Delta)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ yakınsaktır. Böylece $a \in (sl_\infty(\Delta))^\beta$ elde edilir.

$a \in (sl_\infty(\Delta))^\beta$ olsun. O halde $\forall x \in sl_\infty(\Delta)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ yakınsaktır. Özel olarak

$$x_k = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ k, & k \geq 2 \end{cases}$$

seçilirse buradan

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k = a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k < \infty$$

bulunur. 4.2.4. Sonuç (c) ve (4) eşitsizliği kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = -\sum_{k=1}^{\infty} R_k y_k < \infty$$

$(\forall y \in l_\infty)$ elde edilir. Böylece $\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| < \infty$ ve $a \in D_2$ olur. O halde $D_2 = (sl_\infty(\Delta))^\beta$ olur.

(**3**) İspat yukarıdaki ispatla benzer şekilde yapılır.

4.2.6. Sonuç: $\eta = \alpha,\ \beta,\ \gamma$ için $(sl_\infty(\Delta))^\eta = (sc(\Delta))^\eta$ olur [12].

4.2.7. Sonuç: E; $l_\infty(\Delta),\ c(\Delta),\ c_0(\Delta)$ dizi uzaylarından biri olmak üzere

$$(sE)^\eta = E^\eta,\ \eta = \alpha,\ \beta,\ \gamma$$

olur [12].

4.3. Fark Dizi Uzaylarının Matris Dönüşümleri

4.3.1. Teorem: $A \in (l_\infty(\Delta), c)$ olması için gerek ve yeter şart $A_n(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_{nk}$ ve $R = (r_{nk}) = \sum_{v=k+1}^{\infty} a_{nv}$ olmak üzere

i. $(a_{nl}) \in c$ $(1 \leq l \leq m,\ m \in \mathbb{Z}^+)$,

ii. $A_n(k) \in c$,

iii. $R \in (l_\infty, c)$ olmasıdır [12].

İspat: $(\Rightarrow)$ $A \in (l_\infty(\Delta), c)$ olsun. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ yakınsak ve $\forall x \in l_\infty(\Delta)$ için $A_n(x) \in c$ olur. $x = (x_k) = (0, 0, , .., 0, 1\,(l.yer), 0, 0, ...)$ alınırsa

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k = a_{nl} \in c$$

ve $x = (x_k) = (k)$ alınırsa

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_{nk} = A_n(k) \in c$$

elde edilir.

Şimdi $x \in sl_\infty(\Delta) \subset l_\infty(\Delta)$ alalım. Bu halde $\Delta x = y \in l_\infty$ ve $y_0 = 0$ için $x_k = -\sum_{r=1}^{k} y_{r-1}$ olmak üzere

$$A_n(m,x) = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k = -\sum_{k=1}^{m-1} r_{nk} y_k + r_{nm} \sum_{k=1}^{m-1} y_k$$

elde edilir. $\sum_{k=1}^{\infty} k a_{nk} < \infty$ olmasından ve 4.2.4. Sonuç (c) den

$$\lim_m A_n(m,x) = A_n(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} r_{nk} y_k$$

elde edilir. O halde $\forall y \in l_\infty$ için $R \in (l_\infty, c)$ bulunur.

$(\Leftarrow)$ (i), (ii), (iii) sağlansın. Herhangi bir $x \in l_\infty(\Delta)$ alalım. $A = (a_{nk})$ olmak üzere

$$x = \begin{cases} x_1, & k = 1 \\ x'_k, & k > 1 \end{cases} \qquad x' = (x'_k) \in sl_\infty(\Delta)$$

alınırsa

$$A_n(m,x) = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k = a_{n1} x_1 - \sum_{k=1}^{m-1} r_{nk} y_k + r_{nm} \sum_{k=1}^{m-1} y_k$$

elde edilir. 4.2.4. Sonuç (c), (i), (ii), (iii) kullanılarak

$$A_n(x) = a_{n1} x_1 - \sum_{k=1}^{\infty} r_{nk} y_k$$

olur. Buradan $\forall x \in l_\infty(\Delta)$ için $A_n(x)$ mevcut olup $A \in (l_\infty(\Delta), c)$ bulunur.

4.3.2. Teorem: $A \in (l_\infty, c(\Delta))$ olması için gerek ve yeter şart $B = (b_{nk}) = (a_{nk} - a_{n+1,k})$ olmak üzere

i. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$,

ii. $B \in (l_\infty, c)$ olmasıdır [12].

İspat: $(\Rightarrow)$ $A = (a_{nk}) \in (l_\infty, c(\Delta))$ olsun. O halde $\forall x \in l_\infty$ için $A_n(x) \in c(\Delta)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ yakınsak olur. Bu nedenle $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k < \infty$$

olur. Şimdi sabit bir n için

$$x_k = sgn a_{nk} = \begin{cases} 1, & a_{nk} > 0 \\ 0, & a_{nk} = 0 \\ -1, & a_{nk} < 0 \end{cases}$$

seçilirse $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k=\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|<\infty$$

elde edilir. Ayrıca $\forall x\in l_\infty$ için $A_n(x)\in c(\Delta)$ olmasından

$$\lim_{n\to\infty}A_n\left(x\right)-A_{n+1}\left(x\right)=t\in\mathbb{C}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}t &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k-\sum_{k=1}^{\infty}a_{n+1,k}x_k\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{nk}-a_{n+1,k}\right)x_k\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}b_{nk}x_k\end{aligned}$$

olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty}b_{nk}x_k\in c$ elde edilir. Böylece $B\in(l_\infty,c)$ bulunur.

($\Leftarrow$) (i), (ii) sağlansın. Herhangi bir $x\in l_\infty$ alalım. O halde $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$A_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k\ \leq\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\,|x_k|$$

olur. (i) ifadesinden $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|<\infty$ ve $\sup_k|x_k|<\infty$ olmasından $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k$ yakınsaktır. O halde $A_n(x)$ dizisi mevcuttur. Ayrıca (ii) kabulünden

$$\begin{aligned}B_n\left(x\right) &= \sum_{k=1}^{\infty}b_{nk}x_k=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{nk}-a_{n+1,k}\right)x_k\in c\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\Delta a_{nk}x_k\in c\\ &= \Delta\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k\in c\\ &= \Delta A_n\left(x\right)\in c\\ &= A_n\left(x\right)\in c\left(\Delta\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $A_n\left(x\right)\in\left(l_\infty,c\left(\Delta\right)\right)$ bulunur.

4.4. Bilateral Dizilerin Fark Dizi Uzayları

Bütün bilateral dizilerin uzayı

$$\omega(\mathbb{Z}) = \{x = (x_k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

şeklinde tanımlanır. $\omega(\mathbb{Z})$

$$x + y = (x_k + y_k)_{k\in\mathbb{Z}} \text{ ve } \lambda x = (\lambda x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır.

4.4.1. Tanım: Kompleks terimli sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak bilateral dizi uzayları sırasıyla

$$\begin{aligned} l_\infty(\mathbb{Z}) &= \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} : \sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| < \infty\} \\ c(\mathbb{Z}) &= \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} : \lim_{|k|\to\infty} x_k = a,\ a \in \mathbb{C}\} \\ c_0(\mathbb{Z}) &= \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} : \lim_{|k|\to\infty} x_k = 0\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır $[3, 35]$.

4.4.2. Lemma: $l_\infty(\mathbb{Z})$, $c(\mathbb{Z})$, $c_0(\mathbb{Z})$ lineer uzaylardır $[2, 3, 35]$.

İspat: (**a**) $l_\infty(\mathbb{Z}) \subset \omega(\mathbb{Z})$ dir.

i. $x, y \in l_\infty(\mathbb{Z})$ olsun. $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ için $\sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| < \infty$ ve $y = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ için $\sup_{k\in\mathbb{Z}} |y_k| < \infty$ olur. O halde

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k + y_k| \leq \sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| + \sup_{k\in\mathbb{Z}} |y_k| < \infty$$

olduğundan $x + y \in l_\infty(\mathbb{Z})$ bulunur.

ii. $x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ bir skaler olsun. O halde

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} |\lambda x_k| = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\lambda| |x_k| = |\lambda| \sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| < \infty$$

olduğundan $\lambda x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ bulunur. Böylece $l_\infty(\mathbb{Z})$, $\omega(\mathbb{Z})$ lineer uzayının bir alt uzayı ve dolayısıyla bir lineer uzaydır.

(**b**) $c(\mathbb{Z}) \subset \omega(\mathbb{Z})$ dir.

i. $x, y \in c(\mathbb{Z})$ olsun. $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ için $\lim_{|k|\to\infty} x_k = a_1$ ve $y = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ için $\lim_{|k|\to\infty} y_k = a_2$ olacak şekilde $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ vardır. O halde

$$\begin{aligned} \lim_{|k|\to\infty} (x_k + y_k) &= \lim_{|k|\to\infty} (x_k) + \lim_{|k|\to\infty} (y_k) \\ &= a_1 + a_2 \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

olduğundan $x+y\in c(\mathbb{Z})$ bulunur.

ii. $x\in c(\mathbb{Z})$ ve $\lambda\in\mathbb{C}$ bir skaler olsun.

$$\lim_{|k|\to\infty}(\lambda x_k)=\lambda\lim_{|k|\to\infty}(x_k)=\lambda a_1\in\mathbb{C}$$

olduğundan $\lambda x\in c(\mathbb{Z})$ bulunur. Böylece $c(\mathbb{Z})$, $\omega(\mathbb{Z})$ lineer uzayının bir alt uzayı ve dolayısıyla bir lineer uzaydır.

(**c**) $c_0(\mathbb{Z})\subset\omega(\mathbb{Z})$ dir.

i. $x,y\in c_0(\mathbb{Z})$ olsun. $x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ için $\lim_{|k|\to\infty}x_k=0$ ve $y=(y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ için $\lim_{|k|\to\infty}y_k=0$ dır. O halde

$$\begin{aligned}\lim_{|k|\to\infty}(x_k+y_k) &= \lim_{|k|\to\infty}(x_k)+\lim_{|k|\to\infty}(y_k)\\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan $x+y\in c_0(\mathbb{Z})$ bulunur.

ii. $x\in c_0(\mathbb{Z})$ ve $\lambda\in\mathbb{C}$ bir skaler olsun.

$$\lim_{|k|\to\infty}(\lambda x_k)=\lambda\lim_{|k|\to\infty}(x_k)=0$$

olduğundan $\lambda x\in c_0(\mathbb{Z})$ bulunur. Böylece $c_0(\mathbb{Z})$, $\omega(\mathbb{Z})$ lineer uzayının bir alt uzayı ve dolayısıyla bir lineer uzaydır.

4.4.3. Lemma: (**a**) $c_0(\mathbb{Z})\subset c(\mathbb{Z})$,

(**b**) $c(\mathbb{Z})\subset l_\infty(\mathbb{Z})$ kapsama bağıntıları mevcuttur [35].

İspat: (**a**) $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in c_0(\mathbb{Z})$ olsun. O halde $\lim_{|k|\to\infty}x_k=0$ olur. $0\in\mathbb{C}$ olmasından $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in c(\mathbb{Z})$ bulunur.

(**b**) $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in c(\mathbb{Z})$ olsun. O halde $\lim_{|k|\to\infty}x_k=a$ olur. O halde $\forall\varepsilon>0$ için $\forall\,|k|\geq N(\varepsilon)$ olduğunda $|x_k-a|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır. Böylece

$$M=\max\{x_{-N(\varepsilon)},\ x_{-N(\varepsilon)+1},\ \ldots,\ x_{-1},\ x_0,\ x_1,\ldots,\ x_{N(\varepsilon)-1,}\ x_{N(\varepsilon)},\ a-\varepsilon,\ a+\varepsilon\}$$

seçilirse $\forall k\in\mathbb{Z}$ için $|x_k|\leq M$ olacak şekilde bir $M\in\mathbb{R}$ bulunur. Buradan $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisi sınırlıdır. Böylece $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in l_\infty(\mathbb{Z})$ bulunur.

4.4.4. Tanım: $\Delta x=\Delta(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}=(x_k-x_{k+1})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}) &= \left\{x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}:\Delta x\in l_\infty(\mathbb{Z})\right\}=\left\{x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}:\sup_{k\in\mathbb{Z}}|x_k-x_{k+1}|<\infty\right\}\\ c(\Delta,\mathbb{Z}) &= \left\{x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}:\Delta x\in c(\mathbb{Z})\right\}=\left\{x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}:\lim_{|k|\to\infty}(x_k-x_{k+1})=a\right\}\\ c_0(\Delta,\mathbb{Z}) &= \left\{x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}:\Delta x\in c_0(\mathbb{Z})\right\}=\left\{x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}:\lim_{|k|\to\infty}(x_k-x_{k+1})=0\right\}\end{aligned}$$

dizi uzayları sırasıyla sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak bilateral dizilerin fark dizi uzaylarıdır. Burada yine $a \in \mathbb{C}$ dir.

4.4.5. Lemma: $l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}),\ c(\Delta, \mathbb{Z}),\ c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ lineer uzaylardır.

İspat: (**a**) $l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}) \subset w(\mathbb{Z})$ dir.

i. $x, y \in l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ olsun. $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ ise $\Delta x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ ve $y = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ ise $\Delta y \in l_\infty(\mathbb{Z})$ olur. $l_\infty(\mathbb{Z})$ lineer uzay olduğundan toplamaya göre kapalıdır. O halde $\Delta x, \Delta y \in l_\infty(\mathbb{Z})$ olmasından $\Delta x + \Delta y \in l_\infty(\mathbb{Z})$ bulunur. Ayrıca

$$\Delta x + \Delta y = \Delta(x + y) \in l_\infty(\mathbb{Z})$$

olur. Böylece $x + y \in l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ elde edilir.

ii. $x \in l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ herhangi bir skaler olsun. $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ ise $\Delta x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ olur. $l_\infty(\mathbb{Z})$ lineer uzay olduğundan skalerle çarpma işlemine göre kapalıdır. O halde $\Delta x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ olmasından $\lambda\Delta x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ bulunur. Ayrıca

$$\lambda\Delta x = \Delta(\lambda x) \in l_\infty(\mathbb{Z})$$

olur. Böylece $\lambda x \in l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ elde edilir. Buradan $l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}),\ \omega(\mathbb{Z})$ lineer uzayının bir alt uzayı ve dolayısıyla bir lineer uzaydır.

(**b**) $c(\Delta, \mathbb{Z}) \subset w(\mathbb{Z})$ dir.

i. $x, y \in c(\Delta, \mathbb{Z})$ olsun. $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c(\Delta, \mathbb{Z})$ ise $\Delta x \in c(\mathbb{Z})$ ve $y = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c(\Delta, \mathbb{Z})$ ise $\Delta y \in c(\mathbb{Z})$ olur. $c(\mathbb{Z})$ lineer uzay olduğundan toplamaya göre kapalıdır. O halde $\Delta x, \Delta y \in c(\mathbb{Z})$ olmasından $\Delta x + \Delta y \in c(\mathbb{Z})$ bulunur. Ayrıca

$$\Delta x + \Delta y = \Delta(x + y) \in c(\mathbb{Z})$$

olur. Böylece $x + y \in c(\Delta, \mathbb{Z})$ elde edilir.

ii. $x \in c(\Delta, \mathbb{Z})$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ herhangi bir skaler olsun. $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c(\Delta, \mathbb{Z})$ ise $\Delta x \in c(\mathbb{Z})$ olur. $c(\mathbb{Z})$ lineer uzay olduğundan skalerle çarpma işlemine göre kapalıdır. O halde $\Delta x \in c(\mathbb{Z})$ olmasından $\lambda\Delta x \in c(\mathbb{Z})$ bulunur. Ayrıca

$$\lambda\Delta x = \Delta(\lambda x) \in c(\mathbb{Z})$$

olur. Böylece $\lambda x \in c(\Delta, \mathbb{Z})$ elde edilir. Buradan $c(\Delta, \mathbb{Z}),\ \omega(\mathbb{Z})$ lineer uzayının bir alt uzayı ve dolayısıyla bir lineer uzaydır.

(**c**) $c_0(\Delta, \mathbb{Z}) \subset w(\mathbb{Z})$ dir.

i. $x, y \in c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ olsun. $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ ise $\Delta x \in c_0(\mathbb{Z})$ ve $y = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ ise $\Delta y \in c_0(\mathbb{Z})$ olur. $c_0(\mathbb{Z})$ lineer uzay olduğundan toplamaya göre kapalıdır. O halde $\Delta x, \Delta y \in c_0(\mathbb{Z})$ olmasından $\Delta x + \Delta y \in c_0(\mathbb{Z})$ bulunur. Ayrıca

$$\Delta x + \Delta y = \Delta(x + y) \in c_0(\mathbb{Z})$$

olur. Böylece $x + y \in c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ elde edilir.

ii. $x \in c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ herhangi bir skaler olsun. $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c(\Delta, \mathbb{Z})$ ise $\Delta x \in c_0(\mathbb{Z})$ olur. $c_0(\mathbb{Z})$ lineer uzay olduğundan skalerle çarpma işlemine göre kapalıdır. O halde $\Delta x \in c_0(\mathbb{Z})$ olmasından $\lambda\Delta x \in c_0(\mathbb{Z})$ bulunur. Ayrıca

$$\lambda\Delta x = \Delta(\lambda x_k) \in c_0(\mathbb{Z})$$

olur. Böylece $\lambda x \in c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ elde edilir. Buradan $c_0(\Delta, \mathbb{Z})$, $\omega(\mathbb{Z})$ lineer uzayının bir alt uzayı ve dolayısıyla bir lineer uzaydır.

4.4.6. Lemma: (**a**) $c_0(\Delta, \mathbb{Z}) \subset c(\Delta, \mathbb{Z})$,

(**b**) $c(\Delta, \mathbb{Z}) \subset l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ kapsama bağıntıları mevcuttur.

İspat: (**a**) $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ olsun. O halde $\Delta x \in c_0(\mathbb{Z})$ olur. 4.4.3. Lemma (a) dan $c_0(\mathbb{Z}) \subset c(\mathbb{Z})$ olmasından $\Delta x \in c(\mathbb{Z})$ bulunur. Buradan $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c(\Delta, \mathbb{Z})$ elde edilir. Böylece $c_0(\Delta, \mathbb{Z}) \subset c(\Delta, \mathbb{Z})$ olur.

(**b**) $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c(\Delta, \mathbb{Z})$ olsun. O halde $\Delta x \in c(\mathbb{Z})$ olur. 4.4.3. Lemma (b) den $c(\mathbb{Z}) \subset l_\infty(\mathbb{Z})$ olmasından $\Delta x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ bulunur. Buradan $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ elde edilir. Böylece $c(\Delta, \mathbb{Z}) \subset l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ olur.

4.4.7. Lemma: (**a**) $l_\infty(\mathbb{Z}) \subset l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$,

(**b**) $c(\mathbb{Z}) \subset c(\Delta, \mathbb{Z})$,

(**c**) $c_0(\mathbb{Z}) \subset c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ kapsama bağıntıları mevcuttur.

İspat: (**a**) $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z})$ olsun. O halde $\sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| < \infty$ olur.

$$|x_k - x_{k+1}| \leq |x_k| + |x_{k+1}|$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k - x_{k+1}| &\leq \sup_{k\in\mathbb{Z}} (|x_k| + |x_{k+1}|) \\
&\leq \sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| + \sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_{k+1}| \\
&< \infty
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\Delta x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ elde edilir. Böylece $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ ve $l_\infty(\mathbb{Z}) \subset l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ olur.

Bilateral bir dizinin fark dizisi sınırlı ise o bilateral dizi sınırlı olmak zorunda değildir. $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (k)_{k\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisini göz önüne alalım.

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k - x_{k+1}| = 1$$

olur. O halde $\Delta x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ ve $x \in l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ bulunur. Fakat $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (k)_{k\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisi sınırlı değildir.

(**b**) $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c(\mathbb{Z})$ olsun. O halde $\lim_{|k|\to\infty} x_k = a \in \mathbb{C}$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \lim_{|k|\to\infty} (x_k - x_{k+1}) &= \lim_{|k|\to\infty} (x_k) - \lim_{|k|\to\infty} (x_{k+1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\Delta x \in c_0(\mathbb{Z}) \subset c(\mathbb{Z})$ elde edilir. Böylece $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c(\Delta,\mathbb{Z})$ ve $c(\mathbb{Z}) \subset c(\Delta,\mathbb{Z})$ olur.

Bilateral bir dizinin fark dizisi yakınsak ise o bilateral dizi yakınsak olmak zorunda değildir. $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (k)_{k\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisini göz önüne alalım.

$$\lim_{|k|\to\infty} (x_k - x_{k+1}) = -1$$

olur. O halde $\Delta x \in c(\mathbb{Z})$ ve $x \in c(\Delta,\mathbb{Z})$ bulunur. Fakat $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (k)_{k\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisi yakınsak değildir.

(**c**) $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$ olsun. O halde $\lim_{|k|\to\infty} x_k = 0$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \lim_{|k|\to\infty} (x_k - x_{k+1}) &= \lim_{|k|\to\infty} (x_k) - \lim_{|k|\to\infty} (x_{k+1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\Delta x \in c_0(\mathbb{Z})$ elde edilir. Böylece $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c_0(\Delta,\mathbb{Z})$ ve $c_0(\mathbb{Z}) \subset c_0(\Delta,\mathbb{Z})$ olur.

Bilateral bir dizinin fark dizisi sıfıra yakınsak ise o bilateral dizi sıfıra yakınsak olmak zorunda değildir. $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ dizisini göz önüne alalım.

$$\lim_{|k|\to\infty} (x_k - x_{k+1}) = \lim_{|k|\to\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 0$$

bulunur. O halde $\Delta x \in c_0(\mathbb{Z})$ ve $x \in c_0(\Delta,\mathbb{Z})$ bulunur. Fakat $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisi sıfıra yakınsak değildir.

4.4.8. Teorem: $X,\ l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}),\ c(\Delta,\mathbb{Z}),\ c_0(\Delta,\mathbb{Z})$ lineer uzaylarından birini göstersin. O halde

$$\begin{aligned}\|\cdot\|_\Delta &: X\to\mathbb{R}\\ \|x\|_\Delta &= |x_1|+\|\Delta x\|_\infty\\ &= |x_1|+\sup_{k\in\mathbb{Z}}|x_k-x_{k+1}|\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon için $(X,\|\cdot\|_\Delta)$ normlu uzaydır.

İspat: $X,\ l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}),\ c(\Delta,\mathbb{Z}),\ c_0(\Delta,\mathbb{Z})$ uzaylarından birini göstersin. $x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}},\ y=(y_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in X$ ve $\lambda\in\mathbb{C}$ bir skaler olsun.

$$\begin{aligned}\|\cdot\| &: X\to\mathbb{R}\\ x &\to \|x\|_\Delta=|x_1|+\|\Delta x\|_\infty\end{aligned}$$

N1. $\forall x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in X$ için $\|x\|_\Delta=\ |x_1|+\|\Delta x\|_\infty=0\Leftrightarrow|x_1|=0$ ve $\|\Delta x\|_\infty=0$ olur.

$$\|\Delta x\|_\infty=\sup_{k\in\mathbb{Z}}|x_k-x_{k+1}|=0$$

olması ancak

$$|x_k-x_{k+1}|=0,\ \forall k\in\mathbb{Z}$$

olması ile mümkündür.

$$|x_1|=0\Rightarrow x_1=0$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}|x_1-x_2| &= 0\Leftrightarrow x_1-x_2=0,\ x_1=0\Rightarrow x_2=0\\ |x_2-x_3| &= 0\Leftrightarrow x_2-x_3=0,\ x_2=0\Rightarrow x_3=0\\ &.\\ &.\\ &.\\ |x_{k-1}-x_k| &= 0\Leftrightarrow x_{k-1-}x_k=0,\ x_{k-1}=0\Rightarrow x_k=0\ \left(\forall k\in\mathbb{Z}^+\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
|x_0 - x_1| &= 0 \Leftrightarrow x_0 - x_1 = 0,\ x_1 = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \\
|x_{-1} - x_0| &= 0 \Leftrightarrow x_{-1} - x_0 = 0,\ x_0 = 0 \Rightarrow x_{-1} = 0 \\
|x_{-2} - x_{-1}| &= 0 \Leftrightarrow x_{-2} - x_{-1} = 0,\ x_{-1} = 0 \Rightarrow x_{-2} = 0 \\
&. \\
&. \\
&. \\
|x_{-k} - x_{-k+1}| &= 0 \Leftrightarrow x_{-k} - x_{-k+1} = 0,\ x_{-k+1} = 0 \Rightarrow x_{-k} = 0 \ \left(\forall k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (..., x_{-1}, x_0, x_1, ...) = (..., 0, 0, 0, ...) = \theta$ olur.

N2. $\forall x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in X$ ve λ herhangi bir skaler olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|_\Delta &= |\lambda x_1| + \|\lambda \Delta x\|_\infty \\
&= |\lambda|\,|x_1| + \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\lambda x_k - \lambda x_{k+1}| \\
&= |\lambda| \left(|x_1| + \sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k - x_{k+1}| \right) \\
&= |\lambda|\,\|x\|_\Delta
\end{aligned}$$

elde edilir.

N3. $\forall x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}\,,\ y = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in X$ için

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_\Delta &= |x_1 + y_1| + \|\Delta(x + y)\|_\infty \\
&= |x_1 + y_1| + \sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k + y_k - (x_{k+1} + y_{k+1})| \\
&\le |x_1| + |y_1| + \sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k - x_{k+1}| + \sup_{k\in\mathbb{Z}} |y_k - y_{k+1}| \\
&= \|x\|_\Delta + \|y\|_\Delta
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.4.9. Teorem: $(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}), \|\cdot\|_\Delta)$ Banach uzayıdır.

İspat: $l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ uzayının normlu bir lineer uzay olduğu 4.4.5. Lemma ve 4.4.8. Teoremde gösterildi. Bu uzayın verilen norma göre tam olduğu gösterilerek ispat tamamlanır.

$(x_k^n)_{k\in\mathbb{Z}}$, bilateral dizisi $l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ da bir Cauchy dizisi olsun. O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall\,|n|\,,\ |m| \ge N(\varepsilon)\ \ (n, m \in \mathbb{Z})$ olduğunda $\|x_k^n - x_k^m\|_\Delta < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır.

$$\begin{aligned}
\|x_k^n - x_k^m\|_\Delta &= |x_1^n - x_1^m| + \|\Delta(x_k^n - x_k^m)\|_\infty \to 0 \\
&= |x_1^n - x_1^m| + \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left| x_k^n - x_k^m - \left(x_{k+1}^n - x_{k+1}^m\right) \right| \to 0
\end{aligned}$$

$(\forall n,m\in\mathbb{Z}$ öyle ki $|n|,|m|\geq N(\varepsilon))$. Buradan

$$|x_1^n - x_1^m| \to 0, \quad |n|,\ |m| \to \infty$$

ve

$$\begin{aligned} \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left|x_k^n - x_k^m - \left(x_{k+1}^n - x_{k+1}^m\right)\right| &\to 0,\ |n|,|m|\to\infty \\ \left|x_k^n - x_k^m - \left(x_{k+1}^n - x_{k+1}^m\right)\right| &\to 0,\ |n|,|m|\to\infty\ \ (\forall k\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

bulunur.

$$|x_k^n - x_k^m| - \left|x_{k+1}^n - x_{k+1}^m\right| \leq \left|x_k^n - x_k^m - \left(x_{k+1}^n - x_{k+1}^m\right)\right|$$

olduğundan

$$|x_k^n - x_k^m| - \left|x_{k+1}^n - x_{k+1}^m\right| \to 0,\ |n|,|m|\to\infty\ \ (\forall k\in\mathbb{Z})$$

elde edilir. Buradan $|x_1^n - x_1^m| \to 0,\ (|n|,|m|\to\infty)$ olmasından

$$|x_k^n - x_k^m| \to 0,\ |n|,\ |m|\to\infty\ \ (\forall k\in\mathbb{Z})$$

bulunur. Böylece $(x_k^n)_{k\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisi $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisi olur. $\mathbb{C}$ tam olduğundan $\exists\,(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{C}$ öyle ki

$$|x_k^n - x_k| \to 0,\ |n|\to\infty\ \ (\forall k\in\mathbb{Z})$$

dir. Yani

$$\lim_{|n|\to\infty} x_k^n = x_k\ \ (\forall k\in\mathbb{Z})$$

olur. $\forall\varepsilon>0$ için $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$

$$|x_1^n - x_1^m| \leq \varepsilon, \quad \left|x_k^n - x_k^m - \left(x_{k+1}^n - x_{k+1}^m\right)\right| \leq \varepsilon$$

$(\forall n,m\in\mathbb{Z}$ öyle ki $|n|,|m|\geq N(\varepsilon),\ \forall k\in\mathbb{Z})$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $\forall\,|n|\geq N(\varepsilon)$ için

$$\lim_{|m|\to\infty} |x_1^n - x_1^m| = |x_1^n - x_1| \leq \varepsilon$$

$$\lim_{|m|\to\infty} \left|x_k^n - x_k^m - \left(x_{k+1}^n - x_{k+1}^m\right)\right| = \left|x_k^n - x_k - \left(x_{k+1}^n - x_{k+1}\right)\right| \leq \varepsilon$$

$(\forall k\in\mathbb{Z})$ elde edilir. Burada $\varepsilon,\ k$ ya bağlı olmadığından

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \left|x_k^n - x_k - \left(x_{k+1}^n - x_{k+1}\right)\right| \leq \varepsilon\ \ (\forall n\in\mathbb{Z} \text{ öyle ki } |n|\geq N(\varepsilon),\ \forall k\in\mathbb{Z})$$

bulunur. Böylece

$$|x_1^n - x_1| + \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left|x_k^n - x_k - (x_{k+1}^n - x_{k+1})\right| \leq 2\varepsilon\ \ (\forall n\in\mathbb{Z} \text{ öyle ki } |n|\geq N(\varepsilon),\ \forall k\in\mathbb{Z})$$

olur. Sonuç olarak

$$\|x_k^n - x_k\|_\Delta \leq 2\varepsilon \ \ (\forall n \in \mathbb{Z} \text{ öyle ki } |n| \geq N(\varepsilon), \ \forall k \in \mathbb{Z})$$

elde edilir. Buradan da

$$\|x_k^n - x_k\|_\Delta \to 0, \ |n| \to \infty, \ (\forall k \in \mathbb{Z})$$

bulunur.

Şimdi $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k - x_{k+1}| &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left| x_k - x_k^{N(\varepsilon)} + x_k^{N(\varepsilon)} - x_{k+1}^{N(\varepsilon)} + x_{k+1}^{N(\varepsilon)} - x_{k+1} \right| \\
&\leq \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left| x_k - x_k^{N(\varepsilon)} - x_{k+1} + x_{k+1}^{N(\varepsilon)} \right| + \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left| x_k^{N(\varepsilon)} - x_{k+1}^{N(\varepsilon)} \right| \\
&= \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left| x_k^{N(\varepsilon)} - x_k - (x_{k+1}^{N(\varepsilon)} - x_{k+1}) \right| + \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left| x_k^{N(\varepsilon)} - x_{k+1}^{N(\varepsilon)} \right| \\
&\leq \left\| x_k^{N(\varepsilon)} - x_k \right\|_\Delta + \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left| x_k^{N(\varepsilon)} - x_{k+1}^{N(\varepsilon)} \right| \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ bulunur.

4.4.10. Teorem: $c(\Delta, \mathbb{Z})$, $l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ uzayının kapalı bir alt uzayıdır.

İspat: 4.4.6. Lemma (b) den $c(\Delta, \mathbb{Z}) \subset l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ olduğu biliniyor. Tanım gereği $c(\Delta, \mathbb{Z}) \subset \overline{c(\Delta, \mathbb{Z})}$ olur. $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \overline{c(\Delta, \mathbb{Z})}$ alalım. Bu halde 1.1.31. Teorem gereğince $(x_k^n) \to (x_k)$ olacak şekilde $(x_k^n)_{k\in\mathbb{Z}} \in c(\Delta, \mathbb{Z})$ mevcuttur. Buradan

$$\begin{aligned}
\|x_k^n - x_k\|_\Delta &\leq \varepsilon, \ (\forall n \in \mathbb{Z} \text{ öyle ki } |n| \geq N(\varepsilon), \ \forall k \in \mathbb{Z}) \\
\|x_k^n - x_k\|_\Delta &= |x_1^n - x_1| + \|\Delta(x_k^n - x_k)\|_\infty \to 0, \ |n| \to \infty, \ (\forall k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

olacak şekilde bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|\Delta(x_k^n - x_k)\|_\infty &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\Delta(x_k^n - x_k)| \to 0 \ , \ |n| \to \infty \qquad (6) \\
&= |\Delta(x_k^n - x_k)| \to 0, \ |n| \to \infty, \ (\forall k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

olur.

Üstelik $(x_k^n) \in c(\Delta, \mathbb{Z})$ olmasından $\Delta x_k^n \in c(\mathbb{Z})$ bulunur.

$$|\Delta(x_k^n - x_k)| = |\Delta x_k^n - \Delta x_k| \to 0, \ |n| \to \infty, \ (\forall k \in \mathbb{Z})$$

olmasından $\Delta x_k^n \to \Delta x_k$, $(|n| \to \infty, \ \forall k \in \mathbb{Z})$ bulunur. Açıkça her yakınsak bilateral dizinin Cauchy dizisi olmasından $(\Delta x_k^n) \in c(\mathbb{Z})$ bir Cauchy dizisidir.

$$\Delta x_k^n = \left(..., \Delta x_{-1}^n, \Delta x_0^n, \Delta x_1^n, ...\right) \in c(\mathbb{Z}).$$

Cauchy dizisi tanımı gereğince $\forall\varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \forall |i|,|j| \geq M(\varepsilon)$ için

$$\left|\Delta x_i^n - \Delta x_j^n\right| \leq \varepsilon \tag{7}$$

olacak şekilde bir $M(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır. Yani

$$\left|\Delta x_i^n - \Delta x_j^n\right| \to 0 \ \ (|i|,|j| \to \infty,\ \forall n \in \mathbb{Z})$$

olur. Böylece $\forall |i|,|j| \geq M(\varepsilon)$ için (5) ve (6) gereğince

$$\begin{aligned}
|\Delta x_i - \Delta x_j| &= \left|\Delta x_i - \Delta x_i^{N(\varepsilon)} + \Delta x_i^{N(\varepsilon)} - \Delta x_j^{N(\varepsilon)} + \Delta x_j^{N(\varepsilon)} - \Delta x_j\right| \\
&\leq \left|\Delta x_i - \Delta x_i^{N(\varepsilon)}\right| + \left|-\Delta x_j + \Delta x_j^{N(\varepsilon)}\right| + \left|\Delta x_i^{N(\varepsilon)} - \Delta x_j^{N(\varepsilon)}\right| \\
&= \left|\Delta x_i^{N(\varepsilon)} - \Delta x_i\right| + \left|\Delta x_j^{N(\varepsilon)} - \Delta x_j\right| + \left|\Delta x_i^{N(\varepsilon)} - \Delta x_j^{N(\varepsilon)}\right| \\
&= \left|\Delta(x_i^{N(\varepsilon)} - x_i)\right| + \left|\Delta(x_j^{N(\varepsilon)} - x_j)\right| + \left|\Delta x_i^{N(\varepsilon)} - \Delta x_j^{N(\varepsilon)}\right| \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(\Delta x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisi $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ nin tam olmasından $(\Delta x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ yakınsaktır. O halde $(\Delta x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in c(\mathbb{Z})$ ve $x \in c(\Delta,\mathbb{Z})$ bulunur. Buradan $\overline{c(\Delta,\mathbb{Z})} \subset c(\Delta,\mathbb{Z})$ olur. Sonuç olarak $c(\Delta,\mathbb{Z})$ kapalıdır.

4.4.11. Teorem: $(c(\Delta,\mathbb{Z}),\ \|\cdot\|_\Delta)$ Banach uzayıdır.

İspat: $c(\Delta,\mathbb{Z}),\ l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ uzayının kapalı bir alt uzayı olduğundan 1.1.30. Teorem gereğince $c(\Delta,\mathbb{Z})$ Banach uzayıdır.

4.4.12. Teorem: $c_0(\Delta,\mathbb{Z}),\ l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ uzayının kapalı bir alt uzayıdır.

İspat: 4.4.6. Lemma (a) ve (b) den $c_0(\Delta,\mathbb{Z}) \subset\ l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ olduğu biliniyor. Tanım gereği $c_0(\Delta,\mathbb{Z}) \subset \overline{c_0(\Delta,\mathbb{Z})}$ olur. $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \overline{c_0(\Delta,\mathbb{Z})}$ alalım. Bu halde 1.1.31. Teorem gereğince $(x_k^n) \to (x_k)$ olacak şekilde $(x_k^n)_{k\in\mathbb{Z}} \in c_0(\Delta,\mathbb{Z})$ bilateral dizisi vardır. Buradan

$$\begin{aligned}
\|x_k^n - x_k\|_\Delta &\leq \varepsilon,\ \ (\forall n \in \mathbb{Z} \text{ öyle ki } |n| \geq N(\varepsilon),\ \forall k \in \mathbb{Z}) \\
\|x_k^n - x_k\|_\Delta &= |x_1^n - x_1| + \|\Delta(x_k^n - x_k)\|_\infty \to 0,\ |n| \to \infty,\ (\forall k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

olacak şekilde bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca

$$\|\Delta(x_k^n - x_k)\|_\infty = |\Delta(x_k^n - x_k)| \to 0,\ \ |n| \to \infty\ \ (\forall k \in \mathbb{Z})$$

olur.

Üstelik $(x_k^n) \in c_0(\Delta,\mathbb{Z})$ olmasından $\Delta x_k^n \in c_0(\mathbb{Z})$ bulunur. Böylece $\forall\varepsilon > 0$ için $|i| \geq M(\varepsilon)$ oldukça $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$|\Delta x_i^n - 0| = |\Delta x_i^n| \leq \varepsilon \tag{8}$$

olacak şekilde bir $M(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır. Böylece $\forall |i| \geq M(\varepsilon)$ için (7) ve (8) gereğince

$$\begin{aligned} |\Delta x_i| &= \left|\Delta x_i - \Delta x_i^{N(\varepsilon)} + \Delta x_i^{N(\varepsilon)}\right| \\ &\leq \left|\Delta x_i - \Delta x_i^{N(\varepsilon)}\right| + \left|\Delta x_i^{N(\varepsilon)}\right| \\ &= \left|\Delta (x_i^{N(\varepsilon)} - x_i)\right| + \left|\Delta x_i^{N(\varepsilon)}\right| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\Delta x_i \in c_0(\mathbb{Z})$ ve $x \in c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ bulunur. Buradan $\overline{c_0(\Delta, \mathbb{Z})} \subset c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ olur. Sonuç olarak $c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ kapalıdır.

4.4.13. Teorem: $(c_0(\Delta, \mathbb{Z}), \|\cdot\|_\Delta)$ Banach uzayıdır.

İspat: $c_0(\Delta, \mathbb{Z}),\ l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ uzayının kapalı bir alt uzayı olduğundan 1.1.30. Teorem gereğince $c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ Banach uzayıdır.

Şimdi s operatörünü

$$\begin{aligned} s &: l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}) \to l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}) \\ x &\to s(x) = t = (..., x_{-2}, x_{-1}, 0, 0, x_2, x_{3,} ...) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. s lineer operatördür. Gerçekten $\forall x, y \in l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ ve herhangi bir λ skaleri için

$$\begin{aligned} s(x+y) &= (..., x_{-2} + y_{-2}, x_{-1} + y_{-1}, 0, 0, x_2 + y_2, ...) \\ &= (..., x_{-2}, x_{-1}, 0, 0, x_2, x_3, ...) + (..., y_{-2}, y_{-1}, 0, 0, y_2, y_3, ...) \\ &= s(x) + s(y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} s(\lambda x) &= (..., \lambda x_{-2}, \lambda x_{-1}, 0, 0, \lambda x_2, \lambda x_3, ...) \\ &= \lambda (..., x_{-2}, x_{-1}, 0, 0, x_2, x_3, ...) \\ &= \lambda s(x) \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ için

$$\begin{aligned} \|s(x_k)\|_\Delta &= \|t_k\|_\Delta = |t_1| + \|\Delta(t_k)\|_\infty \\ &= 0 + \sup_{k \in \mathbb{Z}} \{..., |\Delta t_{-2}|, |\Delta t_{-1}|, |\Delta t_0|, |\Delta t_1|, |\Delta t_2|, ...\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|x\|_{\Delta} &= |x_1| + \|\Delta(x_k)\|_{\infty} \\ &= |x_1| + \sup_{k\in\mathbb{Z}}\{..., |\Delta x_{-2}|, |\Delta x_{-1}|, |\Delta x_0|, |\Delta x_1|, |\Delta x_2|, ...\}\end{aligned}$$

olur. O halde

$$\|s(x_k)\|_{\Delta} \leq K\|x_k\|_{\Delta}$$

olacak şekilde bir $K > 0$ vardır. Böylece s bir sınırlı lineer operatördür.

Şimdi de $s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))$ kümesini tanımlayalım.

$$\begin{aligned}s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})) &= \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} : x \in l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}),\ x_0 = x_1 = 0\} \\ &= \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} : \Delta x \in l_\infty(\mathbb{Z}),\ x_0 = x_1 = 0\}\end{aligned}$$

4.4.14. Lemma: $s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))$ lineer uzaydır.

İspat: Tanım gereği $s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})) \subset l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ olur. $\forall x, y \in s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))$ ve λ herhangi bir skaler olsun.

$$\{x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} : x \in l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}),\ x_0 = x_1 = 0\}$$
$$\{y = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}} : y \in l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}),\ y_0 = y_1 = 0\}$$

olur. $l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ lineer uzay olduğundan toplamaya göre kapalıdır. O halde

$$\begin{matrix} x_0 + y_0 = 0 \\ x_1 + y_1 = 0 \end{matrix}\ ,\ x + y \in l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$$

olur. Böylece $x + y \in s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))$ bulunur. $l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ lineer uzay olduğundan skalerle çarpmaya göre kapalıdır. O halde

$$\begin{matrix} \lambda x_0 = 0 \\ \lambda x_1 = 0 \end{matrix}\ ,\ \lambda x \in l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$$

olur. Böylece $\lambda x \in s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))$ bulunur. Bu halde $s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))$, $l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ uzayının bir alt uzayı ve dolayısyla lineer uzaydır.

$s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))$, $l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ uzayının bir alt uzayı olduğundan $l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ için tanımladığımız norm ile $s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))$ uzayıda normlu bir uzaydır. Yani

$$\begin{aligned}\|\cdot\|_{\Delta} &: s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})) \to \mathbb{R} \\ x &\to \|x\|_{\Delta} = |x_1| + \|\Delta x\|_{\infty}\end{aligned}$$

ve $x_1 = 0$ olmasından

$$x \to \|x\|_{\Delta} = \|\Delta x\|_{\infty}$$

olur.

4.4.15. Teorem: Aşağıdaki şekilde tanımlanan Δ operatörü bir lineer homeomorfizmdir.

$$\begin{aligned} \Delta \quad &: \quad s\left(l_{\infty}(\Delta, \mathbb{Z})\right) \to \ l_{\infty}(\mathbb{Z}) \\ x \quad &= \quad (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \to \Delta x = x_k - x_{k+1} = y \end{aligned}$$

İspat: i. Δ lineerdir. $\forall x, z \in s\left(l_{\infty}\left(\Delta, \mathbb{Z}\right)\right)$ ve λ herhangi bir skaler olmak üzere

$$\Delta\left(x + z\right) = \Delta x + \Delta z$$

ve

$$\Delta\left(\lambda x\right) = \lambda \Delta x$$

olduğundan Δ lineerdir.

ii. Δ birebirdir. $x, z \in s\left(l_{\infty}\left(\Delta, \mathbb{Z}\right)\right)$ alalım. $\Delta x = \Delta z$ ise $\Delta(x - z) = 0$ bulunur. Bu halde

$$\Delta(x - z) = (x_k - z_k) - (x_{k+1} - z_{k+1}) = 0$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} x_1 \quad &= \quad z_1 = 0 \\ x_1 - z_1 \quad &= \quad x_2 - z_2 = 0 \Rightarrow x_2 = z_2 \\ x_2 - z_2 \quad &= \quad x_3 - z_3 = 0 \Rightarrow x_3 = z_3 \\ &\quad . \\ &\quad . \\ &\quad . \\ x_{k-1} - z_{k-1} \quad &= \quad x_k - z_k = 0 \Rightarrow x_k = z_k \ \forall k \in \mathbb{Z}^{+} \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
x_0 &= z_0 = 0 \\
x_{-1} - z_{-1} &= x_0 - z_0 = 0 \Rightarrow x_{-1} = z_{-1} \\
x_{-2} - z_{-2} &= x_{-1} - z_{-1} = 0 \Rightarrow x_{-2} = z_{-2} \\
&. \\
&. \\
&. \\
x_{-k} - z_{-k} &= x_{-k+1} - z_{-k+1} = 0 \Rightarrow x_{-k} = z_{-k} \ \forall k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}
\end{aligned}
$$

bulunur. O halde $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$ elde edilir. Böylece Δ birebirdir.

iii. Δ örtendir. $\forall y \in l_\infty(\mathbb{Z})$ için $y_k = \Delta x_k$ olacak şekilde en az bir $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))$ vardır. Gerçekten

$$
x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = \begin{cases} 0, \ k = 1, 0 \\ -\sum_{v=1}^{k} y_{v-1}, \ k \geq 1 \\ \sum_{v=k}^{0} y_v, \ k \leq 0 \end{cases}
$$

olarak seçilirse $y_k = \Delta(x_k)$ elde edilir. Böylece Δ örtendir.

iv. Δ sınırlıdır. $\forall x \in s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))$ için

$$
\begin{aligned}
\|\Delta\| &= \sup\left\{ \frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\Delta} : x \neq \theta, \ x \in s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})) \right\} \\
&= \sup\left\{ \frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|\Delta x\|_\infty} : x \neq \theta, \ x \in s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})) \right\} = 1
\end{aligned}
$$

olur. Böylece $\|\Delta x\|_\infty \leq \|\Delta\| \|x\|_\Delta$, $\|\Delta\| = 1$ olduğundan sağlanır ve Δ sınırlıdır.

v. Δ^{-1} sınırlıdır.

$$
\begin{aligned}
\Delta^{-1} &: \quad l_\infty(\mathbb{Z}) \to s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})) \\
x &= (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \to \Delta^{-1} x = y
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlansın. O halde $\forall x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ için

$$
\begin{aligned}
\left\|\Delta^{-1}\right\| &= \sup\left\{ \frac{\|\Delta^{-1}(x)\|_\Delta}{\|x\|_\infty} : x \neq \theta, \ x \in l_\infty(\mathbb{Z}) \right\} \\
&= \sup\left\{ \frac{\|\Delta(\Delta^{-1}(x))\|_\infty}{\|x\|_\infty} : x \neq \theta, \ x \in l_\infty(\mathbb{Z}) \right\} = 1
\end{aligned}
$$

olur. Böylece $\|\Delta^{-1}(x)\|_\Delta \leq \|\Delta^{-1}\| \|x\|_\infty$, $\|\Delta^{-1}\| = 1$ olduğundan sağlanır ve Δ^{-1} sınırlıdır. Böylece Δ bir lineer homeomorfizmdir. Buradan $s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))$ ve $l_\infty(\mathbb{Z})$ uzayları denk topolojik uzaylardır.

$$
s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})) \simeq l_\infty(\mathbb{Z})
$$

olarak gösterilir.

4.4.16. Lemma: Δ ve Δ^{-1} dönüşümleri normu koruyan dönüşümlerdir.

İspat:

$$\begin{aligned} \Delta &: s\left(l_\infty\left(\Delta,\mathbb{Z}\right)\right) \to l_\infty\left(\mathbb{Z}\right) \\ x &= \left(x_k\right)_{k\in\mathbb{Z}} \to \Delta x = \left(\Delta x_k\right)_{k\in\mathbb{Z}} \\ \left\|x\right\|_\Delta &= \left\|\Delta x\right\|_\infty \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} &: l_\infty\left(\mathbb{Z}\right) \to s\left(l_\infty\left(\Delta,\mathbb{Z}\right)\right) \\ x &= \left(x_k\right)_{k\in\mathbb{Z}} \to \Delta^{-1}\left(x_k\right)_{k\in\mathbb{Z}} \\ \left\|x\right\|_\infty &= \left\|\Delta^{-1}x\right\|_\Delta \end{aligned}$$

olduğundan Δ ve Δ^{-1} dönüşümleri normu korurlar.

4.4.17. Teorem: $\left[l_\infty\left(\mathbb{Z}\right)\right]^*$ ve $\left[s\left(l_\infty\left(\Delta,\mathbb{Z}\right)\right)\right]^*$ sırasıyla $l_\infty\left(\mathbb{Z}\right)$ ve $s\left(l_\infty\left(\Delta,\mathbb{Z}\right)\right)$ uzaylarının sürekli duallerini göstersin. Bu takdirde

$$\begin{aligned} T &: \left[s\left(l_\infty\left(\Delta,\mathbb{Z}\right)\right)\right]^* \to \left[l_\infty\left(\mathbb{Z}\right)\right]^* \\ f_\Delta &\to T\left(f_\Delta\right) = f_\Delta \circ \Delta^{-1} = f \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan T dönüşümü bir lineer izometridir.

İspat: i. T lineerdir. $\forall f_\Delta, g_\Delta \in \left[s\left(l_\infty\left(\Delta,\mathbb{Z}\right)\right)\right]^*$ ve λ skaleri için

$$\begin{aligned} T(f_\Delta + g_\Delta) &= \left(f_\Delta + g_\Delta\right)\circ\Delta^{-1} \\ &= f_\Delta\circ\Delta^{-1} + g_\Delta\circ\Delta^{-1} \\ &= T\left(f_\Delta\right) + T\left(g_\Delta\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T\left(\lambda f_\Delta\right) &= \lambda f_\Delta\circ\Delta^{-1} \\ &= \lambda\left(f_\Delta\circ\Delta^{-1}\right) \\ &= \lambda T\left(f_\Delta\right) \end{aligned}$$

olduğundan T lineerdir.

ii. T normu korur. $F=\mathbb{R}$ veya $F=\mathbb{C}$ olsun.

$$\begin{aligned}
[s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^* &= \{f_\Delta \mid f_\Delta : s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})) \to F,\ f_\Delta \text{ lineer ve sınırlı }\} \\
\|f_\Delta\| &= \sup\{\|f_\Delta(x)\| : \|x\|_\Delta = 1\} \\
&= \sup\{|f_\Delta(x)| : \|x\|_\Delta = 1\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
[l_\infty(\mathbb{Z})]^* &= \{T(f_\Delta) \mid T(f_\Delta) : l_\infty(\mathbb{Z}) \to F,\ T(f_\Delta) \text{ lineer ve sınırlı}\} \\
\|T(f_\Delta)\| &= \sup\{\|T(f_\Delta(x))\| : \|x\|_\infty = 1\} \\
&= \sup\{|T(f_\Delta(x))| : \|x\|_\infty = 1\} \\
&= \sup\left\{\left|f_\Delta \circ \Delta^{-1}(x)\right| : \|x\|_\infty = 1\right\} \\
&= \sup\left\{\left|f_\Delta\left(\Delta^{-1}(x)\right)\right| : \|x\|_\infty = 1\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\Delta^{-1} : l_\infty(\mathbb{Z}) \to s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))$ olduğundan $x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ için $\Delta^{-1}x = y \in s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))$ olacaktır.

$$\begin{aligned}
\|y\|_\Delta &= \left\|\Delta^{-1}(x)\right\|_\Delta \\
&= \left\|\Delta\left(\Delta^{-1}(x)\right)\right\|_\infty \\
&= \|x\|_\infty = 1
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\|T(f_\Delta)\| = \sup\{|f_\Delta(y)| : \|y\|_\Delta = 1\}$$

elde edilir. O halde T normu korur.

iii. T birebirdir. $\forall f_\Delta, g_\Delta \in [s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^*$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
T(f_\Delta) &= T(g_\Delta) \\
f_\Delta \circ \Delta^{-1} &= g_\Delta \circ \Delta^{-1} \\
f_\Delta &= g_\Delta
\end{aligned}$$

olur. Böylece T birebirdir.

iv. T örtendir. $\forall f \in [l_\infty(\mathbb{Z})]^*$ için $T(f_\Delta) = f$ olacak şekilde en az bir $f_\Delta \in [s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^*$

vardır. Gerçekten

$$\begin{aligned} f &= f \circ \left(\Delta \circ \Delta^{-1}\right) \\ &= (f \circ \Delta) \circ \left(\Delta^{-1}\right) \\ &= T\left(f \circ \Delta\right) \\ &= T\left(f_{\Delta}\right) \end{aligned}$$

olur. Böylece T örtendir. O halde T bir lineer izomorfizmdir. Buradan $\left[s\left(l_{\infty}\left(\Delta, \mathbb{Z}\right)\right)\right]^{*}$ ile $\left[l_{\infty}\left(\mathbb{Z}\right)\right]^{*}$ denk topolojik uzaylardır denir.

$$\left[s\left(l_{\infty}\left(\Delta, \mathbb{Z}\right)\right)\right]^{*} \simeq \left[l_{\infty}\left(\mathbb{Z}\right)\right]^{*}$$

olarak gösterilir.

Şimdi s operatörünü

$$\begin{aligned} s &: c\left(\Delta, \mathbb{Z}\right) \rightarrow c\left(\Delta, \mathbb{Z}\right) \\ x &\rightarrow s\left(x\right) = t = \left(..., x_{-2}, x_{-1}, 0, 0, x_{2}, x_{3,}...\right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. s lineer operatördür. Gerçekten $\forall x, y \in c\left(\Delta, \mathbb{Z}\right)$ ve λ skaleri için

$$s(x+y) = s(x) + s(y)$$

ve

$$s(\lambda x) = \lambda s\left(x\right)$$

bulunur. Ayrıca $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c\left(\Delta, \mathbb{Z}\right)$ için

$$\begin{aligned} \left\|s\left(x_k\right)\right\|_{\Delta} &= \left\|t_k\right\|_{\Delta} = \left|t_1\right| + \left\|\Delta\left(t_k\right)\right\|_{\infty} \\ &= 0 + \sup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{..., \left|\Delta t_{-2}\right|, \left|\Delta t_{-1}\right|, \left|\Delta t_{0}\right|, \left|\Delta t_{1}\right|, \left|\Delta t_{2}\right|, ...\right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left\|x\right\|_{\Delta} &= \left|x_1\right| + \left\|\Delta\left(x_k\right)\right\|_{\infty} \\ &= \left|x_1\right| + \sup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{..., \left|\Delta x_{-2}\right|, \left|\Delta x_{-1}\right|, \left|\Delta x_{0}\right|, \left|\Delta x_{1}\right|, \left|\Delta x_{2}\right|, ...\right\} \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\left\|s\left(x_k\right)\right\|_{\Delta} \leq K\left\|x_k\right\|_{\Delta}$$

olacak şekilde bir $K > 0$ vardır. Böylece s sınırlı lineer bir operatördür.

Şimdi de $s\left(c(\Delta,\mathbb{Z})\right)$ kümesini tanımlayalım.

$$\begin{aligned} s\left(c(\Delta,\mathbb{Z})\right) &= \{x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} : x\in c(\Delta,\mathbb{Z}),\ x_0=x_1=0\} \\ &= \{x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} : \Delta x\in c(\mathbb{Z}),\ x_0=x_1=0\} \end{aligned}$$

4.4.18. Lemma: $s\left(c\left(\Delta,\mathbb{Z}\right)\right)$ lineer uzaydır.

İspat: Tanım gereği $s\left(c\left(\Delta,\mathbb{Z}\right)\right)\subset c(\Delta,\mathbb{Z})$ olur. $\forall x,y\in s\left(c\left(\Delta,\mathbb{Z}\right)\right)$ ve λ herhangi bir skaler olsun.

$$\{x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} :\ x\in c(\Delta,\mathbb{Z}),\ x_0=x_1=0\}$$
$$\{y=(y_k)_{k\in\mathbb{Z}} :\ y\in c(\Delta,\mathbb{Z}),\ y_0=y_1=0\}$$

$c\left(\Delta,\mathbb{Z}\right)$ lineer uzay olduğundan toplamaya göre kapalıdır. O halde

$$\begin{array}{c} x_0+y_0=0 \\ x_1+y_1=0 \end{array},\ x+y\in c(\Delta,\mathbb{Z})$$

olur. Böylece $x+y\in s\left(c(\Delta,\mathbb{Z})\right)$ bulunur. $c(\Delta,\mathbb{Z})$ lineer uzay olduğundan skalerle çarpmaya göre kapalıdır. O halde

$$\begin{array}{c} \lambda x_0=0 \\ \lambda x_1=0 \end{array},\ \lambda x\in c(\Delta,\mathbb{Z})$$

olur. Böylece $\lambda x\in s\left(c(\Delta,\mathbb{Z})\right)$ bulunur. Bu halde $s\left(c(\Delta,\mathbb{Z})\right),\ c(\Delta,\mathbb{Z})$ uzayının bir alt uzayı ve dolayısıyla lineer uzaydır.

$s\left(c(\Delta,\mathbb{Z})\right),\ c(\Delta,\mathbb{Z})$ uzayının bir alt uzayı olduğundan $c(\Delta,\mathbb{Z})$ için tanımladığımız norm ile $s\left(c(\Delta,\mathbb{Z})\right)$ uzayıda normlu bir uzaydır. Yani

$$\begin{aligned} \left\|\cdot\right\|_\Delta &: \quad s\left(c(\Delta,\mathbb{Z})\right)\to\mathbb{R} \\ x &\to \quad \left\|x\right\|_\Delta=|x_1|+\left\|\Delta x\right\|_\infty \end{aligned}$$

ve $x_1=0$ olmasından

$$x\to\left\|x\right\|_\Delta=\left\|\Delta x\right\|_\infty$$

olur.

4.4.19. Teorem: Aşağıdaki şekilde tanımlanan Δ operatörü bir lineer homeomorfizmdir.

$$\begin{aligned} \Delta &: \quad s\left(c(\Delta,\mathbb{Z})\right)\to\ c(\mathbb{Z}) \\ x &= \quad (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}\to\Delta x=x_k-x_{k+1}=y \end{aligned}$$

İspat: i. Δ lineerdir. $\forall x, z \in s\left(c\left(\Delta, \mathbb{Z}\right)\right)$ ve λ herhangi bir skaler olmak üzere

$$\Delta\left(x+z\right) = \Delta\left(x\right) + \Delta\left(z\right)$$

ve

$$\Delta\left(\lambda x\right) = \lambda \Delta\left(x\right)$$

olduğundan Δ lineerdir.

ii. Δ birebirdir. $x, z \in s\left(c\left(\Delta, \mathbb{Z}\right)\right)$ alalım. $\Delta\left(x\right) = \Delta(z)$ ise $\Delta(x-z) = 0$ bulunur. Bu halde

$$\Delta(x-z) = (x_k - z_k) - (x_{k+1} - z_{k+1}) = 0$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 = 0 \\ x_1 - z_1 &= x_2 - z_2 = 0 \Rightarrow x_2 = z_2 \\ x_2 - z_2 &= x_3 - z_3 = 0 \Rightarrow x_3 = z_3 \\ &. \\ &. \\ &. \\ x_{k-1} - z_{k-1} &= x_k - z_k = 0 \Rightarrow x_k = z_k \ \forall k \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} x_0 &= z_0 = 0 \\ x_{-1} - z_{-1} &= x_0 - z_0 = 0 \Rightarrow x_{-1} = z_{-1} \\ x_{-2} - z_{-2} &= x_{-1} - z_{-1} = 0 \Rightarrow x_{-2} = z_{-2} \\ &. \\ &. \\ &. \\ x_{-k} - z_{-k} &= x_{-k+1} - z_{-k+1} = 0 \Rightarrow x_{-k} = z_{-k} \ \forall k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \end{aligned}$$

bulunur. O halde $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$ elde edilir. Böylece Δ birebirdir.

iii. Δ örtendir. $\forall y \in c\left(\mathbb{Z}\right)$ için $y_k = \Delta x_k$ olacak şekilde en az bir $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in s\left(c\left(\Delta, \mathbb{Z}\right)\right)$

vardır. Gerçekten

$$x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = \begin{cases} 0, \ k = 1, 0 \\ -\sum_{v=1}^{k} y_{v-1}, \ k \geq 1 \\ \sum_{v=k}^{0} y_v, \ k \leq 0 \end{cases}$$

olarak seçilirse $y_k = \Delta x_k$ elde edilir. Böylece Δ örtendir.

iv. Δ sınırlıdır. $\forall x \in s\left(c\left(\Delta, \mathbb{Z}\right)\right)$ için

$$\begin{aligned} \|\Delta\| &= \sup\left\{ \frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\Delta} : x \neq \theta, \ x \in s\left(c(\Delta, \mathbb{Z})\right) \right\} \\ &= \sup\left\{ \frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|\Delta x\|_\infty} : x \neq \theta, \ x \in s\left(c(\Delta, \mathbb{Z})\right) \right\} = 1 \end{aligned}$$

olur. Böylece $\|\Delta x\|_\infty \leq \|\Delta\| \|x\|_\Delta$, $\|\Delta\| = 1$ olduğundan sağlanır ve Δ sınırlıdır.

v. Δ^{-1} sınırlıdır.

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} &: \ c\left(\mathbb{Z}\right) \to s\left(c\left(\Delta, \mathbb{Z}\right)\right) \\ x &= (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \to \Delta^{-1} x = y \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. O halde $\forall x \in c\left(\mathbb{Z}\right)$ için

$$\begin{aligned} \left\|\Delta^{-1}\right\| &= \sup\left\{ \frac{\|\Delta^{-1}(x)\|_\Delta}{\|x\|_\infty} : x \neq \theta, \ x \in c(\mathbb{Z}) \right\} \\ &= \sup\left\{ \frac{\|\Delta\left(\Delta^{-1}(x)\right)\|_\infty}{\|x\|_\infty} : x \neq \theta, \ x \in c(\mathbb{Z}) \right\} = 1 \end{aligned}$$

olur. Böylece $\|\Delta^{-1}(x)\|_\Delta \leq \|\Delta^{-1}\| \|x\|_\infty$, $\|\Delta^{-1}\| = 1$ olduğundan sağlanır ve Δ^{-1} sınırlıdır. Böylece Δ bir lineer homeomorfizmdir. Buradan $s\left(c(\Delta, \mathbb{Z})\right)$ ve $c(\mathbb{Z})$ uzayları denk topolojik uzaylardır.

$$s\left(c(\Delta, \mathbb{Z})\right) \simeq c\left(\mathbb{Z}\right)$$

olarak gösterilir.

4.4.20. Lemma: Δ ve Δ^{-1} dönüşümleri normu koruyan dönüşümlerdir.

İspat:

$$\begin{aligned} \Delta &: \ s\left(c\left(\Delta, \mathbb{Z}\right)\right) \to \ c\left(\mathbb{Z}\right) \\ x &= (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \to \Delta x = (\Delta x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \\ \|x\|_\Delta &= \|\Delta x\|_\infty \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} &: \ c\left(\mathbb{Z}\right) \to s\left(c\left(\Delta, \mathbb{Z}\right)\right) \\ x &= (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \to \Delta^{-1}(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \\ \|x\|_\infty &= \left\|\Delta^{-1} x\right\|_\Delta \end{aligned}$$

olduğundan Δ ve Δ^{-1} dönüşümleri normu korurlar.

4.4.21. Teorem: $[c(\mathbb{Z})]^*$ ve $[s(c(\Delta,\mathbb{Z}))]^*$ sırasıyla $c(\mathbb{Z})$ ve $s(c(\Delta,\mathbb{Z}))$ uzaylarının sürekli duallerini göstersin. Bu takdirde

$$\begin{aligned} T &: [s(c(\Delta,\mathbb{Z}))]^* \to [c(\mathbb{Z})]^* \\ f_\Delta &\to T(f_\Delta) = f_\Delta \circ \Delta^{-1} = f \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan T dönüşümü bir lineer izometridir.

İspat: i. T lineerdir. $\forall f_\Delta, g_\Delta \in [s(c(\Delta,\mathbb{Z}))]^*$ ve λ skaleri için

$$\begin{aligned} T(f_\Delta + g_\Delta) &= f_\Delta + g_\Delta \circ \Delta^{-1} \\ &= f_\Delta \circ \Delta^{-1} + g_\Delta \circ \Delta^{-1} \\ &= T(f_\Delta) + T(g_\Delta) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T(\lambda f_\Delta) &= \lambda f_\Delta \circ \Delta^{-1} \\ &= \lambda \left(f_\Delta \circ \Delta^{-1}\right) \\ &= \lambda T(f_\Delta) \end{aligned}$$

olduğundan T lineerdir.

ii. T normu korur. $F = \mathbb{R}$ veya $F = \mathbb{C}$ olsun.

$$\begin{aligned} [s(c(\Delta,\mathbb{Z}))]^* &= \{f_\Delta \mid f_\Delta : s(c(\Delta,\mathbb{Z})) \to F,\ f_\Delta \text{ lineer ve sınırlı } \} \\ \|f_\Delta\| &= \sup\{\|f_\Delta(x)\| : \|x\|_\Delta = 1\} \\ &= \sup\{|f_\Delta(x)| : \|x\|_\Delta = 1\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} [l_\infty(\mathbb{Z})]^* &= \{T(f_\Delta) \mid T(f_\Delta) : c(\mathbb{Z}) \to F,\ T(f_\Delta) \text{ lineer ve sınırlı}\} \\ \|T(f_\Delta)\| &= \sup\{\|T(f_\Delta(x))\| : \|x\|_\infty = 1\} \\ &= \sup\{|T(f_\Delta(x))| : \|x\|_\infty = 1\} \\ &= \sup\left\{\left|f_\Delta \circ \Delta^{-1}(x)\right| : \|x\|_\infty = 1\right\} \\ &= \sup\left\{\left|f_\Delta\left(\Delta^{-1}(x)\right)\right| : \|x\|_\infty = 1\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. $\Delta^{-1} : c(\mathbb{Z}) \to s(c(\Delta, \mathbb{Z}))$ olduğundan $x \in c(\mathbb{Z})$ için $\Delta^{-1}x = y \in s(c(\Delta, \mathbb{Z}))$ olacaktır.

$$\begin{aligned} \|y\|_\Delta &= \left\|\Delta^{-1}(x)\right\|_\Delta \\ &= \left\|\Delta\left(\Delta^{-1}(x)\right)\right\|_\infty \\ &= \|x\|_\infty = 1 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\|T(f_\Delta)\| = \sup\{|f_\Delta(y)| : \|y\|_\Delta = 1\}$$

elde edilir. O halde T normu korur.

iii. T birebirdir. $\forall f_\Delta, g_\Delta \in [s(c(\Delta, \mathbb{Z}))]^*$ olmak üzere

$$\begin{aligned} T(f_\Delta) &= T(g_\Delta) \\ f_\Delta \circ \Delta^{-1} &= g_\Delta \circ \Delta^{-1} \\ f_\Delta &= g_\Delta \end{aligned}$$

olur. Böylece T birebirdir.

iv. T örtendir. $\forall f \in [c(\mathbb{Z})]^*$ için $T(f_\Delta) = f$ olacak şekilde en az bir $f_\Delta \in [s(c(\Delta, \mathbb{Z}))]^*$ vardır. Gerçekten

$$\begin{aligned} f &= f \circ \left(\Delta \circ \left(\Delta^{-1}\right)\right) \\ &= (f \circ \Delta) \circ \left(\Delta^{-1}\right) \\ &= T(f \circ \Delta) \\ &= T(f_\Delta) \end{aligned}$$

olur. Böylece T örtendir. O halde T bir lineer izomorfizmdir. Buradan $[s(c(\Delta, \mathbb{Z}))]^*$ ile $[c(\mathbb{Z})]^*$
denk topolojik uzaylardır denir.

$$[s(c(\Delta, \mathbb{Z}))]^* \simeq [c(\mathbb{Z})]^*$$

olarak gösterilir.

Şimdi s operatörünü

$$\begin{aligned} s &: c_0(\Delta, \mathbb{Z}) \to c_0(\Delta, \mathbb{Z}) \\ x &\to s(x) = t = (..., x_{-2}, x_{-1}, 0, 0, x_2, x_3, ...) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. s lineer operatördür. Gerçekten $\forall x, y \in c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ ve λ skaleri için

$$s(x+y) = s(x) + s(y)$$

ve

$$s(\lambda x) = \lambda s(x)$$

bulunur. Ayrıca $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ için

$$\begin{aligned} \|s(x_k)\|_\Delta &= \|t_k\|_\Delta = |t_1| + \|\Delta(t_k)\|_\infty \\ &= 0 + \sup_{k\in\mathbb{Z}}\{..., |\Delta t_{-2}|, |\Delta t_{-1}|, |\Delta t_0|, |\Delta t_1|, |\Delta t_2|, ...\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|x\|_\Delta &= |x_1| + \|\Delta(x_k)\|_\infty \\ &= |x_1| + \sup_{k\in\mathbb{Z}}\{..., |\Delta x_{-2}|, |\Delta x_{-1}|, |\Delta x_0|, |\Delta x_1|, |\Delta x_2|, ...\} \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\|s(x_k)\|_\Delta \leq K \|x_k\|_\Delta$$

olacak şekilde bir $K > 0$ vardır. Böylece s sınırlı lineer bir operatördür.

Şimdi de $s(c_0(\Delta, \mathbb{Z}))$ kümesini tanımlayalım.

$$\begin{aligned} s(c_0(\Delta, \mathbb{Z})) &= \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} : x \in c_0(\Delta, \mathbb{Z}),\ x_0 = x_1 = 0\} \\ &= \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} : \Delta x \in c_0(\mathbb{Z}),\ x_0 = x_1 = 0\} \end{aligned}$$

4.4.22. Lemma: $s(c_0(\Delta, \mathbb{Z}))$ lineer uzaydır.

İspat: Tanım gereği $s(c_0(\Delta, \mathbb{Z})) \subset c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ olur. $\forall x, y \in s(c_0(\Delta, \mathbb{Z}))$ ve λ herhangi bir skaler olsun.

$$\{x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} :\ x \in c_0(\Delta, \mathbb{Z}),\ x_0 = x_1 = 0\}$$

$$\{y = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}} :\ y \in c_0(\Delta, \mathbb{Z}),\ y_0 = y_1 = 0\}$$

$c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ lineer uzay olduğundan toplamaya göre kapalıdır. O halde

$$\begin{matrix} x_0 + y_0 = 0 \\ x_1 + y_1 = 0 \end{matrix},\ x + y \in c_0(\Delta, \mathbb{Z})$$

olur. Böylece $x+y \in s(c_0(\Delta, \mathbb{Z}))$ bulunur. $c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ lineer uzay olduğundan skalerle çarpmaya göre kapalıdır. O halde

$$\begin{matrix} \lambda x_0 = 0 \\ \lambda x_1 = 0 \end{matrix},\ \lambda x \in c_0(\Delta, \mathbb{Z})$$

olur. Böylece $\lambda x \in s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))$ bulunur. Bu halde $s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))$, $c_0(\Delta,\mathbb{Z})$ uzayının bir alt uzayı olduğundan lineer uzaydır.

$s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))$, $c_0(\Delta,\mathbb{Z})$ uzayının bir alt uzayı olduğundan $c_0(\Delta,\mathbb{Z})$ için tanımladığımız norm ile $s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))$ uzayıda normlu bir uzaydır. Yani

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\Delta &: s(c_0(\Delta,\mathbb{Z})) \to \mathbb{R} \\ x &\to \|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty \end{aligned}$$

ve $x_1 = 0$ olmasından

$$x \to \|x\|_\Delta = \|\Delta x\|_\infty$$

olur.

4.4.23. Teorem: Aşağıdaki şekilde tanımlanan Δ operatörü bir lineer homeomorfizmdir.

$$\begin{aligned} \Delta &: s(c_0(\Delta,\mathbb{Z})) \to c_0(\mathbb{Z}) \\ x &= (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \to \Delta x = x_k - x_{k+1} = y \end{aligned}$$

İspat: i. Δ lineerdir. $\forall x, z \in s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))$ ve λ herhangi bir skaler olmak üzere

$$\Delta(x+z) = \Delta(x) + \Delta(z)$$

ve

$$\Delta(\lambda x) = \lambda\Delta(x)$$

olduğundan Δ lineerdir.

ii. Δ birebirdir. $x, z \in s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))$ alalım. $\Delta(x) = \Delta(z)$ ise $\Delta(x-z) = 0$ bulunur. Bu halde

$$\Delta(x-z) = (x_k - z_k) - (x_{k+1} - z_{k+1}) = 0$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 = 0 \\ x_1 - z_1 &= x_2 - z_2 = 0 \Rightarrow x_2 = z_2 \\ x_2 - z_2 &= x_3 - z_3 = 0 \Rightarrow x_3 = z_3 \\ &. \\ &. \\ &. \\ x_{k-1} - z_{k-1} &= x_k - z_k = 0 \Rightarrow x_k = z_k \ \forall k \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} x_0 &= z_0 = 0 \\ x_{-1} - z_{-1} &= x_0 - z_0 = 0 \Rightarrow x_{-1} = z_{-1} \\ x_{-2} - z_{-2} &= x_{-1} - z_{-1} = 0 \Rightarrow x_{-2} = z_{-2} \\ &. \\ &. \\ &. \\ x_{-k} - z_{-k} &= x_{-k+1} - z_{-k+1} = 0 \Rightarrow x_{-k} = z_{-k} \ \forall k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \end{aligned}$$

bulunur. O halde $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$ elde edilir. Böylece Δ birebirdir.

iii. Δ örtendir. $\forall y \in c_0(\mathbb{Z})$ için $y_k = \Delta x_k$ olacak şekilde en az bir $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in s(c_0(\Delta, \mathbb{Z}))$ vardır. Gerçekten

$$x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = \begin{cases} 0, \ k = 1, 0 \\ -\sum_{v=1}^{k} y_{v-1}, \ k \geq 1 \\ \sum_{v=k}^{0} y_v, \ k \leq 0 \end{cases}$$

olarak seçilirse $y_k = \Delta x_k$ elde edilir. Böylece Δ örtendir.

iv. Δ sınırlıdır. $x \in s(c_0(\Delta, \mathbb{Z}))$ olsun.

$$\begin{aligned} \|\Delta\| &= \sup\left\{ \frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\Delta} : x \neq \theta, \ x \in s(c_0(\Delta, \mathbb{Z})) \right\} \\ &= \sup\left\{ \frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|\Delta x\|_\infty} : x \neq \theta, \ x \in s(c_0(\Delta, \mathbb{Z})) \right\} = 1 \end{aligned}$$

olur. Böylece $\|\Delta x\|_\infty \leq \|\Delta\| \|x\|_\Delta, \|\Delta\| = 1$ olduğundan sağlanır ve Δ sınırlıdır.

v. Δ^{-1} sınırlıdır. Δ birebir ve örten olduğundan bu dönüşümün tersi mevcuttur. O halde

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} &: \quad c_0(\mathbb{Z}) \to s(c_0(\Delta, \mathbb{Z})) \\ x &= (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \to \Delta^{-1}x = y \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. O halde $\forall x \in c(\mathbb{Z})$ için

$$\begin{aligned} \|\Delta^{-1}\| &= \sup\left\{ \frac{\|\Delta^{-1}(x)\|_\Delta}{\|x\|_\infty} : x \neq \theta, \ x \in c_0(\mathbb{Z}) \right\} \\ &= \sup\left\{ \frac{\|\Delta(\Delta^{-1}(x))\|_\infty}{\|x\|_\infty} : x \neq \theta, \ x \in c_0(\mathbb{Z}) \right\} = 1 \end{aligned}$$

olur. O halde $\|\Delta^{-1}(x)\|_\Delta \leq \|\Delta^{-1}\| \|x\|_\infty, \ \|\Delta\| = 1$ olduğundan sağlanır ve Δ^{-1} sınırlıdır. Böylece Δ bir lineer homeomorfizmdir. Buradan $s(c_0(\Delta, \mathbb{Z}))$ ile $c_0(\mathbb{Z})$ uzayları topolojik olarak denk uzaylardır.

$$s\left(c_0(\Delta, \mathbb{Z})\right) \simeq c_0\left(\mathbb{Z}\right)$$

olarak gösterilir.

4.4.24. Lemma: Δ ve Δ^{-1} dönüşümleri normu koruyan dönüşümlerdir.

İspat:

$$\begin{aligned} \Delta &: s\left(c_0\left(\Delta, \mathbb{Z}\right)\right) \rightarrow c_0\left(\mathbb{Z}\right) \\ x &= \left(x_k\right)_{k\in\mathbb{Z}} \rightarrow \Delta x = \left(\Delta x_k\right)_{k\in\mathbb{Z}} \\ \left\|x\right\|_{\Delta} &= \left\|\Delta x\right\|_{\infty} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} &: c_0\left(\mathbb{Z}\right) \rightarrow s\left(c_0\left(\Delta, \mathbb{Z}\right)\right) \\ x &= \left(x_k\right)_{k\in\mathbb{Z}} \rightarrow \Delta^{-1}\left(x_k\right)_{k\in\mathbb{Z}} \\ \left\|x\right\|_{\infty} &= \left\|\Delta^{-1}x\right\|_{\Delta} \end{aligned}$$

olduğundan Δ ve Δ^{-1} dönüşümleri normu korurlar.

4.4.25. Teorem: $\left[c_0\left(\mathbb{Z}\right)\right]^*$ ve $\left[s\left(c_0\left(\Delta, \mathbb{Z}\right)\right)\right]^*$ sırasıyla $c_0\left(\mathbb{Z}\right)$ ve $s\left(c_0\left(\Delta, \mathbb{Z}\right)\right)$ uzaylarının sürekli duallerini göstersin. Bu takdirde

$$\begin{aligned} T &: \left[s\left(c_0\left(\Delta, \mathbb{Z}\right)\right)\right]^* \rightarrow \left[c_0\left(\mathbb{Z}\right)\right]^* \\ f_{\Delta} &\rightarrow T\left(f_{\Delta}\right) = f_{\Delta} \circ \Delta^{-1} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan T dönüşümü bir lineer izometridir.

İspat: **i**. T lineerdir. $\forall f_{\Delta}, g_{\Delta} \in \left[s\left(c_0\left(\Delta, \mathbb{Z}\right)\right)\right]^*$ ve λ skaleri için

$$\begin{aligned} T(f_{\Delta} + g_{\Delta}) &= f_{\Delta} + g_{\Delta} \circ \Delta^{-1} \\ &= f_{\Delta} \circ \Delta^{-1} + g_{\Delta} \circ \Delta^{-1} \\ &= T\left(f_{\Delta}\right) + T\left(g_{\Delta}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T\left(\lambda f_{\Delta}\right) &= \lambda f_{\Delta} \circ \Delta^{-1} \\ &= \lambda\left(f_{\Delta} \circ \Delta^{-1}\right) \\ &= \lambda T\left(f_{\Delta}\right) \end{aligned}$$

olduğundan T lineerdir.

ii. T normu korur. $F = \mathbb{R}$ veya $F = \mathbb{C}$ olsun. T normu korur. $F = \mathbb{R}$ veya $F = \mathbb{C}$ olsun.

$$\begin{aligned}
[s(c(\Delta,\mathbb{Z}))]^* &= \{f_\Delta \mid f_\Delta : s(c_0(\Delta,\mathbb{Z})) \to F,\ f_\Delta \text{ lineer ve sınırlı } \} \\
\|f_\Delta\| &= \sup\{\|f_\Delta(x)\| : \|x\|_\Delta = 1\} \\
&= \sup\{|f_\Delta(x)| : \|x\|_\Delta = 1\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
[l_\infty(\mathbb{Z})]^* &= \{T(f_\Delta) \mid T(f_\Delta) : c_0(\mathbb{Z}) \to F,\ T(f_\Delta) \text{ lineer ve sınırlı}\} \\
\|T(f_\Delta)\| &= \sup\{\|T(f_\Delta(x))\| : \|x\|_\infty = 1\} \\
&= \sup\{|T(f_\Delta(x))| : \|x\|_\infty = 1\} \\
&= \sup\left\{\left|f_\Delta \circ \Delta^{-1}(x)\right| : \|x\|_\infty = 1\right\} \\
&= \sup\left\{\left|f_\Delta\left(\Delta^{-1}(x)\right)\right| : \|x\|_\infty = 1\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\Delta^{-1} : c_0(\mathbb{Z}) \to s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))$ olduğundan $x \in c_0(\mathbb{Z})$ için $\Delta^{-1}x = y \in s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))$ olacaktır.

$$\begin{aligned}
\|y\|_\Delta &= \left\|\Delta^{-1}(x)\right\|_\Delta \\
&= \left\|\Delta\left(\Delta^{-1}(x)\right)\right\|_\infty \\
&= \|x\|_\infty = 1
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\|T(f_\Delta)\| = \sup\{|f_\Delta(y)| : \|y\|_\Delta = 1\}$$

elde edilir. O halde T normu korur.

iii. T birebirdir. $\forall f_\Delta, g_\Delta \in [s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))]^*$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
T(f_\Delta) &= T(g_\Delta) \\
f_\Delta \circ \Delta^{-1} &= g_\Delta \circ \Delta^{-1} \\
f_\Delta &= g_\Delta
\end{aligned}$$

olur. Böylece T birebirdir.

iv. T örtendir. $\forall f \in [c_0(\mathbb{Z})]^*$ için $T(f_\Delta) = f$ olacak şekilde en az bir $f_\Delta \in [s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))]^*$

vardır. Gerçekten

$$\begin{aligned} f &= f \circ \left(\Delta \circ \left(\Delta^{-1}\right)\right) \\ &= (f \circ \Delta) \circ \left(\Delta^{-1}\right) \\ &= T(f \circ \Delta) \\ &= T(f_{\Delta}) \end{aligned}$$

olur. Böylece T örtendir. O halde T bir lineer izomorfizmdir. Böylece $[s(c_0(\Delta, \mathbb{Z}))]^*$ ile $[c_0(\mathbb{Z})]^*$
denk uzaylardır denir.

$$[s(c_0(\Delta, \mathbb{Z}))]^* \simeq [c_0(\mathbb{Z})]^*$$

olarak gösterilir.

4.4.26. Lemma: (**a**) $s(c_0(\Delta, \mathbb{Z})) \subset s(c(\Delta, \mathbb{Z}))$

(**b**) $s(c(\Delta, \mathbb{Z})) \subset s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))$ kapsama bağıntıları mevcuttur.

İspat: (**a**) $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in s(c_0(\Delta, \mathbb{Z}))$ olsun. O halde $x \in c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ ve $x_0 = x_1 = 0$ olur. $c_0(\Delta, \mathbb{Z}) \subset c(\Delta, \mathbb{Z})$ olmasından $x \in c(\Delta, \mathbb{Z})$ ve $x_0 = x_1 = 0$ elde edilir. Böylece $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in s(c(\Delta, \mathbb{Z}))$ bulunur. Buradan $s(c_0(\Delta, \mathbb{Z})) \subset s(c(\Delta, \mathbb{Z}))$ olur.

(**b**) $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in s(c(\Delta, \mathbb{Z}))$ olsun. O halde $x \in c(\Delta, \mathbb{Z})$ ve $x_0 = x_1 = 0$ olur. $c(\Delta, \mathbb{Z}) \subset l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ olmasından $x \in l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ ve $x_0 = x_1 = 0$ elde edilir. Böylece $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))$ bulunur. Buradan $s(c(\Delta, \mathbb{Z})) \subset s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))$ olur.

4.5. Bilateral Dizilerin Fark Dizi Uzaylarının $\alpha-$, $\beta-$, $\gamma-$ Dualleri

4.5.1. Lemma: $B(X)$ bilateral dizilerin herhangi bir uzayı olsun. $B^\alpha(X) \subset B^\beta(X) \subset B^\gamma(X)$ kapsama bağıntısı mevcuttur.

İspat: $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in B^\alpha(X)$ olsun. O halde $\forall x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in B(X)$ için

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k x_k| < \infty$$

olur. Mutlak yakınsak serilerin yakınsak olmasından

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x_k < \infty$$

bulunur. Böylece $a=(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in B^{\beta}(X)$ ve $B^{\alpha}(X)\subset B^{\beta}(X)$ olur. Ayrıca yakınsak serilerin sınırlı olmasından

$$\sup\left|\sum_{k=-n}^{n}a_kx_k\right|<\infty$$

bulunur. Böylece $a=(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in B^{\gamma}(X)$ ve $B^{\beta}(X)\subset B^{\gamma}(X)$ elde edilir.

4.5.2. Lemma: $B(X)$ ve $B(Y)$ bilateral dizi uzayı olsunlar. $B(X)\subset B(Y)$ ise

(**a**) $B^{\alpha}(Y)\subset B^{\alpha}(X)$,

(**b**) $B^{\beta}(Y)\subset B^{\beta}(X)$,

(**c**) $B^{\gamma}(Y)\subset B^{\gamma}(X)$ olur.

İspat: (**a**) $a=(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in B^{\alpha}(Y)$ olsun. O halde $\forall y=(y_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in B(Y)$ için

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_ky_k|<\infty$$

olur. $B(X)\subset B(Y)$ olmasından $\forall x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in B(X)\subset B(Y)$ yani

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_kx_k|<\infty$$

bulunur. Böylece $a=(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in B^{\alpha}(X)$ elde edilir.

(**b**) $a=(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in B^{\beta}(Y)$ olsun. O halde $\forall y=(y_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in B(Y)$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_ky_k<\infty$$

olur. $B(X)\subset B(Y)$ olmasından $\forall x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in B(X)\subset B(Y)$ yani

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kx_k<\infty$$

bulunur. Böylece $a=(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in B^{\beta}(X)$ elde edilir.

(**c**) $a=(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in B^{\gamma}(Y)$ olsun. O halde $\forall y=(y_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in B(Y)$

$$\sup\left|\sum_{k=-n}^{n}a_kx_k\right|<\infty$$

olur. $B(X)\subset B(Y)$ olmasından $\forall x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in B(X)\subset B(Y)$ yani

$$\sup\left|\sum_{k=-n}^{n}a_kx_k\right|<\infty$$

bulunur. Böylece $a=(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in B^{\gamma}(X)$ elde edilir.

4.5.3. Lemma: $\sup_{k\in\mathbb{Z}}|x_k-x_{k+1}|<\infty$ ise

i. $\sup_{k\in\mathbb{Z}^{+}} k^{-1}|x_k| < \infty$

ii. $\sup_{k\in\mathbb{Z}^{-}\cup\{0\}} \frac{1}{-k+1}|x_k| < \infty$

olur.

İspat: $\sup_{k\in\mathbb{Z}}|x_k - x_{k+1}| < \infty$ olsun. O halde

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^{+}}|x_k - x_{k+1}| < \infty$$

ve

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^{-}\cup\{0\}}|x_k - x_{k+1}| < \infty$$

olur. 4.2.1. Lemma ile

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^{+}}|x_k - x_{k+1}| < \infty$$

iken

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^{+}} k^{-1}|x_k| < \infty$$

olduğu gösterildi [12]. Böylece (i) elde edilir.

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^{-}\cup\{0\}}|x_k - x_{k+1}| = \sup_{k\in\mathbb{Z}^{+}\cup\{0\}}|x_{-k} - x_{-k+1}| < \infty$$

iken

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^{-}\cup\{0\}} \frac{1}{-k+1}|x_k| < \infty$$

olduğunu gösterelim. $\sup_{k\in\mathbb{Z}^{-}\cup\{0\}} \frac{1}{-k+1}|x_k| < \infty$ ile $\sup_{k\in\mathbb{Z}^{+}\cup\{0\}} \frac{1}{k+1}|x_{-k}| < \infty$ denk ifadelerdir.

$$\begin{aligned} |x_{-k}| &= |x_{-k} - x_1 + x_1| \\ &\leq |x_{-k} - x_1| + |x_1| \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} |x_{-k} - x_1| &= |x_0 - x_1 + x_{-1} - x_0 + x_{-2} - x_{-1} + ... + x\,{}_{-k} - x_{-k+1}| \\ &\leq |x_0 - x_1| + |x_{-1} - x_0| + ... + |x_{-k} - x_{-k+1}| \\ &\leq (k+1) \sup_{k\in\mathbb{Z}^{+}\cup\{0\}}|x_{-k} - x_{-k+1}| = O(k+1) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece t bir sabit olmak üzere

$$|x_{-k}| \leq O(k+1) + t$$

bulunur. Buradan

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}} \frac{1}{k+1}\left|x_{-k}\right| < \infty$$

veya denk olarak

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^-\cup\{0\}} \frac{1}{-k+1}\left|x_{k}\right| < \infty$$

elde edilir.

4.5.4. Lemma: $\sum_{k=0}^{\infty} k\left|a_{-k}\right| < \infty$ ise $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\left|a_{-k}\right| < \infty$ olur.

İspat: Limit karşılaştırma testi gereğince $\sum a_k$ ve $\sum b_k$ pozitif terimil seriler ve

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L$$

olsun. $0 < L < \infty$ ise $\sum a_k$ ve $\sum b_k$ serilerinin karakterleri aynıdır [36]. O halde

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k\left|a_{-k}\right|}{(k+1)\left|a_{-k}\right|} = 1$$

olduğundan iki serinin karakteri aynı ve $\sum_{k=0}^{\infty} k\left|a_{-k}\right| < \infty$ olduğundan

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\left|a_{-k}\right| < \infty$$

bulunur.

4.5.5. Teorem:

$$\left[s\left(l_\infty\left(\Delta,\mathbb{Z}\right)\right)\right]^\alpha = \left\{a = (a_k)_{-\infty}^{\infty} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|ka_k\right| < \infty\right\} = D_1$$

olur.

İspat: $a \in D_1$ olsun. Herhangi bir $x \in s\left(l_\infty\left(\Delta,\mathbb{Z}\right)\right)$ alalım.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|a_k x_k\right| &= \sum_{k=-\infty}^{0} \left|a_k x_k\right| + \sum_{k=1}^{\infty} \left|a_k x_k\right| \\
&= \sum_{k=-\infty}^{0} \left|\left(\frac{-k+1}{-k+1}\right) a_k x_k\right| + \sum_{k=1}^{\infty} \left|\left(\frac{k}{k}\right) a_k x_k\right| \\
&= \sum_{k=-\infty}^{0} \left|a_k\right| \left|-k+1\right| \left(\frac{\left|x_k\right|}{\left|-k+1\right|}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left|a_k\right| k \left(\frac{\left|x_k\right|}{k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left|a_{-k}\right| \left|k+1\right| \left(\frac{\left|x_{-k}\right|}{\left|k+1\right|}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left|a_k\right| k \left(\frac{\left|x_k\right|}{k}\right)
\end{aligned}$$

$x \in s\left(l_\infty\left(\Delta,\mathbb{Z}\right)\right)$ olduğundan $x_0 = x_1 = 0$ ve $\Delta x \in l_\infty\left(\mathbb{Z}\right)$ olur. Yani

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \left|x_k - x_{k+1}\right| < \infty$$

bulunur. O halde 4.5.3. Lemma, 4.5.4. Lemma ve $a \in D_1$ kabulünden

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{-k}| (k+1) \left(\frac{|x_{-k}|}{(k+1)} \right) < \infty \text{ ve } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| k \left(\frac{|x_k|}{k} \right) < \infty$$

elde edilir. O halde

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k x_k| < \infty$$

olur. Böylece $a \in [s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))]^\alpha$ bulunur.

Tersine $a \in [s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))]^\alpha$ olsun. Bu takdirde $\forall x \in s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))$ için

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k a_k| < \infty$$

olur. Özel olarak $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$

$$x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ k, & k \neq 1 \end{cases}$$

olarak seçilirse

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k a_k| &= (\cdots + |-2a_{-2}| + |-1a_{-1}| + |0a_0| + |1a_1| + |2a_2| + \cdots) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k x_k| + |a_1| \end{aligned}$$

elde edilir. $a \in [s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))]^\alpha$ kabulünden dolayı $\forall x \in s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))$ için

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k a_k| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k x_k| + |a_1| < \infty$$

elde edilir. Bu halde $a \in D_1$ olur. Böylece $D_1 = [s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))]^\alpha$ elde edilir.

4.5.6. Lemma: $[s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))]^\alpha = [s(c(\Delta, \mathbb{Z}))]^\alpha$ eşitliği mevcuttur.

İspat: $s(c(\Delta, \mathbb{Z})) \subset s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))$ olduğundan dolayı 4.5.2. Lemma (a) kullanılarak $[s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))]^\alpha \subset [s(c(\Delta, \mathbb{Z}))]^\alpha$ bulunur. $a \in [s(c(\Delta, \mathbb{Z}))]^\alpha$ olsun. Herhangi bir $x \in s(c(\Delta, \mathbb{Z}))$ için

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k x_k| < \infty$$

olur. Özel olarak $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$

$$x = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ k, & k \neq 1 \end{cases}$$

şeklinde seçilirse

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |ka_k| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k x_k| + |a_1| < \infty$$

bulunur. O halde $a \in [s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^\alpha$ ve $[s(c(\Delta,\mathbb{Z}))]^\alpha \subset [s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^\alpha$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

4.5.7 Lemma: (**a**) $[s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^\alpha = [l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})]^\alpha$

(**b**) $[s(c(\Delta,\mathbb{Z}))]^\alpha = [c(\Delta,\mathbb{Z})]^\alpha$

(**c**) $[s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))]^\alpha = [c_0(\Delta,\mathbb{Z})]^\alpha$

eşitlikleri mevcuttur.

İspat: (**a**) $s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})) \subset (l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))$ olduğundan dolayı 4.5.2. Lemma (a) kullanılarak $[l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})]^\alpha \subset [s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^\alpha$ bulunur. $a \in [s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^\alpha$ olsun. Herhangi bir $x \in l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ alalım. O halde $\Delta x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k x_k| &= \sum_{k=-\infty}^{0} |a_k x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| \\ &= \sum_{k=-\infty}^{0} \left| a_k x_k \left(\frac{-k+1}{-k+1}\right)\right| + \sum_{k=1}^{\infty} \left| a_k x_k \left(\frac{k}{k}\right)\right| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |a_{-k}| (k+1) \left(\frac{|x_{-k}|}{(k+1)}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| k \left(\frac{|x_k|}{k}\right)\end{aligned}$$

olur. 4.5.3. Lemma ve 4.5.4. Lemma kullanılarak

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{-k}| (k+1) \left(\frac{|x-_k|}{(k+1)}\right) < \infty$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| k \left(\frac{|x_k|}{k}\right) < \infty$$

olur. O halde

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k x_k| < \infty$$

elde edilir. Böylece $a \in [l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})]^\alpha$ bulunur. Buradan $[s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^\alpha \subset [l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})]^\alpha$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

(**b**) $s(c(\Delta,\mathbb{Z})) \subset c(\Delta,\mathbb{Z})$ olduğundan dolayı 4.5.2. Lemma (a) kullanılarak $[c(\Delta,\mathbb{Z})]^\alpha \subset [s(c(\Delta,\mathbb{Z}))]^\alpha$ bulunur. $a \in [s(c(\Delta,\mathbb{Z}))]^\alpha$ olsun. Herhangi bir $x \in c(\Delta,\mathbb{Z})$ alalım. O halde

$\Delta x \in c(\mathbb{Z}) \subset l_\infty(\mathbb{Z})$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k x_k| &= \sum_{k=-\infty}^{0} |a_k x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| \\
&= \sum_{k=-\infty}^{0} \left| a_k x_k \left(\frac{-k+1}{-k+1} \right) \right| + \sum_{k=1}^{\infty} \left| a_k x_k \left(\frac{k}{k} \right) \right| \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} |a_{-k}| (k+1) \left(\frac{|x_{-k}|}{(k+1)} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \, k \left(\frac{|x_k|}{k} \right)
\end{aligned}$$

olur. 4.5.3. Lemma, 4.5.4. Lemma ve 4.5.6. Lemma kullanılarak

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{-k}| (k+1) \left(\frac{|x-_k|}{(k+1)} \right) < \infty$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \, k \left(\frac{|x_k|}{k} \right) < \infty$$

olur. O halde

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k x_k| < \infty$$

elde edilir. Böylece $a \in [c(\Delta, \mathbb{Z})]^\alpha$ bulunur. Buradan $[s(c(\Delta, \mathbb{Z}))]^\alpha \subset [c(\Delta, \mathbb{Z})]^\alpha$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

(**c**) $s(c_0(\Delta, \mathbb{Z})) \subset c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ olduğundan dolayı 4.5.2. Lemma (a) kullanılarak $[c_0(\Delta, \mathbb{Z})]^\alpha$ $\subset [s(c_0(\Delta, \mathbb{Z}))]^\alpha$ bulunur. $a \in [s(c_0(\Delta, \mathbb{Z}))]^\alpha$ olsun. Kabul edelim ki $a \notin [c_0(\Delta, \mathbb{Z})]^\alpha$. O halde

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k x_k| = \infty$$

olacak şekilde en az bir $x \in c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ vardır. Özel olarak $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ olmak üzere

$$x' = \begin{cases} 0, & k = 1, 0 \\ x_k, & k \neq 1, 0 \end{cases}$$

şeklinde seçilsin. Bu takdirde $x' \in s(c_0(\Delta, \mathbb{Z}))$ olur. O halde $a \in [s(c_0(\Delta, \mathbb{Z}))]^\alpha$ kabulünden

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k x_k'| < \infty$$

olur. Fakat

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=-n}^{n} |a_k x_k| \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(|a_{-n} x_{-n}| + \cdots + |a_{-1} x_{-1}| + |a_0 x_0| + |a_1 x_1| + |a_2 x_2| + \cdots + |a_n x_n| \right) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

iken $a \in [s(c_0(\Delta, \mathbb{Z}))]^{\alpha}$ olmasından

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=-n}^{n}|a_k x'_k|\right) \\ = & \lim_{n\to\infty}\left(|a_{-n}x_{-n}| + \cdots + |a_{-1}x_{-1}| + |a_0 0| + |a_1 0| + |a_2 x_2| + \cdots + |a_n x_n|\right) \\ < & \ \infty \end{aligned}$$

olur. Buradan $lim_{n\to\infty}(|a_0x_0| + |a_1x_1|) = \infty$ olduğu bulunur. Burada $|x_0|, \ |x_1| < \infty$ olduğundan dolayı $lim_{n\to\infty}(|a_0x_0| + |a_1x_1|) = \infty$ olacak şekilde $a_0, \ a_1$ sayıları olmayacağından kabulümüz yanlış ve dolayısıyla $a \in [c_0(\Delta, \mathbb{Z})]^{\alpha}$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

4.5.8. Lemma:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} ka_k < \infty \Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_k < \infty \text{ ve } nR_n = o(1), \ n \in \mathbb{Z}$$

olur. $\left(R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, \ n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } R_n = \sum_{-\infty}^{k=n-1} a_k, \ n \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}\right)$.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\sum_{k=-\infty}^{\infty} ka_k < \infty$ olsun. O halde

$$\sum_{k=-\infty}^{0} ka_k < \infty \text{ ve } \sum_{k=1}^{\infty} ka_k < \infty$$

olur. 4.2.4. Sonuç (c) ifadesinde

$$\sum_{k=1}^{\infty} ka_k < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} R_k < \infty \text{ ve } nR_n = o(1), \ R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, \ n \in \mathbb{Z}^+$$

olduğu gösterilmişti [12]. İspatın geri kalan kısmı için

$$\sum_{k=-\infty}^{0} ka_k < \infty \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{0} R_k < \infty \text{ ve } nR_n = o(1), \ R_n = \sum_{-\infty}^{k=n-1} a_k, \ n \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$$

olduğunu gösterelim. $R_n = \sum_{-\infty}^{k=n-1} a_k, \ n \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ ile $R_{-n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{-k}, \ n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ifadeleri denktir.

$\sum_{k=-\infty}^{0} ka_k < \infty$ olsun. O halde bu serinin kuyruk kısmı için

$$\lim_{n\to-\infty} \sum_{-\infty}^{n-1} ka_k = 0$$

olduğundan $nR_n = o(1)$, $(n \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\})$ bulunur. Ayrıca

$$-\sum_{k=-\infty}^{0} ka_k = \sum_{k=-\infty}^{0} R_k$$

bulunur. $\sum_{k=-\infty}^{0} ka_k < \infty$ kabulünden $\sum_{k=-\infty}^{0} R_k < \infty$ elde edilir. Böylece $\sum_{k=-\infty}^{0} R_k + \sum_{k=1}^{\infty} R_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_k < \infty$ ve $nR_n = o(1)$, $(n \in \mathbb{Z})$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_k < \infty$ ve $nR_n = o\,(1)\,,\ n \in \mathbb{Z}$ olsun. O halde

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_k = \sum_{k=-\infty}^{0} R_k + \sum_{k=1}^{\infty} R_k$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_k < \infty \text{ ve } \sum_{k=-\infty}^{0} R_k < \infty$$

olur. 4.2.4. Sonuç (c) de

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_k < \infty \text{ ve } nR_n = o\,(1)\,,\ n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} ka_k < \infty$$

olduğu gösterilmişti [12] . İspatın geri kalan kısmı için

$$\sum_{k=-\infty}^{0} R_k < \infty \text{ ve } nR_n = o\,(1)\,,\ n \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{0} ka_k < \infty$$

olduğunu gösterelim.

$$-\sum_{k=-\infty}^{0} ka_k = \sum_{k=-\infty}^{0} R_k$$

eşitliğinden

$$\sum_{k=-\infty}^{0} ka_k < \infty$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} ka_k < \infty$$

bulunur.

4.5.9. Teorem:

$$[s\,(l_\infty\,(\Delta, \mathbb{Z}))]^\beta = \left\{ a = (a_k)_{-\infty}^{\infty} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} ka_k < \infty,\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |R_k| < \infty \right\} = D_2$$

olur.

İspat: $a \in D_2$ olsun. Herhangi bir $x \in s\,(l_\infty\,(\Delta, \mathbb{Z}))$ alalım.

$$\Delta : s\,(l_\infty\,(\Delta, \mathbb{Z})) \to l_\infty\,(\mathbb{Z})$$

dönüşümünde $\Delta x = y$ olacak şekilde yalnız ve yalnız bir $y \in l_\infty\,(\mathbb{Z})$ vardır.

$$\Delta x = x_k - x_{k+1} = y_k,\ x_0 = x_1 = 0$$

olmasından

$$x_k = -\sum_{v=1}^{k} y_{v-1},\ \ y_0 = 0,\ \ k \in \mathbb{Z}^+$$

ve

$$x_k = \sum_{v=k}^{0} y_v,\ \ y_0 = 0,\ \ k \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$$

bulunur. Ayrıca $x_k = \sum_{v=k}^{0} y_v,\ \ k \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ ile $x_{-k} = \sum_{v=0}^{k} y_{-v},\ \ k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ denk ifadelerdir.

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} a_k x_k &= \sum_{k=-n}^{0} a_k x_k + \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \\ &= \sum_{k=-n}^{0} a_k \left(\sum_{v=k}^{0} y_v\right) + \sum_{k=1}^{n} a_k \left(-\sum_{v=1}^{k} y_{v-1}\right)\end{aligned}$$

4.2.5. Teorem (2) de $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k < \infty,\ \sum_{k=1}^{\infty} |R_k| < \infty$ olması kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k x_k &= \sum_{k=1}^{n} a_k \left(-\sum_{v=1}^{k} y_{v-1}\right) \\ &= -\sum_{k=1}^{n-1} R_k y_k + R_n \sum_{k=1}^{n-1} y_k\end{aligned}$$

olduğu gösterildi. Buradan da $\sum_{k=1}^{\infty} R_k y_k$ serisinin mutlak yakınsak ve $n \to \infty$ iken $R_n \sum_{k=1}^{n-1} y_k \to 0$ olduğu gösterildi [12]. Benzer yolla

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{0} a_k x_k &= \sum_{k=-n}^{0} a_k \left(\sum_{v=k}^{0} y_v\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_{-k} \left(\sum_{v=0}^{k} y_{-v}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} R_{-k} y_{-k-1} - R_{-n} \sum_{k=0}^{n-1} y_{-k-1}\end{aligned}$$

elde edilir. Kabulümüzden $\sum_{k=-\infty}^{0} k a_k < \infty,\ \sum_{k=-\infty}^{0} |R_k| < \infty$ veya denk olarak $\sum_{k=0}^{\infty} -k a_{-k} < \infty,\ \sum_{k=0}^{\infty} |R_{-k}| < \infty$ olur. Ayrıca $y_{-k-1} \in l_\infty(\mathbb{Z})$ iken $|y_{-k-1}| \le M \in \mathbb{R}\ \ (\forall k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$ olmasından

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} |R_{-k} y_{-k-1}| &= \sum_{k=0}^{n} |R_{-k}|\,|y_{-k-1}| \\ &= |R_{-0}|\,|y_{-1}| + |R_{-1}|\,|y_{-2}| + \cdots + |R_{-n}|\,|y_{-n-1}| \\ &\le |R_{-0}|\,M + |R_{-1}|\,M + \cdots + |R_{-n}|\,M \\ &= M\left(|R_{-0}| + |R_{-1}| + \cdots + |R_{-n}|\right) \\ &= M \sum_{k=0}^{n} |R_{-k}| < \infty,\ \ (n \to \infty)\end{aligned}$$

elde edilir. $\sum_{k=0}^{\infty} R_{-k} y_{-k-1}$ mutlak yakınsak dolayısıyla $\sum_{k=0}^{\infty} R_{-k} y_{-k-1}$ yakınsaktır. Ayrıca

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} y_{-k-1} &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |y_{-k-1}| \\ &= |y_{-1}| + |y_{-2}| + ... + |y_{-n}| \\ &\leq nM\end{aligned}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}R_{-n} \sum_{k=0}^{n-1} y_{-k-1} &\leq R_{-n} (nM) \\ &= (nR_{-n}) M\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_k < \infty \Rightarrow nR_n = o(1), \ n \in \mathbb{Z}$$

olmasından

$$M (nR_{-n}) \to 0, \ (-n \to -\infty)$$

ve

$$R_{-n} \sum_{k=0}^{n-1} y_{-k-1} \to 0, \ (-n \to -\infty)$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} a_k x_k &= \sum_{k=0}^{n-1} R_{-k} y_{-k-1} - R_{-n} \sum_{k=0}^{n-1} y_{-k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} R_k y_k + R_n \sum_{k=1}^{n-1} y_k \\ &< \infty\end{aligned}$$

$(n \to \infty)$ olur. O halde

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x_k < \infty$$

bulunur ve $a \in [s (l_\infty (\Delta, \mathbb{Z}))]^\beta$ olur.

Şimdi tersine $a \in [s (l_\infty (\Delta, \mathbb{Z}))]^\beta$ olsun. Bu takdirde $\forall x \in s (l_\infty (\Delta, \mathbb{Z}))$ için

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x_k < \infty$$

olur. Özel olarak $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$

$$x = \begin{cases} 0, \ k = 1 \\ k, \ k \neq 1 \end{cases}$$

olarak seçilirse

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} ka_k &= (-na_{-n}) + \cdots + (-2)\, a_{-2} + (-1)\, a_{-1} + 0a_0 + (1)\, a_1 + (2)\, a_2 + \cdots + (na_n) \\ &= a_1 + \sum_{k=-n}^{n} a_k x_k \\ &< \infty\end{aligned}$$

$(n \to \infty)$ bulunur. Böylece $\sum_{k=-\infty}^{\infty} ka_k < \infty$ olur. 4.5.8. Lemmadan

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} ka_k \Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_k < \infty \text{ ve } nR_n = o\,(1)\,,\ n \in \mathbb{Z}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} a_k x_k &= \sum_{k=0}^{n-1} R_{-k} y_{-k-1} - R_{-n} \sum_{k=0}^{n-1} y_{-k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} R_k y_k + R_n \sum_{k=1}^{n-1} y_k \\ &< \infty\end{aligned}$$

$(n \to \infty)$ bulunur. $(n \to \infty)$ için $R_{-n} \sum_{k=0}^{n-1} y_{-k-1} \to 0$ ve $R_n \sum_{k=1}^{n-1} y_k \to 0$ elde edilir. Buradan

$$\sum_{k=-n}^{n} a_k x_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_{-k} y_{-k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} R_k y_k < \infty$$

$(n \to \infty)$ olur. Böylece

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_{-k} y_{-k-1} < \infty \text{ ve } \sum_{k=1}^{\infty} R_k y_k < \infty$$

bulunur. 4.2.5. Teorem (2) ifadesinde $\sum_{k=1}^{\infty} R_k y_k < \infty\ \ (\forall y \in l_\infty)$ iken $\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| < \infty$ olduğu gösterilmişti [1]. İspatın kalan kısmı için $\sum_{k=0}^{\infty} R_{-k} y_{-k-1} < \infty$ iken $\sum_{k=-\infty}^{0} |R_k| < \infty$ veya denk olarak $\sum_{k=0}^{\infty} |R_{-k}| < \infty$ olduğunu gösterelim. $y_{-k-1} \in l_\infty\,(\mathbb{Z})$ olduğundan

$$y_{-k-1} = sign\,(R_{-k}) = \begin{cases} 1,\ R_{-k} > 0 \\ 0,\ R_{-k} = 0 \\ -1,\ R_{-k} < 0 \end{cases}$$

şeklinde seçelim. Buradan $R_{-k} y_{-k-1} = |R_{-k}|$ bulunur. Böylece

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_{-k} y_{-k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} |R_{-k}| < \infty$$

bulunur. O halde

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |R_k| < \infty$$

olur. Bu halde $a \in D_2$ bulunur. Böylece $D_2 = [s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))]^\beta$ elde edilir.

4.5.10. Lemma: $[s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))]^\beta = [s(c(\Delta, \mathbb{Z}))]^\beta$ eşitliği mevcuttur.

İspat: $s(c(\Delta, \mathbb{Z})) \subset s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))$ olduğundan dolayı 4.5.2. Lemma (b) kullanılarak $[s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))]^\beta \subset [s(c(\Delta, \mathbb{Z}))]^\beta$ olur. Şimdi $a \in [s(c(\Delta, \mathbb{Z}))]^\beta$ alalım. Herhangi bir $x \in s(c(\Delta, \mathbb{Z}))$ için

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x_k < \infty$$

olur. Özel olarak $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$

$$x = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ k, & k \neq 1 \end{cases}$$

olarak seçilirse

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x_k + a_1 < \infty$$

olur. Ayrıca

$$\sum_{k=-n}^{n} a_k x_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_{-k} y_{-k-1} - R_{-n} \sum_{k=0}^{n-1} y_{-k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} R_k y_k + R_n \sum_{k=1}^{n-1} y_k$$

olduğunu biliyoruz. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_k < \infty$ ise $n \to \infty$ iken $R_{-n} \sum_{k=0}^{n-1} y_{-k-1} \to 0$, $R_n \sum_{k=1}^{n-1} y_k \to 0$ olduğundan

$$\sum_{k=-n}^{n} a_k x_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_{-k} y_{-k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} R_k y_k < \infty$$

$(n \to \infty)$ bulunur. 4.5.9. Teoremin ispatında

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_k y_k < \infty$$

iken

$$\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| < \infty$$

ve

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_{-k} y_{-k-1} < \infty$$

iken

$$\sum_{k=0}^{\infty} |R_{-k}| < \infty$$

olduğu gösterilmişti. Bu ise $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |R_k| < \infty$ anlamına gelir. O halde $a \in [s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))]^\beta$ bulunur. Böylece $[s(c(\Delta, \mathbb{Z}))]^\beta \subset [s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))]^\beta$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

4.5.11. Lemma: **(a)** $[s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))]^\beta = [l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})]^\beta$

(b) $[s(c(\Delta,\mathbb{Z}))]^{\beta}=[c(\Delta,\mathbb{Z})]^{\beta}$

(c) $[s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))]^{\beta}=[c_0(\Delta,\mathbb{Z})]^{\beta}$ eşitlikleri mevcuttur.

İspat: **(a)** $s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))\subset l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ olduğundan dolayı 4.5.2. Lemma (b) kullanılarak $[l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})]^{\beta}\subset[s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^{\beta}$ bulunur. $a\in[s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^{\beta}$ olsun. Kabul edelim ki $a\notin[l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})]^{\beta}$. O halde

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kx_k=\infty$$

olacak şekilde en az bir $x\in l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ vardır. Özel olarak $x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ olmak üzere

$$x'=\begin{cases}0, & k=1,0\\ x_k, & k\neq 1,0\end{cases}$$

şeklinde seçilsin. Bu takdirde $x'\in s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))$ olur. O halde $a\in[s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^{\beta}$ kabulünden

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kx'_k<\infty$$

olur. Fakat

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=-n}^{n}a_kx_k\right)\\ =\;&\lim_{n\to\infty}(a_{-n}x_{-n}+\cdots+a_{-1}x_{-1}+a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)\\ =\;&\infty\end{aligned}$$

iken $a\in[s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^{\beta}$ olmasından

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=-n}^{n}a_kx'_k\right)\\ =\;&\lim_{n\to\infty}(a_{-n}x_{-n}+\cdots+a_{-1}x_{-1}+a_00+a_10+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)\\ <\;&\infty\end{aligned}$$

olur. Buradan $lim_{n\to\infty}(a_0x_0+a_1x_1)=\infty$ olduğu bulunur. Burada $|x_0|,\ |x_1|<\infty$ olduğundan dolayı $lim_{n\to\infty}(a_0x_0+a_1x_1)=\infty$ olacak şekilde $a_0,\ a_1$ sayıları olmayacağından kabulümüz yanlış ve dolayısıyla $a\in[l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})]^{\beta}$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

(b) $s(c(\Delta,\mathbb{Z}))\subset c(\Delta,\mathbb{Z})$ olduğundan dolayı 4.5.2. Lemma (b) kullanılarak $[c(\Delta,\mathbb{Z})]^{\beta}\subset[s(c(\Delta,\mathbb{Z}))]^{\beta}$ bulunur. $a\in[s(c(\Delta,\mathbb{Z}))]^{\beta}$ olsun. Kabul edelim ki $a\notin[c(\Delta,\mathbb{Z})]^{\beta}$. O halde

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kx_k=\infty$$

olacak şekilde en az bir $x \in c(\Delta,\mathbb{Z})$ vardır. Özel olarak $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c(\Delta,\mathbb{Z})$ olmak üzere

$$x' = \begin{cases} 0, & k = 1, 0 \\ x_k, & k \neq 1, 0 \end{cases}$$

şeklinde seçilsin. Bu takdirde $x' \in s(c(\Delta,\mathbb{Z}))$ olur. O halde $a \in [s(c(\Delta,\mathbb{Z}))]^\beta$ kabulünden

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x'_k < \infty$$

olur. Fakat

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=-n}^{n} a_k x_k\right) \\ = & \lim_{n\to\infty}\left(a_{-n}x_{-n} + \cdots + a_{-1}x_{-1} + a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n\right) \\ = & \infty \end{aligned}$$

iken $a \in [s(c(\Delta,\mathbb{Z}))]^\beta$ olmasından

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=-n}^{n} a_k x'_k\right) \\ = & \lim_{n\to\infty}\left(a_{-n}x_{-n} + \cdots + a_{-1}x_{-1} + a_0 0 + a_1 0 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n\right) \\ < & \infty \end{aligned}$$

olur. Buradan $lim_{n\to\infty}(a_0x_0 + a_1x_1) = \infty$ olduğu bulunur. Burada $|x_0|,\ |x_1| < \infty$ olduğundan dolayı $lim_{n\to\infty}(a_0x_0 + a_1x_1) = \infty$ olacak şekilde $a_0,\ a_1$ sayıları olmayacağından kabulümüz yanlış ve dolayısıyla $a \in [c(\Delta,\mathbb{Z})]^\beta$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

(**c**) $s(c_0(\Delta,\mathbb{Z})) \subset c_0(\Delta,\mathbb{Z})$ olduğundan dolayı 4.5.2. Lemma (b) kullanılarak $[c_0(\Delta,\mathbb{Z})]^\beta \subset [s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))]^\beta$ bulunur. $a \in [s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))]^\beta$ alalım. Kabul edelim ki $a \notin [c_0(\Delta,\mathbb{Z})]^\beta$. O halde

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x_k = \infty$$

olacak şekilde en az bir $x \in c_0(\Delta,\mathbb{Z})$ vardır. Özel olarak $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c_0(\Delta,\mathbb{Z})$ olmak üzere

$$x' = \begin{cases} 0, & k = 1, 0 \\ x_k, & k \neq 1, 0 \end{cases}$$

şeklinde seçilsin. Bu takdirde $x' \in s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))$ olur. O halde $a \in [s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))]^\beta$ kabulünden

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x'_k < \infty$$

olur. Fakat

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=-n}^{n} a_k x_k\right) \\
=& \lim_{n\to\infty}\left(a_{-n}x_{-n}+\cdots+a_{-1}x_{-1}+a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\right) \\
=& \ \infty
\end{aligned}$$

iken $a\in[s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))]^{\beta}$ olmasından

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=-n}^{n} a_k x'_k\right) \\
=& \lim_{n\to\infty}\left(a_{-n}x_{-n}+\cdots+a_{-1}x_{-1}+a_0 0+a_1 0+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\right) \\
<& \ \infty
\end{aligned}$$

olur. Buradan $lim_{n\to\infty}(a_0x_0+a_1x_1)=\infty$ olduğu bulunur. Burada $|x_0|,\ |x_1|<\infty$ olduğundan dolayı $lim_{n\to\infty}(a_0x_0+a_1x_1)=\infty$ olacak şekilde $a_0,\ a_1$ sayıları olmayacağından kabulümüz yanlış ve dolayısıyla $a\in[c_0(\Delta,\mathbb{Z})]^{\beta}$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

4.5.12. Teorem:

$$[s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^{\gamma}=\left\{a=(a_k)_{-\infty}^{\infty}:\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=-n}^{n} k a_k\right|<\infty,\ \sum_{k=-\infty}^{\infty}|R_k|<\infty\right\}=D_3$$

olur.

İspat: $a\in D_3$ olsun. Herhangi bir $x\in s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))$ alalım.

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=-n}^{n} a_k x_k\right| &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=-n}^{0} a_k x_k+\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right| \\
&\le \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=-n}^{0} a_k x_k\right|+\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right| \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=0}^{n} a_{-k} x_{-k}\right|+\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right|
\end{aligned}$$

elde edilir. 4.2.5. Teorem (3) de $\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n} k a_k\right|<\infty$, $\sum_{k=1}^{\infty}|R_k|<\infty$ olması kullanılarak $\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right|<\infty$ olduğu gösterildi [12]. Benzer yolla $x\in s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))$ iken $y\in l_\infty(\mathbb{Z})$ ve $R_{-n}=\sum_{n+1}^{\infty} a_{-k},\ n\in\mathbb{Z}^{+}\cup\{0\}$ için

$$\sum_{k=-n}^{0} a_k x_k=\sum_{k=0}^{n-1} R_{-k}y_{-k-1}-R_{-n}\sum_{k=0}^{n-1} y_{-k-1}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=-n}^{0} a_k x_k\right| &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=0}^{n-1} R_{-k}y_{-k-1} - R_{-n}\sum_{k=0}^{n-1} y_{-k-1}\right| \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=0}^{n-1} R_{-k}y_{-k-1}\right| + \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|R_{-n}\sum_{k=0}^{n-1} y_{-k-1}\right| \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n-1} |R_{-k}y_{-k-1}| + \sup_{n\in\mathbb{N}}|R_{-n}|\sum_{k=0}^{n-1} |y_{-k-1}| \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n-1} |R_{-k}|\,|y_{-k-1}| + \sup_{n\in\mathbb{N}}|R_{-n}|\sum_{k=0}^{n-1} |y_{-k-1}|
\end{aligned}$$

bulunur. $|y_{-k-1}| \leq M \in \mathbb{R}$ $(\forall -k \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\})$ olduğundan

$$\begin{aligned}
&= \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n-1} |R_{-k}|\,|y_{-k-1}| + \sup_{n\in\mathbb{N}}|R_{-n}|\sum_{k=0}^{n-1} |y_{-k-1}| \\
&\leq M\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n-1} |R_{-k}|\right) + nM\sup_{n\in\mathbb{N}}|R_{-n}| \\
&= M\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n-1} |R_{-k}| + \sup_{n\in\mathbb{N}}|nR_{-n}|\right)
\end{aligned}$$

olur. $a \in D_3$ kabulümüzden $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |R_k| < \infty$ olduğundan $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n-1} |R_{-k}| < \infty$ elde edilir. Ayrıca $\sup_{n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}} |\sum_{k=0}^{n} -ka_{-k}| < \infty$ olmasından

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |-nR_{-n}| < \infty$$

dir. Böylece

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=-n}^{0} a_k x_k\right| < \infty$$

bulunur. O halde

$$\sup_{n}\left|\sum_{k=-n}^{n} a_k x_k\right| < \infty$$

olur. Böylece $a \in [s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^\gamma$ elde edilir.

Şimdi tersine $a \in [s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^\gamma$ olsun. Bu takdirde $\forall x \in s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))$ için

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=-n}^{n} x_k a_k\right| < \infty$$

olur. Özel olarak $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$

$$x = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ k, & k \neq 1 \end{cases}$$

olarak seçilirse

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=-n}^{n}ka_k\right| &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|a_1+\sum_{k=-n}^{n}x_ka_k\right|\\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}|a_1|+\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=-n}^{n}x_ka_k\right|\\ &< \infty\end{aligned}$$

olur. 4.2.5. Teorem (3) de $\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n}x_ka_k\right|<\infty$ iken $\sum_{k=1}^{\infty}|R_k|<\infty$ olduğu gösterildi [12]. Benzer yolla $\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=0}^{n}a_{-k}x_{-k}\right|$ iken $\sum_{k=0}^{\infty}|R_{-k}|<\infty$ olduğunu gösterelim.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=0}^{n}a_{-k}x_{-k}\right|=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=0}^{n-1}R_{-k}y_{-k-1}-R_{-n}\sum_{k=0}^{n-1}y_{-k-1}\right|$$

Burada

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}R_{-k}y_{-k-1}\right|-\left|R_{-n}\sum_{k=0}^{n-1}y_{-k-1}\right|\leq\left|\sum_{k=0}^{n-1}R_{-k}y_{-k-1}-R_{-n}\sum_{k=0}^{n-1}y_{-k-1}\right|$$

olmasından

$$\begin{aligned}&\sup_{n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}}\left|\sum_{k=0}^{n-1}R_{-k}y_{-k-1}\right|-\sup_{n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}}\left|R_{-n}\sum_{k=0}^{n-1}y_{-k-1}\right|\\ \leq\ &\sup_{n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}}\left|\sum_{k=0}^{n-1}R_{-k}y_{-k-1}-R_{-n}\sum_{k=0}^{n-1}y_{-k-1}\right|\\ =\ &\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=0}^{n}a_{-k}x_{-k}\right|\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}}\left|\sum_{k=0}^{n-1}R_{-k}y_{-k-1}\right|-\sup_{n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}}\left|R_{-n}\sum_{k=0}^{n-1}y_{-k-1}\right|\leq T$$

olacak şekilde $T\in\mathbb{R}$ vardır. $\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=0}^{n}-ka_{-k}\right|<\infty$ olmasından

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|R_{-n}\sum_{k=0}^{n-1}y_{-k-1}\right| &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}|R_{-n}|\sum_{k=0}^{n-1}|y_{-k-1}|\\ &\leq nM\sup_{n\in\mathbb{N}}|R_{-n}|\\ &= M\sup_{n\in\mathbb{N}}|nR_{-n}|\\ &< \infty\end{aligned}$$

olur. $y_{-k-1}\in l_{\infty}(\mathbb{Z})$ olduğundan

$$y_{-k-1}=sign\left(R_{-k}\right)=\begin{cases}1,\ R_{-k}>0\\ 0,\ R_{-k}=0\\ -1,\ R_{-k}<0\end{cases}$$

şeklinde seçelim. Buradan $R_{-k}y_{-k-1} = |R_{-k}|$ bulunur. Böylece

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=0}^{n-1} R_{-k}y_{-k-1}\right| = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=0}^{n-1} |R_{-k}|\right| < \infty$$

olur. Burada serinin kismi toplamlar dizisi sınırlı ve bütün terimleri de pozitif olduğundan $(n \to \infty)$ için $\sum_{k=0}^{n-1} |R_{-k}| < \infty$ elde edilir. O halde $\sum_{k=0}^{\infty} |R_{-k}| < \infty$ ve

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |R_k| < \infty$$

bulunur. Böylece $a \in D_3$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

4.5.13. Lemma: $[s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^\gamma = [s(c(\Delta,\mathbb{Z}))]^\gamma$ eşitliği mevcuttur..

İspat: $s(c(\Delta,\mathbb{Z})) \subset s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))$ olduğundan dolayı 4.5.2. Lemma (c) kullanılarak $[s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^\gamma \subset [s(c(\Delta,\mathbb{Z}))]^\gamma$ bulunur. $a \in [s(c(\Delta,\mathbb{Z}))]^\gamma$ olsun. Herhangi bir $x \in s(c(\Delta,\mathbb{Z}))$ için

$$\sup_{n}\left|\sum_{k=-n}^{n} a_k x_k\right| < \infty$$

olur. Özel olarak $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$

$$x = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ k, & k \neq 1 \end{cases}$$

şeklinde seçilirse

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=-n}^{n} k a_k\right| &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|a_1 + \sum_{k=-n}^{n} x_k a_k\right| \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}|a_1| + \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=-n}^{n} x_k a_k\right| \\ &< \infty \end{aligned}$$

elde edilir. $\sup_n \left|\sum_{k=-n}^{n} a_k x_k\right| < \infty$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=-n}^{n} k a_k\right| < \infty$ olması ve 4.5.12. Teorem kullanılarak $\sum_{-\infty}^{\infty} |R_k| < \infty$ bulunur. O halde $a \in [s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^\gamma$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

4.5.14. Lemma: **(a)** $[s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^\gamma = [l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})]^\gamma$

(b) $[s(c(\Delta,\mathbb{Z}))]^\gamma = [c(\Delta,\mathbb{Z})]^\gamma$

(c) $[s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))]^\gamma = [c_0(\Delta,\mathbb{Z})]^\gamma$ eşitlikleri mevcuttur.

İspat: **(a)** $s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})) \subset l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ olduğundan dolayı 4.5.2. Lemma (c) kullanılarak $[l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})]^\gamma \subset [s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^\gamma$ bulunur. $a \in [s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^\gamma$ olsun. Kabul edelim ki $a \notin [l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})]^\gamma$. O halde

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=-n}^{n} a_k x_k\right| = \infty$$

olacak şekilde en az bir $x \in l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ vardır. Özel olarak $x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ olmak üzere

$$x' = \begin{cases} 0, & k=1,0 \\ x_k, & k \neq 1,0 \end{cases}$$

şeklinde seçilsin. Bu takdirde $x' \in s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))$ olur. O halde $a \in [s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^\gamma$ kabulünden

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=-n}^{n} a_k x'_k \right| < \infty$$

olur. Fakat

$$\begin{aligned} & \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=-n}^{n} a_k x_k \right| \\ = & \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| a_{-n}x_{-n} + \cdots + a_{-1}x_{-1} + a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \right| \\ \leq & \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| a_{-n}x_{-n} + \cdots + a_{-1}x_{-1} + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \right| + \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| a_0x_0 + a_1x_1 \right| \\ = & \infty \end{aligned}$$

ve $a \in [s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))]^\gamma$ olmasından

$$\begin{aligned} & \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=-n}^{n} a_k x'_k \right| \\ = & \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| a_{-n}x_{-n} \cdots + a_{-1}x_{-1} + a_0 0 + a_1 0 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \right| \\ < & \infty \end{aligned}$$

olur. Böylece $\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_0x_0 + a_1x_1| = \infty$ olduğu bulunur. Burada $|x_0|, |x_1| < \infty$ olduğundan dolayı $\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_0x_0 + a_1x_1| = \infty$ olacak şekilde $a_0,\ a_1$ sayıları olmayacağından kabulümüz yanlış ve dolayısıyla $a \in [l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})]^\gamma$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

(**b**) $s(c(\Delta,\mathbb{Z})) \subset c(\Delta,\mathbb{Z})$ olduğundan dolayı 4.5.2. Lemma (c) kullanılarak $[c(\Delta,\mathbb{Z})]^\gamma \subset [s(c(\Delta,\mathbb{Z}))]^\gamma$ bulunur. $a \in [s(c(\Delta,\mathbb{Z}))]^\gamma$ olsun. Kabul edelim ki $a \notin [c(\Delta,\mathbb{Z})]^\gamma$. O halde

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=-n}^{n} a_k x_k \right| = \infty$$

olacak şekilde en az bir $x \in c(\Delta,\mathbb{Z})$ vardır. Özel olarak $x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c(\Delta,\mathbb{Z})$ olmak üzere

$$x' = \begin{cases} 0, & k=1,0 \\ x_k, & k \neq 1,0 \end{cases}$$

şeklinde seçilsin. Bu takdirde $x' \in s(c(\Delta,\mathbb{Z}))$ olur. O halde $a \in [s(c(\Delta,\mathbb{Z}))]^\gamma$ kabulünden

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=-n}^{n} a_k x'_k \right| < \infty$$

olur. Fakat

$$\begin{aligned}
&\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=-n}^{n}a_kx_k\right| \\
=\ &\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|a_{-n}x_{-n}+\cdots+a_{-1}x_{-1}+a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\right| \\
\leq\ &\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|a_{-n}x_{-n}+\cdots+a_{-1}x_{-1}+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\right|+\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|a_0x_0+a_1x_1\right| \\
=\ &\infty
\end{aligned}$$

ve $a\in[s(c(\Delta,\mathbb{Z}))]^{\gamma}$ olmasından

$$\begin{aligned}
&\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=-n}^{n}a_kx'_k\right| \\
=\ &\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|a_{-n}x_{-n}+\cdots+a_{-1}x_{-1}+a_00+a_10+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\right| \\
<\ &\infty
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_0x_0+a_1x_1|=\infty$ olduğu bulunur. Burada $|x_0|,\ |x_1|<\infty$ olduğundan dolayı $\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_0x_0+a_1x_1|=\infty$ olacak şekilde $a_0,\ a_1$ sayıları olmayacağından kabulümüz yanlış ve dolayısıyla $a\in[c(\Delta,\mathbb{Z})]^{\gamma}$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

(**c**) $s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))\subset c_0(\Delta,\mathbb{Z})$ olduğundan dolayı 4.5.2. Lemma (c) kullanılarak $[c_0(\Delta,\mathbb{Z})]^{\gamma}\subset[s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))]^{\gamma}$ bulunur. $a\in[s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))]^{\gamma}$ olsun. Kabul edelim ki $a\notin[c_0(\Delta,\mathbb{Z})]^{\gamma}$. O halde

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=-n}^{n}a_kx_k\right|=\infty$$

olacak şekilde en az bir $x\in c(\Delta,\mathbb{Z})$ vardır. Özel olarak $x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in c_0(\Delta,\mathbb{Z})$ olmak üzere

$$x'=\begin{cases}0, & k=1,0\\ x_k, & k\neq 1,0\end{cases}$$

şeklinde seçilsin. Bu takdirde $x'\in s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))$ olur. O halde $a\in[s(c_0(\Delta,\mathbb{Z}))]^{\gamma}$ kabulünden

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=-n}^{n}a_kx'_k\right|<\infty$$

olur. Fakat

$$\begin{aligned}
&\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=-n}^{n}a_kx_k\right| \\
=\ &\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|a_{-n}x_{-n}+\cdots+a_{-1}x_{-1}+a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\right| \\
\leq\ &\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|a_{-n}x_{-n}+\cdots+a_{-1}x_{-1}+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\right|+\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|a_0x_0+a_1x_1\right| \\
=\ &\infty
\end{aligned}$$

ve $a \in [s(c_0(\Delta, \mathbb{Z}))]^\gamma$ olmasından

$$\begin{aligned} & \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=-n}^{n} a_k x'_k \right| \\ = & \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| a_{-n}x_{-n} + \cdots + a_{-1}x_{-1} + a_0 0 + a_1 0 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \right| \\ < & \infty \end{aligned}$$

olur. Böylece $\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_0x_0 + a_1x_1| = \infty$ olduğu bulunur. Burada $|x_0|, \ |x_1| < \infty$ olduğundan dolayı $\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_0x_0 + a_1x_1| = \infty$ olacak şekilde $a_0, \ a_1$ sayıları olmayacağından kabulümüz yanlış ve dolayısıyla $a \in [c_0(\Delta, \mathbb{Z})]^\gamma$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

4.6. Bilateral Dizilerin Fark Dizi Uzaylarının Matris Dönüşümleri

4.6.1. Tanım: $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisinin Ax dönüşüm dizisi $A = (a_{nk})_{n,k\in\mathbb{Z}}$ kompleks sayıların sonsuz bir matrisi olmak üzere

$$A_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{nk}x_k < \infty, \ n \in \mathbb{Z}$$

dizisidir [22].

4.6.2. Teorem: $A = (a_{nk}) \in (l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}), l_\infty(\mathbb{Z}))$ olması için gerek ve yeter şart $A_n(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ka_{nk}$ ve $R = (r_{nk})_{n,k\in\mathbb{Z}}$ $\left(r_{nk} = \sum_{v=k+1}^{\infty} a_{nv}, \ k \in \mathbb{Z}^+ \ ve \ r_{nk} = \sum_{-\infty}^{v=k-1} a_{nv}, \ k \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}, \ n \in \mathbb{Z}\right)$ olmak üzere

i. $(a_{nl}) \in l_\infty(\mathbb{Z}) \ (-m \leq l \leq m, \ m \in \mathbb{Z}^+)$,

ii. $A_n(k) \in l_\infty(\mathbb{Z})$,

iii. $R \in (l_\infty(\mathbb{Z}), l_\infty(\mathbb{Z}))$ olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) $A \in (l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}), l_\infty(\mathbb{Z}))$ olsun. O halde $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $A_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k$ yakınsak ve $\forall x \in l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ için $A_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \in l_\infty(\mathbb{Z})$ olur. Özel olarak

$$x = (x_k) = \begin{cases} 1, \ k = l \\ 0, \ k \neq l \end{cases}$$

dizisi seçilirse $x \in l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ olur. O halde

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \\ &= a_{nl} \end{aligned}$$

ve $(a_{nl}) \in l_\infty(\mathbb{Z})$ elde edilir. Eğer $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ dizisi seçilirse

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_{nk} \end{aligned}$$

ve $A_n(k) \in l_\infty(\mathbb{Z})$ elde edilir. $y \in l_\infty(\mathbb{Z})$ dizisini göz önüne alalım. $\Delta x = y$ olacak şekilde yalnız bir $x \in s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))$ olduğunu biliyoruz. Buradan $x \in s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})) \subset l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ ve $x_k = -\sum_{v=1}^{k} y_{v-1}\ (k \in \mathbb{Z}^+),\ \ x_k = \sum_{v=k}^{0} y_v\ (k \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\})$ olmasından

$$\begin{aligned} A_n(m, x) &= \sum_{k=-m}^{m} a_{nk}x_k \\ &= \sum_{k=-m}^{0} a_{nk}x_k + \sum_{k=0}^{m} a_{nk}x_k \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} r_{n(-k)}y_{-k-1} - r_{n(-m)}\sum_{k=0}^{m-1} y_{-k-1} - \sum_{k=1}^{m-1} r_{nk}y_k + r_{nm}\sum_{k=1}^{m-1} y_k \end{aligned}$$

olur. Burada $\sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_{nk} < \infty$ olmasından

$$\lim_{m\to\infty} A_n(m, x) = A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_{n(-k)}y_{-k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} r_{nk}y_k = R_n(y)$$

$(y_0 = 0,\ y \in l_\infty(\mathbb{Z}))$ elde edilir. Böylece

$$R_n(y) = A_n(x) \in l_\infty(\mathbb{Z})\ \ (\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall\ y \in l_\infty(\mathbb{Z}))$$

bulunur.Bu takdirde $R \in (l_\infty(\mathbb{Z}), l_\infty(\mathbb{Z}))$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ Şimdi $(i), (ii), (iii)$ ifadelerinin doğru olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $x \in l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ alalım. Özel olarak $x'_k \in s(l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))$ olmak üzere

$$x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = \begin{cases} x_0,\ k = 0 \\ x_1,\ k = 1 \\ x'_k,\ k \neq 1, 0 \end{cases}$$

dizisini alalım. O halde

$$A_n(m, x) = \sum_{k=-m}^{m} a_{nk}x_k = a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \sum_{k=-m}^{m} a_{nk}x'_k$$

olmasından $A_n(m, x) = a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \sum_{k=0}^{m-1} r_{n(-k)}y_{-k-1} - r_{n(-m)}\sum_{k=0}^{m-1} y_{-k-1} - \sum_{k=1}^{m-1} r_{nk}y_k + r_{nm}\sum_{k=1}^{m-1} y_k$ elde edilir. $(m \in \mathbb{Z}^+)$

(i) den $(a_{nl}) \in l_\infty(\mathbb{Z})$ ve $|x_0|, |x_1| < \infty$ olmasından $a_{n0}x_0, a_{n1}x_1 \in l_\infty(\mathbb{Z})$ bulunur. Ayrıca (ii) den $A_n(k) \in l_\infty(\mathbb{Z})$ olmasından

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |A_n(k)| < \infty$$

ve

$$A_n(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_{nk} < \infty, \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

olur. O halde

$$\lim_{m\to\infty} A_n(m,x) = A_n(x) = a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \sum_{k=0}^{\infty} r_{n(-k)}y_{-k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} r_{nk}y_k$$

elde edilir. (iii) den $R \in (l_\infty(\mathbb{Z}), l_\infty(\mathbb{Z}))$ olmasından

$$R_n(y) = \sum_{k=0}^{\infty} r_{n(-k)}y_{-k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} r_{nk}y_k \in l_\infty(\mathbb{Z})$$

elde edilir. Böylece $A_n(x) \in l_\infty(\mathbb{Z})$ ve $A \in (l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}), l_\infty(\mathbb{Z}))$ olur.

4.6.3. Teorem: $A = (a_{nk}) \in (l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}), c(\mathbb{Z}))$ olması için gerek ve yeter şart $A_n(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_{nk}$ ve $R = (r_{nk})_{n,k\in\mathbb{Z}}$
$\left(r_{nk} = \sum_{v=k+1}^{\infty} a_{nv}, \ k \in \mathbb{Z}^+ \ ve \ r_{nk} = \sum_{-\infty}^{v=k-1} a_{nv}, \ k \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \ \ (n \in \mathbb{Z})\right)$ olmak üzere

i. $(a_{nl}) \in c(\mathbb{Z}) \ \ (-m \le l \le m, \ m \in \mathbb{Z}^+)$

ii. $A_n(k) \in c(\mathbb{Z})$

iii. $R \in (l_\infty(\mathbb{Z}), c(\mathbb{Z}))$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $A \in (l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}), c(\mathbb{Z}))$ olsun. O halde $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $A_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k$ yakınsak ve $\forall x \in l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ için $A_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \in c(\mathbb{Z})$ olur. Özel olarak

$$x = (x_k) = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

dizisi seçilirse $x \in l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ olur. O halde

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \\ &= a_{nl} \end{aligned}$$

ve $(a_{nl}) \in c(\mathbb{Z})$ elde edilir.Eğer $x = (x_k) = (k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ dizisi seçilirse

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_{nk} \end{aligned}$$

ve $A_n(k) \in c(\mathbb{Z})$ elde edilir. $y \in l_\infty(\mathbb{Z})$ dizisini göz önüne alalım. $\Delta x = y$ olacak şekilde yalnız bir $x \in s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))$ olduğunu biliyoruz. Buradan $x \in s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})) \subset l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ ve $x_k = -\sum_{v=1}^{k} y_{v-1}$ $(k \in \mathbb{Z}^+)$, $x_k = \sum_{v=k}^{0} y_v$ $(k \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\})$ olmasından

$$\begin{aligned} A_n(m,x) &= \sum_{k=-m}^{m} a_{nk}x_k \\ &= \sum_{k=-m}^{0} a_{nk}x_k + \sum_{k=0}^{m} a_{nk}x_k \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} r_{n(-k)}y_{-k-1} - r_{n(-m)}\sum_{k=0}^{m-1} y_{-k-1} - \sum_{k=1}^{m-1} r_{nk}y_k + r_{nm}\sum_{k=1}^{m-1} y_k \end{aligned}$$

olur. Burada $\sum_{k=-\infty}^{\infty} ka_{nk} < \infty$ olmasından

$$\lim_{m\to\infty} A_n(m,x) = A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_{n(-k)}y_{-k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} r_{nk}y_k = R_n(y)$$

$(y_0 = 0,\ y \in l_\infty(\mathbb{Z}))$ elde edilir. Böylece

$$R_n(y) = A_n(x) \in c(\mathbb{Z}) \ \ (\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall\ y \in l_\infty(\mathbb{Z}))$$

olması bulunur. Bu takdirde $R \in (l_\infty(\mathbb{Z}), c(\mathbb{Z}))$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ Şimdi $(i),(ii),(iii)$ ifadelerinin doğru olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $x \in l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ alalım. Özel olarak $x'_k \in s(l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}))$ olmak üzere

$$x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = \begin{cases} x_0, & k = 0 \\ x_1, & k = 1 \\ x'_k, & k \neq 1,0 \end{cases}$$

dizisini alalım. O halde

$$A_n(m,x) = \sum_{k=-m}^{m} a_{nk}x_k = a_{n1}x_1 + \sum_{k=-m}^{m} a_{nk}x'_k$$

olmasından $A_n(m,x) = a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \sum_{k=0}^{m-1} r_{n(-k)}y_{-k-1} - r_{n(-m)}\sum_{k=0}^{m-1} y_{-k-1} - \sum_{k=1}^{m-1} r_{nk}y_k + r_{nm}\sum_{k=1}^{m-1} y_k$ elde edilir. $(m \in \mathbb{Z}^+)$

(i) den $(a_{nl}) \in c(\mathbb{Z})$ ve $|x_0|, |x_1| < \infty$ olmasından $a_{n0}x_0,\ a_{n1}x_1 \in c(\mathbb{Z})$ bulunur. Ayrıca (ii) den $A_n(k) \in c(\mathbb{Z})$ olmasından

$$\lim_{|n|\to\infty} A_n(k) = t \in \mathbb{C}$$

ve

$$A_n(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ka_{nk} < \infty,\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

olur. O halde

$$\lim_{m\to\infty} A_n(m,x) = A_n(x) = a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \sum_{k=0}^{\infty} r_{n(-k)}y_{-k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} r_{nk}y_k$$

elde edilir. (iii) den $R \in (l_\infty(\mathbb{Z}), c(\mathbb{Z}))$ olmasından

$$R_n(y) = \sum_{k=0}^{\infty} r_{n(-k)}y_{-k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} r_{nk}y_k \in c(\mathbb{Z})$$

elde edilir. Böylece $A_n(x) \in c(\mathbb{Z})$ ve $A \in (l_\infty(\Delta,\mathbb{Z}), c(\mathbb{Z}))$ olur.

4.6.4. Teorem: $A = (a_{nk}) \in (c(\Delta,\mathbb{Z}), l_\infty(\mathbb{Z}))$ olması için gerek ve yeter şart $A_n(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ka_{nk}$ ve $R = (r_{nk})_{n,k\in\mathbb{Z}}$
$\left(r_{nk} = \sum_{v=k+1}^{\infty} a_{nv},\ k \in \mathbb{Z}^+ \ ve\ r_{nk} = \sum_{-\infty}^{v=k-1} a_{nv},\ k \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}\ \ (n \in \mathbb{Z})\right)$ olmak üzere

i. $(a_{nl}) \in l_\infty(\mathbb{Z})$ $(-m \le l \le m,\ m \in \mathbb{Z}^+)$

ii. $A_n(k) \in l_\infty(\mathbb{Z})$

iii. $R \in (c(\mathbb{Z}), l_\infty(\mathbb{Z}))$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $A \in (c(\Delta,\mathbb{Z}), l_\infty(\mathbb{Z}))$ olsun. O halde $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $A_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k$ yakınsak ve $\forall x \in c(\Delta,\mathbb{Z})$ için $A_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \in l_\infty(\mathbb{Z})$ olur. Özel olarak

$$x = (x_k) = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

dizisi seçilirse $x \in c(\Delta,\mathbb{Z})$ olur. O halde

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \\ &= a_{nl} \end{aligned}$$

ve $(a_{nl}) \in l_\infty(\mathbb{Z})$ elde edilir. Eğer $x = (x_k) = (k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c(\Delta,\mathbb{Z})$ dizisi seçilirse

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} ka_{nk} \end{aligned}$$

ve $A_n(k) \in l_\infty(\mathbb{Z})$ elde edilir. $y \in c(\mathbb{Z})$ dizisini göz önüne alalım. $\Delta x = y$ olacak şekilde yalnız bir $x \in s(c(\Delta,\mathbb{Z}))$ olduğunu biliyoruz. Buradan $x \in s(c(\Delta,\mathbb{Z})) \subset c(\Delta,\mathbb{Z})$ ve $x_k =$

$-\sum_{v=1}^{k} y_{v-1} \ (k \in \mathbb{Z}^{+}), \ \ x_k = \sum_{v=k}^{0} y_v \ (k \in \mathbb{Z}^{-} \cup \{0\})$ olmasından

$$\begin{aligned} A_n(m,x) &= \sum_{k=-m}^{m} a_{nk}x_k \\ &= \sum_{k=-m}^{0} a_{nk}x_k + \sum_{k=0}^{m} a_{nk}x_k \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} r_{n(-k)}y_{-k-1} - r_{n(-m)}\sum_{k=0}^{m-1} y_{-k-1} - \sum_{k=1}^{m-1} r_{nk}y_k + r_{nm}\sum_{k=1}^{m-1} y_k \end{aligned}$$

olur. Burada $\sum_{k=-\infty}^{\infty} ka_{nk} < \infty$ olmasından

$$\lim_{m\to\infty} A_n(m,x) = A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_{n(-k)}y_{-k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} r_{nk}y_k = R_n(y)$$

$(y_0 = 0, \ y \in c(\mathbb{Z}))$ elde edilir. Böylece

$$R_n(y) = A_n(x) \in l_\infty(\mathbb{Z}) \ \ (\forall n \in \mathbb{Z}, \ \forall \ y \in c(\mathbb{Z}))$$

olması bulunur. Bu takdirde $R \in (c(\mathbb{Z}), l_\infty(\mathbb{Z}))$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ Şimdi $(i),(ii),(iii)$ ifadelerinin doğru olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $x \in c(\Delta,\mathbb{Z})$ alalım. Özel olarak $x'_k \in s(c(\Delta,\mathbb{Z}))$ olmak üzere

$$x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = \begin{cases} x_0, \ k = 0 \\ x_1, \ k = 1 \\ x'_k, \ k \neq 1,0 \end{cases}$$

dizisini alalım. O halde

$$A_n(m,x) = \sum_{k=-m}^{m} a_{nk}x_k = a_{n1}x_1 + \sum_{k=-m}^{m} a_{nk}x'_k$$

olmasından $A_n(m,x) = a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \sum_{k=0}^{m-1} r_{n(-k)}y_{-k-1} - r_{n(-m)}\sum_{k=0}^{m-1} y_{-k-1} - \sum_{k=1}^{m-1} r_{nk}y_k + r_{nm}\sum_{k=1}^{m-1} y_k$ elde edilir. $(m \in \mathbb{Z}^{+})$

(i) den $(a_{nl}) \in l_\infty(\mathbb{Z})$ ve $|x_0|, \ |x_1| < \infty$ olmasından $a_{n0}x_0, \ a_{n1}x_1 \in l_\infty(\mathbb{Z})$ bulunnur. Ayrıca (ii) den $A_n(k) \in l_\infty(\mathbb{Z})$ olmasından

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |A_n(k)| < \infty$$

ve

$$A_n(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ka_{nk} < \infty$$

olur. O halde

$$\lim_{m\to\infty} A_n(m,x) = A_n(x) = a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \sum_{k=0}^{\infty} r_{n(-k)}y_{-k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} r_{nk}y_k$$

elde edilir. (iii) den $R \in (c(\mathbb{Z}), l_\infty(\mathbb{Z}))$ olmasından

$$R_n(y) = \sum_{k=0}^{\infty} r_{n(-k)}y_{-k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} r_{nk}y_k \in l_\infty(\mathbb{Z})$$

elde edilir. Böylece $A_n(x) \in l_\infty(\mathbb{Z})$ ve $A \in (c(\Delta,\mathbb{Z}), l_\infty(\mathbb{Z}))$ olur.

4.6.5. Teorem: $A = (a_{nk}) \in (c(\Delta,\mathbb{Z}), c(\mathbb{Z}))$ olması için gerek ve yeter şart $A_n(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_{nk}$ ve $R = (r_{nk})_{n,k\in\mathbb{Z}}$
$\left(r_{nk} = \sum_{v=k+1}^{\infty} a_{nv},\ k \in \mathbb{Z}^+ \ ve\ r_{nk} = \sum_{-\infty}^{v=k-1} a_{nv},\ k \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}\ \ (n \in \mathbb{Z})\right)$ olmak üzere

i. $(a_{nl}) \in c(\mathbb{Z})\ \ (-m \leq l \leq m,\ m \in \mathbb{Z}^+)$

ii. $A_n(k) \in c(\mathbb{Z})$

iii. $R \in (c(\mathbb{Z}), c(\mathbb{Z}))$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $A \in (c(\Delta,\mathbb{Z}), c(\mathbb{Z}))$ olsun. O halde $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $A_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k$ yakınsak ve $\forall x \in c(\Delta,\mathbb{Z})$ için $A_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \in c(\mathbb{Z})$ olur. Özel olarak

$$x = (x_k) = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

dizisi seçilirse açıkça $x \in c(\Delta,\mathbb{Z})$ olur. O halde

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \\ &= a_{nl} \end{aligned}$$

ve $(a_{nl}) \in c(\mathbb{Z})$ elde edilir. Bunun yanı sıra $x = (x_k) = (k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c(\Delta,\mathbb{Z})$ dizisini seçilirse

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_{nk} \end{aligned}$$

ve $A_n(k) \in c(\mathbb{Z})$ elde edilir. $y \in c(\mathbb{Z})$ dizisini göz önüne alalım. $\Delta x = y$ olacak şekilde yalnız bir $x \in s(c(\Delta,\mathbb{Z}))$ olduğunu biliyoruz. Buradan $x \in s(c(\Delta,\mathbb{Z})) \subset c(\Delta,\mathbb{Z})$ ve $x_k =$

$-\sum_{v=1}^{k} y_{v-1}\ \left(k\in\mathbb{Z}^{+}\right),\ \ x_k=\sum_{v=k}^{0} y_v\ \left(k\in\mathbb{Z}^{-}\cup\{0\}\right)$ olmasından

$$\begin{aligned} A_n(m,x) &= \sum_{k=-m}^{m} a_{nk}x_k \\ &= \sum_{k=-m}^{0} a_{nk}x_k+\sum_{k=0}^{m} a_{nk}x_k \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} r_{n(-k)}y_{-k-1}-r_{n(-m)}\sum_{k=0}^{m-1} y_{-k-1}-\sum_{k=1}^{m-1} r_{nk}y_k+r_{nm}\sum_{k=1}^{m-1} y_k \end{aligned}$$

olur. Burada $\sum_{k=-\infty}^{\infty} ka_{nk}<\infty$ olmasından

$$\lim_{m\to\infty} A_n(m,x)=A_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty} r_{n(-k)}y_{-k-1}-\sum_{k=1}^{\infty} r_{nk}y_k=R_n(y)$$

$(y_0=0,\ y\in c(\mathbb{Z}))$ elde edilir. Böylece

$$R_n(y)=A_n(x)\in l_\infty(\mathbb{Z})\ \ (\forall n\in\mathbb{Z},\ \forall\ y\in c(\mathbb{Z}))$$

olması bulunur. Bu takdirde $R\in(c(\mathbb{Z}),c(\mathbb{Z}))$ elde edilir.

($\Leftarrow$) Şimdi $(i),(ii),(iii)$ ifadelerinin doğru olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $x\in c(\Delta,\mathbb{Z})$ alalım. Özel olarak $x'_k\in s(c(\Delta,\mathbb{Z}))$ olmak üzere

$$x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}=\begin{cases} x_0, & k=0\\ x_1, & k=1\\ x'_k, & k\neq 1,0\end{cases}$$

dizisini alalım. O halde

$$\begin{aligned} A_n(m,x) &= \sum_{k=-m}^{m} a_{nk}x_k=a_{n1}x_1+\sum_{k=-m}^{m} a_{nk}x'_k \\ &= a_{n0}x_0+a_{n1}x_1+\sum_{k=0}^{m-1} r_{n(-k)}y_{-k-1}-r_{n(-m)}\sum_{k=0}^{m-1} y_{-k-1}-\sum_{k=1}^{m-1} r_{nk}y_k+r_{nm}\sum_{k=1}^{m-1} y_k \end{aligned}$$

elde edilir. $(m\in\mathbb{Z}^{+})$

(i) den $(a_{nl})\in c(\mathbb{Z})$ ve $|x_0|,\ |x_1|<\infty$ olmasından $a_{n0}x_0,\ a_{n1}x_1\in c(\mathbb{Z})$ bulunur. Ayrıca (ii) den $A_n(k)\in c(\mathbb{Z})$ olmasından

$$\lim_{|n|\to\infty} A_n(k)=t\in\mathbb{C}$$

ve

$$A_n(k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} ka_{nk}<\infty$$

olur. O halde

$$\lim_{m\to\infty} A_n(m,x) = A_n(x) = a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \sum_{k=0}^{\infty} r_{n(-k)}y_{-k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} r_{nk}y_k$$

elde edilir. (iii) den $R \in (c(\mathbb{Z}), c(\mathbb{Z}))$ olmasından

$$R_n(y) = \sum_{k=0}^{\infty} r_{n(-k)}y_{-k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} r_{nk}y_k \in c(\mathbb{Z})$$

elde edilir. Böylece $A_n(x) \in c(\mathbb{Z})$ ve $A \in (c(\Delta, \mathbb{Z}), c(\mathbb{Z}))$ olur.

4.6.6. Teorem: $A = (a_{nk}) \in (l_\infty(\mathbb{Z}), l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))$ olması için gerek ve yeter şart $B = (b_{nk}) = (a_{nk} - a_{n+1,k})$ olmak üzere

i. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}| < \infty \ \ (\forall n \in \mathbb{Z})$

ii. $B \in (l_\infty(\mathbb{Z}), l_\infty(\mathbb{Z}))$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $A \in (l_\infty(\mathbb{Z}), l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))$ olsun. O halde $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $A_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k$ yakınsak ve $\forall x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ için $A_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \in l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\Delta(A_n(x))| &< \infty \\ \sup_{n\in\mathbb{Z}} |A_n(x) - A_{n+1}(x)| &< \infty \end{aligned}$$

bulunur. O halde $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $A_n(x)$ vardır ve

$$|A_n(x)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k\right| < \infty$$

olur. Şimdi sabit bir n için

$$x_k = sgn a_{nk} = \begin{cases} 1, & a_{nk} > 0 \\ 0, & a_{nk} = 0 \\ -1, & a_{nk} < 0 \end{cases}$$

olarak seçilirse $\sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |sgn a_{nk}| \leq 1$ olacağından $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z})$ olur. Bu durumda $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k\right| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}|\right| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

elde edilir. Ayrıca $\forall x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ için

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |A_n(x) - A_{n+1}(x)| < \infty$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{aligned}\infty &> \sup_{n\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n+1,k}x_k\right| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_{nk} - a_{n+1,k})\, x_k\right| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{nk}x_k\right|\end{aligned}$$

olduğundan $\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{nk}x_k \in l_\infty(\mathbb{Z})$ bulunur. Böylece $B \in (l_\infty(\mathbb{Z}), l_\infty(\mathbb{Z}))$ olur.

($\Leftarrow$) Şimdi $(i), (ii)$ ifadelerinin doğru olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ alalım. O halde $\sup_{k\in\mathbb{Z}}|x_k| < \infty$ olmasından ve (i) kabulünden

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}|\,|x_k| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}x_k| < \infty$$

elde edilir. Bir seri mutlak yakınsak ise yakınsak olduğundan $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k < \infty$ elde edilir. Ayrıca (ii) kabulünden de herhangi bir $x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ için $B_n(x) \in l_\infty(\mathbb{Z})$ olmasından

$$\begin{aligned}B_n(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{nk}x_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_{nk} - a_{n+1,k})\, x_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta a_{nk}x_k \\ &= \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \\ &= \Delta A_n(x) \in l_\infty(\mathbb{Z})\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $A_n(x) \in l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ ve $A \in (l_\infty(\mathbb{Z}), l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))$ bulunur.

4.6.7. Teorem: $A = (a_{nk}) \in (l_\infty(\mathbb{Z}), c(\Delta, \mathbb{Z}))$ olması için gerek ve yeter şart $B = (b_{nk}) = (a_{nk} - a_{n+1,k})$ olmak üzere

i. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}| < \infty \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$

ii. $B \in (l_\infty(\mathbb{Z}), c(\mathbb{Z}))$ olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) $A \in (l_\infty(\mathbb{Z}), c(\Delta, \mathbb{Z}))$ olsun. O halde $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $A_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k$ yakınsak ve $\forall x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ için $A_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \in c(\Delta, \mathbb{Z})$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}\lim_{|n|\to\infty} \Delta(A_n(x)) &= t \in \mathbb{C} \\ \lim_{|n|\to\infty} (A_n(x) - A_{n+1}(x)) &= t \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

bulunur. O halde $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $A_n(x)$ vardır ve ayrıca $c(\Delta, \mathbb{Z}) \subset l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ olmasından

$$|A_n(x)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk} x_k \right| < \infty$$

olur. Şimdi sabit bir n için

$$x_k = sgna_{nk} = \begin{cases} 1, & a_{nk} > 0 \\ 0, & a_{nk} = 0 \\ -1, & a_{nk} < 0 \end{cases}$$

olarak seçilirse $\sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |sgna_{nk}| \leq 1$ olacağından $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z})$ olur. Bu durumda $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$\left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk} x_k \right| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}| \right| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

elde edilir. Ayrıca $\forall x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ için

$$\lim_{|n|\to\infty} (A_n(x) - A_{n+1}(x)) = t \in \mathbb{C}$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{aligned} t &= \lim_{|n|\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk} x_k - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n+1,k} x_k \\ &= \lim_{|n|\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_{nk} - a_{n+1,k}) x_k \\ &= \lim_{|n|\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{nk} x_k \end{aligned}$$

olduğundan $\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{nk} x_k \in c(\mathbb{Z})$ bulunur. Böylece $B \in (l_\infty(\mathbb{Z}), c(\mathbb{Z}))$ olur.

($\Leftarrow$) Şimdi $(i), (ii)$ ifadelerinin doğru olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ alalım. O halde $\sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| < \infty$ olmasından ve (i) kabulünden

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}| |x_k| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk} x_k| < \infty$$

elde edilir. Bir seri mutlak yakınsak ise yakınsak olduğundan $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk} x_k < \infty$ elde edilir. Ayrıca (ii) kabulünden de herhangi bir $x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ için $B_n(x) \in c(\mathbb{Z})$ olmasından

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{nk} x_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_{nk} - a_{n+1,k}) x_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta a_{nk} x_k \\ &= \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk} x_k \\ &= \Delta A_n(x) \in c(\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $A_n(x) \in c(\Delta, \mathbb{Z})$ ve $A \in (l_\infty(\mathbb{Z}), c(\Delta, \mathbb{Z}))$ olur.

4.6.8. Teorem: $A = (a_{nk}) \in (l_\infty(\mathbb{Z}), c_0(\Delta, \mathbb{Z}))$ olması için gerek ve yeter şart $B = (b_{nk}) = (a_{nk} - a_{n+1,k})$ olmak üzere

i. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}| < \infty \ \ (\forall n \in \mathbb{Z})$

ii. $B \in (l_\infty(\mathbb{Z}), c_0(\mathbb{Z}))$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $A \in (l_\infty(\mathbb{Z}), c_0(\Delta, \mathbb{Z}))$ olsun. O halde $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $A_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k$ yakınsak ve $\forall x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ için $A_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \in c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \lim_{|n|\to\infty} \Delta(A_n(x)) &= 0 \\ \lim_{|n|\to\infty} A_n(x) - A_{n+1}(x) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $A_n(x)$ vardır ve ayrıca $c_0(\Delta, \mathbb{Z}) \subset l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ olmasından

$$|A_n(x)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \right| < \infty$$

olur. Şimdi sabit bir n için

$$x_k = sgna_{nk} = \begin{cases} 1, & a_{nk} > 0 \\ 0, & a_{nk} = 0 \\ -1, & a_{nk} < 0 \end{cases}$$

dizisi seçilirse $\sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |sgna_{nk}| \leq 1$ olacağından $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z})$ olur. Bu durumda $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$\left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \right| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}| \right| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

elde edilir. Ayrıca $\forall x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ için

$$\lim_{|n|\to\infty} A_n(x) - A_{n+1}(x) = 0$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{|n|\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n+1,k}x_k \\ &= \lim_{|n|\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_{nk} - a_{n+1,k})\, x_k \\ &= \lim_{|n|\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{nk}x_k \end{aligned}$$

olduğundan $\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{nk}x_k \in c_0(\mathbb{Z})$ bulunur. Böylece $B \in (l_\infty(\mathbb{Z}), c_0(\mathbb{Z}))$ olur.

($\Leftarrow$) Şimdi $(i), (ii)$ ifadelerinin doğru olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ alalım. O halde $\sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| < \infty$ olmasından ve (i) kabulünden

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}| |x_k| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}x_k| < \infty$$

elde edilir. Bir seri mutlak yakınsak ise yakınsak olduğundan $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k < \infty$ elde edilir. Ayrıca (ii) kabulünden de herhangi bir $x \in l_\infty(\mathbb{Z})$ için $B_n(x) \in c_0(\mathbb{Z})$ olmasından

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{nk}x_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_{nk} - a_{n+1,k})\, x_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta a_{nk}x_k \\ &= \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \\ &= \Delta A_n(x) \in c_0(\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $A_n(x) \in c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ ve $A \in (l_\infty(\mathbb{Z}), c_0(\Delta, \mathbb{Z}))$ olur.

4.6.9. Teorem: $A = (a_{nk}) \in (c(\mathbb{Z}), l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))$ olması için gerek ve yeter şart $B = (b_{nk}) = (a_{nk} - a_{n+1,k})$ olmak üzere

i. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}| < \infty \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$

ii. $B \in (c(\mathbb{Z}), l_\infty(\mathbb{Z}))$ olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) $A \in (c(\mathbb{Z}), l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))$ olsun. O halde $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $A_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k$ yakınsak ve $\forall x \in c(\mathbb{Z})$ için $A_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \in l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\Delta(A_n(x))| &< \infty \\ \sup_{n\in\mathbb{Z}} |A_n(x) - A_{n+1}(x)| &< \infty \end{aligned}$$

bulunur. O halde $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $A_n(x)$ vardır ve

$$|A_n(x)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \right| < \infty$$

olur. Şimdi $\forall n, k$ için $a_{nk} > 0$ (veya $\forall n, k$ için $a_{nk} < 0$) olmak üzere $x_k = sgna_{nk}$ seçersek $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c(\mathbb{Z})$ olur. Bu durumda $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$\left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \right| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}| \right| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

elde edilir. Ayrıca $\forall x \in c(\mathbb{Z})$ için

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |A_n(x) - A_{n+1}(x)| < \infty$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{aligned} \infty &> \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n+1,k}x_k \right| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_{nk} - a_{n+1,k})\, x_k \right| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{nk}x_k \right| \end{aligned}$$

olduğundan $\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{nk}x_k \in l_\infty(\mathbb{Z})$ bulunur. Böylece $B \in (c(\mathbb{Z}), l_\infty(\mathbb{Z}))$ olur.

($\Leftarrow$) Şimdi $(i), (ii)$ ifadelerinin doğru olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $x \in c(\mathbb{Z})$ alalım. O halde $c(\mathbb{Z}) \subset l_\infty(\mathbb{Z})$ iken $\sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| < \infty$ olmasından ve (i) kabulünden

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}|\,|x_k| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}x_k| < \infty$$

elde edilir. Bir seri mutlak yakınsak ise yakınsak olduğundan $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k < \infty$ elde edilir. Ayrıca (ii) kabulünden de herhangi bir $x \in c(\mathbb{Z})$ için $B_n(x) \in l_\infty(\mathbb{Z})$ olmasından

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{nk}x_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_{nk} - a_{n+1,k})\, x_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta a_{nk}x_k \\ &= \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \\ &= \Delta A_n(x) \in l_\infty(\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $A_n(x) \in l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ ve $A \in (c(\mathbb{Z}), l_\infty(\Delta, \mathbb{Z}))$ olur.

4.6.10. Teorem: $A = (a_{nk}) \in (c(\mathbb{Z}), c(\Delta, \mathbb{Z}))$ olması için gerek ve yeter şart $B = (b_{nk}) = (a_{nk} - a_{n+1,k})$ olmak üzere

i. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}| < \infty \ \ (\forall n \in \mathbb{Z})$

ii. $B \in (c(\mathbb{Z}), c(\mathbb{Z}))$ olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) $A \in (c(\mathbb{Z}), c(\Delta, \mathbb{Z}))$ olsun. O halde $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $A_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k$ yakınsak ve $\forall x \in c(\mathbb{Z})$ için $A_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \in c(\Delta, \mathbb{Z})$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \lim_{|n|\to\infty} \Delta(A_n(x)) &= t \in \mathbb{C} \\ \lim_{|n|\to\infty} A_n(x) - A_{n+1}(x) &= t \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

bulunur. O halde $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $A_n(x)$ vardır ve ayrıca $c(\Delta, \mathbb{Z}) \subset l_\infty(\Delta, \mathbb{Z})$ olmasından

$$|A_n(x)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k\right| < \infty$$

olur. Şimdi $\forall n, k$ için $a_{nk} > 0$ (veya $\forall n, k$ için $a_{nk} < 0$) olmak üzere $x_k = sgna_{nk}$ seçersek $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c(\mathbb{Z})$ olur. Bu durumda $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k\right| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}|\right| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

elde edilir. Ayrıca $\forall x \in c(\mathbb{Z})$ için

$$\lim_{|n|\to\infty} A_n(x) - A_{n+1}(x) = t \in \mathbb{C}$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{aligned} t &= \lim_{|n|\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n+1,k}x_k \\ &= \lim_{|n|\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_{nk} - a_{n+1,k})\, x_k \\ &= \lim_{|n|\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{nk}x_k \end{aligned}$$

olduğundan $\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{nk}x_k \in c(\mathbb{Z})$ bulunur. Böylece $B \in (c(\mathbb{Z}), c(\mathbb{Z}))$ olur.

($\Leftarrow$) Şimdi $(i), (ii)$ ifadelerinin doğru olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $x \in c(\mathbb{Z})$ alalım. O halde $c(\mathbb{Z}) \subset l_\infty(\mathbb{Z})$ iken $\sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| < \infty$ olmasından ve (i) kabulünden

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}|\,|x_k| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{nk}x_k| < \infty$$

elde edilir. Bir seri mutlak yakınsak ise yakınsak olduğundan $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k < \infty$ elde edilir. Ayrıca (ii) kabulünden de herhangi bir $x \in c(\mathbb{Z})$ için $B_n(x) \in c(\mathbb{Z})$ olmasından

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{nk}x_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_{nk} - a_{n+1,k})\, x_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta a_{nk}x_k \\ &= \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \\ &= \Delta A_n(x) \in c(\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $A_n(x) \in c(\Delta, \mathbb{Z})$ ve $A \in (c(\mathbb{Z}), c(\Delta, \mathbb{Z}))$ olur.

4.6.11. Teorem: $A=(a_{nk})\in(c(\mathbb{Z}),c_0(\Delta,\mathbb{Z}))$ olması için gerek ve yeter şart $B=(b_{nk})=(a_{nk}-a_{n+1,k})$ olmak üzere

i. $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_{nk}|<\infty\;\;(\forall n\in\mathbb{Z})$

ii. $B\in(c(\mathbb{Z}),c_0(\mathbb{Z}))$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $A\in(c(\mathbb{Z}),c_0(\Delta,\mathbb{Z}))$ olsun. O halde $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $A_n(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{nk}x_k$ yakınsak ve $\forall x\in c(\mathbb{Z})$ için $A_n(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{nk}x_k\in c_0(\Delta,\mathbb{Z})$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}\lim_{|n|\to\infty}\Delta(A_n(x)) &= 0\\ \lim_{|n|\to\infty}A_n(x)-A_{n+1}(x) &= 0\end{aligned}$$

bulunur. O halde $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $A_n(x)$ vardır ve ayrıca $c_0(\Delta,\mathbb{Z})\subset l_\infty(\Delta,\mathbb{Z})$ olmasından

$$|A_n(x)|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{nk}x_k\right|<\infty$$

olur. Şimdi $\forall n,k$ için $a_{nk}>0$ (veya $\forall n,k$ için $a_{nk}<0$) olmak üzere $x_k=sgna_{nk}$ seçersek $x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in c(\mathbb{Z})$ olur. Bu durumda $\forall n\in\mathbb{Z}$ için

$$\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{nk}x_k\right|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_{nk}|\right|=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_{nk}|<\infty$$

elde edilir. Ayrıca $\forall x\in c(\mathbb{Z})$ için

$$\lim_{|n|\to\infty}A_n(x)-A_{n+1}(x)=0$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{|n|\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{nk}x_k-\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{n+1,k}x_k\\ &= \lim_{|n|\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(a_{nk}-a_{n+1,k})\,x_k\\ &= \lim_{|n|\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_{nk}x_k\end{aligned}$$

olduğundan $\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_{nk}x_k\in c_0(\mathbb{Z})$ bulunur. Böylece $B\in(c(\mathbb{Z}),c_0(\mathbb{Z}))$ olur.

$(\Leftarrow)$ Şimdi $(i),(ii)$ ifadelerinin doğru olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $x\in c(\mathbb{Z})$ alalım. O halde $c(\mathbb{Z})\subset l_\infty(\mathbb{Z})$ iken $\sup_{k\in\mathbb{Z}}|x_k|<\infty$ olmasından ve (i) kabulünden

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_{nk}|\,|x_k|=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_{nk}x_k|<\infty$$

elde edilir. Bir seri mutlak yakınsak ise yakınsak olduğundan $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k < \infty$ elde edilir. Ayrıca (ii) kabulünden de herhangi bir $x \in c(\mathbb{Z})$ için $B_n(x) \in c_0(\mathbb{Z})$ olmasından

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{nk}x_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_{nk} - a_{n+1,k})\, x_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta a_{nk}x_k \\ &= \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk}x_k \\ &= \Delta A_n(x) \in c_0(\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $A_n(x) \in c_0(\Delta, \mathbb{Z})$ ve $A \in (c(\mathbb{Z}), c_0(\Delta, \mathbb{Z}))$ olur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada bilateral dizilerin fark dizileri tanımlanarak dizi uzaylarının fark dizileri ile arasındaki yakın ilişki tespit edildi.

5.2. Öneriler

Bu çalışmada elde edilen bulguların ikinci kısımda verdiğimiz bazı diğer kümeler için uygulanıp uygulanamayacağı araştırabilir.

KAYNAKLAR

[1] Maddox IJ, 1970. Elements of Functional Analysis. Cambridge Univ. Press.

[2] Agrawal R, Srivastava JK, 2013. Banach Space X-Valued Bilateral Sequence Space $l(\mathbb{Z}, X, \overline{\lambda}, \overline{p})$. British Journal of Mathematics & Computer Science, 3(1): 44-51.

[3] Agrawal R, Srivastava JK, 2014. Continuous Dual of $c_0(\mathbb{Z}, X, \overline{\lambda}, \overline{p})$ and $c(\mathbb{Z}, X, \overline{\lambda}, \overline{p})$. Methods of Functional Analysis and Topology, 20(1): 92-100.

[4] Burckel RB, 1979. An Introduction to Classical Complex Analysis Vol. 1. Acade mic Press INC.

[5] Berberian SK, 1974. Lectures in Functional Analysis and Operator Theory. Springer-Verlag, New York.

[6] Rotman JJ, 2003. Advanced Modern Algebra. Prentice Hall.

[7] Goes G, Goes S, 1970. Sequence of Bounded Variation and Sequences of Fourier Coefficients I. Mathematische Zeitschrift, 118(2): 93-102.

[8] Kreyszig E, 1978. Introductory Fucntional Analysis with Applications. John Wiley and Sons, New York.

[9] Kantorovich LV, Akilov GP, 1982. Functional Analysis. Pergamon Pr. Oxford.

[10] Kamtan PK, Gupta M, 1981. Sequence Space and Series. Marcel Dekker Inc. New York.

[11] Choudhary B, Nanda S, 1989. Functional Analysis with Applications. John Wiley and Sons, New York.

[12] Kızmaz H, 1981. On certain sequence spaces. Canad. Math. Bull., 24(2): 169-176.

[13] Ahmad ZU, Mursaleen, 1987. Köthe-Toeplitz duals of some new sequence spaces and their matrix maps. Publ. Inst. Math. (Beograd)., 42(56): 57-61.

[14] Sarıgöl MA, 1987. On difference sequence spaces. J. Karadeniz Tech. Univ. Fac. Arts. Sci. Series Math. Phy., 10: 63-71.

[15] Mursaleen, Gaur AK, Saifi AH, 1996. Some new sequence spaces, their duals and matrix transformations. Bull. Cal. Mah. Soc., 88: 207-212.

[16] Choudhary B, Mishra SK, 1993. A note on certain sequence spaces. J. Analysis, 1: 139-148.

[17] Gnanaseelan C, Srivastava PD, 1996. The $\alpha-$, $\beta-$, $\gamma-$ duals of some generalized difference sequence spaces. Indian J. Math., 38(2): 111-120.

[18] Malkowsky E, 1996. A note on the Köthe-Toeplitz duals of generalized sets of bounded and convergent difference sequences. J. Analysis, 4: 81-91.

[19] Gaur AK, Mursaleen, 1998. Difference sequence spaces. Internat. J. Math. and Math. Sci., 4: 701-706.

[20] Et M, 1993. On some difference sequence spaces. Doğa-Tr. J. Math., 17: 18-24.

[21] Et M, Çolak R, 1995. On some generalized difference sequence spaces. Soochow Journal of Mathematics, 21(4): 377-386.

[22] Gaur AK, Mursaleen, 1998. Difference sequence spaces defined by a sequence of a moduli. Demons. Math., 31: 275-298.

[23] Mursaleen, Khan MA, Qamaruddin, 1999. Difference sequence spaces defined by Orlicz functions. Demons. Math., 32: 145-150.

[24] Orhan C, 1983. Cesaro difference sequence spaces and related matrix transformations. Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara Ser., A1 33: 1-8.

[25] Başarır M, 1991. Paranormed Cesaro difference sequence spaces and related matrix transformaitons. Doğa-Tr. J. Math., 15: 14-19

[26] Et M, 1996-1997. On some generalized Cesaro difference sequence spaces. İst. Üni. Fen fak. Mat. Dergisi, 55-56: 221-229.

[27] Altay B, Başar F, 2005. On some Euler sequence spaces of non-absolute type. Ukrainian Math. J., 57(1): 1-17.

[28] Polat H, Başar F, 2007. Some Euler spaces of difference sequences of order m. Acta Math. Sci., 27(2): 254-266.

[29] Saaverda FL, Rodriguez AM, 2000. Spectral theory and hypercyclic subspaces. Trans. Amer. Math. Soc., 353: 247-267.

[30] Menet Q, 2012. Hypercyclic subspaces and weigthed shifts. Cornell Univ. Lib. arXiv, 1208.4963.

[31] Shakrin S, 2012. A weighted bilateral shift with cyclic square is supercyclic. Cornell Univ. Lib. arXiv, 1209.1458.

[32] Shakrin S, 2012. Non-sequential weak supercyclicity and hypercyclity. Cornell Univ. Lib. arXiv, 1209.1462.

[33] Chandler-Wilde SN, Lindner M, 2011. Limit Operators, Collective Compactness, and the Spectral Theory of İnfinite Matrices. Memoirs Amer. Math. Soc. 210(989): 1-119.

[34] Agrawal R, Srivastava JK, 2012. Banach Space X-Valued Bilateral Sequence Spaces $c_0(\mathbb{Z}, X, \overline{\lambda}, \overline{p})$ and $c(\mathbb{Z}, X, \overline{\lambda}, \overline{p})$, submitted for publication.

[35] Taheri A, 2015. Function Spaces and Partial Differential Equations Volume 1 - Classical Analysis. Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications.

[36] Balcı M, 1997. Matematik Analiz. Balcı Yayınları.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Kırıkkale'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Balıkesir'in Burhaniye ilçesinde tamamladı. 2006 yılında kazandığı Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2010 yılında mezun oldu. 2012-2014 yıllarında Michigan State University'de matematik alanında yüksek lisansını tamamladı. 2014 yılında Bitlis Eren Üniversitesi ve Muş Alparslan Üniversitesi'nin Matematik Anabilim dalında ortaklaşa açtığı yüksek lisans programına başladı. Yine aynı yıl içerisinde Muş Alparslan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak başladığı görevine halen devam etmektedir.

Rıdvan Cem DEMİRKOL