BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

α . DERECEDEN BAZI YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİ ÜZERİNE

Selman EKİN

AĞUSTOS 2016

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

α . DERECEDEN BAZI YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİ ÜZERİNE

Hazırlayan

Selman EKİN

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Şükran KONCA

Jüri Üyeleri

Yrd. Doç. Dr. Muhammed ÇINAR

Yrd. Doç. Dr. Şükran KONCA

Yrd. Doç. Dr. Murat KARAKAŞ

AĞUSTOS 2016

Selman EKİN tarafından hazırlanan "α **. Dereceden Bazı Yakınsaklık Çeşitleri Üzerine"** adlı tez çalışması **24 / 08 / 2016** tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Yrd. Doç. Dr. Muhammed ÇINAR (Başkan)	______________
Yrd. Doç. Dr. Şükran KONCA (Danışman)	______________
Yrd. Doç. Dr. Murat KARAKAŞ (Üye)	______________

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 20/09/2016 gün ve 35/04 Sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Mehmet Cihan AYDIN
Enstitüsü Müdürü

ÖZET

α. DERECEDEN BAZI YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİ ÜZERİNE

Selman EKİN

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Şükran KONCA
Ağustos 2016, 45 sayfa

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde α. dereceden istatistiksel yakınsaklık kavramından kısaca bahsedilmiş olup, ikinci bölümde konuyla ilgili literatür taraması yapılmıştır. Üçüncü bölümde ise bazı temel kavramlara ve tanımlara yer verilmiştir. Tezin orijinal kısmını oluşturan dördüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Dördüncü bölümün ilk kısmında çift indisli dizilerde α. dereceden ağırlıklı lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanarak bazı kapsama bağıntıları incelenmiştir. Dördüncü bölümün ikinci kısmında ise dizilerin α. dereceden ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaklığının ideal versiyonu incelenmiştir. Ayrıca bazı dizi uzayları tanımlanarak literatürdeki dizi uzaylarıyla aralarındaki kapsama bağıntıları verilmiştir. Son bölümde elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

Anahtar kelimeler: Ağırlık, Lacunary Dizisi, α-Dereceden İstatistiksel Yakınsaklık, I-İstatistiksel Yakınsaklık, İdeal

ABSTRACT

ON SOME TYPES OF CONVERGENCE OF ORDER-α

Selman EKİN

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Şükran KONCA
August 2016, 45 pages

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, the concept of statistical convergence of order α is mentioned briefly. In the second chapter, the literature on the subject was examined. In the third chapter, the fundamental definitions and notations are given. The fourth chapter, which is the original part of this thesis, consists of two sections. In the first section of fourth chapter, the concept of weighted lacunary almost statistical convergence of order α of double sequences was defined and some inclusion relations were given. In the second section of the fourth chapter, the ideal version of weighted lacunary statistical convergence of sequences of order α was examined. Further, some inclusion relations were given. In the last chapter, we evaluate the results obtained.

Keywords: Weight, Lacunary Sequence, Statistical Convergence of Order α, I-Statistical Convergence, Ideal

TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesi ve yürütülmesi aşamasında, her konuda yardımını ve desteğini esirgemeyen saygıdeğer hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Şükran KONCA'ya çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca, bu çalışmanın hazırlanmasında her zaman yanımda olan arkadaşım Ergin GENÇ'e ve kızlarım Zeynep ile Ayşenur'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

IN	Doğal sayılar kümesi
IR	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
w	Reel veya kompleks terimli tüm dizilerin uzayı
c	Reel veya kompleks terimli tüm yakınsak dizilerin uzayı
c_0	Reel veya kompleks terimli sıfıra yakınsak tüm dizilerin uzayı
l_∞	Reel veya kompleks terimli tüm sınırlı dizilerin uzayı
S	Tüm istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
S_θ	Tüm lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
S_θ^α	α -Dereceden tüm lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
S_R	Tüm ağırlıklı istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$S_{(R,\theta)}$	Tüm ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
I	İdeal
F	Filtre
$S(I)$	Tüm *I*- istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$S_\theta(I)$	Tüm *I*- lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$S_{(R,\theta)}(I)$	Tüm *I*- ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi

1. GİRİŞ

Yakınsaklık kavramından daha zayıf bir yakınsaklık çeşidi olan istatistiksel yakınsaklık kavramı yıllarca farklı isimler altında matematiğin birçok alanlarında çalışılmıştır. İstatistiksel yakınsaklık kavramı, toplanabilme teorisinde ve fonksiyonel analizde önemli yer tutmaktadır. Derece dahil edilerek, bir dizinin istatistiksel yakınsaklığı Gadjiev ve Orhan [1] tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir:

$0<\beta<1$ derecesi ile birlikte bir $x=(x_k)$ reel ya da kompleks terimli sayı dizisine eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\le n,\left|x_k-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|}{n^{1-\beta}}=0$$

ise bir L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir.

$\beta=0$ için yukarıdaki tanım istatistiksel yakınsaklığın tanımına indirgenir. Yukarıdaki tanım aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

α sayısı $0<\alpha\le1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı olsun. $\left|\left\{k\le n:k\in E\right\}\right|$, E kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermek üzere her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\left|\left\{k\le n:\left|x_k-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x=\left(x_k\right)$ dizisine L ’ye α. dereceden istatistiksel yakınsaktır denir. Bir başka ifadeyle, her $\varepsilon>0$ ve hemen hemen her $k(\alpha)$ için $\left|x_k-L\right|<\varepsilon$ ise $x=\left(x_k\right)$ dizisine L ’ye α. dereceden istatistiksel yakınsaktır denir. Bu yakınsaklık S^{α}-$\lim_{k\to\infty}x_k=L$ şeklinde gösterilir. α. dereceden tüm istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi S^{α} ile gösterilir [2].

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

İstatistiksel yakınsaklık kavramı Fast [3], Steinhaus [4] ve daha sonra bağımsız olarak Schoenberg [5] tarafından tanıtıldı. Uzun yıllar sonra, Fourier Analizi teorisinde, ergodik teoride ve sayılar teorisinde farklı adlar altında araştırıldı. Fridy [6] ve Salat'ın [7] çalışmalarından sonra toplanabilme teorisinde en aktif çalışma alanlarından birine dönüşmüştür. Bu konuyla ilgili çalışmalar hem hız kazanmış hem de genişletilmiştir.

Çolak [2] tarafından istatistiksel yakınsaklık tanımında paydadaki n yerine n^{α} alınarak tanıtılan α. dereceden istatistiksel yakınsaklık kavramı ile istatistiksel yakınsaklık çalışmalarına farklı bir yön verilmiştir. Bhunia ve diğerleri [8] α. dereceden istatistiksel yakınsaklık kavramı ile ilgili bazı sonuçlar vererek aynı yöntemin çift dizilere de uyarlanabileceğini söyleyerek (α,β) dereceden istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamıştır. Daha sonra Çolak ve Bektaş [9] tarafından α. dereceden λ-istatistiksel yakınsaklık; Et ve diğerleri [10] tarafından fonksiyon dizilerinin α. dereceden λ-istatistiksel yakınsaklığı; Şengül ve Et [11] tarafından α. dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık; Çınar ve diğerleri [12] tarafından α. dereceden düzgün ve noktasal istatistiksel yakınsaklık; Das ve diğerleri [13] tarafından olasılık teorisinde α. dereceden istatistiksel yakınsaklık; Ghosal [14] tarafından α. dereceden ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık ve uygulamaları matematiğin birçok alanında çalışılmıştır.

Tek indisli diziler için hemen hemen yakınsaklık ve kuvvetli hemen hemen yakınsaklık kavramları sırasıyla Lorentz [15] ve Maddox [16] tarafından tanımlandı. Çift indisli diziler için hemen hemen yakınsaklık ve kuvvetli hemen hemen yakınsaklık kavramları sırasıyla Moricz ve Rhoades [17] ve Başarır [18] tarafından tanıtıldı. Son zamanlarda çift dizilerde α. dereceden istatistiksel yakınsaklık Çolak ve Altın [19] tarafından ve α. dereceden hemen hemen istatistiksel yakınsaklık ve α. dereceden hemen hemen lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları Savaş [20-21] tarafından verildi.

Başarır ve Konca [22] tek indisli diziler için yeni bir istatistiksel yakınsaklık kavramı olan ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaklığı tanıttı. Son zamanlarda yerel solid Riesz uzaylarında ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı Başarır ve Konca [23] tarafından ve Orlicz fonksiyonları yardımıyla tanımlanmış Riesz lacunary hemen hemen yakınsak çift dizi uzayları Konca ve Başarır [24] tarafından ve yine yerel solid Riesz uzaylarında çift indisli dizilerin ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaklığı Konca [25] tarafından; gene aynı kavram yerel konveks topolojik vektör uzaylarında Başarır ve Konca [26] tarafından tanıtılmıştır.

İstatistiksel yakınsaklık, *I*-yakınsaklığın özel bir halidir ve özel bir ideal seçimi ile elde edilir. *I*-yakınsaklık, pozitif tam sayılar kümesinin alt kümelerinin *I* ideal kavramına dayanır. İdeal yakınsaklık kavramı, ilk aşamada 2000 yılında Kostyrko ve diğerleri [27] tarafından istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirilmesi olarak incelenmiş ve günümüze kadar halen pek çok matematikçi tarafından çalışılmaktadır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 3.1.1 $X \neq \phi$ bir cümle ve K kompleks sayıların bir cismi olsun.

$+: \ X \times X \to X,$

$\cdot: \ K \times X \to X$

Her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in K$ için

L1) $x + y = y + x$

L2) $(x+y)+z = x+(y+z)$

L3) $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

L4) Her bir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.

L5) $1.x = x$

L6) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

L7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

L8) $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x$

fonksiyonları yukardaki özellikleri sağlıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzay adı verilir [28].

Tanım 3.1.2 X bir lineer uzay ve $\|.\|: X \to IR$ olsun. Eğer $x, y \in X$ ve her $\lambda \in IR$ için;

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa, $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir [28].

Tanım 3.1.3 $(k=1,2,3,...)$ birer kompleks terimli dizi $x=(x_k)$, $y=(y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere;

$$x+y=(x_k)+(y_k)$$
$$\alpha x=(\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. Tüm kompleks terimli dizilerin uzayı olan ω'nın her alt lineer uzayına dizi uzayı denir [29].

Tanım 3.1.4 $A=(a_{nk})\in(c:c;p)$ olması için gerek ve yeter şart;

i) $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$

ii) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$

iii) $\lim_{n\to\infty} \sum_k |a_{nk}| = 1$

koşullarının sağlanmasıdır [29].

Tanım 3.1.5 Silverman-Toeplitz teoreminin koşullarını sağlayan bir matris regüler matris (Toeplitz matrisi) olarak adlandırılır [29].

Tanım 3.1.6 $p>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $a_1,a_2,a_3,...,a_n \geq 0$ ve $b_1,b_2,b_3,...,b_n \geq 0$ olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

ve aynı zamanda;

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right). b_k$$

dir [30].

Tanım 3.1.7 $(X,\|.\|)$ bir normlu uzay ve $x=(x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ için $m,n>n_0$ iken $\|x_m-x_n\|<\varepsilon$ olacak şekilde $n_0=n_0(\varepsilon)\in IN$ sayısı varsa $x=(x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [31].

Tanım 3.1.8 $(X,\|.\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı denir [31].

Tanım 3.1.9 $x=(x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer, her ε>0 için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n:|x_k-L|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

yani, hemen hemen her k için $|x_k-L|<\varepsilon$ olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S-\lim x=L$ veya $x_k\to L(S)$ ile gösterilir. Tüm istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir [3].

İstatistiksel yakınsaklık alışılmış yakınsaklığın doğal bir genişlemesidir. Eğer $\lim_{k\to\infty}x_k=L$ ise o zaman S-$\lim x=L$ dir. Fakat bunun tersi doğru olmayabilir.

Örnek 3.1.10 Aşağıdaki diziyi

$$x=(x_n)=\begin{cases}1, & n=k^2\\ 0, & n\ne k^2\end{cases},\ (n=1,2,3,...)$$

incelediğimizde $x=(x_n)=(1,0,0,1,0,0,0,0,1,...)=(x_1,x_2,x_3,x_4,...)$, $\left(x_{n^2}\right)=1$ ve diğer durumlarda $(x_n)=0$ olduğu görülür.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1},\frac{2}{2},\frac{2}{3},\frac{2}{4},\frac{2}{5},...,\frac{2}{n},...\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$$

olup verilen dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat $\underline{\lim}\, x_n = 0$ ve $\overline{\lim}\, x_n = 1$ olup alt ve üst limitler birbirine eşit olmadığından bu dizi yakınsak değildir [32].

Tanım 3.1.11 Negatif olmayan tamsayıların artan bir dizisi $\theta = \{k_r\}$ olsun. Eğer $k_0 = 0$ ve $r \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ ise $\theta = \{k_r\}$ dizisine lacunary dizisi denir. Ayrıca $\theta = \{k_r\}$ dizisi için, $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ olarak belirtilir [33].

Tanım 3.1.12 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı bulunabiliyorsa, $x = (x_k)$ sayı dizisine, lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. S_θ-$\lim_{k\to\infty} x_k = L$ veya $x_k \to L(S_\theta)$ şeklinde gösterilir.
Lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi aşağıdaki şekilde gösterilir [33]:

$$S_\theta := \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \right\} = 0 .$$

Tanım 3.1.13 Bir $x = (x_k)$ dizisine, $t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} p_k x_k$ olmak üzere S -$\lim_{n\to\infty} t_n(x) = L$ ise (p_k) dizisi ile belirlenmiş ağırlıklı ortalama metodu ile L'ye istatistiksel toplanabilirdir veya kısaca L'ye (R, p_n)-istatistiksel toplanabilirdir denir [34].

Tanım 3.1.14 Bir $x = (x_k)$ dizisi verildiğinde, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \left| \left\{ k \leq P_n : p_k \, |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L sayısına ağırlıklı istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_R\text{-}\lim_{k\to\infty} x_k = L$ olarak yazılır [34].

Tanım 3.1.15 $\theta=(k_r)$ bir lacunary dizisi (p_k) pozitif reel sayıların bir dizisi olsun öyle ki

$$H_r := \sum\nolimits_{k\in \mathrm{I}_r} p_k\ , \quad P_{k_r} := \sum_{k\in(0,k_r]} p_k\ , \quad P_{k_{r-1}} := \sum_{k\in(0,k_{r-1}]} p_k\ , \quad Q_r = \frac{P_{k_r}}{P_{k_{r-1}}}, \quad P_0 = 0, \quad \mathrm{I}_r' = \left(P_{k_{r-1}}, P_{k_r}\right].$$

$H_r = P_{k_r} - P_{k_{r-1}}$ olduğu kolayca görülür. Her bir $k \in IN$ için $p_k = 1$ olarak alınırsa H_r, P_{k_r}, $P_{k_{r-1}}$ Q_r ve I_r' sırasıyla h_r, k_r, k_{r-1}, q_r ve I_r'ye indirgenmiş olur. Burada $H_r \to \infty$ $(r\to\infty)$ olacak şekilde $P_n \to \infty$ $(n\to\infty)$ olduğu kabul edilecektir ve $\lim_k x_k$ veya $\lim x$ ile $\lim_{k\to\infty} x_k$ kastedilecektir [22].

Tanım 3.1.16 Bir $x=(x_k)$ dizisine, her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{H_r} \left| \left\{ k \in \mathrm{I}_r' : p_k \left| x_k - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise L'ye ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $S_{(R,\theta)}\text{-}\lim x = L$ olarak yazılır. Tüm ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S_{(R,\theta)}$ ile gösterilir [22].

Tanım 3.1.17 $0<\alpha\leq 1$ olacak şekilde herhangi bir α reel sayısı verilsin. $\left|\{k\leq n : k\in E\}\right|$, E kümesinin *n* den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermek üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \left|\{k\leq n : k\in E\}\right|$$

limiti mevcut ise bu limit değerine E alt cümlesinin α yoğunluğu denir. Bu yoğunluk $\delta_\alpha(E)$ ile gösterilir [2].

Tanım 3.1.18 Bir $x=(x_k)$ dizisi verildiğinde $0<\alpha\leq 1$ ve her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\left|\left\{k\le n:\left|x_k-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

olacak şekilde bir L reel sayısı varsa bu diziye α. dereceden istatistiksel yakınsaktır denir ve S^{α}-$\lim_{k\to\infty}x_k=L$ olarak yazılır. α. dereceden tüm istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S^{α} ile gösterilecektir. $\alpha=1$ için S^{α}, S ye indirgenir [2].

Tanım 3.1.19 $\theta=(k_r)$ bir lacunary dizisi olsun ve $0<\alpha\le 1$ olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için $I_r=\left(k_{r-1},k_r\right]$ ve h_r^{α}, h_r 'nin α. kuvveti yani; $\left(h_r^{\alpha}\right)=\left(h_1^{\alpha},h_2^{\alpha},\dots,h_r^{\alpha},\dots\right)$ olmak üzere

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r^{\alpha}}\left|\left\{k\in I_r:\left|x_k-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

şeklinde bir L reel sayı değeri varsa $x=(x_k)$ dizisine α. Dereceden lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $S_{\theta}^{\alpha}-\lim_{k\to\infty}x_k=L$ olarak yazılır. Eğer $\alpha=1$ alınırsa S_{θ}-yakınsaklığın yani lacunary istatistiksel yakınsaklığın tanımı elde edilir [11].

Tanım 3.1.20 x boş olmayan herhangi bir cümle olmak üzere;

$$f:IN\ x\ IN\to X$$

$$(m,n)\to f(m,n)=x_{mn}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna çift indisli dizi (çift dizi) denir. Çift indisli bir dizinin $x=(x_{mn})$ elemanlarını

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\infty\times\infty}$$

şeklinde bir tablo olarak düşünebiliriz. w_2 kompleks veya reel terimli bütün çift dizilerin cümlesi olup bu cümle $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ve $\forall x, y \in w_2$ için $\alpha x = (\alpha x_{mn})$ ve $x + y = (x_{mn} + y_{mn})$ işlemleri altında bir lineer uzaydır.

$x = (x_{mn})$ kompleks terimli bir çift dizi olmak üzere $\sup_{m,n\geq 0} |x_{mn}| < \infty$ ise x dizisine sınırlıdır denir.

ℓ_2^∞ bütün sınırlı çift dizilerin cümlesi olmak üzere

$$\ell_2^\infty = \left\{ x = (x_{mn}) \in w^2 : \|x\|_\infty = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |x_{mn}| < \infty \right\}$$

şeklinde olup bu uzay $\|.\|_\infty$ normu ile bir Banach uzayı teşkil eder. Tek dizilerdeki durumun aksine, çift dizilerde birden fazla yakınsaklık kavramı mevcuttur. Bunlardan en çok çalışılanı Pringsheim yakınsaklıktır [35].

Tanım 3.1.21 Reel ya da kompleks terimli $x = (x_{mn})$ çift dizisi, $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > N$ olduğunda $|x_{mn} - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in IN$ varsa $x = (x_{mn})$ dizisi $L \in IR$ (veya $\mathbb{C}$) sayısına Pringsheim anlamında yakınsak ve L değerine de x dizisinin Pringsheim limiti denir ve $P\text{-}\lim x_{mn} = L$ ile gösterilir. c_2 ve c_2^∞ ile tüm reel ya da kompleks sayıların sırasıyla tüm P-yakınsak dizilerin uzayını ve tüm sınırlı yakınsak çift indisli dizilerin kümeleri gösterilecektir [35].

Tanım 3.1.22 $A = (a_{jk}^{nm})$ dört boyutlu sonsuz bir matris ve $x = (x_{jk})$ bir çift dizi olmak üzere her *n, m* için

$$(Ax)_{nm} := \sum_{j,k} x_{jk} a_{jk}^{nm}$$

çift serisi *P*-yakınsak ise

$$Ax := \left(\sum_{j,k} x_{jk} a_{jk}^{nm} \right)_{n,m}$$

dizisine x dizisinin A-dönüşüm dizisi denir [36].

Tanım 3.1.23 Sınırlı P-yakınsak bir çift diziyi kendi limitine toplayan dört boyutlu matrise RH-regüler matris denir [36].

Teorem 3.1.24 Dört boyutlu bir $A=\left(a_{jk}^{nm}\right)$ matrisinin RH-regüler olması için gerek ve yeter şart;

i) $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{jk}^{mn}=0 \ \left(j,k=0,1,...\right)$

ii) $\lim\limits_{m,n\to\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{jk}^{mn}=1$

iii) $\lim\limits_{m,n\to\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty}\left|a_{jk}^{mn}\right|=0 \ \left(k=0,1,...\right)$

iv) $\lim\limits_{m,n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|a_{jk}^{mn}\right|=0 \ \left(j=0,1,...\right)$

v) $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|a_{jk}^{mn}\right|\le C<\infty \ \left(m,n=0,1,...\right)$.

şartlarının sağlanmasıdır [36].

Tanım 3.1.25 $x=\left(x_{ij}\right)$ çift dizisine eğer

$$P-\lim_{p,q\to\infty}\sup_{m,n}\left|\frac{1}{(p+1)(q+1)}\sum_{i=m}^{m+p}\sum_{j=n}^{n+q}x_{ij}-L\right|=0$$

ise L'ye hemen hemen yakınsaktır denir. Yani; herhangi bir $D=\left\{(i,j): m\le i\le m+p,\ n\le j\le n+q\right\}$ dikdörtgeni üzerinde alınan $x=\left(x_{ij}\right)$ nin aritmetik ortalaması p ve q sonsuza eğilimli iken L'ye yakınsıyorsa ve bu yakınsaklık m ve n'ye göre düzgün ise $x=\left(x_{ij}\right)$ dizisine hemen hemen yakınsaktır denir [17].

Tanım 3.1.26

$$t_{klpq}(x)=\frac{1}{(k+1)(l+1)}\sum_{i=p}^{k+p}\sum_{j=q}^{l+q}x_{ij}$$

olmak üzere hemen hemen yakınsak tüm çift indisli dizilerin uzayı aşağıdaki şekildedir:

$$\hat{c}_2 = \left\{ x = (x_{i,j}) : \lim_{k,l\to\infty} \left| t_{klpq}(x) - L \right| = 0,\ p \text{ ve } q\text{'ya göre düzgün.} \right\}.$$

Bir $x = (x_{ij})$ çift dizisine eğer

$$P - \lim_{k,l\to\infty} \frac{1}{(k+1)(l+1)} \sum_{i=p}^{k+p} \sum_{j=q}^{l+q} \left| x_{ij} - L \right| = 0,$$

p ve q ya göre düzgün ise, L 'ye Pringsheim anlamında kuvvetli hemen hemen yakınsaktır denir. $[\hat{c}_2]$ ile tüm kuvvetli hemen hemen yakınsak çift dizilerin uzayı gösterilir. $c_2^\infty \subset [\hat{c}_2^\infty] \subset \hat{c}_2 \subset l_2^\infty$ kapsama bağıntıları açık bir şekilde görülür [17].

Tanım 3.1.27 $0 < \alpha \le 1$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$P - \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{(mn)^\alpha} \left| \left\{ i \le m \text{ ve } j \le n : \left| x_{ij} - L \right| \ge \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir L reel sayısı var ise $x = (x_{ij})$ dizisine α. dereceden istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_2^\alpha\text{-}\lim_{i,j} x_{ij} = L$ şeklinde gösterilir. α. dereceden çift indisli dizilerin uzayı S_2^α ile gösterilir [19]. Eğer $\alpha = 1$ alınırsa çift dizilerin istatistiksel yakınsaklık tanımı elde edilir [37].

Tanım 3.1.28 $k_0 = 0$, $r \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ ve $l_0 = 0$, $s \to \infty$ iken $\bar{h}_s = l_s - l_{s-1} \to \infty$ olacak şekilde $\theta_{r,s} = \{(k_r, l_s)\}$ iki artan tam sayıların dizisine çift lacunary dizisi denir. $k_{r,s} = k_r l_s$, $h_{r,s} = h_r \bar{h}_s$, $I_{r,s} = \{(k,l) : k_{r-1} < k \le k_r \text{ ve } l_{s-1} < l \le l_s\}$, $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$, $\bar{q}_s = \frac{l_s}{l_{s-1}}$ ve $q_{r,s} = q_r \bar{q}_s$ olarak alınacaktır [21].

Tanım 3.1.29 0< $\alpha \le 1$ olarak verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için

$$P - \lim_{r,s\to\infty} \frac{1}{h_{rs}{}^\alpha} \left| \left\{ (i,j) \in I_{rs} : \left| x_{ij} - L \right| \ge \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir L reel sayısı var ise $x=\left(x_{ij}\right)$ dizisine L 'ye α. dereceden çift lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_{\theta_{rs}}^{\alpha}-\lim_{ij} x_{ij}=L$ şeklinde gösterilir. Tüm α. dereceden çift lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı $S_{\theta_{rs}}^{\alpha}$ ile gösterilir. $\alpha=1$ için çift indisli dizilerin lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımı elde edilir [38].

Tanım 3.1.30 (p_n), $(\bar{p}_m)$ pozitif sayıların dizileri ve $P_n=p_1+p_2+...+p_n$, $\bar{P}_m=\bar{p}_1+\bar{p}_2+...+\bar{p}_m$ olmak üzere

$$T_{nm}(x)=\frac{1}{P_n\bar{P}_m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} p_k\bar{p}_l x_{kl}$$

olarak verilen dönüşüme $x=\left(x_{kl}\right)$ çift indisli dizisinin Riesz ortalaması denir. Eğer $P-\lim_{n,m\to\infty} T_{nm}(x)=L$, $L\in IR$ ise $x=\left(x_{kl}\right)$ dizisine L'ye Riesz yakınsaktır denir ve $P_R-\lim_{k,l\to\infty} x_{kl}=L$ ile gösterilir [39].

Tanım 3.1.31 $\theta_{r,s}=\{(k_r,l_s)\}$ bir çift lacunary dizisi ve (p_k), $(\bar{p}_l)$ ise $P_{k_r}:=\sum_{k\in(0,k_r]} p_k$, $\bar{P}_{l_s}:=\sum_{l\in(0,l_s]}\bar{p}_l$ ve $H_r:=\sum_{k\in(k_{r-1},k_r]} p_k$, $\bar{H}_s:=\sum_{l\in(l_{s-1},l_s]}\bar{p}_l$ olacak şekilde pozitif reel sayıların dizileri olsun. Açıkça $H_r:=P_{k_r}-P_{k_{r-1}}$, $\bar{H}_s:=\bar{P}_{l_s}-\bar{P}_{l_{s-1}}$ olur. Eğer çift dizilerin Riesz dönüşümü RH-regüler ve $H_r:=P_{k_r}-P_{k_{r-1}}\to\infty$ $(r\to\infty)$, $\bar{H}_s:=\bar{P}_{l_s}-\bar{P}_{l_{s-1}}\to\infty$ $(s\to\infty)$ ise $\theta'_{r,s}=\{(P_{k_r},\bar{P}_{l_s})\}$ de bir çift lacunary dizisidir.

$H_r:=P_{k_r}-P_{k_{r-1}}\to\infty$ $(r\to\infty)$, $\bar{H}_s:=\bar{P}_{l_s}-\bar{P}_{l_{s-1}}\to\infty$ $(s\to\infty)$ hükmünü eklemekteki zorunluluk sadece " $P_n\to\infty$ $(n\to\infty)$" ve " $\bar{P}_m\to\infty$ $(m\to\infty)$" kabulünün sırasıyla " $H_r\to\infty$ $(r\to\infty)$" ve " $\bar{H}_s\to\infty$ $(s\to\infty)$" şartlarını her zaman sağlatamamasıdır. Bunu açık bir şekilde göstermek için, pozitif tamsayıların birer (k_r) ve (l_s) lacunary dizileri için $P_n=p_1+...+p_n\to\infty$ $(n\to\infty)$ ve $\bar{P}_m=\bar{p}_1+...+\bar{p}_m\to\infty$ $(m\to\infty)$ olmasına rağmen $H_r=P_{k_r}-P_{k_{r-1}}$ ve $\bar{H}_s=\bar{P}_{l_s}-\bar{P}_{l_{s-1}}$ sınırlı ve kesin pozitif olacak şekilde (p_k) ve $(\bar{p}_l)$ pozitif reel sayılarının bulunabileceğini göstermektir [24].

Örnek 3.1.32 Yukarıdaki ifadeyi belirginleştirmek için aşağıdaki örnek verilebilir.

$$p_k = \begin{cases} 1, & \text{bazı } r \in IN \text{ için } k = k_r \text{ ise} \\ \dfrac{2}{3^k}, & \text{diğer tüm } k \in IN \text{ için} \end{cases}$$

ve

$$\bar{p}_l = \begin{cases} 1, & \text{bazı } s \in IN \text{ için } l = l_s \text{ ise} \\ \dfrac{1}{2^l}, & \text{diğer tüm } l \in IN \text{ için.} \end{cases}$$

Bu durumda $P_n \to \infty \ (n \to \infty)$ ve $P_{k_r} > p_{k_1} + p_{k_2} + ... + p_{k_r} = r$ iken $r < P_{k_r} < r+1$,

$$P_{k_r} < p_{k_1} + p_{k_2} + ... + p_{k_r} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = r+1$$

olurken $\bar{P}_m \to \infty \ (m \to \infty)$ ve $\bar{P}_{l_s} > \bar{p}_{l_1} + \bar{p}_{l_2} + ... + \bar{p}_{l_s} = s$ iken $s < \bar{P}_{l_s} < s+1$,

$$\bar{P}_{l_s} < \bar{p}_{l_1} + \bar{p}_{l_2} + ... + \bar{p}_{l_s} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} = s+1$$

elde edilir. Böylece $H_r = P_{k_r} - P_{k_{r-1}} < r+1-(r-1) < 2$ ve $\bar{H}_s = \bar{P}_{l_s} - \bar{P}_{l_{s-1}} < s+1-(s-1) < 2$ olup sınırlıdır ve sonsuza ıraksamaz [24].

$P_{k_{r,s}} = P_{k_r} \bar{P}_{l_s}$, $H_{r,s} = H_r \bar{H}_s$ ve $I'_{r,s} = \left\{(k,l) : P_{k_{r-1}} < k \le P_{k_r} \ ve \ \bar{P}_{l_{s-1}} < l \le \bar{P}_{l_s}\right\}$, $Q_r = \dfrac{P_{k_r}}{P_{k_{r-1}}}$, $\bar{Q}_s = \dfrac{\bar{P}_{l_s}}{\bar{P}_{l_{s-1}}}$ ve $Q_{r,s} = Q_r \bar{Q}_s$ olsun. Eğer her k ve l için $p_k = 1$ ve $\bar{p}_l = 1$ olarak alınırsa $H_{r,s}$, $P_{k_{r,s}}$, $Q_{r,s}$ ve $I'_{r,s}$ sırasıyla $h_{r,s}$, $k_{r,s}$, $q_{r,s}$ ve $I_{r,s}$ 'ye indirgenmiş olur [24].

Tanım 3.1.33 $X \neq \emptyset$, X 'in tüm alt kümelerinin ailesi $P(X) = 2^X$ olmak üzere, $I \subseteq 2^X$ sınıfına aşağıdaki şartlar sağlandığı takdirde X 'de bir idealdir denir:

i) $\emptyset \in \mathrm{I}$,

ii) $A, B \in I$ için $A \cup B \in I$,

iii) Her $A \in I$ ve $B \subseteq A$ için $B \in I$.

$X \notin I$, yani $I \neq 2^X = P(X)$ ise I 'ya aşikar olmayan ideal denir [40-41].

Tanım 3.1.34 IN pozitif tamsayılar kümesinin alt kümelerinin boştan farklı bir F ailesi için

i) $\emptyset \notin F$

ii) Her $A, B \in F$ için $A \cap B \in F$

iii) Her $A \in F$ ve $B \supseteq A$ için $B \in F$,

şartları sağlanıyor ise F ailesine süzgeç denir. Aşağıdaki durum ideal ile filtre kavramları arasındaki ilişkiyi açıklamaktadır

$$F(I) = \{M \subseteq X : \exists A \in I : M = X \setminus A\}.$$

$F(I)$ ya I ideali ile ilişkilendirilmiş filtre denir. X 'de aşikar olmayan I idealine her bir $x \in X$ için $\{x\} \in I$ ise uygun (admissible) ideal denir [41].

Tanım 3.1.35 $I \subset 2^{IN}$, IN 'de aşikar olmayan bir ideal olarak verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in IN : |x_n - L| \geq \varepsilon\} \in I$$

ise (x_n) dizisine L sayısına I -yakınsaktır denir ve $I\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = L$ olarak yazılır [41].

Tanım 3.1.36 Bir $x = (x_k)$ dizisine her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$\left\{n \in IN : \frac{1}{n}\left|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| \geq \delta\right\} \in I$$

ise I -istatistiksel yakınsaktır veya $S(I)$-yakınsaktır denir. Bu durumda $x_k \to L(S(I))$ veya $S(I)\text{-}\lim_{k\to\infty} x_k = L$ olarak yazılır. Tüm istatistiksel yakınsak sayı dizilerinin kümesi $S(I)$ ile gösterilir [42]. $I = I_{fin}$ (IN 'nin tüm sonlu alt kümelerinin ideali) için, I -istatistiksel yakınsaklık istatistiksel yakınsaklık ile çakışır [42].

Tanım 3.1.37 Bir $x = (x_k)$ dizisine her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$\left\{r \in IN : \frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \in I$$

ise L 'ye I -lacunary istatistiksel yakınsaktır (veya $S_\theta(I)$-yakınsaktır) denir.

Buna göre, $S_\theta(I)\text{-}\lim_{k\to\infty} x_k = L$ veya $x_k \to L(S_\theta(I))$ olarak yazılır. Tüm I -lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin sınıfı $S_\theta(I)$ ile gösterilecektir [42].

Tanım 3.1.38 Bir $x = (x_k)$ dizisine her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$\left\{r \in IN : \frac{1}{H_r}\left|\left\{k \in I'_r : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \in I$$

ise L sayısına ağırlıklı lacunary I -istatistiksel yakınsaktır (veya $S_{(R,\theta)}(I)$-yakınsaktır) denir.

Buna göre, $S_{(R,\theta)}(I)\text{-}\lim_{k\to\infty} x_k = L$ veya $x_k \to L\left(S_{(R,\theta)}(I)\right)$ olarak yazılır. Tüm ağırlıklı lacunary I -istatistiksel yakınsak dizilerin sınıfı $S_{(R,\theta)}(I)$ ile gösterilecektir [43]. $I = I_{fin}$ için, $S_{(R,\theta)}(I)$ yakınsaklık $S_{(R,\theta)}$ ile çakışır. Her $k \in IN$ için $p_k = 1$ ise $S_{(R,\theta)}(I)$-yakınsaklık, $S_\theta(I)$-yakınsaklığa indirgenir [44].

Tanım 3.1.39 $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, bir $x = (x_k)$ dizisine her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$\left\{n \in IN : \frac{1}{n^\alpha}\left|\left\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \in I$$

ise L 'ye α . dereceden I -istatistiksel yakınsaktır (veya $S(I)^\alpha$ -yakınsaktır) denir.

Buna göre, $S(I)^\alpha\text{-}\lim_{k\to\infty} x_k = L$ veya $x_k \to L\left(S(I)^\alpha\right)$ olarak yazılır. Tüm I -istatistiksel yakınsak dizilerin sınıfı $S(I)^\alpha$ ile gösterilir [44].

Tanım 3.1.40 $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere, bir $x=(x_k)$ dizisine her $\varepsilon>0$ ve $\delta>0$ için

$$\left\{r\in IN:\frac{1}{h_r^{\alpha}}\left|\left\{k\in I_r:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}\in I$$

ise L ‘ye α. dereceden I -lacunary istatistiksel yakınsaktır (veya $S_\theta(I)$-yakınsaktır) denir. Buna göre, $S_\theta(I)^{\alpha}$-$\lim_{k\to\infty}x_k=L$ veya $x_k\to L\left(S_\theta(I)^{\alpha}\right)$ olarak yazılır. Tüm I -lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin sınıfı $S_\theta(I)^{\alpha}$ ile gösterilecektir [44].

4. BULGULAR

4.1 Çift İndisli Dizilerde α. Dereceden Ağırlıklı Lacunary Hemen Hemen İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde, çift indisli dizilerin α. dereceden ağırlıklı lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsaklığını tanımlayacağız. Ayrıca bazı kapsama bağıntılarını vereceğiz.

Tanım 4.1.1 $0<\alpha\leq 1$ olarak verilsin. Eğer her $\varepsilon>0$ için p ve q' ya göre düzgün olarak

$$P-\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{\left(P_n\bar{P}_m\right)^{\alpha}}\left|\left\{k\leq P_n \; ve \; l\leq \bar{P}_m : p_k\bar{p}_l\left|t_{klpq}\left(x\right)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

olacak şekilde bir L reel sayısı varsa $x=\left(x_{ij}\right)$ çift indisli dizisine L'ye α. dereceden hemen hemen ağırlıklı istatistiksel yakınsaktır denir ve $\tilde{S}^{\alpha}_{R^2}-\lim_{i,j\to\infty}x_{ij}=L$ şeklinde gösterilir. α. dereceden tüm çift hemen hemen ağırlıklı istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $\tilde{S}^{\alpha}_{R^2}$ şeklinde gösterilir. $\alpha=1$ için çift dizilerin hemen hemen ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık tanımı elde edilir.

Tanım 4.1.2 $0<\alpha\leq 1$ olacak şekilde herhangi bir α reel sayısı verilsin ve H^{α}_{rs}, H_{rs} 'nin α. kuvvetini göstermek üzere, her $\varepsilon>0$ için p ve q' ya göre düzgün olarak

$$P-\lim_{r,s\to\infty}\frac{1}{H^{\alpha}_{rs}}\left|\left\{\left(k,l\right)\in I'_{rs} : p_k\bar{p}_l\left|t_{klpq}\left(x\right)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

olacak şekilde bir L reel sayısı var ise $x=\left(x_{ij}\right)$ çift indisli dizisine α. dereceden $\tilde{S}^{\alpha}_{\left(R^2,\theta_{r,s}\right)}$-yakınsaktır denir. $x=\left(x_{ij}\right)$ dizisinin L'ye α. dereceden $\tilde{S}^{\alpha}_{\left(R^2,\theta_{r,s}\right)}$-yakınsak olması durumunda $S^{\alpha}_{\left(R^2,\theta_{r,s}\right)}$-$\lim_{i,j\to\infty}x_{ij}=L$ şeklinde gösterilir. Tüm α. dereceden hemen hemen ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S^{\alpha}_{\left(R^2,\theta_{r,s}\right)}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.1.3 $0<\alpha\leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı ve t pozitif reel sayı olsun. Eğer p ve q ya göre düzgün olarak

$$P-\lim_{r,s\to\infty}\frac{1}{H_{rs}^{\alpha}}\sum_{(k,l)\in I_{rs}} p_k\overline{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|^t=0$$

ise $x=(x_{ij})$ dizisine L'ye kuvvetli $R_{(\theta_{r,s})}^{\alpha}(t)$-toplanabilirdir denir. Tüm kuvvetli $R_{(\theta_{rs})}^{\alpha}(t)$-toplanabilir dizilerin kümesini $R_{(\theta_{rs})}^{\alpha}(t)$ şeklinde göstereceğiz. $t=1$ için $R_{(\theta_{rs})}^{\alpha}(t)$ dizi uzayı $R_{(\theta_{rs})}^{\alpha}$ dizi uzayına indirgenir ve bu uzay tüm α .dereceden kuvvetli $R_{(\theta_{rs})}^{\alpha}$-toplanabilir dizilerin uzayı şeklinde adlandırılır.

Her $k,l\in IN$ için $p_k=\overline{p}_l=1$ alınırsa $R_{(\theta_{rs})}^{\alpha}(t)$ uzayı, [19]'daki çalışmada tanımlanmış olan $W_{(\theta_{rs})}^{\alpha}(t)$ uzayına indirgenir.

Teorem 4.1.4 Eğer $0<\alpha\leq\beta\leq 1$ ise $S_{(R^2,\theta_{r,s})}^{\alpha}\subseteq S_{(R^2,\theta_{r,s})}^{\beta}$ kapsama bağıntısı sağlanır.

İspat: $0<\alpha\leq\beta\leq 1$ olsun. Buna göre her $\varepsilon>0$ için

$$\begin{aligned}&\frac{1}{H_{rs}^{\beta}}\sup_{p,q}\left|\left\{(k,l)\in I'_{rs}:p_k\overline{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\\ &\leq\frac{1}{H_{rs}^{\alpha}}\sup_{p,q}\left|\left\{(k,l)\in I'_{rs}:p_k\overline{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\ .\end{aligned}$$

Böylece $S_{(R^2,\theta_{r,s})}^{\alpha}\subseteq S_{(R^2,\theta_{r,s})}^{\beta}$ elde edilir.

Teorem 4.1.5 $0<\alpha\leq 1$, $\theta_{rs}=\{(k_r,l_s)\}$ bir çift lacunary dizisi olsun. Eğer $\liminf_r Q_r>1$ ve $\liminf_s\overline{Q}_s>1$ ise $S_{R^2}^{\alpha}\subseteq S_{(R^2,\theta_{r,s})}^{\alpha}$ dir.

İspat: $\liminf_r Q_r > 1$ ve $\liminf_s \bar{Q}_s > 1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda yeterince büyük r, s değerleri için $Q_r \geq 1+\delta$ ve $\bar{Q}_s \geq 1+\delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $\frac{H_r}{P_{k_r}} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$ ve $\frac{\bar{H}_s}{\bar{P}_{l_s}} \geq \frac{1}{1+\delta}$. $S^{\alpha}_{R^2}$- $\lim\limits_{i,j\to\infty} x_{ij} = L$ olsun. Buna göre yeterince büyük r ve s değerleri için

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\left(P_{k_r}\bar{P}_{l_s}\right)^{\alpha}} \sup_{p,q} \left|\left\{k \leq P_{k_r} \text{ ve } l \leq \bar{P}_{l_s} : p_k \bar{p}_l \left|t_{klpq}(x) - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\geq \frac{1}{\left(P_{k_r}\bar{P}_{l_s}\right)^{\alpha}} \sup_{p,q} \left|\left\{(k,l) \in I'_{r,s} : p_k \bar{p}_l \left|t_{klpq}(x) - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&= \frac{H^{\alpha}_{rs}}{\left(P_{k_r}\bar{P}_{l_s}\right)^{\alpha}} \frac{1}{H^{\alpha}_{rs}} \sup_{p,q} \left|\left\{(k,l) \in I'_{r,s} : p_k \bar{p}_l \left|t_{klpq}(x) - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&= \left(\frac{H_{rs}}{P_{k_r}\bar{P}_{l_s}}\right)^{\alpha} \frac{1}{H^{\alpha}_{rs}} \sup_{p,q} \left|\left\{(k,l) \in I'_{r,s} : p_k \bar{p}_l \left|t_{klpq}(x) - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\geq \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{2\alpha} \frac{1}{H^{\alpha}_{rs}} \sup_{p,q} \left|\left\{(k,l) \in I'_{r,s} : p_k \bar{p}_l \left|t_{klpq}(x) - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|.
\end{aligned}$$

Böylece $S^{\alpha}_{\left(R^2,\theta_{r,s}\right)}$-$\lim_{i,j\to\infty} x_{ij} = L$ elde edilir ve bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.6 $0 < \alpha \leq 1$, $\theta_{r,s} = \{(k_r, l_s)\}$ bir çift lacunary dizisi olsun. Eğer $\limsup_r Q^{\alpha}{}_r < \infty$ ve $\limsup_s \bar{Q}^{\alpha}_s < \infty$ ise $S^{\alpha}_{\left(R^2,\theta\right)} \subseteq S^{\alpha}_{R^2}$ elde edilir.

İspat: Varsayalım ki $\limsup_r Q^{\alpha}{}_r < \infty$ ve $\limsup_s \bar{Q}^{\alpha}_s < \infty$ olsun. Buna göre her $r, s \in IN$ için $Q^{\alpha}_r < \mathrm{K}$ ve $\bar{Q}^{\alpha}_s < \mathrm{K}$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır. $S^{\alpha}_{\left(R^2,\theta_{r,s}\right)}$-$\lim_{i,j\to\infty} x_{ij} = L$ ile birlikte $x \in S^{\alpha}_{\left(R^2,\theta_{r,s}\right)}$ olsun.

$$N_{rs} := \left|\left\{(k,l) \in I'_{r,s} : p_k \bar{p}_l \left|t_{klpq}(x) - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \tag{4.1.1}$$

alalım. $S^{\alpha}_{(R^2,\theta)}$ nın tanımından ve (4.1.1) denkleminden, verilen bir $\varepsilon > 0$ ve her $r > r_0$, $s > s_0$ için $\frac{N_{rs}}{H^{\alpha}_{rs}} < \varepsilon$ olacak şekilde $r_0, s_0 \in IN$ vardır.

$$M := \max\left\{N_{rs} : 1 \le r \le r_0 \text{ ve } 1 \le s \le s_0\right\}$$

olsun ve m ve n, $k_{r-1} < n \le k_r$ ve $l_{s-1} < m \le l_s$ şartlarını sağlayan herhangi pozitif tamsayılar olsun. Böylece her p ve q için

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\left(P_n\bar{P}_m\right)^{\alpha}}\left|\left\{k \le P_n \text{ ve } l \le \bar{P}_m : p_k\bar{p}_l\left|t_{klpq}(x) - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \\
&\le \frac{1}{\left(P_{k_{r-1}}\bar{P}_{l_{s-1}}\right)^{\alpha}}\left|\left\{k \le P_{k_r} \text{ ve } l \le \bar{P}_{l_s} : p_k\bar{p}_l\left|t_{klpq}(x) - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \\
&= \frac{1}{\left(P_{k_{r-1}}\bar{P}_{l_{s-1}}\right)^{\alpha}}\sum_{i,j=1,1}^{r_0,s_0} N_{ij} + \frac{1}{\left(P_{k_{r-1}}\bar{P}_{l_{s-1}}\right)^{\alpha}}\sum_{(r_0 < i \le r)\cup(s_0 < j \le s)} N_{ij} \\
&\le \frac{M_{r_0s_0}}{\left(P_{k_{r-1}}\bar{P}_{l_{s-1}}\right)^{\alpha}} + \frac{1}{\left(P_{k_{r-1}}\bar{P}_{l_{s-1}}\right)^{\alpha}}\sum_{(r_0 < i \le r)\cup(s_0 < j \le s)} \frac{N_{ij}H^{\alpha}_{rs}}{H^{\alpha}_{rs}} \\
&\le \frac{M_{r_0s_0}}{\left(P_{k_{r-1}}\bar{P}_{l_{s-1}}\right)^{\alpha}} + \varepsilon\frac{\left(P_{k_r}\bar{P}_{l_s} - P_{k_{r_0}}\bar{P}_{l_{s_0}}\right)^{\alpha}}{\left(P_{k_{r-1}}\bar{P}_{l_{s-1}}\right)^{\alpha}} \\
&\le \frac{M_{r_0s_0}}{\left(P_{k_{r-1}}\bar{P}_{l_{s-1}}\right)^{\alpha}} + \varepsilon\left(\frac{P_{k_r}\bar{P}_{l_s}}{P_{k_{r-1}}\bar{P}_{l_{s-1}}}\right)^{\alpha} \\
&= \frac{M_{r_0s_0}}{\left(P_{k_{r-1}}\bar{P}_{l_{s-1}}\right)^{\alpha}} + \varepsilon Q^{\alpha}_r\bar{Q}^{\alpha}_s \\
&\le \frac{M_{r_0s_0}}{\left(P_{k_{r-1}}\bar{P}_{l_{s-1}}\right)^{\alpha}} + \varepsilon K^2
\end{aligned}$$

sağlanır. $r, s \to \infty$ iken $P_{k_{r-1}} \to \infty$ ve $\bar{P}_{l_{s-1}} \to \infty$ (Pringsheim anlamında) olduğundan

$$\frac{1}{P_n\bar{P}_m}\left|\left\{k \le P_n \text{ ve } l \le \bar{P}_m : p_k\bar{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \to 0 \ (m,n\to\infty)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.7 $0<\alpha\le\beta\le1$ ve t pozitif bir reel sayı olsun. Buna göre $R^{\alpha}_{\theta_{r,s}}(t)\subseteq R^{\beta}_{\theta_{r,s}}(t)$ kapsama bağıntısı sağlanır.

İspat: $x=(x_{ij})\in R^{\alpha}_{\theta_{r,s}}(t)$ olsun. Verilen bir pozitif t sayısı ve $0<\alpha\le\beta\le1$ olacak şekildeki $\alpha>0$ ve $\beta>0$ için

$$\frac{1}{H^{\beta}_{r,s}}\sum_{(k,l)\in I_{r,s}} p_k\bar{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|^t \le \frac{1}{H^{\alpha}_{r,s}}\sum_{(k,l)\in I_{r,s}} p_k\bar{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|^t$$

elde edilir ve böylece yukarıdaki eşitliğin her iki tarafından r ve s üzerinden Pringsheim anlamında limit alınarak sonuç elde edilir.

Bir önceki teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.1.8 $0<\alpha\le\beta\le1$ ve t pozitif reel sayı olsun. Buna göre

i) $\alpha=\beta$ ise $R^{\alpha}_{\theta_{r,s}}(t)=R^{\beta}_{\theta_{r,s}}(t)$.

ii) Her $\alpha\in(0,1]$ ve $0<t<\infty$ için $R^{\alpha}_{\theta_{r,s}}(t)\subseteq R^{\beta}_{\theta_{r,s}}(t)$.

Teorem 4.1.9 α ve β, $0<\alpha\le\beta\le1$ olacak şekilde sabit reel sayılar olsun. Eğer $I'_{r,s}\subseteq I_{r,s}$ ise $R^{\alpha}_{\theta_{r,s}}\subset S^{\beta}_{(R^2,\theta_{r,s})}$ kapsama bağıntısı sağlanır.

İspat: $K_{P_{rs}}(\varepsilon)=\left\{(k,l)\in I^{'}_{rs} : p_k\bar{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|\ge\varepsilon\right\}$ ve $x\in R^{\alpha}_{\theta_{r,s}}$ olsun. Bu durumda p ve q ya göre düzgün olarak

$$P-\lim_{r,s\to\infty}\frac{1}{H_{rs}}\sum_{(k,l)\in I_{rs}} p_k\overline{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|=0 .$$

Her p ve q için

$$\frac{1}{H_{rs}^{\alpha}}\sum_{(k,l)\in I_{rs}} p_k\overline{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|\geq\frac{1}{H_{rs}^{\alpha}}\sum_{(k,l)\in I'_{rs}} p_k\overline{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|$$

$$=\frac{1}{H_{rs}^{\beta}}\sum_{(k,l)\in I'_{rs}} p_k\overline{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|+\frac{1}{H_{rs}^{\alpha}}\sum_{(k,l)\in I'_{rs}} p_k\overline{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|$$

$$\geq\frac{1}{H_{rs}^{\alpha}}\sum_{(k,l)\in I'_{rs}} p_k\overline{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|=\frac{1}{H_{rs}^{\alpha}}\left|K_{P_{rs}}(\varepsilon)\right|\varepsilon$$

$$\geq\frac{1}{H_{rs}^{\beta}}\left|K_{P_{rs}}(\varepsilon)\right|\varepsilon$$

olduğundan $x\in S^{\beta}_{\left(R^2,\theta_{r,s}\right)}$ elde edilir.

Sonuç 4.1.10 α sayısı, $0<\alpha\leq 1$ olacak şekilde sabit bir reel sayı değeri olsun.

i) Eğer bir dizi L'ye kuvvetli $R^{\alpha}_{\theta_{r,s}}$-toplanabilir ise L'ye $S^{\alpha}_{\left(R^2,\theta_{r,s}\right)}$-yakınsaktır, yani; $R^{\alpha}_{\theta_{r,s}}\subset S^{\alpha}_{\left(R^2,\theta_{r,s}\right)}$'dir.

ii) $0<\alpha\leq 1$ için $R^{\alpha}_{\theta_{r,s}}\subset S_{\left(R^2,\theta_{r,s}\right)}$'dir.

Teorem 4.1.11 $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere aşağıdaki durumlar sağlanır:

i) Her $k,l\in IN$ için $p_k<1$ ve $\overline{p}_l<1$ ise $\tilde{W}^{\alpha}_{\theta_{r,s}}$-$P$-lim $x=R^{\alpha}_{\theta_{r,s}}$-$P$-lim $x=L$ ile birlikte $\tilde{W}^{\alpha}_{\theta_{r,s}}\subset R^{\alpha}_{\theta_{r,s}}$ kapsama bağıntısı sağlanır.

ii) Her $k,l\in IN$ için $p_k>1$ ve $\overline{p}_l>1$ ve $\frac{H_r}{h_r}$ ve $\frac{\overline{H}_s}{\overline{h}_s}$ üstten sınırlıysa $\tilde{R}^{\alpha}_{\theta_{r,s}}$-$P$-lim $x=W^{\alpha}_{\theta_{r,s}}$-$P$-lim $x=L$ ile birlikte $R^{\alpha}_{\theta_{r,s}}\subset W^{\alpha}_{\theta_{r,s}}$ kapsama bağıntısı sağlanır.

İspat i) $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere bir $x=(x_{ij})$ dizisine $\tilde{R}_{\theta_{rs}}$ -toplanabilirdir denir eğer

$$P-\lim_{r,s\to\infty}\frac{1}{H_{rs}^{\alpha}}\sum_{(k,l)\in I_{rs}}p_k\bar{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|=0,\ (p \text{ ve } q\text{'ya göre düzgün}).$$

Her $k,l\in IN$ için $p_k=\bar{p}_l=1$ olarak seçilirse $\tilde{R}_{\theta_{rs}}$ dizi uzayı $\tilde{W}_{\theta_{rs}}^{\alpha}$ dizi uzayına indirgenir:

$$\tilde{W}_{\theta_{rs}}^{\alpha}=\left\{x=(x_{ij}):P-\lim_{r,s\to\infty}\frac{1}{h_{rs}^{\alpha}}\sum_{(k,l)\in I_{r,s}}\left|t_{klpq}(x)-L\right|=0\right\}.$$

Eğer her $k,l\in IN$ için $p_k<1$ ve $\bar{p}_l<1$ ise her $r,s\in IN$ için $H_r<h_r$ ve $\bar{H}_s<\bar{h}_s$ olur. Böylece

$$0<M_1\leq\frac{H_r}{h_r}<1 \text{ (her } r\in IN\text{) ve } 0<M_2\leq\frac{\bar{H}_s}{\bar{h}_s}<1 \text{ (her } s\in IN\text{)}$$

olur. $\tilde{W}_{\theta_{rs}}^{\alpha}-P-\lim x=L$ ile birlikte $x\in\tilde{W}_{\theta_{rs}}^{\alpha}$ olsun. Her $\varepsilon>0$ ve her p,q için $M_{1,2}=M_1M_2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{H_{rs}^{\alpha}}\sum_{(k,l)\in I_{rs}}p_k\bar{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|\\
&=\frac{1}{H_r^{\alpha}\bar{H}_s^{\alpha}}\sum_{(k,l)\in I_{rs}}p_k\bar{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|\\
&\leq\frac{1}{(M_1h_r)^{\alpha}(M_2\bar{h}_s)^{\alpha}}\sum_{(k,l)\in I_{rs}}p_k\bar{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|\\
&\leq\frac{1}{(M_{1,2})^{\alpha}(h_r\bar{h}_s)^{\alpha}}\sum_{(k,l)\in I_{rs}}\left|t_{klpq}(x)-L\right|\\
&\leq\frac{1}{(M_{1,2})^{\alpha}(h_{rs})^{\alpha}}\sum_{(k,l)\in I_{rs}}\left|t_{klpq}(x)-L\right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Pringsheim anlamında limit alınırsa $r,s\to\infty$ için, istenilen sonuca ulaşılır.

ii) $\dfrac{H_r}{h_r}$ ve $\dfrac{\bar{H}_s}{\bar{h}_s}$ üstten sınırlı olsun ve her $k,l \in IN$ için $p_k > 1$ ve $\bar{p}_l > 1$ olsun. Her $r,s \in IN$ için $H_r > h_r$ ve $\bar{H}_s > \bar{h}_s$ elde edilir. Buna göre $1 < \dfrac{H_r}{h_r} \le N_1 < \infty$ (her $r \in IN$ için) ve $1 < \dfrac{\bar{H}_s}{\bar{h}_s} \le N_2 < \infty$ (her $s \in IN$ için) olacak şekilde N_1 ve N_2 sabitleri vardır. $\tilde{R}^{\alpha}_{\theta_{r,s}} - P - \lim x = L$ ile birlikte $x \in \tilde{R}^{\alpha}_{\theta_{r,s}}$ olsun. Böylece her *p, q* için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h^{\alpha}_{rs}} \sum_{(k,l)\in I_{rs}} p_k \bar{p}_l \left|t_{klpq}(x) - L\right| &= \frac{1}{\left(h_r \bar{h}_s\right)^{\alpha}} \sum_{(k,l)\in I_{rs}} p_k \bar{p}_l \left|t_{klpq}(x) - L\right| \\
&< \left(\frac{N_1}{H_r}\frac{N_2}{\bar{H}_s}\right)^{\alpha} \sum_{(k,l)\in I_{rs}} p_k \bar{p}_l \left|t_{klpq}(x) - L\right| \\
&= \frac{N^{\alpha}_{1,2}}{\left(H_r \bar{H}_s\right)^{\alpha}} \sum_{(k,l)\in I_{rs}} p_k \bar{p}_l \left|t_{klpq}(x) - L\right| \\
&= \frac{N^{\alpha}_{1,2}}{\left(H_{rs}\right)^{\alpha}} \sum_{(k,l)\in I_{rs}} p_k \bar{p}_l \left|t_{klpq}(x) - L\right|
\end{aligned}$$

sağlanır. $N_{1,2} = N_1 N_2$ olmak üzere. $r,s \to \infty$ iken Pringsheim anlamında limit alınırsa sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 4.1.12 $0 < \alpha \le 1$ olmak üzere aşağıdaki durumlar sağlanır:

i) Her $k,l \in IN$ için $p_k \le 1$ ve $\bar{p}_l \le 1$ ise $\tilde{S}^{\alpha}_{\theta_{r,s}}$-*P*-lim $x = S^{\alpha}_{\left(R^2,\theta_{r,s}\right)}$-*P*-lim $x = L$ ile birlikte $\tilde{S}^{\alpha}_{\theta_{r,s}} \subset S^{\alpha}_{\left(R^2,\theta_{r,s}\right)}$ elde edilir.

ii) Her $k,l \in IN$ için $p_k \ge 1$ ve $\bar{p}_l \ge 1$ ve $\dfrac{H_r}{h_r}$ ve $\dfrac{\bar{H}_s}{\bar{h}_s}$ üstten sınırlıysa $S^{\alpha}_{\left(R^2,\theta_{r,s}\right)}$-*P*-lim $x = S^{\alpha}_{\theta_{r,s}}$-*P*-lim $x = L$ ile birlikte $S^{\alpha}_{\left(R^2,\theta_{r,s}\right)} \subseteq S^{\alpha}_{\theta_{r,s}}$ kapsama bağıntısı sağlanır.

İspat i) $x \in \tilde{S}^{\alpha}_{\theta_{r,s}}$ olsun. Bir önceki teoremdeki benzer metod uygulanırsa her *p* ve *q* için ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{H_{rs}^{\alpha}}\left|\left\{(k,l)\in I_{rs}^{'} : p_k\bar{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$=\frac{1}{\left(H_r\bar{H}_s\right)^{\alpha}}\left|\left\{P_{k_{r-1}}<k\leq P_{k_r} \text{ ve } \bar{P}_{l_{s-1}}<l\leq\bar{P}_{l_s} : p_k\bar{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$\leq\frac{1}{\left(M_1M_2\right)^{\alpha}}.\frac{1}{\left(h_r\bar{h}_s\right)^{\alpha}}\left|\left\{P_{k_{r-1}}\leq k_{r-1}<k\leq P_{k_r}\leq k_r \text{ ve } \bar{P}_{l_{s-1}}\leq l_{s-1}<l\leq\bar{P}_{l_s}\leq l_s : p_k\bar{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$=\frac{1}{\left(M_{1,2}\right)^{\alpha}}.\frac{1}{\left(h_{rs}\right)^{\alpha}}\left|\left\{k_{r-1}<k\leq k_r \text{ ve } l_{s-1}<l\leq l_s :\left|t_{klpq}(x)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$=\frac{1}{\left(M_{1,2}\right)^{\alpha}}.\frac{1}{\left(h_{rs}\right)^{\alpha}}\left|\left\{(k,l)\in I_{r,s} :\left|t_{klpq}(x)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|.$$

ii) Her $\varepsilon>0$ ve her p,q için

$$\frac{1}{\left(h_{rs}\right)^{\alpha}}\left|\left\{(k,l)\in I_{r,s} :\left|t_{klpq}(x)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$=\frac{1}{\left(h_r\bar{h}_s\right)^{\alpha}}\left|\left\{k_{r-1}<k\leq k_r \text{ ve } l_{s-1}<l\leq l_s :\left|t_{klpq}(x)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$\leq\frac{\left(N_1N_2\right)^{\alpha}}{\left(H_r\bar{H}_s\right)^{\alpha}}\left|\left\{k_{r-1}\leq P_{k_{r-1}}<k\leq k_r<P_{k_r}\leq k_r \text{ ve } l_{s-1}\leq\bar{P}_{l_{s-1}}<l<l_s\leq\bar{P}_{l_s}\leq l_s : p_k\bar{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$=\frac{\left(N_{1,2}\right)^{\alpha}}{\left(H_{rs}\right)^{\alpha}}\left|\left\{P_{k_{r-1}}<k\leq P_{k_r} \text{ ve } \bar{P}_{l_{s-1}}<l\leq\bar{P}_{l_s} : p_k\bar{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$=\frac{\left(N_{1,2}\right)^{\alpha}}{\left(H_{rs}\right)^{\alpha}}\left|\left\{(k,l)\in I_{rs}^{'} : p_k\bar{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

elde edilir. $r,s\to\infty$ için Pringsheim anlamında limit alınırsa, ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.13 $0<\alpha\leq 1$ olsun. Eğer $\liminf\limits_{r,s\to\infty}\frac{H_{rs}^{\alpha}}{P_{k_r}\bar{P}_{l_s}}>0$ ise $S_{R^2}\subseteq S_{(R^2,\theta)}^{\alpha}$ elde edilir.

İspat: Verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{(k,l)\in I'_{rs} : p_k \bar{p}_l \left|t_{klpq}(x)-L\right| \geq \varepsilon\right\} \subset \left\{k \leq P_{k_r} \text{ ve } l \leq \bar{P}_{l_s} : p_k \bar{p}_l \left|t_{klpq}(x)-L\right| \geq \varepsilon\right\}$$

kapsama bağıntısı sağlanır. Buna göre

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{P_{k_r}\bar{P}_{l_s}}\left|\left\{k \leq P_{k_r} \text{ ve } l \leq \bar{P}_{l_s} : p_k \bar{p}_l \left|t_{klpq}(x)-L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\geq \frac{1}{P_{k_r}\bar{P}_{l_s}}\left|\left\{(k,l)\in I'_{rs} : p_k \bar{p}_l \left|t_{klpq}(x)-L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&= \frac{H^{\alpha}_{rs}}{P_{k_r}\bar{P}_{l_s}}\frac{1}{H^{\alpha}_{rs}}\left|\left\{(k,l)\in I'_{rs} : p_k \bar{p}_l \left|t_{klpq}(x)-L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|
\end{aligned}$$

elde edilir. $\liminf_{r,s} \frac{H^{\alpha}_{rs}}{P_{k_r}\bar{P}_{l_s}} > 0$ olduğundan $r,s \to \infty$ için Pringsheim anlamında limit alınırsa $S_{R^2} \subseteq S^{\alpha}_{(R^2,\theta_{r,s})}$ kapsama bağıntısı sağlanmış olur.

Teorem 4.1.14 $\theta_{rs} = \{(k_r, l_s)\}$ ve $\theta'_{rs} = \{(u_r, v_s)\}$ iki çift lacunary dizisi olsun, α ve β ise $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ şartını sağlasın ve $I'_{rs} \subset J'_{rs}$ kapsama bağıntısı her $r,s \in IN$ için sağlansın. Eğer

$$\liminf_{r,s} \frac{H^{\alpha}_{rs}}{L^{\beta}_{rs}} > 0$$

ise $S^{\beta}_{(R^2,\theta')} \subseteq S^{\alpha}_{(R^2,\theta)}$ elde edilir.

İspat: Varsayalım ki her $r,s \in IN$ için $I'_{rs} \subset J'_{rs}$ olsun ve $\liminf_{r,s\to\infty} \frac{H^{\alpha}_{rs}}{L^{\beta}_{rs}} > 0$ sağlansın. Verilen her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{(k,l)\in I'_{rs} : p_k \bar{p}_l \left|t_{klpq}(x)-L\right| \geq \varepsilon\right\} \subseteq \left\{(k,l)\in J'_{rs} : p_k \bar{p}_l \left|t_{klpq}(x)-L\right| \geq \varepsilon\right\}$$

elde edilir ve böylece her $r,s\in IN$ için

$$\frac{1}{L_{rs}^{\beta}}\left\{(k,l)\in J'_{rs}: p_k\overline{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\geq\frac{H_{rs}^{\alpha}}{L_{rs}^{\beta}}\frac{1}{H_{rs}^{\alpha}}\left\{(k,l)\in I'_{rs}: p_k\overline{p}_l\left|t_{klpq}(x)-L\right|\geq\varepsilon\right\}$$

sağlanır. Şimdi $r,s\rightarrow\infty$ için son eşitsizlikte Pringsheim anlamında limit alınırsa ve $\lim_{r,s\rightarrow\infty}\inf\frac{H_{rs}^{\alpha}}{L_{rs}^{\beta}}>0$ denklemini kullanarak $S_{(R^2,\theta')}^{\beta}\subset S_{(R^2,\theta)}^{\alpha}$ kapsama bağıntısı elde edilir.

4.2 Dizilerin α. Dereceden Ağırlıklı Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığının İdeal Versiyonu

Bu bölümde, dizilerin α. dereceden ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaklığının ideal versiyonu incelenmiştir. Ayrıca bazı dizi uzayları tanımlanarak literatürdeki dizi uzaylarıyla aralarındaki kapsama bağıntıları verilmiştir.

Tez çalışması boyunca aksi belirtilmedikçe I aşikar olmayan, uygun ideal olarak kabul edilecektir.

Tanım 4.2.1 $\theta=(k_r)$ bir lacunary dizisi olsun ve $0<\alpha\leq 1$ verilsin. Bir $x=(x_k)$ dizisine L'ye α. dereceden I-ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaktır (veya L'ye $S_{(R,\theta)}^{\alpha}(I)$-yakınsaktır) denir eğer her $\varepsilon>0$ ve $\delta>0$ için

$$\left\{ r\in IN : \frac{1}{H_r^{\alpha}} \left| \left\{ k\in I_r^{'} : p_k \left| x_k - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\} \in I$$

ise. Bu durumda $S_{(R,\theta)}^{\alpha}(I)-\lim_{k\to\infty} x_k = L$ veya $x_k \to L\left(S_{(R,\theta)}^{\alpha}(I)\right)$ olarak yazılır. Tüm α. dereceden I-ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin sınıfı $S_{(R,\theta)}^{\alpha}(I)$ ile gösterilecektir.

$I=I_{fin}$ ve $\alpha=1$ için $S_{(R,\theta)}^{\alpha}(I)$ yakınsaklık $S_{(R,\theta)}$ ile çakışır [22]. Eğer $\alpha=1$ ve her $k\in IN$ için $p_k=1$ ise $S_{(R,\theta)}^{\alpha}(I)$-yakınsaklık, $S_{\theta}(I)$ yakınsaklığa indirgenir [43].

Teorem 4.2.2 $0<\alpha\leq 1$ ve $x=(x_k)$ ile $y=(y_k)$ reel sayı dizileri olsun. Buna göre aşağıdakiler sağlanır:

i) $S_{(R,\theta)}^{\alpha}(I)-\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ ve $c\in IR$ ise $S_{(R,\theta)}^{\alpha}(I)-\lim_{k\to\infty} cx_k = cx_0$ olur.

ii) Eğer $S_{(R,\theta)}^{\alpha}(I)-\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ ve $S_{(R,\theta)}^{\alpha}(I)-\lim_{k\to\infty} y_k = y_0$ ise $S_{(R,\theta)}^{\alpha}(I)-\lim_{k\to\infty}(x_k+y_k) = x_0+y_0$.

İspat: i) $c=0$ için eşitliğin sağlandığı kolayca görülebilir. Varsayalım ki $c\neq 0$ olsun. Buna göre

$$\frac{1}{H_r^\alpha}\left|\left\{k\in I_r^{'}:p_k\left|cx_k-cx_0\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=\frac{1}{H_r^\alpha}\left|\left\{k\in I_r^{'}:p_k\left|x_k-x_0\right|\geq\frac{\varepsilon}{|c|}\right\}\right|$$

eşitliği elde edilir. Böylece herhangi bir $\delta>0$ için

$$\left\{r\in IN:\frac{1}{H_r^\alpha}\left|\left\{k\in I_r^{'}:p_k\left|cx_k-cx_0\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}\subset\left\{r\in IN:\frac{1}{H_r^\alpha}\left|\left\{k\in I_r^{'}:p_k\left|x_k-x_0\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq|c|\delta\right\}\in I$$

sağlanır. $S_{(R,\theta)}^\alpha(I)-\lim_{k\to\infty}x_k=x_0$ olduğundan ikinci kısımdaki küme I 'ya aittir ve böylece ispat tamamlanır.

ii) $$\frac{1}{H_r^\alpha}\left|\left\{k\in I_r^{'}:p_k\left|(x_k+y_k)-(x_0+y_0)\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$\leq\frac{1}{H_r^\alpha}\left|\left\{k\in I_r^{'}:p_k\left|x_k-x_0\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|+\frac{1}{H_r^\alpha}\left|\left\{k\in I_r^{'}:p_k\left|y_k-y_0\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

eşitsizliğinden yola çıkarak herhangi bir $\delta>0$ için

$$\left\{r\in IN:\frac{1}{H_r^\alpha}\left|\left\{k\in I_r^{'}:p_k\left|(x_k+y_k)-(x_0+y_0)\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}$$

$$\subset\left\{r\in IN:\frac{1}{H_r^\alpha}\left|\left\{k\in I_r^{'}:p_k\left|x_k-x_0\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|\geq\delta\right\}\cup\left\{r\in IN:\frac{1}{H_r^\alpha}\left|\left\{k\in I_r^{'}:p_k\left|y_k-y_0\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|\geq\delta\right\}$$

kapsama bağıntısı elde edilir. Sağ taraftaki küme I 'ya ait olduğundan, idealin tanımından soldaki küme de I 'ya ait olur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.3 Eğer $0<\alpha\leq\beta\leq1$ ise $S_{(R,\theta)}^\alpha(I)\subset S_{(R,\theta)}^\beta(I)$ kapsama bağıntısı sağlanır.

İspat: $$\frac{1}{H_r^\beta}\left|\left\{k\in I_r^{'}:p_k\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\leq\frac{1}{H_r^\alpha}\left|\left\{k\in I_r^{'}:p_k\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

eşitsizliğinden herhangi bir $\delta > 0$ için

$$\left\{ r \in IN : \frac{1}{H_r^\alpha} \left| \left\{ k \in I_r^{'} : p_k \left| x_k - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\} \subseteq \left\{ r \in IN : \frac{1}{H_r^\beta} \left| \left\{ k \in I_r^{'} : p_k \left| x_k - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\} \in I$$

elde edilmiş olur. $x_k \to L\left(S_{(R,\theta)}^\alpha (I)\right)$ olduğundan sağdaki küme I 'ya aittir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.4 $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, eğer bir $x = (x_k)$ dizisi bir L sayısına α-mertebeden I-ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsak ise L sayısına I-ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaktır, yani; $S_{(R,\theta)}^\alpha (I) - \lim x = S_{(R,\theta)} (I) - \lim x = L$ ile birlikte $S_{(R,\theta)}^\alpha (I) \subseteq S_{(R,\theta)} (I)$ dır.

Tanım 4.2.5 Bir $x = (x_k)$ dizisi L 'ye $(R, p_r, \theta)^\alpha (I)$-toplanabilirdir eğer $I - \lim_r W_r(x) \to L$ ise yani her $\varepsilon > 0$ için, $W_r(x) := \frac{1}{H_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} p_k x_k$ olmak üzere $\left\{ r \in IN : \left| W_r(x) - L \right| \geq \varepsilon \right\} \in I$ ise. Bu durumda $\left((R, p_r, \theta)^\alpha (I)\right) - \lim x = L$ veya $x_k \to L\left((R, p_r, \theta)^\alpha (I)\right)$ dır.

Teorem 4.2.6 $I \subseteq P(IN)$ bir uygun (admissible) ideal, $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi ve $I_r^{'} \subset I_r$ olsun. Buna göre $x_k \to L\left((R, p_r, \theta)^\alpha (I)\right)$ olması $x_k \to L\left(S_{(R,\theta)}^\alpha (I)\right)$ olmasını gerektirir.

İspat: Varsayalım ki $x_k \to L\left((R, p_r, \theta)^\alpha (I)\right)$ olsun ve $K_r(\varepsilon)$ aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$K_r(\varepsilon) := \left\{ k \in I_r^{'} : p_k \left| x_k - L \right| \geq \varepsilon \right\} . \tag{4.2.1}$$

Buna göre

$$\frac{1}{H_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} p_k \left| x_k - L \right| \geq \frac{1}{H_r^\alpha} \sum_{k \in I_r^{'}} p_k \left| x_k - L \right|$$

$$=\frac{1}{H_r^\alpha}\sum_{\substack{k\in I_r^{'}\\ k\in K_r(\varepsilon)}} p_k\left|x_k-L\right|+\frac{1}{H_r^\alpha}\sum_{\substack{k\in I_r^{'}\\ k\notin K_r(\varepsilon)}} p_k\left|x_k-L\right|$$

$$\geq\frac{1}{H_r^\alpha}\sum_{\substack{k\in I_r^{'}\\ k\in K_r(\varepsilon)}} p_k\left|x_k-L\right|$$

$$=\varepsilon\frac{1}{H_r^\alpha}\left|\left\{k\in I_r^{'}:p_k\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

elde edilir ve böylece

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{H_r^\alpha}\sum_{k\in I_r} p_k\left|x_k-L\right| \geq\frac{1}{H_r^\alpha}\left|\left\{k\in I_r^{'}:p_k\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

eşitsizliği sağlanır. $x_k\to L\left(\left(R,p_r,\theta\right)^\alpha(I)\right)$ olduğundan ikinci küme I 'ya aittir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.7 $\forall k\in IN$ için $p_k\left|x_k-L\right|\leq M$ ve $I_r\subset I_r^{'}$ olsun. Eğer $x_k\to L\left(S_{(R,\theta)}^\alpha(I)\right)$ ise $x_k\to L\left(\left(R,p_r,\theta\right)^\alpha(I)\right)$ olur.

İspat: Her $k\in IN$ için $p_k\left|x_k-L\right|\leq M$ ve $I_r\subset I_r^{'}$ olsun. $x_k\to L\left(S_{(R,\theta)}^\alpha(I)\right)$ olsun ve $K_r(\varepsilon)$, (4.2.1) denkleminde tanımlandığı şekilde olsun. Her $\varepsilon>0$ için

$$\frac{1}{H_r^\alpha}\sum_{k\in I_r} p_k\left|x_k-L\right|$$

$$\leq\frac{1}{H_r^\alpha}\sum_{k\in I_r^{'}} p_k\left|x_k-L\right|$$

$$=\frac{1}{H_r^\alpha}\sum_{\substack{k\in I_r^{'}\\ k\in K_r(\varepsilon)}} p_k\left|x_k-L\right|+\frac{1}{H_r^\alpha}\sum_{\substack{k\in I_r^{'}\\ k\notin K_r(\varepsilon)}} p_k\left|x_k-L\right|$$

$$\leq M\frac{1}{H_r^\alpha}\left|K_r(\varepsilon)\right|+\varepsilon$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\left\{ r \in IN : \frac{1}{H_r^{\alpha}} \sum_{k \in I_r} p_k \left| x_k - L \right| \geq \varepsilon \right\} \subseteq \left\{ r \in IN : \frac{1}{H_r^{\alpha}} \left| \left\{ k \in I_r^{'} : p_k \left| x_k - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \frac{\varepsilon}{M} \right\}$$

kapsama bağıntısı sağlanmış olur. $x_k \to L\left(S_{(R,\theta)}^{\alpha}(I) \right)$ olduğundan ikinci küme I 'ya aittir ve böylece

$$\left\{ r \in IN : \frac{1}{H_r^{\alpha}} \sum_{k \in I_r} p_k \left| x_k - L \right| \geq \varepsilon \right\} \in I$$

elde edilir. Buna göre $x_k \to L\left(\left(R, p_r, \theta \right)^{\alpha} (I) \right)$ olur.

Teorem 4.2.8 $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, aşağıdaki şartlar sağlanır:

i) Her $k \in IN$ için $p_k \leq 1$ ve $x_k \to L\left(S_{\theta}^{\alpha}(I) \right)$ ise $x_k \to L\left(S_{(R,\theta)}^{\alpha}(I) \right)$ olur.

ii) $\dfrac{H_r}{h_r}$ üstten sınırlı olsun. Eğer her $k \in IN$ için $p_k \geq 1$ ve $x_k \to L\left(S_{(R,\theta)}^{\alpha}(I) \right)$ ise $x_k \to L\left(S_{\theta}^{\alpha}(I) \right)$ olur.

İspat: i) Her $k \in IN$ için $p_k \leq 1$ ise her $r \in IN$ için $H_r \leq h_r$ olur ve buradan her $r \in IN$ için $\left(H_r \right)^{\alpha} \leq \left(h_r \right)^{\alpha}$ elde edilir. Böylece $0 < M_1 \leq \dfrac{H_r}{h_r} \leq 1$ olacak şekilde bir M_1 sabiti bulunabilir. Buradan her $r \in IN$ için $\left(M_1 h_r \right)^{\alpha} \leq \left(H_r \right)^{\alpha}$ elde edilir. $x_k \to L\left(S_{\theta}^{\alpha}(I) \right)$ olsun. Buna göre her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} &\frac{1}{H_r^{\alpha}} \left| \left\{ k \in I_r^{'} : p_k \left| x_k - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &= \frac{1}{H_r^{\alpha}} \left| \left\{ P_{k_{r-1}} < k \leq P_{k_r} : p_k \left| x_k - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\left(M_1 h_r\right)^{\alpha}} \left|\left\{P_{k_{r-1}} \leq k_{r-1} < k \leq P_{k_r} \leq k_r : p_k \left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$\leq \frac{1}{M_1^{\alpha}} \frac{1}{h_r^{\alpha}} \left|\left\{k_{r-1} < k \leq k_r : \left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$= \frac{1}{M_1^{\alpha}} \frac{1}{h_r^{\alpha}} \left|\left\{k \in I_r : \left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

eşitsizliği sağlanır. Bu yüzden verilen bir $\delta > 0$ için

$$\frac{1}{H_r^{\alpha}} \left|\left\{k \in I_r^{'} : p_k \left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_r^{\alpha}} \left|\left\{k \in I_r : \left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq M_1^{\alpha} \delta$$

elde edilir. Buna göre,

$$\left\{r \in IN : \frac{1}{H_r^{\alpha}} \left|\left\{k \in I_r^{'} : p_k \left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \subset \left\{r \in IN : \frac{1}{h_r^{\alpha}} \left|\left\{k \in I_r : \left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq M_1^{\alpha} \delta\right\}$$

olur. $x_k \to L\left(S_{\theta}^{\alpha}\left(I\right)\right)$ olduğundan sağ taraftaki küme I ya aittir ve böylece $x_k \to L\left(S_{(R,\theta)}^{\alpha}\left(I\right)\right)$ elde edilmiş olur.

ii) $\frac{H_r}{h_r}$ üsten sınırlı olsun. Böylece $1 \leq \frac{H_r}{h_r} \leq M_2 < \infty$ olacak şekilde bir M_2 sabiti vardır. Buradan her $r \in IN$ için $H_r \leq M_2 h_r$ elde edilir. Eğer her $k \in IN$ için $p_k \geq 1$ ise $H_r \geq h_r$ olur. Varsayalım ki $x = \left(x_k\right)$ dizisi $S_{(R,\theta)}^{\alpha}\left(I\right)$ 'da L limitine yakınsasın. Buna göre her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{h_r^{\alpha}} \left|\left\{k \in I_r : \left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$= \frac{1}{h_r^{\alpha}} \left|\left\{k_{r-1} < k \leq k_r : \left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$\leq \frac{M_2^\alpha}{H_r^\alpha}\left|\left\{k_{r-1} \leq P_{k_r} < k \leq k_r \leq P_{k_r} : p_k\left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$= M_2^\alpha \cdot \frac{1}{H_r^\alpha}\left|\left\{P_{k_r} < k \leq P_{k_r} : p_k\left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$= M_2^\alpha \cdot \frac{1}{H_r^\alpha}\left|\left\{k \in I_r^{'} : p_k\left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

olur. Bu yüzden verilen bir $\delta > 0$ için

$$\frac{1}{h_r^\alpha}\left|\left\{k \in I_r : \left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{H_r^\alpha}\left|\left\{k \in I_r^{'} : p_k\left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \frac{\delta}{M_2^\alpha}.$$

Böylece

$$\left\{r \in IN : \frac{1}{h_r^\alpha}\left|\left\{k \in I_r : \left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \subset \left\{r \in IN : \frac{1}{H_r^\alpha}\left|\left\{k \in I_r^{'} : p_k\left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \frac{\delta}{M_2^\alpha}\right\}$$

olur. $x_k \to L\left(S_{(R,\theta)}^{\alpha}\left(I\right)\right)$ olduğundan sağdaki küme I 'ya aittir ve böylece $x_k \to L\left(S_{\theta}^{\alpha}\left(I\right)\right)$ olur.

Teorem 4.2.9 Eğer $\liminf_{r\to\infty} \frac{H_r^\alpha}{P_{k_r}} > 0$ ve $x_k \to L\left(S_R\left(I\right)\right)$ ise $x_k \to L\left(S_{(R,\theta)}^{\alpha}\left(I\right)\right)$ olur.

İspat: Varsayalım ki $\liminf_{r\to\infty} \frac{H_r^\alpha}{P_{k_r}} > 0$ olsun, buna göre yeterince büyük r değerleri için $\frac{H_r^\alpha}{P_{k_r}} \geq \gamma$ olacak şekilde $\gamma > 0$ vardır. Her $\varepsilon > 0$ için ve yeterince büyük r'ler için $S_R\left(I\right) - \lim_{k\to\infty} x_k = L$ ile birlikte $x = \left(x_k\right) \in S_R\left(I\right)$ olsun. Buna göre

$$\frac{1}{P_{k_r}}\left|\left\{k \leq P_{k_r} : p_k\left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$\geq \frac{1}{P_{k_r}}\left|\left\{P_{k_{r-1}} < k \leq P_{k_r} : p_k\left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$= \frac{H_r^{\alpha}}{P_{k_r}}\left(\frac{1}{H_r^{\alpha}}\left|\left\{P_{k_{r-1}} < k \leq P_{k_r} : p_k\left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|\right)$$

$$\geq \frac{\gamma}{1+\gamma}\left(\frac{1}{H_r^{\alpha}}\left|\left\{P_{k_{r-1}} < k \leq P_{k_r} : p_k\left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|\right)$$

$$= \frac{\gamma}{1+\gamma}\left(\frac{1}{H_r^{\alpha}}\left|\left\{k \in I_r^{'} : p_k\left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|\right)$$

elde edilir. Böylece verilen bir $\delta > 0$ için

$$\frac{1}{H_r^{\alpha}}\left|\left\{k \in I_r^{'} : p_k\left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P_{k_r}}\left|\left\{k \leq P_{k_r} : p_k\left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \gamma \cdot \delta$$

olur. Buradan

$$\left\{r \in IN : \frac{1}{H_r^{\alpha}}\left|\left\{k \in I_r^{'} : p_k\left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \subset \left\{r \in IN : \frac{1}{P_{k_r}}\left|\left\{k \leq P_{k_r} : p_k\left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \gamma \cdot \delta\right\}$$

sağlanır. $x_k \to L\left(S_R\left(I\right)\right)$ olduğundan sağ taraftaki küme I 'ya aittir ve böylece $x_k \to L\left(S_{(R,\theta)}^{\alpha}\left(I\right)\right)$ elde edilir.

Teorem 4.2.10 $\theta = \left(k_r\right)$ ve $\theta' = (s_r)$ her $r \in IN$ için $I_r' \subset J_r'$ olacak şekilde iki lacunary dizisi olsun ve α ve β, $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olacak şekilde seçilsin. Buna göre aşağıdaki şartlar sağlanır:

i) Eğer $\liminf\limits_{r\to\infty} \dfrac{H_r^{\alpha}}{L_r^{\beta}} > 0$ ise $S_{(R,\theta')}^{\beta}\left(I\right) \subseteq S_{(R,\theta)}^{\alpha}\left(I\right)$ dır.

ii) Eğer $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{L_r}{H_r^{\beta}} = 1$ ise $S_{(R,\theta)}^{\alpha}\left(I\right) \subset S_{(R,\theta')}^{\beta}\left(I\right)$ dır.

İspat: i) Varsayalım ki her $r \in IN$ için $I'_r \subset J'_r$ olsun ve $\liminf_{r\to\infty} \frac{H_r^\alpha}{L_r^\beta} > 0$ sağlansın. Buna göre her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{k \in J'_r : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\right\} \supseteq \left\{k \in I'_r : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}.$$

kapsama bağıntısı sağlanır. Böylece

$$\frac{1}{L_r^\beta}\left|\left\{k \in J'_r : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \frac{H_r^\alpha}{L_r^\beta} \cdot \frac{1}{H_r^\alpha}\left|\left\{k \in I'_r : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

elde edilir. $\liminf_{r\to\infty} \frac{H_r^\alpha}{L_r^\beta} > 0$ olduğundan yeterince büyük $r \in IN$ için $\frac{H_r^\alpha}{L_r^\beta} > \gamma$ olacak şekilde bir $\gamma > 0$ sayısı vardır. Buna göre $I'_r = \left(P_{k_{r-1}}, P_{k_r}\right]$, $J'_r = \left(P_{s_{r-1}}, P_{s_r}\right]$, $H_r = P_{k_r} - P_{k_{r-1}}$ ve $L_r = \overline{P}_{s_r} - \overline{P}_{s_{r-1}}$ olmak üzere verilen bir $\delta > 0$ ve

$$\frac{1}{H_r^\alpha}\left|\left\{k \in I'_r : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \frac{\delta}{\gamma}$$

için

$$\frac{1}{L_r^\beta}\left|\left\{k \in J'_r : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta$$

elde edilir. Böylece her $r \in IN$ için

$$\left\{r \in IN : \frac{1}{L_r^\beta}\left|\left\{k \in J'_r : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \subseteq \left\{r \in IN : \frac{1}{H_r^\alpha}\left|\left\{k \in I'_r : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \frac{\delta}{\gamma}\right\}.$$

$(x_k) \in S^\beta_{(R,\theta')}(I)$ olduğundan sağ taraftaki küme I ’ya aittir ve buradan $(x_k) \in S^\alpha_{(R,\theta)}(I)$ elde edilir.

ii) $(x_k)\in S^{\alpha}_{(R,\theta)}(I)$ olsun ve $\lim_{r\to\infty}\frac{L_r}{H_r^{\beta}}=1$ sağlansın. $I'_r\subset J'_r$ olduğundan her $\varepsilon>0$ ve her $r\in IN$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L_r^{\beta}}\left|\left\{k\in J'_r: p_k\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| &= \frac{1}{L_r^{\beta}}\left|\left\{P_{s_{r-1}}<P_k\leq P_{k_{r-1}}: p_k\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|+\frac{1}{L_r^{\beta}}\left|\left\{P_{k_r}<P_k\leq P_{s_r}: p_k\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| \\
&+\frac{1}{L_r^{\beta}}\left|\left\{P_{k_r}<P_k\leq P_{s_r}: p_k\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|+\frac{1}{L_r^{\beta}}\left|\left\{P_{k_{r-1}}<P_k\leq P_{k_r}: p_k\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| \\
&\leq\frac{P_{k_{r-1}}-P_{s_{r-1}}}{L_r^{\beta}}+\frac{P_{s_r}-P_{k_r}}{L_r^{\beta}}+\frac{1}{L_r^{\beta}}\left|\left\{k\in I'_r: p_k\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| \\
&=\frac{L_r-H_r}{L_r^{\beta}}+\frac{1}{L_r^{\beta}}\left|\left\{k\in I'_r: p_k\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| \\
&\leq\frac{L_r-H_r^{\beta}}{H_r^{\beta}}+\frac{1}{H_r^{\beta}}\left|\left\{k\in I'_r: p_k\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| \\
&\leq\left(\frac{L_r}{H_r^{\beta}}-1\right)+\frac{1}{H_r^{\alpha}}\left|\left\{k\in I'_r: p_k\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|
\end{aligned}$$

$\lim_{r\to\infty}\frac{L_r}{H_r^{\beta}}=1$ ve $(x_k)\in S^{\alpha}_{(R,\theta)}(I)$ olduğundan $S^{\alpha}_{(R,\theta)}(I)\subset S^{\beta}_{(R,\theta')}(I)$ elde edilmiş olur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında çift indisli dizilerde α. dereceden ağırlıklı lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlayarak bazı kapsama bağıntılarını inceledik. Ayrıca dizilerin α. dereceden ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaklığının ideal versiyonunu inceledik. Ayrıca bazı yeni dizi uzaylarını tanımlayarak literatürdeki dizi uzaylarıyla aralarındaki kapsama bağıntılarını bulduk. Bulduğumuz sonuçlar başka uzaylara tanımlanabilir mi sorusu akla gelebilir.

Bu durumda şu üç soru sorulabilir:

I. Elde edilen sonuçlar Fuzzy normlu uzaylara aktarılabilir mi?
II. Elde etmiş olduğumuz sonuçlar 2-normlu ve n-normlu uzaylarda elde edilebilir mi?
III. Küme dizilerinin I-ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaklığı tanımlanabilir mi?

Bu soruların cevabı, hem yazar hem de okuyucular için bir araştırma niteliği taşımaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Gadjiev AD, Orhan C, 2002. Some Approximation Theorems via Statistical Convergence, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 32 (1): 129-138.

[2] Çolak R, 2010. Statistical Convergence of Order α, Modern Methods in Analysis and Its Applications, Anamaya Publication, New Delhi, India, 121-129.

[3] Fast H, 1951. Sur la Convergence Statistique, Colloquium Mathematicum, 2 (3-4): 241-244.

[4] Steinhaus H, 1951. Sur la Convergence Ordinate et la Convergence Asymptotique, Colloquium Mathematicum, 2: 73-84.

[5] Schoenberg IJ, 1959. The Integrability of Certain Functions and Related Summability Methods, The American Mathematical Monthly. 66: 361-375.

[6] Fridy JA, 1985. On Statistical Convergence, Analysis, 5: 301-313.

[7] Salat T, 1980. On Statistical Convergence of Real Numbers, Mathematica Slovaca, 30: 139-150.

[8] Bhunia S, Das P, Pal S, 2012. Restricting statistical convergence, Acta Mathematica Hungarica 134 (1-2): 153-161.

[9] Çolak R, Bektaş CA, 2011. λ-Statistical Convergence of Order α, Acta Mathematica Scientia (Series B), 31 (3): 953-959.

[10] Et M, Çınar M, Karakaş M, 2013. On λ-statistical convergence of order α of sequences of function, Journal of Inequalities and Applications, 204: 8 pages.

[11] Şengül H, Et M, 2014. On lacunary statistical convergence of order α, Acta Mathematica Scientia, 34B (2): 473-482.

[12] Çınar M, Karakaş M, Et M, 2013. On Pointwise and Uniform Statistical Convergence of Order α for Sequences of Functions, Fixed Point Theory and its Applications, 33: 11 pages.

[13] Das P, Ghosal S, Som S, 2015. Statistical Convergence of Order α in Probability, Arab Journal of Mathematical Sciences, 21 (2): 253–265. Doi:10.1016/j.ajmsc.2014.06.002.

[14] Ghosal S, 2016. Weighted Statistical Convergence of Order α and its Applications, Journal of Egyptian Mathematical Society, 24(1): 60-67.

[15] Lorentz GG, 1948. A Contribution to the Theory of Divergent Sequences, Acta Mathematica, 80 (1): 167-190.

[16] Maddox IJ, 1979. On Strong Almost Convergence, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 85 (2): 345-350.

[17] Moricz F, Rhoades BE, 1988. Almost Convergence of Double Sequences and Strong Regularity of Summability Matrices, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 104 (2): 283-294.

[18] Başarır M, 1995. On the Strong Almost Convergence of Double Sequences, Periodica Mathematica Hungarica, 30 (3): 177-181.

[19] Çolak R, Altın Y, 2013. Stastical convergence of double sequences of order α, Journal of function spaces and Applications.

[20] Savaş E, 2013. Double Almost Statistical Convergence of Order α, Advances in Difference Equations, 2013 (62): 9 pages. DOI: 10.1186/1687-1847-2013-62.

[21] Savaş E, 2013. Double Almost Lacunary Statistical Convergence of Order α, Advances in Difference Equations, 2013 (254): 10 pages. DOI: 10.1186/1687-1847-2013-254.

[22] Başarır M, Konca Ş, 2014. On Some Spaces of Lacunary Convergent Sequences Derived by Nörlund-type Mean and Weighted Lacunary Statistical Convergence, Arab Journal of

Mathematical Sciences, 20 (2): 250-263.

[23] Başarır M, Konca Ş, 2014. Weighted Lacunary Statistical Convergence in Locally Solid Riesz Spaces, Filomat, 28 (10): 2059-2067. doi. 10.2298/FIL 1410059B.

[24] Konca Ş, Başarır M, 2016. Riesz Lacunary Almost Convergent Double Sequence Spaces Defined By Orlicz Functions, Facta Universitatis, Series Mathematics, 31 (1): 169-186.

[25] Konca Ş, 2016. Weighted Lacunary Statistical Converge of Double Sequences in Locally Solid Riesz Spaces, Filomat, 30 (3): 621-629.

[26] Başarır M, Konca Ş, 2016. Weighted Lacunary Statistical Convergence in a Locally Convex Topological Vektor Space, Iranian Journal of Science and Technology, in press.

[27] Kostyrko P, Šalát T, Wilezyński W, 2000. I-Convergence. Real Analysis Exchange, 26. (2): 669-686.

[28] Maddox IJ, 1988. Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press., Cambridge.

[29] Başar F, 2011. Summability Theory and Its Applications, Bentham Science Publishers, Istanbul.

[30] Çakar Ö, 2007. Fonksiyonel Analize Giriş I, A. Ü. Fen Fakültesi Döner Sermaye Yayınları No: 13 Ankara.

[31] Kreyszıg E, 1978. Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons, New York.

[32] Demirci K, 1992. İstatistiksel Yakınsaklık. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

[33] Fridy JA, Orhan C, 1993. Lacunary Statistical Convergence, Pacific Journal of

Mathematics, 160 (1): 43-51.

[34] Mursaleen M, Karakaya V, Ertürk M, Gürsoy F, 2012. Weighted Statistical Convergence and its Application to Korovkin Type Approximation Theorem, Applied Mathematics Computation, 218: 9132-9137.

[35] Pringsheim A, 1900. Zur Theorie der Zweifach Unendlichen Zahlenfolgen, Mathematische Annalen, 53 (3): 289-321.

[36] Robison GM, 1926. Divergent double sequences and series, Trans. Am. Math. Soc., 28: 50-73.

[37] Mursaleen M, Edely OH, 2003. Statistical Convergence of Double Sequences, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 288 (1): 223-231.

[38] Patterson RF, Savas E, 2000. Lacunary Statistical Convergence of Double Sequences. Mathematical Communications, 10: 55-61.

[39] Alotaibi AM, Çakan C, 2012. The Riesz Convergence and Riesz Core of Double Sequences, Journal of Inequalities and Applications, 2012 (56). doi:10.1186/1029-242X-2012-56.

[40] Kostyrko P, Macaj M, Šalát T, Sleziak M, 2005. I-Convergence and Extremal I-Limit Points, Mathematica Slovaca, 55(4): 443-464.

[41] Kostyrko P, Mačaj M, Šalát T, 2000. Statistical Convergence and I- Convergence, The International Mathematical Scientific Conference, 16th Summer School on Real Functions Theory.

[42] Das P, Savas E, Ghosal SK, 2011. On generalizations of certain summability methods using ideals, Applied Mathematics Letters, 24, 1509 - 1514.

[43] Konca Ş, 2017. Weighted Lacunary I-Statistical Convergence, Iğdır Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 7 (1).

[44] Das P, Savaş E, 2014. On I -Statistical and I -Lacunary Statistical Convergence of Order α, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 40 (2), 459-472.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Siirt' te doğdu. İlköğretimi Çevik Ersin Temel İlköğretim Okulu'nda, ortaokulu Mehmet Akif Ersoy Ortaokulu'nda ve liseyi Siirt Lisesi'nde tamamladı. 2001 yılında kazandığı Dicle Üniversitesi Siirt Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Bölümü'nden 2005 yılında mezun oldu. 2014' te Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başladı. MEB' nda Matematik Öğretmeni olarak halen görev yapmakta.

Selman EKİN