BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI YARDIMIYLA TANIMLANAN BAZI REGÜLER MATRİSLER VE UYGULAMALARI

Hasan KARABUDAK

AĞUSTOS 2016

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI YARDIMIYLA TANIMLANAN BAZI REGÜLER MATRİSLER VE UYGULAMALARI

Hazırlayan

Hasan KARABUDAK

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Murat KARAKAŞ

Jüri üyeleri

Yrd. Doç. Dr. Muhammed ÇINAR

Yrd. Doç. Dr. Murat KARAKAŞ

Yrd. Doç. Dr. Şükran KONCA

AĞUSTOS 2016

Hasan KARABUDAK tarafından hazırlanan "**Fibonacci ve Lucas Sayıları Yardımıyla Tanımlanan Bazı Regüler Matrisler ve Uygulamaları** " adlı tez çalışması 24/ 08/ 2016 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Yrd. Doç. Dr. Muhammed ÇINAR (Başkan)	
Yrd. Doç. Dr. Murat KARAKAŞ (Danışman)	
Yrd. Doç. Dr. Şükran KONCA (Üye)	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 22/09/ 2016..gün ve 34/03 Sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Mehmet Cihan AYDIN
Enstitü Müdürü

ÖZET

FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI YARDIMIYLA TANIMLANAN BAZI REGÜLER MATRİSLER VE UYGULAMALARI

Hasan KARABUDAK

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Murat KARAKAŞ

Ağustos 2016, 23 sayfa

Hazırlanan çalışmada, öncelikle Fibonacci ve Lucas sayıları kullanılarak iki yeni F ve E regüler matrisleri tanımlandı. Daha sonra bu matrisler yardımıyla, sırasıyla $X(F)$ Fibonacci ve $X(E)$ Lucas dizi uzayları tanımlanarak bu uzayların BK uzayı oldukları ve X uzayı ile izomorf oldukları gösterildi. Ayrıca bu iki uzayın $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere l_p, c ve c_0 dizi uzaylarıyla ilişkisi incelenerek bazı kapsama bağıntıları verildi.

Anahtar kelimeler: Fibonacci Sayıları, Lucas Sayıları, Regüler Matris, Dizi Uzayı, BK Uzayı

ABSTRACT

SOME REGULAR MATRICES DEFINED BY FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS AND ITS APPLICATIONS

Hasan KARABUDAK

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics
Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Murat KARAKAŞ
August 2016, 23 pages

In this study, two new regular matrices F and E are firstly defined by using Fibonacci and Lucas numbers. Then, it is denoted that the sequence spaces $X(F)$ and $X(E)$ are BK spaces and also isometrically isomorphic to space X. Further, the relationship among the spaces $X(F)$, $X(E)$ with l_p, c, c_0 is examined for $1 \leq p \leq \infty$ by giving some inclusion relations.

Keywords: Fibonacci Numbers, Lucas Numbers, Regular Matrice, Sequence Space, BK space

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın planlanmasından yazımına kadar, her aşamasında bana yardımcı olan, beni yönlendiren kıymetli danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat KARAKAŞ' a sonsuz teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Bu süreçte, bana destek veren, cesaretlendiren ve hep yanımda olan değerli aileme tüm kalbimle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

IN	Doğal sayılar kümesi
IR	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
ω	Reel (yada kompleks) terimli dizilerin uzayı
X_F	F Fibonacci matrisinin tanım bölgesi
X_E	E Lucas matrisinin tanım bölgesi
f_n	Fibonacci sayıları
L_n	Lucas sayıları

1.GİRİŞ

Leonardo Fibonacci İtalyan'ın Pisa şehrinde doğmuş olan İtalyan bir matematikçidir. Fibonacci, yazdığı matematik kitaplarından birinde tavşan çiftliği olan bir arkadaşıyla ilgili olduğunu iddia ettiği bir problemi araştırırken bu sayıları buluyor ve kendi adını veriyor. Buna göre Fibonacci dizisi şöyle tanımlanıyor :

$$f_0=0,\ f_1=f_2=1,\ f_n=f_{n-1}+f_{n-2} \quad , \quad n\geq 2$$

Bu durumda Fibonacci sayılarının ilk birkaç tanesi şöyle sıralanır:

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,…

Fibonacci dizisinin bir terimi öncekine bölündüğünde, bölümün "altın oran" olarak adlandırılan ve irrasyonel bir sayı olan $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1,61803398...$ sayısına yakınsadığı görülür.

Altın oran sayısının çok önemli bir sayı olması, doğa ile matematiğin ilişkisini somut olarak gösteren nadir araştırma konularından biri olması ve birçok kullanım alanına sahip olması, Fibonacci sayılarının yüzyıllardır ilgi çekici olmasının önemli nedenlerindendir.

Fibonacci rekürans bağıntısını kullanarak, farklı başlangıç koşulları altında yeni sayı dizileri elde edilebilir. Bu sayı dizileri arasında önemli bir yeri olan ve Fransız matematikçi Edward Lucas'ın adıyla anılan Lucas sayı dizisi, Fibonacci sayı dizisinin birçok akrabasından biridir. Lucas dizisi şöyle tanımlanmaktadır:

$$L_0=2, L_1=1, L_n=L_{n-1}+L_{n-2}, n\geq 2$$

Böylece Lucas sayıları şu şekilde sıralanır:

2,1,3,4,7,11,18,29,47,76,123,199,…

Lucas dizisinin terimleri de birbirine bölündüğünde Fibonacci dizisinde olduğu gibi altın oranı verir.

2.ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Literatürde Fibonacci ve Lucas sayılarının yer aldığı birçok kitap bulunmaktadır [1-3].
Fibonacci ve Lucas sayıları sırasıyla;

$$f_0 = 0\ ,\ f_1 = 1\ ,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\ ,\ \mathrm{n} \geq 2$$

$$L_0 = 2\ ,\ L_1 = 1\ ,\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2}\ ,\ \mathrm{n} \geq 2$$

lineer tekrarlama bağıntıları yardımıyla tanımlanan sayı dizileridir.
Bu sayılar bilim, güzel sanatlar ve mimarlıkta çok ilginç uygulama ve özelliklere sahiptir. Ayrıca bu sayıların bazı temel özellikleri aşağıdaki gibidir [2-3].

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 = f_n . f_{n+1}\ ,\ n \geq 1,$$

$$\sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1\ ,\ \mathrm{n} \geq 1,$$

$$\sum_{k=1}^{n} L_{2k} = L_{2n+1} - 1,$$

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = L_{n+2} - 3.$$

Bir matrisin tanım bölgesi yardımıyla yeni bir dizi uzayı oluşturma yaklaşımı son zamanlarda çeşitli yazarlar tarafından kullanılmıştır. Örneğin, Başar ve Mursaleen [4], çalışmalarında bu yaklaşımı ele almışlardır.

Kara [5], Fibonacci sayılarını kullanarak $l_p(F),\ 1 \leq p \leq \infty$ dizi uzayını tanımlayarak bu uzayın bazı topolojik ve geometrik özelliklerini incelemiştir. Kara ve Başarır [6], Fibonacci sayıları yardımıyla yeni bir regüler matris oluşturmuş ve bu matrisin tanım bölgesini araştırmışlardır. Karakaş [7], Fibonacci sayılarından oluşan bir Toeplitz matrisi kullanarak klasik dizi uzaylarının cebirsel ve topolojik özelliklerini vermiştir. Başarır, Başar ve Kara [8], Fibonacci dizisiyle oluşturulan bir matris yardımıyla $c_0(F)$ ve $c(F)$ uzaylarını tanıtarak bazı kapsama bağıntıları vermişlerdir. Candan ve Kayaduman [9], genelleştirilmiş Fibonacci fark matrisi yardımıyla bir dizi uzayı tanımlayarak bu uzayı, iyi bilinen bazı uzaylarla karşılaştırmışlar ve tanımladıkları uzayın Schauder bazına sahip olmadığını göstermişlerdir. Alotaibi, Mursaleen, Alamri ve Mohiuddine [10], $l_p(F)$ Fibonacci fark dizi uzayını kullanarak $(l_1, l_p(F))\ ,\ 1 \leq p < \infty$ matris sınıflarını karakterize ederek sınırlı lineer operatörlerin normları için bazı yaklaşımlar elde etmişlerdir. Debnath ve Saha [11], yeni bir Fibonacci regüler matrisi yardımıyla $c_0(F)$, $c(F)$ ve $l_\infty(F)$ uzaylarını oluşturmuş ve bazı cebirsel özellikleri incelemişlerdir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 3.1.1. Kompleks sayıların bir $A=(a_{ij})$ sonsuz matrisi $A: IN \times IN \to \mathbb{C}$ şeklinde tanımlanan bir kompleks sayılar dizisidir ve $IN=\{0,1,2,3,...\}$ dir [12].

Tanım 3.1.2. Bir A sonsuz matrisinin X_A ile gösterilen tanım bölgesi

$$X_A=\{x \in w : Ax \in X\} \qquad (3.1.1)$$

şeklinde tanımlı bir dizi uzayıdır [12].

Tanım 3.1.3. λ ve μ herhangi iki dizi uzayı olsun. $A=(a_{nk})$ bir sonsuz matris ve $x=(x_k)\in\omega$ olmak üzere x' in A dönüşümü A_x mevcut ve $\forall x \in \lambda$ için $Ax \in \mu$ ise A, λ'dan μ'ye bir matris dönüşümü tanımlar ve $A: \lambda \to \mu$ şeklinde gösterilir [12].

Teorem 3.1.4. (Silverman-Toeplitz) $A=(a_{nk})\in(c:c;p)$ olması için gerek ve yeter şart;

i) $sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$

ii) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$

iii) $\lim_{n\to\infty} \sum_k |a_{nk}| = 1$

koşullarının sağlanmasıdır [12].

Tanım 3.1.5. Silverman-Toeplitz teoreminin koşullarını sağlayan bir matris regüler matris (Toeplitz matrisi) olarak adlandırılır [12].

Tanım 3.1.6. X reel ya da kompleks bir lineer uzay ve d , X üzerinde bir metrik olsun. X üzerinde toplama ve skalerle çarpım işlemleri sürekliyse (X,d) uzayına lineer metrik uzay adı verilir [12].

Tanım 3.1.7. Bir lineer metrik uzay tam ise Frechet uzayı adını alır [12].

Tanım 3.1.8. λ, lineer topolojiye sahip bir dizi uzayı olsun. $\forall i \in IN$ için $p_i : \lambda \to \mathbb{C},\ p_i(x) = x_i$ dönüşümlerinin her biri sürekli ise , λ dizi uzayına K-uzayı denir [12].

Tanım 3.1.9 X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve $\tau_k : X \to C,\ \tau_k(x) = x_k\ (k = 1, 2, 3, ...)$ dönüşümü sürekli ise X'e bir BK-uzayı denir [12].

Tanım 3.1.10. λ, bir K-uzayı olsun. Eğer λ, tam lineer metrik uzay ise FK-uzayı olarak adlandırılır [12].

Tanım 3.1.11. X bir normlu uzay olsun. Eğer X uzayı, $\forall x \in X$ için $\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| \to 0\ (\mathrm{n} \to \infty)$ olacak şekilde bir tek (α_i) skaler dizisi var olmak üzere, bir (e_n) dizisi içeriyorsa bu (e_n) dizisine X uzayının bir Schauder bazı denir [13].

Tanım 3.1.12. (X, d) ve $(Y, \tilde{d})$ iki metrik uzay olsun. $T : X \to Y$ dönüşümünü göz önüne alalım. Eğer T dönüşümü uzaklıkları koruyorsa yani $\forall x, y \in X$ için $\tilde{d}(Tx, Ty) = d(x, y)$ ise T dönüşümüne izometri adı verilir. Eğer T dönüşümü aynı zamanda birebir ve örten ise izomorfizm olarak adlandırılır [13].

Tanım 3.1.13. $X \neq \emptyset$ bir cümle ve K kompleks sayıların bir cismi olsun.

$$+ : X \times X \to X$$
$$- : K \times X \to X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa , X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzayı) adı verilir. Her $x, y, z \in X$ için ve her $\lambda, \mu \in K$ için

L1) $x + y = y + x$

L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

L3) $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

L4) Her bir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.

L5) $1.x = x$

L6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

L7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

L8) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ [13].

Tanım 3.1.14. Kompleks terimli tüm $x = (x_k)$, $(k = 1, 2, 3, ...)$ dizilerin cümlesini ω ile göstereceğiz. $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere;

$$x + y = (x_k) + (y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında ω bir lineer uzaydır. ω'nın her alt lineer uzayına dizi uzayı denir [12].

Tanım 3.1.15. $X \neq \emptyset$ ve $d : X \times X \to IR$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y, z \in X$ için

M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2) $d(x, y) = d(y, x)$

M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

koşulları sağlanıyorsa d' ye bir metrik denir. (X, d) ikilisine de metrik uzay adı verilir [13].

Tanım 3.1.16. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\|.\| : X \to R^+$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir [13].

N1) $\|x\| \geq 0$

N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$ (α skaler)

N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Tanım 3.1.17 (Hölder Eşitsizliği) $p > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \geq 0$ ve $b_1, b_2, b_3, ..., b_n \geq 0$ olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k . b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

ve aynı zamanda;

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) . b_k$$

dir [13].

Teorem 3.1.18. X uzayı $\|.\|$ normuna göre bir BK - uzayı olsun. Bu takdirde $\forall x \in X_T$ için $\|x\|_T = \|T(x)\|$ olmak üzere X_T bir BK - uzayıdır [14].

4. BULGULAR

4.1. Fibonacci Matrisi ve Uygulamalar

Bu bölümde Fibonacci sayılarını kullanarak yeni bir regüler matris oluşturacağız ve bu matris yardımıyla Fibonacci dizi uzayı tanımlayarak bazı özelliklerini inceleyeceğiz. $f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 2$ olmak üzere $F = (f_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ Fibonacci matrisimizi

$$f_{nk} = \begin{cases} \dfrac{f_{2k-1}}{f_{2n}}, & 1 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases} \tag{4.1.1}$$

şeklinde tanımlıyoruz. Bu matrisin terimlerini açtığımızda;

$$\begin{bmatrix} \frac{f_1}{f_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{f_1}{f_4} & \frac{f_3}{f_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{f_1}{f_6} & \frac{f_3}{f_6} & \frac{f_5}{f_6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{f_1}{f_8} & \frac{f_3}{f_8} & \frac{f_5}{f_8} & \frac{f_7}{f_8} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{f_1}{f_{10}} & \frac{f_3}{f_{10}} & \frac{f_5}{f_{10}} & \frac{f_7}{f_{10}} & \frac{f_9}{f_{10}} & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

olup buradan;

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{5}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{21} & \frac{2}{21} & \frac{5}{21} & \frac{13}{21} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{55} & \frac{2}{55} & \frac{5}{55} & \frac{13}{55} & \frac{34}{55} & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

elde edilir. Matrisimizin üçgensel olduğu yukarıdan açıkça görülmektedir; yani $f_{nn} \neq 0$ ve $k > n$ için $f_{nk} = 0$ (n=1,2,3,...) dır. Ayrıca Teorem 3.1.4 (Silverman-Toeplitz)'ün şartlarını açıkça sağladığından, F matrisi bir Toeplitz matrisi yani regüler matristir.

Bu bölüm boyunca l_∞, c, c_0 ve l_p $(1 \leq p < \infty)$ dizi uzaylarını X ile göstereceğiz.

F matrisini kullanarak $x = (x_k)$ dizisinin F -dönüşümü olarak adlandırılan $y = (y_k) = F_k(x)$ dizisini;

$$y = (y_k) = F_k(x) = \frac{1}{f_{2k}} \sum_{i=1}^{k} f_{2i-1} x_i \qquad (4.1.2)$$

şeklinde tanımlıyoruz. Bu F -dönüşümü yardımıyla Fibonacci dizi uzayımızı

$$X(F) = \{x = (x_k) \in \omega : y = (y_k) \in X\}$$

ile tanımlıyoruz.

Teorem 4.1.1. $X(F)$ Fibonacci dizi uzayı;

$$\|x\|_{X(F)} = \|F(x)\|_X = \|y\|_X = \begin{cases} \sup_k |y_k| \ , & \mathrm{X} \in \{l_\infty, c, c_0\} \\ \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \mathrm{X}=\mathrm{l}_p ; 1 \leq p < \infty \end{cases} \qquad (4.1.3)$$

normuna göre bir BK -uzayıdır.

İspat: F matrisimiz üçgensel olduğundan, (4.1.3) ve Teorem 3.1.18 kullanılarak $X(F)$ uzayının bir BK - uzayı olduğu kolayca görülür.

Teorem 4.1.2. $X(F)$ dizi uzayı X uzayına izometrik izomorftur; yani $X(F) \cong X$ 'dir.

İspat: Öncelikle, $X(F)$ ve X uzayları arasında bir izometrik izomorfizmin varlığını göstermemiz gerekir. Bunun için $X(F)$ uzayından X 'e tanımlanan aşağıdaki P dönüşümünü göz önüne alalım:

$$P : X(F) \to X \ , \ x \to Px = y \ , \ y = (y_k) = F_k(x) = \frac{1}{f_{2k}} \sum_{i=1}^{k} f_{2i-1} x_i .$$

Bu durumda $\forall x \in X(F)$ için $Px = y = F(x) \in X$ 'dir. Bununla birlikte P dönüşümünün lineer olduğu açıktır. Gerçekten;

$$P(x+z)=\frac{1}{f_{2k}}\sum_{i=1}^{k} f_{2i-1}(x_i+z_i)$$

$$=\frac{1}{f_{2k}}\sum_{i=1}^{k} f_{2i-1}x_i+\frac{1}{f_{2k}}\sum_{i=1}^{k} f_{2i-1}z_i$$

$$=Px+Pz$$

dir. Ayrıca $Px=0 \Rightarrow x=0$ olduğu kolayca görülebilir. O halde P dönüşümü 1:1'dir.

Şimdi $y=(y_k)\in X$ verilsin ve bu takdirde $x=(x_k)$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$x_k=\frac{f_{2k}}{f_{2k-1}}y_k-\frac{f_{2k-2}}{f_{2k-1}}y_{k-1}\text{ , k}\in IN^0. \qquad (4.1.4)$$

$\forall k\in IN^0$ için (4.1.2) ve (4.1.4) eşitliklerini kullanarak,

$$F_k(x)=\frac{1}{f_{2k}}\sum_{i=1}^{k} f_{2i-1}x_i$$

$$=\frac{1}{f_{2k}}\sum_{i=1}^{k} f_{2i-1}\left[\frac{f_{2i}}{f_{2i-1}}y_i-\frac{f_{2i-2}}{f_{2i-1}}y_{i-1}\right]$$

$$=\frac{1}{f_{2k}}\sum_{i=1}^{k}\left[f_{2i}y_i-f_{2i-2}y_{i-1}\right]$$

$$=\frac{1}{f_{2k}}.f_{2k}y_k=y_k$$

elde edilir. Bu ise $F(x)=y$ olduğunu gösterir ve $y\in X$ olduğundan $F(x)\in X$ buluruz.

Dolayısıyla $x\in X(F)$ ve $Px=y$ olduğu sonucuna varırız ki bu P dönüşümünün örten olması demektir.

Üstelik $\exists x\in X(F)$ için (4.1.3) eşitliğinden P dönüşümünün normu koruduğunu yani;

$$\|Px\|_X=\|y\|_X=\|F(x)\|_X=\|x\|_{X(F)}$$

olduğunu görürüz.

Bu ise P dönüşümünün bir izometri olduğunu ve sonuç olarak $X(F)$ ve X uzaylarının izometrik izomorf olduklarını gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıda vereceğimiz yardımcı teoremi ispatlamak için, $\lambda=(\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ pozitif reel sayıların kesin artan bir dizisi, yani $0<\lambda_0<\lambda_1<...$ ve $\lambda_k\to\infty, k\to\infty$ olmak üzere Mursaleen ve Noman [15] tarafından tanımlanan

$$\Lambda=\left(\lambda_{nk}\right)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_k-\lambda_{k-1}}{\lambda_n}, & 1\le \mathrm{k}\le \mathrm{n}\\ 0, & \mathrm{k}>\mathrm{n}\end{cases} \qquad (4.1.5)$$

matrisini kullanacağız. Burada özel olarak $\lambda_n = f_{2n}$ alırsak,

$$\lambda_k - \lambda_{k-1} = f_{2k} - f_{2k-2}$$
$$= f_{2k-1} + f_{2k-2} - f_{2k-2}$$
$$= f_{2k-1}$$

buluruz. Dolayısıyla $\Lambda = F$ elde ederiz. $\lambda = (\lambda_k)$ dizisinin tanımından Λ matrisi için $n+k>0$ olmak üzere $0 < \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_n} < 1$, $0 \le k \le n$ dir ve $\frac{1}{\lambda} \in l_1$ ise $\sup_k \left((\lambda_k - \lambda_{k-1}) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \right) < \infty$ olur [16]. Buradan $\forall n, k \in IN$ için $0 < \frac{f_{2k-1}}{f_{2n}} < 1$ olur. Eğer $\left(\frac{1}{f_{2k}} \right) \in l_1$ ise bu takdirde vereceğimiz yardımcı teoremin ispatı açıktır.

Yardımcı Teorem 4.1.3. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ Fibonacci sayı dizisi olsun. Eğer $\left(\frac{1}{f_{2k}} \right) \in l_1$ ise, bu takdirde $\sup_i \left(f_{2i-1} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{f_{2k}} \right) < \infty$ dir.

Teorem 4.1.4. $X \in \{l_\infty, c, c_0\}$ için $c_0(F) \subset c(F) \subset l_\infty(F)$ kapsaması kesindir.

İspat: $c_0 \subset c \subset l_\infty$ olduğundan $c_0(F) \subset c(F) \subset l_\infty(F)$ kapsaması sağlanır. $\forall i \in IN^0$ için $x_i = 1$ olacak şekilde $x = (x_i)$ dizisini düşünelim. Bu takdirde $\forall k \in IN^0$ için,

$$F_k(x) = \frac{1}{f_{2k}} \sum_{i=1}^{k} f_{2i-1} x_i$$
$$= \frac{1}{f_{2k}} \sum_{i=1}^{k} f_{2i-1}$$
$$= \frac{f_{2k}}{f_{2k}} = 1$$

olur. Buradan $Fx \in c$, $Fx \notin c_0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $x \in c(F)$ ancak $x \notin c_0(F)$ bulunur. Bu ise $c_0(F) \subset c(F)$ kapsamasının kesin olduğunu gösterir. Şimdi $\forall i \in IN^0$ için;

$$x_i = \frac{(-1)^i \left(f_{2i} + f_{2i-2} - 1 \right)}{f_{2i-1}}$$

dizisini düşünelim. Bu dizi yardımıyla $\forall k \in IN^0$ için;

$$
\begin{aligned}
F_k(x) &= \frac{1}{f_{2k}} \sum_{i=1}^{k} f_{2i-1} x_i \\
&= \frac{1}{f_{2k}} \sum_{i=1}^{k} f_{2i-1} . \frac{(-1)^i (f_{2i} + f_{2i-2} - 1)}{f_{2i-1}} \\
&= \frac{(-1)^k . f_{2k}}{f_{2k}} \\
&= (-1)^k
\end{aligned}
$$

buluruz. Bu ise $Fx \in l_\infty$, fakat $Fx \notin c$ olması demektir. Böylece, $x \in l_\infty(F)$, $x \notin c(F)$ olduğu açıktır. Yani $c(F) \subset l_\infty(F)$ kapsaması kesindir.

Teorem 4.1.5. $X \subset X(F)$ bağıntısı sağlanır.

İspat: F matrisimiz regüler olduğundan, X=c ve $X = c_0$ için bağıntı aşikardır. $x = (x_i) \in l_\infty$ alırsak, bu takdirde $\forall i \in IN^0$ için $|x_i| \le M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti vardır. Böylece aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz ki bu $Fx \in l_\infty$ olduğunu gösterir:

$$
\begin{aligned}
|F_k(x)| &\le \frac{1}{f_{2k}} \sum_{i=1}^{k} f_{2i-1} |x_i| \\
&\le \frac{M}{f_{2k}} \sum_{i=1}^{k} f_{2i-1} \\
&= \frac{M}{f_{2k}} . f_{2k} = M .
\end{aligned}
$$

Buradan $x = (x_i) \in l_\infty$ iken $x = (x_i) \in l_\infty(F)$ olduğu sonucunu çıkarırız.

Şimdi $x = (x_i) \in l_p$, $1 < p < \infty$ alalım. Hölder eşitsizliğinden yararlanarak $\forall k \in IN^0$ için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$
\begin{aligned}
|F_k(x)|^p &\le \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{f_{2i-1}}{f_{2k}} |x_i| \right]^p \\
&\le \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{f_{2i-1}}{f_{2k}} |x_i| \right]^p . \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{f_{2i-1}}{f_{2k}} \right]^{p-1} \\
&= \frac{1}{f_{2k}} \sum_{i=1}^{k} f_{2i-1} |x_i|^p . \qquad (4.1.6)
\end{aligned}
$$

(4.1.6) eşitsizliği yardımıyla;

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|F_k(x)\right|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{f_{2k}}\sum_{i=1}^{k} f_{2i-1}\left|x_i\right|^p$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_i\right|^p f_{2i-1}\sum_{k=i}^{\infty}\frac{1}{f_{2k}}$$

bulunur. $M=\sup_i\left(f_{2i-1}\sum_{k=i}^{\infty}\frac{1}{f_{2k}}\right)<\infty$ için, yardımcı teorem (4.1.3)'den;

$$\left\|x\right\|_{l_p(F)}^p \leq M.\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_i\right|^p = M.\left\|x\right\|_{l_p}^p \tag{4.1.7}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç olarak $x\in l_p(F)$ ve böylece $1<p<\infty$ için $l_p\subset l_p(F)$ olduğu görülür.

$p=1$ olması durumunda (4.1.7) eşitsizliğinin sağlandığı benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 4.1.6. $X(F)\subset X$ bağıntısı sağlanır.

İspat: (4.1.5) eşitliğinde $\lambda_n=f_{2n}$ alırsak, $\lambda_k-\lambda_{k-1}=f_{2k-1}$ ve buradan $\Lambda=F$ olduğunu göstermiştik. Bu koşullar altında

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{f_{2n+2}}{f_{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{f_{2n}+f_{2n+1}}{f_{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f_{2n+1}}{f_{2n}}\right)$$

$$=1+\lim_{n\to\infty}\frac{f_{2n+1}}{f_n}>1$$

buluruz. $c_0^\lambda=c_0$, $c^\lambda=c$, $l_\infty^\lambda=l_\infty$ ve $l_p^\lambda=l_p$, $1\leq p<\infty$ eşitliklerinin sağlanması için gerek ve yeter şart $\liminf_{n\to\infty}\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}>1$ olduğundan [15-16], $1\leq p\leq\infty$ olmak üzere $X\in\left\{l_p,c,c_0\right\}$ için $X(F)\subset X$ bağıntısı sağlanmış olur.

$X(F)\subset X$ ve $X\subset X(F)$ bağıntıları sağlandığından aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.1.7. $X(F)=X$.

4.2. Lucas Matrisi ve Uygulamaları

Bu bölümde Lucas sayıları yardımıyla Lucas matrisi adını vereceğimiz yeni bir regüler matris oluşturacağız ve bu matrisi kullanarak Lucas dizi uzayını tanımlayacağız. Lucas sayılarının

$$L_0 = 2, L_1 = 1, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 2$$

şeklinde tanımlandığını çalışmamızın giriş kısmında vermiştik. O halde bu sayıları kullanarak $E = \left(L_{nk}\right)_{n,k=1}^{\infty}$ Lucas matrisimizi;

$$E_{nk} = \begin{cases} \dfrac{L_{k-1}^2}{L_n.L_{n-1}+2} & , \ 1 \leq k \leq n \\ 0 & , \ k > n \end{cases} \tag{4.2.1}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu matrisin terimlerini açtığımızda;

$$E = \begin{bmatrix} \frac{L_0^2}{L_1.L_0+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{L_0^2}{L_2.L_1+2} & \frac{L_1^2}{L_2.L_1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{L_0^2}{L_3.L_2+2} & \frac{L_1^2}{L_3.L_2+2} & \frac{L_2^2}{L_3.L_2+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{L_0^2}{L_4.L_3+2} & \frac{L_1^2}{L_4.L_3+2} & \frac{L_2^2}{L_4.L_3+2} & \frac{L_3^2}{L_4.L_3+2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{L_0^2}{L_5.L_4+2} & \frac{L_1^2}{L_5.L_4+2} & \frac{L_2^2}{L_5.L_4+2} & \frac{L_3^2}{L_5.L_4+2} & \frac{L_4^2}{L_5.L_4+2} & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

olup buradan;

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{4}{14} & \frac{1}{14} & \frac{9}{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{4}{30} & \frac{1}{30} & \frac{9}{30} & \frac{16}{30} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{4}{79} & \frac{1}{79} & \frac{9}{79} & \frac{16}{79} & \frac{49}{79} & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$L_{nn} \neq 0$ ve $k > n$ için $L_{nk} = 0$ (n=1,2,3,...) olduğu, yani Lucas matrisimizin üçgensel olduğu yukarıdan açıkça görülmektedir. Üstelik Silverman-Toeplitz teoreminin şartları açıkça sağlanmaktadır. O halde E matrisi bir Toeplitz matrisi yani regüler matristir.

Şimdi $x = (x_k)$ dizisinin $E-$dönüşümü olarak adlandıracağımız $y = (y_k) = E_k(x)$ dizisini

$$y = (y_k) = E_k(x) = \frac{1}{L_k.L_{k-1} + 2} \sum_{i=1}^{k} L_{i-1}^2 x_i \qquad (4.2.2)$$

şeklinde tanımlıyoruz. Bu $E-$dönüşümü yardımıyla Lucas dizi uzayımızı

$$X(E) = \{x = (x_k) \in \omega : y = (y_k) \in X\}$$

olacak şekilde tanımlayalım.

Teorem 4.2.1. $X(E)$ Lucas dizi uzayı;

$$\|x\|_{X(E)} = \|E(x)\|_X = \|y\|_X = \begin{cases} \sup_k |y_k| \ , & X \in \{l_\infty, c, c_0\} \\ \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \ , & X = l_p;\ 1 \leq p < \infty \end{cases} \qquad (4.2.3)$$

normuna göre bir $BK-$uzayıdır.

İspat: E matrisimiz üçgensel olduğundan, bu teoremin ispatı Teorem 4.1.1'in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.2.2. $X(E)$ ve X uzayları izometrik olarak izomorftur.

İspat: İlk yapmamız gereken $X(E)$ ve X uzayları arasında bir izometrik izomorfizm olup olmadığını göstermektir. Bunun için,

$$Z : X(E) \to X,\ x \to Zx = y,\ y = (y_k) = E_k(x) = \frac{1}{L_k.L_{k-1} + 2} \sum_{i=1}^{k} L_{k-1}^2 x_i$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Buradan $\forall x \in X(E)$ için $Zx = y = E(x) \in X$ dir. Ayrıca açıkça görülmektedir ki Z dönüşümü lineerdir. Gerçekten;

$$\begin{aligned} Z(x+y) &= \frac{1}{L_k.L_{k-1} + 2} \sum_{i=1}^{k} L_{k-1}^2 (x_i + y_i) \\ &= \frac{1}{L_k.L_{k-1} + 2} \sum_{i=1}^{k} L_{k-1}^2 x_i + \frac{1}{L_k.L_{k-1} + 2} \sum_{i=1}^{k} L_{k-1}^2 y_i \\ &= Zx + Zy. \end{aligned}$$

Ayrıca $Zx=0 \Rightarrow x=0$ olduğu kolayca görülür. Yani Z dönüşümü 1:1'dir. Şimdi $y=(y_k)\in X$ verilsin. $x=(x_k)$ dizisini,

$$x_k = \frac{L_k.L_{k-1}+2}{L_{k-1}^2} y_k - \frac{L_{k-1}.L_{k-2}+2}{L_{k-1}^2} y_{k-1}, \ k\in IN^0 \tag{4.2.4}$$

şeklinde tanımlayalım. (4.2.2) ve (4.2.4) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} E_k(x) &= \frac{1}{L_k.L_{k-1}+2}\sum_{i=1}^{k} L_{i-1}^2 x_i \\ &= \frac{1}{L_k.L_{k-1}+2}\sum_{i=1}^{k} L_{i-1}^2 \left[\frac{L_i.L_{i-1}+2}{L_{i-1}^2} y_i - \frac{L_{i-1}.L_{i-2}+2}{L_{i-1}^2} y_{i-1}\right] \\ &= \frac{1}{L_k.L_{k-1}+2}\sum_{i=1}^{k}\left[\left(L_i.L_{i-1}+2\right)y_i - \left(L_{i-1}L_{i-2}+2\right)y_{i-1}\right] \\ &= \frac{1}{L_k.L_{k-1}+2}.(L_k.L_{k-1}+2).y_k = y_k \end{aligned}$$

elde edilir. Bu $E(x)=y$ olduğunu gösterir ve $y\in X$ olduğundan $E(x)\in X$ buluruz. Bu takdirde $x\in X(E)$ ve $Zx=y$ olur ki bu Z dönüşümünün örten olduğunu gösterir.

Dolayısıyla $\exists x\in X(E)$ için (4.2.3) eşitliğinden Z dönüşümünün,

$$\|Zx\|_X = \|y\|_X = \|E(x)\|_X = \|x\|_{X(E)}$$

eşitliğini sağladığını, yani normu koruyan bir dönüşüm olduğu anlaşılır. O halde Z dönüşümü bir izometri olup, $X(E)$ ve X uzaylarının izometrik izomorf olduğu gösterilmiş olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.3. $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ Lucas sayı dizisi olsun. Eğer $\left(\dfrac{1}{L_k.L_{k-1}+2}\right)$ dizisi l_1 uzayının elamanı ise, bu takdirde $\sup_i\left(L_{i-1}^2\sum_{k=i}^{\infty}\dfrac{1}{L_k.L_{k-1}+2}\right)<\infty$ dur.

İspat: (4.1.5) ile verilen Λ matrisinde $\lambda_n = L_n.L_{n-1}+2$ alınırsa;

$$\begin{aligned} \lambda_k - \lambda_{k-1} &= L_k.L_{k-1}+2-\left(L_{k-1}.L_{k-2}+2\right) \\ &= L_k.L_{k-1} - L_{k-1}.L_{k-2} \\ &= L_{k-1}.\left[L_k - L_{k-2}\right] \\ &= L_{k-1}.\left[L_{k-1}+L_{k-2}-L_{k-2}\right] \end{aligned}$$

$$= L_{k-1}^2$$

elde edilir. Bu ise Λ ve E matrislerinin eşitliği anlamına gelir.

E matrisimizde $\forall n, k \in IN$ için $0 < \dfrac{L_{k-1}^2}{L_n . L_{n-1} + 2} < 1$ olduğu açıkça görülmektedir. Benzer durumda Λ matrisi için, Fibonacci matrisimizde olduğu gibi, $\dfrac{1}{\lambda} \in l_1$ iken $\sup_k \left((\lambda_k - \lambda_{k-1}) \sum_{n=k}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_n} \right) < \infty$ olduğu göz önüne alınırsa, $E = (L_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ matrisi için $\left(\dfrac{1}{L_k . L_{k-1} + 2} \right) \in l_1$ olduğu kolayca görüleceğinden $\sup_i \left(L_{i-1}^2 \sum_{k=i}^{\infty} \dfrac{1}{L_k . L_{k-1} + 2} \right) < \infty$ bulunur.

Teorem 4.2.4. $c_0(E) \subset c(E) \subset l_\infty(E)$ olup, bu kapsama kesindir.

İspat: E matrisinin özellikleri kullanılarak Teorem 4.1.4' ün ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.2.5. $X \subset X(E)$'dir.

İspat: E matrisinin regülerliği nedeniyle $c_0 \subset c_0(E)$ ve $c \subset c(E)$ olduğu açıktır. $x = (x_i) \in l_\infty$ alalım. O halde $|x_i| \leq T,\ \forall i \in IN^0$ olacak şekilde bir $T > 0$ sabiti mevcuttur.

Bu durumda $\forall k \in IN^0$ için,

$$\begin{aligned} |E_k(x)| &\leq \frac{1}{L_k . L_{k-1} + 2} \sum_{i=1}^{k} L_{i-1}^2 . |x_i| \\ &\leq \frac{T}{L_k . L_{k-1} + 2} \sum_{i=1}^{k} L_{i-1}^2 \\ &= \frac{T}{L_k . L_{k-1} + 2} (L_k . L_{k-1} + 2) = T \end{aligned}$$

olur ki bu $E(x) \in l_\infty$ olduğunu gösterir. Böylece $x = (x_i) \in l_\infty$ iken $x = (x_i) \in l_\infty(E)$ elde edilir. Son olarak $1 < p < \infty$ olsun ve $x = (x_i) \in l_p$ alalım. $\forall k \in IN^0$ için Hölder eşitsizliğini uygulayarak

$$|E_k(x)|^p \le \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{L_{i-1}^2}{L_k.L_{k-1}+2}|x_i|\right]^p$$

$$\le \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{L_{i-1}^2}{L_k.L_{k-1}+2}\right]^p . \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{L_{i-1}^2}{L_k.L_{k-1}+2}\right]^{p-1}$$

$$= \frac{1}{L_k.L_{k-1}+2}\sum_{i=1}^{k} L_{i-1}^2 |x_i|^p \tag{4.2.5}$$

ve (4.2.5) eşitsizliği yardımıyla da

$$\sum_{k=1}^{\infty} |E_k(x)|^p \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L_k.L_{k-1}+2}\sum_{i=1}^{k} L_{i-1}^2 |x_i|^p$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |x_i|^p L_{i-1}^2 \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{L_k.L_{k-1}+2}$$

elde edilir ve buradan $T = \sup_i \left(L_{i-1}^2 \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{L_k.L_{k-1}+2} \right) < \infty$ olmak üzere Teorem 4.2.3'den

$$\|x\|_{l_p(E)}^p \le T.\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p = T.\|x\|_{l_p}^p \tag{4.2.6}$$

olduğu görülür. Yani $x \in l_p(E)$'dir ve $1 < p < \infty$ için $l_p \subset l_p(E)$ bağıntısının sağlandığı sonucuna varırız.

Teorem 4.2.6. $X(E) \subset X$ 'dir.

İspat: $\Lambda = E$ ve $\lambda_n = L_n.L_{n-1}+2$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}.L_n+2}{L_n.L_{n-1}+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(L_n+L_{n-1}).L_n+2}{L_n.L_{n-1}+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{L_n^2+L_n.L_{n-1}+2}{L_n.L_{n-1}+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{L_n^2}{L_n.L_{n-1}+2}$$

$$= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{L_n^2}{L_n.L_{n-1}+2} > 1$$

buluruz. Böylece Teorem 4.2.3'den $X(E) \subset X$, $X \in \{l_p, c, c_0\}$, $1 \leq p \leq \infty$ kapsama bağıntısının sağlandığı görülür.

Sonuç 4.2.7. $X(E) = X$ eşitliği sağlanır.

İspat: Teorem 4.2.5 ve Teorem 4.2.6'nın açık bir sonucudur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

$p_0>0,\ p_n\geq 0\ (n\geq 1)$ ve $P_n=p_0+p_1+p_2+...+p_n$ olsun. A matrisi

$$A=(a_{nk})=\begin{cases}\dfrac{p_k}{P_n}, & 0\leq k\leq n\\ 0, & k>n\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde, A matrisinin bir Toeplitz matrisi olması için gerek ve yeter şart $P_n\to\infty,\ n\to\infty$ olmasıdır. Bu şekilde tanımlanan A matrisine Riesz matrisi adı verilir [17].

Sonuç olarak, çalışmamızın 4. bölümünde tanımlamış olduğumuz F Fibonacci matrisi ve E Lucas matrisi, Riesz matrisinin özel hali olan regüler matrislerdir. Ayrıca, $1\leq p\leq\infty$ olmak üzere $X\in\{l_p,c,c_0\}$ için $X_F=X$ ve $X_E=X$ dir. Bu durumda şu iki soru akla gelebilir:

I. X keyfi bir normlu veya paranormlu uzay olduğunda, $X_F=X$ ve $X_E=X$ eşitlikleri sağlanır mı?

II. Klasik dizi uzayları üzerinde F Fibonacci matrisi ve E Lucas matrisinin spektrumu çalışılabilir mi?

Bu soruların cevabı, hem yazar hem de okuyucular için bir araştırma niteliği taşımaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Koshy T, 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. Wiley&Sons.

[2] Vajda S, 1989. Fibonacci and Lucas Numbers and Golden Section, Theory and Applications, Chichester: Ellis Horword.

[3] Kalman D, Mena R, 2003. The Fibonacci Numbers-Exposed, Matematics Magazine, June 76 (3).

[4] Altay B, Başarır F, Mursaleen M, 2004. On the Euler Sequence Spaces which Include the Spaces l_p and l_∞ I , Infomations Science, 176: 1460-1462.

[5] Kara EE, 2013. Some Topological and Geometrical Properties of New Banach Sequence Spaces. Journal of Inequalities and Applications, 38: 15pp.

[6] Kara EE, Başarır M, 2012. An Application of Fibonacci Numbers into Infinite Toeplitz Matrices, Caspian Journal of Mathematics Sciences, 1 (1): 1-6.

[7] Karakaş M, 2015. A New Regular Matrix Defined by Fibonacci Numbers and Its Applications, BEÜ Fen Bilimleri Dergisi, 4 (2): 205-210.

[8] Başarır M, Başar F, Kara EE, On the Spaces of Fibonacci Difference Null and Convergent Sequences, Arxiv, 1309-0150, in press.

[9] Candan M, Kayaduman K, 2015. Almost Convergent Sequence Space Derived by Generalized Fibonacci Matrix and Fibonacci Core, British Journal of Mathematics & Computer Science, 7 (2): 150-167.

[10] Alotaibi A, Mursaleen M, Alamri B, Mohiuddine SA, 2015. Compact Operators on Some Fibonacci Difference Sequence Spaces, Journal of Inequalities and Applications, 2015: 203.

[11] Debnath S, Saha S, 2014. Some Newly Defined Sequence Spaces Using Regular Matrix of Fibonacci Numbers, Afyon Kocatepe University Journal of Science & Engineering, 14 (1): 1-3.

[12] Başar F, 2011. Summability Theory and Its Applications, Bentham Science Publishers, İstanbul.

[13] Çakar Ö, 2007. Fonksiyonel Analize Giriş I, A.Ü Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, No:13, Ankara.

[14] Wilansky A, 1984. Summability through Functional Analysis, North-Holland Mathematics Studies 85, Elsevier Science Publishers, Amsterdam New York : Oxford.

[15] Mursaleen M, Noman AK, 2010. On the Space of λ- Convergent and Bounded Sequences, Thai Math J., 8 (2): 311-329.

[16] Mursaleen M, Noman AK, 2011. On Some New Sequence Spaces of Non-absolute Type Related to the Spaces l_p and l_∞ I, Filomat, 25 (2): 33-51.

[17] Choudary B, Nanda S, 1989. Functional Analysis with Applications, Wiley Eastern Limited, New Delhi, India.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Besni'de doğdu. İlkokulu Çakırhüyük Abımıstık İlkokulu'nda, Ortaokulu Çakırhüyük İlköğretim Ortaokulu'nda ve liseyi de Çakırhüyük Çok Programlı Lisesi'nde tamamladı. 2010 yılında Bitlis Eren Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne kayıt yaparak lisans öğrenimine başladı. 2014 yılında mezun oldu ve aynı yıl Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün Matematik Anabilim dalında açmış olduğu tezli yüksek lisans programına başladı.

Hasan KARABUDAK