T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ VE MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

NÖTROSOFİK KÜMELERİN KAFESLERİ ÜZERİNE

Merve Gökçen SAYIN

EYLÜL 2017

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

NÖTROSOFİK KÜMELERİN KAFESLERİ ÜZERİNE

Hazırlayan
Merve Gökçen SAYIN

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Selçuk TOPAL

Jüri Üyeleri
Yrd. Doç. Dr. Ali ÇAKMAK
Yrd. Doç. Dr. Alper ÜLKER
Yrd. Doç. Dr. Selçuk TOPAL

EYLÜL 2017

Merve Gökçen SAYIN tarafından hazırlanan **"Nötrosofik Kümelerin Kafesleri Üzerine"** adlı tez çalışması 15/09/2017 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bitlis Eren Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Yrd. Doç. Dr. Ali ÇAKMAK (Başkan)	
Yrd. Doç. Dr. Selçuk TOPAL (Danışman)	
Yrd. Doç. Dr. Alper ÜLKER (Üye)	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 23/11/2017 gün ve 46/04 Sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Koray KÖKSAL

Enstitü Müdürü

ÖZET

NÖTROSOFİK KÜMELERİN KAFESLERİ ÜZERİNE

Merve Gökçen SAYIN

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Selçuk TOPAL
Eylül 2017, 24 sayfa

Bu tez nötrosofik kümelerden elde edilen nötrosofik kafesleri inceler ve yeni tanımlar sunar. Sunulan çalışmada önce klasik kümeler ve kafesler verilmiştir. Daha sonra nötrosofik küme kavramı ayrıntılı şekilde değerlendirilmiştir. İncelemeler esnasında klasik kümelerden elde edilmiş kafes yapıları ve bu kafesler üzerinden nötrosofik kümelerin kafeslerinin filtre ve idealleri üzerinde çalışılmıştır. Nötrosofik kümelerin kafeslerinin filtreleri ve idealleri üzerinde durulmuştur. Bu tipte yapılar, kafes tanımı gereği, nötrosofik kafeslerin birer alt kafesi olması nedeniyle, bu alt kafeslerin birer nötrosofik kafes özelliğine sahip olmaları gerekmektedir. Yapılan değerlendirmelerde bu yapının korunmadığı gözlenmiştir. Bu anlamda yapı korunacak şekilde yeni tanımlar önerilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Nötrosofik Kümeler, Kafesler, İdealler, Filtre

ABSTRACT

ON LATTICES OF NEUTROSOPHIC SETS

Merve Gökçen SAYIN

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Selçuk TOPAL
September 2017, 24 pages

This thesis examines the neutrosophic lattices obtained from neutrosophic sets and provides new definitions. In the present study, firstly, classical sets and lattices are given. Then the concept of neutrosophic set is evaluated in detail. The lattice structures obtained from the classical sets during the examinations and the filters and ideals of thelattices of the neutrosophic sets are studied on these lattices. The filters and ideals of the lattices of neutrosophic sets are emphasized. Because these types of structures are, according to the lattice definition, a sub-lattice of the neutroscopic lattices, these sub-lattices must have a neutrosophic lattice property. It is observed that this structure is not preserved in the evaluations made. In this sense, new definitions are proposed to hold the structures.

Keywords: Neutrosophic Sets, Lattices, Ideals, Filters.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın her aşamasında yol gösterip, yardımlarını esirgemeyen başta danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Selçuk TOPAL' a ve değerli hocalarıma, yüksek lisans eğitimim süresince her türlü manevi desteklerini eksik etmeyen biricik aileme ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi bir görev sayarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$\leq$	Küçük eşit
$(P, \leq)$	P kısmi sıralı kümesi
S^u	S nin bütün üst sınırlarının kümesi
S^l	S nin bütün alt sınırlarının kümesi
$infS = \wedge S$	S nin en büyük alt sınırı (veya infimumu)
$supS = \vee S$	S nin en küçük üst sınırı (veya supremumu)
$a \wedge b$	a ile b nin infimumu
$a \vee b$	a ile b nin supremumu
$B \subseteq A$	B, A nın alt kümesidir
$N(M_4)$	M_4 ün nötrosofik kümesi
$N(P)$	P nin nötrosofik kümesi
$N(S)$	S nin nötrosofik kümesi
$SN(A)$	A nın güçlü nötrosofik kümesi
$max(a, b)$	a ile b nin maksimumu
$min(a, b)$	a ile b nin minimumu
$P(S)$	S nin kuvvet kümesi
$[0,1]$	0 ve 1 kapalı aralığı

1. GİRİŞ

Bu tezin amacı; nötrosofik kümelerin kafeslerini daha da ayrıntılı olarak incelemektir. Özellikle bu kafeslerin filtre ve idealleri üzerindeki özellikler incelenmiştir. Filtre kavramından yola çıkılarak, Nötrosofik Filtre ve Nötrosofik Saf Filtre kavramları arasındaki ilişkilerin ve farklılıkların incelenmesi adına bu tez, ilerde yapılabilecek çalışmalara yol gösterici bir kaynak olarak görülmektedir.

Öncelikle nötrosofik kümelerden elde edilen nötrosofik kafesleri incelenmiştir ve yeni tanımlar yapılmıştır. Sunulan çalışmada klasik kümeler ve kafeslere yer verildikten sonra nötrosofik küme kavramı ayrıntılı şekilde değerlendirilmiştir. İncelemeler esnasında klasik kümelerden elde edilmiş kafes yapıları ve bu kafesler üzerinden nötrosofik kümelerin kafeslerinin filtre ve idealleri üzerinde çalışılmıştır. Nötrosofik kümelerin kafeslerinin filtreleri ve idealleri üzerinde durulmuştur. Bu tipte yapılar, kafes tanımı gereği, nötrosofik kafeslerin birer alt kafesi olması nedeniyle, bu alt kafeslerin birer nötrosofik kafes özelliğine sahip olmaları gerekmektedir. Yapılan değerlendirmelerde bu yapının korunmadığı gözlenmiştir. Bu anlamda yapı korunacak şekilde yeni tanımlar önerilmiştir.

Kısmi sıralı küme tanımı üzerine kurulmuş olan kafes kavramı ile birlikte, bu kavramın geliştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur. Bunun üzerine yapılan çalışmalar ile birlikte bir F kümesinin bir L kafesi üzerinde hangi şartlar altında filtre kavramını oluşturduğu belirtilmiştir. Bir kümenin en büyük ve en küçük elemanlarıyla birlikte, bu elemanları içeren nötrosofik kafes kavramı ve daha sonrasında bazı nötrosofik kafes çeşitlerini tanımlamaya zemin hazırlamıştır. Ancak nötrosofik kafes konusu henüz yeni ve gelişim aşamasında olduğu için; geniş bir literatüre sahip değildir. Zamanla yapılacak çalışmalar sonucunda yeni kavramlarla birlikte nötrosofi konusunun geliştirileceği düşünülmektedir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Klasik küme teorisinde, Cantor (1874) tarafından kesin sınırlara sahip küme kavramları kullanılır. Bu teoride bir objenin bir kümenin elemanı olması ya da olmaması gibi iki olasılık söz konusudur.

Zadeh (1965) tarafından ifadelerin doğruluğunu daha ayrıntılı incelemek amacı ile bulanık kümeler oluşturulmuştur. Önermesel mantık yani klasik mantık ile ifadelerin doğruluk değerleri 'doğru' veya 'yanlış' şeklinde yorumlanmaktadır. Öte yandan Zadeh (1965) bir ifadenin doğruluk değerini [0,1] kapalı aralığında ifade ederek doğruluk değeri veya diğer bir deyiş ile doğruluk derecesini çok daha hassas bir zemine oturtmuştur. Bulanık küme yorumu ile bir elemanın bir kümeye aidiyet derecesi [0,1] kapalı aralığına genişletilerek daha hassas ölçümler üzerinde durulmuştur.

Daha sonra Atanassov (1986), sezgisel bulanık kümeler isimli çalışmasında ait olma derecesine, ait olmama derecesini de ilave ederek daha hassas aidiyet ölçümlerini ve sistemlerini tanıtmıştır. Smarandache (1999), Zadeh (1965) ve Atanassov (1986) tarafından geliştirilen sistemleri daha da genişleten nötrosofik kümeleri tanıtmıştır. Bu sistem bir elemanın bir kümeye ait olma, ait olmama ve belirsizlik durumlarını ölçmeye ve modellemeye dayanmaktadır.

Kafes teori matematikte soyut cebir alanının önemli temel taşlarından bir tanesidir. Çeşitli kümelerin ve bu kümelere ait nesnelerin sıralamalarında genel teoriler ortaya atmak için kullanılan bir yapıdır. Mantık ve cebir alanında sıkça karşılaşılan kafesler, Birkhoff (1967) tarafından ortaya atılmış ve teori haline getirilmiştir.

Kandasamy (2014) ve Smarandache (2014), nötrosofik kümelerin kafes yapılarını tanıtmıştır. Bu kafeslerin kesin doğru, kesin yanlış ve belirsiz ifadelerini eleman olarak kabul eder. Bu türde kafeslerin çalışılma tarihi çok yeni olduğu için geniş bir literatür ağına sahip değildir. Öte yandan bu kafeslerin özellikleri üzerine yapılmış henüz tek bir çalışma olduğundan, geliştirilebilecek birçok özelliğe sahiptir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde filtreler ve kafesler ile ilgili olarak, tezin ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan birtakım tanım ve özellikler verilecektir. Bu bölümde Birkhoff (1967) ve Toksoy (2008) den faydalanılmıştır.

Tanım 3.1.1. P bir küme olsun. P nin her x, y, z elemanı için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa P kümesi üzerinde tanımlanan ikili " $\leq$ " bağıntısına kısmi sıralama denir. P kümesine de kısmi sıralı küme (Poset) denir ve $(P, \leq)$ ile gösterilir.

(i) $x \leq x$ (Yansıma Özelliği),
(ii) $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$ (Ters Simetri Özelliği),
(iii) $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ (Geçişme Özelliği).

Tanım 3.1.2. P bir kısmi sıralı küme ve $S \subseteq P$ olsun. Her $s \in S$ için $s \leq x$ oluyorsa $x \in P$ ye S nin bir üst sınırı denir. Benzer şekilde, her $s \in S$ için $x \leq s$ oluyorsa $x \in P$ ye S nin bir alt sınırı denir. S nin bütün üst sınırlarının kümesi S^u , bütün alt sınırlarının kümesi de S^l ile gösterilir.

$S^u = \{x \in P : \forall s \in S, s \leq x\}$
$S^l = \{x \in P : \forall s \in S, x \leq s\}$

Tanım 3.1.3. P bir kısmi sıralı küme ve $S \subseteq P$ olsun. S nin bütün üst sınırlarının kümesi S^u nun bir en küçük elemanı x var ise bu x elemanına S nin en küçük üst sınırı (veya supremumu) denir ve $supS = \vee S$ ile gösterilir. Denk olarak;

(i) x, S nin bir üst sınırı,
(ii) S nin her üst sınırı y için $x \leq y$ oluyorsa x, S nin en küçük üst sınırıdır.

Eğer $supS$ var ise tektir. Özel olarak $S = \{x, y\}$ ise $sup\{x, y\}$ ise $sup\{x, y\} = x \vee y$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.4. P bir kısmi sıralı küme ve $S \subseteq P$ olsun. S nin bütün alt sınırlarının kümesi S^l nin bir en büyük elemanı x var ise, x e S nin en büyük alt sınırı (veya infimumu) denir ve infS $=\wedge$ S ile gösterilir. Denk olarak;

(i) x, S nin bir alt sınırı,

(ii) S nin her alt sınırı y için $y \leq x$ oluyorsa x, S nin en büyük alt sınırıdır.

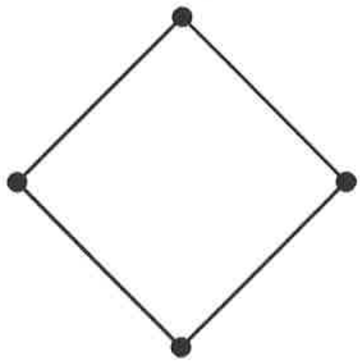
Eğer $infS$ var ise tektir. Özel olarak $S = \{x, y\}$ ise $inf\{x, y\} = x \wedge y$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.5. Eğer $e \leq d$ şeklindeki herhangi $d \in D$ ve $e \in P$ var iken $e \in D$ ise; P posetinin $D \subseteq P$ alt kümesi bir aşağı kümedir.

Tanım 3.1.6. Eğer $u \leq v$ şeklindeki herhangi $u \in U$ ve $v \in P$ var iken $v \in U$ ise; P posetinin $U \subseteq P$ alt kümesi bir yukarı kümedir.

3.2. Kafes Teorisi

Tanım 3.2.1. Kısmi sıralı $(A, \leq)$ kümesi verilsin. Her $x, y \in A$ için $sup\{x, y\}$ ve $inf\{x, y\}$ varsa, A kümesine Kafes denir.



Şekil 3.1. Kısmi sıralı bir küme üzerinde tanımlı kafes şekli

Doğrusal sıralı kümeler de birer kafestir.

$$a \vee b = \begin{cases} b, eğer\ a \leq b, \\ a, eğer\ b \leq a \end{cases}$$

$$a \wedge b = \begin{cases} a, eğer\ a \leq b, \\ b, eğer\ b \leq a \end{cases}$$

Tanım 3.2.2. A bir kafes, $B \subseteq A$ bir alt küme olmak üzere; A, B de tanımlı işleme göre kapalılık özelliğini sağlıyorsa A ya alt kafes denir.

Tanım 3.2.3. P ve Q iki kısmi sıralı küme ve α, P den Q ya bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in P$ için P de $x \leq y$ iken Q da $\alpha(x) \leq \alpha(y)$ oluyorsa α ye sıralama koruyan (veya monoton) dönüşüm denir.

Tanım 3.2.4. Her $x, y \in P$ için P de $x \leq y$ iken Q da $\alpha(x) \leq \alpha(y)$ olması için gerek ve yeter koşul; Q da $\alpha(x) \leq \alpha(y)$ olması ise α ye sıralama gömmesi denir.

Tanım 3.2.5. α, P den Q ya örten sıralama gömmesi ise α ye sıralama izomorfizması denir. Eğer P den Q ya tanımlı bir sıralama izomorfizması varsa P ve Q ya sıralı izomorf kümeler denir.

Tanım 3.2.6. L ve K iki kafes f, L den K ya bir dönüşüm olsun. Her $a, b \in L$ için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa f ye kafes homomorfizması denir.

(i) $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$,
(ii) $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$.

Tanım 3.2.7. Bijektif kafes homomorfizmasına kafes izomorfizması denir. L den K ya f kafes homomorfizması bire-bir ise K nın $f(L)$ alt kafesi L kafesine izomorftur. Bu f homomorfizmasına L yi K ya gömme homomorfizması denir.

Önerme 3.2.7.1 Bir kafes izomorfizmasının tersi de bir kafes izomorfizmasıdır.

İspat $f: L \longrightarrow K$ bir kafes izomorfizması ve $a, b \in L$ olsun. Bu durumda;

$f(f^{-1}(a \vee b)) = a \vee b = f(f^{-1}(a)) \vee f(f^{-1}(b))$ ve
$f(f^{-1}(a \wedge b)) = a \wedge b = f(f^{-1}(a)) \wedge f(f^{-1}(b))$ olduğundan
$f^{-1}(a \vee b) = f^{-1}(a) \vee f^{-1}(b)$ ve $f^{-1}(a \wedge b) = f^{-1}(a) \wedge f^{-1}(b)$ olur.

Tanım 3.2.8. Sıralama teorisinde bir Hasse diyagramı, kısmi olarak sıralanmış bir sonlu kümeyi temsil etmek için kullanılan matematiksel diyagramının bir türüdür. Somut olarak düşünürsek, kısmı sıralı bir $(S, \leq)$ kümesi için S nin herbir elemanını düzlemde bir köşe olarak kabul eder ve herhangi bir x noktasından y noktasına bir doğru parçası veya eğri çizer. Bu eğriler birbirini kesebilir. Fakat uç noktaları dışındaki herhangi bir köşeye dokunmamalıdır.

3.3. Kafeslerde İdeal

L bir kafes olsun. L nin bir K ideali, L nin boş olmayan bir alt kümesidir öyle ki;

(i) K, L nin bir alt kafesi,

(ii) Herhangi bir $a \in K, b \in L$ için $a \wedge b \in K$.

Bir L kafesindeki I idealinin başka eşdeğer tanımlanması şu şekildedir:

(i) Herhangi bir $a, b \in I$ için $a \vee b \in I$,

(ii) Herhangi bir $a \in I$ için eğer $b \leq a$ ise bu durumda $b \in I$ dır.

3.4. Filtre Kavramı

Sezgisel olarak düşünülürse, kısmi sıralı bir küme üzerindeki filtre elemanları bazı kriterleri sağlayan yeterince büyük bir kümedir. Örneğin, x posetin bir elemanı ise, o zaman x in üstünde (x i kapsayan) elemanların kümesi filtredir, x de temel filtre olarak adlandırılır. Eğer x ve y posetin karşılaştırılamaz elemanları ise bu durumda x ve y deki temel filtreler ayrıktır.

Benzer şekilde bir küme üzerindeki bir filtre, bazı elemanları içeren yeterince geniş olan alt kümeleri kapsar. Örneğin, eğer küme reel sayı doğrusu ve x onun noktalarından biri ise bu durumda x i içeren iç noktalar birer filtredir, x in komşuluğunun filtresi olarak adlandırılır.

$(P, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve F, P nin bir alt kümesi olsun. F nin bir filtre olması için aşağıdaki özellikleri sağlanmalıdır:

(i) F boştan farklı bir küme,

(ii) F deki her x, y için; $z \leq x$ ve $z \leq y$ şartını sağlayan $z \in P$ elemanı vardır. (F bir filtre tabanı veya aşağıya yönlü)

(iii) F deki her x ve P deki her y için $x \leq y$; y nin F de olduğu anlamına gelir. (F bir tavan kümesi veya üstten kapalı)

Eğer bir A filtresi, P kümesinin tamamına eşit değilse öz denir. Bu şart bazen filtre tanımına eklenir.

Yukarıdaki tanım keyfi bir poset için en genel yol tanımladığında, aslında sadece kafesler için tanımlanmış olur. Bu durumda yukarıdaki tanım, takip eden eşdeğer ifade ile karakterize edilebilir: $(P, \leq)$ kafesinin bir F alt kümesi bir filtredir ancak ve ancak eğer F sonlu kesişim altında kapalı olan bir üst küme ise; F deki tüm x, y ler için $x \wedge y$ de F dedir.Verilen bir p elemanını içeren en küçük filtre bir temel filtredir ve p bu durumda bir temel elemandır. P nin temel filtresi sadece $\{x \in P \mid p \leq x\}$ kümesi tarafından verilir ve $\uparrow p$ ile gösterilir.

Bir filtredeki tüm $\leq$ bağıntısının tersi ile elde edilen ve $\wedge$ ile $\vee$ yi değiştirerek elde edilen dual kavramı bir idealdir. Bu dualden dolayı filtre tartışması genelde ideal tartışmasına indirgenir. Bundan dolayı bu konudaki en fazla ek bilgiler idealler konusunda yer alır.

3.4.1. Bir Küme Üzerindeki Filtre

Bir filtrenin özel bir durumu bir küme üzerinde tanımlanan filtredir. Kısmi sıralı bir S kümesinin $P(S)$ kuvvet kümesi üzerinde tanımlanabilen bir F filtresi aşağıdaki özellikleri içerir:

(i) S, F de ve eğer A ve B de F de ise kesişimleri de F dedir. (F sonlu kesişim altında kapalıdır.)

(ii)Eğer A, F de ise ve A, B nin alt kümesi ise S nin tüm B altkümeleri de F dedir. (F üst kapalıdır.)

Eğer boş küme F de değilse, F öz filtredir. İlk iki durum, bir küme üzerindeki bir filtrenin sonlu kesişim özelliğine sahip olduğu anlamına gelir. S üzerinde öz olmayan tek filtre $P(S)$ dir. Bir filtre tabanı aşağıdaki durumlarla birlikte $P(S)$ nin bir B alt kümesidir:

(i) B boştan farklıdır ve B, B nin B yi içeren herhangi iki elemanının kesişimidir.

(ii) Boş küme B nin elemanı değildir. (B bir öz filtre tabanıdır.)

Tanım 3.4.2. Verilen bir B filtre tabanı tarafından oluşturulan veya gerilen filtre, B yi içeren minimum filtre olarak tanımlanır. Bu, B nin bir elemanını içeren S nin tüm alt kümelerinin ailesidir.

Her filtre aynı zamanda bir filtre tabanıdır. Bu yüzden filtrelemek için filtre tabanından geçiş süreci, tamamlama türü gibi incelenebilir.

Tanım 3.4.3. Eğer B ve C, S üzerinde iki filtre tabanı ve eğer her $B_0 \in B$ için $C_0 \subseteq B_0$ olacak şekilde $C_0 \in C$ var ise C, B den daha iyi sıralanmış (veya C, B nin bir filtresidir) denir. Eğer aynı zamanda B, C den daha iyi sıralanmış ise B ile C nin eş filtre tabanı olduğu söylenebilir.Filtre tabanı kavramına dair aşağıda bazı özellikler belirtilmiştir:

- Eğer B ve C filtre tabanı ise bu durumda C, B den daha saftır ancak ve ancak C tarafından gerilen filtre, B tarafından gerilen filtreyi kapsar. Bu nedenle B ve C eş filtre tabanıdır ancak ve ancak aynı filtreyi üretirler.

- A, B ve C filtre tabanları için; eğer A, B den daha saf ve B, C den daha saf ise bu durumda A, C den daha saftır. Böylece bu arıtma ilişkisi, filtre tabanının kümesi üzerinde bir önsıradır ve filtre tabanından filtreye geçiş, bir önsıradan kısmi sıralama bağlantısına geçiş örneğidir.

Tanım 3.4.4. $P(S)$ nin herhangi bir T altkümesi için, T yi kapsayan bir en küçük F filtresi vardır. Bu filtreye T tarafından gerilen veya üretilen filtre denir. Bu da daha sonra F için bir filtre tabanı oluşturacak olan T nin tüm sonlu kesişimleri alınarak inşa edilir. Yani filtre oluşturması için gerek ve yeter şart; T nin elemanlarının herhangi sonlu kesişimlerinin boş olmamasıdır ve bu durumda T nin bir filtre alt tabanı olduğu söylenebilir.

Tanım 3.4.5. S boştan farklı bir küme ve C, S nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $\{C\}$ bir filtre tabanıdır. Ürettiği filtre ise (örneğin C nin kapsadığı tüm alt kümelerin sınıfı) C tarafından üretilen temel filtre olarak adlandırılır.

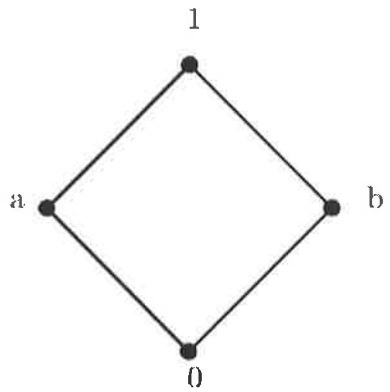
Tanım 3.4.6. Eğer bir filtrenin tüm elemanlarının kesişimi boş küme ise, serbest filtre olarak adlandırılır. Bir temel filtre serbest değildir. Bir filtrenin elemanlarının herhangi sonlu sayıdaki kesişiminden itibaren; sonlu bir küme üzerindeki hiçbir filtre serbest değildir ve aslında tüm üyelerinin ortak kesişimi tarafından üretilen temel filtredir. Sonsuz bir küme üzerindeki temel olmayan filtre, serbest olmak zorunda değildir.

3.5. Kafeslerdeki Filtre Kavramı

Matematikte bir filtre, kısmi sıralı bir kümenin özel bir alt kümesidir. Örneğin, bazı kümelerin kuvvet kümesi, küme kapsama bağıntısı ile tanımlanan bir filtredir. Filtreler, sıralama ve kafes teorisinde görülür fakat orijinal olarak Topolojik bir kavramdır. Filtreler Garrett Birkhorff (1935), Henri Cartan (1937) ve sonrasında Bourbaki tarafından Genel Topoloji kitabında, E. H. Moore ve H.L. Smith (1922) tarafından geliştirilen bağlara benzer kavramlara alternatif olarak ortaya konulmuştur.

Tanım 3.5.2. L bir kafes olsun. Bir F alt kafesinin L nin bir filtresi olması için gerek ve yeter koşul; $\forall x \in F$ ve $a \in L$ için $x \wedge a \in F$ olmasıdır.

Örnek 3.5.3. $L = \{0,1,a,b\}$ ve $F_1 = \{0\}$, $F_2 = \{0,a\}$, $F_3 = \{1\}$ olsun.



Şekil 3.2. $L = \{0,1,a,b\}$ kafesi

F_1 bir filtredir. Çünkü $\forall x \in L$ için; $0 \wedge x = 0 \in F_1$ dir.

Aynı şekilde F_2 de bir filtredir. Çünkü $\forall x \in L$ için $0 \wedge x = 0 \in F_2$

$a \wedge x = 0 \in F_2$ ya da

$a \wedge x = a \in F_2$

F_3 filtre değildir. Çünkü; $1 \wedge a = a \notin F_3$

$1 \wedge b = b \notin F_3$

$1 \wedge 0 = 0 \notin F_3$

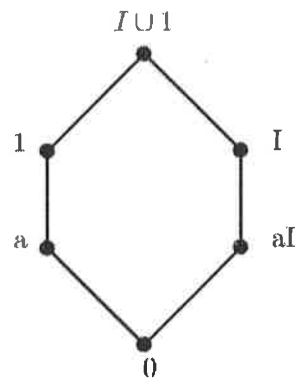
4. BULGULAR

4.1. Kısmi Sıralı Nötrosofik Kümelere Giriş

Bu bölümde, bir nötrosofik küme üzerindeki kısmi sıralama kavramı ile bu kümenin en büyük ve en küçük elemanının tanımını yapacağız. *N(P)* $0, 1, \mathrm{I}$ ve $1 + \mathrm{I}$ yı içeren bir nötrosofik küme olsun. Ayrıca $0, 1, \mathrm{I}, 1 + \mathrm{I} \in N(P)$ alalım. $0 < 1$ ve $0 < \mathrm{I}$ olduğundan 0 ı *N(P)* nin en küçük elemanı ve $\mathrm{I} \cup 1 = \mathrm{I} + 1$ i *N(P)* nin en büyük elemanı olarak tanımlarız. Böylece bu çalışmada *N(P)* kısmi sıralı küme haline gelir.

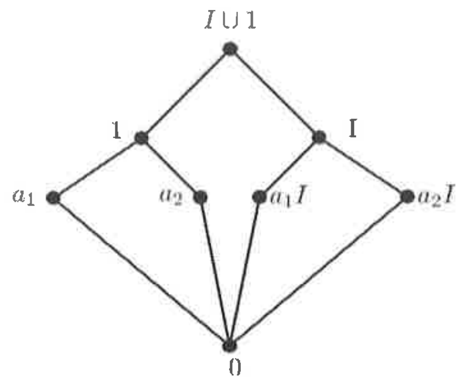
Tanım 4.1.1. $N(P)$ kısmi sıralı bir küme ve $0,1, \mathrm{I}, 1 + \mathrm{I} = 1 \cup \mathrm{I}$ bu kümenin elemanları olsun. $max\{x, y\}, min\{x, y\} \in N(P)$ olacak şekilde *N(P)* üzerinde max ve min elemanları tanımlanır. 0 en küçük eleman ve $1 \cup \mathrm{I} = 1 + \mathrm{I}$ $N(P)$ nin en büyük elemanı olmak üzere; $\{N(P), min, max\}$ Nötrosofik Kafes olarak tanımlanır.

Örnek 4.1.2. $N(P) = \{0, 1, \mathrm{I}, 1 + \mathrm{I}, a, a\mathrm{I}\}$ kısmi sıralı bir küme ve *N(P)* bir nötrosofik kafes olsun.



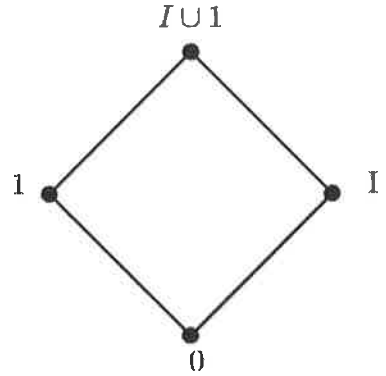
Şekil 4.1. $N(P) = \{0, 1, \mathrm{I}, 1 + \mathrm{I}, a, a\mathrm{I}\}$ Nötrosofik kafesi

Örnek 4.1.3. $N(P) = \{0, 1, \mathrm{I}, 1 + \mathrm{I}, a_1, a_2, a_1\mathrm{I}, a_2\mathrm{I}\}$ aşağıdaki Hasse nötrosofik diyagramıyla ilişkili bir nötrosofik kafes olsun.



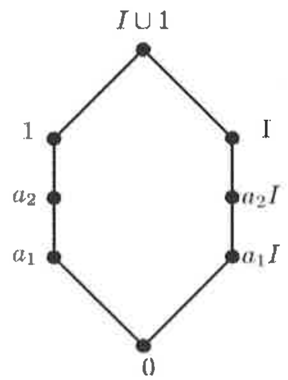
Şekil 4.2. $N(P) = \{0, 1, \mathrm{I}, 1 + \mathrm{I}, a_1, a_2, a_1\mathrm{I}, a_2\mathrm{I}\}$ Nötrosofik kafesi

Örnek 4.1.4. $N(P) = \{0, 1, \mathrm{I} \cup 1\}$



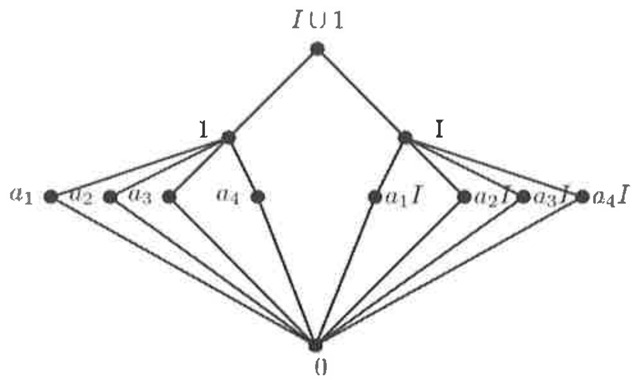
Şekil 4.3. $N(P) = \{0, 1, \mathrm{I} \cup 1\}$ Nötrosofik kafesi

Eğer *N(P)* bir nötrosofik kafes ise $a\mathrm{I}, \mathrm{I}, 1 \cup \mathrm{I} \in N(P)$ olmak üzere Örnek 4.1.4. te verilen *N(P)* nötrosofik kafesinin Hasse diyagramı aşağıdaki şekildedir:



Şekil 4.4. $N(P) = \{0, 1, \mathrm{I} \cup 1\}$ Nötrosofik kafesinin Hasse Diyagramı

Örnek 4.1.5. $N(P) = \{0, 1, \mathrm{I}, 1 + \mathrm{I}, a_1, a_2, a_3, a_4, a_1\mathrm{I}, a_2\mathrm{I}, a_3\mathrm{I}, a_4\mathrm{I}\}$ sonlu sıralı nötrosofik kafes olsun. Eğer $i \neq j, 1 \leq i, j \leq 4$ ise a_i ile a_j kıyaslanamaz.



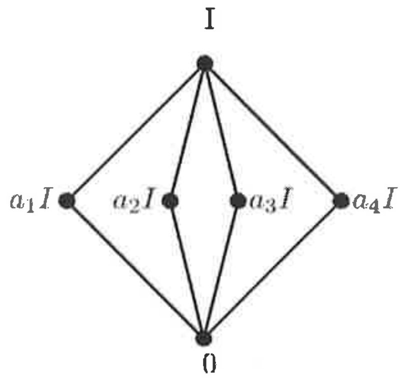
Şekil 4.5. $N(P) = \{0, 1, \mathrm{I}, 1 + \mathrm{I}, a_1, a_2, a_3, a_4, a_1\mathrm{I}, a_2\mathrm{I}, a_3\mathrm{I}, a_4\mathrm{I}\}$ Nötrosofik kafesi

N(P) nin yukarıdaki nötrosofik Hasse diyagramıyla birlikte bir nötrosofik kafes olduğu görülebilir. Aşağıdaki bölümde nötrosofik kafeslerin çeşitlerini inceleyeceğiz.

4.2. Nötrosofik Kafes Çeşitleri

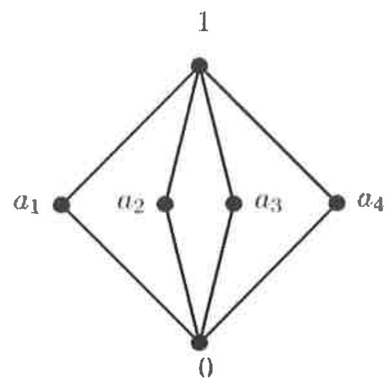
Modüler kafes, dağılım kafesi, süper modüler kafes ve zincir kafes tanımlarının dışında bunlarla ilgili bazı örnekler verip, bazı ilişkili özellikler vereceğiz.

İlk olarak söyleyebiliriz ki; eğer bir nötrosofik kafes sadece nötrosofik koordinatlara sahipse veya $\{0\}$ dışındaki koordinatları nötrosofikse; saf nötrosofik kafestir.Örnek 4.1.5 te, Şekil 4.6. daki nötrosofik kafesin saf nötrosofik kısmı incelendi.



Şekil 4.6. $N(P) = \{0, \mathrm{I}, a_1\mathrm{I}, a_2\mathrm{I}, a_3\mathrm{I}, a_4\mathrm{I}\}$ Nötrosofik kafesi

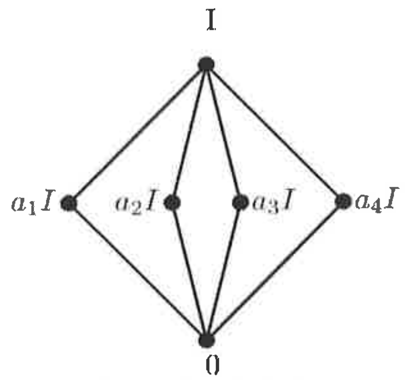
Aynı şekilde klasik kafeslerin Hasse diyagramı da Örnek 4.1.5. ten elde edilebilir.



Şekil 4.7. Klasik kafeslerin Hasse Diyagramı

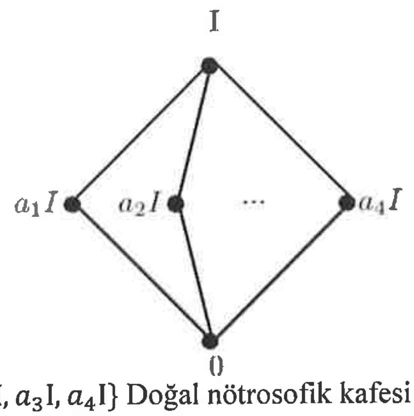
Örnek 4.1.5 te verilen nötrosofik kafes, modüler doğal nötrosofik kafes ve klasik modüler kafes özelliklerini taşıyan birer alt kafese sahiptir.

Örnek 4.1.4. te verilen nötrosofik kafes, 4 elemanıyla birlikte bir dağılım kafesidir.

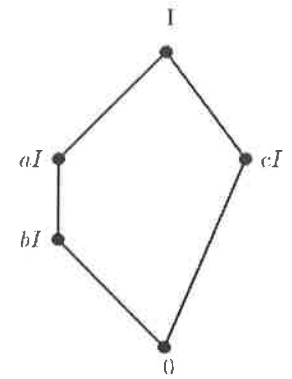


Şekil 4.8. $N(P) = \{0, \mathrm{I}, a_1\mathrm{I}, a_2\mathrm{I}, a_3\mathrm{I}, a_4\mathrm{I}\}$ Dağılım kafesi

Aynı şekilde Şekil 4.9. da verilen formun bir doğal nötrosofik kafesine üretilebilir.



Şekil 4.9. $N(P) = \{0, \mathrm{I}, a_1\mathrm{I}, a_2\mathrm{I}, a_3\mathrm{I}, a_4\mathrm{I}\}$ Doğal nötrosofik kafesi



Şekil 4.10. $N(M_4)$ Nötrosofik beşgen kafesi

Şekil 4.10. da verilen nötrosofik beşgen kafes, ne dağılımlı ne de modüler değildir. Örnek 4.1.5 te gördüğümüz nötrosofik kafes, homomorfik görüntüsü beşgen kafese izomorf olan alt kafesleri için modüler değildir.Bu sebeple en azından modüler ve doğal nötrosofik modüler kafes olan bir alt kafese sahipse; bir yarı modüler kafes olacak şekilde *N(L)* nötrosofik kafesi tanımlandı. Böylece *S* kümesi ve *S* nin nötrosofik kümesi olan *N(S)* yi değiştirmeye ihtiyaç duyarız. $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ için $N(S) = \{a_1\mathrm{I}, \dots, a_n\mathrm{I}\}$ yi tanımlanır ve $S \cup N(S)$ ile birlikte $0, 1, \mathrm{I}$ ve $1 \cup \mathrm{I} = 1 + \mathrm{I}$ elemanları alınır.

Tanım 4.2.1. Bir *S* kümesinin güçlü nötrosofik kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır:
$A = \{a_1, \dots, a_n\}$ olmak üzere; *A* nın güçlü nötrosofik kümesi;

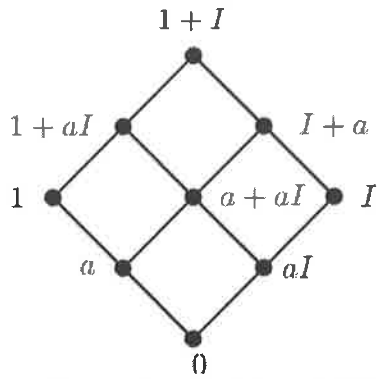
$$SN(A) = \{a_i, a_jI, a_i \cup ajI = ai + aj\mathrm{I}\,;\ 0, 1, \mathrm{I}, 1 + \mathrm{I}, 1 \le i, j \le n\}$$

S(L) aşağıdaki şekilde güçlü kafes olarak tanımlanır:

$$S(L) = \{0, 1, \mathrm{I}, 1 + \mathrm{I}, a_i, a_j\mathrm{I}\}$$

S(L) ile birlikte max ve min kavramları güçlü nötrosofik kafesteki gibi tanımlanır. Bu durumu bazı örneklerle açıklayacağız.

Örnek 4.2.2. $S(L) = \{0, 1, \mathrm{I}, 1 + \mathrm{I}, a, a\mathrm{I}, a + a\mathrm{I}, 1 + a\mathrm{I}, \mathrm{I} + a\}$ bir güçlü nötrosofik kafes olsun.



Şekil 4.11. $S(L) = \{0, 1, \mathrm{I}, 1 + \mathrm{I}, a, a\mathrm{I}, a + a\mathrm{I}, 1 + a\mathrm{I}, \mathrm{I} + a\}$ Güçlü nötrosofik kafesi

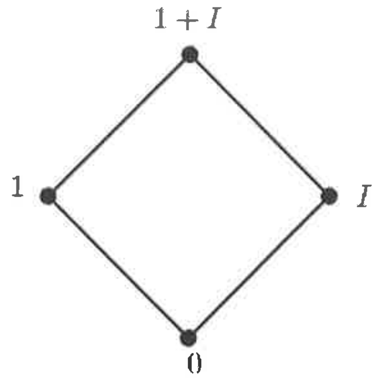
Klasik kafes olduğu kadar güçlü nötrosofik alt kafes olan birkaç altkafes de tanımlanabilir.

Şekil 4.12. Klasik kafes şekli

Klasik nötrosofik kafestir.

Şekil 4.13. Doğal nötrosofik kafes şekli

Doğal nötrosofik kafestir.

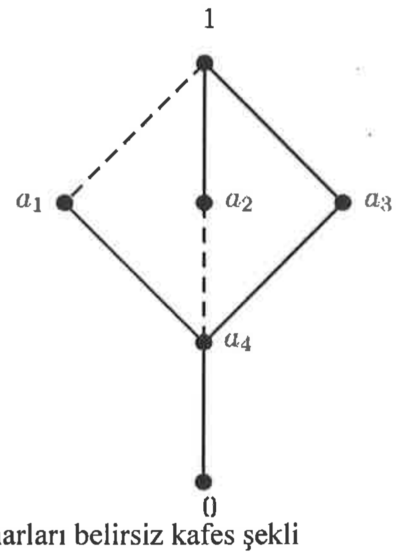


Şekil 4.14. Sağlam nötrosofik kafes şekli

Sağlam nötrosofik kafestir.

Bu kafeslerin kenarları gerçek olmak zorundadır. Sadece köşeler belirsizdir veya nötrosofik numaralıdır. Ancak tüm köşeleri gerçek fakat bazı kenarları belirsiz olan kafesler de olabilir.

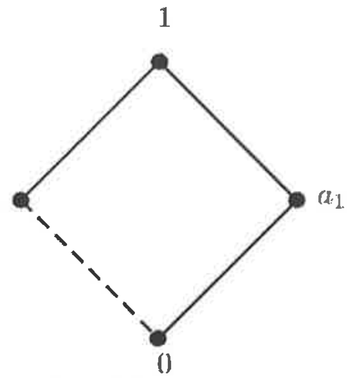
Örnek 4.2.3.



Şekil 4.15. Köşeleri gerçek, kenarları belirsiz kafes şekli

Kafeslerin birçok türü, kenar nötrosofik kafes olarak adlandırılacaktır. Kenar nötrosofik kafes olması halinde; kenar nötrosofik dağılım kafesi, kenar nötrosofik modüler kafes ve kenar nötrosofik süper modüler kafes özelliği de taşıyabilir. Bunları bazı örneklerle göstereceğiz.

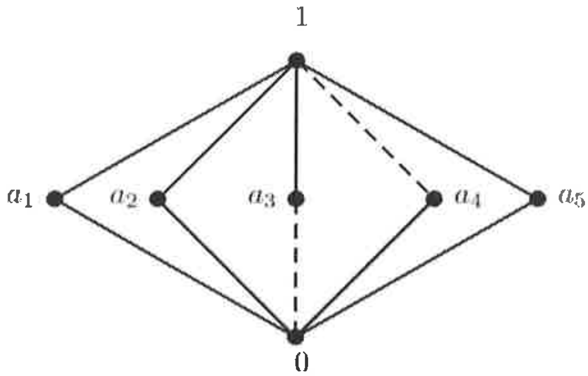
Örnek 4.2.4. Aşağıdaki Hasse diyagramını göz önüne alalım:



Şekil 4.16. Belirsiz kenar nötrosofik kafes şekli

Kenar *0* ı a_2 ye bağladığında kenar nötrosofik kafesi belirsiz olur.

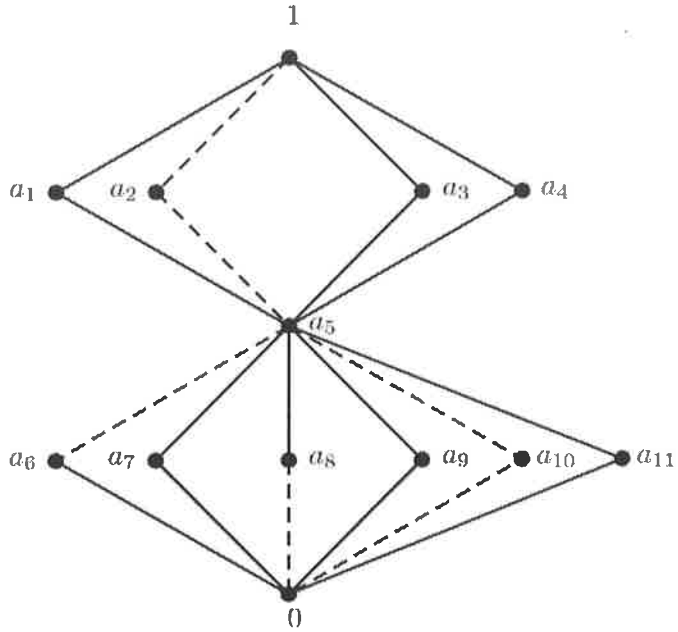
Örnek 4.2.5. Bir *L* kafesinin Hasse diyagramını inceleyelim:



Şekil 4.17. *L* kenar nötrosofik modüler kafes şekli

L bir kenar nötrosofik modüler kafestir. 0 ı a_3 e ve 1 i a_4 e bağlayan kenarlar nötrosofik kenarlardır ve bu kenarlardan kalan kenarlar gerçektir.Ancak tüm köşeler gerçektir ve kısmi sıralı kümedir. Bazı kenarlar ise belirsiz olarak alınabilir.

Örnek 4.2.6. Hasse diyagramı ile birlikte aşağıdaki kafes, kenar nötrosofik kafestir.



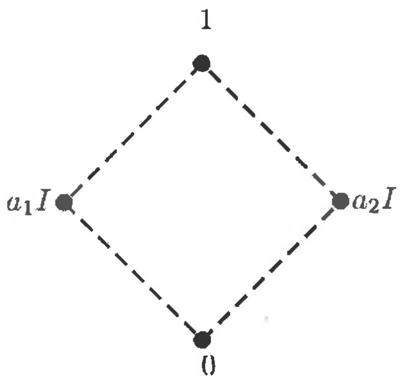
Şekil 4.18. L kenar nötrosofik kafes şekli

Açıkça L bir dağılımlı kenar nötrosofik kafes değildir. Ancak L, nötrosofik olmayan modüler kafes kadar, modüler kenar nötrosofik altkafese sahiptir. Bununla birlikte aşağıdaki teoremleri inceleyeceğiz:

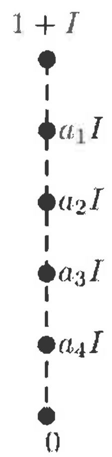
Teorem 4.2.7. L bir kenar nötrosofik kafes olsun. Bu durumda L genel olarak kenar nötrosofik olmayan alt kafeslere sahiptir.

İspat: Her tepe bir alt kafestir ve nötrosofik olmayan ancak gerçek olan kenar nötrosofik kafeslerin tüm köşeleri gibi kenarları da nötrosofik olan doğal nötrosofik kafese sahiptir.

Hasse diyagramı ile birlikte aşağıdaki kafes doğal nötrosofik kafestir.



Şekil 4.19. Doğal nötrosofik kafes şekli



Şekil 4.20. Doğal nötrosofik kafes şekli

Bu iki doğal nötrosofik kafes, kenar nötrosofik alt kafese veya tepe nötrosofik alt kafese sahip olmayabilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde nötrosofik kafesler için ideal ve filtre kavramları tanıtılmıştır. Tanımlanan nötrosofik ideal ve filtre yalnızca nötrosofik kafesin kendisi için sağlanmaktadır. Daha esnek tanımlar getirmek amacı ile saf nötrosofik kafesler üzerinde nötrosofik saf filtre ve ideal kavramları tanıtılmıştır. Saf nötrosofik kafesler $\{0\}$ elemanını barındırmak zorunda olduğu için saf nötrosofik filtreler için zengin bir çalışma alanı sağlamakta fakat idealler için yine katı bir yapıya bürünmektedir.

Yapılan çalışmalar nötrosofik saf idealler için nötrosofi yapısına sadık kalarak yeni tanımlar geliştirmeye ve yeni çalışmaları alanları kazandırmaya temel oluşturur.

Tanım 5.1. N bir nötrosofik kafes ve L bir nötrosofik alt kafes olsun. $\forall x \in N$ ve $\forall y \in L$ için $x \wedge y \in L$ ise L ye bir Nötrosofik Filtre denir.

Teorem 5.1.1. Her nötrosofik kafesin nötrosofik filtresi kendisidir.

İspat: N bir nötrosofik kafes ve F, N nin bir nötrosofik filtresi olsun. $F \subseteq N$ olduğu tanımdan açıktır. Şimdi $N \subseteq F$ olduğunu göstereceğiz.

(i) $N = \{0,1,\mathrm{I},1+\mathrm{I}\}$ olsun. F nötrosofik filtresi de bir nötrosofik kafes olduğundan F=$\{0,1,\mathrm{I},1+\mathrm{I}\}$ olmak zorundadır. Böylece $N = F$ olur.

(ii) $N = \{0,1,\mathrm{I},1+\mathrm{I},a_i,a_i\mathrm{I}\}$ ($1 \leq i \leq n$) olsun ve $a_i\mathrm{I} \in F$ fakat $a_i \notin F$ olsun. $a_i\mathrm{I} \in F$ ve F bir nötrosofik kafes olduğundan $a_i \in F$ olmak zorundadır. Öte yandan, $a_i \in F$ ve F nötrosofik kafes olduğundan $a_i\mathrm{I} \in F$ zorundandır. N nin her elamanı F ye aittir. Böylece $N = F$ olur.

Tanım 5.2. N bir nötrosofik kafes ve L bir nötrosofik alt kafes olsun. $\forall x \in N$ ve $\forall y \in L$ için $x \vee y \in L$ ise L ye bir Nötrosofik İdeal denir.

Teorem 5.2.1. Her nötrosofik kafesin nötrosofik ideali kendisidir.

İspat: N bir nötrosofik kafes ve L, N nin bir nötrosofik ideali olsun.

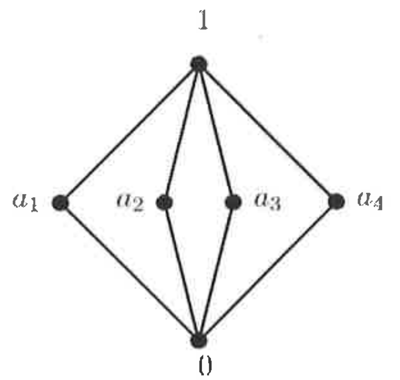
(i) $N = \{0,1,\mathrm{I},1+\mathrm{I}\}$ olsun. L nötrosofik ideali de bir nötrosofik kafes olduğundan; $L = \{0,1,\mathrm{I},1+\mathrm{I}\}$ olmak zorundadır. Böylece $N = L$ olur.

(ii) $N = \{0,1,\mathrm{I},1+\mathrm{I},a_i,a_iI\}$ (1≤i≤n) ve $a_i\mathrm{I} \in L$ fakat $a_i \notin L$ olsun. $a_i\mathrm{I} \in L$ ve L bir nötrosofik kafes olduğundan $a_i \in L$ olmak zorundadır. Öte yandan, $a_i \in L$ ve L nötrosofik kafes olduğundan $a_i\mathrm{I} \in L$ zorundandır. N nin her elamanı L ye aittir. Böylece $N = L$ olur.

Görüleceği üzere nötrosofik ideal ve filte tanımı esnek tanımlar değildir. Bu nedenle saf nötrosofik kafes tanımını kullanarak daha esnek nötrosofik saf filte ve saf ideal tanımları vereceğiz.

Tanım 5.3. N bir nötrosofik kafes, L bir saf alt kafes olsun. $\forall x \in N$ ve $\forall y \in L$ için $x \wedge y \in L$ ise L ye Nötrosofik Saf Filtre denir.

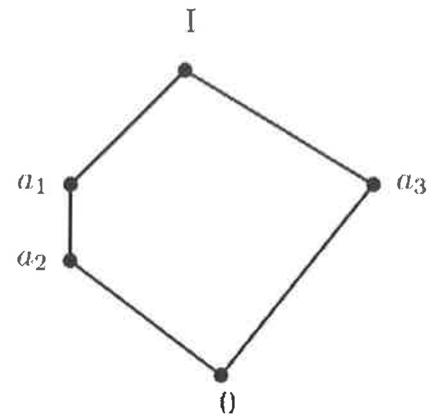
Örnek 5.3.1. Aşağıdaki N nötrosofik kafesinin her L saf alt kafesi için; $\forall x \in N$ ve $\forall y \in L$ iken $x \wedge y \in L$ şartı sağlandığından L bir nötrosofik saf filtredir.



Şekil 5.1. $N(P) = \{0,1,a_1,a_2,a_3,a_4\}$ Nötrosofik kafes şekli

Tanım 5.4. N bir nötrosofik kafes, L bir saf alt kafes olsun. $\forall x \in N$ ve $\forall y \in L$ için $x \vee y \in L$ ise L ye Nötrosofik Saf İdeal denir.

Örnek 5.4.1. Aşağıdaki N nötrosofik kafesinin her L saf alt kafesi için; $\forall x \in N$ ve $\forall y \in L$ iken $x \vee y \in L$ şartı sağlandığından L bir nötrosofik saf idealdir.



Şekil 5.2. $N(P) = \{0, \mathrm{I}, a_1, a_2, a_3, a_4\}$ Nötrosofik kafes şekli

Yukarıda verilen tanım ile {0} elamanını içeren yegâne nötrosofik alt ideal yine kafesin kendisi olmak zorundadır.

Sonuç Teorem 5.5. Her nötrosofik filtre bir nötrosofik saf filtredir fakat tersi her zaman geçerli değildir.

İspat: *N*= {0,1,I,1+I} nötrosofik filtresi ve verebileceğimiz tüm nötrosofik filtre örnekleri aynı zamanda nötrosofik kafes olduklarından; {0,I} elemanlarını içermek zorundadır. Dolayısıyla nötrosofik saf filtredir. Tersi olarak; sadece nötrosofik elemanlar içeren bir nötrosofik saf filtre, nötrosofik filtre özelliği taşımaz.

Sonuç Teorem 5.6. Her nötrosofik ideal bir nötrosofik saf idealdir fakat tersi her zaman geçerli değildir.

İspat: *N*= {0,1,I,1+I} nötrosofik ideali ve verebileceğimiz tüm nötrosofik ideal örnekleri aynı zamanda nötrosofik kafes olduklarından; {0,I} elemanlarını içermek zorundadır. Dolayısıyla nötrosofik saf idealdir. Tersi olarak; sadece nötrosofik elemanlar içeren bir nötrosofik saf ideal, nötrosofik ideal özelliği taşımaz.

KAYNAKLAR

Atanassov KT, 1986. Intuitionistic Fuzzy Sets. Fuzzy Sets and Systems, 20(1): 87-96.

Birkhoff G, 1967. Lattice Theory. In American Mathematical Society Colloquium Publications, 25(1): 1-20.

Cantor G, 1874. Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reelen algebraischen Zahlen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 77: 258-262.

Kandasamy V, Smarandache F, 2014. Neutrosophic Lattices. Neutrosophic sets and Systems, 2: 42-47.

Praveen MR, Sekar P, 2015. Neutrosophic Semilattices and Their Properties. Neutrosophic Sets and Systems, 10(1): 65.

Smarandache F, 1999. A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic. Philosophy, 1-141.

Toksoy SE, 2008. Kafeslerde Tümleyenler. Doktora Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Zadeh LA, 1965. Fuzzy sets. Information and Control, 8(3): 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Malatya'da doğdum. İlköğretimi Kazım Karabekir İlköğretim Okulu'nda ve liseyi Malatya Fen Lisesi'nde tamamladım. 2007 yılında kazandığım Erciyes Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2011 yılında 2.74/4.0 derece ile mezun oldum. Temmuz 2013'te Bitlis Eren Üniversitesi'ne Çözümleyici olarak atandım. Eylül 2014'te Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başladım. Eylül 2017'te yüksek lisansımı tamamladım. Yabancı dilim İngilizce'dir.

Merve Gökçen SAYIN