T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN BİR PERİYODİK-ANTİPERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMİNİN KÖK FONKSİYONLARININ TABANLIK ÖZELLİKLERİ

Selma ÖZKAN

AĞUSTOS 2017

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN BİR PERİYODİK-ANTİPERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMİNİN KÖK FONKSİYONLARININ TABANLIK ÖZELLİKLERİ

Hazırlayan

Selma ÖZKAN

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Ufuk KAYA

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Abdullah KABLAN

Yrd. Doç. Dr. Ufuk KAYA

Yrd. Doç. Dr. Ökkeş ÖZTÜRK

AĞUSTOS 2017

Selma ÖZKAN tarafından hazırlanan "**Dördüncü Mertebeden Bir Periyodik-Antiperiyodik Sınır Değer Probleminin Kök Fonksiyonlarının Tabanlık Özellikleri**" adlı tez çalışması 01/08/2017 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bitlis Eren Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri | **İmza**

Doç. Dr. Abdullah KABLAN
(Başkan)

Yrd. Doç. Dr. Ufuk KAYA
(Danışman)

Yrd. Doç. Dr. Ökkeş ÖZTÜRK
(Üye)

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 14/08/2017 gün ve 30/22 Sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Koray KÖKSAL

Enstitü Müdürü

ÖZET

DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN BİR PERİYODİK-ANTİPERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMİNİN KÖK FONKSİYONLARININ TABANLIK ÖZELLİKLERİ

Selma ÖZKAN

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ufuk KAYA
Ağustos 2017, 51 sayfa

Bu tez çalışmasında

$$\begin{aligned}
&y^{(iv)} + q(x)\,y = \lambda y, \qquad (0 < x < 1) \\
&y'''(1) - (-1)^{\sigma}\, y'''(0) = 0, \\
&y''(1) - (-1)^{\sigma}\, y''(0) = 0, \\
&y'(1) - (-1)^{\sigma}\, y'(0) = 0, \\
&y(1) - (-1)^{\sigma}\, y(0) = 0
\end{aligned}$$

şeklindeki sınır değer problemi incelenmiştir. Burada, λ spektral parametre, $q(x) \in W_1^1(0,1)$ kompleks değerli fonksiyon ve $\sigma = 0,1$'dir. Bu sınır değer probleminin sınır koşulları $\sigma = 0$ için periyodik, $\sigma = 1$ için antiperiyodiktir. Bu tip sınır koşulları regülerdir, fakat güçlü regüler değildir. Bu çalışmada $q(1) \neq q(0)$ durumunda, verilen sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik davranışları incelenmiş ve kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayında taban oluşturduğu ispatlanmıştır. Ayrıca $p = 2$ durumunda bu tabanın Riesz tabanı olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel Operatör, Özdeğer-Özfonksiyon, Asimptotik Formül, Tabanlık

ABSTRACT

BASIS PROPERTIES OF ROOT FUNCTIONS OF A PERIODIC-ANTIPERIODIC FOURTH ORDER BOUNDARY VALUE PROBLEM

Selma ÖZKAN

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ufuk KAYA

August 2017, 51 pages

In this thesis, it is investigated the boundary problem

$$
\begin{aligned}
&y^{(iv)} + q(x)\,y = \lambda y, \qquad (0 < x < 1)\\
&y'''(1) - (-1)^{\sigma}\, y'''(0) = 0,\\
&y''(1) - (-1)^{\sigma}\, y''(0) = 0,\\
&y'(1) - (-1)^{\sigma}\, y'(0) = 0,\\
&y(1) - (-1)^{\sigma}\, y(0) = 0,
\end{aligned}
$$

where λ is a spectral parameter, $q(x) \in W_1^1(0,1)$ is a complex valued function and $\sigma = 0,1$. The boundary conditions of this boundary value problem are periodic for $\sigma = 0$ and they are antiperiodic for $\sigma = 1$. These sorts of boundary conditions are regular, but not strongly regular. In this work, it is established asymptotic formulae for eigenvalues and eigenfunctions of the considered boundary value problem and proved that the system of root functions forms a basis in the space $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ in the case $q(1) \neq q(0)$. Besides, it is shown that this basis is a Riesz basis for $p = 2$.

Keywords: Differential Operator, Eigenvalue-Eigenfunction, Asymptotic Formula, Basisness

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunun belirlenmesinde ve tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen, beni değerli bilgileriyle her zaman aydınlatan tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ufuk KAYA'ya teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\bar{z}$	z kompleks sayısının eşleniği
(f,g)	f ve g vektörlerinin bulundukları uzaydaki iç çarpımları
$[a,b]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$
(a,b)	$\{x\in\mathbb{R} \mid a< x< b\}$
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli ve kompleks değerli tüm fonksiyonların uzayı
$C^{(n)}[a,b]$	$[a,b]$ aralığında n. mertebeden türevi var ve sürekli olan kompleks değerli tüm fonksiyonların uzayı
$L_p(a,b)$	$1\le p<\infty$ durumunda $\int_a^b \lvert f(x)\rvert^p dx$ Lebesque integrali sonlu olan ölçülebilir fonksiyonların uzayı
$W_p^n(a,b)$	$1\le p<\infty$ ve $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ durumunda n. türevi var ve $L_p(a,b)$ uzayından olan fonksiyonların uzayı
$O(a_n)$	Landau sembolü
$\delta_{n,m}$	Kronecker deltası. $n=m$ ise 1, $n\ne m$ ise 0 değerini alan fonksiyon

1.GİRİŞ

Bir sınır değer probleminin kök fonksiyonlar sisteminin farklı fonksiyonel uzaylarda tabanlık özelliklerinin incelenmesi lineer diferansiyel operatörlerin spektral teorisinin önemli problemlerinden biridir. Sınır koşulları güçlü regüler olan bir sınır değer probleminin kök fonksiyonlar sisteminin L_2 uzayında koşulsuz taban oluşturduğu ispatlanmıştır. Sınır koşulları regüler fakat güçlü regüler olmayan sınır değer problemlerinin kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ uzayında taban oluşturduğuna ve oluşturmadığına dair örnekler mevcuttur.

Biz bu tez çalışmasında,

$$\begin{aligned}
&y^{(iv)}+q(x)y=\lambda y, \qquad (0<x<1)\\
&y'''(1)-(-1)^{\sigma}y'''(0)=0,\\
&y''(1)-(-1)^{\sigma}y''(0)=0,\\
&y'(1)-(-1)^{\sigma}y'(0)=0,\\
&y(1)-(-1)^{\sigma}y(0)=0
\end{aligned}$$

biçimindeki sınır değer problemini inceleyeceğiz, burada λ spektral parametre, $q(x)\in W_1^1(0,1)$kompleks değerli fonksiyon ve $\sigma=0,1$'dir. Problemin sınır koşulları $\sigma=0$ için periyodik, $\sigma=1$ için antiperiyodiktir. Periyodik ve antiperiyodik sınır koşulları regülerdir, fakat güçlü regüler değildir.

Tezde $q(x)$ fonksiyonu üzerine uygun koşullar koyarak, problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları için asimptotik formüller elde edeceğiz ve kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ uzaylarındaki tabanlığını inceleyeceğiz.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Güçlü regüler sınır koşullarına sahip bir sınır değer probleminin kök fonksiyonlar sisteminin L_2 uzayında taban oluşturduğu bilinmektedir [1,2,3]. Fakat kök fonksiyonlar sisteminin parantezli tabanlığını inceleyen çalışmaları bir kenara bırakırsak (bkz: [4]) güçlü regüler olmayan sınır koşullarına sahip adi diferansiyel operatörlerin kök fonksiyonlar sisteminin tabanlığı henüz yeterince incelenmemiştir. [2]'de kök fonksiyonlar sistemi L_2 uzayında taban oluşturmayan ve güçlü regüler olmayan sınır koşullarına sahip bir diferansiyel operatöre örnek verilmiştir.

1976'da N.I. Ionkin [5] bir homojen madde için klasik olmayan bir ısı iletim problemini araştırmıştır. Değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak problem aşağıdaki gibi bir sınır değer problemine indirgenmiştir:

$$-y'' = \lambda y, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = y'(1).$$

Buradaki sınır koşuları regülerdir fakat güçlü regüler değildir. Problemin ikinci özdeğerinden sonraki bütün özdeğerleri iki katlıdır ve ek fonksiyonların genel sayısı sonsuzdur. Buna rağmen, bu problemin özel bir yolla seçilen kök fonksiyonlar sisteminin $L_2(0,1)$ uzayında koşulsuz taban oluşturduğu ispatlanmıştır.

[6]'da $q(x) \in C^{(4)}[0,1]$ ve $q(1) \neq q(0)$ koşulları altında $l(y) = y'' + q(x)y$, $x \in (0,1)$ diferansiyel ifadesi ve periyodik-antiperiyodik sınır koşulları ile üretilen diferansiyel operatörün sonlu sayıdaki hariç tüm özdeğerlerinin basit olduğu ve bu operatörün kök fonksiyonlar sisteminin L_2 uzayında koşulsuz taban olduğu ispatlanmıştır. Belirtelim ki periyodik-antiperiyodik sınır koşulları regülerdir, fakat güçlü regüler değildir.

A. S. Makin [7-12], P. B. Djakov ve B. S. Mityagin [13-16] güçlü regüler olmayan sınır koşullarına sahip Sturm-Liouville operatörünün bazı spektral özelliklerini detaylı bir şekilde incelemişlerdir. [7]'de sınır koşulları regüler olan fakat güçlü regüler olmayan ve kök fonksiyonlar sistemi L_2 uzayında taban oluşturmayan ikinci dereceden diferansiyel operatörlerin geniş bir sınıfının varlığı ispatlanmıştır. [13]'te kök fonksiyonlar sisteminin taban oluşturmaması üzerine bazı kesin sonuçlar elde edilmiştir. Dahası, [13]'te istenen mertebeden türeve sahip potansiyel fonksiyonu içeren ve kök fonksiyonlar sistemi L_2 uzayında taban oluşturmayan diferansiyel operatörlere örnekler verilmiştir.

[17]'de F. Gesztesy ve V. Tkachenko periyodik-antiperiyodik sınır koşullarına sahip Schrödinger operatörünün kök fonksiyonlar sisteminin L_2'de Riesz tabanı oluşturması için gerek ve yeter koşullar elde etmişler; ayrıca, kök fonksiyonlar sistemin $L_p\left(1<p<\infty\right)$ uzayında tabanlığını araştırmışlardır.

[8]'de

$$\begin{cases} l\left(y\right)=y''+q\left(x\right)y, \\ y'\left(1\right)-\left(-1\right)^{\sigma}y'\left(0\right)+\gamma y\left(0\right)=0, \\ y\left(1\right)-\left(-1\right)^{\sigma}y\left(0\right)=0 \end{cases}$$

diferansiyel operatörünün spektral özellikleri incelenmiştir, burada $q(x)\in L_1(0,1)$ kompleks değerli bir fonksiyon, γ sıfırdan farklı bir kompleks sabit ve $\sigma=0,1$'dir. İspat edilmiştir ki, söz konusu durumda kök fonksiyonlar sistemi $L_2\left(0,1\right)$'de taban oluşturur. [14] ve [9]'da, $\gamma=0$ koşulu altında (periyodik-antiperiyodik sınır koşulları) yukardaki operatörün kök fonksiyonlar sisteminin tabanlığı için $q(x)$ potansiyelinin Fourier katsayılarının üzerine gerek ve yeter koşullar koyulmuştur (bkz: [18,19]). [14] ve [15]'te trigonometrik polinom biçiminde potansiyel fonksiyonlarına sahip bu tip operatörlerin kök fonksiyonlar sisteminin Riesz tabanlığı hakkında önemli sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, P. B. Djakov ve B. S. Mityagin [16] tabanlık için potansiyel fonksiyonunun (potansiyele herhangi bir sınıfta olma kısıtlaması koymadan) Fourier katsayıları üzerine genel bir kriter ispatlamışlardır. [21-24] makalelerinde de sınır koşulları regüler olan fakat güçlü regüler olmayan adi diferansiyel operatörlerin sınır değer problemlerinin spektral özellikleri incelenmiştir.

[25]'te N. B. Kerimov ve U. Kaya aşağıdaki problemi incelemişlerdir:

$$\begin{cases} y^{(iv)}+p_2\left(x\right)y''+p_1\left(x\right)y'+p_0\left(x\right)y=\lambda y, \qquad \left(0<x<1\right) \\ y'''\left(1\right)-\left(-1\right)^{\sigma}y'''\left(0\right)+\alpha_{3,2}y''\left(0\right)+\alpha_{3,1}y'\left(0\right)+\alpha_{3,0}y\left(0\right)=0, \\ y''\left(1\right)-\left(-1\right)^{\sigma}y''\left(0\right)+\alpha_{2,1}y'\left(0\right)+\alpha_{2,0}y\left(0\right)=0, \\ y'\left(1\right)-\left(-1\right)^{\sigma}y'\left(0\right)+\alpha_{1,0}y\left(0\right)=0, \\ y\left(1\right)-\left(-1\right)^{\sigma}y\left(0\right)=0. \end{cases}$$

N. B. Kerimov ve U. Kaya, $\alpha_{2,1}\neq\alpha_{3,2}+\alpha_{1,0}$ olduğunda, yukardaki problemin sonlu sayıdaki hariç özdeğerlerinin basit olduğunu ve kök fonksiyonlar sisteminin $L_p\left(0,1\right)$ $\left(1<p<\infty\right)$ uzayında taban olduğunu ispatlamışlardır. [26-27]'de N. B. Kerimov ve U. Kaya yukarıdaki problemde çözülmeyen durumlarda özdeğerlerin basitliğini elde etmiş ve kök fonksiyonlar sisteminin tabanlığını ispatlamışlardır.

[28]'de U. Kaya ve E. Kara Kuzu $\alpha \neq 0$ durumunda

$$\begin{cases} y^{(iv)} + q(x)y = \lambda y, \qquad (0 < x < 1) \\ y'''(1) - (-1)^{\sigma} y'''(0) + \alpha y(0) = 0, \\ y''(1) - (-1)^{\sigma} y''(0) = 0, \\ y'(1) - (-1)^{\sigma} y'(0) = 0, \\ y(1) - (-1)^{\sigma} y(0) = 0 \end{cases}$$

biçimindeki sınır değer probleminin özdeğerlerinin basitliğini elde etmiş ve kök fonksiyonlar sisteminin tabanlığını ispatlamışlardır.

Benzer yöntemlerle, [29]'da H. Güneş, N. B. Kerimov ve U. Kaya

$$\begin{cases} y^{(iv)} + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = \lambda y, \qquad (0 < x < 1) \\ y'''(1) - (-1)^{\sigma} y'''(0) = 0, \\ y''(1) - (-1)^{\sigma} y''(0) = 0, \\ y'(1) - (-1)^{\sigma} y'(0) = 0, \\ y(1) - (-1)^{\sigma} y(0) = 0 \end{cases}$$

biçimindeki periyodik-antiperiyodik sınır değer probleminin özdeğerlerinin basitliğini elde etmiş ve kök fonksiyonlar sisteminin tabanlığını ispatlamışlardır. Bu tez çalışması [25-29]'deki yöntemlerin geliştirilmesiyle elde edilmiştir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, bulgular kısmında kullanılacak bazı tanımlar ve temel teoremler verilecektir.

3.1. Lineer Diferansiyel Operatörün Tanımı ve Temel Özellikleri

3.1.1. Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1.1 [30]. $X \neq \varnothing$ bir küme, $+: X \times X \to X$ ve $\cdot : \mathbb{C} \times X \to X$ iki dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa X 'e bir lineer uzay veya vektör uzayı denir:

1. $\forall x, y \in X$, $x + y = y + x$,
2. $\forall x, y, z \in X$, $x + (y + z) = (x + y) + z$,
3. $\exists \theta \in X : \forall x \in X$, $x + \theta = x$,
4. $\forall x \in X$, $\exists y \in X : x + y = \theta$,
5. $\forall a \in \mathbb{C}$, $\forall x, y \in X$, $a(x + y) = ax + ay$,
6. $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\forall x \in X$, $(a + b)x = ax + bx$,
7. $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\forall x \in X$, $a(bx) = (ab)x$,
8. $\forall x \in X$, $1x = x$.

Tanım 3.1.1.2 [30]. X bir lineer uzay, $\varnothing \neq D \subset X$ olsun. $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\forall x, y \in D$: $ax + by \in D$ koşulu sağlanıyorsa D 'ye X 'in bir alt uzayı denir.

Tanım 3.1.1.3 [30]. X bir lineer uzay, $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ ve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ olsun. $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ elemanına $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemanlarının bir lineer kombinasyonu denir. $W \subset X$ olsun. W 'nun boştan farklı tüm sonlu alt kümelerinin elemanlarının bütün lineer kombinasyonlarının kümesi X 'in bir alt uzayıdır ve bu uzay $SpanW$ ile gösterilir. $SpanW$ alt uzayına W 'nun ürettiği veya gerdiği uzay denir.

Tanım 3.1.1.4 [30]. X bir lineer uzay ve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ olsun. "$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \theta \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$" koşulu sağlanıyorsa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemanlarına lineer bağımsız, aksi takdirde lineer bağımlı denir. $W \subset X$ sonsuz elemanlı olsun. W'nun her sonlu sayıda elemanı lineer bağımsız ise W'ya lineer bağımsızdır denir. Aksi halde lineer bağımlıdır denir.

Tanım 3.1.1.5 [30]. X ve Y lineer uzaylar $A: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\forall x, y \in X$, $A(ax + by) = aA(x) + bA(y)$ sağlanıyorsa A'ya bir lineer dönüşüm veya lineer operatör denir.

Tanım 3.1.1.6 [31]. X reel veya kompleks bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu uzay denir:

1. $\forall x \in X$: $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,
2. $\forall x, y \in X$: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
3. $\forall x \in X$: $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

$\rho(x, y) = \|x - y\|$ olsun. Bu durumda (X, ρ) bir metrik uzay olur. Bu metrik uzaya $\|\cdot\|$ normu ile üretilen metrik uzay denir.

Tanım 3.1.1.7 [31]. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay olsun. (X, ρ) tam metrik uzaysa $(X, \|\cdot\|)$'e Banach uzayı denir.

Tanım 3.1.1.8 [31]. X kompleks bir lineer uzay olsun. $(\cdot, \cdot): X \times X \to \mathbb{C}$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa $(X, (\cdot, \cdot))$ ikilisine bir iç çarpım uzayı denir:

1. $\forall x \in X$: $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,
2. $\forall x, y \in X$: $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
3. $\forall x, y, z \in X$: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$: $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$.

$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ olsun. Bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olur. Burdaki norma iç çarpımın ürettiği norm denir. Eğer $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayı ise $(X, (\cdot, \cdot))$ uzayına bir Hilbert uzayı denir.

Tanım 3.1.1.9 [32]. $(X,\|\cdot\|)$ bir Banach uzayı $\{e_k\}_{k=1}^{k=\infty}$, X 'de bir dizi olsun. Her $f \in X$ için

$$f=\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$$

olacak biçimde $\{c_k\}_{k=1}^{k=\infty}$ sayısal dizisi var ve tek ise $\{e_k\}_{k=1}^{k=\infty}$ dizisine X uzayının bir Schauder tabanı ya da sadece tabanı denir. $\{e_k\}_{k=1}^{k=\infty}$ sistemi X uzayının bir tabanı olsun. $\mathbb{N}$ 'nin her bir θ permutasyonu için $\left\{e_{\theta(k)}\right\}_{k=1}^{k=\infty}$ sistemi de X 'in bir tabanı ise $\{e_k\}_{k=1}^{k=\infty}$ sistemine bir koşulsuz taban; aksi durumda koşullu taban denir.

Teorem 3.1.1.1 [33]. Rouche Teoremi: f ve g fonksiyonları $\mathbb{C}$ 'nin bir B bölgesinde analitik fonksiyonlar olsunlar. Eğer B bölgesinin sınırı üzerinde $|f(z)|>|g(z)|$ koşulu sağlanıyorsa f ile $f+g$ fonksiyonlarının sıfır yerlerinin sayısı aynıdır.

Tanım 3.1.1.10 [34]. X bir Hilbert uzayı, $\{x_n\} \subset X$ bir dizi olsun. Eğer

$$0<\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2|x_n|^2<+\infty$$

durumunda

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n=\theta$$

sağlanmıyorsa $\{x_n\}$ dizisine bir ω-lineer bağımsız sistem denir.

Tanım 3.1.1.11 [34]. X bir Hilbert uzayı, $\{x_n\},\{y_n\} \subset X$ iki dizi olsun. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n-y_n\|^2<+\infty$$

sağlanıyorsa $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ 'e karesel yakındır denir.

Teorem 3.1.1.2 [34]. Bir Riesz tabanına karesel yakın ω-lineer bağımsız sistem de Riesz tabanıdır.

Teorem 3.1.1.3 [35]. $\sigma=0$ ve $\sigma=1$ için $\left\{e^{(2n-\sigma)\pi ix}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ sistemi, her $p\in(1,\infty)$ için $L_p(0,1)$ uzayının tabanıdır.

Teorem 3.1.1.4 [36]. Bir X Banach uzayında tam ve minimal bir $\{x_n\}$ sisteminin taban olması için gerek ve yeter koşul her $N\in\mathbb{N}$ ve her $x\in X$ için

$$\left\|\sum_{n=1}^{N}(x,y_n)x_n\right\|\leq M\,\|x\|$$

olacak biçimde bir $M>0$ sabitinin bulunmasıdır. Buradaki $\{y_n\}$ sistemi $\{x_n\}$'e biortogonal olan sistemdir.

Teorem 3.1.1.5 [37]. Riesz Teoremi: $\{x_n\}$, $L_2(a,b)$'de ortonormal ve düzgün sınırlı bir sistem, $1<p\leq 2$ olmak üzere, $f\in L_p(a,b)$ ve $\{c_n\}$ dizisi f 'in Fourier katsayıları olsun. Bu takdirde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ eşitliğini sağlayan q sayısı için

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^q\right)^{1/q}\leq M\,\|f\|_p$$

olacak şekilde bir $M>0$ sabiti vardır.

3.1.2. Lineer Diferansiyel İfade

Tanım 3.1.2.1 [30].

$$l(y)=p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y,\quad x\in[a,b]$$

şeklindeki bir ifadeye lineer diferansiyel ifade denir. $p_0,p_1,\ldots,p_n$ fonksiyonlarına lineer diferansiyel ifadenin katsayı fonksiyonları, n sayısına da lineer diferansiyel ifadenin mertebesi adı verilir.

Genelde, $\frac{1}{p_0(x)},p_1(x),\ldots,p_n(x)$ fonksiyonlarının $[a,b]$ aralığında sürekli olduğu kabul edilir. Gerektiğinde katsayı fonksiyonları üzerine daha az veya daha çok koşul yükleyeceğiz. Her bir $y \in C^{(n)}[a,b]$ fonksiyonu için $l(y)$ $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyonu temsil eder.

3.1.3. Sınır Koşulları

$y_a = y(a)$, $y'_a = y'(a)$, $y''_a = y''(a)$, . . . , $y_a^{(n-1)} = y^{(n-1)}(a)$ ve $y_b = y(b)$, $y'_b = y'(b)$, $y''_b = y''(b)$, . . . , $y_b^{(n-1)} = y^{(n-1)}(b)$ olarak gösterelim. $U(y)$ bu değişkenlere göre lineer bir ifade olsun:

$$U(y) = \alpha_0 y_a + \alpha_1 y'_a + \cdots + \alpha_{n-1} y_a^{(n-1)} + \beta_0 y_b + \beta_1 y'_b + \cdots + \beta_{n-1} y_b^{(n-1)} .$$

Burada $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1} \in \mathbb{C}$'dir. Eğer birkaç tane $U_\nu(y) = 0,\ \nu = \overline{1,m}$ ifadesi açıkça belirtilmiş ve $y \in C^{(n)}[a,b]$ fonksiyonları üzerine

$$U_\nu(y) = 0 \quad \left(\nu = \overline{1,m}\right) \tag{3.1}$$

koşulları konmuşsa bu koşullara $y \in C^{(n)}[a,b]$ üzerine konulan sınır koşulları denir.

(3.1) ile belirtilmiş sınır koşullarını sağlayan tüm $y \in C^{(n)}[a,b]$ fonksiyonlarının kümesini D ile gösterelim. Açıktır ki D, $C^{(n)}[a,b]$'nin alt uzayıdır. (3.1) koşullarının tüm koşullarının tüm katsayıları sıfırsa veya bu koşullar konmamışsa $D = C^{(n)}[a,b]$'dir.

Tanım 3.1.3.1 [30]. $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve (3.1) ile tanımlı özel bir D alt uzay verilsin. Her bir $y \in D$ fonksiyonuna bir $u = l(y)$ fonksiyonunu karşılık getirelim. Bu, tanım bölgesi D olan lineer bir operatör tanımlar. Bu operatörü L ile göstereceğiz:

$$u = Ly .$$

L operatörüne $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve (3.1) sınır koşullarıyla üretilen diferansiyel operatör denir.

(3.1) sınır koşullarından bazılarının diğerlerinin lineer kombinasyonu olarak yazılabildiği durumlar var olabilir. Bu durumda m tane sınır koşulundan lineer bağımlı olanlar atılır. Biz bundan sonra (3.1) sınır koşullarının lineer bağımsız olduğunu, yani katsayılarından oluşan matrisin rankının m olduğunu varsayacağız.

3.1.4. Lagrange Formülü ve Eşlenik Diferansiyel İfade

$$l(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_n(x)y, \quad x \in [a,b]$$

diferansiyel ifadesindeki katsayı fonksiyonları üzerine $p_k(x) \in C^{(n-k)}[a,b]$ koşulunu koyalım. $y, z \in C^{(n)}[a,b]$ olsun. k kez kısmi integrasyon ile

$$\begin{aligned}\int_a^b p_{n-k}\bar{z}y^{(k)}dx &= \left[p_{n-k}\bar{z}y^{(k-1)} - \left(p_{n-k}\bar{z}\right)' y^{(k-2)} + \cdots + (-1)^{k-1}\left(p_{n-k}\bar{z}\right)^{(k-1)} y \right]_a^b \\ &\quad + (-1)^k \int_a^b y\left(p_{n-k}\bar{z}\right)^{(k)} dx\end{aligned} \tag{3.2}$$

elde ederiz. (3.2)'de $k = \overline{0,n}$ alıp elde edilen denklemleri taraf tarafa toplarsak

$$\int_a^b l(y)\bar{z}dx = P(\eta,\zeta) + \int_a^b y\overline{l^*(z)}dx \tag{3.3}$$

elde ederiz. Burada

$$l^*(z) = (-1)^n\left(\overline{p_0}z\right)^{(n)} + (-1)^{n-1}\left(\overline{p_1}z\right)^{(n-1)} + \cdots + \overline{p_n}z \tag{3.4}$$

ve $P(\eta,\zeta)$

$$\begin{aligned}\eta &= \left(y_a, y_a', \ldots, y_a^{(n-1)}, y_b, y_b', \ldots, y_b^{(n-1)}\right), \\ \zeta &= \left(z_a, z_a', \ldots, z_a^{(n-1)}, z_b, z_b', \ldots, z_b^{(n-1)}\right)\end{aligned}$$

değişkenlerine bağlı bilineer bir ifadedir. (3.4) ile tanımlı $l^*(z)$ diferansiyel ifadesine $l(y)$ diferansiyel ifadesinin eşleniği ve (3.3) formülüne Lagrange formülü denir.

3.1.5. Eşlenik Sınır Koşulları ve Eşlenik Operatör

$U_1, U_2, \ldots, U_m$ $y_a, y_a', \ldots, y_a^{(n-1)}, y_b, y_b', \ldots, y_b^{(n-1)}$ değişkenlerine bağlı lineer bağımsız ifadeler olsunlar. $m < 2n$ durumunda, $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ ifadelerinden oluşan $2n$ sayıda lineer bağımsız ifade elde etmek için $U_{m+1}, \ldots, U_{2n}$ ifadelerini ekleyelim. Bu ifadeler lineer bağımsız olduğundan $y_a, y_a', \ldots, y_a^{(n-1)}, y_b, y_b', \ldots, y_b^{(n-1)}$ değişkenleri $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ ifadelerinin lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir.

Lagrange formülünde bu ifadeleri yerine yazarsak $P(\eta,\zeta)$ $U_1,U_2,\ldots,U_{2n}$ değişkenlerine bağlı olur. Ayrıca $P(\eta,\zeta)$'nın $V_1,V_2,\ldots,V_{2n}$ ile göstereceğimiz katsayıları $\overline{z_a}, \overline{z'_a},\ldots,\overline{z_a^{(n-1)}}, \overline{z_b}, \overline{z'_b},\ldots,\overline{z_b^{(n-1)}}$ değişkenlerine bağlı lineer bağımsız homojen ifadelerdir. O halde Lagrange formülü

$$\int_a^b l(y)\overline{z}dx = U_1V_{2n} + U_2V_{2n-1} + \cdots + U_{2n}V_1 + \int_a^b y\overline{l^*(z)}dx \tag{3.5}$$

halini alır.

$$V_1 = 0,\ V_2 = 0,\ldots,V_{2n-m} = 0 \tag{3.6}$$

sınır koşullarına (ve buna denk tüm sınır koşullarına)

$$U_1 = 0,\ U_2 = 0,\ldots,U_m = 0 \tag{3.7}$$

sınır koşullarının eşlenik sınır koşulları denir. L, $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve (3.7) sınır koşullarıyla belirlenmiş bir operatör olsun. $l^*(y)$ ve (3.6) ile belirlenmiş operatöre L operatörünün eşlenik operatörü denir ve L^* ile gösterilir.

(3.5) - (3.7)'den

$$\int_a^b L(y)\overline{z}dx = \int_a^b y\overline{L^*(z)}dx$$

veya

$$(Ly,z) = (y,L^*z)$$

yazılabilir.

3.2. Bir Diferansiyel Operatörün Özdeğer ve Özfonksiyonları

3.2.1. Özdeğer ve Özfonksiyonların Tanımı

L, $n.$ mertebeden bir diferansiyel operatör, $\lambda\in\mathbb{C}$ olsun. Eğer

$$Ly = \lambda y$$

denklemi sıfırdan farklı bir y fonksiyonu için sağlanıyorsa λ sayısına L operatörünün bir özdeğeri, y fonksiyonuna da λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon denir. Varsayalım ki L operatörü $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve

$$U_1(y)=0,\ldots,U_n(y)=0 \tag{3.8}$$

sınır koşullarından oluşmuştur. O halde y özfonksiyonu L operatörünün tanım kümesine ait olmak zorundadır. Yani (3.8) sınır koşullarını sağlamalıdır. Böylece, bir L operatörünün özdeğerleri λ 'nın öyle değerleridir ki bu değerlerde

$$l(y)=\lambda y, \quad U_\nu(y)=0 \quad \left(\nu=\overline{1,n}\right) \tag{3.9}$$

homojen sınır değer probleminin sıfıra özdeş olmayan çözümü vardır. Sıfıra özdeş olmayan çözüm λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyondur.

Aynı λ özdeğerine ait özfonksiyonların bir lineer kombinasyonu yine λ 'ya ait bir özfonksiyondur. Yani $Ly_1=\lambda y_1$ ve $Ly_2=\lambda y_2$ ise her $c_1,c_2\in\mathbb{C}$ için $L(c_1y_1+c_2y_2)=\lambda(c_1y_1+c_2y_2)$ 'dir.

$l(y)=\lambda y$ homojen denklemi verilen bir λ parametresi için n 'den çok lineer bağımsız çözüme sahip değildir. Belirtelim ki aynı özdeğere ait olan tüm özfonksiyonların kümesi boyutu n 'den büyük olmayan bir uzay belirler. Bu uzayın boyutu verilen λ özdeğeri için (3.9) probleminin lineer bağımsız çözümlerinin sayısıdır. Bu sayıya λ özdeğerinin geometrik katlılığı denir.

$$y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda),\ldots,y_n(x,\lambda) \tag{3.10}$$

fonksiyonları

$$y_j^{(\nu-1)}(a,\lambda)=\delta_{j,\nu} \quad \left(j,\nu=\overline{1,n}\right)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümlerin temel sistemi olsun. Belirtelim ki, $[a,b]$ aralığında sabitlenmiş her x için (3.10) fonksiyonları λ parametresinin tam fonksiyonlarıdır.

Bir λ sayısının L operatörünün özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul en az biri sıfır olmayan öyle $c_1,c_2,...,c_n\in\mathbb{C}$ sayılarının var olmasıdır ki $y(x,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}c_jy_j(x,\lambda)$ fonksiyonu (3.8) sınır koşullarını sağlar. Başka bir ifadeyle λ sayısının L operatörünün bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{cases} c_1U_1(y_1)+c_2U_1(y_2)+\cdots+c_nU_1(y_n)=0, \\ c_1U_2(y_1)+c_2U_2(y_2)+\cdots+c_nU_2(y_n)=0, \\ \vdots \\ c_1U_n(y_1)+c_2U_n(y_2)+\cdots+c_nU_n(y_n)=0 \end{cases}$$

homojen lineer denklemler sisteminin en az biri sıfır olmayan $c_1,c_2,...,c_n\in\mathbb{C}$ çözümünün var olmasıdır. O halde L operatörünün özdeğerleri

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \cdots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \cdots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \cdots & U_n(y_n) \end{vmatrix}$$

biçiminde tanımlanan tam fonksiyonun sıfırlarıdır.

1. $\Delta(\lambda)\equiv 0$ ise her $\lambda\in\mathbb{C}$ sayısı L operatörünün özdeğeridir.

2. $\Delta(\lambda)\not\equiv 0$ ise L operatörünün özdeğerinin kümesi en fazla sayılabilir sayıda elemana sahiptir ve sonlu limit noktasına sahip değildir.

Biz bu çalışmada "2" durumu ile ilgileneceğiz. λ_0 sayısı L operatörünün bir özdeğeri olsun. O halde bu sayı $\Delta(\lambda)$ tam fonksiyonunun bir sıfır yeridir. Bu sebeple, $\Delta(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k F(\lambda)$ olarak yazılabilir. Burada F bir tam fonksiyon, $F(\lambda_0)\neq 0$ ve $k\in\mathbb{N}$ 'dir. Bu biçimde tanımlanan k sayısına λ_0 özdeğerinin cebirsel katlılığı denir. $k=1$ durumunda λ_0'a basit özdeğer denir. λ_0 özdeğerinin geometrik katlılığına m diyelim. Gösterilebilir ki $m\leq k$'dır. Daha açık bir ifade ile, λ_0 özdeğerine karşılık gelen lineer bağımsız özfonksiyonların sayısı bu özdeğerin cebirsel katlılığını geçemez.

3.2.2. Ek Fonksiyonlar

λ_0 sayısı (3.9) probleminin bir özdeğeri, $\varphi(x)$ bu özdeğere karşılık gelen bir özfonksiyon olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa $\psi_1(x),\psi_2(x),\ldots,\psi_k(x)$ fonksiyonlarına $\varphi(x)$ özfonksiyonlarının ek fonksiyonları denir:

$$l(\psi_i)=\lambda_0\psi_i+\psi_{i-1} \quad \left(i=\overline{1,k}\right),$$

$$U_\nu(\psi_i)=0 \quad \left(i=\overline{1,k},\ \ \nu=\overline{1,n}\right),$$

burada $\psi_0(x)=\varphi(x)$'tir.

L lineer diferansiyel operatörü verilsin. Varsayalım ki bu operatörün özdeğerleri sayılabilir sayıdadır. O halde bu özdeğerleri $\{\lambda_j\}_{j=1}^{j=\infty}$ olarak gösterebiliriz. λ_j özdeğerinin cebirsel katlılığını m_j ile, λ_j'ya karşılık gelen lineer bağımsız özfonksiyonları da $\varphi_{j,1}(x), \varphi_{j,2}(x), \ldots, \varphi_{j,p_j}(x)$ ile gösterelim. Açıktır ki $p_j \le m_j$'dır. Gösterilebilir ki $E = \{\varphi_{j,p}(x) \mid j \in \mathbb{N},\, 1 \le p \le p_j\}$ lineer bağımsızdır. E'ye L diferansiyel operatörünün özfonksiyonlar sistemi denir.

$\varphi_{j,p,1}(x), \varphi_{j,p,2}(x), \ldots, \varphi_{j,p,m_{j,p}-1}(x)$ fonksiyonları $\varphi_{j,p}$ $\left(j \in \mathbb{N},\, 1 \le p \le p_j\right)$ özfonksiyonunun ek fonksiyonları olsunlar. Bu takdirde

$$m_{j,1} + m_{j,2} + \cdots + m_{j,p_j} = m_j$$

dir. Yani λ_j özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonlar ve onlara karşılık gelen ek fonksiyonların toplam sayısı λ_j'nin cebirsel katlılığına eşittir. Gösterilebilir ki $R = \{\varphi_{j,p,i}(x) \mid j \in \mathbb{N},\, 1 \le p \le p_j,\, 0 \le i \le m_{j,p} - 1\}$ lineer bağımsızdır. Burada $\varphi_{j,p,0}(x) = \varphi_{j,p}(x)$'tir. R'ye L diferansiyel operatörünün kök fonksiyonlar sistemi denir.

3.3. Özdeğer ve Özfonksiyonların Asimptotik Davranışları

3.3.1. Problemin İfadesi

Keyfi bir $L(y)$ diferansiyel operatörünün özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik gösterimlerini elde etmek için ilk olarak $|\lambda|$'nın büyük değerlerinde $l(y) = \lambda y$ denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışlarını inceleyelim. Daha sonra bu yaklaşımları $\Delta = 0$ denkleminde yerine yazarak özdeğerler için asimptotik ifadeler elde edelim. Önce $\lambda = -\rho^n$ kabul edelim. O halde $l(y) = \lambda y$ denklemi

$$l(y) + \rho^n y = 0$$

halini, daha detaylı olarak

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x)\, y + \rho^n y = 0 \tag{3.11}$$

halini alır (basitlik için $p_0(x) \equiv 1$ alınır. $p_0(x) \not\equiv 1$ durumu $p_0(x) \equiv 1$ durumuna indirgenebilir). Genelliği kaybetmeden $p_1(x) \equiv 0$ kabul edebiliriz. Eğer $p_1(x) \not\equiv 0$ ise

$$y = y.e^{-\frac{1}{n}\int_a^x p_1(t)dt}$$

dönüşümü yapılarak (3.11) denklemi

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_2(x)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n(x)y + \rho^n y = 0$$

biçimine dönüştürülür. Burada $p_2(x), p_3(x), \ldots, p_n(x)$, $[a,b]$'de x'in sürekli fonksiyonlarıdır; ρ ise değişmemiştir.

Yine genelliği kaybetmeden $[a,b]$ aralığı yerine $[0,1]$ alabiliriz. Çünkü

$$x = a + (b-a)t,\ t \in [0,1]$$

dönüşümü ile $[0,1]$ aralığından $[a,b]$ aralığına geçiş yapılabilir.

3.3.2. *S* ve *T* Bölgeleri

Kompleks ρ - bölgesini $2n$ tane S_k $\left(k = \overline{0, 2n-1}\right)$ bölgesine ayıralım:

$$S_k = \left\{ \rho \in \mathbb{C} \mid \frac{k\pi}{n} \le \arg \rho \le \frac{(k+1)\pi}{n} \right\}. \tag{3.12}$$

$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ile $\omega^n + 1 = 0$ denkleminin tüm farklı köklerini gösterelim (-1'in kökleri).

Teorem 3.3.2.1 [30]. Herhangi bir S_k $(0 \le k \le 2n-1)$ bölgesi alalım ve k sayısını sabitleyelim. Bu durumda $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sayıları $\forall \rho \in S_k$ için

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_1) \le \operatorname{Re}(\rho\omega_2) \le \cdots \le \operatorname{Re}(\rho\omega_n) \tag{3.13}$$

olacak biçimde sıralanabilir.

Şimdi $\rho \to \rho - c$ ötelemesi yaparak S_k bölgelerini daha genel bölgelere dönüştürelim. Burada c herhangi bir kompleks sayıdır. Bu yeni bölgeler köşeleri $\rho = -c$ noktasına yerleşen bölgelerdir. Bu bölgeleri T_k $\left(k = \overline{0, 2n-1}\right)$ ile gösterelim. Bu bölgeler S_k bölgelerinin ötelemeleri olduğundan $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sayılarının öyle bir dizilişi vardır ki $\forall \rho \in T_k$ için

$$\operatorname{Re}((\rho + c)\omega_1) \le \operatorname{Re}((\rho + c)\omega_2) \le \cdots \le \operatorname{Re}((\rho + c)\omega_n) \tag{3.14}$$

sağlanır.

Bundan sonra ρ değişkenini sabit bir T_k bölgesinin elemanı olarak kabul edeceğiz. Ayrıca S_k ve T_k yerine S ve T kullanacağız. $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ sayılarının sırasını (3.14) eşitsizliğini sağlayacak şekilde kabul edeceğiz.

3.3.3. $l(y) + \rho^n y = 0$ Denkleminin İntegro-Diferansiyel Denkleme İndirgenmesi

$$l(y) + \rho^n y = 0 \tag{3.15}$$

denklemini ele alalım ve

$$m(y) = p_2(x) y^{(n-2)} + \cdots + p_n(x) y \tag{3.16}$$

yazalım. O halde (3.15) denklemi

$$y^{(n)} + \rho^n y = -m(y) \tag{3.17}$$

halini alır.

$y^{(n)} + \rho^n y = 0$ homojen diferansiyel denkleminin $\rho \neq 0$ için temel çözüm sistemi $e^{\rho\omega_1 x}, e^{\rho\omega_2 x}, \ldots, e^{\rho\omega_n x}$'tir. (3.17) denklemini homojen olmayan kısmı $-m(y)$ olan homojen olmayan denklem gibi düşünürsek sabitlerin değişimi yöntemi ile y genel çözümünü

$$y = c_1 e^{\rho\omega_1 x} + \cdots + c_n e^{\rho\omega_n x} + \int_0^x \frac{\omega_1 e^{\rho\omega_1(x-\xi)} + \cdots + \omega_n e^{\rho\omega_n(x-\xi)}}{n\rho^{n-1}} m_\xi(y)\, d\xi \tag{3.18}$$

formunda buluruz. Burada $m_\xi(y)$, $x = \xi$ noktasında $m(y)$'nin değeridir. (3.17) ve (3.18) denklemleri denktir. Yani, keyfi $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sayıları için (3.18)'in bir çözümü (3.17)'nin de bir çözümüdür. Tersine (3.17)'nin herhangi bir çözümü için öyle $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sayıları vardır ki (3.18) sağlanır. Burada $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sabitleri ρ'ya bağlı olabilir. $1 \le k \le n$ olmak üzere bir k sayısını sabitleyelim.

$$c'_j = \begin{cases} c_j, & j = 1, \ldots, k \\ c_j + \int_0^1 \dfrac{\omega_j e^{-\rho\omega_j \xi}}{n\rho^{n-1}} m_\xi(y)\, d\xi, & j = (k+1), \ldots, n \end{cases} \tag{3.19}$$

yazarsak

$$
\begin{aligned}
y = c_1' e^{\rho\omega_1 x} + \cdots + c_n' e^{\rho\omega_n x} + \frac{1}{n\rho^{n-1}} \int_0^x K_1(x,\xi,\rho) m_\xi(y) d\xi \\
- \frac{1}{n\rho^{n-1}} \int_x^1 K_2(x,\xi,\rho) m_\xi(y) d\xi
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

elde ederiz. Burada

$$
K_1(x,\xi,\rho) = \sum_{\alpha=1}^{k} \omega_\alpha e^{\rho\omega_\alpha(x-\xi)}, \qquad K_2(x,\xi,\rho) = \sum_{\alpha=k+1}^{n} \omega_\alpha e^{\rho\omega_\alpha(x-\xi)} \tag{3.21}
$$

dir.

3.3.4. $l(y)+\rho^n y=0$ Denkleminin Çözümleri için Asimptotik Formüller

Lemma 3.3.4.1 [30].

$$
y_i(x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{r} \int_a^b A_{ij}(x,\xi,\lambda) y_j(\xi) d\xi \quad \left(i=\overline{1,r}\right)
$$

integral denklemi aşağıdaki koşulları sağlasın:

1. $f_i(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında süreklidir.

2. Herhangi $\xi \in [a,b]$ için $A_{ij}(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonları $[a,\xi)$ ve $(\xi,b]$ aralıklarında süreklidir.

3. Herhangi $x,\xi \in [a,b]$ için $A_{ij}(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonları $\mathbb{C}$ 'nin sınırsız bir alt bölgesinde λ 'nın analitik fonksiyonlarıdır.

4. $\exists R, C > 0$: $|\lambda| > R$ koşulunu sağlayan her λ ve her $x,\xi \in [a,b]$ için

$$
\left|A_{ij}(x,\xi,\lambda)\right| \le \frac{C}{|\lambda|}
$$

sağlanır. Bu takdirde $\exists R_0 > 0$: $|\lambda| \ge R_0$ bölgesinde integral denklemler sisteminin bir ve yalnız bir

$$
y_i(x) = y_i(x,\lambda) \quad \left(i=\overline{1,r}\right)
$$

çözümü vardır ve bu çözümler $|\lambda| \ge R_0$ bölgesinde analitiktir. Ayrıca $i=\overline{1,r}$ için

$$
y_i(x,\lambda) = f_i(x) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (\lambda \to \infty)
$$

sağlanır.

Lemma 3.3.4.2 [30]. Öyle $C>0$ sayısı vardır ki her $\rho \in T$ ve $\nu = 0,1,2,\ldots$ için aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur:

$$\left|\frac{\partial^{\nu}}{\partial x^{\nu}} K_1(x,\xi,\rho)\right| \le C|\rho|^{\nu} k \left|e^{\rho\omega_k(x-\xi)}\right| \qquad (0 \le \xi \le x \le 1),$$

$$\left|\frac{\partial^{\nu}}{\partial x^{\nu}} K_2(x,\xi,\rho)\right| \le C|\rho|^{\nu} (n-k) \left|e^{\rho\omega_k(x-\xi)}\right| \qquad (0 \le x \le \xi \le 1).$$

Teorem 3.3.4.1 [30]. $p_2,\cdots,p_n$ fonksiyonları $[0,1]$ aralığında sürekli ise

$$y^{(n)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y + \rho^n y = 0$$

denkleminin her bir T bölgesinde n lineer bağımsız $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ çözümü vardır. Bu çözümler $|\rho|$'nun yeterince büyük değerlerinde T bölgesinde analitiktir. Ayrıca $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ çözümleri ve onların türevleri aşağıdaki asimptotik gösterimlere sahiptir:

$$\begin{aligned} y_k &= e^{\rho\omega_k x}\left\{1+O\left(\rho^{-1}\right)\right\}, \\ \frac{dy_k}{dx} &= \rho e^{\rho\omega_k x}\left\{\omega_k + O\left(\rho^{-1}\right)\right\}, \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1}y_k}{dx^{n-1}} &= \rho^{n-1} e^{\rho\omega_k x}\left\{\omega_k^{n-1} + O\left(\rho^{-1}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

İspat: (3.20) denkleminde $c_{\nu}' = 0 \quad (\nu \ne k)$, $c_k' = 1$ alalım ve bu denklemin y_k çözümünü araştıralım:

$$\begin{aligned} y_k = e^{\rho\omega_k x} &+ \frac{1}{n\rho^{n-1}} \int_0^x K_1(x,\xi,\rho) m_{\xi}(y_k) d\xi \\ &- \frac{1}{n\rho^{n-1}} \int_x^1 K_2(x,\xi,\rho) m_{\xi}(y_k) d\xi. \end{aligned} \tag{3.23}$$

(3.23) denkleminin x'e göre $(n-1)$. mertebeye kadar türevini alıp $\omega_1^{\nu} + \omega_2^{\nu} + \cdots + \omega_n^{\nu} = 0$ $(\nu = 1,2,\ldots,n-1)$ eşitliğini kullanırsak orijinal denklemle birlikte aşağıdaki denklemler sistemini elde ederiz:

$$\frac{d^\nu y_k}{dx^\nu}=\rho^\nu\omega_k^\nu e^{\rho\omega_k x}+\frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_0^x\frac{\partial^\nu K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu}m_\xi(y_k)d\xi$$
$$-\frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_x^1\frac{\partial^\nu K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu}m_\xi(y_k)d\xi\quad(\nu=0,1,2,\ldots,n-1). \tag{3.24}$$

(3.24) denkleminde

$$\frac{d^\nu y_k}{dx^\nu}=\rho^\nu e^{\rho\omega_k x}z_{k,\nu} \tag{3.25}$$

yazarsak $z_{k,\nu}=z_{k,\nu}(x,\rho)$ fonksiyonları için

$$z_{k,\nu}(x,\rho)=\omega_k^\nu+\frac{1}{n\rho}\int_0^x e^{-\rho\omega_k(x-\xi)}\rho^{-\nu}\frac{\partial^\nu K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu}\times$$
$$\left\{p_2(\xi)z_{k,n-2}(\xi,\rho)+\frac{1}{\rho}p_3(\xi)z_{k,n-3}(\xi,\rho)+\cdots+\frac{1}{\rho^{n-2}}p_n(\xi)z_{k,0}(\xi,\rho)\right\}d\xi$$
$$-\frac{1}{n\rho}\int_x^1 e^{-\rho\omega_k(x-\xi)}\rho^{-\nu}\frac{\partial^\nu K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu}\times$$
$$\left\{p_2(\xi)z_{k,n-2}(\xi,\rho)+\frac{1}{\rho}p_3(\xi)z_{k,n-3}(\xi,\rho)+\cdots+\frac{1}{\rho^{n-2}}p_n(\xi)z_{k,0}(\xi,\rho)\right\}d\xi \tag{3.26}$$

denklemler sistemini elde ederiz.

$$K_{k,\nu,\alpha}(x,\xi,\rho)=\begin{cases}\frac{1}{n}e^{-\rho\omega_k(x-\xi)}\rho^{-\nu-\alpha+2}\frac{\partial^\nu K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu}p_\alpha(\xi), & \xi<x\\ -\frac{1}{n}e^{-\rho\omega_k(x-\xi)}\rho^{-\nu-\alpha+2}\frac{\partial^\nu K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu}p_\alpha(\xi), & \xi>x\end{cases}$$
$$\nu=0,1,2,\ldots,(n-1);\qquad \alpha=2,3,\ldots,n$$

ifadesini (3.26)'da yerine yazarsak aşağıdaki denklemler sistemini elde ederiz:

$$z_{k,\nu}(x,\rho)=\omega_k^\nu+\frac{1}{\rho}\sum_{\alpha=2}^{n}\int_0^1 K_{k,\nu,\alpha}(x,\xi,\rho)z_{k,n-\alpha}(\xi,\rho)d\xi. \tag{3.27}$$

Sabit bir k için, (3.27)'de $\nu=0,1,2,\ldots,(n-1)$ değerleri yazılarak n denklemden oluşan integral denklemler sistemi elde edilir. Lemma 3.3.4.2'den $K_{k,\nu,\alpha}(x,\xi,\rho)$ fonksiyonlarının $0\le x,\xi\le 1$ ve T bölgesindeki mutlak değerce yeterince büyük ρ 'lar için sınırlı olduğu görülür. O halde Lemma 3.3.4.1'in bütün koşulları sağlanır. Bu lemma ile, (3.27) integral denklemler sisteminin bir ve yalnız bir $z_{k,\nu}=z_{k,\nu}(x,\rho)$ çözümüne sahip olduğu sonucuna varılır. Burada mutlak değerce yeterince büyük ρ 'lar için $z_{k,\nu}(x,\rho)$ fonksiyonları analitiktir ve aşağıdaki asimptotik gösterime sahiptir:

$$z_{k,\nu}(x,\rho)=\omega_k^{\nu}+O\left(\rho^{-1}\right). \tag{3.28}$$

Buradan ve (3.25)'ten (3.22) elde edilir. Ayrıca (3.22) formülleri kullanılarak mutlak değerce yeterince büyük ρ 'lar için $y_k(x,\rho)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olduğu kolayca görülür.

(3.15) denkleminin (3.23)'ü sağlayan $\{y_k(x,\rho)\}_{k=1}^{k=n}$ çözümlerinin varlığını gösterirsek Teorem 3.3.4.1'in ispatı bitmiş olur. Bunun için keyfi seçilmiş (ρ 'dan bağımsız) c_j' sayıları için (3.15) denkleminin çözümünün varlığını göstermeliyiz.

(3.19) denklemi $(c_1,c_2,\ldots,c_n)\to(c_1',c_2',\ldots,c_n')$ biçiminde bir lineer dönüşüm oluşturur (Hatırlatalım ki (3.19)'un sağ tarafında y ve buna bağlı olarak $m_\xi(y)$ lineer olarak $c_1,c_2,\ldots,c_n$ 'lere bağlıdır). Bu yüzden $|\rho|$'nun büyük değerlerinde (3.19) ile belirlenen matris dönüşümünün determinantının sıfırdan farklı olduğunu göstermek yeterlidir $(\rho\in T)$. Bu sayede (3.19) denklemini keyfi belirlenmiş c_j' sayıları için çözüp c_j sayılarını elde edebiliriz. (3.15)'in y çözümü (yani bulunan c_j sayılarına karşılık gelen (3.18)'in çözümü) aranan çözüm olacaktır. Varsayalım ki $\rho\in T$ için (3.19) dönüşümünün determinantı sıfırdır. O halde $c_1'=c_2'=\cdots=c_n'=0$ için en az biri sıfır olmayan $c_1,c_2,\ldots,c_n$ çözümü vardır. Bu çözüme karşılık gelen y fonksiyonu aynı zamanda

$$y=\frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_0^x K_1(x,\xi,\rho)m_\xi(y)\,d\xi-\frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_x^1 K_2(x,\xi,\rho)m_\xi(y)\,d\xi \tag{3.29}$$

denkleminin de sıfırdan farklı çözümüdür. (3.29) denklemi (3.20) denkleminde $c_1'=c_2'=\cdots=c_n'=0$ yazılarak elde edilmiştir. Yeterince büyük $|\rho|$'lar için bunun imkansız olduğunu göstereceğiz. (3.29) denkleminin $(n-1)$. mertebeye kadar türevini alıp

$$z_\nu=\frac{d^\nu y}{dx^\nu}\left(\rho^\nu e^{\rho\omega_k x}\right)^{-1}\quad(\nu=0,1,2,\ldots,n-1)$$

yazarsak z_ν fonksiyonları için

$$
\begin{aligned}
&z_\nu(x,\rho)=\frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_0^x \rho^{-\nu}e^{-\rho\omega_k(x-\xi)}\frac{\partial^\nu K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu}\times\\
&\left\{\rho^{n-2}p_2(\xi)z_{k,n-2}(\xi,\rho)+\cdots+p_n(\xi)z_{k,0}(\xi,\rho)\right\}d\xi\\
&-\frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_x^1 \rho^{-\nu}e^{-\rho\omega_k(x-\xi)}\frac{\partial^\nu K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu}\times\\
&\left\{\rho^{n-2}p_2(\xi)z_{k,n-2}(\xi,\rho)+\cdots+p_n(\xi)z_{k,0}(\xi,\rho)\right\}d\xi
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

eşitliklerini elde ederiz.

$$
m(\rho)=\max_{\substack{0\le\nu\le n-1\\0\le x\le 1}}\left|z_\nu(x,\rho)\right|
$$

olsun. (3.30)’un sağ tarafında Lemma 3.3.4.2’yi kullanırsak

$$
\left|z_\nu(x,\rho)\right|\le\frac{m(\rho)}{n|\rho|}.C.k\int_0^x\left\{|p_2|+\cdots+\frac{|p_n|}{|\rho|^{n-2}}\right\}d\xi
$$

$$
+\frac{m(\rho)}{n|\rho|}.C.(n-k)\int_x^1\left\{|p_2|+\cdots+\frac{|p_n|}{|\rho|^{n-2}}\right\}d\xi\le+\frac{m(\rho)}{|\rho|}C\int_0^1\left\{|p_2|+\cdots+\frac{|p_n|}{|\rho|^{n-2}}\right\}d\xi
$$

elde ederiz. Eşitliğin sağ tarafı x’e ve ν’ye bağlı olmadığından sol taraftan maksimum alınarak

$$
m(\rho)\le m(\rho)\frac{C_1}{|\rho|}
$$

bulunur. Burada C_1 bir sabittir.

$|\rho|>C_1$ için $m(\rho)=0$ olmak zorundadır. Buradan $z_\nu(x,\rho)\equiv 0$ yani $y\equiv 0$ elde edilir.

Teorem 3.3.4.1’in ispatı bitti.

3.3.5. Sınır Koşullarının Normalleştirilmesi

Verilen bir lineer diferansiyel operatörün sınır koşullarının lineer kombinasyonlarını kullanarak farklı $U_\nu(y)$ $\left(\nu=\overline{1,n}\right)$ sınır koşulları elde etmek istiyoruz. Bir $U(y)$ sınır koşulunda $y_0^{(k)}$ veya $y_1^{(k)}$ açıkça bulunuyor fakat $\forall\nu>k$ için $y_0^{(\nu)}$ ve $y_1^{(\nu)}$ bulunmuyor ise $U(y)$ sınır koşuluna k mertebeli denir. Varsayalım ki $U_\nu(y)$ sınır koşulu $n-1$ mertebelidir (eğer varsa). Yerlerini değiştirerek ve sabitle çarparak bir diğer sınır koşuluna eklersek, yani sınır koşullarının oluşturduğu $n\times 2n$ tipindeki matriste elementer satır işlemleri yaparsak, mertebesi $n-1$ olan en fazla iki sınır koşulu kalır. Geriye kalanların mertebesi $n-2$ veya daha küçüktür. Bu yöntemi devam ettirirsek önceki ikisi dışında mertebesi $n-2$ olan en fazla 2 tane sınır koşulu kalır. Bu 4 sınır koşulu dışındaki sınır koşullarının mertebesi $n-3$ veya daha küçüktür. Bu yöntem mümkün olduğunca böyle devam ettirilir. Yani elementer satır işlemleri mümkün olduğunca ilerletilir. Sonuçta elde edilen sınır koşullarına normalleştirilmiş sınır koşulları, bu yönteme ise sınır koşullarının normalleştirilmesi denir. Verilen sınır koşullarının normalleştirilmesiyle elde edilen sınır koşulları en baştaki sınır koşullarına denktir. Yani her iki sınır koşulları sistemini sağlayan y fonksiyonları aynıdır. Bu yönteme göre bir normalleştirilmiş sınır koşulları sistemi

$$U_\nu(y) \equiv U_{\nu 0}(y) + U_{\nu 1}(y) = 0 \tag{3.31}$$

biçiminde olmalıdır. Burada

$$\begin{aligned} U_{\nu 0}(y) &= \alpha_\nu y_0^{(k_\nu)} + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \alpha_{\nu j} y_0^{(j)}, \\ U_{\nu 1}(y) &= \beta_\nu y_1^{(k_\nu)} + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \beta_{\nu j} y_1^{(j)}, \end{aligned} \tag{3.32}$$

$n-1 \geq k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n \geq 0$, $k_{\nu+2} < k_\nu$ ve $\forall \nu = \overline{1,n}$ için $\alpha_\nu \neq 0$ veya $\beta_\nu \neq 0$'dır.

3.3.6. Regüler Sınır Koşulları

Sabitlenmiş bir S_k bölgesini ele alalım. $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sayılarını $\forall \rho \in S_k$ için

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_1) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_2) \leq \cdots \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_n)$$

koşulunu sağlayacak biçimde sıralayalım.

(3.32) ile tanımlı sınır koşullarını göz önüne alalım. Regüler sınır koşulları n'in tek ve çift olma durumuna göre ayrı ayrı tanımlanır:

a) n tek olsun. $n = 2\mu - 1$.

$$\theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{k_1} & \cdots & \alpha_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1 + s\beta_1)\omega_\mu^{k_1} & \beta_1\omega_{\mu+1}^{k_1} & \cdots & \beta_1\omega_n^{k_1} \\ \alpha_2\omega_1^{k_2} & \cdots & \alpha_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\alpha_2 + s\beta_2)\omega_\mu^{k_2} & \beta_2\omega_{\mu+1}^{k_2} & \cdots & \beta_2\omega_n^{k_2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n\omega_1^{k_n} & \cdots & \alpha_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (\alpha_n + s\beta_n)\omega_\mu^{k_n} & \beta_n\omega_{\mu+1}^{k_n} & \cdots & \beta_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix}$$

eşitliğiyle verilen θ_0 ve θ_1 sayıları sıfırdan farklı ise (3.31)'de verilen normalleştirilmiş sınır koşullarına regülerdir denir.

b) n çift olsun. $n = 2\mu$.

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{k_1} & \cdots & \alpha_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1+s\beta_1)\omega_\mu^{k_1} & \left(\alpha_1+\frac{1}{s}\beta_1\right)\omega_{\mu+1}^{k_1} & \beta_1\omega_{\mu+2}^{k_1} & \cdots & \beta_1\omega_n^{k_1} \\ \alpha_2\omega_1^{k_2} & \cdots & \alpha_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\alpha_2+s\beta_2)\omega_\mu^{k_2} & \left(\alpha_2+\frac{1}{s}\beta_2\right)\omega_{\mu+1}^{k_2} & \beta_2\omega_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & \beta_2\omega_n^{k_2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n\omega_1^{k_n} & \cdots & \alpha_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (\alpha_n+s\beta_n)\omega_\mu^{k_n} & \left(\alpha_n+\frac{1}{s}\beta_n\right)\omega_{\mu+1}^{k_n} & \beta_n\omega_{\mu+2}^{k_n} & \cdots & \beta_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix}$$

eşitliğiyle verilen θ_{-1} ve θ_1 sayıları sıfırdan farklı ise (3.31)'de verilen normalleştirilmiş sınır koşullarına regülerdir denir. Sınır koşullarının regüler olduğu durumda $\theta_0^2 \neq 4\theta_{-1}\theta_1$ ise (3.31) sınır koşullarına güçlü regülerdir denir.

Belirtelim ki sınır koşullarının regülerliği genel bir kavram iken güçlü regülerliği sadece çift mertebeli operatörler için geçerli olan bir kavramdır. Gösterilebilir ki sınır koşullarının regülerliği ve güçlü regülerliği S_k bölgesinin seçiminden bağımsızdır.

3.3.7. Periyodik ve Antiperiyodik Sınır Koşulları

$U_\nu(y) \equiv y^{(\nu)}(1) - (-1)^\sigma y^{(\nu)}(0) = y_1^{(\nu)} - (-1)^\sigma y_0^{(\nu)} = 0 \quad \left(\nu = \overline{0, n-1}\right)$ olsun. $U_\nu(y) \quad \left(\nu = \overline{0, n-1}\right)$ sınır koşullarına $\sigma = 0$ ve $\sigma = 1$ durumlarında sırasıyla periyodik ve antiperiyodik sınır koşulları denir. Şimdi periyodik ve antiperiyodik sınır koşullarının regülerliğini ve güçlü regülerliğini inceleyelim. Belirtelim ki periyodik ve antiperiyodik sınır koşulları normalleştirilmiştir. S_k belirlenmiş bir bölge olsun ve $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ (3.13) eşitsizliğini sağlayacak sırada dizilsin.

a) n tek olsun. $n = 2\mu - 1$.

$$\theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & \left(1-(-1)^\sigma s\right) & 1 & \cdots & 1 \\ \omega_1 & \cdots & \omega_{\mu-1} & \left(1-(-1)^\sigma s\right)\omega_\mu & \omega_{\mu+1} & \cdots & \omega_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{n-1} & \cdots & \omega_{\mu-1}^{n-1} & \left(1-(-1)^\sigma s\right)\omega_\mu^{n-1} & \omega_{\mu+1}^{n-1} & \cdots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix}$$
$$= C(-1)^{(\sigma+1)(\mu-1)}\left(1-(-1)^\sigma s\right).$$

Burada C, $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ sayılarının Vandermonde determinantıdır. $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ sayıları birbirinden farklı olduğundan $C \neq 0$'dır. Görüldüğü gibi, n tek sayı olduğunda periyodik ve antiperiyodik sınır koşulları regülerdir.

b) n çift olsun. $n = 2\mu$.

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & \left(1-(-1)^{\sigma} s\right) & \left(1-\dfrac{(-1)^{\sigma}}{s}\right) & 1 & \cdots & 1 \\ \omega_1 & \cdots & \omega_{\mu-1} & \left(1-(-1)^{\sigma} s\right)\omega_{\mu} & \left(1-\dfrac{(-1)^{\sigma}}{s}\right)\omega_{\mu+1} & \omega_{\mu+2} & \cdots & \omega_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{n-1} & \cdots & \omega_{\mu-1}^{n-1} & \left(1-(-1)^{\sigma} s\right)\omega_{\mu}^{n-1} & \left(1-\dfrac{(-1)^{\sigma}}{s}\right)\omega_{\mu+1}^{n-1} & \omega_{\mu+2}^{n-1} & \cdots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= C(-1)^{(\sigma+1)(\mu-1)}\left(1-(-1)^{\sigma} s\right)\left(1-\frac{(-1)^{\sigma}}{s}\right).$$

n çift sayı olduğunda periyodik ve antiperiyodik sınır koşulları regülerdir fakat $\theta_0^2 = 4\theta_{-1}\theta_1$ olduğundan güçlü regüler değildir.

3.3.8. Özdeğerlerin Asimptotik Davranışları

Teorem 3.3.8.1 [30]. (3.11) diferansiyel ifadesi ve (3.31) - (3.32) regüler sınır koşulları ile tanımlı n mertebeli bir lineer diferansiyel operatörün sayılabilir sayıda özdeğeri vardır ve bu özdeğerler aşağıdaki asimptotik formüllere sahiptir:

(*a*) n bir tek sayı ve $n = 4\nu - 1$ olsun. Bu durumda özdeğerler aşağıdaki asimptotik formüllere sahip iki dizi oluşturur:

$$\lambda_k' = (2k\pi i)^n \left\{1 + \frac{n \ln_0 \xi^{(0)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\},$$

$$\lambda_k'' = (-2k\pi i)^n \left\{1 - \frac{n \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\},$$

$$(k = N, N+1, \ldots).$$

(*b*) n bir tek sayı ve $n = 4\nu + 1$ olsun. Bu durumda özdeğerler aşağıdaki asimptotik formüllere sahip iki dizi oluşturur:

$$\lambda_k' = (-2k\pi in)^n \left\{1 - \frac{n \ln_0 \xi^{(0)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\},$$

$$\lambda_k'' = (2k\pi in)^n \left\{1 + \frac{n \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\},$$

$$(k = N, N+1, \ldots).$$

Burada $\xi^{(i)}\ (i = 0,1)$ sayısı S_i bölgesi için elde edilen $\theta_1\xi + \theta_0 = 0$ denkleminin kökü ve N yeterince büyük bir doğal sayıdır. Ayrıca $\ln_0 \xi$ fonksiyonu doğal logaritma fonksiyonunun belirlenmiş herhangi bir dalıdır.

(*c*) n bir çift sayı $(n = 2\mu)$ olsun. Varsayalım ki sınır koşulları güçlü regülerdir. Bu durumda özdeğerler aşağıdaki asimptotik formüllere sahip iki dizi oluşturur:

$$\lambda_k' = (-1)^\mu (2k\pi)^{2\mu} \left\{1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi'}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\},$$

$$\lambda_k'' = (-1)^\mu (2k\pi)^{2\mu} \left\{1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi''}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\},$$

$$(k = N, N+1, \ldots).$$

Burada ξ' ve ξ'' sayıları S_0 bölgesi için elde edilen

$$\theta_1\xi^2 + \theta_0\xi + \theta_{-1} = 0 \tag{3.33}$$

denkleminin kökleridir.

Sınır koşulları güçlü regüler olduğundan bu kökler birbirinden farklıdır. Dolayısıyla bu durumda $\{\lambda_k'\}$ ve $\{\lambda_k''\}$ dizileri için verilen asimptotik formüller birbirinden farklıdır. Formüllerdeki $\mp$ işareti $n = 4\nu + 2$ veya $n = 4\nu$ olmasına göre değişir.

(*d*) n bir çift sayı $(n = 2\mu)$ olsun. Varsayalım ki sınır koşulları güçlü regüler değildir. Bu durumda özdeğerler aşağıdaki asimptotik formüllere sahip iki dizi oluşturur:

$$\lambda_k' = (-1)^\mu (2k\pi)^{2\mu} \left\{1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right\},$$

$$\lambda_k'' = (-1)^\mu (2k\pi)^{2\mu} \left\{1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right\},$$

$$(k = N, N+1, \ldots).$$

Sınır koşulları güçlü regüler olmadığından açıktır ki (3.33) denkleminin bir tek ξ kökü vardır ve bu kök çift katlıdır. Formüldeki ξ sayısı sözü edilen çift katlı köktür.

İlk üç durumda mutlak değerce yeterince büyük özdeğerler basittir. Fakat dördüncü durumda mutlak değerce yeterince büyük özdeğerler ya basittir ya da çift katlıdır.

3.3.9. Özfonksiyonların Asimptotik Davranışları

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ fonksiyonları belirli bir T bölgesinde $l(y)+\rho^n y=0$ denkleminin (3.22) bağıntılarını sağlayan lineer bağımsız çözümleri olsunlar. $\lambda=-\rho^n \ (\rho\in T)$ özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyon

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$$

biçiminde yazılabilir. Burada c_j 'ler

$$c_1U_\nu(y_1)+c_2U_\nu(y_2)+\cdots+c_nU_\nu(y_n)=0 \quad \left(\nu=\overline{1,n}\right)$$

homojen sisteminin en az biri sıfır olmayan çözümleridir.

Basitlik için sadece basit özdeğerleri inceleyelim. λ basit bir özdeğer ise

$$\begin{pmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \cdots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \cdots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \cdots & U_n(y_n) \end{pmatrix}$$

matrisinin rankı $n-1$'dir. O halde bu matristeki $(n-1)\times(n-1)$ tipindeki determinantlardan en az biri sıfırdan farklıdır. Varsayalım ki birinci satırın minörlerinden en az biri sıfırdan farklıdır (Herhangi bir $k.$ satırın minörlerinden en az biri sıfırdan farklı olduğu durumda birinci sınır koşulu ile $k.$ sınır koşulu yer değiştirilebilir). Dolayısıyla,

$$y=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \cdots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \cdots & U_n(y_n) \end{vmatrix}$$

λ özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyondur.

n bir tek doğal sayı, $n=2\mu-1$, $\{\lambda_k'\}$ ve $\{\lambda_k''\}$ Teorem 3.3.8.1.a ve Teorem 3.3.8.1.b'de verilen özdeğerler, $y_{k,1}(x)$ ve $y_{k,2}(x)$ sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar, k yeterince büyük bir doğal sayı olsun. Bu takdirde $y_{k,1}(x)$ ve $y_{k,2}(x)$ fonksiyonları aşağıdaki asimptotik formüllere sahiptir:

$$y_{k,i}(x)=(-1)^{\mu-1}e^{\omega_\mu \rho_{k,i}x}\left\{\begin{vmatrix}\alpha_2\omega_1^{k_2} & \cdots & \alpha_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & \beta_2\omega_{\mu+1}^{k_2} & \cdots & \beta_2\omega_n^{k_2}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_n\omega_1^{k_n} & \cdots & \alpha_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & \beta_n\omega_{\mu+1}^{k_n} & \cdots & \beta_n\omega_n^{k_n}\end{vmatrix}+O\left(k^{-1}\right)\right\}.$$

Burada $\rho_{k,1}$ ve $\rho_{k,2}$ sırasıyla $\lambda_k'=-\rho^n$ ve $\lambda_k''=-\rho^n$ eşitlikleriyle elde edilen T bölgesinin elemanları, α_j, β_j, k_j $\left(j=\overline{2,n}\right)$ ise (3.31) eşitliğiyle verilen sayılardır.

n bir çift doğal sayı, $n=2\mu$, $\{\lambda_k'\}$ ve $\{\lambda_k''\}$ Teorem 3.3.8.1.c ve Teorem 3.3.8.1.d'de verilen özdeğerler, $y_{k,1}(x)$ ve $y_{k,2}(x)$ sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar, k yeterince büyük bir doğal sayı olsun. Bu takdirde $y_{k,1}(x)$ ve $y_{k,2}(x)$ fonksiyonları

$$y_{k,1}(x)=(-1)^{\mu-1}e^{\omega_\mu \rho_{k,1}x}\times$$

$$\left\{\begin{vmatrix}\alpha_2\omega_1^{k_2} & \cdots & \alpha_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & \left(\alpha_2+\frac{1}{\xi'}\beta_2\right)\omega_{\mu+1}^{k_2} & \beta_2\omega_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & \beta_2\omega_n^{k_2}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_n\omega_1^{k_n} & \cdots & \alpha_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & \left(\alpha_n+\frac{1}{\xi'}\beta_n\right)\omega_{\mu+1}^{k_n} & \beta_n\omega_{\mu+2}^{k_n} & \cdots & \beta_n\omega_n^{k_n}\end{vmatrix}+O\left(k^{-1}\right)\right\}$$

$$+(-1)^{\mu}e^{-\omega_\mu \rho_{k,1}x}\times$$

$$\left\{\begin{vmatrix}\alpha_2\omega_1^{k_2} & \cdots & \alpha_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & \left(\alpha_2+\xi'\beta_2\right)\omega_{\mu}^{k_2} & \beta_2\omega_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & \beta_2\omega_n^{k_2}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_n\omega_1^{k_n} & \cdots & \alpha_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & \left(\alpha_n+\xi'\beta_n\right)\omega_{\mu}^{k_n} & \beta_n\omega_{\mu+2}^{k_n} & \cdots & \beta_n\omega_n^{k_n}\end{vmatrix}+O\left(k^{-1}\right)\right\}$$

ve

$$y_{k,2}(x)=(-1)^{\mu-1}e^{\omega_\mu \rho_{k,2}x}\times$$

$$\left\{\begin{vmatrix}\alpha_2\omega_1^{k_2} & \cdots & \alpha_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & \left(\alpha_2+\frac{1}{\xi''}\beta_2\right)\omega_{\mu+1}^{k_2} & \beta_2\omega_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & \beta_2\omega_n^{k_2}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_n\omega_1^{k_n} & \cdots & \alpha_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & \left(\alpha_n+\frac{1}{\xi''}\beta_n\right)\omega_{\mu+1}^{k_n} & \beta_n\omega_{\mu+2}^{k_n} & \cdots & \beta_n\omega_n^{k_n}\end{vmatrix}+O\left(k^{-1}\right)\right\}$$

$$+(-1)^{\mu}e^{-\omega_\mu \rho_{k,2}x}\times$$

$$\left\{\begin{vmatrix}\alpha_2\omega_1^{k_2} & \cdots & \alpha_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & \left(\alpha_2+\xi''\beta_2\right)\omega_{\mu}^{k_2} & \beta_2\omega_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & \beta_2\omega_n^{k_2}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_n\omega_1^{k_n} & \cdots & \alpha_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & \left(\alpha_n+\xi''\beta_n\right)\omega_{\mu}^{k_n} & \beta_n\omega_{\mu+2}^{k_n} & \cdots & \beta_n\omega_n^{k_n}\end{vmatrix}+O\left(k^{-1}\right)\right\},$$

biçimindeki asimptotik formüllere sahiptir, burada ξ' ve ξ'' sayıları (3.33) denkleminin köküdür. Bu durumda $n=2$ olduğunda asimptotik formüller aşağıdaki halini alır:

$$y_{k,1}(x)=(-i)^{k_2}\, e^{i\rho_{k,1}x}\left(\alpha_2+\frac{1}{\xi'}\beta_2+O\left(k^{-1}\right)\right)-i^{k_2}e^{-i\rho_{k,1}x}\left(\alpha_2+\xi'\beta_2+O\left(k^{-1}\right)\right),$$

$$y_{k,2}(x)=(-i)^{k_2}\, e^{i\rho_{k,2}x}\left(\alpha_2+\frac{1}{\xi''}\beta_2+O\left(k^{-1}\right)\right)-i^{k_2}e^{-i\rho_{k,2}x}\left(\alpha_2+\xi''\beta_2+O\left(k^{-1}\right)\right).$$

4. BULGULAR

Bundan sonra, L ile

$$l(y)=y^{(iv)}+q(x)y, \tag{4.1}$$

diferansiyel ifadesi ve

$$U_s(y)=y^{(s)}(1)-(-1)^{\sigma}y^{(s)}(0)=0,\quad s=\overline{0,3} \tag{4.2}$$

sınır koşullarının tanımladığı diferansiyel operatörü göstereceğiz; burada, $q(x)\in W_1^1(0,1)$ kompleks değerli fonksiyon ve $\sigma=0,1$'dir.

Bu kısımda, $q(x)$ fonksiyonu üzerine uygun koşullar koyarak, $Ly=\lambda y$ spektral probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları için asimptotik formüller elde edeceğiz ve kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ uzaylarında tabanlığını inceleyeceğiz.

Şimdi, bu çalışmanın temel sonuçlarını verelim:

Teorem 4.1. $q(x)\in W_1^1(0,1)$ herhangi kompleks değerli fonksiyon ve $q(1)\neq q(0)$ olsun. O halde (4.1) - (4.2) diferansiyel operatörünün sonlu sayıdaki hariç tüm özdeğerleri basittir ve $\{\lambda_{n,1}\}_{n=1}^{n=\infty}$, $\{\lambda_{n,2}\}_{n=1}^{n=\infty}$ gibi iki sonsuz dizi oluşturur. Ayrıca, yeterince büyük n sayıları için

$$\lambda_{n+n_j,j}=c_0+\left((2n-\sigma)\pi\right)^4\left\{1-\frac{(-1)^{\sigma+j}\left(q(1)-q(0)\right)}{2\left((2n-\sigma)\pi\right)^5}+O\left(n^{-5}\varepsilon_n\right)\right\} \tag{4.3}$$

asimptotik formülü doğrudur. Bunun yanı sıra, yeterince büyük n doğal sayıları için $\lambda_{n,j}$ özdeğerlerine karşılık gelen $u_{n,j}(x)$ özfonksiyonları,

$$u_{n+n_j,j}(x)=(-1)^{\sigma}\sin(2n-\sigma)\pi x+(-1)^j\cos(2n-\sigma)\pi x+O(\varepsilon_n) \tag{4.4}$$

asimptotik gösterimlerine sahiptir. Burada, $j=1,2$, n_1,n_2 tamsayılar,

$$\varepsilon_n=\left|\int_0^1 q'(\xi)e^{2(2n-\sigma)\pi i\xi}d\xi\right|+\left|\int_0^1 q'(\xi)e^{-2(2n-\sigma)\pi i\xi}d\xi\right|+\frac{1}{n} \tag{4.5}$$

ve

$$c_0 = \int_0^1 q(\xi)\, d\xi \tag{4.6}$$

dir.

Teorem 4.2. $q(x) \in W_1^1(0,1)$ keyfi kompleks değerli bir fonksiyon ve $q(1) \neq q(0)$ olsun. O halde (4.1) - (4.2) diferansiyel operatörünün kök fonksiyonlar sistemi $L_2(0,1)$ uzayında Riesz tabanı oluşturur. Bu koşullara ek olarak, $q(x) \in W_1^2(0,1)$ ise (4.1) - (4.2) diferansiyel operatörünün kök fonksiyonlar sistemi $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayında tabandır.

Sonuç 4.1. $q(x) \in W_2^1(0,1)$ keyfi kompleks değerli fonksiyon, $q(1) \neq q(0)$, ve n_1, n_2 Teorem 4.1'de verilen tamsayılar olsun. Bu takdirde $n_1 + n_2 = 1 - \sigma$ 'dır ve $n_1 = 1 - \sigma$, $n_2 = 0$ seçilebilir.

4.1. Bazı Yardımcı Sonuçlar

$$S_0 = \left\{ \rho = re^{i\theta} \mid r > 0,\, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \right\} \tag{4.7}$$

olsun (bkz: (3.12)). ω_k $\left(k = \overline{1,4}\right)$ ile $\omega^4 + 1 = 0$ denkleminin farklı 4 kökünü gösterelim. (3.13) 'ten görülür ki, ω_k $\left(k = \overline{1,4}\right)$ sayıları her $\rho \in S_0$ için,

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_1) \le \operatorname{Re}(\rho\omega_2) \le \operatorname{Re}(\rho\omega_3) \le \operatorname{Re}(\rho\omega_4) \tag{4.8}$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde sıralanabilir.

Bundan sonra ω_k $\left(k = \overline{1,4}\right)$ sayılarının (4.8) eşitsizliğini sağlayacak biçimde sıralandığını kabul edeceğiz. O halde

$$\omega_1 = e^{\frac{3\pi i}{4}}, \quad \omega_2 = e^{-\frac{3\pi i}{4}}, \quad \omega_3 = e^{\frac{\pi i}{4}}, \quad \omega_4 = e^{-\frac{\pi i}{4}} \tag{4.9}$$

olur ve buradan da

$$\omega_1 = -\omega_4, \quad \omega_2 = -\omega_3 \tag{4.10}$$

elde edilir (bkz: [30]).

Lemma 4.1.1. Her $\rho \in S_0$ için,

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_1) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}|\rho|, \quad \operatorname{Re}(\rho\omega_4) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}|\rho| \tag{4.11}$$

eşitsizlikleri doğrudur.

İspat: (4.11)'deki ilk eşitsizliği ispatlamak yeterlidir. (4.10)'dan ikinci eşitsizliğin de doğru olduğu görülür. $\rho \in S_0$ olduğundan $\rho = |\rho| e^{\theta \pi i/4}$ $(0 \le \theta \le 1)$ olarak yazılabilir. O halde (4.9)'dan

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_1) = |\rho| \operatorname{Re}\left(e^{\frac{3+\theta}{4}\pi i}\right) = -|\rho| \cos\frac{1-\theta}{4}\pi \le -\frac{\sqrt{2}}{2}|\rho|$$

elde edilir.

Lemma 4.1.1'in ispatı bitti.

S_0 bölgesini $-c$ kadar ötelersek

$$T_0 = \{\rho - c \mid \rho \in S_0\} \tag{4.12}$$

bölgesini elde ederiz. T_0 bölgesi için (4.8) ve (4.11) eşitsizlikleri aşağıdaki biçimini alır:

$$\operatorname{Re}((\rho+c)\omega_1) \le \operatorname{Re}((\rho+c)\omega_2) \le \operatorname{Re}((\rho+c)\omega_3) \le \operatorname{Re}((\rho+c)\omega_4), \tag{4.13}$$

$$\operatorname{Re}((\rho+c)\omega_1) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}|\rho+c|, \quad \operatorname{Re}((\rho+c)\omega_4) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}|\rho+c|. \tag{4.14}$$

Teorem 3.3.4.1'den

$$l(y) + \rho^4 y = 0 \tag{4.15}$$

denkleminin T_0 bölgesinde analitik $y_k(x,\rho)$ $\left(k = \overline{1,4}\right)$ lineer bağımsız çözümlerine sahip olduğunu biliyoruz. Ayrıca $|\rho|$'nun yeterince büyük değerlerinde bu çözümler ve türevleri

$$\begin{aligned} \frac{d^s y_k}{dx^s} &= \rho^s \omega_k^s e^{\rho\omega_k x} + \frac{1}{4\rho^3}\int_0^x \frac{\partial^s K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^s} q(\xi) y(\xi) d\xi \\ &- \frac{1}{4\rho^3}\int_x^1 \frac{\partial^s K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^s} q(\xi) y(\xi) d\xi, \quad \left(\nu = \overline{0,3}\right) \end{aligned} \tag{4.16}$$

denklemini sağlarlar; burada

$$K_1(x,\xi,\rho) = \sum_{\alpha=1}^{k} \omega_\alpha e^{\rho\omega_\alpha(x-\xi)}, \quad K_2(x,\xi,\rho) = \sum_{\alpha=k+1}^{4} \omega_\alpha e^{\rho\omega_\alpha(x-\xi)} \tag{4.17}$$

dir (bkz: (3.15), (3.16), (3.21), (3.24)). (3.25)'ten

$$\frac{d^s y_k}{dx^s} = \rho^s e^{\rho\omega_k x} z_{k,s}(x,\rho) \quad s = \overline{0,3}, \quad k = \overline{1,4} \tag{4.18}$$

yazılabilir. (3.28) ile

$$z_{k,s}(x,\rho)=\omega_k^s+O(\rho^{-1})\quad s=\overline{0,3},\quad k=\overline{1,4} \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.16) ve (4.18)'den

$$z_{k,s}(x,\rho)=\omega_k^s+\frac{1}{4\rho}\int_0^x e^{-\rho\omega_k(x-\xi)}\rho^{-s}\frac{\partial^s K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^s}\sum_{j=0}^{2}\frac{p_j(\xi)}{\rho^{2-j}}z_{k,j}(\xi,\rho)d\xi$$
$$-\frac{1}{4\rho}\int_x^1 e^{-\rho\omega_k(x-\xi)}\rho^{-s}\frac{\partial^s K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^s}\sum_{j=0}^{2}\frac{p_j(\xi)}{\rho^{2-j}}z_{k,j}(\xi,\rho)d\xi$$

sağlanır. (4.17)'deki $K_1(x,\xi,\rho)$ ve $K_2(x,\xi,\rho)$ değerlerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}z_{k,s}(x,\rho)=\omega_k^s&+\frac{\omega_k^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^x q(\xi)z_{k,0}(\xi,\rho)d\xi\\&+\frac{1}{4\rho^3}\sum_{\alpha=1}^{k-1}\omega_\alpha^{s+1}\int_0^x q(\xi)e^{\rho(\omega_\alpha-\omega_k)(x-\xi)}z_{k,0}(\xi,\rho)d\xi\\&-\frac{1}{4\rho^3}\sum_{\alpha=k+1}^{4}\omega_\alpha^{s+1}\int_x^1 q(\xi)e^{\rho(\omega_\alpha-\omega_k)(x-\xi)}z_{k,0}(\xi,\rho)d\xi\end{aligned} \tag{4.20}$$

elde ederiz. Belirtelim ki (4.13) ile

$$\operatorname{Re}\left(\rho(\omega_\alpha-\omega_\beta)\right)=\operatorname{Re}\left((\rho+c)(\omega_\alpha-\omega_\beta)\right)-\operatorname{Re}\left(c(\omega_\alpha-\omega_\beta)\right)\le 2|c|$$

sağlanır. Burada $1\le\alpha\le\beta\le4$'tür. Buradan ve (4.19)'dan

$$\begin{aligned}&\int_0^x q(\xi)z_{k,0}(\xi,\rho)e^{\rho(\omega_\alpha-\omega_k)(x-\xi)}d\xi=O(1)\quad(\alpha\le k),\\&\int_x^1 q(\xi)z_{k,0}(\xi,\rho)e^{\rho(\omega_\alpha-\omega_k)(x-\xi)}d\xi=O(1)\quad(\alpha>k)\end{aligned} \tag{4.21}$$

elde edilir. Burada $k=\overline{1,4}$'tür. Buradan ve (4.19) - (4.20) formüllerinden

$$z_{k,s}(x,\rho)=\omega_k^s+O(\rho^{-3})\quad\left(s=\overline{0,3},k=\overline{1,4}\right) \tag{4.22}$$

sağlanır. Bu ifadeyi (4.20)'de yerine yazarsak

$$z_{k,s}(x,\rho)=\omega_k^s+\frac{\omega_k^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^x q(\xi)d\xi+\frac{1}{4\rho^3}\sum_{\alpha=1}^{k-1}\omega_\alpha^{s+1}\int_0^x q(\xi)e^{\rho(\omega_\alpha-\omega_k)(x-\xi)}d\xi$$
$$-\frac{1}{4\rho^3}\sum_{\alpha=k+1}^{4}\omega_\alpha^{s+1}\int_x^1 q(\xi)e^{\rho(\omega_\alpha-\omega_k)(x-\xi)}d\xi+O(\rho^{-6})$$

olduğu görülür. Buradan,

$$z_{2,s}(0,\rho)=\omega_2^s-\frac{\omega_3^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^1 q(\xi)e^{2\rho\omega_2\xi}d\xi-\frac{\omega_4^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^1 q(\xi)e^{\rho(\omega_2-\omega_4)\xi}d\xi+O(\rho^{-6})$$
$$z_{3,s}(0,\rho)=\omega_3^s-\frac{\omega_4^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^1 q(\xi)e^{\rho(\omega_3-\omega_4)\xi}d\xi+O(\rho^{-6})$$
$$z_{2,s}(1,\rho)=\omega_2^s+\frac{\omega_1^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^1 q(\xi)e^{\rho(\omega_1-\omega_2)(1-\xi)}d\xi+O(\rho^{-6}) \tag{4.23}$$
$$z_{3,s}(1,\rho)=\omega_3^s+\frac{\omega_1^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^1 q(\xi)e^{\rho(\omega_1-\omega_3)(1-\xi)}d\xi+\frac{\omega_2^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^1 q(\xi)e^{2\rho\omega_2(1-\xi)}d\xi+O(\rho^{-6})$$

elde edilir. yukarıdaki formülde $c_0=0$ kabul edilmiştir (bkz: (4.6)). Biz ispatların sonunda, $c_0\neq 0$ durumunu da inceleyeceğiz. $q(x)\in W_1^1(0,1)$ ve $\alpha=0$ olduğunda, [28]'deki (4.39) ve (4.40) formüllerinden $\sigma=0,1$ için,

$$e^{\rho\omega_2}=(-1)^\sigma+O(\rho^{-4}),$$
$$e^{\rho\omega_3}=(-1)^\sigma+O(\rho^{-4}) \tag{4.24}$$

elde edilir. İlk eşitlikten iki tarafın karesi alınarak

$$e^{2\rho\omega_2}=1+O(\rho^{-4}) \tag{4.25}$$

olduğu görülür. (4.23)'teki ilk eşitlikteki $\int_0^1 q(\xi)e^{2\rho\omega_2\xi}d\xi$ integrali ve son eşitlikteki $\int_0^1 q(\xi)e^{2\rho\omega_2(1-\xi)}d\xi$ integraline kısmi integrasyon uygulanıp (4.25) eşitliği yerine yazılırsa

$$z_{2,s}(0,\rho)=\omega_2^s+\frac{\omega_3^s}{8\rho^4}\big(q(1)-q(0)\big)-\frac{\omega_3^s}{8\rho^4}\int_0^1 q'(\xi)e^{2\rho w_2\xi}d\xi$$
$$-\frac{\omega_4^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^1 q(\xi)e^{\rho(\omega_2-\omega_4)\xi}d\xi+O(\rho^{-6})$$
$$z_{3,s}(0,\rho)=\omega_3^s-\frac{\omega_4^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^1 q(\xi)e^{\rho(\omega_3-\omega_4)\xi}d\xi+O(\rho^{-6})$$
$$z_{2,s}(1,\rho)=\omega_2^s+\frac{\omega_1^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^1 q(\xi)e^{\rho(\omega_1-\omega_2)(1-\xi)}d\xi+O(\rho^{-6}) \tag{4.26}$$
$$z_{3,s}(1,\rho)=\omega_3^s+\frac{\omega_1^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^1 q(\xi)e^{\rho(\omega_1-\omega_3)(1-\xi)}d\xi-\frac{w_2^{\,s}}{8\rho^4}\big(q(1)-q(0)\big)$$
$$+\frac{\omega_2^s}{8\rho^4}\int_0^1 q'(\xi)e^{2\rho\omega_2(1-\xi)}d\xi+O(\rho^{-6})$$

elde edilir.

4.2. Teorem 4.1'in İspatı

$$\Delta(\rho)=\begin{vmatrix} U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_0(y_1) & U_0(y_2) & U_0(y_3) & U_0(y_4) \end{vmatrix}$$

olsun; burada $y_k(x,\rho)$ $(k=\overline{1,4})$ fonksiyonları (4.15) denkleminin lineer bağımsız çözümleridir. [30, II, 4.9]'dan biliniyor ki, T_0 bölgesinin $\rho=-c$ köşe noktası uygun biçimde seçilirse, (4.1) - (4.2) diferansiyel operatörünün mutlak değerce yeterince büyük özdeğerleri ρ

$$\Delta(\rho)=0 \tag{4.27}$$

denkleminin bir çözümü olmak üzere, $\lambda=-\rho^4$ formatındadır. Tersine böyle noktaların kümesi, sonlu tanesi hariç, (4.27) denkleminin T_0 'daki tüm köklerini içerir.

(4.18) ile $k=\overline{1,4}$ olmak üzere

$$U_s(y_k)=\rho^s e^{\rho\omega_k} z_{k,s}(1,\rho)-(-1)^{\sigma}\rho^s z_{k,s}(0,\rho)=0, \quad s=\overline{0,3} \tag{4.28}$$

elde edilir. (4.14)'e göre $e^{\rho\omega_1}$ eksponansiyel olarak 0'a, $e^{\rho\omega_4}$ ise eksponansiyel olarak sonsuza gider. O halde (4.22) ve (4.28)'den

$$\begin{cases} U_s(y_1)=-(-1)^{\sigma}\rho^s\left\{z_{1,s}(0,\rho)+O\left(\rho^{-9}\right)\right\}, \\ U_s(y_4)=\rho^s e^{\rho\omega_4}\left\{z_{4,s}(1,\rho)+O\left(\rho^{-9}\right)\right\}, \end{cases} \tag{4.29}$$

elde edilir. $s=\overline{0,3}$ olmak üzere

$$A_{s,k}(\rho)=\begin{cases} z_{1,s}(0,\rho), & k=1, \\ e^{\rho\omega_k} z_{k,s}(1,\rho)-(-1)^{\sigma} z_{k,s}(0,\rho), & k=2,3, \\ z_{4,s}(1,\rho), & k=4 \end{cases} \tag{4.30}$$

olarak tanımlayalım. (4.28) - (4.30) formüllerinden $s=\overline{0,3}$ için

$$\begin{aligned} &U_s(y_1)=-(-1)^{\sigma}\rho^s\left\{A_{s,1}(\rho)+O\left(\rho^{-9}\right)\right\}, \\ &U_s(y_k)=\rho^s A_{s,k}(\rho), \quad k=2,3, \\ &U_s(y_4)=\rho^s e^{\rho\omega_4}\left\{A_{s,4}(\rho)+O\left(\rho^{-9}\right)\right\} \end{aligned} \tag{4.31}$$

elde ederiz. Bu eşitlikleri (4.27)'de yerine yazıp birinci, ikinci, üçüncü satırlardaki ρ^3, ρ^2, ρ ilk sütundaki $-(-1)^{\sigma}$ ve son sütundaki $e^{\rho\omega_4}$ çarpanlarını sadeleştirirsek (4.27) aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Delta_1(\rho)+O\left(\rho^{-9}\right)=0. \tag{4.32}$$

Burada

$$\Delta_1(\rho)\equiv\begin{vmatrix} A_{3,1}(\rho) & A_{3,2}(\rho) & A_{3,3}(\rho) & A_{3,4}(\rho) \\ A_{2,1}(\rho) & A_{2,2}(\rho) & A_{2,3}(\rho) & A_{2,4}(\rho) \\ A_{1,1}(\rho) & A_{1,2}(\rho) & A_{1,3}(\rho) & A_{1,4}(\rho) \\ A_{0,1}(\rho) & A_{0,2}(\rho) & A_{0,3}(\rho) & A_{0,4}(\rho) \end{vmatrix} \tag{4.33}$$

dur. (4.22), (4.24) ve (4.26) bağıntıları kullanılarak $s=\overline{0,3}$ ve $k=2,3$ için aşağıdaki formüller elde edilir:

$$\begin{gathered} A_{s,k}(\rho)=A_{s,k}^{(k)}+B_{s,k}^{(k)}+O\left(\rho^{-6}\right), \quad k=2,3, \\ A_{s,k}(\rho)=\omega_k^s+O\left(\rho^{-3}\right), \quad k=1,4. \end{gathered} \tag{4.34}$$

Burada,

$$\begin{aligned} A_{s,2}^{(2)}(\rho)&=\omega_2^s\left(e^{\rho\omega_2}-(-1)^{\sigma}\right)-\frac{(-1)^{\sigma}\omega_3^s}{8\rho^4}\left(q(1)-q(0)\right)+\frac{(-1)^{\sigma}\omega_3^s}{8\rho^4}\int_0^1 q'(\xi)e^{2\rho w_2\xi}d\xi \\ A_{s,3}^{(3)}(\rho)&=\omega_3^s\left(e^{\rho\omega_3}-(-1)^{\sigma}\right)-\frac{(-1)^{\sigma}\omega_2^s}{8\rho^4}\left(q(1)-q(0)\right)+\frac{(-1)^{\sigma}\omega_2^s}{8\rho^4}\int_0^1 q'(\xi)e^{2\rho\omega_2(1-\xi)}d\xi \end{aligned} \tag{4.35}$$

$$B_{s,k}^{(k)}(\rho)=\frac{(-1)^{\sigma}\omega_1^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^1 q(\xi)e^{\rho(\omega_1-\omega_k)(1-\xi)}d\xi+\frac{(-1)^{\sigma}\omega_4^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^1 q(\xi)e^{\rho(\omega_k-\omega_4)\xi}d\xi \tag{4.36}$$

dir. (4.34), (4.35) ve (4.36) bağıntılarından

$$A_{s,k}(\rho)=O\left(\rho^{-3}\right), \quad k=2,3, \tag{4.37}$$

elde edilir. Buradan, (4.33) ve (4.34)'ten (4.32) denklemi

$$\Delta_2(\rho)+O\left(\rho^{-9}\right)=0 \tag{4.38}$$

denklemine denktir. Burada,

$$\Delta_2(\rho)\equiv\begin{vmatrix} \omega_1^3 & A_{3,2}^{(2)}(\rho)+B_{3,2}^{(2)}(\rho) & A_{3,3}^{(3)}(\rho)+B_{3,3}^{(3)}(\rho) & \omega_4^3 \\ \omega_1^2 & A_{2,2}^{(2)}(\rho)+B_{2,2}^{(2)}(\rho) & A_{2,3}^{(3)}(\rho)+B_{2,3}^{(3)}(\rho) & \omega_4^2 \\ \omega_1 & A_{1,2}^{(2)}(\rho)+B_{1,2}^{(2)}(\rho) & A_{1,3}^{(3)}(\rho)+B_{1,3}^{(3)}(\rho) & \omega_4 \\ 1 & A_{0,2}^{(2)}(\rho)+B_{0,2}^{(2)}(\rho) & A_{0,3}^{(3)}(\rho)+B_{0,3}^{(3)}(\rho) & 1 \end{vmatrix}$$

dir. (4.36) eşitliğini ele alalım. Kolayca görülür ki $k = 2,3$ için

$$\left(B_{3,k}^{(k)}(\rho), B_{2,k}^{(k)}(\rho), B_{1,k}^{(k)}(\rho), B_{0,k}^{(k)}(\rho)\right)^T$$

sütunu $\Delta_2(\rho)$ determinantındaki ilk ve son sütunların lineer kombinasyonudur. Dolayısıyla $\Delta_2(\rho)$ determinantı

$$\Delta_2(\rho) \equiv \begin{vmatrix} \omega_1^3 & A_{3,2}^{(2)}(\rho) & A_{3,3}^{(3)}(\rho) & \omega_4^3 \\ \omega_1^2 & A_{2,2}^{(2)}(\rho) & A_{2,3}^{(3)}(\rho) & \omega_4^2 \\ \omega_1 & A_{1,2}^{(2)}(\rho) & A_{1,3}^{(3)}(\rho) & \omega_4 \\ 1 & A_{0,2}^{(2)}(\rho) & A_{0,3}^{(3)}(\rho) & 1 \end{vmatrix} \tag{4.39}$$

olarak verilebilir. (4.35) eşitlikleri kullanılarak (4.39) determinantı hesaplanırsa

$$-16\left(e^{\rho\omega_2} - (-1)^\sigma\right)\left(e^{\rho\omega_3} - (-1)^\sigma\right) + \frac{\left(q(1) - q(0)\right)^2}{4\rho^8} + O\left(\rho^{-8}\varepsilon(\rho)\right) = 0\,. \tag{4.40}$$

elde edilir. Burada

$$\varepsilon(\rho) = \left|\int_0^1 q'(\xi) e^{2\rho\omega_2\xi} d\xi\right| + \left|\int_0^1 q'(\xi) e^{2\rho\omega_2(1-\xi)} d\xi\right| + \frac{1}{|\rho|} \tag{4.41}$$

dur. Riemann Lebesque lemmasının ispatına benzer biçimde

$$\varepsilon(\rho) = o(1) \quad \left(|\rho| \to \infty\right)$$

olduğu kolayca elde edilir.

$\omega_3 = -\omega_2$ ve $e^{\rho\omega_2} = O(1)$ olduğundan (4.40) denklemi aşağıdaki iki denkleme ayrılır:

$$e^{\rho\omega_2} = (-1)^\sigma + i\frac{q(1) - q(0)}{8\rho^4} + O\left(\rho^{-4}\varepsilon(\rho)\right), \tag{4.42}$$

$$e^{\rho\omega_2} = (-1)^\sigma - i\frac{q(1) - q(0)}{8\rho^4} + O\left(\rho^{-4}\varepsilon(\rho)\right). \tag{4.43}$$

(4.42) denklemini araştıralım. Teorem 3.1.1.1 kullanılarak (4.42) denkleminin mutlak değerce yeterince büyük $\rho \in T_0$ köklerinin $G_n \subset T_0$ $\left(n = n_0, n_0 + 1, \ldots\right)$ bölgelerinde yerleştiği ispatlanabilir; burada G_n, merkezi $-(2n - \sigma)\pi i/\omega$, yarıçapı $O\left(n^{-1}\right)$ olan dairedir. Dahası, (4.42) denkleminin herbir G_n bölgesinde bir tek kökü vardır. ρ, (4.42) denkleminin G_n'deki kökü olsun. [28]'deki (4.46) ve (4.47) bağıntıları kullanılarak

$$\rho = -\frac{(2n-\sigma)\pi i}{\omega_2} + r \,, \tag{4.44}$$

$$r = O\left(n^{-4}\right) \tag{4.45}$$

olduğu elde edilir. ε_n (4.5)'da tanımlanan sayı olmak üzere (4.41), (4.44) ve (4.45)'ten

$$\varepsilon\left(\rho\right) = O(\varepsilon_n) \tag{4.46}$$

elde edilir. r'yi daha kesin bir biçimde yazalım. (4.44) ve (4.45)'ten aşağıdaki iki bağıntı elde edilir:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\omega_2}{(2n-\sigma)\pi i} + O\left(n^{-6}\right), \quad e^{\rho\omega_2} = (-1)^{\sigma}\left\{1 + r\omega_2 + O\left(n^{-8}\right)\right\}. \tag{4.47}$$

(4.42)'de $\rho = \rho$ yazarak ve (4.46) - (4.47) bağıntılarını kullanarak

$$r = -\frac{i(-1)^{\sigma}\left(q(1)-q(0)\right)}{8\omega_2(2n-\sigma)^4\pi^4} + O\left(n^{-4}\varepsilon_n\right) \tag{4.48}$$

elde ederiz. O halde, (4.44) - (4.48)'den $z_n = -\dfrac{(2n-\sigma)\pi i}{\omega_2}$ $\left(n = n_0, n_0+1,\ldots\right)$ noktasının $O\left(n^{-1}\right)$ komşuluğunda (4.42) denkleminin tek bir

$$\rho_{n,1} = -\frac{1}{\omega_2}\left\{(2n-\sigma)\pi i + \frac{i(-1)^{\sigma}\left(q(1)-q(0)\right)}{8(2n-\sigma)^4\pi^4}\right\} + O\left(n^{-4}\varepsilon_n\right) \tag{4.49}$$

köküne sahip olduğu elde edilir.

Benzer şekilde $z_n = -\dfrac{(2n-\sigma)\pi i}{\omega_2}$ $\left(n = n_0, n_0+1,\ldots\right)$ noktasının $O\left(n^{-1}\right)$ komşuluğunda (4.43) denkleminin tek bir

$$\rho_{n,2} = -\frac{1}{\omega_2}\left\{(2n-\sigma)\pi i - \frac{i(-1)^{\sigma}\left(q(1)-q(0)\right)}{8(2n-\sigma)^4\pi^4}\right\} + O\left(n^{-4}\varepsilon_n\right) \tag{4.50}$$

köküne sahip olduğu aynı yöntemle elde edilebilir.

Şimdi, yeterince büyük bir n sayısı ve $j = 1,2$ için $\lambda = -\left(\rho_{n,j}\right)^4$ özdeğerine karşılık gelen $u_{n,j}(x)$ özfonksiyonunu aşağıdaki formda araştıralım:

$$u_{n,j}(x)=\frac{(-1)^{\sigma}e^{-\rho\omega_4}\rho}{i\omega_2\left(q(1)-q(0)\right)}\begin{vmatrix} y_1(x,\rho) & y_2(x,\rho) & y_3(x,\rho) & y_4(x,\rho) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_0(y_1) & U_0(y_2) & U_0(y_3) & U_0(y_4) \end{vmatrix}_{\rho=\rho_{n,j}}.$$

Bu özfonksiyonu $\rho=\rho_{n,j}$ için aşağıdaki biçimde yazalım:

$$u_{n,j}(x)=\frac{-\rho^4}{i\omega_2\left(q(1)-q(0)\right)}\begin{vmatrix} -(-1)^{\sigma}y_1(x,\rho) & y_2(x,\rho) & y_3(x,\rho) & e^{-\rho\omega_4}y_4(x,\rho) \\ -(-1)^{\sigma}\rho^{-2}U_2(y_1) & \rho^{-2}U_2(y_2) & \rho^{-2}U_2(y_3) & \rho^{-2}e^{-\rho\omega_4}U_2(y_4) \\ -(-1)^{\sigma}\rho^{-1}U_1(y_1) & \rho^{-1}U_1(y_2) & \rho^{-1}U_1(y_3) & \rho^{-1}e^{-\rho\omega_4}U_1(y_4) \\ -(-1)^{\sigma}U_0(y_1) & U_0(y_2) & U_0(y_3) & e^{-\rho\omega_4}U_0(y_4) \end{vmatrix}. \quad (4.51)$$

Bundan sonra basitlik için $\rho=\rho_{n,j}$ ve $\varepsilon=\varepsilon_n$ kabul edeceğiz. (4.18) ve (4.22) formüllerinden

$$y_k(x,\rho)=O(1) \quad (k=1,2,3), \qquad e^{-\rho\omega_4}y_4(x,\rho)=O(1) \quad (4.52)$$

elde edilir. Buna göre, (4.31) ve (4.51) formüllerinden

$$u_{n,j}(x)=\frac{-\rho^4}{i\omega_2\left(q(1)-q(0)\right)}\begin{vmatrix} -(-1)^{\sigma}y_1(x,\rho) & y_2(x,\rho) & y_3(x,\rho) & e^{-\rho\omega_4}y_4(x,\rho) \\ A_{2,1}(\rho) & A_{2,2}(\rho) & A_{2,3}(\rho) & A_{2,4}(\rho) \\ A_{1,1}(\rho) & A_{1,2}(\rho) & A_{1,3}(\rho) & A_{1,4}(\rho) \\ A_{0,1}(\rho) & A_{0,2}(\rho) & A_{0,3}(\rho) & A_{0,4}(\rho) \end{vmatrix}+O\left(\rho^{-5}\right). \quad (4.53)$$

elde edilir. (4.34), (4.37), (4.52) ve (4.53) formüllerini göz önünde bulundurursak

$$u_{n,j}(x)=\frac{-\rho^4}{i\omega_2\left(q(1)-q(0)\right)}\left[y_3(x,\rho)E_2(\rho)-y_2(x,\rho)E_3(\rho)\right]+O\left(\rho^{-2}\right) \quad (4.54)$$

elde ederiz. Burada

$$E_k(\rho)=\begin{vmatrix} \omega_1^2 & A_{2,k}(\rho) & \omega_4^2 \\ \omega_1 & A_{1,k}(\rho) & \omega_4 \\ 1 & A_{0,k}(\rho) & 1 \end{vmatrix}, \quad k=2,3$$

tür. Buradan ve (4.34)'ten

$$E_k(\rho)=\begin{vmatrix} \omega_1^2 & A_{2,k}^{(k)}(\rho) & \omega_4^2 \\ \omega_1 & A_{1,k}^{(k)}(\rho) & \omega_4 \\ 1 & A_{0,k}^{(k)}(\rho) & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \omega_1^2 & B_{2,k}^{(k)}(\rho) & \omega_4^2 \\ \omega_1 & B_{1,k}^{(k)}(\rho) & \omega_4 \\ 1 & B_{0,k}^{(k)}(\rho) & 1 \end{vmatrix}+O\left(\rho^{-6}\right)$$

bulunur. (4.36)'ya göre ikinci determinant sıfıra eşittir. Yani

$$E_k(\rho)=\begin{vmatrix}\omega_1^2 & A_{2,k}^{(k)}(\rho) & \omega_4^2\\ \omega_1 & A_{1,k}^{(k)}(\rho) & \omega_4\\ 1 & A_{0,k}^{(k)}(\rho) & 1\end{vmatrix}+O\left(\rho^{-6}\right) \tag{4.55}$$

dır. O halde, (4.35), (4.42) (4.43) ve (4.55)'e göre $k=2,3$ için

$$E_k(\rho)=-\frac{\omega_2\left(q(1)-q(0)\right)\left(i(-1)^{j+k}+(-1)^{\sigma}\right)}{2\rho^4}+O\left(\rho^{-4}\varepsilon_n\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.54)'e göre

$$u_{n,j}(x)=\frac{y_3(x,\rho)\left((-1)^{\sigma}+(-1)^{j}i\right)-y_2(x,\rho)\left((-1)^{\sigma}-(-1)^{j}i\right)}{2i}+O(\varepsilon_n)$$

ya da daha açık olarak

$$u_{n,j}(x)=\frac{y_3\left(x,\rho_{n,j}\right)\left((-1)^{\sigma}+(-1)^{j}i\right)-y_2\left(x,\rho_{n,j}\right)\left((-1)^{\sigma}-(-1)^{j}i\right)}{2i}+O(\varepsilon_n) \tag{4.56}$$

elde edilir. Öte yandan (4.18), (4.19) ve (4.49)'a göre

$$y_2\left(x,\rho_{n,1}\right)=e^{-(2n-\sigma)\pi ix}+O\left(n^{-1}\right),\quad y_3\left(x,\rho_{n,1}\right)=e^{(2n-\sigma)\pi ix}+O\left(n^{-1}\right)$$

sağlanır. Buradan ve (4.56)'dan

$$u_{n,j}(x)=(-1)^{\sigma}\sin(2n-\sigma)\pi x+(-1)^{j}\cos(2n-\sigma)\pi x+O(\varepsilon_n) \tag{4.57}$$

sonucuna varılır.

(4.49), (4.50) formülleri ve $\lambda=-\rho^4$ eşitliği ile, basit özdeğerlerin aşağıdaki gibi iki dizisi elde edilir:

$$\lambda'_{n_0},\lambda'_{n_0+1},\lambda'_{n_0+2},\ldots, \tag{4.58}$$

$$\lambda''_{n_0},\lambda''_{n_0+1},\lambda''_{n_0+2},\ldots. \tag{4.59}$$

Bu özdeğerler aşağıdaki asimptotik formüllere sahiptir:

$$\lambda'_n=-\left(\rho_{n,1}\right)^4=\left((2n-\sigma)\pi\right)^4\left\{1+\frac{(-1)^{\sigma}\left(q(1)-q(0)\right)}{2\left((2n-\sigma)\pi\right)^5}+O\left(n^{-5}\varepsilon_n\right)\right\}, \tag{4.60}$$

$$\lambda''_n=-\left(\rho_{n,2}\right)^4=\left((2n-\sigma)\pi\right)^4\left\{1-\frac{(-1)^{\sigma}\left(q(1)-q(0)\right)}{2\left((2n-\sigma)\pi\right)^5}+O\left(n^{-5}\varepsilon_n\right)\right\}. \tag{4.61}$$

$$\left(n=n_0,n_0+1,n_0+2,\ldots\right)$$

Katlılığı da dikkate alırsak (4.58) ve (4.59) özdeğerlerinin dışında sonlu sayıda özdeğer mevcuttur. Varsayalım ki L operatörünün katlılığı da dikkate alarak (4.58) ve (4.59) özdeğerleri dışında m tane özdeğeri vardır. $m = m_1 + m_2$ olsun. Burada, m_1 ve m_2 negatif olmayan keyfi tamsayılardır. Kalan m tane özdeğerden m_1 tanesini (uygun olarak m_2 tanesini) (4.58) özdeğerlerine (uygun olarak (4.59) özdeğerlerine) eklersek aşağıdaki gibi iki özdeğerler dizisi elde ederiz:

$$
\begin{gathered}
c_1, c_2, \ldots, c_{m_1}, \lambda'_{n_0}, \lambda'_{n_0+1}, \lambda'_{n_0+2}, \ldots, \\
e_1, e_2, \ldots, e_{m_2}, \lambda''_{n_0}, \lambda''_{n_0+1}, \lambda''_{n_0+2}, \ldots.
\end{gathered}
$$

Bu dizileri sırasıyla $\lambda_{1,1}, \lambda_{2,1}, \ldots, \lambda_{n,1}, \ldots$ ve $\lambda_{1,2}, \lambda_{2,2}, \ldots, \lambda_{n,2}, \ldots$ ile gösterelim. Açıktır ki

$$\lambda_{n+n_1,1} = \lambda'_n, \qquad \lambda_{n+n_2,2} = \lambda''_n \qquad (n \geq n_0) \tag{4.62}$$

dır. Burada, $n_1 = m_1 - n_0 + 1$ ve $n_2 = m_2 - n_0 + 1$'dir. Buna göre, (4.60) - (4.62)'den

$$\lambda_{n+n_j,j} = \left((2n-\sigma)\pi\right)^4 \left\{1 - \frac{(-1)^{\sigma+j}\left(q(1)-q(0)\right)}{2\left((2n-\sigma)\pi\right)^5} + O\left(n^{-5}\varepsilon_n\right)\right\} \tag{4.63}$$

elde edilir. Benzer yöntemler kullanılarak (4.57) formülünden

$$u_{n+n_j,j}(x) = (-1)^{\sigma} \sin(2n-\sigma)\pi x + (-1)^j \cos(2n-\sigma)\pi x + O(\varepsilon_n),$$

yani (4.4) formülü elde edilebilir.

İspatın bu kısmına kadar $c_0 = 0$ varsaymıştık. Şimdi, $c_0 \neq 0$ varsayalım ve sınır değer problemindeki diferansiyel ifadeyi $y^{(iv)} + q(x)y = \lambda y$ olarak yazalım. Burada $q(1) \neq q(0)$ ve $c_0 = \int_0^1 q(\xi)\,d\xi \neq 0$'dır. diferansiyel ifadeyi tekrar $y^{(iv)} + \left(q(x) - c_0\right)y = (\lambda - c_0)y$ olarak yazarsak, bir şey değişmemiş olur. $Q(x) = q(x) - c_0$ ve $\mu = \lambda - c_0$ olarak tanımlarsak diferasiyel ifade $y^{(iv)} + Q(x)y = \mu y$ biçimini alır. Bu durumda, $\int_0^1 Q(\xi)\,d\xi = 0$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
& y^{(iv)} + Q(x)y = \mu y, \qquad (0 < x < 1) \\
& y'''(1) - (-1)^{\sigma} y'''(0) = 0, \\
& y''(1) - (-1)^{\sigma} y''(0) = 0, \\
& y'(1) - (-1)^{\sigma} y'(0) = 0, \\
& y(1) - (-1)^{\sigma} y(0) = 0,
\end{aligned} \tag{4.64}
$$

tipinde bir sınır değer problemi elde edilir. Biz yukarıda bu tipli sınır değer problemlerinin özdeğerler için (4.63) şeklinde bir formül elde etmiştik. Buna göre (4.64) sınır değer probleminin μ özdeğerleri için

$$\mu_{n+n_j,j}=\left((2n-\sigma)\pi\right)^4\left\{1-\frac{(-1)^{\sigma+j}\left(Q(1)-Q(0)\right)}{2\left((2n-\sigma)\pi\right)^5}+O\left(n^{-5}\varepsilon_n\right)\right\} \tag{4.65}$$

asimptotik formülü elde edilir. (4.3) formülü $Q(x)=q(x)-c_0$, $\mu=\lambda-c_0$ ve (4.65)'ten direkt elde edilir. Görüldüğü gibi, $q(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığındaki integrali özdeğerleri öteler, fakat özfonksiyonlar, yani (4.64) formülündeki y fonksiyonları c_0 sayısından etkilenmez.

Teorem 4.1'in ispatı bitti.

4.3. Teorem 4.2 ve Sonuç 4.1'in İspatı

$q(x)\in W_1^1(0,1)$ olduğunda L operatörünün kök fonksiyonlar sisteminin $L_2(0,1)$ uzayında Riesz tabanı olduğunu gösterelim.

$$v_{1,1}(x),v_{1,2}(x),\ldots,v_{n,1}(x),v_{n,2}(x),\ldots \tag{4.66}$$

sistemi

$$u_{1,1}(x),u_{1,2}(x),\ldots,u_{n,1}(x),u_{n,2}(x),\ldots \tag{4.67}$$

sisteminin biortogonali olsun. Yani $\left(u_{n,j},v_{m,s}\right)=\delta_{n,m}.\delta_{j,s}$ $\left(n,m=1,2,...,\ j,s=1,2\right)$ sağlansın. [2, s:84] veya [30, s:99]'daki iyi bilinen özelliğe göre, (4.66) sistemi L operatörünün eşlenik operatörü olan L^* operatörünün kök fonksiyonlar sistemidir. L^* lineer diferansiyel operatörü

$$l^*(z)=z^{(iv)}+\overline{q(x)}z$$

diferansiyel ifadesi ve

$$U_0^*(z)\equiv z(1)-(-1)^{\sigma}z(0)=0$$

$$U_1^*(z)\equiv z'(1)-(-1)^{\sigma}z'(0)=0$$

$$U_2^*(z)\equiv z''(1)-(-1)^{\sigma}z''(0)=0$$

$$U_3^*(z)\equiv z'''(1)-(-1)^{\sigma}z'''(0)=0$$

eşlenik sınır koşullarıyla elde edilir. L^* operatörünün biçiminden, $\overline{q(1)}\neq\overline{q(0)}$ olduğundan ve Teorem 4.1'den, yeterince büyük n'ler için

$$\overline{v_{n+n_j,j}(x)} = r_{n+n_j,j}\left((-1)^{\sigma}\sin(2n-\sigma)\pi x + (-1)^{j}\cos(2n-\sigma)\pi x + O(\varepsilon_n)\right), \tag{4.68}$$

asimptotik formülü elde edilir. Burada $r_{n+n_j,j}$ $(j=1,2)$ sayıları $(u_{n+n_j,j}, v_{n+n_j,j}) = 1$ eşitliğinden elde edilen sayılardır. Buradan ve (4.57), (4.68) formüllerinden, yeterince büyük n'ler için

$$r_{n+n_j,j} = 1 + O(\varepsilon_n), \quad j = 1,2$$

bulunur. (4.68) formülünü yeniden yazarsak, yeterince büyük n'ler için

$$\overline{v_{n+n_j,j}(x)} = (-1)^{\sigma}\sin(2n-\sigma)\pi x + (-1)^{j}\cos(2n-\sigma)\pi x + O(\varepsilon_n) \tag{4.69}$$

elde ederiz. (4.66) ve (4.67) sistemlerinin ikisi de $L_2(0,1)$'de tamdır (bkz: [4]). Ayrıca, (4.66) ve (4.67) sistemlerinin normlarının çarpımının sınırlı olduğu (4.57) ve (4.69) formüllerinden kolayca elde edilir. Dahası, L operatörünün sonlu sayıdaki özdeğeri hariç tüm özdeğerleri basit olduğundan, operatörün kök fonksiyonlar sisteminde en fazla sonlu tane ek fonksiyon vardır. Elde ettiğimiz bu bilgilere göre [38]'deki temel teoremden (4.67) sisteminin $L_2(0,1)$'de Riesz tabanı olduğu sonucuna varılır.

Şimdi, $q(x) \in W_2^1(0,1)$ kabul edelim ve Sonuç 4.1'i ispatlayalım. Bunun için önce, aşağıdaki sistemleri tanımlayalım:

$$g_0(x) = 1, \quad g_{2n-1}(x) = \sqrt{2}\sin 2n\pi x, \quad g_{2n}(x) = \sqrt{2}\cos 2n\pi x, \tag{4.70}$$

$$g_{2n-1} = \sqrt{2}\sin(2n-1)\pi x, \quad g_{2n} = \sqrt{2}\cos(2n-1)\pi x, \tag{4.71}$$

$$h_0(x) = 1, \quad h_{2(n-1)+j}(x) = \sin 2n\pi x + (-1)^{j}\cos 2n\pi x, \tag{4.72}$$

$$h_{2(n-1)+j}(x) = -\sin(2n-1)\pi x + (-1)^{j}\cos(2n-1)\pi x \tag{4.73}$$

Belirtelim ki (4.70) ve (4.71) sistemlerinin ikisi de $L_2(0,1)$ uzayının ortonormal tabanlarıdır. [26]'daki Lemma 2'ye göre (4.72) ve (4.73) sistemlerinin ikisi de $L_2(0,1)$'in Riesz tabanlarıdır. $q(x) \in W_2^1(0,1)$ olduğundan $q'(x) \in L_2(0,1)$'dir. O halde, bu fonksiyonun Fourier katsayılarının karelerinin toplamı yakınsaktır. Buradan kolayca

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2 < +\infty \tag{4.74}$$

elde edilir. Sonuç 4.1'in ispatını yalnızca $\sigma = 0$ için yapalım. $\sigma = 1$ durumu benzer biçimde yapılır. $n_1 \ge 0$ ve $n_2 \ge 0$ olsun. (4.4) asimptotik formülünden, $\{h_k(x)\}_{k=0}^{k=\infty}$ sisteminin tanımından ve (4.74)'den

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left\|u_{n+n_1,1}-h_{2n-1}\right\|^2+\left\|u_{n+n_2,2}-h_{2n}\right\|^2\right)\le const\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^2<+\infty \tag{4.75}$$

elde edilir. Açıktır ki (4.75)'te L operatörünün kök fonksiyonlarının n_1+n_2 tanesi, (4.70) sisteminin fonksiyonlarından da 1 tanesi yoktur. $n_1+n_2>1$ olsun. Bu durumda (4.75) eşitsizliğinden (4.67) sisteminin n_1+n_2-1 fonksiyonu dışındaki fonksiyonlardan oluşan S sistemi (4.70)'e karesel yakındır. (4.70) sistemi $L_2\left(0,1\right)$ uzayının ortonormal tabanı olduğundan Teorem 3.1.1.2 ile S, $L_2\left(0,1\right)$'in Riesz tabanıdır. Bu durum (4.67) sisteminin $L_2\left(0,1\right)$'in tabanı olması ile çelişir.

$n_1=n_2=0$ olsun. (4.67) sistemi $L_2\left(0,1\right)$'in Riesz tabanı olduğundan yine (4.75) ile $\left\{h_k\left(x\right)\right\}_{k=0}^{k=\infty}$ sisteminden $g_0\left(x\right)$ fonksiyonu atılarak elde edilen sistem $L_2\left(0,1\right)$'in Riesz tabanı olur ve bu da $\left\{h_k\left(x\right)\right\}_{k=0}^{k=\infty}$ sisteminin taban olması ile çelişir.

Geriye kalan tüm durumlar benzer biçimde ispatlanır. Böylece genel durumda $n_1+n_2=1-\sigma$ elde edilir. Genelliği kaybetmeden

$$n_1=0,\quad n_2=1-\sigma$$

varsayabiliriz. O halde

$$\begin{aligned}
u_{n,1}\left(x\right)&=\left(-1\right)^{\sigma}\sin\left(2n-\sigma\right)\pi x-\cos\left(2n-\sigma\right)\pi x+O\left(\varepsilon_n\right),\\
u_{n+1-\sigma,2}\left(x\right)&=\left(-1\right)^{\sigma}\sin\left(2n-\sigma\right)\pi x+\cos\left(2n-\sigma\right)\pi x+O\left(\varepsilon_n\right),\\
v_{n,1}\left(x\right)&=\left(-1\right)^{\sigma}\sin\left(2n-\sigma\right)\pi x-\cos\left(2n-\sigma\right)\pi x+O\left(\varepsilon_n\right),\\
v_{n+1-\sigma,2}\left(x\right)&=\left(-1\right)^{\sigma}\sin\left(2n-\sigma\right)\pi x+\cos\left(2n-\sigma\right)\pi x+O\left(\varepsilon_n\right)
\end{aligned} \tag{4.76}$$

olur.

Şimdi, $q\left(x\right)\in W_1^2\left(0,1\right)$ olduğunda L operatörünün kök fonksiyonlar sisteminin $L_p\left(0,1\right)$ $\left(1<p<+\infty, p\ne 2\right)$ uzayında taban oluşturduğunu ispatlayalım. Yukardaki gibi yalnızca $\sigma=0$ durumu için ispatı yapalım. $\sigma=1$ durumu benzer şekilde yapılır.

$q\left(x\right)\in W_1^2\left(0,1\right)$ olduğundan (4.5) formülüne göre

$$\varepsilon_n=O\left(n^{-1}\right)$$

dir. Bu sebeple, (4.76) formülleri $\sigma=0$ için

$$\begin{aligned}
u_{n,1}\left(x\right)&=\sin 2n\pi x-\cos 2n\pi x+O\left(n^{-1}\right),\\
u_{n+1,2}\left(x\right)&=\sin 2n\pi x+\cos 2n\pi x+O\left(n^{-1}\right)
\end{aligned} \tag{4.77}$$

ve

$$v_{n,1}(x) = \sin 2n\pi x - \cos 2n\pi x + O\left(n^{-1}\right),$$
$$v_{n+1,2}(x) = \sin 2n\pi x + \cos 2n\pi x + O\left(n^{-1}\right) \tag{4.78}$$

olarak yazılabilir.

Teorem 3.1.1.3 ile (4.70) sistemi her bir $p \in (1, +\infty)$ için $L_p(0,1)$'in tabanıdır. Dolayısıyla Teorem 3.1.1.4'ten $\exists M_p > 0$, $\forall f \in L_p(0,1)$ için

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} (f, g_n) g_n \right\|_p \le M_p \|f\|_p \quad (N = 1, 2, ...) \tag{4.79}$$

sağlanır. Burada $\|\cdot\|_p$, $L_p(0,1)$ uzayındaki normdur.

$p \in (1,2)$ olsun. (4.67) sistemi $L_2(0,1)$'de tam olduğundan $L_p(0,1)$'de de tamdır. Dahası, $\forall f \in L_p(0,1)$ için

$$\left\| \left(f, v_{n,j}\right) u_{n,j} \right\|_p \le const \|f\|_p$$

sağlanır; burada $n = 1, 2, \ldots$, ve $j = 1, 2$'dir. O halde Teorem 3.1.1.4'ten, (4.67) sisteminin $L_p(0,1)$'de taban olduğunu göstermek için $\forall f \in L_p(0,1)$, $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} \sum_{j=1}^{2} \left(f, v_{n,j}\right) u_{n,j} \right\|_p \le M \|f\|_p$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sabiti bulmak yeterlidir. Belirtelim ki aynı koşullar altında

$$J_m(f) = \left\| \sum_{n=1}^{m} \left\{ \left(f, v_{n,1}\right) u_{n,1} + \left(f, v_{n+1,2}\right) u_{n+1,2} \right\} \right\|_p \le M' \|f\|_p \tag{4.80}$$

eşitsizliğini ispatlamak yeterlidir; burada $m = 1, 2, \ldots$ ve M' bir sabittir. (4.70), (4.77) ve (4.78) formüllerinden

$$u_{n,1}(x) = h_{2n-1}(x) + O\left(n^{-1}\right), \quad u_{n+1,2}(x) = h_{2n}(x) + O\left(n^{-1}\right)$$
$$v_{n,1}(x) = h_{2n-1}(x) + O\left(n^{-1}\right), \quad v_{n+1,2}(x) = h_{2n}(x) + O\left(n^{-1}\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$J_m(f) \le J_{m,1}(f) + J_{m,2}(f) + J_{m,3}(f) + J_{m,4}(f) \tag{4.81}$$

bulunur. Burada $m = 1, 2, \ldots$ ve

$$J_{m,1}(f)=\left\|\sum_{n=1}^{2m}(f,g_n)g_n\right\|_p,\quad J_{m,2}(f)=\left\|\sum_{n=1}^{2m}(f,g_n)O\left(n^{-1}\right)\right\|_p,$$

$$J_{m,3}(f)=\left\|\sum_{n=1}^{2m}\left(f,O\left(n^{-1}\right)\right)g_n\right\|_p,\quad J_{m,4}(f)=\left\|\sum_{n=1}^{2m}\left(f,O\left(n^{-1}\right)\right)O\left(n^{-1}\right)\right\|_p$$

dir. Burada $\sum'$ toplamı $n=0$ haricindeki toplamı göstermektedir. (4.79)'den

$$J_{m,1}(f)\leq const\|f\|_p \tag{4.82}$$

elde edilir. Teorem 3.1.1.5'ten

$$\begin{aligned} J_{m,2}(f) &\leq const\sum_{n=1}^{2m}\left|(f,g_n)\right|n^{-1} \\ &\leq const\left(\sum_{n=1}^{2m}\left|(f,g_n)\right|^q\right)^{1/q}\left(\sum_{n=1}^{2m}n^{-p}\right)^{1/p}\leq const\|f\|_p \end{aligned} \tag{4.83}$$

bulunur; burada, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$'dir. Dahası,

$$\begin{aligned} J_{m,3}(f) &\leq \left\|\sum_{n=1}^{2m}\left(f,O\left(n^{-1}\right)\right)g_n\right\|_2=\left(\sum_{n=1}^{2m}\left|\left(f,O\left(n^{-1}\right)\right)\right|^2\right)^{1/2} \\ &\leq const\|f\|_1\left(\sum_{n=1}^{2m}n^{-2}\right)^{1/2}\leq const\|f\|_p \end{aligned} \tag{4.84}$$

ve

$$J_{m,4}\leq const\|f\|_1\sum_{n=1}^{2m}n^{-2}\leq const\|f\|_p \tag{4.85}$$

kolayca elde edilir.

(4.80) eşitsizliği (4.81)-(4.85) eşitsizliklerinin bir sonucudur. (4.67) sisteminin $L_p(0,1)$ $(1<p<2)$ uzayının bir tabanı olduğu ispatlandı.

$2<p<+\infty$ ve $1/p+1/q=1$ olsun. Belirtelim ki $1<q<2$'dir ve (4.66) L^* operatörünün kök fonksiyonlar sistemidir. Yukarıda ispatlandığı gibi, bu operatörün kök fonksiyonlar sistemi $L_q(0,1)$'in tabanıdır. O halde ona biortogonal olan (4.67) sistemi de $L_p(0,1)$'in tabanıdır.

Teorem 4.2 ve Sonuç 4.1'in ispatı bitti.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde öncelikle bu tez çalışmasında ele alınan sonuçlar özetlenecek daha sonra bu konu ile ilgili başka nelerin yapılabileceği hakkında öneriler verilecektir.

5.1. Sonuçlar

Bu tezde, (4.1) - (4.2) lineer diferansiyel operatörünün özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik davranışları incelenmiş, kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayında taban oluşturduğu ve bu tabanın $p = 2$ durumunda koşulsuz olduğu ispatlanmıştır. Bu sonuçlar Bulgular ve Tartışma bölümünde verilmiştir. Problemin çözümü için gerekli lemmalar, teoremler ve yardımcı sonuçlar Materyal ve Yöntem başlığı altında verilmiştir.

5.2. Öneriler

Tezde, (4.1) - (4.2) operatörünün spektral özellikleri ve kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayındaki tabanlığı $q(1) \neq q(0)$ durumunda incelenmiştir. Görüldüğü gibi, $q(1) = q(0)$ durumunda (4.1) - (4.2) operatörünün tabanlık ve diğer spektral özellikleri incelenmemiştir. Lineer diferansiyel operatörlerin spektral teorisiyle ilgilenen bilim insanlarının bu çözülmemiş durumun çözümü üzerine çalışmalar yapılması önerilir.

KAYNAKLAR

[1] Dunford N, Schwartz JT, 1988. Linear Operators. Part III, Wiley Classics Lib., John Wiley & Sons, New York, 667 s.

[2] Keselman GM, 1964. On the unconditional convergence of eigenfunction expansions of certain differential operators, Izv. Vuz. Mat., 39 (2): 82–93.

[3] Mikhailov VP, 1962. On Riesz bases in $L_2(0,1)$, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 144 (5): 981–984.

[4] Shkalikov AA, 1982. Basis property of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions, Vestn. Mosk. U. Mat. M., 6: 12–21

[5] Ionkin NI, 1977. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition, Differ. Uravn., 13 (2): 294–304.

[6] Kerimov NB, Mamedov KR, 1998. On the Riesz basis property of the root functions in certain regular boundary value problems, Math. Notes, 64 (4): 483–487.

[7] Makin AS, 1999. On a class of boundary value problems for the Sturm–Liouville operator, Differ. Uravn., 35 (8): 1058–1066.

[8] Makin AS, 2006. On spectral decompositions corresponding to non-self-adjoint Sturm–Liouville operators, Dokl. Math., 73 (1): 15–18.

[9] Makin AS, 2006. Convergence of expansions in the root functions of periodic boundary value problems, Dokl. Math., 73 (1): 71–76.

[10] Makin AS, 2006. On the basis property of systems of root functions of regular boundary value problems for the Sturm–Liouville operator, Diff. Equat., 42 (12): 1717–1728.

[11] Makin AS, 2008. Characterization of the spectrum of regular boundary value problems for the Sturm–Liouville operator, Diff. Equat., 44 (3): 341–348.

[12] Makin AS, 2008. Asymptotics of the spectrum of the Sturm–Liouville operator with regular boundary conditions, Diff. Equat., 44 (5): 645–658.

[13] Djakov P, Mityagin B, 2006. Instability zones of one-dimensional periodic Shrödinger and Dirac operators, Russ. Math. Surv., 61 (4): 663–766.

[14] Djakov P, Mityagin B, 2011. Convergence of spectral decompositions of Hill operators with trigonometric polynomials as potentials, Dokl. Math., 83 (1): 5–7.

[15] Djakov P, Mityagin B, 2011. Convergence of spectral decompositions of Hill operators with trigonometric polynomial potentials, Math. Ann., 351 (3): 509–540.

[16] Djakov P, Mityagin B, 2012. Criteria for existance of Riesz bases consisting of root functions of Hill and 1D Dirac operators, J. Funct. Anal., 263 (8): 2300-2332.

[17] Gesztesy F, Tkachenko V, 2012. A Schauder and Riesz basis criterion for non-self-adjoint Schrödinger operators with periodic and antiperiodic boundary conditions, J. Differ. Equations, 253 (2): 400–437.

[18] Kiraç AA, 2009. Riesz basis property of the root functions of non-selfadjoint operators with regular boundary conditions, Int. J. Math. Anal. (Ruse)., 3 (21-24): 1101–1109.

[19] Shkalikov AA, Veliev OA, 2009. On the Riesz basis property of eigen- and associated functions of periodic and antiperiodic Sturm–Liouville problems, Math. Notes, 85 (5-6): 647–660.

[20] Dernek N, Veliev OA, 2005. On the Riesz basisness of the root functions of the nonself-adjoint Sturm–Liouville operator, Isr. J. Math., 145: 113–123.

[21] Veliev OA, 2010. On the nonself-adjoint ordinary differential operators with periodic boundary conditions, Isr. J. Math., 176: 195–207.

[22] Veliev OA, 2013. Asymptotic analysis of non-self-adjoint Hill operators, Cent. Eur. J. Math., 11 (12): 2234-2256.

[23] Veliev OA, Duman MT, 2002. The spectral expansion for a nonself-adjoint Hill operator with a locally integrable potential, J. Math. Anal. Appl., 265 (1): 76–90.

[24] Veliev OA, Nur C, On the basis property of the root functions of some class of non-self-adjoint Sturm–Liouville operators, arXiv.org, http://arxiv.org/pdf/1301.7043v1.pdf (Erişim tarihi: 29.01.2013).

[25] Kerimov NB, Kaya U, 2013. Spectral properties of some regular boundary value problems for fourth order differential operators, Cent. Eur. J. Math., 11 (1): 94-111.

[26] Kerimov NB, Kaya U, 2014. Spectral asymptotics and basis properties of fourth order differential operators with regular boundary conditions, Math. Method. Appl. Sci., 37 (5): 698-710.

[27] Kerimov NB, Kaya U, 2014. Some problems of spectral theory of fourth-order differential operators with regular boundary conditions, Arab. J. Math., 3 (1): 49-61.

[28] Kara Kuzu E, 2016. Dördüncü Mertebeden bir Regüler Sınır Değer Probleminin Kök Fonksiyonlarının Tabanlık Özellikleri. Yüksek Lisans Tezi, Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Bitlis.

[29] Kerimov NB, Kaya U, Gunes H, 2015. Spectral properties of fourth order differential operators with periodic and antiperiodic boundary conditions, Results Math., 68 (3): 501-518.

[30] Naimark MA, 1969. Linear Differential Operators, 2nd ed., Nauka, Moskow, 129 s., (in Russian).

[31] Sobolev VJ, Liusternik LA, 1965. Elements of Functional Anaysis, Rederick Ungar Publishing Company, New York, 227 s.

[32] Christensen O, 1966. An Introduction to Frames and Riesz Bases, Birkhauser, Boston, 440 s.

[33] Ahlfors VL, 1979. Complex Analysis, McGraw-Hill Inc., New York, 331 s.

[34] Gohberg IC, Krein MG, 1969. Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators, Transl. Math. Monogr., 18, American Mathematical Society, Providence, 378 s.

[35] Bari NK, 1964. A Treatise on Trigonometric Series, Vol. II, Macmillan, New York, 548 s.

[36] Kashin BS, Saakyan AA, 1989.“Orthogonal Series, Transl. Math. Monogr., 75”, American Mathematical Society, Providence, 378 s.

[37] Zygmund A, 1959. Trigonometric Series. II, 2nd ed., Cambridge University Press, New York, 331 s.

[38] Kerimov NB, 1986. Unconditional basis property of a system of eigen and associated functions of a fourth-order differential operator, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 286 (4): 803–808.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Çorum'un Oğuzlar ilçesinde doğdu. İlkokul ve ortaokulu Osman Ünyazıcı İlköğretim Okulunda, liseyi Elvankent Bilgi Anadolu Lisesinde tamamladı. 2009 yılında kazandığı Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 2013 yılında mezun oldu. 2014 yılında Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesinde Pedagojik Formasyon sertifikası aldı. 2015 yılında Bitlis Hatuniye Kız Anadolu İmam-Hatip lisesinde matematik öğretmeni olarak göreve başlayıp halen orada çalışmaktadır. Yabancı dili İngilizce'dir.

Selma ÖZKAN