T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ VE MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

# BİLATERAL DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL VE İDEAL YAKINSAKLIĞI

İsmail YILMAZ

AĞUSTOS 2017

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

# BİLATERAL DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL VE İDEAL YAKINSAKLIĞI

Hazırlayan

İsmail YILMAZ

Danışman

Doç. Dr. Harun POLAT

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Tunay BİLGİN

Doç. Dr. Harun POLAT

Yrd. Doç. Dr. Muhammed ÇINAR

AĞUSTOS 2017

İsmail YILMAZ tarafından hazırlanan "**Bilateral Dizilerinin İstatistiksel ve İdeal Yakınsaklığı**" adlı tez çalışması 04/08/2017 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

| **Jüri Üyeleri** | **İmza** |
|---|---|
| Prof. Dr. Tunay BİLGİN<br>(Başkan) | |
| Doç. Dr. Harun POLAT<br>(Danışman) | |
| Yrd. Doç. Dr. Muhammed ÇINAR<br>(Üye) | |

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 14/08/2017 gün ve 30/22 Sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Koray KÖKSAL
Enstitüsü Müdürü

# ÖZET

## BİLATERAL DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL VE İDEAL YAKINSAKLIĞI

İsmail YILMAZ

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Harun POLAT
Ağustos 2017, 46 sayfa

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde bu çalışma ile ilgili temel tanım, teoremler ve çalışmanın tarihi verildi. İkinci bölümde ideal yakınsaklık kavramının daha iyi anlaşılması için istatistiksel yakınsaklık kavramı örneklerle açıklandı. Üçüncü bölümde kullanılan materyal ve yöntemler verildi. Dördüncü bölümde ideal ve filter kavramları verilerek arasındaki ilişki açıklandı. Reel sayı dizilerinin ideal yakınsaklık kavramı incelenerek gerekli tanım ve teoremler verildi. Herhangi bir metrik uzayda ideal yakınsaklık kavramı kısaca incelendi. $I$ - limit ve $I$ - cluster noktaları kavramları kısaca açıklandı. İdeal yakınsaklığın yakınsaklık alanları incelendi. Beşinci bölümde ise sonuç ve önerilere yer verildi. Sonuç kısmında Bilateral diziler için istatistiksel ve ideal yakınsaklık kavramları incelendi. Bilateral dizilerinin istatistiksel ve ideal yakınsaklığı ile ilgili önerilerde bulunuldu.

**Anahtar kelimeler**: Yoğunluk, İstatistiksel Yakınsaklık, İdeal Yakınsaklık, Bilateral Dizi

**ABSTRACT**

STATISTICAL AND IDEAL CONVERGENCE OF BILATERAL SEQUENCES

İsmail YILMAZ

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Harun POLAT
August 2017, 46 pages

This study consists of five chapters. In the first part, the basic definitions, theorems and the date of the work were given. In the second part, the concept of statistical convergence is explained with examples in order to better understand the concept of ideal convergence. Materials and methods used in the third chapter are given. In the fourth chapter, the relation between ideal and filter concepts is explained. The concept of ideal convergence of real number sequences is examined and necessary definitions and theorems are given. The concept of ideal convergence in any metric space has been studied briefly. The concepts of $I$ - limit ve $I$ - cluster points are briefly explained. Convergence areas of ideal convergence have been studied. In the fifth section, the conclusions and recommendations are given. In the conclusion section, statistical and ideal convergence concepts for bilateral sequences were examined. Statistical and ideal convergence of bilateral sequences was suggested.

**Keywords:** Density, Statistical Convergence, Ideal Convergence, Bilateral Sequence

**TEŞEKKÜR**

Tez çalışması sırasında her türlü bilgi, teşvik ve deneyimleri ile yardımlarını esirgemeyen başta danışman hocam Sayın Doç. Dr. Harun POLAT'a ve ayrıca çalışmalarımda yardımcı olan Yrd. Doç. Dr. Muhammed ÇINAR'a göstermiş oldukları sabırdan dolayı teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

## SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $d(A)$ | $A$ kümesinin asimptotik yoğunluğu |
| $\delta(A)$ | $A$ kümesinin logaritmik yoğunluğu |
| $N$ | Doğal sayılar kümesi |
| $F$ | Filter |
| $F(I)$ | $I$ idealinin yakınsaklık alanı |
| $I$ | İdeal |
| $R$ | Reel sayılar kümesi |
| $c_0$ | Sıfıra yakınsak dizilerin kümesi |
| $l_\infty$ | Sınırlı diziler kümesi |
| $Z$ | Tam sayılar kümesi |
| $c$ | Yakınsak dizilerin kümesi |
| $P(X)$ | $X$ kümesinin kuvvet kümesi |

# 1. GİRİŞ

Reel sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklık kavramını ilk defa 1951 yılında Fast [1] ve Steinhaus [2] verdi. İstatistiksel yakınsaklık kavramı $\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin yoğunluk kavramı ile ilişkilidir. Yoğunluk kavramı ile ilişkisini Buck [3] verdi ve bu kavramı hemen hemen yakınsak olarak tanıttı. İstatistiksel yakınsaklığın toplanabilme ile ilişkisini ilk olarak Schoonberg [4] verdi ve bu kavramı $D-$yakınsaklık olarak tanıttı. Fridy [5] çalışmasında hiç bir matris toplanabilme metodunun istatistiksel yakınsaklık metodunu içermediğini gösterdi. Freedman ve Sember [6] yoğunluk ve negatif olmayan matrisler arasındaki ilişkiyi incelediler. Salat [7] istatistiksel yakınsaklığın topolojik özelliklerini inceledi ve sınırlı reel değerli istatistiksel yakınsak dizilerin bilinen anlamda sınırlı dizilerin altuzayı olduğunu gösterdi. Yine Fridy [8] bir dizinin altdizisinin yoğunluğunu düşünerek istatistiksel limit ve istatistiksel cluster noktaları kavramlarını tanıttı. Connor [9] $\mu-$istatistiksel yakınsaklık ve $\mu-$yoğun yakınsaklık kavramlarını sundu. Buradaki $\mu$, $\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin altkümelerinin bir alanı üzerine tanımlı iki değerli bir ölçüdür. Buradaki ölçü kavramı $[0, 1]$ kapalı aralığına ait olan bir fonksiyondur. İstatistiksel yakınsaklık kavramı birçok matematikçi tarafından, çalışılmış ve halen çalışılmakta olan bir konudur. [10-12]

$\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin altkümelerinin $I$ ideali kavramına dayanan ideal yakınsaklık kavramını ise ilk olarak 2000 yılında Kostyrko vd. [13] tanıttılar. Bu kavram istatistiksel yakınsaklığın bir genellemesidir ve istatistiksel yakınsaklığın birçok özelliğinden yararlanmıştır. Kostyrko vd. [13] önce reel sayı dizilerinin ideal yakınsaklığını araştırdılar. Bu çalışmada hem bilinen alışılmış (ordinary) anlamındaki yakınsaklık hemde istatistiksel yakınsalık ile arasındaki ilişkiyi örnekleriyle beraber incelemişlerdir. Aynı çalışmada Connor [9] un sunduğu $\mu-$istatistiksel yakınsaklıklığın ideal yakınsaklık kavramına bir bakıma denk olduğunu göstermişlerdir. Buradan yine Connor [9] un sunduğu $\mu-$yoğun yakınsaklığına bir bakıma denk olan $I^*-$yakınsaklığı tanıttılar. Daha sonra İdeal yakınsaklığı regüler bir toplanabilme (limitleme) metodu gibi düşünüp yakınsaklık alanlarını verdiler. $F(I)$ ve $F(I^*)$ sırasıyla $I-$yakınsaklık ve $I^*-$yakınsaklığın yakınsaklık alanları olmak üzere; $F(I)$ yakınsaklık alanının $\ell_\infty$ sınırlı dizi uzayının lineer alt uzayı olması ve birbirine eşit olması için gerek ve yeter şartları göstermişlerdir. Kostyrko vd. [14] ideal yakınsaklığı herhangi bir metrik uzayda ele alıp gerekli teoremleri ispatladılar. Aynı çalışmalarında bir metrik uzay üzerinde Fridy [8] in sunmuş olduğu istatistiksel limit ve istatistiksel cluster (yığılma) noktalarını, $I-$limit ve $I-$cluster (yığılma) noktaları kavramlarına genişlettiler.

Bilateral diziler için yakınsaklık kavramını 2012 de Agrawal vd. [28] çalıştılar. Bu çalışmada ise bilateral diziler için istatistiksel ve ideal yakınsaklık kavramları tanıtıldı. Önce bilateral dizilerin istatistiksel yakınsaklığı ile ilgili gerekli örnek ve teoremler verildi. Daha sonra istatistiksel yakınsak bilateral dizinin kuvvetli p-Cesaro toplanabilir olduğu gösterildi. Yine aynı bölümde bilateral dizilerin ideal yakınsaklık kavramı verildi. Yakınsak olan bilateral dizileri ile ilişkisi açıklandı ve bilinen anlamdaki yakınsaklığın aksiyomlarının sağlatılıp sağlatılmadığı gösterildi.

## 1.1 Temel Tanım Ve Teoremler

**1.1.1. Tanım:** $X$ boş olmayan bir küme ve $\preceq$, $X$ de bir bağıntı olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\preceq$ bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı denir.

*i.* Her $x \in X$ için $x \preceq x$ dir. (Yansıma özelliği)

*ii.* $x \preceq y$ ve $y \preceq z$ ise $x = y$ dir. (Ters simetri özelliği)

*iii.* $x \preceq y$ ve $y \preceq z$ ise $x \preceq z$ dir. (Geçişme özelliği)

Burada $x \preceq y$ ifadesi "$x$ önce gelir $y$" diye okunur [24,26].

**1.1.2 Tanım:** $X$ kümesinde kısmi sıralama bağıntısı tanımlanmışsa $X$ kümesine kısmi sıralı küme denir ve $(X, \preceq)$ ile gösterilir [24,26].

**1.1.3 Tanım:** Kısmi sıralı bir kümenin herhangi iki elemanı (başka bir ifade ile her eleman çifti) mukayese (karşılaştırma) edilebilirse bu kümeye tam sıralı küme denir.

Örneğin; $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi tam sıralı bir kümedir [24,26].

**1.1.4 Tanım:** $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq X$ olsun. $(A \neq \varnothing)$ Her $x \in A$ için $u \preceq x$ olacak şekilde $u \in X$ varsa $u$ ya $A$ nın $X$ deki alt sınırı denir. Benzer şekilde Her $x \in A$ için $x \preceq v$ olacak şekilde $v \in X$ varsa $v$ ya $A$ nın $X$ deki üst sınırı denir [24,26].

**1.1.5 Tanım:** Üst sınıra sahip olan kümeye üstten sınırlı, alt sınıra sahip olan kümeye alttan sınırlı küme denir. Hem alttan hem üstten sınırlı olan kümeye sınırlı küme denir [24,26].

**1.1.6 Tanım:** $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme $A \subseteq X$ ve $A$ nın ($X$ deki) alt sınırlarının kümesi $A_1$ olsun. $a \in A_1$ olmak üzere her $x \in A_1$ için $x \preceq a$ ise $a$ ya $A$ nın en büyük alt sınırı (veya $A$ nın infimumu) denir ve $\inf A$ ile gösterilir. Benzer şekilde $A$ nın üst sınırlarının kümesini $A_2$ ile gösterelim. $b \in A_2$ olmak üzere her $y \in A_2$ için $b \preceq y$ ise $b$ ye $A$ nın en küçük üst sınırı (veya supremumu) denir ve $\sup A$ ile gösterilir [24,26].

**1.1.7 Tanım:** $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq X$ olsun. $A$ tam sıralı ise $A$ ya $X$ de zincir denir [24,26].

**1.1.8 Teorem (Zorn Lemması):** $X$ kısmi sıralı bir küme olsun. $X$ in her zincirinin bir üst sınırı varsa $X$ in bir maksimal elemanı vardır [24].

**1.1.9 Tanım:** Bir kümenin eleman sayısına o kümenin kardinalitesi denir [27].

**1.1.10 Tanım:** $X$ ve $Y$ iki küme olsun. Eğer $X$ den $Y$ ye bire bir ve örten bir fonksiyon varsa bu cümleler denktir veya aynı kardinaliteye sahiptir denir [27].

**1.1.11 Tanım:** Bir $X$ kümesi boş yada $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n$ tane elemanı varsa bu kümeye sonlu, aksi halde sonsuz küme denir [27].

**1.1.12 Tanım:** Bir $X$ kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesine denk ise $X$ kümesine sayılabilir sonsuz küme denir. Sonlu yada sayılabilir sonsuz olan bir kümeye sayılabilir bir küme denir. Örneğin; $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi sayılabilirdir [27].

**1.1.13 Teorem:** Sayılabilir bir kümenin herhangi bir alt kümesi de sayılabilirdir [27].

**1.1.14 Teorem:** Sayılabilir kümelerin sayılabilir birleşimleride sayılabilirdir [27].

**1.1.15 Tanım:** Ortak elemanı olmayan kümelere ayrık kümeler denir. Ayrık iki küme için $X \cap Y = \varnothing$ yazarız [26].

**1.1.16 Tanım:** Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar olan fonksiyona dizi denir. Eğer bir dizinin değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise o diziye reel terimli dizi, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi ise kompleks terimli dizi, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ise rasyonel terimli dizi denir [22].

**1.1.17 Tanım:** Tanım kümesi $\mathbb{Z}$ tamsayılar olan fonksiyona bilateral dizi denir. Eğer bilateral dizinin değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise o diziye reel terimli dizi, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi ise kompleks terimli dizi, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ise rasyonel terimli dizi denir [28]

**1.1.18 Tanım:** Her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq K$ olacak şekilde bir $K$ pozitif reel sayısı varsa $(x_n)$ dizisine sınırlı dizi denir [22].

**1.1.19 Tanım:** $\varepsilon > 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun.

$$K = \{x : |x - a| < \varepsilon,\ x \in \mathbb{R}\}$$

kümesine $a$ nın $\varepsilon$ komşuluğu denir. Bu durumda

$$|x - a| < \varepsilon \implies a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \implies x \in (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$$

olduğundan $a$ nın $\varepsilon$ komşuluğu $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ aralığıdır [22].

**1.1.20 Tanım:** $(x_n)$ bir reel sayı dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için, $n > n_0$ olduğunda $|x_n - a| < \varepsilon$ kalacak şekilde $\varepsilon$ na bağlı bir $n_0$ sayısı bulunabiliyorsa $(x_n)$ dizisi $a$ ya yakınsaktır denir.

Bunu şöyle de ifade edebiliriz; $\forall \varepsilon > 0$ için $(x_n)$ dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç geriye kalan tüm terimleri bir $a$ reel sayısının $\varepsilon$-komşuluğunda bulunuyorsa $(x_n)$ dizisinin limiti $a$ dır (veya $a$ ya yakınsar) denir ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

veya $(x_n) \to a$ şeklinde gösterilir [20,22].

**1.1.21 Tanım:** $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bir bilateral dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için, $|n| > n_0$ olduğunda $|x_n - a| < \varepsilon$ kalacak şekilde $\varepsilon$ na bağlı bir $n_0$ sayısı bulunabiliyorsa $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisi $a$ ya yakınsaktır denir.

$$\lim_{|n|\to\infty} x_n = a$$

şeklinde gösterilir [28]

**1.1.22 Teorem:** Yakınsak bir dizinin bir tek limiti vardır [20,22].

**1.1.23 Teorem:** Yakınsak her dizi sınırlıdır [20,22].

**1.1.24 Teorem:** Yakınsak bir dizinin her alt dizisi yakınsaktır [20,22].

**1.1.25 Tanım:** $(x_{n_k})$, $(x_n)$ dizisinin bir alt dizisi olsun. $(x_{n_k})$ yakınsak ve limiti $a$ ise bu $a$ noktasına $(x_n)$ dizisinin bir limit noktası denir [22].

**1.1.26 Tanım:** $(x_n) \subset \mathbb{R}$ bir dizi olmak üzere ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. $x$ noktasının her komşuluğunda $(x_n)$ dizisinin $x$ den farklı en az bir elemanı varsa bu $x$ noktasına $(x_n)$ dizisinin bir yığılma noktasıdır denir [22].

**1.1.27 Tanım:** $L$ boş olmayan bir küme ve $F$, reel yada kompleks sayılar cismi olsun.

$$\begin{array}{rcll} + & : & L \times L \to L & \text{(toplama)} \\ \cdot & : & F \times L \to L & \text{(skalerle çarpma)} \end{array}$$

dönüşümlerini tanımlayalım. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $L$ ye $F$ üzerinde lineer uzay (veya vektör uzay) denir [24]. $\forall \alpha,\beta \in K$ ve $x,y \in X$ için

$L1.\ x+y=y+x$

$L2.\ (x+y)+z=x+(y+z)$

$L3.\ x+\theta=\theta+x$ olacak şekilde bir $\theta\in X$ vardır.

$L4.\ \forall x\in X$ için $x+(-x)=\theta$ olacak şekilde bir $(-x)\in X$ vardır.

$L5.\ \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$

$L6.\ \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

$L7.\ (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

$L8.\ 1\cdot x=x$

**1.1.28 Tanım:** $L$, $F$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun ve $M$, $L$ nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. $M$, $L$ lineer uzayındaki işlemlere göre kendi başına bir lineer uzay oluşturuyorsa $M$ ye $L$ nin lineer altuzayı denir [24].

**1.1.29 Tanım:** $X$ boş olmayan bir küme olsun.

$$\rho : X\times X\rightarrow R$$

fonksiyonu için $\forall x,y,z\in X$ olmak üzere;

$i.\ \rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$

$ii.\ \rho(x,y)=\rho(y,x)$

$iii.\ \rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)$

şartları sağlanıyorsa $\rho$ fonksiyonuna $X$ üzerinde bir metrik ve $\rho$ ile birlikte $X$ e metrik uzay denir ve $(X,\rho)$ ile gösterilir [23,24].

**1.1.30 Tanım:** $(X,\rho)$ bir metrik uzay, $x_0\in X$ ve $r>0$ bir reel sayı olsun.

$i.\ B(x_0,r)=\{x\in X:\rho(x,x_0)<r\}$ kümesine $x_0$ merkezli $r$ yarıçaplı açık yuvar,

$ii.\ \overline{B}(x_0,r)=\{x\in X:\rho(x,x_0)\leq r\}$ kümesine $x_0$ merkezli $r$ yarıçaplı kapalı yuvar,

$iii.\ B'(x_0,r)=\{x\in X:0<\rho(x,x_0)<r\}$ kümesine $x_0$ merkezli $r$ yarıçaplı delik yuvar ve

$iv.\ S(x_0,r)=\{x\in X:\rho(x,x_0)=r\}$ kümesine $x_0$ merkezli $r$ yarıçaplı yuvar yüzeyi denir [24].

**1.1.31 Tanım:** $(X,\rho)$ bir metrik uzay ve $(x_n)$, $X$ de bir dizi olsun.

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\rho(x_n,x)=0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $(x_n)$ dizisine $X$ de yakınsaktır ve $x$ e de dizinin limiti denir. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ veya $(x_n) \to x$ ile gösterilir [23,24].

**1.1.32 Tanım:** $(X,\rho)$ bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için $B(x,r) \subseteq A$ olacak şekilde bir $r$ pozitif sayısı varsa $A$ ya $X$ in açık alt kümesi veya $A$, $X$ de açıktır denir.

$X$ in $B$ altkümesinin $X$ deki tümleyeni yani $B^t = X - B$, $X$ de açıksa $B$ ye kapalı küme denir [24].

**1.1.33 Tanım:** $(X,\rho)$ bir metrik uzay $A \subseteq X$ ve $x_0 \in A$ olsun. $B(x_0,\varepsilon) \subseteq A$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa $A$ ya $x_0$ ın bir civarı ve $x_0$ da $A$ nın bir iç noktasıdır denir [24].

**1.1.34 Tanım:** $(X,\rho)$ bir metrik uzay $A \subset X$ ve $x_0 \in X$ (bu nokta $A$ nın bir noktası olabilirde olmayabilirde) olsun. $x_0$ ın herbir $B'(x_0,\varepsilon)$ delik civarı $A$ ya ait bir nokta ihtiva ediyorsa yani; $B'(x_0,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ ise $x_0$ noktasına $A$ nın yığılma noktası denir.

$A$ nın yığılma noktalarının $A'$ kümesi ile $A$ nın noktalarından ibaret olan kümeye $A$ nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. Öyleyse $\overline{A} = A \cup A'$ dir. $\overline{A}$, $A$ yı ihtiva eden en küçük kapalı kümedir.

$A$ nın kapalı olması için gerek ve yeter şart $A = \overline{A}$ olmasıdır [24].

**1.1.35 Tanım:** $(X,\rho)$ bir metrik uzay $A \subset X$ olsun. $A$ nın kapanışı $X$ e eşit ise yani, $\overline{A} = X$ ise $A$ ya $X$ de yoğundur denir. Eğer $X$ in sayılabilir yoğun bir altkümesi varsa $X$ e ayrılabilir denir.

Örneğin; $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ de yoğundur. Ayrıca $\mathbb{Q}$ sayılabilir olduğundan $\mathbb{R}$ ayrılabilirdir [24].

**1.1.36 Tanım:** $f$, $X$ den $Y$ ye bir bağıntı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $f$ bağıntısına bir fonksiyon denir.

$i$. Her $x \in X$ için $(x,y) \in f$ olacak şekilde bir $y \in Y$ vardır.

$ii$. Eğer $(x,y) \in f$ ve $(x,z) \in f$ ise $y = z$ dir.

O halde $X$ den $Y$ ye bir $f$ fonksiyonu, $X$ in her elemanını $Y$ nin bir tek elemanına götüren kuraldır. $(x,y) \in f \Leftrightarrow y = f(x)$ olmak üzere $X$ den $Y$ ye bir $f$ fonksiyonu genelde $f : X \to Y$ ile gösterilir [24,26].

**1.1.37 Tanım:** $X$ in boş olmayan bir $A$ altkümesi verilsin.

$$\chi_A^{(x)} = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in X \backslash A \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\chi_A : X \to \{0,1\}$ fonksiyonuna $A$ nın karakteristik fonksiyonu denir [25].

**1.1.38 Tanım:** Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin kümesini $w$ ile gösterelim. Eğer $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve $\alpha$ bir skaler olmak üzere $w$;

$$x + y = (x_k + y_k) \quad \text{ve} \quad \alpha x = (\alpha x_k)$$

işlemlerinin altında (yani toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalı ise) bir lineer uzaydır. $w$ nın her alt lineer uzayına dizi uzayı denir. Örneğin;

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

sınırlı dizi uzayını,

$$c = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut} \right\}$$

yakınsak dizi uzayını ve

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k = 0 \right\}$$

sıfıra yakınsak dizilerin uzayını temsil eder [18,25].

**1.1.39 Tanım:** $X$ ve $Y$, $w$ nın iki alt kümesi olsun. $A = (a_{nk})$ reel yada kompleks terimli sonsuz bir matris olmak üzere, $x = (x_k) \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ve her $n \geq 1$ için

$$y_n = (Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serisi yakınsak ise $(y_n) = ((Ax)_n) = Ax$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir. Eğer her $x \in X$ için $(y_n) = (Ax)_n$ dönüşüm dizisi mevcut ve $((Ax)_n) \in Y$ ise $A = (a_{nk})$ matrisine $X$ den $Y$ içine bir matris dönüşümü tanımlar denir [15,18].

**1.1.40 Tanım:** Eğer bir $x$ dizisi için $Ax$ dönüşüm dizisi mevcut ve bir $L$ değerine yakınsak ise $x$ dizisi $L$ değerine A-limitlenebilirdir (veya A-toplanabilirdir) denir ve $A - \lim x = L$ ile gösterilir [15,18].

**1.1.41 Tanım:** Eğer $A$, $X$ den $Y$ içine bir matris dönüşümü tanımlar ise $A \in (X, Y)$ olarak yazılır. Toplamı ve limiti koruyan matrislerin sınıfını $(X, Y; p)$ ile göstereceğiz [15,18].

**1.1.42 Tanım:** Eğer $A$ matrisi yakınsak diziyi yakınsak diziye dönüştürüyor ve aynı zamanda limiti koruyorsa bu $A$ matrisine regüler matris denir ve $A \in (c, c; p)$ ile gösterilir [15,18].

**1.1.43 Teorem:** Bir $A = (a_{nk})$ matrisi verilsin. $A \in (c, c; p)$ olması için gerek ve yeter şart;

$i.\ \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$

$ii.\ \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$

$iii.\ \lim_{n\to\infty} \sum_k a_{nk} = 1$

olmasıdır [21].

**1.1.44 Tanım:** $(x_n)$, $\sum a_n$ serisinin $n$. ci kısmi toplamı olarak ve onun aritmetik ortalaması olan

$$\sigma_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \ n = 1, 2, \ldots$$

olarak verilsin. Eğer $\{\sigma_n\}$ yakınsak ise $\sum a_n$ serisi Cesăro toplanabilir (veya $(C, 1)$ toplanabilir) denir. Eğer $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S$ ise o zaman $\sum a_n$ serisinin Cesăro toplamı (veya $(C, 1)$ toplamı) $S$ dir denir. Cesăro toplanabilirliğe karşılık gelen matris

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & 0 \le k \le n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

matrisi olup Cesăro matrisi olarak tanımlanır. Ayrıca Cesăro matrisi regüler bir matristir [25].

# 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

## 2.1 İstatistiksel Yakınsaklık

**2.1.1 Tanım:** $A \subseteq N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ olsun. $\chi_A$, $A$ kümesinin karakteristik fonksiyonu ve

$$d_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_A(k), \; n = 1, 2, \ldots$$

olmak üzere

$$\underline{d}(A) = \lim_{n \to \infty} \inf d_n(A) \quad ve \quad \overline{d}(A) = \lim_{n \to \infty} \sup d_n(A)$$

sırasıyla $A$ nın alt ve üst asimptotik yoğunluğu olarak adlandırılır [13].

Bu tanım aşağıdaki tanıma eşdeğerdir.

**2.1.2 Tanım:** $A \cap \{1, 2, \ldots, k, \}$ kümesindeki $k$ reel sayısına eşit veya $k$ den daha küçük pozitif tamsayıların sayısını $A(k)$ ile gösterirsek yani;

$$A(k) = \{n \leq k : n \in A\}$$

ve $C_1$ Cesaro matrisi olmak üzere $C_1 \chi_A$ dizisinin $k$. ci terimi $\dfrac{A(k)}{k}$ dir ve böylece

$$d(A) = \lim_{k \to \infty} \frac{|A(k)|}{k}$$

mevcuttur ve bu doğal yoğunluk olarak adlandırılır. Buradaki $|\;|$ işareti kümedeki elemanların sayısını gösterir [16,19].

Buradan anlaşılacağı üzere bir kümenin alt ve üst asimptotik yoğunlukları mevcut ve birbirine eşit ise doğal yoğunluk olarak da adlandırılabilir.

**2.1.3 Tanım:** $A \subseteq N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ olsun. $\chi_A$, $A$ kümesinin karakteristik fonksiyonu ve

$$\delta_n(A) = \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \chi_A(k), \; n = 1, 2, \ldots$$

olmak üzere

$$\underline{\delta}(A) = \lim_{n \to \infty} \inf \delta_n(A) \quad ve \quad \overline{\delta}(A) = \lim_{n \to \infty} \sup \delta_n(A)$$

sırasıyla $A$ nın alt ve üst logaritmik yoğunluğu olarak adlandırılır [13].

**2.1.4 Tanım:** Eğer $\lim_{n \to \infty} d_n(A) = d(A)$ ve $\lim_{n \to \infty} \delta_n(A) = \delta(A)$ mevcut ise o zaman $d(A)$ ve $\delta(A)$ ya sırasıyla $A$ nın asimptotik ve logaritmik yoğunluğu denir [13].

Her $A \subseteq \mathbb{N}$ için $\underline{d}(A) \leq \underline{\delta}(A) \leq \overline{\delta}(A) \leq \overline{d}(A)$ dir. Bu durumda eğer $d(A)$ mevcut ise $\delta(A)$ da mevcuttur ve $d(A) = \delta(A)$ dır. Fakat tersi doğru değildir. Ayrıca bu sayılar $[0,1]$ kapalı aralığına aittir.

**2.1.5 Tanım:** Reel sayıların bir $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi her $\varepsilon > 0$ için $d(A(\varepsilon)) = 0$ mevcut ise $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Buradaki

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\}$$

dir [13].

Biz bu tanımı şöyle de ifade edebiliriz; Reel sayıların bir $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına istatistiksel yakınsaktır öyleki $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} |\{n \leq k : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani hemen hemen her $n$ için $|x_n - \xi| < \varepsilon$ dir. Bu durum st-$\lim x_n = \xi$ ile gösterilir [5,7].

**2.1.6 Örnek:** $x = (x_n)$ dizisi

$$x_n = \begin{cases} 1, & n = k^2 \text{ ise} \\ 2, & n \neq k^2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $x = (x_n)$ dizisini açık olarak yazdığımızda

$$(x_n) = (1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 2, \ldots)$$

dir. Bu dizinin bilinen (ordinary, alışılmış) anlamda yakınsak olmadığı açıktır. Ancak istatistiksel yakınsaktır. Çünkü; $x = (x_n)$ dizisinin 2 den farklı elemanlarının sayısına baktığımızda indis kümesinin yoğunluğu sıfırdır. Gerçekten; Her $\varepsilon > 0$ için $x = (x_n)$ dizisinin indis kümesi

$$|\{n \leq k : |x_n - 2| \geq \varepsilon\}| \leq |\{n \leq k : x_n \neq 2\}| \leq \sqrt{k}$$

olup

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} |\{n \leq k : |x_n - 2| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k}}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$$

olduğundan $x = (x_n)$ dizisi 2 ye istatistiksel yakınsaktır ve st-$\lim x_n = 2$ olarak gösterilir. Demek ki bilinen anlamda yakınsak olmayan bir dizi istatistiksel yakınsak olabilir.

Yakınsak bir dizinin sınırlı olduğunu biliyoruz. Aşağıdaki örnekte bir dizinin istatistiksel yakınsak olduğu fakat sınırlı olmadığı gösterilmiştir.

**2.1.7 Örnek:** $x = (x_n)$ dizisi

$$x_n = \begin{cases} \sqrt{n}, & n = k^2 \text{ ise} \\ 7, & n \neq k^2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. 2.1.6 Örneğe benzer bir yolla $x = (x_n)$ dizisini açık olarak yazdığımızda

$$(x_n) = (1, 7, 7, 2, 7, 7, 7, 7, 3, 7, \ldots)$$

dir. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{n \leq k : |x_n - 7| \geq \varepsilon\}| \leq |\{n \leq k : x_n \neq 7\}| \leq \sqrt{k}$$

olup

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} |\{n \leq k : |x_n - 7| \geq \varepsilon\}| \leq \lim \frac{\sqrt{k}}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$$

olduğundan $x = (x_n)$ dizisi 7 ye istatistiksel yakınsaktır. Fakat bu dizi üstten sınırsızdır.

**2.1.8 Tanım:** $x = (x_n)$ bir dizi ve $p$ pozitif bir reel sayı olsun. $x = (x_n)$ dizisi eğer;

$$\lim_k \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{k} |x_n - L|^p = 0$$

olacak şekilde kompleks bir $L$ sayısı varsa kuvvetli $p-$Cesaro toplanabilirdir denir [10].

**2.1.9 Tanım:** $x = (x_n)$ bir dizi olduğunda $x$ in aralığını $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ şeklinde göstereceğiz. Eğer $\left\{x_{n(j)}\right\}$, $x$ in bir altdizisi ve $K = \{n(j) : j \in \mathbb{N}\}$ ise $\left\{x_{n(j)}\right\}$ yi kısaca $\{x\}_K$ olarak yazacağız. Bu durumda $d(K) = 0$ ise $\{x\}_K$ yoğunluğu sıfır olan altdizi veya ince bir altdizi olarak adlandırılır. Diğer taraftan, $\{x\}_K$ eğer $K$ sıfır yoğunluğa sahip değilse $x$ in ince olmayan altdizisi olarak adlandırılır [8].

Eğer $x = (x_n)$ dizisinin $\xi$ ye yakınsak altdizisi mevcut ise $\xi$ sayısı bir $x$ dizisinin bilinen anlamda (alışılmış) limit noktasıdır. Dolayısıyla Fridy [8] buradan istatistiksel limit noktası ve istatistiksel cluster noktası kavramlarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

**2.1.10 Tanım:** $x = (x_n)$ dizisinin $\eta$ ya yakınsak ince olmayan altdizisi mevcut ise $\eta$ sayısına $x = (x_n)$ dizisinin bir istatistiksel limit noktasıdır denir [8].

**2.1.11 Tanım:** Her $\varepsilon > 0$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : |x_n - \xi| < \varepsilon\}$$

kümesi sıfır yoğunluğa sahip değilse $\xi$ sayısına $x = (x_n)$ dizisinin bir istatistiksel cluster (yığılma) noktası denir [8].

Herhangi bir $x = (x_n)$ sayı dizisi için alışılmış limit noktalarının kümesi $L_x$, istatistiksel limit noktalarının kümesi $\Lambda_x$ ve istatistiksel cluster (yığılma) noktalarının kümesi $\Gamma_x$ ile gösterilir.

**2.1.12 Örnek:** Bir $x = (x_n)$ dizisi

$$x_n = \begin{cases} 2, & n = k^2 \\ 1, & n \neq k^2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $x = (x_n)$ dizisinin 1 e istatistiksel yakınsak olduğu açıktır.

Bu dizinin alt dizileri

$$(x_{n_k}) = (2, 2, \ldots) \qquad \text{ve} \qquad (x_{n_l}) = (1, 1, \ldots)$$

dir. Limit noktalarının 1 ve 2 olduğu açıktır. $(x_{n_l})$ dizisi 1 e yakınsak fakat yoğunluğu sıfırdan farklı olduğu için 1 sayısı $x = (x_n)$ dizisinin istatistiksel limit noktasıdır. İstatistiksel cluster noktası için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - 1| \geq \varepsilon\}$$

1 e istatistiksel yakınsak olduğundan yoğunluğu sıfırdır. Dolayısıyla

$$B(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - 1| < \varepsilon\}$$

kümesinin yoğunluğu sıfırdan farklı olacağından $x = (x_n)$ dizisinin istatistiksel cluster noktasının 1 olduğu görülür. Bu durumda $L_x = \{2, 1\}$, $\Lambda_x = \{1\}$ ve $\Gamma_x = \{1\}$ dır.

**2.1.13 Önerme:** Varsayalım ki $x = (x_n)$ bir sayı dizisi ve $M = \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}\}$ olsun. Eğer $d(M) = 1$ ve $x = (x_n)$, $M$ üzerinde sınırlı ise $x = (x_n)$ dizisi istatistiksel yakınsaktır [5,7].

## 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu çalışma için literatür taraması yapılarak ilgili kitap ve makalelerden faydalanıldı. İlk bölümde temel tanım ve teoremler verildi. İkinci bölümde istatistiksel yakınsaklık tanımı verildi ve konu ile ilgili örnekler incelendi. Üçüncü bölümde Reel sayı dizilerinin ideal yakınsaklık kavramı verildi. İstatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklık arasındaki ilişki örneklerle incelendi. Dördüncü bölümde herhangi bir metrik uzayda ideal yakınsaklık tanımı verildi. Beşinci ve son bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilip bilateral diziler için istatistiksel ve ideal yakınsaklık kavramları tanıtıldı. Bilateral diziler için verilen kavramlar örneklerle incelendi ve gerekli teoremler ispatlandıktan sonra çalışma sonlandırıldı.

# 4. BULGULAR

## 4.1 İdeal ve Filter

İdeal yakınsaklık kavramı $\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin altkümelerinin $I$ ideali kavramına dayanır. Bu yüzden ideal ve ona dual olan $\mathcal{F}$ filter (süzgeç) kavramlarını tanıtmak yerinde olur. Bu bölümde ideal ve filter kavramları tanıtılıp arasındaki ilişki incelenmiştir.

**4.1.1 Tanım:** $X \neq \varnothing$ olsun. $X$ in altkümelerinin boş olmayan bir $I \subset P(X)$ sınıfı eğer aşağıdaki şartları sağlıyorsa $I$ ya $X$ de bir idealdir denir [13,17].

*i.* $\varnothing \in I$

*ii.* $A, B \in I \implies A \cup B \in I$

*iii.* $A \in I,\ B \subseteq A \implies B \in I.$

**4.1.2 Tanım:** Eğer $I \neq \varnothing$ ve $X \notin I$ ise $I$ ya non-trivial (proper) ideal denir [13,17].

**4.1.3 Tanım:** Eğer $I \subset P(X)$ bir non-trivial ideal ise $I$, $X$ in tüm sonlu altkümelerini içeriyorsa, yani

$$\{\{x\} : x \in X\} \subset I$$

ise $I$ ya admissible ideal denir [13,17].

**4.1.4 Tanım:** $X \neq \varnothing$ olsun. Eğer $\mathcal{F} \subset P(X)$ kümeler ailesi $X$ üzerinde bir filter ise aşağıdaki özellikleri sağlar [13].

*i.* $\varnothing \notin \mathcal{F}$

*ii.* $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$

*iii.* $A \in \mathcal{F},\ A \subseteq B \implies B \in \mathcal{F}$

İdeal ve filter arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir.

**4.1.5 Önerme:** $I \subset P(X)$ bir non-trivial idealinin $X$ üzerinde filter olması için gerek ve yeter şart

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(I) = \{X \backslash A : A \in I\}$$

olmasıdır ($\mathcal{F}(I)$, $I$ ile üretilmiş filterdir) [13].

**İspat:** Filter in şartlarını sağlatalım.

*i.* $I$ bir non-trivial ideal olduğundan $\varnothing \in \mathcal{F}$ olsun. O halde $\varnothing = X \backslash A$ olacak şekilde $A \in I$ mevcuttur. $\varnothing = X \backslash A$ olması için $X = A$ olmasını gerektirdiği açıktır ki buda $X \in I$

olmasını gerektirir. Halbuki $I$ bir non-trivial ideal idi. Burada bir çelişki söz konusudur. Çünkü; $X \in I$ olursa $I$ bir non-trivial ideal olamaz. Dolayısıyla $\varnothing \notin \mathcal{F}$ dir.

*ii.* $A, B \in I$ için $(X \backslash A) \cap (X \backslash B) \in \mathcal{F}$ olduğunu gösterelim. Kümelerden bildiğimiz basit bir işlem ile

$$(X \backslash A) \cap (X \backslash B) = X \backslash (A \cup B)$$

olarak yazabiliriz. Buradan $A, B \in I$ olduğundan ve ideal tanımı gereğince $A \cup B \in I$ olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla $A \cup B \in I$ olduğundan $X \backslash (A \cup B)$ kümesi $\mathcal{F}$ filterine ait olur ki buda $(X \backslash A) \cap (X \backslash B) \in \mathcal{F}$ olduğunu gösterir.

*iii.* $(X \backslash A) \in \mathcal{F}$, $(X \backslash A) \supseteq (X \backslash B)$ ise $(X \backslash B) \in \mathcal{F}$ olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $(X \backslash A) \supseteq (X \backslash B)$ dir. $(X \backslash A) \in \mathcal{F}$ olduğundan $A \in I$ dır. Dolayısıyla ideal tanımı gereğince $A \in I$, $A \subseteq B$ ise $B \in I$ olup buradan $(X \backslash B) \in \mathcal{F}$ olduğu kolayca görülür. Buda ispatı tamamlar.

### 4.2 Reel Sayı Dizilerinin İdeal Yakınsaklığı

Kostyrko v.d [13] önce reel sayı dizilerin ideal yakınsaklığını araştırdılar, daha sonra bu kavramı herhangi bir metrik uzayda tanımladılar. İdeal yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirmesidir ve pozitif tamsayıların $\mathbb{N}$ kümesinin alt kümelerinin $I$ ideali kavramına dayanır.

Bu bölümde önce reel sayı dizilerinin ideal yakınsaklık kavramı tanıtıldı. Daha sonra bilinen anlamda yakınsaklığın aksiyomlarının sağlatılıp sağlatılmadığı gösterildi. Reel sayı dizileri için ideal yakınsaklık; bilinen anlamdaki yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklık ile arasındaki ilişki örneklerle incelendi. Ardından Connor [9] un $\mu-$yoğun yakınsaklığına bir bakıma denk olan $I^*-$yakınsaklık kavramı verildi. Daha sonra Reel sayı dizileri için $I-$yakınsaklık ve $I^*-$yakınsaklık kavramlarının denk olması için (AP) şartının sağlaması gerektirdiği gösterildi.

**4.2.1 Tanım:** $I$, $\mathbb{N}$ de bir non-trivial ideal olsun. Reel sayıların bir $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi eğer; her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\}$$

kümesi $I$ ya ait ise $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına $I$-yakınsaktır denir [13].

Eğer $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\xi \in \mathbb{R}$ ye $I$-yakınsak ise biz $I - \lim x_n = \xi$ (veya $I - \lim x = \xi$) olarak yazacağız ve $\xi$ sayısına $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $I$-limiti diyeceğiz.

Şimdi ideal yakınsaklığın bilinen anlamdaki yakınsaklığın bazı aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığını göstereceğiz. Aşağıdaki aksiyomlar ideal yakınsaklık için formülleştirilmiştir.

$(S)$ Her sabit $x = (\xi, \xi, \ldots, \xi, \ldots)$ dizisi $\xi$ ye $I$-yakınsaktır.

$(H)$ Limitin tekliği: Eğer $I - \lim x = \xi$ ve $I - \lim x = \eta$ ise $\xi = \eta$ dir.

$(F)$ Eğer $I - \lim x = \xi$ ise o zaman $x$ in her $y$ altdizisi için $I - \lim y = \xi$ mevcuttur.

$(U)$ Eğer bir $x$ dizisinin her $y$ altdizisi $\xi$ ye $I$-yakınsak bir $z$ altdizisine sahip ise o zaman $x$, $\xi$ ye $I$-yakınsaktır [13].

**4.2.2 Teorem:** $I$, $\mathbb{N}$ de bir admissible ideal olsun. O zaman

*i.* $I$-yakınsaklık $(S), (H)$ ve $(U)$ aksiyomlarını sağlar.

*ii.* Eğer $I$ sonsuz bir küme içeriyorsa o zaman $I$-yakınsaklık $(F)$ aksiyomunu sağlamaz [13].

**İspat:** *i.* $I$ bir admissible ideal olduğundan her sabit $x = (\xi, \xi, \ldots, \xi, \ldots)$ dizisinin $\xi$ ye $I$-yakınsak olduğu açıktır. Biz $(H)$ aksiyomunu ispatlayalım. Varsayalım ki

$$A(\varepsilon) = \{n : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\}$$

için $I - \lim x = \xi$ ve

$$B(\varepsilon) = \{n : |x_n - \eta| \geq \varepsilon\}$$

için $I - \lim x = \eta$ ve $\xi \neq \eta$ olsun.

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{|\xi - \eta|}{2}\right) \tag{4.1}$$

olarak seçelim. Varsayımdan ve 4.1.5 Önerme den dolayı,

$$\mathbb{N} \backslash A(\varepsilon) = \{n : |x_n - \xi| < \varepsilon\}, \quad \mathbb{N} \backslash B(\varepsilon) = \{n : |x_n - \eta| < \varepsilon\}$$

kümeleri $\mathcal{F}(I)$ filterine aittir. Dolayısıyla filterin tanımı gereğince

$$\mathbb{N} \backslash A(\varepsilon) \cap \mathbb{N} \backslash B(\varepsilon)$$

kümeside $\mathcal{F}(I)$ filterine aittir. Bundan dolayı bir $m \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $|x_m - \xi| < \varepsilon$, $|x_m - \eta| < \varepsilon$ dir. Buradan basit bir işlem ile

$$\begin{aligned} |\xi - \eta| &= |\xi - x_m + x_m - \eta| \\ &\leq |x_m - \xi| + |x_m - \eta| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

olduğu görülür ki bu (4.1) ile çelişir. O halde varsayımımız yanlıştır ve $\xi = \eta$ dir.

Şimdi $I$-yakınsaklığın $(U)$ aksiyomunu sağladığını gösterelim. Aşağıda $(U)$ ya denk olan ifadeyi ispatlayalım: eğer $I - \lim x_n = \xi$ eşitliği sağlanmaz ise o zaman $x$ in bir $y$ altdizisi vardır öyleki $y$ nin $\xi$ ye $I-$yakınsak bir $z$ altdizisi mevcut değildir. 4.2.1 Tanım gereğince bir $\varepsilon_0$ vardır öyle ki

$$A(\varepsilon_0) = \{n : |x_n - \xi| \geq \varepsilon_0\} \notin I \tag{4.2}$$

dir. O halde $A(\varepsilon_0)$, $I$ bir admissible ideal olduğundan sonsuz bir kümedir.

$$A(\varepsilon_0) = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots\} \subseteq \mathbb{N}$$

olsun. $y_k = x_{n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ alalım. O halde $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $x$ in bir altdizisidir ve (4.2) den

$$|y_k - \xi| \geq \varepsilon_0, \;\; (k = 1, 2, \ldots) \tag{4.3}$$

dir. (4.3) den $y$ nin $I$-yakınsak $z = (z_m)_1^\infty$ altdizisi olmadığı görülür. Aksi taktirde $\mathbb{N}$, $I$ ya ait olurdu ki bu $I$ nın bir admissible ideal olması ile çelişir. Buda isteneni verir.

*ii*. Varsayalım ki bir $A = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\} \subseteq \mathbb{N}$ sonsuz kümesi $I$ ya aittir.

$$B = \mathbb{N} \backslash A = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\}$$

olsun. $B$ kümesi yine sonsuzdur. Çünkü; $B$ sonlu olsa idi $\mathbb{N}$, $I$ ya ait olacaktı ki bu $I$ nın admissible ideal olması ile çelişirdi. $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini aşağıdaki gibi

$$x_{n_k} = 0, \;\; x_{m_k} = 1, \;\; (k = 1, 2, \ldots)$$

tanımlayalım. $I - \lim x_n = 1$ olduğu açıktır. Aynı anda $x$ in $y = (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ altdizisi sabittir ve bu yüzden $I - \lim y = 0$ dır ($(S)$ aksiyomuna bakınız). Dolayısıyla $I-$yakınsaklık $(F)$ aksiyomunu sağlamaz. Böylece ispat tamamlanır.

**4.2.3 Örnek:** $I_0 = \{\varnothing\}$ olsun. Bu $\mathbb{N}$ deki boş olmayan minimal non-trivial idealidir. Bir dizinin $I_0-$yakınsak olması için gerek ve yeter şart sabit olmasıdır.Gerçekten sabit bir $x = (x_n)$ dizisi için $x = (\xi, \xi, \ldots \xi, \ldots)$ ise $\forall \varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon_0) = \{n : |x_n - \xi| \geq \varepsilon_0\} = \varnothing$$

dir. Buda $I_0 = \{\varnothing\}$ olduğundan $I_0-$yakınsaktır. Eğer bir dizi $I_0-$yakınsak ise $A(\varepsilon) = \varnothing$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $x = (x_n)$ sabit bir dizidir [13].

**4.2.4 Örnek:** $\mathbb{N}$ nin tüm sonlu alt kümelerinin sınıfını $I_f$ olarak tanımlayalım. O halde $I_f$, $\mathbb{N}$ de bir admissible ideal ve $I_f-$yakınsaklık $\mathbb{R}$ deki alışılmış yakınsaklık ile çakışır. Gerçekten; $I_f$, $\mathbb{N}$ nin tüm sonlu altkümelerini içerdiğinden bir admissible ideal olduğu açıktır. Bir $(x_n)$ dizisi eğer $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına bilinen anlamda yakınsak ise o zaman $(x_n)$ dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç geriye kalan tüm terimleri $\xi \in \mathbb{R}$ sayısının bir $\varepsilon$ komşuluğunda kalır. Dolayısıyla bu komşuluğun dışındaki elemanlar sonlu olup $I_f$ idealine ait olur. Bu ise $(x_n)$ dizisinin $I_f-$yakınsak olduğunu gösterir [13].

**4.2.5 Örnek:** $I_d = \{A \subseteq \mathbb{N} : d(A) = 0\}$ olsun. O halde $I_d$, $\mathbb{N}$ de bir admissible ideal ve $I_d-$yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ile çakışır. Gerçekten; Bir $(x_n)$ dizisinin $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin $d(A(\varepsilon)) = 0$ olması idi. Bu ise $I_d$ admissible ideal olduğundan $(x_n)$ dizisinin $I_d-$yakınsak olduğunu gösterir [13].

Şimdi bilinen anlamda yakınsak olmayan ve istatistiksel yakınsak olmayan fakat ideal yakınsak olan bir örnek verelim.

**4.2.6 Örnek:** $I = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ kümesi tek sayıların kümesidir}\}$

şeklinde tanımlayalım. $x = (x_n)$ dizisi

$$x = (x_n) = \begin{cases} 0, & n = 2t-1 \\ 2, & n \neq 2t-1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{N}$$

olsun. $x = (x_n)$ dizisinin bilinen anlamda yakınsak olmadığı açıktır. İstatistiksel yakınsak olup olmadığına bakalım. Bunun için

$$x = (x_n) = (0, 2, 0, 2, 0, 2 \ldots)$$

açık olarak yazarsak eğer bu dizinin $\varepsilon$ komşuluğu dışında kalan elemanlarının indis kümesinin yani

$$A(\varepsilon) = \{n \leq k : |x_n - 2| \geq \varepsilon\} = \{n \leq k : x_n \neq 2\}$$

yoğunluğu sıfır ise $x = (x_n)$ dizisi 2 ye istatistiksel yakınsaktır diyeceğiz. Dolayısıyla $\forall \varepsilon > 0$ için $x = (x_n)$ dizisinin 2 den farklı elemanlarına bakacağız.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|A(k)|}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left[\left|\frac{k}{2}\right|\right] + 1}{k} = \frac{1}{2}$$

olduğundan $A(\varepsilon)$ kümesinin yoğunluğu sıfırdan farklıdır, yani $d(A(\varepsilon)) \neq 0$ ve dolayısıyla $x = (x_n)$ dizisi 2 ye istatistiksel yakınsak değildir.

Burada şunu belirtelim: $x = (x_n)$ dizisi aynı zamanda benzer bir yolla 0 a istatistiksel yakınsak olmadığı da görülür.

Şimdi $x = (x_n)$ dizisinin ideal yakınsak olup olmadığına bakalım. Önce yukarıda tanımladığımız $I$ kümesinin ideal olduğunu gösterelim ve ideal şartlarını sağlatalım.

*i.* $\varnothing \in I$ olduğu açıktır.

*ii.* $A, B \in I$ ise $I$ dan aldığımız iki tek kümenin birleşimi yine tektir ve $I$ ya aittir. Dolayısıyla $A \cup B \in I$ dır.

*iii.* $A \in I$, $B \subseteq A$ ise $I$ dan aldığımız bir tek kümenin alt kümesi de tektir ve $I$ ya aittir. Dolayısıyla $B \in I$ dır.

Buradan anlaşılacağı üzere $I$ bir idealdir. Aynı zamanda $I \neq \varnothing$ ve $X \notin I$ olduğundan $I$ bir non-trivial idealdir. Şimdi $x = (x_n)$ dizisinin 2 ye ideal yakınsak olup olmadığını inceleyelim. Bunun için $x = (x_n)$ dizisinin 2 den farklı elemanlarının kümesinin $I$ ya ait olduğunu göstermeliyiz. $\forall\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n : |x_n - 2| \geq \varepsilon\} = \{1, 3, 5, \ldots\}$$

olup $A(\varepsilon) \in I$ dır. Dolayısıyla $x = (x_n)$ dizisi 2 ye ideal yakınsak olduğu görülür.

Demek ki hem bilinen anlamda yakınsak olmayan ve hemde istatistiksel yakınsak olmayan bir dizi ideal yakınsak olabilir. Bu ise ideal yakınsaklığın daha genel bir yakınsak çeşidi olduğunu gösterir. Burada hemen şunu belirtelim ideal yakınsaklık kavramı ideal seçimine bağlıdır. Yani ideali

$$I = \{A \subset \mathbb{N} : \ A \text{ kümesi çift sayıların kümesidir}\}$$

şeklinde seçersek $x = (x_n)$ dizisinin 2 ye ideal yakınsak olmadığı görülür.

J. Connor [9] reel değerli diziler için $\mu-$istatistiksel ve $\mu-$ yoğun yakınsaklık kavramlarını tanıtmıştır. Burada $\mu$, $\mathbb{N}$ nin altkümelerinin bir alanı üzerine tanımlanmış $\{0,1\}$ değerli sonlu toplamsal ölçüdür.

**4.2.7 Tanım:** $\Gamma$, $\mathbb{N}$ nin tüm sonlu altkümelerini içeren $P(\mathbb{N})$ nin bir altalanı olsun ve $\mu : \Gamma \to \{0,1\}$ sonlu toplamsal ölçüdür öyleki tüm $k \in \mathbb{N}$ için $\mu(\{k\}) = 0$ ve eğer $A \subseteq B$ ve $\mu(B) = 0$ ise o zaman $A \in \Gamma$ ve $\mu(A) = 0$ dır.

*i.* $x$ bir $A \in \Gamma$ mevcut ise $\mu-$yoğun yakınsaktır öyleki $x\varkappa_A \in c_0$ ve $\mu(A) = 1$ dir. Ayrıca $x$, eğer $x - re$ sıfıra $\mu-$yoğun yakınsak ise $x$, $r$ ye $\mu-$yoğun yakınsaktır denir.

$ii$. $x$ eğer tüm $\varepsilon > 0$ için $\mu(\{k : |x_k| \geq \varepsilon\}) = 0$ ise sıfıra $\mu-$istatistiksel yakınsaktır ve eğer $x$, $x - re$ sıfıra $\mu-$istatistiksel yakınsak ise $x$, $r$ ye $\mu-$istatistiksel yakınsaktır denir.

Eğer $T = (t_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris,

$$\Gamma = \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} \varkappa_A(k) = 0 \text{ veya } \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} \varkappa_A(k) = 1 \right\}$$

ve $\mu : \Gamma \to \{0, 1\}$,

$$\mu(A) = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} \varkappa_A(k)$$

ile tanımlanıyorsa o zaman $\Gamma$ ve $\mu$, yukarıdaki tanımın koşullarını sağlar. $\mu-$yoğun, $\mu-$istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli $T-$toplanabilme $\mu$ ve $\Gamma$ seçimi ile sınırlı diziler üzerinde denktirler. Burada $\Gamma$ yerine $C_1$ Cesăro matrisi alınırsa $\mu-$istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık tanımını verir [9].

Kostyrko v.d [13] istatistiksel yakınsaklığın genelleştirilmişine J. Connor un yaklaşımı ile ideal yakınsaklık kavramının bir bakıma denk olduğu göstermişlerdir.

$$I = \{A \in \Gamma : \mu(A) = 0\}$$

olsun. Öyleyse $I$, $\mathbb{N}$ de bir admissible idealdir ve

$$\mathcal{F}(I) = \{B \subseteq \mathbb{N} : \mu(B) = 1\}$$

dir. Tersine, eğer $I$, $\mathbb{N}$ de bir admissible ideal ise $\Gamma = I \cup \mathcal{F}(I)$ olsun. Bu taktirde $\Gamma$, $\mathbb{N}$ nin altkümelerinin bir alanıdır (cebiridir). $\mu : \Gamma \to [0, 1]$ yi

$$\begin{aligned} \text{Eğer } M &\in I \text{ ise } \mu(M) = 0 \\ \text{Eğer } M &\in \mathcal{F}(I) \text{ ise } \mu(M) = 1 \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. Bu tanım $I \cap \mathcal{F}(I) = \varnothing$ olduğundan doğrudur. Ayrıca $I$ bir admissible olduğundan $\mu(\{k\}) = 0$ dır.

**4.2.8 Teorem:** $I$, $\mathbb{N}$ de bir non-trivial ideal olsun [13].

$i$. Eğer $I - \lim x_n = \xi$, $I - \lim y_n = \eta$ ise $I - \lim(x_n + y_n) = \xi + \eta$ dir.

$ii$. Eğer $I - \lim x_n = \xi$, $I - \lim y_n = \eta$ ise $I - \lim(x_n y_n) = \xi\eta$ dir.

$iii$. Eğer $I$, $\mathbb{N}$ de bir admissible ideal ve $\lim x_n = \xi$ ise $I - \lim x_n = \xi$ dir.

**İspat:** $i$. $\varepsilon > 0$ olsun. O halde

$$\{n : |(x_n + y_n) - (\xi + \eta)| \geq \varepsilon\} \subseteq \left\{n : |x_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{n : |y_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \tag{4.4}$$

kapsaması doğrudur. Gerçekten; (4.4) ün sağ tarafındaki kümeler $I$ ya aittir. İdealin tanımından dolayı (4.4) ün sol tarafındaki kümelerde $I$ ya ait olur.

*ii.* $\varepsilon > 0$ olsun. Aşağıdaki kapsama kontrol edilebilir.

$$\begin{aligned}
\{n : |x_n y_n - \xi\eta| < \varepsilon\} &= \{n : |x_n y_n - x_n\eta + x_n\eta - \xi\eta| < \varepsilon\} \\
&= \{n : ||x_n y_n - x_n\eta| + |x_n\eta - \xi\eta|| < \varepsilon\} \\
&= \{n : |x_n (y_n - \eta) + \eta (x_n - \xi)| < \varepsilon\} \\
&\supseteq \{n : |x_n < |\xi| + 1|\} \qquad (4.5) \\
&\quad \cap \left\{n : |y_n - \xi| < \frac{\varepsilon}{2(|\xi| + 1)}\right\} \\
&\quad \cap \left\{n : |x_n - \xi| < \frac{\varepsilon}{2|\eta|}\right\}
\end{aligned}$$

dir. Eğer $|x_n - \xi| < 1$ ise

$$|x_n| = |x_n - \xi + \xi| \le |x_n - \xi| + |\xi| < 1 + |\xi|$$

olur ve $\dfrac{\varepsilon}{2|\eta|} \le 1$ ise

$$\begin{aligned}
\{n : |x_n| < |\xi| + 1\} &\supseteq \{n : |x_n - \xi| < 1\} \\
&\supseteq \left\{n : |x_n - \xi| < \frac{\varepsilon}{2|\eta|}\right\}
\end{aligned}$$

Böylece (4.5) den

$$\begin{aligned}
\{n : |x_n y_n - \xi\eta| < \varepsilon\} &\supseteq \left\{n : |x_n - \xi| < \frac{\varepsilon}{2|\eta|}\right\} \qquad (4.6) \\
&\quad \cap \left\{n : |y_n - \eta| < \frac{\varepsilon}{2(|\xi| + 1)}\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Varsayımımızdan ve (4.6) in sağ tarafındaki kümeler $\mathcal{F}(I)$ filterine aittir. Buradan kolayca (4.6) in sol tarafındaki kümenin de $\mathcal{F}(I)$ filterine ait olduğu görülür. Fakat diğer taraftan $\mathcal{F}(I)$ nın tamamlayısıcısı $\{n : |x_n y_n - \xi\eta| \ge \varepsilon\}$ kümesi $I$ idealine aittir. Buda istenilendir.

*iii.* $I$, $\mathbb{N}$ de bir admissible ideal olduğundan $\lim x_n = \xi$ ise $x = (x_n)$ dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç geriye kalan sonsuz sayıdaki terimleri $\xi \in \mathbb{R}$ sayısının komşuluğunda kalır. Dolayısıyla bu komşuluğun dışında kalan elemanlar sonlu olup $I$ idealine ait olur. $I_f$ ideali $I$ idealinin alt kümesi olduğundan ve ideal tanımı gereğince $I_f$ de ideal olur. $I_f$ nin her admissible idealin altküme olmasından dolayı $I - \lim x_n = \xi$ dir ki buda ispatı tamamlar.

Kostyrko v.d [13] ideal yakınsaklıkla bağıntılı J. Connor [9] un $\mu-$yoğun daki yakınsaklığına karşılık gelen başka bir yakınsaklık çeşidini aşağıdaki gibi sunmuşlardır.

**4.2.9 Tanım:** Varsayalım ki $I$, $\mathbb{N}$ de bir admissible ideal olsun. Reel sayıların bir $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi eğer, bir $H \in I$ kümesi vardır öyleki

$$M = \mathbb{N}\backslash H = \{m_1 < m_2 < \cdots\}$$

için

$$\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = \xi \tag{4.7}$$

mevcut ise $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına $I^*-$yakınsaktır (kısaca $I^* - \lim x_n = \xi$ veya $I^* - \lim x = \xi$) denir. (4.7) nin yerine $\lim\limits_{n\to\infty, n\in M} x_n = \xi$ de yazabiliriz [13].

**4.2.10 Teorem:** Varsayalım ki $I$, $\mathbb{N}$ de bir admissible ideal olsun. Eğer $I^* - \lim x_n = \xi$ ise o zaman $I - \lim x_n = \xi$ dir [13].

**İspat:** Varsayımımızdan bir $H \in I$ kümesi vardır öyleki (4.7) sağlanır. Burada

$$M = \mathbb{N}\backslash H = \{m_1 < m_2 < \cdots\}$$

dir. $\varepsilon > 0$ olsun. (4.7) den bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $k > k_0$ için $|x_{m_k} - \xi| < \varepsilon$ dır. O halde

$$A(\varepsilon) \subseteq H \cup \{m_1, m_2, \ldots, m_{k_0}\} \tag{4.8}$$

dir. $I$ admissible ideal ve $H \in I$ olduğundan (4.8) in sağ tarafı $I$ ya aittir. Böylece $A(\varepsilon) \in I$ dır.

**4.2.11 Tanım:** $I \subset P(X)$ admissible ideali eğer; $I$ ya ait karşılıklı ayrık $\{A_1, A_2, \ldots\}$ kümelerinin sayılabilir her ailesi için $B_j \subseteq \mathbb{N}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ sayılabilir kümeleri vardır öyleki $A_j \Delta B_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ simetrik farkı sonlu ve $B = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$, $I$ ya ait ise $I$ ideali (AP) şartını sağlar denir [13,19].

**4.2.12 Uyarı:** Bazı idealler için 4.2.10 Teoreminin tersi sağlanır (Örneğin; $I_d$ ideali). Ancak bu teoremin terisinin sağlanması için gerek ve yeter şart (AP) şartının sağlanmasıdır [13].

**4.2.13 Örnek:** $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} D_j$, $\mathbb{N}$ nin bir parçalanışı olsun (yani $k \neq l$ için $D_k \cap D_j = \varnothing$). $D_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ sonsuz kümeler olsun (Örneğin; $D_j = \{2^{j-1}(2s-1) : s = 1, 2, \ldots\}$ olarak seçelim). $J$ ideali tanımlayalım öyleki

$$J = \{A \subseteq \mathbb{N} : A,\ D_j \text{ ile sonlu sayıda kesişir}\}$$

O halde $J$, $\mathbb{N}$ de bir admissible idealdir. $I = J$ olsun. $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım: $n \in D_j$ için $x_n = \frac{1}{j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ olsun. O halde $I - \lim x_n = 0$ olduğu açıktır. Şimdi $I^* - \lim x_n \neq 0$ olduğunu göstereceğiz. Eğer $H \in I = J$ ise bir $p \in \mathbb{N}$ vardır öyleki

$$H \subseteq D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_p$$

dir. Fakat diğer taraftan 4.2.10 Teoremden dolayı $D_{p+1} \subseteq \mathbb{N}\backslash H$ ve böylece $k$ ların birçoğu için $x_{m_k} = \frac{1}{p+1}$ mevcuttur ve bu nedenle $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = 0$ doğru olamaz [13].

**4.2.14 Teorem:** $I - \lim x_n = \xi$ olduğunda $I^* - \lim x_n = \xi$ olması için gerek ve yeter şart $I$ idealinin (AP) şartını sağlamasıdır [13].

**İspat:** Önce gerek şartı ispatlayacağız. Varsayalım ki $I$, (AP) şartını sağlar. $I - \lim x_n = \xi$ olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\}$$

kümesi $I$ ya aittir. Bu nedenle aşağıdaki $A_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ kümelerinin

$$\begin{aligned} A_1 &= \{n : |x_n - \xi| \geq 1\} = A(1) \\ A_k &= \left\{n : \frac{1}{k} \leq |x_n - \xi| < \frac{1}{k+1}\right\} = A\left(\frac{1}{k}\right) \backslash A\left(\frac{1}{k-1}\right) \end{aligned}$$

herbiri $I$ ya aittir. $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \varnothing$ olduğu açıktır. $I$, (AP) şartını sağladığından $B_j \subseteq \mathbb{N}$ kümeleri vardır öyleki $A_j \Delta B_j$ sonlu bir küme ve $B = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j \in I$ dır. Şimdi ise $n \in M$ için

$$\lim_{n\to\infty, n\in M} x_n = \xi \tag{4.9}$$

ispatlayacağız. Burada $M = \mathbb{N}\backslash B$ dir. $\eta > 0$ olsun. Bir $k \in \mathbb{N}$ seçelim öyleki $\frac{1}{k+1} < \eta$ dir. O halde

$$\{n : |x_n - \xi| \geq \eta\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j \tag{4.10}$$

dir. $I$ nın toplamsallığından dolayı (4.10) un sağ taraftaki küme $I$ ya aittir. $A_j \Delta B_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ sonlu olduğundan bir $n_0 \in M$ vardır öyleki

$$\bigcup_{j=1}^{k+1} B_j \cap (n_0, +\infty) = \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j \cap (n_0, +\infty)$$

dir. Şimdi eğer $n \notin B$, $n > n_0$ ise $n \notin \bigcup_{j=1}^{k+1} B_j$ dir ve böylece $n \notin \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j$ dir. Fakat diğer taraftan $|x_n - \xi| < \dfrac{1}{k+1} < \eta$ dir. Bundan dolayı (4.9) ifadesi sağlanır.

Şimdi de yeter şartı sağlatalım. Varsayalım ki $I - \lim x_n = \xi$ olduğunda $I^* - \lim x_n = \xi$ dir. $I$ idealinin (AP) şartını sağladığını göstereceğiz. $\{A_1, A_2, \ldots\}$, $I$ nın ayrık kümelerinin bir sınıfı olsun. $x = (x_n)$ dizisini $n \in A_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ için $x_n = \dfrac{1}{j}$, $n \in \mathbb{N} \backslash \bigcup_j A_j$ için $x_n = 0$ olacak şekilde tanımlayalım. İlk önce $I - \lim x_n = 0$ olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ olsun. Bir $m$ seçelim öyleki $\dfrac{1}{m} < \varepsilon$ dir. O halde

$$A(\varepsilon) = \{n : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\} \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$$

dir. Buradan $A(\varepsilon) \in I$ olduğu görülür. Bundan dolayı $I - \lim x_n = 0$ dır. Sonuç olarak varsayımımızdan

$$I^* - \lim x_n = 0$$

mevcuttur. Ama diğer taraftan bir $B \in I$ kümesi vardır öyleki

$$\lim_{n \to \infty, n \in \mathbb{N} \backslash B} x_n = 0 \tag{4.11}$$

Şimdi $A_j \Delta B_j$ simetrik farkın sonlu olduğunu göstermek yeterlidir bunun için $B_j = A_j \cap B$, $(j = 1, 2, \ldots)$ olsun. Gerçekten bu doğru ise;

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (B \cap A_j) = B \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subseteq B$$

dir. $B \in I$ olduğundan $\bigcup_j B_j \in I$ olduğu görülür. $\mathbb{N} \backslash B = \{m_1 < m_2 < \ldots\}$ olsun. O halde (4.11) den $\lim_{k \to \infty} x_{m_k} = 0$ dir. Bundan $A_j$ kümesi $\mathbb{N} \backslash B$ kümesi ile ortak elemanların sonlu bir sayısına sahiptir.

$$A_j \Delta B_j \subseteq A_j \cap (\mathbb{N} \backslash B)$$

mevcut olup $A_j \Delta B_j$ sonludur. Buda ispatı tamamlar.

### 4.3 Herhangi Bir Metrik Uzayda İdeal Yakınsaklık

Kostyrko v.d [13] reel sayı dizilerinin ideal yakınsaklığını araştırdılar. Aynı yıl Kostyrko vd. [14] bunu herhangi bir metrik uzayda çalışıp gerekli teoremleri ispatladılar. Aynı çalşmada $I-$limit ve $I-$cluster noktalarını tanıttılar.

$(X, \rho)$ sabit bir metrik uzay ve $I$, $\mathbb{N}$ nin altkümelerinin bir non-trivial ideali olarak tanımlansın. $B(\xi, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ yarıçaplı $\xi \in X$ merkezli $X$ in açık bir yuvarı olsun.

**4.3.1 Tanım:** $X$ in elemanlarının bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\xi \in X$ $(\xi = I-\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$ e $I-$yakınsaktır ancak ve ancak her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \varepsilon\}$$

kümesi $I$ ya aittir. Burada $\xi$ elemanına $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $I-$limiti diyeceğiz [14].

**4.3.2 Örnek:** $I$, için $I_f$ sınıfı $\mathbb{N}$ nin tüm sonlu altkümeleri olarak alınsın. O halde $I_f$ bir non-trivial admissible ideal ve $I_f$ yakınsaklık $X$ deki $\rho$ metriği ile ilgili olarak alışılmış yakınsaklık ile çakışır [14].

**4.3.3 Örnek:** Bütün $A \subseteq \mathbb{N}$ sınıfı $I_d$ ve $I_\delta$, sırasıyla $d(A) = 0$ ve $\delta(A) = 0$ ile tanımlanır. O halde $I_d$ ve $I_\delta$ non-trivial admissible ideallerdir ve sırasıyla $I_d-$yakınsaklık istatistiksel yakınsaklık ile, $I_\delta-$ yakınsaklık ise logaritmik istatistiksel yakınsaklık ile çakışır [14].

**4.3.4 Örnek:** $I-$yakınsaklığın geniş bir sınıfı aşağıdaki gibi elde edilebilir. $T = \{t_{nk}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. $A \subset \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ için

$$d_T^{(n)}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}.\varkappa_A(k)$$

olsun. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} d_T^{(n)}(A) = d_T(A)$ mevcut ise o zaman $d_T(A)$, $A$ nın bir $T-$yoğunluğu olarak adlandırılır. $T$ nin regülerliğinden $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} t_{nk} = 1$ olduğu ve buradan eğer $\lim\limits_{n\to\infty} d_T^{(n)}(A) = d_T(A)$ mevcut ise $d_T(A) \in [0,1]$ olduğu görülür.

$$I_{d_T} = \{A \subseteq \mathbb{N} : d_T(A) = 0\}$$

olsun. O halde $I_{d_T}$ bir non-trivial idealdir ve $I_{d_T}$ hem $I_d-$yakınsaklık hemde $I_\delta-$yakınsaklığın özel bir durumunu içerir. Gerçekten; $I_d-$ yakınsaklık

$$t_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

seçimi ile istatisktiksel yakınsaklık, $I_\delta-$ yakınsaklık ise

$$t_{nk} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{k}}{s_n}, & k \leq n \\ 0, & k > 0 \end{cases}$$

seçimi ile logaritmik istatistiksel yakınsaklık elde edilir [14].

**4.3.5 Örnek:** Diyelim ki $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \triangle_j$, $\mathbb{N}$ nin bir ayrışımı olsun öyleki her $\triangle_j$ sonsuzdur ve $i \neq j$ için $\triangle_i \cap \triangle_j = \varnothing$ olduğu açıktır. $\triangle_j's$ nin sonlu bir sayısı sadece kesişen tüm $A \subseteq \mathbb{N}$ sınıfı $\varepsilon$ olarak tanımlansın o zaman $\varepsilon$ bir non-trivial idealdir [14].

**4.3.6 Sonuç:** $I$ bir admissible ideal ise $X$ deki alışılmış yakınsaklık $X$ in $I-$yakınsaklığını ima eder [14].

Reel sayı dizileri için sağlanan $(S), (H), (U)$ve $(F)$ aksiyomları herhangi bir metrik uzay içinde sağlanır.

**4.3.7 Önerme:** Varsayalım ki $X$ en az iki noktaya sahiptir. Diyelim ki $I \subset 2^X$ bir admissible idealdir [14].

$i.$ $I-$yakınsaklık $(S), (H)$ ve $(U)$ yu sağlar.

$ii.$ Eğer $I$ sonsuz bir küme içerir ise o zaman $I-$yakınsaklık $(F)$ yi sağlamaz.

**4.3.8 Uyarı:** Eğer $I$ herhangi bir sonsuz küme içermeyen bir admissible ideal ise $I-$yakınsaklık alışılmış yakınsaklık ile çakışır ve $(F)$ nin sağlanacağı açıktır [14].

İstatistiksel yakınsaklık teorisinde bilinen bir sonuç ile $I^*-$yakınsaklık ele alınmıştır. "Reel sayıların bir $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\xi$ e istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart bir $M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin olmasıdır öyleki $d(M) = 1$ ve $\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = \xi$ dir." Kostyrko v.d [14] bu sonuçtan yola çıkarak aşağıdaki tanımı vermişlerdir.

**4.3.9 Tanım:** $X$ in elemanlarının bir $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\xi \in X$ e $I^*-$yakınsak olması için gerek ve yeter şart bir $M = \{m_1 < m_2 < \cdots m_k < \cdots\} \subset \mathbb{N}$, $M \in \mathcal{F}(I)$ (yani $\mathbb{N} \setminus M \in I$) kümesinin var olmasıdır öyleki

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_{m_k}, \xi) = 0$$

dır [14].

**4.3.10 Önerme:** $I$ bir admissible ideal olsun. Eğer $I^* - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ ise o zaman $I - \lim_{k\to\infty} x_n = \xi$ dir [14].

$I-$yakınsaklık ve $I^*-$yakınsaklık arasındaki karşıt içerme $(X, \rho)$ metrik uzay yapısı üzerine bağlıdır.

**4.3.11 Teorem:** $(X, \rho)$ bir metrik uzay olsun.

$i$. Eğer $X$ in bir yığılma noktasına sahip değilse, o zaman $I-$yakınsaklık ve $I^*-$yakınsaklık her $I \subset P(\mathbb{N})$ admissible ideali için çatışır.

$ii$. Eğer $X$ bir yığılma noktasına sahip ise, o zaman bir $I \subset P(\mathbb{N})$ admissible ideali ve $X$ in elemanlarının bir $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır öyleki $I - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ dir. Fakat $I^* - \lim_{n\to\infty} y_n$ yoktur [14].

$I-$yakınsaklık ve $I^*-$yakınsaklığın hangi şartlar altında eşit olacağını söylemiştik. Şimdi ise herhangi bir metrik uzayda nasıl eşit olacağını göstereceğiz. Aşağıda 4.2.12 Tanım daki (AP) özelliğini kullanacağız.

**4.3.12 Teorem:** $I \subset P(\mathbb{N})$ bir admissible ideal olsun [14].

$i$. Eğer $I$ ideali (AP) özelliğini sağlıyor ve ayrıca $(X,\rho)$ keyfi bir metrik uzay ise o zaman $X$ in elemanlarının keyfi bir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için $I - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ ise $I^* - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ dir.

$ii$. Eğer $(X,\rho)$ en az bir yığılma noktasına sahip ve $X$ in elemanlarının keyfi bir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve her $\xi \in X$ için $I - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$, $I^* - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ oluyorsa o zaman $I$ (AP) özelliğine sahiptir.

### 4.4 $I-$limit ve $I-$cluster noktaları

Bir $\xi \in \mathbb{R}$ sayına, $\bar{d}(M) > 0$ ve $\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = \xi$ olacak şekilde bir $M = \{m_1 < m_2 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ kümesinin varlığını sağlayan reel sayıların bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin istatistiksel limit noktası denir. Bir $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına, her $\varepsilon > 0$ için $\bar{d}\{n \in \mathbb{N} : |x_n - \xi| < \varepsilon\}$ mevcut olan $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin istatistiksel cluster noktası denir.

Kostyrko vd [14] aşağıdaki yöntemle bu kavramları $I-$yakınsaklığa genişlettiler.

**4.4.1 Tanım:** $(X,\rho)$ bir metrik uzay ve $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $X$ in elemanlarının bir dizisi olsun.

$i$. Bir $\xi \in \mathbb{R}$ elemanı, $M \notin I$ ve $\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = \xi$ olacak şekilde bir $M = \{m_1 < m_2 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ kümesinin varlığını sağlayan $x$ in $I-$limit noktası olarak adlandırılır.

$ii$. Bir $\xi \in \mathbb{R}$ elemanının $x$ in $I-$cluster noktası olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için $\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) < \varepsilon\} \notin I$ mevcut olmasıdır. [14]

$x$ in bütün $I-$limit ve $I-$cluster noktalarının kümesi sırasıyla $I(\Lambda_x)$ ve $I(\Gamma_x)$ olarak tanımlanır.

**4.4.2 Önerme:** $I$ bir admissible ideal olsun. O halde $X$ in elemanlarının her $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için $I(\Lambda_x) \subset I(\Gamma_x)$ vardır [14].

**4.4.3 Teorem:** $I$ bir admissible ideal olsun [14].

*i.* $I(\Gamma_x)$ kümesi $X$ in elemanlarının her $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için $X$ de kapalıdır.

*ii.* Varsayalım ki $(X, \rho)$ ayrılabilir bir metrik uzaydır. $M_n \subset \mathbb{N}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $M_n \notin I$ olacak şekilde $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kümelerinin ayrık bir dizisinin olduğunu varsayalım. O halde her kapalı $F \subset X$ kümesi için $F = I(\Gamma_x)$ olacak şekilde $X$ in elemanlarının bir $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır.

### 4.5 $I-$yakınsaklık Ve $I^*-$yakınsaklığın Yakınsaklık Alanları

$I-$yakınsaklık ve $I^*-$ yakınsaklık ($I$ bir admissible ideal olması durumunda) bir regüler toplanabilme metodu olarak düşünülebilir. Kostyrko v.d [13] $F(I)$ ve $F(I^*)$ yakınsaklık alanları şöyle tanımlamıştır:

$$\begin{aligned} F(I) &= \{x = (x_n) \in \ell_\infty : I - \lim x_n \in \mathbb{R} \text{ mevcut}\} \\ F(I^*) &= \{x = (x_n) \in \ell_\infty : I^* - \lim x_n \in \mathbb{R} \text{ mevcut}\} \end{aligned}$$

Buradaki $F(I)$ ve $F(I^*)$ sırasıyla $I-$yakınsak ve $I^*-$yakınsaklığın yakınsaklık alanlarıdır. Bu yakınsaklık alanları aşağıdaki sup-norm

$$\|x\| = \sup_{n=1,2,\ldots} |x_n|, \ x = (x_n)_1^\infty \in \ell_\infty$$

ile tüm sınırlı reel dizilerin lineer normlu uzayı $\ell_\infty$ un altkümeleri gibi çalışılmıştır.

$F(I)$ ve $F(I^*)$ ın özelliklerini $I$ ideali üzerine bağlıdır. İlk önce maksimallik başta olmak üzere $\mathbb{N}$ deki ideallerin bazı özellikleri tanıtıldı.

$Z$, $\mathbb{N}$ deki tüm admissible ideallerin sınıfıdır ve kapsam ile kısmi sıralanabilir. Eğer $Z_0 \subseteq Z$, $Z$ nin sıralanmış boş olmayan (lineer) altsınıfı ise o zaman $\bigcup Z_0$ yine $Z_0$ için bir üst sınır olan $\mathbb{N}$ deki bir admissible ideal olduğu kolayca görülür. Aşağıda $\mathbb{N}$ deki maksimal admissible ideallerin bir karakterizasyonu verilmiştir [13].

**4.5.1 Lemma:** $\mathbb{N}$ deki bir $I_0$ ideali $\mathbb{N}$ de bir maksimal ideal olması için gerek ve yeter şart, her $A \subseteq \mathbb{N}$ için

$$(A \in I_0) \vee (\mathbb{N} \backslash A \in I_0) \tag{4.12}$$

ifadesini sağlar [13].

**İspat:** Önce gerek şartı sağlatalım. Varsayalım ki $I_0$ (4.12) yi sağlar. Gösterelim ki $I_0$ maksimal admissible ideal dir. Aksini varsayalım ki $\mathbb{N}$ deki $I_1$ bir admissible idealdir öyleki $I_1 \supset I_0$ dır. O halde bir $A \subseteq \mathbb{N}$ kümesi vardır öyleki $A \in I_1 \backslash I_0$ dır. Bundan dolayı $A \notin I_0$ ve sonuç olarak (4.12) den $\mathbb{N} \backslash A \in I_0$ mevcuttur. Fakat diğer taraftan $A \in I_1$, $\mathbb{N} \backslash A \in I_1$ olması $\mathbb{N} \in I_1$ olduğunu verir ki bu bir çelişkidir. Çünkü varsayımımızdan $I_1$ admissible ideal idi. Bu da $I_0$ ın maksimal ideal olduğunu gösterir.

Şimdi yeter şartı sağlatalım. Varsayalım ki $I_0$ bir maksimal admissible idealdir. (4.12) nin sağlandığını göstereceğiz. Bunun için aksini ispatlayalım. Dolayısıyla bir $A \subseteq \mathbb{N}$ kümesi vardır öyleki

$$(A \notin I_0) \wedge (\mathbb{N} \backslash A \notin I_0) \tag{4.13}$$

mevcuttur.

$$K = \{X \subseteq \mathbb{N} : X \cap A \in I_0\}$$

sınıfını inşa edelim. Göstereceğiz ki

*a.* $K \supseteq I_0$

*b.* $K$, $\mathbb{N}$ de bir admissible idealdir.

İlk önce *a.* yı gösterelim.

*a.* $X \in I_0$ olsun. O halde $X \cap A \subseteq X$ dir. Bu nedenle $X \cap A \in I_0$ dır ve bu yüzden $X \in K$ dır. Bu da istenilendir.

Şimdi de *b.* yi gösterelim.

*b.* $\mathbb{N} \notin K$ ve $K$, $n \in \mathbb{N}$ herbir tek nokta $\{n\}$ içerdiği aşikardır. Ayrıca $X_1, X_2 \in K$ ise $X_1 \cap A$, $X_2 \cap A \in I_0$ dır bu nedenle

$$(X_1 \cup X_2) \cap A = (X_1 \cap A) \cup (X_2 \cap A)$$

$I_0$ a aittir. Dolayısıyla $X_1 \cup X_2$, $K$ ya aittir. $X \in K$ ve $X_1 \subseteq X$ olsun. O halde $X_1 \cap A \subseteq X \cap A \in I_0$, bundan dolayı $X_1 \cap A \in I_0$, $X_1 \in K$ dır.

Böylece $K$, $\mathbb{N}$ de bir admissible ideal ve $K \supseteq I_0$ olduğu görülür. $I_0$ ın maksimalliğinden $I_0 = K$ mevcuttur. $(\mathbb{N} \backslash A) \cap A = \varnothing \in I_0$ olduğundan $\mathbb{N} \backslash A \in K$ dır. Fakat bu (4.13) ile çelişir.

Şimdi tekrar $F(I)$ ve $F(I^*)$ altuzaylarına dönelim. $F(I)$ "büyüklüğü" $I$ ideali üzerine bağlıdır. Bu durum aşağıdaki teoremde gösterilmiştir.

**4.5.2 Teorem:** $I$, $\mathbb{N}$ de bir admissible ideal olsun. O halde $F(I) = \ell_\infty$ olması için gerek ve yeter şart $I$ nın $\mathbb{N}$ de maksimal admissible ideal olmasıdır [13].

**İspat:** Önce gerek şartı ispatlayalım. Varsayalım ki $I$, $\mathbb{N}$ de bir admissible idealdir. $x = (x_n)_1^\infty \in \ell_\infty$ olsun. $I - \lim x_n \in \mathbb{R}$ varlığını göstereceğiz. Bunun için $x \in \ell_\infty$ olduğundan $a, b \in \mathbb{R}$ sayıları vardır öyleki $a \leq x_n \leq b$ $(n = 1, 2, \ldots)$ aşağıdaki kümeleri

$$A_1 = \left\{n : a \leq x_n \leq \frac{a+b}{2}\right\}, \; B_1 = \left\{n : \frac{a+b}{2} \leq x_n \leq b\right\}$$

olarak alalım. O halde $A_1 \cup B_1 = \mathbb{N}$ dir. $I$ bir admissible ideal olduğundan her iki $A_1, B_1$ kümelerinin ikisi birden $I$ ya ait olamaz. Bu nedenle bunlardan en az biri $I$ ya ait değildir. $D_1$ ve $I_1$ e karşılık gelen aralığı tanımlayalım. Böylece $D_1$ kümesi (sonsuz) ve $I_1$ aralığı mevcuttur öyleki

$$D_1 = \{n : x_n \in I_1\} \notin I$$

dır. Böylece tümevarım ile

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$$

$I_n = [a_n, b_n]$ olmak üzere kapalı aralıkların bir dizisini inşa edebiliriz. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ve

$$D_k = \{n : x_n \in I_k\} \notin I \ \ (k = 1, 2, \ldots)$$

dir. $\xi \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$ ve $\varepsilon > 0$ olsun.

$$M = \{n : |x_n - \xi| < \varepsilon\}$$

kümesini inşa edelim. Yeterince büyük $m$ için $I_m = [a_m, b_m] \subseteq (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ mevcuttur. $D_m \notin I$ olduğundan $M(\varepsilon) \notin I$ olduğu görülür. $M(\varepsilon) \in I$ olduğundan, $I$ nın maksimalliğinden ve 4.5.1 Lemma gereğince,

$$A(\varepsilon) = \{n : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\} = \mathbb{N} \backslash M(\varepsilon) \in I$$

dır. Bundan dolayı $I - \lim x_n = \xi$ dir.

Şimdi yeter şartı ispatlayacağız. Varsayalım ki $I$ maksimal ideal değildir. O halde 4.5.1 Lemma gereğince bir

$$M = \{m_1 < m_2 < \cdots\} \subseteq \mathbb{N}$$

kümesi vardır öyleki $M \notin I$, $\mathbb{N} \backslash M \notin I$ dır. $x = (x_n)_1^{\infty}$ dizisini $x_n = \varkappa_M(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gibi tanımlayalım. O halde $x_n \in \ell_\infty$ dur. Göstereceğiz ki $I - \lim x_n$ mevcut değildir. Buradan her $\xi \in \mathbb{R}$ ve yeterince küçük $\varepsilon$ için

$$\{n : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\}$$

kümesi $M$ ye, $\mathbb{N} \backslash M$ ye yada $\mathbb{N}$ ye eşittir ve dolayısıyla bunların hiçbiri $I$ ya ait değildir. Buda ispatı tamamlar.

**4.5.3 Uyarı:** 4.5.2 Teoremi sınırsız diziler için genişletilemez [13].

**4.5.4 Önerme:** $I$ bir admissible ideal olsun. Reel sayıların sınırsız bir dizisi vardır ki $I - \lim x_n$ mevcut değildir [13].

**İspat:** $I$ bir admissible ideal ve $x_n = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ istenilen bir dizi olduğundan ispatı yapmak kolaydır.

Şimdi $F(I)$ ve $F(I^*)$ yakınsaklık alanlarının topolojik özelliklerini ve birbirleri arasındaki ilişkiyi açıklayacağız.

**4.5.5 Teorem:** Varsayalım ki $I$, $\mathbb{N}$ de bir admissible ideal dir. O halde $F(I)$, $\ell_\infty$ un kapalı lineer altuzayıdır [13].

**İspat:** $x^{(m)} = \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty} \in F(I)$ $(m = 1, 2, \ldots)$, $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$, $\ell_\infty$ da $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ yani $\lim\limits_{m\to\infty} \left\|x^{(m)} - x\right\| = 0$ olsun. $x \in F(I)$ olduğunu ispatlayacağız. Varsayımdan $I - \lim x^{(m)} = \xi_m \in \mathbb{R}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ mevcuttur. İspatı iki adımda yapacağız.

1. $(\xi_m)_1^{\infty}$ bir Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz (öyleki $\lim\limits_{m\to\infty} \xi_m = \xi \in \mathbb{R}$ vardır).

2. $I - \lim x = \xi$ olduğunu göstereceğiz.

Bunun için önce 1.ispatlayalım.

1. $\eta > 0$ olsun. $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$ olduğunda $\left(x^{(m)}\right)_1^{\infty}$ dizisinin $\ell_\infty$ da bir Cauchy dizisi olduğunu görürüz. Bu nedenle bir $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki her $u, v > m_0$ için

$$\left\|x^{(u)} - x^{(v)}\right\| < \frac{\eta}{3} \tag{4.14}$$

mevcuttur. $u, v > m_0$ için

$$\begin{aligned} U\left(\frac{\eta}{3}\right) &= \left\{j : \left|x_j^{(u)} - \xi u\right| < \frac{\eta}{3}\right\} \\ V\left(\frac{\eta}{3}\right) &= \left\{j : \left|x_j^{(v)} - \xi v\right| < \frac{\eta}{3}\right\} \end{aligned}$$

kümeleri $\mathcal{F}(I)$ filterine aittir. Dolayısıyla bunların kesişimi boş değildir. $s \in U\left(\frac{\eta}{3}\right) \cap V\left(\frac{\eta}{3}\right)$ elemanı için

$$\left|x_s^{(u)} - \xi u\right| < \frac{\eta}{3}, \quad \left|x_s^{(v)} - \xi v\right| < \frac{\eta}{3} \tag{4.15}$$

vardır. Basit bir değerlendirme ile (4.14) ve (4.15) den

$$\begin{aligned} |\xi u - \xi v| &\leq \left|\xi u - x_s^{(u)}\right| + \left|x_s^{(u)} - x_s^{(v)}\right| + \left|x_s^{(v)} - \xi v\right| \\ &< \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta \end{aligned}$$

elde ederiz. Bundan dolayı $(\xi_m)_1^{\infty}$ bir Cauchy dizisidir ve bu yüzden $\xi = \lim\limits_{m\to\infty} \xi_m \in \mathbb{R}$ dir.

2. $\varepsilon > 0$ olsun. $v_0$ seçelim öyleki $v > v_0$ için aynı zamanda

$$|\xi v - \xi| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left\|x^{(v)} - x\right\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.16}$$

vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|x_n - \xi| \leq \left|x_n - x_n^{(v)}\right| + \left|x_n^{(v)} - \xi u\right| + |\xi v - \xi| \tag{4.17}$$

mevcuttur.

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= \{n : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\}, \ CA(\varepsilon) = \{n : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\} \\ A_v\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) &= \left\{n : \left|x_n^{(v)} - \xi v\right| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}, \ CA_v\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \left\{n : \left|x_n^{(v)} - \xi v\right| < \frac{\varepsilon}{3}\right\} \end{aligned}$$

olsun. O halde (4.16) ve (4.17) den her $n \in A_v\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ için $|x_n - \xi| < \varepsilon$ elde ederiz. Böylece

$$CA_v\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \subseteq CA(\varepsilon) \tag{4.18}$$

dir. $A_v\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \in I$ olduğundan eğer (4.18) dekinin tümleyeni alınırsa $A(\varepsilon) \in I$ bulunur. Böylece 2. nin ispatı biter.

$F(I)$ ve $F(I^*)$ yakınsaklık alanlarını şöyle özetleyebiliriz: 4.2.9 Teorem de $F(I) \subseteq F(I^*)$ olduğunu gösterdik. 4.2.13 Teorem de $F(I) = F(I^*)$ olması için gerek ve yeter şartın $I$ nın (AP) şartını sağlamasıdır. Ayrıca 4.5.2 Teorem den eğer $I$ bir maksimal ideal ise $F(I) = \ell_\infty$ dur. Böylece eğer $I$ bir maksimal ideal değil ve (AP) şartını sağlamıyorsa o zaman $F(I) \subset F(I^*) \subset \ell_\infty$ dir. Şimdi her $I$ admissible ideali için $F(I^*)$ kümesi $F(I)$ da yoğun olduğunu göstereceğiz. Bunun için aşağıdaki teoreme bakalım.

**4.5.6 Teorem:** $\mathbb{N}$ deki her $I$ admissible ideali için $\overline{F(I^*)} = F(I)$ dir ($\overline{M}$, $\ell_\infty$ daki $M$ nin kapanışıdır) [13].

**İspat:** 4.2.9 Teorem den dolayı $F(I) \subseteq F(I^*)$ dır. $F(I)$, $\ell_\infty$ da kapalı olduğundan $\overline{F(I^*)} \subseteq F(I)$ elde ederiz. Bundan dolayı $F(I) \subseteq \overline{F(I^*)}$ olduğunu ispatlayacağız. $z \in \ell_\infty$ için $B(z, \delta) = \{x \in \ell_\infty : \|x - z\| < \delta\}$, $\delta > 0$ ($\ell_\infty$ daki yuvar) alalım. Her $y \in F(I)$ ve $0 < \delta < 1$ için

$$B(y, \delta) \cap F(I^*) \neq \varnothing \tag{4.19}$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $L = I - \lim y$ alalım. Keyfi bir $\eta(0, \delta)$ seçelim. O halde

$$A(\eta) = \{n : |y_n - L| \geq \eta\} \in I$$

dır. $x = (x_n)_1^\infty$ dizisini eğer $n \in A(\eta)$ ise $x_n = y_n$, diğer durumlarda $x_n = L$ olacak şekilde tanımlayalım. O zaman $x \in \ell_\infty$, $I^* - \lim x = L$ ve $x \in B(y, \eta)$ olduğu açıktır. Böylece (4.19) sağlanmış olur. Buda ispatı tamamlar.

# 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

## 5.1 Bilateral Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı

Agrawal ve Srivasatava [28] bilateral dizileri tanımladılar. Reel sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklık kavramını ilk defa 1951 yılında Fast [1] verdi. Yoğunluk ile ilişkisini Buck [3] inceledi. Toplanabilme ile ilişkisini Schoonberg [4] çalıştı ve bunu D-yakınsaklık olarak tanımladı. Fridy [5] İstatistiksel limit ve istatistiksel cluster noktaları kavramlarını verdi. Salat [7] istatistiksel yakınsaklığın topolojik özelliklerini inceledi. Connor [9] yoğunluk yerine iki değerli ölçü kavramını kullanarak $\mu-$istatistiksel ve $\mu-$yoğun yakınsaklık kavramlarını sundu. Connor [10] istatistiksel yakınsaklığın kuvvetli p-Cesaro toplanabilir olduğunu gösterdi. Fonksiyon dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı için Duman ve Orhan [34] ve Wilczynski [35] çalışmalar yapmışlardır. Fark dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını Başarır [33] çalıştı.

Bu bölümde bilateral dizileri için istatistiksel yakınsaklık kavramı örneklerle açıklandı. Bilinen anlamda yakınsaklık ile ilişkisi incelendi. İstatistiksel yakınsak bilateral dizinin kuvvetli p-Cesaro toplanabilir olduğu gösterildi.

**5.1.1 Tanım:** $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ bilateral dizisi $\forall \varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{Z} : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin yoğunluğu sıfır ise $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu kümenin yoğunluğunun sıfır olması demek

$$d(A(\varepsilon)) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} |\{n \leq |k| : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\}| = 0$$

dir. Bilateral dizisinin istatistiksel yakınsaklığı $st(B) - \lim x = \xi$ ile gösterilir.

**5.1.2 Örnek:** $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ bilateral dizisini

$$x = (x_n) = \begin{cases} 1, & |n| = k^2 \\ 0, & |n| \neq k^2 \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

ile tanımlayalım. Bu dizi 0 a istatistiksel yakınsaktır. Çünkü;

$$x = (x_n) = \left( \ldots, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \underset{-1.\ \text{terim}}{\underset{\downarrow}{1}}, \underset{0.\ \text{terim}}{\underset{\downarrow}{1}}, \underset{1.\ \text{terim}}{\underset{\downarrow}{1}}, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \ldots \right)$$

olduğundan

$$|\{n \leq |k| : |x_n - 0| \geq \varepsilon\}| \leq |\{n \leq |k| : x_n \neq 0\}| \leq 2\sqrt{k} + 1$$

dir. Her tarafın limitini alırsak,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} |\{n \leq |k| : |x_n - 0| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{k \to \infty} \frac{2\sqrt{k}}{k} = 0$$

buda dizinin 0 a istatistiksel yakınsak olduğunu gösterir.

**5.1.3 Örnek:** $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ bilateral dizisini

$$x = (x_n) = \begin{cases} \sqrt{n}, & |n| = k^2 \\ 7, & |n| \neq k^2 \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

ile tanımlarsak yukarıdaki örneğe benzer bir yolla 7 ye istatistiksel yakınsak olduğu görülür.

**5.1.4 Teorem:** $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ bilateral dizisi eğer yakınsak ise istatistiksel yakınsaktır.

**İspat:** $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ bilateral dizisi $\xi$ ye yakınsak olsun. O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $|n| > n_0$ olduğunda $|x_n - \xi| < \varepsilon$ kalır. Dolayısıyla yakınsaklık tanımı gereğince $\varepsilon$ komşuluğu dışında kalan elemanlar

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{Z} : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\}$$

kümesine ait olup sonlu yoğunluğu sıfırdır. Buradan $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ bilateral dizisinin $\xi$ ye istatistiksel yakınsak olduğu anlaşılır.

**5.1.5 Teorem:** İstatistiksel yakınsak bilateral bir dizinin limiti tektir.

**İspat:** Varsayalım ki $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ bilateral dizisi $\xi$ ve $\eta$ olmak üzere iki farklı istatistiksel limite sahip olsun.

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{|\xi - \eta|}{2}\right) \tag{5.1}$$

olarak seçelim. O halde

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{Z} : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\} \quad \text{ve} \quad B(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{Z} : |x_n - \eta| \geq \varepsilon\}$$

kümelerinin yoğunluğu sıfır olacağından $n \in \mathbb{Z}$ için $|x_n - \xi| < \varepsilon$ ve $|x_n - \eta| < \varepsilon$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} |\xi - \eta| &= |\xi - x_n + x_n - \eta| \leq |x_n - \xi| + |x_n - \eta| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

olur ki bu (5.1) ile çelişir. O halde varsayımımız yanlış olur. Dolayısıyla istatistiksel yakınsak bilateral bir dizinin limiti tektir.

**5.1.6 Teorem:** $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ve $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral diziler olsun. $st(B) - \lim x = \xi$, $st(B) - \lim y = \eta$ ve $a$ bir reel sayı olsun. Bu durumda;

*i.* $st(B) - \lim (x + y) = \xi + \eta$

*ii.* $st(B) - \lim (ax) = a\xi$

dir.

**İspat:** $st(B) - \lim x = \xi$ ve $st(B) - \lim y = \eta$ olsun. O halde $\forall\varepsilon > 0$ için

$$d\left(\left\{n \in \mathbb{Z} : |x_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 0 \text{ ve } d\left(\left\{n \in \mathbb{Z} : |y_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 0$$

dır.

$$|(x_n + y_n) - (\xi + \eta)| \leq |x_n - \xi| + |y_n - \eta|$$

eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} & \{n \in \mathbb{Z} : |(x_n + y_n) - (\xi + \eta)| \geq \varepsilon\} \\ \subseteq \; & \left\{n \in \mathbb{Z} : |x_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{n \in \mathbb{Z} : |y_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} & d\left(\{n \in \mathbb{Z} : |(x_n + y_n) - (\xi + \eta)| \geq \varepsilon\}\right) \\ \leq \; & d\left(\left\{n \in \mathbb{Z} : |x_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + d\left(\left\{n \in \mathbb{Z} : |y_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 0 \end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned} & \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \left|\{n \leq |k| : |(x_n + y_n) - (\xi + \eta)| \geq \varepsilon\}\right| \\ \leq \; & \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \left|\left\{n \leq |k| : |x_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \left|\left\{n \leq |k| : |y_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| = 0 \end{aligned}$$

olduğunu gösterir ki buda $st(B) - \lim (x + y) = \xi + \eta$ demektir.

*ii.* $a = 0$ ise $st(B) - \lim (ax) = a\xi$ olduğu açıktır. Şimdi $a \neq 0$ olduğunu varsayalım.

$$|ax_n - a\xi| \geq \varepsilon \text{ ise } |x_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{|a|}$$

olarak yazabiliriz. Buradan

$$\{n \in \mathbb{Z} : |ax_n - a\xi| \geq \varepsilon\} \subseteq \left\{n \in \mathbb{Z} : |x_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{|a|}\right\}$$

olduğundan

$$d\left(\{n \in \mathbb{Z} : |ax_n - a\xi| \geq \varepsilon\}\right) \leq d\left(\left\{n \in \mathbb{Z} : |x_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{|a|}\right\}\right) = 0$$

elde edilir. Bu ise $st\left(B\right)-\lim\left(ax\right)=a\xi$ olduğunu gösterir.

**5.1.7 Tanım:** $x=\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizi ve $p$ pozitif reel bir sayı olsun. Eğer;

$$\lim_k \frac{1}{k}\sum_{n=-k}^{k}\left|x_n-\xi\right|^p=0$$

olacak şekilde bir $\xi$ kompleks sayısı varsa $x=\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisi $\xi$ ye kuvvetli $p-$Cesaro toplanabilirdir denir.

**5.1.8 Teorem:** $p\in\mathbb{R}$ ve $0<p<\infty$ olsun. Eğer bir $x=\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisi $\xi$ ye kuvvetli $p-$Cesaro toplanabilir ise $\xi$ ye istatistiksel yakınsaktır.

**İspat:** Varsayalım ki $x=\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisi $\xi$ ye kuvvetli $p-$Cesaro toplanabilir olsun.

$$\sum_{n=-k}^{k}\left|x_n-\xi\right|^p\geq\left|\left\{n\leq|k|:\left|x_n-\xi\right|^p\geq\varepsilon\right\}\right|.\varepsilon^p$$

elde edileceğinden eşitsizliğin her iki tarafını $\frac{1}{k}$ ile çarpıp $k\to\infty$ için limit alırsak eğer;

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=-k}^{k}\left|x_n-\xi\right|^p\geq\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\left|\left\{n\leq|k|:\left|x_n-\xi\right|^p\geq\varepsilon\right\}\right|.\varepsilon^p$$

olur böylece $x=\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisi $\xi$ ye istatistiksel yakınsak olduğu görülür.

**5.1.9 Teorem:** Eğer sınırlı bir bilateral dizi $\xi$ ye istatistiksel yakınsak ise $\xi$ ye kuvvetli $p-$Cesaro toplanabilirdir.

**İspat:** Şimdi varsayalım ki sınırlı $x=\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisi $\xi$ ye istatistiksel yakınsak ve $K=\left\|x\right\|_\infty+|\xi|$ olsun. $\varepsilon>0$ verilsin ve $N_\varepsilon$ seçelim öyleki her $k>N_\varepsilon$ için

$$\frac{1}{k}\left|\left\{n\leq|k|:\left|x_n-\xi\right|\geq\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\right|\leq\frac{\varepsilon}{2K^p}$$

ve

$$L_k=\left\{n\leq|k|:\left|x_n-\xi\right|\geq\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

olsun. Şimdi $k>N_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\sum_{n=-k}^{k}\left|x_n-\xi\right| &= \frac{1}{k}\left(\sum_{n\in L_k}\left|x_n-\xi\right|^p+\sum_{\substack{n\notin L_k\\ n\leq|k|}}\left|x_n-\xi\right|^p\right)\\ &< \frac{1}{k}\left(\frac{k\varepsilon}{2K^p}\right)K^p+\frac{1}{k}\left(k\frac{\varepsilon}{2}\right)\\ &= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

olur ve bundan dolayı $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisi $\xi$ ye kuvvetli $p-$Cesaro toplanabilirdir.

### 5.2 Bilateral Dizilerinin İdeal Yakınsaklığı

Reel sayı dizileri için ideal yakınsaklık kavramını 2000 yılında Kostyrko vd. [13,29] tanımladılar. Kostyrko vd. [14] daha sonra bu kavramı herhangi bir metrik uzaya genişlettiler. Salat vd [31] ideal yakınsaklığın yakınsaklık alanı üzerine çalıştılar. Lahiri ve Das [32] ideal yakınsalığın topolojik özelliklerini incelediler. Balcerzak vd. [37] fonksiyon dizileri için ideal yakınsaklık kavramını çalışmışlardır. Gümüş [36] fark dizilerinin ideal yakınsaklığını araştırdı.

Bu kısımda bilateral diziler için ideal yakınsaklık kavramı örneklerle açıklandı. Bilinen anlamdaki yakınsaklığın aksiyomlarının sağlatılıp sağlatılmadığı gösterildi.

**5.2.1 Tanım:** $I \subset P(\mathbb{Z})$ kümesi idealin şartlarını sağlar. Dolayısıyla $I$, $\mathbb{Z}$ de bir non-trivial ideal olup $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisi $\forall\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{Z} : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\} \in I$$

ise $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına ideal yakınsaktır denir ve $I(B) - \lim x_n = \xi$ ile gösterilir.

**5.2.2 Örnek:** $I \subset P(\mathbb{Z})$ kümesi için

$$I = \{A \subset \mathbb{Z} : A \text{ kümesi teksayılardan oluşur}\}$$

şeklinde tanımlayalım. $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisi

$$x = (x_n) = \begin{cases} 1, & n = 2k-1 \\ 0, & n \neq 2k-1 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

olsun. Buradan

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{Z} : |x_n - 0| \geq \varepsilon\} = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\} \in I$$

olduğundan $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisi 0 a ideal yakınsak olduğu görülür.

Yukarıdaki örnekte $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisi bilinen anlamda yakınsak ve istatistiksel yakınsak değildir.

**5.2.3 Teorem:** $I$, $\mathbb{Z}$ de bir admissible ideal olsun.

$i$. Her sabit $x = \left(\ldots, \xi, \underset{-1.\text{ terim}}{\underset{\downarrow}{\xi}}, \underset{0.\text{ terim}}{\underset{\downarrow}{\xi}}, \underset{1.\text{ terim}}{\underset{\downarrow}{\xi}}, \xi, \ldots\right)$ bilateral dizisi 0 a $I-$yakınsaktır.

*ii*. $I-$yakınsak bilateral dizisi için limit tektir.

*iii*. Eğer bir $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisinin herbir alt dizisi $\xi$ ye $I-$yakınsak bir $z$ altdizisine sahip ise $x$ bilateral dizisi $\xi$ ye $I-$yakınsaktır.

*iv*. Eğer $I$ sonsuz bir küme içermiyorsa o zaman $x$ bilateral dizisi $\xi$ ye $I-$yakınsak ise $x$ in her $y$ alt dizisi de $\xi$ ye $I-$yakınsaktır.

**ispat:**

*i*. $I$ bir admissible ideal olduğundan her sabit $x = (\ldots, \xi, \xi, \xi, \xi, \ldots)$ bilateral dizisi 0 a $I-$yakınsak olduğu açıktır.

*ii*. Varsayalımki $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisi iki farklı ideal limite sahip olsun. Yani

$$I - \lim x_n = \xi \text{ ve } I - \lim x_n = \eta$$

olsun.

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{|\xi - \eta|}{2}\right) \tag{5.2}$$

olarak alalım. İdeal tanımından

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{Z} : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\}$$

ve

$$B(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{Z} : |x_n - \eta| \geq \varepsilon\}$$

dir. Filter tanımı gereğince

$$\mathbb{Z}\backslash A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{Z} : |x_n - \xi| < \varepsilon\}$$

ve

$$\mathbb{Z}\backslash B(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{Z} : |x_n - \eta| < \varepsilon\}$$

kümeleri $I$ ile üretilmiş $\mathcal{F}(I)$ filterine aittir. Dolayısıyla $n \in \mathbb{Z}$ için

$$|x_n - \xi| < \varepsilon \text{ ve } |x_n - \eta| < \varepsilon$$

dir. Buradan basit bir işlem ile $|\xi - \eta| < 2\varepsilon$ olduğu görülür ki bu (5.2) ile çelişir. O halde varsayımımız yanlıştır.

*iii*. $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisi $\xi \in \mathbb{R}$ sayısına $I-$yakınsak olmasın. $x$ in $y$ altdizisi için $y$ nin $\xi$ ye $I-$yakınsak bir $z$ altdizisinin olmadığını göstermemiz yeterlidir. İdeal yakınsaklık tanımından

$$A(\varepsilon_0) = \{n \in \mathbb{Z} : |x_n - \xi| \geq \varepsilon_0\} \notin I \tag{5.3}$$

dır. O halde $A(\varepsilon_0)$ kümesi sonsuz bir kümedir.

$$A(\varepsilon_0) = \{\cdots < n_{-k-1} < n_{-k} < \cdots < n_{-1} < n_0 < n_1 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots\} \subseteq \mathbb{Z}$$

olsun. $y_k = x_{n_k}$ $(k \in \mathbb{Z})$ alalım. O halde $y = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ , $x$ in bir alt dizisidir ve (5.3) den

$$|y_k - \xi| \geq \varepsilon_0 \;\; (k \in \mathbb{Z}) \tag{5.4}$$

dir. (5.4) ten $y$ nin $I-$yakınsak $z = (z_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ alt dizisi olmadığı görülür. Aksi taktirde $\mathbb{Z}$, $I$ ya ait olur ki bu $I$ nın admissible ideal olması ile çelişir.

*iv*. Varsayalım ki

$$A = \{\cdots < n_{-k} < \cdots < n_{-1} < n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \cdots\} \subseteq \mathbb{Z}$$

sonsuz kümesi $I$ ya ait olsun.

$$B = \mathbb{Z} \backslash A = \{\cdots < m_{-k} < \cdots < m_{-1} < m_0 < m_1 < \cdots < m_k < \cdots\}$$

kümesi yine sonsuzdur. Çünkü $B$ nin sonlu olması durumunda $\mathbb{Z}$, $I$ ya ait olacaktı ki burada $I$ nın admissible ideal olması çelişkisi söz konusudur. $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisini

$$(x_{n_k}) = 0 \;,\; (x_{m_k}) = 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

olarak tanımlayalım. $I - \lim x_n = 1$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $x$ in $y = (x_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}}$ altdizisi sabit olup $I - \lim y = 0$ dır. Bu yüzden varsayımımız yanlış olur.

**5.2.4 Örnek:** $I_0 = \{\varnothing\}$ olsun. Bilateral bir dizinin $I_0-$yakınsak olması için gerek ve yeter şart sabit olmasıdır. Gerçekten sabit bir $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\ldots, \xi, \xi, \xi, \xi, \xi, \ldots)$ bilateral dizisi için

$$A(\varepsilon_0) = \{n \in \mathbb{Z} : |x_n - \xi| \geq \varepsilon_0\} = \varnothing \in I$$

olduğundan doğrudur.

**5.2.5 Örnek:** $\mathbb{Z}$ nin tüm sonlu altkümelerinin sınıfını $I_f$ olarak tanımlayalım. $I_f$, $\mathbb{Z}$ de bir admissible ideal ve $I_f-$yakınsaklık $\mathbb{R}$ deki bilateral dizileri için bilinen anlamdaki yakınsaklık ile çakışır.

**5.2.6 Örnek:** $I_d = \{A \subseteq \mathbb{Z} : d(A) = 0\}$ olsun. $I_d$, $\mathbb{Z}$ de bir admissible ideal ve $I_d-$yakınsaklık bilateral dizileri için istatistiksel yakınsaklık ile çakışır.

**5.2.7 Teorem:** Eğer $I$, $\mathbb{Z}$ de bir admissible ideal ve $x=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizi olsun. Bu durumda $\lim x_n=\xi$ ise $I-\lim x_n=\xi$ dir.

**İspat:** $I_f\subset I$ olduğundan eğer $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral dizisi yakınsak ise ideal yakınsak olduğu açıktır.

**5.2.7 Teorem:** $I$, $\mathbb{Z}$ de non-trivial bir ideal olsun. $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ve $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bilateral diziler olsun.

$i$. Eğer $I-\lim x_n=\xi$ ve $I-\lim y_n=\eta$ ise $I-\lim(x_n+y_n)=\xi+\eta$ dir.

$ii$. Eğer $I-\lim x_n=\xi$ ve $I-\lim y_n=\eta$ ise $I-\lim(x_ny_n)=\xi\eta$ dir.

**ispat:** $I-\lim x_n=\xi$ ve $I-\lim y_n=\eta$ ise

$$A(\varepsilon)=\left\{n\in\mathbb{Z}:|x_n-\xi|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\text{ ve }B(\varepsilon)=\left\{n\in\mathbb{Z}:|y_n-\eta|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

dir. Öyleyse

$$\mathbb{Z}\backslash A(\varepsilon)=\left\{n\in\mathbb{Z}:|x_n-\xi|<\frac{\varepsilon}{2}\right\}\text{ ve }\mathbb{Z}\backslash B(\varepsilon)=\left\{n\in\mathbb{Z}:|y_n-\eta|<\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

kümeleri filtere aittir. Buradan basit bir işlem ile $n\in\mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned}|(x_n+y_n)-(\xi+\eta)| &= |(x_n-\xi)+(y_n-\eta)|\\ &\leq |x_n-\xi|+|y_n-\eta|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

olduğundan

$$\{n\in\mathbb{Z}:|(x_n+y_n)-(\xi+\eta)|\geq\varepsilon\}\in I$$

olur. Dolayısıyla $I-\lim(x_n+y_n)=\xi+\eta$ olduğu kolayca görülür.

$ii$. $\varepsilon>0$ olsun. $I-\lim x_n=\xi$ ve $I-\lim y_n=\eta$ olsun.

$$\begin{aligned}\{n\in\mathbb{Z}:|(x_ny_n)-(\xi\eta)|<\varepsilon\} &= \{n\in\mathbb{Z}:|x_ny_n-x_n\eta+x_n\eta-\xi\eta|<\varepsilon\}\\ &= \{n\in\mathbb{Z}:|x_ny_n-x_n\eta|+|x_n\eta-\xi\eta|<\varepsilon\}\\ &= \{n\in\mathbb{Z}:x_n|y_n-\eta|+\eta|x_n-\xi|<\varepsilon\} \qquad (5.5)\\ &\supseteq \left\{n\in\mathbb{Z}:|x_n-\xi|<\frac{\varepsilon}{2|\xi|}\right\}\\ &\quad\cap\left\{n\in\mathbb{Z}:|y_n-\eta|<\frac{\varepsilon}{2(|\xi|+1)}\right\}\end{aligned}$$

olduğundan (5.5) in sağ tarafı $\mathcal{F}(I)$ filterine aittir. Bu yüzden filter tanımı gereğince sol tarafıda $\mathcal{F}(I)$ filterine ait olacaktır. Dolayısıyla

$$\{n\in\mathbb{Z}:|(x_ny_n)-(\xi\eta)|\geq\varepsilon\}\in I$$

olduğu görülür.

## 5.3 Öneriler

Sonuçlar kısmında bilateral diziler için verdiğimiz istatistiksel ve ideal yakınsaklık kavramları geliştirilebilir.

İdeal yakınsaklık için çalıştığımız bilateral dizilerinin $I^*-$yakınsaklığı araştırılabilir.

Bilateral diziler için $I-$yakınsaklık ve $I^*-$yakınsaklık hangi şartlar altında eşit olabilir olduğu araştırılabilir.

## KAYNAKLAR

[1] Fast H, 1951. Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2: 241-244.

[2] Steinhaus H, 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. Colloq. Math., 2: 73-74.

[3] Buck RC, 1953. Generalized asymptotic density. Amer, J, Math., 75: 335-346.

[4] Schoenberg IJ, 1959. The integrability of certain functions and related summability methods. Amer, Math, Monthly, 66: 361-375.

[5] Fridy JA, 1985. On statistical convergence, Analysis, 5: 301-313.

[6] Freedman AR, Sember JJ, 1981. Densities and summability. Pacific Journal of Mathematics, 95: 293-305.

[7] Šalát T, 1980. On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca, 2: 139-150.

[8] Fridy JA, 1993. Statistical Limit Points, Proc, Amer, Math, Soc., 118: 1187-1192.

[9] Connor J, 1990. Two valued measures and summability. Analysis, 10: 373-385.

[10] Connor J, 1988. The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences. Analysis, 8: 47-63.

[11] Miller HI, 1945. A measure theoretic subsequence characterization of statistical convergence, Trans, Amer, Math. Soc., 347: 1811-1819.

[12] Martin M, Šalát T, 2001. Statistical convergence of subsequences of a given sequence, Mathematica Bohemica, 1: 191-208.

[13] Kostyrko P, Macaj M, Šalát T, 2000. Statistical convergence and I-convergence, The International Mathematical Scientific Conference, 16th Summer School on Real functions Theory.

[14] Kostyrko P, Šalat T, Wilczyński W, 2000. I-Convergence, Real Analysis Exchange, 26(2): 669-680.

[15] Petersen GM, 1966. Regular Matrix Transformations. Mc Graw-Hill Publishing Company Limited, London-New York-Toronto-Sydney.

[16] Šalát T, Tijdeman R, 1983. Asymptotic densities of sets of positive integers. Math, 199-207.

[17] Kuratowski C, 1966. Topology I. Academic Press, Warszawa.

[18] Maddox IJ, 1970. Elements of Functional Analysis. Cambridge Univ, Press.

[19] Niven I, Zuckerman HS, and Montgomery H, 1991. An Introduction to the Theory of Numbers, Fifth Ed. Wiley, New York.

[20] Sarıgöl MA, Jafarov S, 2007. Analiz I. Baran Matbaacılık, Denizli.

[21] Nanda S, 1983. Matrix Transformations and Sequence Spaces. İnternational Centre for Theoretical Physics, Italy.

[22] Balcı M, 1997. Matematik Analiz Cilt 1, Ertem Matbaası, Ankara.

[23] Kreyszig E, 1978. Introductory Fucntional Analysis with Applications. John Wileyand Sons, New York.

[24] Bayraktar M, 2006. Fonksiyonel Analiz. Gazi Kitabevi, Ankara.

[25] Apostol T, 1974. Mathematical Analysis. Addison-Welsey Pub.No.Co. Reading, Mass.

[26] Şuhubi ES, 2001. Fonksiyonel Analiz. İTÜ Vakfı Yayınları, İstanbul.

[27] Mucuk O, 2010. Topoloji ve Kategori. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

[28] Agrawal R, Srivastava JK, 2013. Banach Space X-Valued Bilateral Sequence Space $l(Z, X, \bar{\lambda}, \bar{p})$. British Journal of Mathematics & Computer Science, 3(1): 44-51.

[29] Kostyrko P, Macaj M, Šalát T, 2005. I-convergence and Extremal I-limit Points. Mathematica Slovaca, 55(4): 443-464.

[30] Salat T, Triphaty BC, Ziman M, 2004. On Some Properties I-convergence. Tatra Mt, Math. Publ, 28: 279-286.

[31] Salat T, Triphaty BC, Ziman M, 2005. On I-convergence Field. Tatra İtalian J. Pure Appl, Math. 17: 45-54.

[32] Lahiri BK, Das P, 2005. I and $I^*$-convergence in topological spaces. Math. Bohemica, 130(2): 153-160.

[33] Başarır M, 1995. On the $\Delta$-Statistical Convergence of Sequences. Fırat Üniversitesi, Fen ve Müh. Bilimleri Dergisi, 7(2): 1-6.

[34] Duman O, Orhan C, 2004. μ-statistically convergent function sequences. Czech, Math. Journal, 54(129): 143-422.

[35] Wilczynski W, 2000. Statistical Convergence of Sequences of Functions. Real Anal, Exchange, 25: 49-50.

[36] Gümüş H, 2011. Fark Dizilerinin I-yakınsaklığı ve Asimptotik I-denkliği. Afyon Kocatepe Üniversitesi, Doktora Tezi.

[37] Balcerzak M, Dems K, Komisarski A, 2007. Statistical Convergence and Ideal Convergence for Sequences of Functions. J, Math. Anal, Appl, 328: 715-729.

# ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Şanlıurfa'da doğdu. İlk ve Orta Öğretimini Merkez Yenice İlköğretim Okulu'nda ve liseyi Şanlıurfa Gazi Lisesi'nde tamamladı. 2014 yılında Muş Alparslan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. Aynı yıl Bitlis Eren Üniversitesi ile Muş Alparslan Üniversitesinin açmış olduğu ortak lisansüstü eğitimine başladı.

İsmail YILMAZ