

BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI  
YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI ÖZEL REGLE YÜZEYLER VE BU YÜZEYLERİN PARALEL YÜZEYLERİ

Serpil KAYA

NİSAN 2017

MATEMATİK ANABİLİM DALI  
YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI ÖZEL REGLE YÜZEYLER VE BU YÜZEYLERİN PARALEL YÜZEYLERİ

Hazırlayan  
Serpil KAYA

Danışman  
Yrd. Doç. Dr. Ali ÇAKMAK

Jüri Üyeleri  
Doç. Dr. Talat KÖRPİNAR  
Yrd. Doç. Dr. Şükran KONCA  
Yrd. Doç. Dr. Ali ÇAKMAK

NİSAN 2017

Serpil KAYA tarafından hazırlanan “**Bazı Özel Regle Yüzeyler ve Bu Yüzeylerin Paralel Yüzeyleri**” adlı tez çalışması 25/04/2017 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bitlis Eren Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

**Jüri Üyeleri**

Doç. Dr. Talat KÖRPİNAR

(Başkan)


Yrd. Doç. Dr. Şükran KONCA

(Üye)

Yrd. Doç. Dr. Ali ÇAKMAK

(Danışman)

İmza



Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun ~~12/06/2017~~ 12/06/2017 gün ve 19/06 Sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Koray KÖKSAL

Enstitü Müdürü



## ÖZET

### BAZI ÖZEL REGLE YÜZEYLER VE BU YÜZEYLERİN PARALEL YÜZEYLERİ

Serpil KAYA

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ali ÇAKMAK

Nisan 2017, 49 Sayfa

Bu tez çalışmasında, Öklid 3-uzayında regle yüzeylerin paralel yüzeylerini elde ederek, yüzeylerin eğrilikleri arasında bağıntılar kurulmuştur. Özel olarak, dayanak eğrisi striksiyon çizgisi olan açılmayan regle yüzeylerin paralel yüzeyleri elde edilmiştir. Bu durumda, elde edilen paralel yüzeylerin hangi koşul altında regle yüzey olduğu kanıtlanmıştır. Yine bu koşulda, yüzeylerin eğrilikleri arasındaki ilişkilerin daha özel olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, bazı özel hallerde striksiyon çizgisinin helis, slant helis, Bertrand veya Mannheim eğrisi olduğu ispatlanmıştır. Son olarak, striksiyon çizgisinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsü elde edilmiştir ve bu eğriler diferensiyel geometri açısından incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Regle yüzey, Paralel yüzey, Striksiyon çizgisi, Gauss eğriliği, Ortalama eğrilik.

## ABSTRACT

### SOME SPECIAL RULED SURFACES AND PARALLEL SURFACES OF THESE SURFACES

Serpil KAYA

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate School of Natural and Applied Science

Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

April 2017, 49 papers

In this thesis, by obtaining parallel surfaces of the ruled surfaces in Euclidean 3-space, the relations between the curvatures of the surfaces are established. Specifically, the parallel surfaces of the non-developable ruled surfaces of which the base curve is the striction line are obtained. In this case, it is proved that these parallel surfaces obtained are ruled surfaces under which condition. Under this condition, then, it is shown that relations between the curvatures of the surfaces are more special. Besides, it is proved that striction line is helix, slant helix, Bertrand or Mannheim curve in some special cases. Finally, the image of the striction line on the parallel surface is obtained and this situation is examined in terms of differential geometry.

**Keywords:** Ruled surface, Parallel surface, Line of striction, Gauss curvature, Mean curvature.

## TEŞEKKÜR

Danışmanlığımı üstlenen, özenle çalışmalarımı takip eden, bilgi ve tecrübesiyle destek veren ve her konuda yardımlarını esirgemeyen, saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Ali ÇAKMAK 'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, bu noktada olmamda önemli katkıları olan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Şükran KONCA 'ya ve aileme saygı ve minnet duyar, teşekkür ederim.



# İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

<b>ÖZET</b> .....	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>ii</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	<b>iii</b>
<b>İÇİNDEKİLER DİZİNİ</b> .....	<b>iv</b>
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b> .....	<b>vi</b>
<b>SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ</b> .....	<b>vi</b>
<b>1.GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI</b> .....	<b>3</b>
<b>3. MATERYAL VE YÖNTEM</b> .....	<b>5</b>
3.1. 3- Boyutlu Uzayın Tanımı ve Bu Uzayda Eğrilerle İlgili Temel Kavramlar .....	<b>5</b>
3.2. 3- Boyutlu Öklid Uzayında Yüzeylerle İlgili Genel Kavramlar .....	<b>7</b>
3.3. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Eğri-Yüzey İkilisinin Eğrilikleri .....	<b>11</b>
3.4. Paralel Yüzeyler.....	<b>12</b>
3.5. Regle yüzeyler .....	<b>14</b>
3.6. Regle Yüzeylerin Öklid 3-Uzayında Yapı ve Karakterizasyonu.....	<b>15</b>
3.7. Helis, Slant Helis, Bertrand ve Mannheim eğrileri ve Bazı Karakteristik Özellikleri.....	<b>17</b>
<b>4. BULGULAR VE TARTIŞMALAR</b> .....	<b>20</b>
4.1. Regle yüzeylerin paralel yüzeyi.....	<b>20</b>
4.1.1. Regle yüzeyin paralel yüzeyinin ifadesi .....	<b>20</b>
4.1.2. Silindir Yüzeyinin Paralel Yüzeyi .....	<b>23</b>
4.2. Striksion Çizgisi Dayanak Eğrisi Olan Regle Yüzeylerin Paralel Yüzeyleri .....	<b>26</b>
4.2.1. Striksion Çizgisi Dayanak Eğrisi Olan Regle Yüzeylerin Paralel Yüzeylerinin Eğriliklerinin Hesaplanması .....	<b>27</b>
4.2.2. $\mu^2 + \nu^2 = 1$ Şartı Dahilinde Eğriliklerin Hesaplanması .....	<b>31</b>
4.2.2 $\mu^2 + \nu^2 = 1$ Şartı Dahilinde Paralel Regle Yüzeylerin Dağılma Parametresi .....	<b>34</b>
4.3. Striksion Çizgisinin Eğriliklerinden Elde Edilen Sonuçlar .....	<b>36</b>
4.3.1. Striksion Çizgisinin Helis Eğrisi Olma Durumu .....	<b>36</b>
4.3.2. Striksion Çizgisinin Slant Helis Olma Durumu.....	<b>37</b>
4.3.3. Striksion Çizgisinin Bertrand Eğrisi Olma Durumu.....	<b>38</b>
4.3.4. Striksion Çizgisinin Mannheim Eğri Olma Durumu .....	<b>39</b>
4.4. Striksion Çizgisinin Geodezik, Asimptotik ve Eğrilik Çizgisi Olma Durumları .....	<b>40</b>
4.5. Striksion Çizgisinin Paralel Yüzey Üzerindeki Görüntüsü .....	<b>42</b>
<b>5. SONUÇ VE ÖNERİLER</b> .....	<b>45</b>

5.1. Sonuçlar .....	45
5.2. neriler .....	45
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>46</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>49</b>





## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>ŞEKİL</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 4.1: Helikoid ve onun paralel yüzeyi .....	22
Şekil 4.2: Silindir yüzeyi ve onun paralel yüzeyi.....	24



## SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

$E^3$	3-boyutlu Öklid Uzayı
$\langle f, g \rangle$	$f$ ve $g$ vektörlerinin buldukları uzaydaki iç çarpımı
$K$	Gauss eğriliği
$H$	Ortalama eğrilik
$\kappa$	Eğrilik
$\tau$	Burulma
$n$	Yüzey normali
$n^r$	Paralel yüzeyin normali
$K^r$	Paralel yüzeyin Gauss eğriliği
$H^r$	Paralel yüzeyin ortalama eğriliği
$k_g$	Küresel eğrilik fonksiyonu
$\kappa_g$	Geodezik eğrilik
$\kappa_n$	Asimptotik eğrilik
$\tau_g$	Geodezik burulma
$X(u, v)$	Striksion çizgisi dayanak eğrisi olan regle yüzey
$\lambda, \mu, k_g$	$X(u, v)$ nin yapı fonksiyonları

## 1.GİRİŞ

Bir  $M'$  paralel yüzeyi,  $M$  yüzeyinden yüzeyin normali boyunca sabit bir mesafedeki noktalardan oluşan  $M$  ye paralel yeni bir yüzey olarak tanımlanır. Bu şekilde sonsuz tane paralel yüzey elde edilebilir. Çünkü yüzeyin normali boyunca mesafe keyfi olarak seçilmektedir. Böyle bir tanımdan yola çıkarak, bir paralel yüzey,  $M$  den sıfırdan farklı sabit bir  $r$  mesafedeki  $M$  nin normalleri üzerindeki noktaların kümesi olarak görülebilir.

Düzgün eğrilerin teğet yüzeyleri olan silindirler ve koniler en basit regle yüzey örnekleridir. Kabaca bir yüzey, bir doğrunun hareketi ile oluşturuluyorsa, bu yüzey regle yüzey olarak isimlendirilir. Hareket eden doğruya yüzeyin ana doğrusu ya da üretici, regle yüzeyin herbir doğrusunu kesen yüzey eğrisine bu yüzeyin yönlendirici eğrisi, doğrultman eğrisi veya dayanak eğrisi denir. Eğer yönlendirici eğrinin denklemi

$$a = a(u)$$

şeklinde, anadoğruların doğrultu birim vektörü de

$$b = b(u)$$

biçiminde verilmiş ise regle yüzeyin denklemi

$$X(u, v) = a(u) + vb(u)$$

biçiminde olur. Burada  $v$  parametresi anadoğru üzerindeki yüzey noktasının yönlendirici eğriden olan uzaklığıdır.

Biz bu tez çalışmasında  $n$  yüzeyin birim normali ve  $r$  sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere denklemi

$$X^r(u, v) = X(u, v) + rn(u, v)$$

olan  $X(u, v)$  regle yüzeyinin paralel yüzeyinin diferensiyel geometrik özelliklerini inceleyeceğiz. Özellikle, birinci ve ikinci esas form katsayıları hesaplanarak, Gauss ve ortalama eğrilikler elde edilecek ve bu eğrilikler arasında bağıntılar kurulacaktır. Regle yüzeylerden elde edilen paralel yüzeylerin de hangi şart altında regle yüzey ifade edeceği araştırılacaktır. Daha sonra, tezimizin asıl konusunu oluşturan ve özel bir regle yüzey olarak tanımlanan striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeylerin paralel yüzeyleri elde edilecek ve yüzeylerin eğrilikleri arasındaki bağıntılar kurulmaya çalışılacaktır. Yine bu yüzeylerin dağılma parametreleri (dral) hesaplanacak ve karşılaştırılacaktır. Son olarak, striksiyon çizgisi dayanak

eğrisi olan regle yzueylerin striksiyon çizgisinin eğrilik ve burulmasının hesabından yola çıkarak, striksiyon eğrisinin helis eğrisi, slant helis eğrisi, Bertrand eğrisi veya Mannheim eğrisi olma Şartları elde edilecektir. Buna ek olarak, bu striksiyon çizgisinin paralel yzuey üzerindeki görüntüsü elde edilerek eğri-yzuey ikilisinin eğrilikleri hesaplanarak asıl yzueyin eğri-yzuey ikilisinin eğrilikleri arasındaki ilişkiler araştırılacaktır.



## 2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Diferansiyel geometrinin ilgi alanlarından birisi olan paralel yüzeyler, geçmişten günümüze birçok matematikçinin çalıştığı yüzey tiplerinden birisi olmuştur. Craig, elipsoidin paralel yüzeyleri üzerine çalıştı [1]. Eisenhart “A treatise on the differential geometry of curves and surfaces” isimli eserinde paralel yüzeylere ait bir bölüm yazdı [2]. Nizamoğlu, paralel regle yüzeyi bir parametreye bağlı bir eğri olarak belirtti ve böyle bir yüzeyin bazı geometrik özelliklerini verdi [3]. Hacısalihoğlu ve Tarakcı sabit sırt uzaklıklı yüzeyleri tanımlayarak, paralel yüzeyin sabit sırt uzaklıklı bir yüzeyin özel bir durumu olduğunu gösterdiler [4]. Yine Hacısalihoğlu ve Yaşar, Lorentz uzayında bir hiperyüzeyin paralel yüzeyini çalıştılar ve yeni karakterizasyonlar elde ettiler [5]. Çöken, Çiftçi ve Ekici timelike regle yüzeylerin paralel yüzeyleri üzerine çalıştılar [6]. Dae Won Yoon, Öklid uzayda paralel Weingarten yüzeylerini çalıştı ve bir yüzeyin Weingarten yüzeyi olması için gerek ve yeter şartın bu yüzeyin paralel yüzeyinin de Weingarten yüzey olması gerektiğini gösterdi [7]. Son yıllarda Kızıltuğ, bir yüzey üzerindeki eğriyi ele alarak bu eğrinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsünü elde edip, paralel yüzey üzerindeki bu eğrinin karakteristik özelliklerini incelemiştir [8, 9, 10]. Ünlütürk ve Özusağlam ise Minkowski 3-uzayında normal dönüşümle  $M$  üzerinde geodezik olan bir eğrinin  $M^r$  paralel yüzeyindeki görüntüsünün de yine bir geodezik olduğunu gösterdiler [11].

Regle yüzeyler de diferansiyel geometride sıklıkla çalışılan, örnek verilen yüzey tiplerinden birisidir. 1951’de Müller, [12] 3-boyutlu Öklid uzayında kapalı bir regle yüzeyin eğim ve eğim açısı kavramlarını tanıttı. [13, 14]’ de yazarlar bizim bu çalışmada kullanacağımız açılmayan regle yüzeylere ait bazı kavramları aşağıdaki gibi tanımladılar.

$E^3$ ; 3-boyutlu Öklid uzayı ve  $X(u, v)$ ;  $u$  ve  $v$  parametreleri ile verilen regüler parametrik bir yüzey olmak üzere,  $E^3$ ’de açılmayan bir regle yüzey  $X(u, v) = a(u) + vb(u)$  olarak tanımlansın ve  $b(u)$  birim küresel eğrisi  $u$  yay parametresi ile verilmek üzere  $b^2(u) = 1$  olsun. Eğer  $X(u, v)$ ’nin  $a(u)$  dayanak eğrisi yüzeyin striksiyon çizgisi olursa, bu durumda  $a'(u).b'(u) = 0$  olur. Burada  $a' = \frac{da}{du}$  demektir.  $x(u) = b(u)$ ,  $x'(u) = \alpha(u)$  ve  $y(u) = \alpha(u) \times x(u)$ , seçimi yapılarak,  $b(u)$  birim küresel eğrisinin küresel Frenet formülleri

$$x'(u) = \alpha(u), \quad (2.1)$$

$$\alpha'(u) = -x(u) + k_g(u)y(u), \quad (2.2)$$

$$y'(u) = -k_g(u)\alpha(u) \quad (2.3)$$

olarak yazılabilir. Burada  $k_g(u)$  küresel eğrilik fonksiyonu olarak isimlendirilir. Ayrıca,  $\{x(u), \alpha(u), y(u)\}$  üçlüsü,  $b(u)$  küresel eğrisinin küresel Frenet çatısı olarak isimlendirilir.

3-boyutlu Öklid uzayında açılmayan regle yüzeyler için eğim fonksiyonu kavramı [14]'de tanımlanmıştır. Yazarlar, küresel eğrilik fonksiyonunu, eğim fonksiyonunu ve eğim açısı fonksiyonunu kullanarak, açılmayan regle yüzeyler için yapı fonksiyonları kavramını tanımlayarak bir sınıflama yaptılar [13]. Yine [13]'de, yazarlar;  $a(u)$  striksiyon çizgisi dayanak eğrisi ve  $a'(u) = l(u)x(u) + m(u)y(u)$  olmak üzere,  $X(u, v) = a(u) + vb(u)$  formundaki açılmayan regle yüzeyleri,  $k_g(u)$  da  $b(u)$  nun küresel eğrilik fonksiyonunu göstermek üzere,  $\{k_g(u), l(u), m(u)\}$  üçlüsü ile belirlediler. Öklid 3-uzayı ve Minkowski 3-uzayında herhangi bir açılmayan regle yüzey için bu kavramları genelleştirdiler. Bu kavramların bazı özellikleri ve uygulamaları yine [13, 14]'de verilmektedir. [15]'de ise yazarlar, yukarıda bahsi geçen regle yüzeylerin striksiyon çizgisinin eğriliği, burulması ve açılmayan regle yüzeylerin yapı fonksiyonları arasındaki ilişkileri verdiler.

Bu tez çalışması bazı özel regle yüzeylerin ve özellikle açılmayan regle yüzeylerin paralel yüzeyleri elde edilerek [13-15]'deki bulgular kullanılarak üretilmiştir.

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, bulgular kısmında kullanılacak bazı tanımlar ve temel teoremler verilecektir.

#### 3.1. 3- Boyutlu Uzayın Tanımı ve Bu Uzayda Eğrilerle İlgili Temel Kavramlar

**Tanım 3.1.1** [16]. Bir reel afin uzay  $A$  ve  $A$  ile birleşen vektör uzayı da  $V$  olsun.  $V$  de  $x = (x_1, x_2, x_3)$  ve  $y = (y_1, y_2, y_3)$  olmak üzere

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

şeklinde bir Öklid iç çarpımı tanımlanırsa,  $A$  afin uzayına 3-boyutlu Öklid uzayı denir ve  $E^3$  ile gösterilir.

**Tanım 3.1.2.**  $E^3$  de bir  $x$  vektörünün kendisi ile iç çarpımının karekökü  $x$  vektörünün normu olarak isimlendirilir ve  $\|x\|$  ile gösterilir.

**Tanım 3.1.3** [16].  $\mathbb{R}^3$  uzayında,  $u = (u_1, u_2, u_3)$  ve  $v = (v_1, v_2, v_3)$  olmak üzere,  $u$  ile  $v$  nin gerdiği düzleme dik olan ve

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

eşitliğiyle tanımlanan  $u \times v$  vektörüne  $u$  ile  $v$  nin vektörel çarpımı denir.  $u \times v \neq 0$  olmak üzere,  $u$  ile  $v$  vektörleri arasındaki açı  $\theta$  ve  $0 < \theta < \pi$  ise

$$u \times v = \|u\| \|v\| \sin \theta$$

dir.

**Tanım 3.1.4** [16].  $I \subseteq \mathbb{R}$  bir açık aralık olmak üzere  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile tanımlanan

$$\alpha : I \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t)$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna  $E^n$  de bir eğri denir.  $I \subseteq \mathbb{R}$  aralığına  $\alpha$  nın parametre aralığı ve  $t \in I$  değişkenine de  $\alpha$  nın parametresi denir.

**Tanım 3.1.5** [16].  $M$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer,  $\forall s \in I$  için  $\|\alpha'(s)\|=1$  ise  $M$  eğrisi,  $(I, \alpha)$  ya göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda eğrinin  $s \in I$  parametresine yay parametresi denir.

**Tanım 3.1.6** [16]. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir. Yani,  $\forall s \in I$  için  $\alpha'(s) \neq 0$  dır.

**Tanım 3.1.7** [16].  $\alpha$  sıfırdan farklı birim hızlı bir uzay eğrisi ve  $T = \alpha'$  bu eğrinin teğet vektör alanı olsun. Bu durumda eğrinin her bir noktasına  $T$  teğet,  $N$  asli normal ve  $B$  binormal vektörlerinden oluşan bir  $\{T, N, B\}$  ortonormal çatısı karşılık gelir. Bu hareketli  $\{T, N, B\}$  vektör alanı üçlüsüne  $\alpha$  eğrisi üzerindeki Frenet çatısı denir ve

$$T(s) = \alpha'(s)$$

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

ile gösterilir.

**Tanım 3.1.8** [17].  $\alpha$  sıfırdan farklı birim hızlı bir uzay eğrisi ve  $T = \alpha'$  bu eğrinin teğet vektör alanı olmak üzere eğri boyunca ilerlediğimiz zaman teğetin değişim oranını ifade eden

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N$$

vektörüne eğrilik vektörü denir ve  $\kappa$  çarpanına eğrinin birinci eğriliği veya eğrinin eğriliği denir. Eğrinin eğriliği eğrinin doğrudan ayrılmasını karakterize eder.

**Tanım 3.1.9** [17].  $\alpha$  sıfırdan farklı birim hızlı bir uzay eğrisi ve  $B$  eğrinin bir noktasındaki binormal vektörü olmak üzere

$$\frac{dB}{ds} = -\tau N$$



eşitliğini sağlayan  $\tau$  fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin ikinci eğriliği veya burulması denir.

**Teorem 3.1.1.**  $\alpha$  sıfırdan farklı  $\kappa$  eğrilikli ve  $\tau$  burulmalı birim hızlı bir uzay eğrisi olsun. Bu durumda Frenet-Serret formülleri aşağıdaki gibidir:

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

### 3.2. 3- Boyutlu Öklid Uzayında Yüzeylerle İlgili Genel Kavramlar

**Tanım 3.2.1** [18].  $U$ ,  $E^2$  düzleminin bağlantılı açık bir alt kümesi olsun.  $U$  ile homeomorf olan  $E^3$  Öklid uzayının alt kümesine sade yüzey denir.

**Tanım 3.2.2** [19]. Bir  $\phi: U \rightarrow E^3$  koordinat komşuluğu,  $E^2$  nin bir  $U$  açık alt kümesinden  $E^3$  ün içine bire-bir ve regüler bir dönüşümdür.

**Tanım 3.2.3** [19].  $M \subset E^3$  olmak üzere  $\forall P \in M$  için,  $M$  nin içinde görüntüsü  $P$  nin bir komşuluğunu içeren uygun bir koordinat komşuluğu varsa ( $\phi^{-1}: \phi(U) \rightarrow U$  sürekli)  $M$  ye bir yüzey denir.

**Tanım 3.2.4** [18].  $M$  yüzeyi verilmiş olsun.  $E^2$  düzleminin  $U \subset E^2$  bölgesinin homeomorf  $\gamma: U \rightarrow M$  dönüşümünde yüzeyin  $P \in M$  noktasının,  $E^2$  düzleminin  $P_0 \in E^2$  noktasına dönüştüğü açıktır.  $P_0$  noktasının kartezyen koordinatları  $u$  ve  $v$  ile gösterilsin.  $u$  ve  $v$  ye yüzeyin  $P$  noktasının eğrisel koordinatları denir.  $\gamma$  ya ise  $M$  yüzeyinin parametrizasyonu denir.

Sürekliliğe göre,  $U$  bölgesindeki her bir doğruya, yüzeyde herhangi bir eğri karşılık gelecektir.  $u = sbt$  ve  $v = sbt$  doğrularına, yüzeyde karşılık gelen eğrilere yüzeyin koordinat eğrileri denir.

**Tanım 3.2.5** [19].  $\phi: U \rightarrow E^3$  koordinat komşuluğu ile verilsin. Burada  $(u, v) \rightarrow \phi(u, v)$ ,  $u$  veya  $v$  sabit tutulduğunda bir eğri üretir.  $v = v_0$  için  $u \rightarrow \phi(u, v_0)$  eğrisine  $u$ -parametre eğrisi,  $u = u_0$  için  $v \rightarrow \phi(u_0, v)$  eğrisine de  $v$ -parametre eğrisi denir.

**Tanım 3.2.6.**  $E^3$  de regüler bir  $M$  yüzeyi  $\phi(u, v)$  parametrizasyonu ile verilsin.  $M$  nin birim normal vektör alanı  $n$  olmak üzere

$$n = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|}$$

biçimindedir.

**Tanım 3.2.7** [19].  $M$  yüzeyi  $\phi: U \rightarrow E^3$  biçiminde bir parametrizasyonla verilmiş olsun. Birinci temel form,  $\phi(U)$  içinde bir  $\alpha: I \rightarrow M$  eğrisinin  $\alpha(a)$  ve  $\alpha(b)$  noktaları arasında kalan parçasının uzunluğu,  $\phi^{-1} \circ \alpha = (\beta_1, \beta_2)$ ,

$$E = \langle \phi_u, \phi_u \rangle$$

$$F = \langle \phi_u, \phi_v \rangle$$

$$G = \langle \phi_v, \phi_v \rangle$$

olmak üzere,

$$L = \int_a^b \left( E\beta_1'^2 + 2F\beta_1'\beta_2' + G\beta_2'^2 \right)^{1/2} dt$$

eşitliği ile belirlidir.  $E^2$  de koordinat fonksiyonları  $u$  ve  $v$  olmak üzere, birinci temel form,  $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$  biçiminde de verilebilir.

Yüzeyin ikinci temel formu ise yüzey normali  $n$  ve ikinci temel form katsayıları

$$e = \langle n, \phi_{uu} \rangle$$

$$f = \langle n, \phi_{uv} \rangle$$

$$g = \langle n, \phi_{vv} \rangle$$

olmak üzere

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 3.2.8** [16].  $E^3$  de bir yüzey  $M$  ve  $M$  nin birim normal vektör alanı  $n$  olsun.  $D$ , kovaryant türev operatörü olmak üzere  $\forall X \in \chi(M)$  için

$$S(X) = D_X n$$

olarak tanımlanan  $S$  dönüşümüne  $M$  üzerinde şekil operatörü denir.  $p \in M$  olmak üzere  $S_p : T_p M \rightarrow T_p M, S_p(X_p) = D_{X_p} n$  dönüşümünün lineer olduğu açıktır.

**Tanım 3.2.9** [20].  $E^3$  de bir  $M$  yüzeyinin birinci temel form katsayıları  $E, F, G$  ve ikinci temel form katsayıları  $e, f, g$  olmak üzere yüzeyin şekil operatörünün matrisi  $S$

$$S = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} Ge - Ff & Ef - Fe \\ Gf - Fg & Eg - Ff \end{vmatrix}$$

şeklindedir.

**Tanım 3.2.10** [20].  $M, E^3$  de bir regüler yüzey olsun.  $M$  yüzeyinin Gauss eğriliği  $K$  ve ortalama eğriliği  $H; K, H : M \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere sırasıyla

$$K(P) = \det(S_p)$$

$$H(P) = \frac{1}{2} \text{iz}(S_p)$$

şeklinde tanımlanır.

**Teorem 3.2.1** [20].  $M, E^3$  de bir regüler yüzey olsun.  $M$  nin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

olarak hesaplanır. Burada  $E, F, G; M$  yüzeyinin birinci temel form katsayıları ve  $e, f, g$ ; ikinci temel form katsayılarıdır.

**Tanım 3.2.11** [21].  $M, E^3$  de bir regüler yüzey ve  $M$  nin şekil operatörü  $S$  olsun.  $M$  nin bir  $P$  noktasına karşılık gelen  $S_p$  nin karakteristik (eigen) değerlerine  $M$  nin bu noktadaki asli

eğrilikleri denir ve  $\kappa_1, \kappa_2$  ile gösterilir. Asli eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik vektör olarak adlandırılan vektörlerin belirttiği doğrultulara da  $M$  nin bu noktasındaki asli eğrilik doğrultuları denir.

**Teorem 3.2.2** [20].  $M, E^3$  de bir regüler yüzey,  $K$  Gauss eğriliği,  $H$  ortalama eğriliği ve asli eğrilikler de  $\kappa_1, \kappa_2$  olmak üzere

$$K = \kappa_1 \kappa_2$$

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$$

dir. Buradan

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\kappa_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$$

$$\kappa_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

olur.

**Tanım 3.2.12** [19].  $a, M$  yüzeyi üzerinde bir regüler eğri olsun. Eğer  $a''$  ivme vektörü daima  $M$  yüzeyine dik ise,  $a$  eğrisine bir geodezik eğri denir.

**Tanım 3.2.13** [19].  $a, M$  yüzeyi üzerinde bir regüler eğri olsun. Eğer  $a''$  ivme vektörü daima  $M$  yüzeyine teğet ise,  $a$  eğrisine bir asimptotik eğri denir.

**Teorem 3.2.3** [22].  $M$  yüzeyinin bir hiperbolik nokta komşuluğundaki  $(eg - f^2 < 0)$   $\phi(u, v)$  parametrizasyonu için, parametre eğrileri aynı zamanda asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart  $e = g = 0$  olmasıdır. Burada  $e$  ve  $g$ ,  $M$  yüzeyinin ikinci temel form katsayılarıdır.

**Tanım 3.2.14** [16].  $M, E^3$  de bir regüler yüzey ve  $M$  üzerindeki bir eğri  $a$  olsun.  $a$  nın teğet vektör alanı  $T$  ve  $M$  nin şekil operatörü  $S$  olsun. Eğer  $T$  vektör alanı  $a$  eğrisi boyunca  $S$  nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa  $a$  eğrisine  $M$  üzerinde bir eğrilik çizgisi denir.

**Teorem 3.2.4** [22]. Bir yüzey üzerinde umbilik olmayan bir nokta komşuluğunda parametre eğrileri aynı zamanda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart umbilik olmayan bu noktanın komşuluğunda  $F = f = 0$  dır. Burada  $F$  yüzeyin birinci temel form katsayısı,  $f$  yüzeyin ikinci temel form katsayısını göstermektedir.

**Tanım 3.2.15** [21].  $M$ ,  $E^3$  de bir yüzey olmak üzere,  $M$  yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu sıfır ise bu yüzeye minimal yüzey denir.

### 3.3. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Eğri-Yüzey İkilisinin Eğrilikleri

**Tanım 3.3.1** [8]. Diferensiyellenebilir bir  $M$  yüzeyi üzerinde bir  $\alpha$  eğrisi verilsin.  $\alpha$  eğrisi  $M$  yüzeyi üzerinde olduğundan, her bir noktasında Darboux çatısı olarak isimlendirilen ikinci bir çatı mevcuttur. Darboux çatısı,  $T$  teğet,  $Y$  geodezik normal ve  $n$  yüzey normali olmak üzere  $\{T, Y, n\}$  ortonormal koordinat sistemi olarak tanımlanır. Burada birinci vektör, eğrinin bir  $P$  noktasında yüzeye ve eğriye teğet olan  $T$  birim teğet vektör alanıdır.  $n$ , yüzeyin  $P$  noktasındaki birim normal vektör alanı ve  $Y = n \times T$  çatının birim geodezik normal vektör alanıdır.

Darboux türev formülleri aşağıdaki matris yardımıyla tanımlanabilir:

$$\begin{pmatrix} T' \\ Y' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ Y \\ n \end{pmatrix}.$$

Bu matriste ki  $\kappa_g$  ye geodezik eğrilik,  $\kappa_n$  ifadesine normal eğrilik ve  $\tau_g$  ye de geodezik burulma denir.

**Tanım 3.3.2** [21].  $M$ , 3-boyutlu Öklid uzayında bir yüzey ve  $\alpha: I \rightarrow M$  bir eğri olmak üzere  $M$  yüzeyinin birim dik vektör alanı  $n$  olsun.  $\alpha''$  vektör alanı,  $n$   $\alpha$  vektör alanının lineer birleşimi ise  $\alpha$  eğrisine,  $M$  yüzeyi içinde bir geodezik eğri denir.

**Tanım 3.3.3** [21].  $\alpha: I \rightarrow M$  birim hızlı bir eğri olsun.

$$\kappa_g(s) = \langle \alpha''(s), Y \rangle \quad (3.1)$$

eşitliğiyle belirli  $\kappa_g(s)$  sayısına  $(M, \alpha(s))$  eğri-yüzey ikilisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki geodezik eğriliği denir.

**Tanım 3.3.4** [21].  $M$ , 3-boyutlu Öklid uzayında bir yüzey ve  $\alpha: I \rightarrow M$  bir eğri olmak üzere,  $\forall s \in I$  için  $\alpha'(s)$  hız vektörü,  $\alpha(s)$  noktasında  $M$  yüzeyinin bir asimptotik vektörü ise  $\alpha$  eğrisine,  $M$  yüzeyi içinde bir asimptotik eğri denir.

**Tanım 3.3.5** [21].  $\alpha: I \rightarrow M$  birim hızlı bir eğri olsun.

$$\kappa_n(s) = \langle \alpha''(s), n \rangle \quad (3.2)$$

eşitliğiyle belirli,  $\kappa_n(s)$  sayısına  $(M, \alpha(s))$  eğri-yüzey ikilisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki asimptotik eğriliği denir.

**Tanım 3.3.6** [21].  $M$ , 3-boyutlu Öklid uzayında bir yüzey ve  $\alpha: I \rightarrow M$  bir eğri olsun. Her  $s \in I$  için  $\alpha'(s)$  hız vektörü,  $\alpha(s)$  noktasında  $M$  yüzeyinin bir eğrilik vektörü ise  $\alpha$  eğrisine,  $M$  yüzeyi içinde bir eğrilik çizgisi (veya baş eğri) denir.

**Tanım 3.3.7** [21].  $\alpha: I \rightarrow M$  birim hızlı bir eğri olsun.

$$\tau_g = -\langle n', Y \rangle \quad (3.3)$$

eşitliğiyle belirli,  $\tau_g(s)$  sayısına  $(M, \alpha(s))$  eğri-yüzey ikilisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki geodezik burulması denir.

### 3.4. Paralel Yüzeyler

**Tanım 3.4.1** [1, 16].  $M_1$  ve  $M_2$ , 3-boyutlu Öklid uzayında iki yüzey ve  $M_1$  in birim normal vektör alanı  $n$  olsun.  $r$  sabit bir sayı olmak üzere,

$$f: M_1 \rightarrow M_2, f(P) = P + r n_p$$

olarak tanımlanan bir  $f$  fonksiyonu varsa  $M_1$  ve  $M_2$  yüzeylerine paralel yüzeyler denir.

$M$  yüzeyi verildiğinde,

$$M^r = \{P + r n_p : P \in M, r \in \mathbb{R} \text{ ve } r = sbt\}$$

eşitliği ile verilen  $M^r$  cümlesi,  $M$  ye paralel bir yüzeydir.  $M$  nin birim normal vektör alanı  $n$ , şekil operatörü  $S$  ve  $M^r$  nin birim normal vektör alanı  $n^r$ , şekil operatörü de  $S^r$  ile gösterilecektir. Burada

$$n = \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad a_i \in C^\infty(M, R) \text{ i için, } \bar{a}_i(f(P)) = a_i(P) \text{ olmak üzere } \bar{n} = \sum_{i=1}^3 \bar{a}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ise,  $n^r = \bar{n}$  dir.

**Teorem 3.4.1** [16].  $E^3$  de  $M$  yüzeyine paralel  $M^r$  yüzeyi verilsin.  $X \in \chi(M)$   $\bar{X} \in \chi(M^r)$  vektör alanları  $\forall P \in M$ ,  $n^r = \bar{n}$  için,  $b_i(P) = \bar{b}_i(f(P))$ ,  $1 \leq i \leq 3$   $n^r = \bar{n}$  olmak üzere

$$X = \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \bar{X} = \sum_{i=1}^3 \bar{b}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olarak verilsin. Bu durumda

**i.**  $f_*(X) = \bar{X} + r\overline{S(X)}$

**ii.**  $S^r(f_*(X)) = \overline{S(X)}$

dir.

$M$  ve  $M^r$  arasındaki bağıntılar diferensiyel geometri açısından aşağıdaki teorem ile verilebilir.

**Teorem 3.4.2** [16].  $E^3$  de,  $f: M \rightarrow M^r$  olmak üzere,  $M$  nin bir paralel yüzeyi  $M^r$  olsun. Bu durumda,

- i.**  $f$ , üçüncü temel form olma özelliğini korur.
- ii.**  $f$ , umbilik nokta olma özelliğini korur.
- iii.**  $f$ , asli eğrilik doğrultusu olma özelliğini korur.
- iv.**  $M$  nin temel formları sırasıyla I, II ve III ile gösterilmek üzere  $\forall X, Y \in \chi(M)$  ve  $\forall P \in M$  için

$$f_*(X), f_*(Y)|_{f(P)} = I(X_P, Y_P) + 2rII(X_P, Y_P) + r^2III(X_P, Y_P)$$

dir.

Ayrıca,  $M$  ve  $M^r$  paralel yüzeylerinin Gauss eğrilikleri ile ortalama eğrilikleri arasındaki bağıntı aşağıdaki teorem ile verilebilir.

**Teorem 3.4.3** [16].  $E^3$  de bir  $M$  yüzeyinin paralel yüzeyi  $M^r$  olsun.  $P \in M$  noktasında  $M$  nin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla,  $K$  ve  $H$ ,  $f(P) \in M^r$  noktasında  $M^r$  nin Gauss ve ortalama eğrilikleri de  $K^r$  ve  $H^r$  olsun. Bu durumda,

$$K^r = \frac{K}{1+rH+r^2K}$$

$$H^r = \frac{H+2rK}{1+rH+r^2K}$$

dır .

### 3.5. Regle yüzeyler

**Tanım 3.5.1** [18]. Eğer bir yüzey, bir doğrunun hareketi ile oluşturuluyorsa, bu yüzeye regle yüzey denir. Hareket eden doğruya yüzeyin ana doğrusu ya da üretici, regle yüzeyin her bir doğrusunu kesen yüzey eğrisine de bu yüzeyin doğrultman eğrisi (dayanak eğrisi) denir.

**Tanım 3.5.2** [23].  $E^3$  de bir regle yüzey;

$$F(\alpha, d): I \times E \rightarrow E^3$$

$$(s, v) \rightarrow F(\alpha, d)(s, v) = \alpha(s) + vd(s) \quad (3.4)$$

dönüşümü ile tanımlanır. Burada,  $\alpha: I \rightarrow E^3$ ,  $d: I \rightarrow E^3 \setminus \{0\}$  diferensiyellenebilir dönüşümler ve  $I$  bir açık aralıktır.  $\alpha$  ya dayanak eğrisi ve  $d$  ye doğrultman eğri denir.  $v \rightarrow \alpha(s) + vd(s)$  doğrularına ana doğrular denir.

**Tanım 3.5.3** [24]. Bir regle yüzeyin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir.

**Tanım 3.5.4** [24]. Bir  $F(\gamma, \delta)$  regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına boğaz (striksiyon) noktası adı verilir.

**Tanım 3.5.5** [24]. Bir  $F(\gamma, \delta)$  regle yüzeyinin ana doğrusu, dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi) adı verilir.



**Tanım 3.5.6** [24]. Eğer  $d(s) \times d'(s) \equiv 0$  ise  $F(\alpha, d)$  regle yüzeyine bir silindirik yüzey denir.  $d(s) \times d'(s) \neq 0$  ise regle yüzeye silindirik olmayan regle yüzey denir.

$F(\alpha, d)$  regle yüzey üzerinde  $\sigma'(s) \cdot d'(s) = 0$  olacak şekilde  $\sigma(s)$  eğrisini düşünelim. Bu eğriye striksiyon eğrisi (çizgisi) adı verilir.  $F(\alpha, d)$  silindirik olmayan bir regle yüzey ise, bu regle yüzey üzerinde striksiyon çizgisi tek olarak vardır.

**Tanım 3.5.7** [24]. Regle yüzeyin komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu ana doğru arasındaki açığa oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir.

$X(s, v) = \alpha(s) + vd(s)$  için ( $s, a$  nin yay parametresi) dağılma parametresi

$$\lambda_d = \frac{\det(\alpha', d, d')}{\|d'\|^2} \quad (3.5)$$

şeklinde hesaplanır.

**Tanım 3.5.8** [24]. Bir regle yüzeyin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir.

**Teorem 3.5.1** [19-24]. Bir  $X(s, v)$  regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır.

### 3.6. Regle Yüzeylerin Öklid 3-Uzayında Yapı ve Karakterizasyonu

**Tanım 3.6.1** [13-15].  $X(u, v) = a(u) + vb(u)$  herhangi bir açılmayan regle yüzey ve  $a(u)$ ;  $a'(u) = \lambda(u)x(u) + \mu(u)y(u)$  olmak üzere,  $X(u, v)$  nin striksiyon çizgisi olsun.  $b(u)$  küresel eğrisinin küresel Frenet çatısı  $\{\alpha(u), x(u) = b(u), y(u)\}$  ( $u, b(u)$  nun yay uzunluk parametresi) ve farzedelim ki,  $k_g(u), b(u)$  nun küresel eğrilik fonksiyonu olsun. Böylece  $X(u, v), E^3$  de bir transformasyonla  $\{k_g(u), \lambda(u), \mu(u)\}$  üçlüsü ile belirlenebilir.

$k_g(u)$ ,  $\lambda(u)$ ,  $\mu(u)$  fonksiyonları  $E^3$  uzayında  $X(u,v)$  striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzey için yapı fonksiyonları olarak isimlendirilir.

**Tanım 3.6.2** [13-15].  $X(u,v) = a(u) + vb(u)$   $E^3$  ' de açılmayan herhangi bir regle yüzey ve  $a(u)$ ;  $a'(u) = \lambda(u)x(u) + \mu(u)y(u)$  olmak üzere  $X(u,v)$  ' nin striksiyon çizgisi olsun.  $b(u)$  küresel eğrisinin küresel Frenet çatısı  $\alpha(u)$ ,  $x(u) = b(u)$ ,  $y(u)$  ( $u$ ,  $b(u)$  nun yay uzunluk parametresi) ve farzedelim ki,  $k_g(u)$ ,  $b(u)$  nun küresel eğrilik fonksiyonu olsun. Böylece,  $\lambda(u) \neq 0$  ise  $X(u,v)$  eğimli regle yüzey olarak isimlendirilir. Aksi takdirde  $X(u,v)$  eğimlenemeyen regle yüzeydir.

**Teorem 3.6.1** [15].  $X(u,v) = a(u) + vb(u)$  striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan bir regle yüzey  $b^2(u) = 1$  ,  $|b'(u)| = 1$  ve  $a(u)$ ,  $X(u,v)$  ' nin striksiyon çizgisi olsun. Böylece  $X(u,v)$  nin  $a(u)$  striksiyon çizgisinin  $\kappa(u)$  eğrilik fonksiyonu ve  $\tau(u)$  burulma fonksiyonu

$$\kappa^2 = \frac{(\lambda - k_g \mu)^2 (\lambda^2 + \mu^2) + (\lambda' \mu - \lambda \mu')^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^3} \quad (3.6)$$

$$\tau = \frac{(\lambda - \mu k_g)(\lambda \mu' - \lambda' \mu + (\lambda k_g + \mu)(\lambda - \mu k_g)) + (\lambda' \mu - \lambda \mu')(2\lambda' - 2k_g \mu' - k_g' \mu)}{(\lambda - k_g \mu)^2 (\lambda^2 + \mu^2) + (\lambda' \mu - \lambda \mu')^2} \quad (3.7)$$

verilir.  $X(u,v) = a(u) + vb(u)$  striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan bir regle yüzey ve yüzeyin yapı fonksiyonları  $\lambda(u)$ ,  $\mu(u)$ ,  $k_g(u)$  olsun. Bu durumda  $X(u,v)$  ' nin birinci temel form katsayıları

$$E = \lambda^2(u) + \mu^2(u) + v^2 \quad (3.8)$$

$$F = \lambda(u) \quad (3.9)$$

$$G = 1 \quad (3.10)$$

ile verilir. Birim normal vektör

$$n = \frac{-\mu(u)\alpha(u) + v\gamma(u)}{\sqrt{\mu^2(u) + v^2}}, \quad (3.11)$$

ikinci temel form katsayıları

$$e = \frac{-(\lambda(u) - k_g(u)\mu(u))\mu(u) + (\mu'(u) + k_g(u)v)v}{\sqrt{\mu^2(u) + v^2}} \quad (3.12)$$

$$f = \frac{-\mu(u)}{\sqrt{\mu^2(u) + v^2}} \quad (3.13)$$

$$g = 0 \quad (3.14)$$

olur. (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) (3.9) (3.10) ve (3.11) eşitlikleri ve Teorem 3.2.1 kullanılarak  $X(u, v)$  nin Gauss ve ortalama eğriliği sırasıyla,

$$K(u, v) = \frac{-\mu^2(u)}{(\mu^2(u) + v^2)^2} \quad (3.15)$$

$$H(u, v) = \frac{k_g(u)v^2 + \mu'(u)v + k_g(u)\mu^2(u) + \lambda(u) + \mu(u)}{2\sqrt{(\mu^2(u) + v^2)^3}} \quad (3.16)$$

olarak yazılabilir.

### 3.7. Helis, Slant Helis, Bertrand ve Mannheim eğrileri ve Bazı Karakteristik Özellikleri

**Tanım 3.7.1** [23].  $\gamma$ 'nin tanjant doğruları, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa  $\gamma$  ya bir silindirik helis (genel helis) denir.  $\gamma(s)$  nin bir silindirik helis olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)$$

ifadesinin sabit olmasıdır. Eğer  $\tau$  ve  $\kappa$  sıfırdan farklı sabitler ise helise dairesel helis denir.

**Tanım 3.7.2** [26].  $\gamma: I \rightarrow E^3$ ,  $\|\gamma'(s)\| = 1$  olacak şekilde birim hızlı eğri olsun.  $\kappa(s) \neq 0$  olacak şekilde, eğer  $\gamma$  nin asli normal doğruları, sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyor ise  $\gamma$  eğrisine bir slant helis eğrisi denir. Uyarıyoruz ki bir silindirik helisin asli normal doğruları, sabit doğrultuya diktir. Yani her silindirik helis bir slant helisdir. O halde, slant helislerin notasyonu, silindirik helislerin notasyonunun bir genellemesidir.

**Tanım 3.7.3** [26].  $\gamma: I \rightarrow E^3$ ,  $\|\gamma'(s)\|=1$  olacak şekilde birim hızlı bir eğri olsun.  $\kappa(s) \neq 0$  olacak şekilde, eğer  $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s)$  sabit bir fonksiyon ise  $\gamma$  eğrisine, konikal geodezik eğri denir. Burada,  $\kappa(s)$  ve  $\tau(s)$ ,  $\gamma$  nın sırasıyla eğrilik ve torsiyonudur.

**Önerme 3.7.1** [26].  $\gamma$ ,  $\kappa(s) \neq 0$  olacak şekilde birim hızlı bir uzay eğrisi olsun. Bu durumda,  $\gamma$  eğrisinin bir slant helis eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$\sigma(s) = \left( \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \right) (s) \quad (3.17)$$

fonksiyonunun sabit bir fonksiyon olmasıdır.

**Tanım 3.7.4** [16].  $M, N \subset E^3$  eğrileri sırasıyla  $(I, \alpha), (I, \beta)$  koordinat komşulukları ile verilsin  $s \in I$  ya karşılık gelen  $\alpha(s) \in M$  ve  $\beta(s) \in N$  noktalarında  $M$  ve  $N$  nin

$$\{T(s), N(s), B(s)\}, \{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$$

Frenet 3- ayaklıları verildiğinde  $\forall s \in I$  için  $\{N(s), N^*(s)\}$  lineer bağımlı ise  $(M, N)$  eğri ikilisine bir Bertrand çifti denir.

**Tanım 3.7.5** [25]. Eğer bir eğrinin bütün noktaları bir düzlem tarafından içeriliyorsa bu eğriye düzlemseldir denir.

**Tanım 3.7.6** [25]. Bir küre üzerinde yatan eğriye küresel eğri adı verilir.

**Önerme 3.7.2** [26].  $\gamma: I \rightarrow E^3$  bir uzay eğrisi olsun.

- (1) Farz edelim ki  $\tau(s) \neq 0$  olsun. Bu durumda  $\gamma$  nın bir Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart her  $s \in I$  için,  $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$  olacak şekilde sıfırdan farklı  $A, B$  reel sayılarının var olmasıdır. Bu gerçek bize, bir dairesel helisin bir Bertrand eğrisi olduğunu söyler.

(2) Farz edelim ki  $\gamma$  bir Bertrand eğrisidir. Eğer  $\tau(s_0) = 0$  olacak şekilde bir  $s_0 \in I$  noktası varsa  $\gamma$  bir düzlemsel eğridir.

(3)  $\gamma$ , Bertrand çifti  $\bar{\gamma}$  olan bir Bertrand eğrisi olsun. O halde  $\tau(s)\bar{\tau}(s) = sbt \geq 0$  dır. Burada  $\bar{\tau}(s)$ ,  $\bar{\gamma}$  nin torsiyonudur.

**Sonuç 3.6.1** [26].  $\kappa(s) \neq 0, \tau(s) \neq 0$  olmak üzere,  $\gamma: I \rightarrow E^3$  bir uzay eğrisi olsun.  $\gamma$  nın bir Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart  $A(\tau'(s)\kappa(s) - \kappa'(s)\tau(s)) - \tau'(s) = 0$  olacak şekilde sıfırdan farklı bir  $A$  reel sayısının var olmasıdır. Burada  $\gamma$  nın Bertrand çifti  $\bar{\gamma}(s) = \gamma(s) + An(s)$  ile verilir.

**Tanım 3.7.7** [27].  $M, N \subset E^3$  eğrileri sırasıyla  $(I, \alpha), (I, \beta)$  koordinat komşulukları ile verilsin  $s \in I$  ya karşılık gelen  $\alpha(s) \in M$  ve  $\beta(s) \in N$  noktalarında  $M$  ve  $N$  nin

$$\{T(s), N(s), B(s)\}, \{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$$

Frenet 3-ayaklıları verildiğinde  $\forall s \in I$  için  $\{N(s), B^*(s)\}$  lineer bağımlı ise  $(M, N)$  eğri ikilisine bir Mannheim çifti denir.

**Teorem 3.7.1** [27]. Öklid uzayında bir eğrinin Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şart eğrinin, eğrilik ve burulması sırasıyla  $\kappa$  ve  $\tau$  olmak üzere,

$$\kappa = c(\kappa^2 + \tau^2) \quad (3.18)$$

denklemini sağlamasıdır. Burada  $c$  sıfırdan farklı bir sabittir.

## 4. BULGULAR VE TARTIŞMALAR

### 4.1. Regle yüzeylerin paralel yüzeyi

Bu bölümde regle yüzeylerin paralel yüzeyleri elde edilecektir. Elde edilen bu yüzeylerin hangi durumlarda regle yüzey olduğu gösterilecektir. Silindir yüzeyi için aynı durum ele alınarak bu yüzeyin eğrilikleri hesaplanacak ve silindir yüzeyinin eğrilikleri ile paralel yüzeyinin eğrilikleri arasında bağıntılar kurulacaktır.

#### 4.1.1. Regle yüzeyin paralel yüzeyinin ifadesi

**Tanım 4.1.1.**  $E^3$  de bir regle yüzey:

$$\begin{aligned} \phi(u, X) : I \times E &\rightarrow E^3 \\ (u, v) &\rightarrow \phi(u, X)(u, v) = a(u) + vX(u) \end{aligned} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $a : I \rightarrow E^3$ ,  $X : I \rightarrow E^3 \setminus \{0\}$  diferensiyellenebilir dönüşümler ve  $I$  bir açık aralıktır.  $a$  ya dayanak eğrisi ve  $X$  e doğrultman eğri denir.  $v \rightarrow a(u) + vX(u)$  doğrularına ana doğrular denir.

Eğer  $\phi(u, v) = a(u) + vX(u)$  şeklindeki bir regle yüzey için  $X(u)$  sabit ise bu regle yüzeye genel silindir yüzeyi denir. Genel bir silindir  $a'(u) \times X(u) \neq 0$  ise bu yüzey regülerdir.

$\phi(u, v) = a(u) + vX(u)$  şeklinde tanımlanan bir regle yüzeyin  $\{\phi_u, \phi_v, n_p\}$  bazına göre paralel yüzeyinin denklemi, Tanım 3.4.1' e göre,

$$\phi(u, v) = \phi(u, v) + rn_p(u, v) = a(u) + vX(u) + r \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} \quad (4.2)$$

şeklindedir. Regle yüzeyin herhangi bir  $P$  noktasındaki yüzey normali,

$$n_p(u, v) = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} = \frac{[a'(u), X(u)] + v[X'(u), X(u)]}{\|[a'(u), X(u)] + v[X'(u), X(u)]\|}$$

şeklinde hesaplanır.

Yüzeyin birim normali  $n$  ve  $a$  dayanak eğrisi yay parametresi ile alınırsa  $T = a'(u)$  için  $\langle T, X \rangle = 0$  olacak biçimde bir  $X$  vektörü seçilirse  $\{T, X, n\}$  sistemi  $a$  boyunca ortonormal bir sistem oluşturur.

**Lemma 4.1.1 [16].**  $M$  regle yüzeyinin dayanak eğrisi, birim hızlı ve bu eğrinin her bir noktasında bu noktadan geçen ana doğruya dik olan bir eğri olsun. Bu durumda

$$a = \langle T', X \rangle$$

$$b = \langle T', n \rangle$$

$$c = \langle X', n \rangle$$

olmak üzere,

$$T' = aX + bn \quad (4.3)$$

$$X' = -aT + cn \quad (4.4)$$

$$n' = -bT - cX \quad (4.5)$$

dir.

Lemma 4.1.1 deki (4.3), (4.4) ve (4.5) denklemleri (4.2) de kullanılırsa regle yüzeyin paralel yüzeyi

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= a(u) - \left( \frac{rcv}{\sqrt{(1-av)^2 + c^2v^2}} \right) T + vX(u) + \left( \frac{r(1-av)}{\sqrt{(1-av)^2 + c^2v^2}} \right) n \\ \varphi(u, v) &= a(u) + vX(u) + \left( \frac{r}{\sqrt{(1-av)^2 + c^2v^2}} \right) ((1-av)n - cvT) \end{aligned} \quad (4.6)$$

olarak bulunur.

**Örnek 4.1.1.**  $E^3$  de,  $y(s) = \left( a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$  birim hızlı dairesel

helisini gözönüne alalım.  $u = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  ve  $X(s) = \left( -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), 0 \right)$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\phi(s,t) &= y(s) + tX(s) \\
\phi(u,t) &= (a \cos u, a \sin u, bu) + t(-\cos u, -\sin u, 0) \\
&= ((a-t) \cos u, (a-t) \sin u, bu) \\
&= (v \cos u, v \sin u, bu)
\end{aligned}$$

helikoidi elde edilir. Bu helikoidin paralel yüzeyinin parametrik denklemi

$$\phi(u,v) = \left( v \cos u - \frac{rb}{\sqrt{v^2 + b^2}} \sin u, v \sin u + \frac{rb}{\sqrt{v^2 + b^2}} \cos u, -\frac{rv}{\sqrt{v^2 + b^2}} + bu \right) \quad (4.7)$$

şeklindedir.  $b=5, r=1$  değerleri (4.7) denkleminde yerine yazılırsa helikoid ve paralel yüzeyinin şekli aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.1: Helikoid ve onun paralel yüzeyi

**Teorem 4.1.1.** Dayanak eğrisi parametre eğrisi seçilen regle yüzeyin paralel yüzeyinin regle yüzey olması için gerek ve yeter şart regle yüzeyin silindir yüzeyi olmasıdır.

**İspat:** Dayanak eğrisi  $a(u)$  ve doğrultman vektörü  $X(u)$  olan bir  $M$  regle yüzeyin denklemi,

$$\phi(u,v) = a(u) + vX(u)$$

şeklinde ise bu regle yüzeyin dayanak eğrisi birinci parametre eğrisi olarak seçildiğinde

$$\phi_u(u,v) = a'(u) = T$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\phi_u(u,v) = a'(u) + vX'(u) = (1-av)T + cvn$$

olarak bulunur.  $\phi_u(u,v) = a'(u) = T$  olduğundan  $1-av=1$  ve  $cv=0$  eşitlikleri bulunur. Burada

$v$ , regle yüzeyin ikinci parametre eğrisinin yay parametresi olduğundan  $a=0$  ve  $c=0$  değerleri



bulunur. Bu değerler daha önce elde edilen regle yüzeyin paralel yüzeyinin parametrik denklemi olan (4.6) denkleminde yazılırsa

$$\varphi(u, v) = a(u) + vX + rn \quad (4.8)$$

olur. Burada

$$\beta(u) = a(u) + rn(u, v)$$

olarak alınırsa  $\beta$  eğrisi,  $a$  eğrisinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsü olduğundan

$$\varphi(u, v) = \beta(u) + vX \quad (4.9)$$

eşitliği yazılabilir. Elde edilen (4.9) eşitliği  $M$  regle yüzeyin paralel yüzeyi olan  $M^r$  yüzeyinin ifadesidir. Burada  $a = 0$  ve  $c = 0$  olduğundan Lemma 4.1.1 deki (4.4) e göre  $X'(u) = 0$  olup  $X$  sabittir. O halde  $X$  sabit olduğundan (4.9) eşitliği silindirik yüzey denklemini ifade eder. Yani  $M$  bir silindir yüzeyi olur.

Tersine,  $M$  bir silindir yüzeyi olsun. Bu durumda  $M^r$  in regle yüzey olacağı aşikârdır. Dolayısıyla silindirik bir yüzeyin paralel yüzeyi de silindirik bir yüzeydir.

#### 4.1.2. Silindir Yüzeyinin Paralel Yüzeyi

Dayanak eğrisi  $a(u)$  ve doğrultu vektörü de  $X(u)$  olan regle yüzeyin denklemi,

$$\phi(u, v) = a(u) + vX(u)$$

şeklinde dir. Silindir yüzeyi aynı zamanda bir regle yüzeydir. Regle yüzey denkleminde  $X$  doğrultu vektörü sabit alınarak bir silindir yüzeyi elde edilir. Silindir yüzeyinin paralel yüzeyini bulmak için regle yüzeyin paralel yüzeyi elde edilirken yapılan benzer işlemlerle yine (4.6) denklemi elde edilir.

Fakat burada,  $X$  doğrultmanı sabit olduğundan Lemma 4.1.1 e göre,  $X' = -aT + cn = 0$  olup  $T$  ve  $n$  lineer bağımsız olduklarından  $a = c = 0$  bulunur. Bu değerler (4.3) eşitliğinde yerine yazılırsa (4.4) ve daha sonra (4.5) eşitlikleri bulunur. Buradan hareketle silindir yüzeyinin paralel yüzeyi de yine bir silindir yüzeyi olarak bulunmuş olur.

Ayrıca Lemma 4.1.1 deki (4.3), (4.4) ve (4.5) eşitlikleri de

$$T' = bn \quad (4.10)$$

$$X' = 0 \quad (4.11)$$

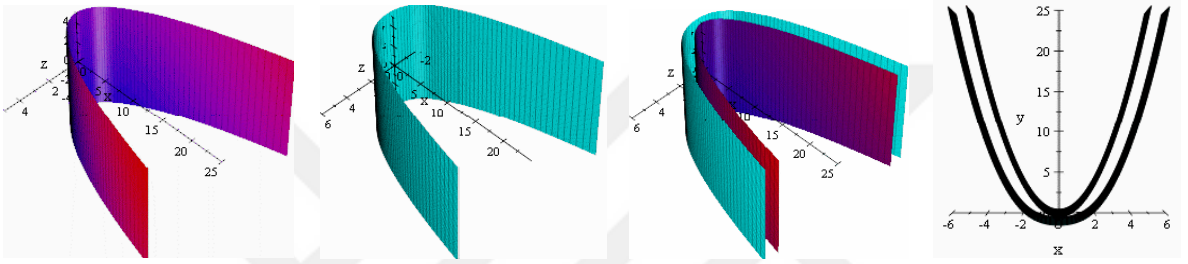
$$n' = -bT \quad (4.12)$$

olarak elde edilir.

**Örnek 4.1.2:**  $E^3$  de  $\phi(u,v) = (u, u^2, v)$  denklemi ile verilen silindirin paralel yüzeyi

$$\varphi(u,v) = \left( u + r \frac{2u}{\sqrt{1+4u^2}}, u^2 - \frac{r}{\sqrt{1+4u^2}}, v \right)$$

şeklinde hesaplanır. Bu durumda silindir yüzeyinin ve  $r=1$  için paralel yüzeyinin şekilleri aşağıdaki gibidir:



**Şekil 4.2:** Silindir yüzeyi ve onun paralel yüzeyi

Şimdi de silindir yüzeyinin ve silindir yüzeyinin paralel yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliklerini bulup karşılaştıralım:

Dayanak eğrisi  $a(u)$  ve doğrultu vektörü de  $X(u)$  olan regle yüzeyinin denklemi,

$$\phi(u,v) = a(u) + vX(u)$$

ve paralel yüzeyinin denklemi de,

$$\varphi(u,v) = a(u) + vX + rn \quad (4.13)$$

olsun. (4.13) denkleminin  $u$  ve  $v$  ye göre kısmi türevleri alınır ve (4.10), (4.11), (4.12) eşitlikleri türev değerlerinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \varphi_u &= T + r(-bT) = (1-rb)T \\ \varphi_v &= X \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = (1-rb)^2 \quad (4.14)$$

$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0 \quad (4.15)$$

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 1 \quad (4.16)$$

ve

$$\varphi_{uu} = b(1-rb)n$$

$$\varphi_{uv} = \varphi_{vu} = 0$$

$$\varphi_{vv} = 0$$

$$n^r = n \quad (4.17)$$

olmak üzere

$$e = \langle \varphi_{uu}, n \rangle = \frac{b(1-rb)^2}{\sqrt{(1-rb)^2}} \quad (4.18)$$

$$f = \langle \varphi_{uv}, n \rangle = 0 \quad (4.19)$$

$$g = \langle \varphi_{vv}, n \rangle = 0 \quad (4.20)$$

eşitlikleri bulunur. Silindir yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = 0 \quad (4.21)$$

dır. Daha önceden belirtildiği gibi silindir yüzeyinin paralel yüzeyi de silindir yüzeyi olduğundan onun da Gauss eğriliği (4.14), (4.15) ve (4.16), (4.18), (4.19) ve (4.20) eşitliklerinden

$$K^r = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0 \quad (4.22)$$

olduğu görülür.

Silindir yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = b \quad (4.23)$$

olduğu görülür. Silindir yüzeyinin paralel yüzeyinin ortalama eğriliği ise yine (4.14), (4.15), (4.16), (4.18), (4.19) ve (4.20) eşitliklerinden

$$H^r = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{b - 2rb^2 + (r^2)b^3}{\left(\sqrt{(1-rb)^2}\right)^3} \quad (4.24)$$

olarak hesaplanır.

**Teorem 4.1.2.** Silindir yüzeyi ile silindir yüzeyinin paralel yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri arasındaki bağıntı

$$K^r = K = 0 \quad (4.25)$$

$$H^r = \frac{H - 2rH^2 + (r^2)H^3}{\left(\sqrt{(1-rH)^2}\right)^3} \quad (4.26)$$

şeklindedir.

**İspat:** Silindir yüzeyi ile silindir yüzeyinin paralel yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla (4.21), (4.22), (4.23) ve (4.24) eşitlikleri ile gösterilmiştir. Bu eşitlikler yardımıyla kolaylıkla (4.25) ve (4.26) eşitlikleri bulunur.

#### 4.2. Striksion Çizgisi Dayanak Eğrisi Olan Regle Yüzeylerin Paralel Yüzeyleri

Parametrik ifadesi  $X(u, v) = a(u) + vb(u)$  olan striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeyler için birim normal (3.8) eşitliğinde gösterildiği gibi

$$n(u, v) = \frac{-\mu(u)\alpha(u) + v\gamma(u)}{\sqrt{\mu^2(u) + v^2}}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Tanım 3.6.1 ve Tanım 3.6.2 den bildiğimiz gibi  $a' = \lambda(u)x(u) + \mu(u)y(u)$  olmak üzere  $a(u)$  açılmayan regle yüzeyin striksiyon çizgisidir. Yine bu tanımlarda  $k_g(u), b(u)$  nun küresel eğrilik fonksiyonu ve  $(\alpha(u), x(u) = b(u), y(u))$  üçlüsünün  $b(u)$  küresel eğrisinin küresel Frenet çatısı olduğu belirtilmiştir. Böylece,  $k_g(u), \lambda(u), \mu(u)$  fonksiyonları 3-boyutlu Öklid uzayında  $X(u, v)$  açılmayan regle yüzeyler için yapı fonksiyonlarını göstermek üzere ve Tanım 3.4.1 gereği paralel yüzey tanımından hareketle  $X(u, v)$  açılmayan regle yüzeyler için paralel yüzey ifadesi

$$X^r(u, v) = X(u, v) + rn(u, v)$$

olarak yazılabilir. Birim normal yerine yazılırsa,

$$X^r(u, v) = a(u) + vb(u) + r \left[ \frac{-\mu(u)\alpha(u) + v\gamma(u)}{\sqrt{\mu^2(u) + v^2}} \right] \quad (4.27)$$

eşitliğini elde ederiz.

#### 4.2.1. Striksiyon Çizgisi Dayanak Eğrisi Olan Regle Yüzeylerin Paralel Yüzeylerinin Eğriliklerinin Hesaplanması

Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeylerin paralel yüzeylerini veren parametrik ifade  $X^r(u, v) = X(u, v) + rn(u, v)$  olmak üzere (4.27) denklemi ile elde edilmiştir.

Bu eşitlikte  $u$  ve  $v$  ye göre kısmi türevler alınır

$$X_u^r(u, v) = \left[ \lambda + r \frac{(\mu^3 + \mu v^2)}{(\mu^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \right] x + \left[ \mu + r \frac{(-k_g \mu^3 - k_g \mu v^2 - \mu' \mu)}{(\mu^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \right] y + \left[ v + \frac{r(-k_g \mu^2 v - \mu' v^2 - k_g v^3)}{(\mu^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \alpha \quad (4.28)$$

$$X_v^r(u, v) = x + \left[ r \frac{\mu^2}{(\mu^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \right] y + \left[ r \frac{\mu v}{(\mu^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \alpha \quad (4.29)$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde  $n$  birim normal vektörünün  $u$  ve  $v$  ye göre kısmi türevleri;

$$n_u(u, v) = \frac{(\mu^3(u) + \mu(u)v^2)x(u) + (-k_g \mu^3(u) - k_g \mu(u)v^2 - \mu(u)\mu'(u)v)y(u) + (-k_g \mu^2(u)v - \mu'(u)v^2 - k_g v^3)\alpha(u)}{(\mu^2(u) + v^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.30)$$

$$n_v(u, v) = \frac{\mu^2(u)y(u) + \mu(u)\alpha(u)v}{(\mu^2(u) + v^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.31)$$

şeklinde bulunur.

Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeylerin paralel yüzeyleri için birinci temel form katsayıları olan  $E^r, F^r$  ve  $G^r$  (4.28), (4.29) eşitlikleri kullanılarak sırasıyla;

$$E^r = \langle X_u^r, X_u^r \rangle$$

$$E^r = \left[ \lambda + r \frac{\mu}{(\mu^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}} \right]^2 + \left[ \mu - r \frac{(k_g \mu^3 + k_g \mu v^2 + \mu' \mu)}{(\mu^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \right]^2 + \left[ v - r \frac{(k_g \mu^2 v + \mu' v^2 + k_g v^3)}{(\mu^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \right]^2 \quad (4.32)$$

$$F^r = \langle X_u^r, X_v^r \rangle$$

$$F^r = \lambda + 2r \frac{\mu}{(\mu^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}} - r^2 \left[ \frac{\mu^3 (k_g \mu^2 + k_g v^2 + \mu') + \mu v^2 (k_g \mu^2 + \mu' v + k_g v^2)}{(\mu^2 + v^2)^3} \right] \quad (4.33)$$

ve

$$G^r = \langle X_v^r, X_v^r \rangle$$

$$G^r = 1 + r^2 \frac{\mu^4}{(\mu^2 + v^2)^3} + r^2 \frac{\mu^2 v^2}{(\mu^2 + v^2)^3} = 1 + r^2 \mu^2 \frac{\mu^2 + v^2}{(\mu^2 + v^2)^3}$$

$$G^r = 1 + r^2 \mu^2 \frac{1}{(\mu^2 + v^2)^2} = 1 + r^2 \frac{\mu^2}{(\mu^2 + v^2)^2} \quad (4.34)$$

şeklinde bulunur.

Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeylerin paralel yüzeyleri için ikinci temel form katsayıları olan  $e^r, f^r$  ve  $g^r$  (4.28), (4.29), (4.30), (4.31) eşitliklerinden yararlanarak,

$$e^r = -\langle n_u, X_u^r \rangle$$

$$e^r = -\frac{\mu}{(\mu^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}} \left( \lambda + r \frac{\mu}{(\mu^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{\mu^2 (k_g \mu^2 + k_g v^2 + \mu')}{(\mu^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ 1 - r \frac{(k_g \mu^2 + k_g v^2 + \mu')}{(\mu^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$+ v^2 \frac{(k_g \mu^2 + \mu' v + k_g v^2)}{(\mu^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ 1 - r \frac{(k_g \mu^2 + \mu' v + k_g v^2)}{(\mu^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (4.35)$$

$$f^r = -\langle n_u, X_v^r \rangle$$

$$f^r = -\frac{\mu}{(\mu^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}} + r \mu^3 \frac{(k_g \mu^2 + k_g v^2 + \mu')}{(\mu^2 + v^2)^3} + r \mu v^2 \frac{(k_g \mu^2 + \mu' v + k_g v^2)}{(\mu^2 + v^2)^3} \quad (4.36)$$

ve

$$g^r = -\langle n_v, X_v^r \rangle$$

$$g^r = -r \frac{\mu^2}{(\mu^2 + v^2)^2} \quad (4.37)$$

olarak hesaplanır.

**Sonuç 4.2.1.** Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeylerin paralel yüzeyleri için Gauss eğriliği  $K^r$  ve ortalama eğriliği  $H^r$ ; (4.32), (4.33), (4.34), (4.35), (4.36) ve (4.37) eşitlikleri Teorem 3.2.1 de yerine yazılarak kolaylıkla hesaplanır.

**Teorem 4.2.1.** Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan regle yüzeylerin paralel yüzeylerinin de regle yüzey olması için gerek ve yeter şart  $\mu^2 + \nu^2 = 1$  olmasıdır.

**İspat:** Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan regle yüzeylerin parametrik denklemi  $X(u, v) = a(u) + vb(u)$  olmak üzere paralel yüzeyleri (4.27) denkleminden

$$X^r(u, v) = a(u) + vb(u) + r \left[ -\frac{\mu(u)\alpha(u) - \nu y(u)}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \right] \text{ olarak elde edilmişti. } \mu^2 + \nu^2 = 1 \text{ alınıp,}$$

yerine yazılırsa

$$X^r(u, v) = a(u) + vb(u) - r[\mu(u)\alpha(u) - \nu y(u)] = a(u) - r\mu\alpha(u) + v(b(u) + ry(u))$$

eşitliği elde edilir. Burada,  $\beta(u) = a(u) - r\mu\alpha(u)$  ve  $\gamma(u) = b(u) + ry(u)$  seçilerek,

$$X^r(u, v) = \beta(u) + v\gamma(u)$$

regle yüzey denklemi elde edilir.

Tersine; striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan regle yüzeyin paralelinin de regle olduğu kabul edildiği takdirde  $\mu^2 + \nu^2 = 1$  olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

**Sonuç 4.2.2.**  $X^r(u, v) = a(u) + vx(u) + r \left[ -\frac{\mu\alpha(u) - \nu y(u)}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \right]$  denkleminde  $\mu^2 + \nu^2 = 1$  alındığında

elde edilen paralel yüzey denklemi

$$X^r(u, v) = a(u) + vx(u) - r[\mu(u)\alpha(u) - \nu y(u)] \quad (4.38)$$

dir. (4.38) denkleminin  $u$  ve  $v$  ye göre kısmi türevleri;

$$\begin{aligned} X_u^r(u, v) &= [\lambda + r(\mu^3(u) + \mu(u)\nu^2)]x(u) \\ &+ [\mu(u) + r(-k_g\mu^3(u) - k_g\mu(u)\nu^2 - \mu'(u)\mu(u))]y(u) \\ &+ [v + r(-k_g\mu^2(u)\nu - \mu'(u)\nu^2 - k_g\nu^3)]\alpha(u) \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$X_v^r(u, v) = x(u) + [r\mu^2(u)]y(u) + [r\mu(u)\nu]\alpha(u) \quad (4.40)$$

olarak bulunur.

**Teorem 4.2.2.** Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeylerin paraleli olan regle yüzeylerin de dayanak eğrilerinin striksiyon çizgisi olması için gerek ve yeter şart küresel eğrilik fonksiyonu olan  $k_g$  nin,  $k_g = 1$  şartını sağlaması veya yapı fonksiyonlarından  $\mu(u)$  nun sabit olmasıdır.

**İspat:** Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan regle yüzeye paralel olan regle yüzey Sonuç 4.2.2 deki (4.38) eşitliğinde tanımlanmıştı. Buna göre

$$X^r(u, v) = a(u) + vb(u) + r(-\mu\alpha(u) + v\gamma(u)) = a(u) - r\mu\alpha(u) + v(b(u) + r\gamma(u))$$

olur. Burada,  $\beta(u) = a(u) - r\mu\alpha(u)$  ve  $\gamma(u) = b(u) + r\gamma(u)$  seçilerek,

$$X^r(u, v) = \beta(u) + v\gamma(u)$$

elde edilir. Tanım 3.5.6 dan biliyoruz ki,

$$\beta'(u) \cdot \gamma'(u) = 0$$

olması durumunda  $\beta(u)$  dayanak eğrisi  $X^r(u, v)$  yüzeyinin striksiyon çizgisi olur. Buna göre,

$$\langle \beta'(u), \gamma'(u) \rangle = \langle a'(u) - r\mu'\alpha - r\mu\alpha', b'(u) + \gamma' \rangle = 0$$

eşitliği ve (2.1), (2.2) ve (2.3) eşitlikleri de kullanılarak

$$\langle \lambda x + \mu y - r\mu'\alpha - r\mu(-x + k_g y), \alpha - k_g \alpha \rangle = 0$$

$$\langle \lambda x + \mu y - r\mu'\alpha + r\mu x - r\mu k_g y, \alpha - k_g \alpha \rangle = 0$$

$$-r\mu' + r\mu'k_g = 0 \Rightarrow r\mu'(k_g - 1) = 0$$

bulunur. Bu eşitliğin sağlanması için  $r \neq 0$  olduğundan ya  $k_g = 1$  ya da  $\mu$  nün sabit olması gerekir.

**Teorem 4.2.3.** Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeylerin paraleli olan regle yüzeyler silindirik olmayan yüzeylerdir.

**İspat:** Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan  $X(u, v) = a(u) + vb(u)$  regle yüzeyi için paralel yüzey denklemi  $\beta(u) = a(u) - r\mu\alpha(u)$  ve  $\gamma(u) = b(u) + r\gamma(u)$  olmak üzere  $X^r(u, v) = \beta(u) + v\gamma(u)$  olarak verilmişti. Tanım 3.5.6 dan biliyoruz ki,



$$\gamma(u) \times \gamma'(u) \neq 0$$

ise  $X^r(u, v)$  silindirik olmayan bir yüzey olur. Buna göre  $\gamma(u)$  nun değeri yerine yazılıp (2.1), (2.2) ve (2.3) eşitlikleri de kullanılırsa,

$$(b(u) + ry(u)) \times (b(u) + ry(u))' \neq 0$$

bulunur. Dolayısıyla  $X^r(u, v)$  silindirik olmayan bir yüzeydir.

#### 4.2.2. $\mu^2 + v^2 = 1$ Şartı Dahilinde Eğriliklerin Hesaplanması

Parametrik ifadesi  $X(u, v) = a(u) + vb(u)$  olan ve dayanak eğrisi  $a' = \lambda x + \mu y$  şartını sağlayan striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeylerin paralel yüzeyinin birinci temel form katsayıları  $E^r, F^r$  ve  $G^r$  olmak üzere,  $\mu^2 + v^2 = 1$  şartı dahilinde;

$$\begin{aligned} E^r &= [\lambda + r\mu]^2 + [\mu - r\mu(k_g + \mu')]^2 + [v - rv(k_g + \mu'v)]^2 \\ F^r &= \lambda + 2r\mu - r^2\mu^3(k_g + \mu') - r^2\mu v^2(k_g + \mu'v) \\ G^r &= 1 + r^2\mu^2 \end{aligned} \quad (4.41)$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde ikinci temel form katsayıları da  $e^r, f^r$  ve  $g^r$

$$\begin{aligned} e^r &= -\mu[\lambda + r\mu] + \mu^2[k_g + \mu' - r(k_g + \mu')]^2 + v^2[k_g + \mu'v - r(k_g + \mu'v)]^2 \\ f^r &= -\mu + r\mu^3(k_g + \mu') + r\mu v^2(k_g + \mu'v) \\ g^r &= -r\mu^2 \end{aligned} \quad (4.42)$$

şeklinde bulunur.

Bildiğimiz gibi (3.12) ve (3.13) eşitliklerinde sırasıyla Gaus ve ortalama eğrilik

$$K(u, v) = \frac{-\mu^2}{(\mu^2 + v^2)^2} \quad H(u, v) = \frac{k_g v^2 + \mu'v + k_g \mu^2 + \lambda\mu}{2\sqrt{(\mu^2 + v^2)^3}}$$

olarak gösterilmişti.  $\mu^2 + v^2 = 1$  alınması durumunda,  $K(u, v) = -\mu^2$  bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned}
\mu &= \sqrt{-K} \\
K'(u, v) &= -2\mu\mu' \\
\mu' &= \frac{-K'(u, v)}{2\mu} \\
v &= \sqrt{1-\mu^2} \\
\lambda(u) &= \frac{\sqrt{-K}(4H-2k_g) + K'\sqrt{1+K}}{2K}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.41), (4.42), (4.43) eşitlikleri ve Teorem 3.2.1 den striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeyin paralel regle yüzeyinin sırasıyla Gauss ve ortalama eğriliği

$$\begin{aligned}
K^r &= \frac{\begin{pmatrix} -\mu(\lambda+r\mu) + \mu^2(k_g + \mu') [1-r(k_g + \mu')] \\ +v^2(k_g + \mu'v) [1-r(k_g + \mu'v)] \end{pmatrix} (-r\mu^2)}{-\left[-\mu+r\mu^3(k_g + \mu') + r\mu v^2(k_g + \mu'v)\right]^2} \\
&= \frac{\left([\lambda+r\mu]^2 + \mu^2[1-r(k_g + \mu')]^2 + v^2[1-r(k_g + \mu'v)]^2\right)(1+r^2\mu)}{-\left(\lambda+2r\mu-r^2[\mu^3(k_g + \mu') + \mu v^2(k_g + \mu'v)]\right)^2}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

ve

$$\begin{aligned}
H^r &= \frac{\begin{pmatrix} -\mu[\lambda+r\mu] + \mu^2[k_g + \mu' + r(k_g + \mu')^2] \\ +v^2[k_g + \mu'v + r(k_g + \mu'v)^2] \end{pmatrix} \left\{ [1+r^2\mu^2] \right. \\
&\quad \left. -2[-\mu+r\mu^3(k_g + \mu') + r\mu v^2(k_g + \mu'v)] \right. \\
&\quad \left. +[\lambda+2r\mu-r^2\mu^3(k_g + \mu') - r^2\mu v^2(k_g + \mu'v)] \right. \\
&\quad \left. +(-r\mu^2)\left\{ [\lambda+r\mu]^2 + [\mu-r\mu(k_g + \mu')]^2 + [v-rv(k_g + \mu'v)]^2 \right\} \right\}}{2 \left\{ \begin{aligned} &\left([\lambda+r\mu]^2 + \mu^2[1-r(k_g + \mu')]^2 + v^2[1-r(k_g + \mu'v)]^2\right)(1+r^2\mu^2) \\ &-\left[\lambda+2r\mu-r^2\mu^3(k_g + \mu') - r^2\mu v^2(k_g + \mu'v)\right]^2 \end{aligned} \right\}}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

olarak bulunur. Buna göre aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

**Teorem 4.2.4.** Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan regle yüzeyin  $\mu^2 + v^2 = 1$  şartı dahilinde paralel regle yüzeyinin Gauss eğriliği  $K^r$  ve ortalama eğriliği  $H^r$  (4.44) ve (4.45) eşitlikleri ile ifade edilir.

Elde edilen (4.44) ve (4.45) denklemlerinde

$$\begin{aligned}
 w &= \lambda + r\mu, \\
 z &= k_g + \mu', \\
 t &= k_g + \mu'v \\
 k &= 1 - rz, \\
 l &= 1 - rt, \\
 m &= \mu^2 z + v^2 t
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

seçilerek denklemlerde ilgili yerlere yazıldığı takdirde

$$K^r = \frac{(-\mu w + \mu^2 z k + v^2 t l) (-r\mu^2) - [-\mu + r\mu m]^2}{(w^2 + \mu^2 k^2 + v^2 l^2)(1 + r^2 \mu) - (w + r\mu - r^2 \mu m)^2} \tag{4.47}$$

$$H^r = \frac{\begin{aligned} &[-\mu w + \mu^2 (z + rz^2) + v^2 (t + rt^2)](1 + r^2 \mu^2) + 2\mu(1 - rm)(w + r\mu - r^2 \mu m) \\ &- r\mu^2 [w^2 + (\mu - r\mu z)^2 + (v - rvt)^2] \end{aligned}}{2 \left[ (w^2 + \mu k^2 + (v - rv(k_g + \mu'v))^2)(1 + r^2 \mu^2) - (w + r\mu - r^2 \mu m)^2 \right]} \tag{4.48}$$

(4.47) ve (4.48) olarak elde edilir.

**Sonuç 4.2.3.** Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeyin  $\mu^2 + v^2 = 1$  şartı dahilinde Gauss eğriliği  $K$  ve ortalama eğriliği  $H$  ve paralel regle yüzeyin Gauss eğriliği  $K^r$  ve ortalama eğriliği  $H^r$  olsun. Bu durumda (4.43), (4.44), (4.45) ve (4.46) denlemlerinden

$$K^r = \frac{\left( \begin{array}{l} -\sqrt{-K} \left[ \left( \frac{2H}{\sqrt{-K}} - \frac{k_g(1+K)}{\sqrt{-K}} - \frac{K'\sqrt{1+K}}{2K} \right) + r\sqrt{-K} \right] \\ -K \left[ k_g - \frac{K'}{2\sqrt{-K}} + r \left( k_g - \frac{K'}{2\sqrt{-K}} \right)^2 \right] \\ + (1+K) \left[ k_g - \frac{K'}{2\sqrt{-K}} \sqrt{1+K} + r \left( k_g - \frac{K'}{2\sqrt{-K}} \sqrt{1+K} \right)^2 \right] \end{array} \right) (rK) - \left( \begin{array}{l} -\sqrt{-K} + r(-K)^{\frac{3}{2}} \left( k_g - \frac{K'}{2\sqrt{-K}} \right) \\ + r\sqrt{-K}(1+K) \left( k_g - \frac{K'}{2\sqrt{-K}} \sqrt{1+K} \right) \end{array} \right)^2}{\left[ \left( \frac{2H}{\sqrt{-K}} - \frac{k_g(1+K)}{\sqrt{-K}} - \frac{K'\sqrt{1+K}}{2K} \right) + r\sqrt{-K} \right]^2 + \left[ \sqrt{-K} - r\sqrt{-K} \left( k_g - \frac{K'}{2\sqrt{-K}} \right) \right]^2 + \left[ \sqrt{1+K} - r\sqrt{1+K} \left( k_g - \frac{K'}{2\sqrt{-K}} \sqrt{1+K} \right) \right]^2} (1-r^2K) - \left[ \left( \frac{2H}{\sqrt{-K}} - \frac{k_g(1+K)}{\sqrt{-K}} - \frac{K'\sqrt{1+K}}{2K} + \frac{Kk_g}{\sqrt{-K}} + r\sqrt{-K} \right) + 2r\sqrt{-K} - r^2(-K)^{\frac{3}{2}} \left( k_g - \frac{K'}{2\sqrt{-K}} \right) - r^2\sqrt{-K}(1+K) \left( k_g - \frac{K'}{2\sqrt{-K}} \sqrt{1+K} \right) \right]^2} \quad (4.49)$$

$$K^r = \frac{\left( -\sqrt{-K}w - Kzk + (1+K) \left( k_g - \frac{K'}{2\sqrt{-K}} \sqrt{1+K} \right) \left( 1 - r \left( k_g - \frac{K'}{2\sqrt{-K}} \sqrt{1+K} \right) \right) \right) (rK) - \left( -\sqrt{-K} + r\sqrt{-K} \left( -Kz + (1+K) \left( k_g - \frac{K'}{2\sqrt{-K}} \sqrt{1+K} \right) \right) \right)^2}{\left( w^2 - k^2K + (1+K) \left( 1 - r \left( k_g - \frac{K'}{2\sqrt{-K}} \sqrt{1+K} \right) \right)^2 \right) (1+r^2\sqrt{-K}) - \left( w + r\sqrt{-K} \left( 1 - r \left( -Kz + (1+K) \left( k_g - \frac{K'}{2\sqrt{-K}} \sqrt{1+K} \right) \right) \right) \right)^2} \quad (4.50)$$

$$H^r = \frac{\left[ -\sqrt{-K}w - K(z + rz^2) + (1+K)(t + rt^2) \right] (1-r^2K) + 2\sqrt{-K}(1-rm) \left( w + \sqrt{-K}r(1-rm) \right) + rK \left[ w^2 - K(1-rz)^2 + (1+K)(1-rt)^2 \right]}{2 \left[ \left( w^2 + \sqrt{-K}k^2 + (1+K) \left( 1 - r \left( k_g - \frac{K'\sqrt{1+K}}{2\sqrt{-K}} \right) \right) \right)^2 \right] (1-r^2K) - \left( w + r\sqrt{-K}(1-rm) \right)^2} \quad (4.51)$$

şeklinde bulunur.

#### 4.2.2 $\mu^2 + \nu^2 = 1$ Şartı Dahilinde Paralel Regle Yüzeylerin Dağılıma Parametresi

Parametrik ifadesi  $X(u, v) = a(u) + vb(u)$  olan striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeyler için dağılma parametresi (3.5) eşitliği  $a' = \lambda x + \mu y$  ve (2.1), (2.2) ve (2.3) eşitlikleri kullanılarak

$$D = \frac{(a', b, b')}{|b'|^2} = \frac{(\lambda x + \mu y, x, \alpha)}{|\alpha|^2} = \frac{\lambda(x, x, \alpha) + \mu(y, x, \alpha)}{1} = -\mu \quad (4.52)$$

olarak hesaplanır. Buradan (4.38) eşitliğindeki regle yüzeyin paralel regle yüzeyinin drali

$$D^r = \frac{r((a(u) - r\mu\alpha(u))', b(u) + ry(u), (b(u) + ry(u))')}{|(b(u) + ry(u))'|^2}$$

olur. Yine benzer şekilde  $a' = \lambda x + \mu y$ , (2.1), (2.2) ve (2.3) eşitlikleri kullanılarak

$$D^r = \frac{(\alpha' - r\mu'\alpha - r\mu\alpha', x + ry, \alpha + ry')}{|\alpha + ry'|^2} = \frac{(\lambda x + \mu y - r\mu'\alpha - r\mu(-x + k_g y), x + ry, \alpha - rk_g \alpha)}{(1 - rk_g)^2}$$

$$D^r = \frac{((\lambda + r\mu)x - r\mu'\alpha + (\mu - r\mu k_g)y, x + ry, \alpha(1 - rk_g))}{(1 - rk_g)^2}$$

$$D^r = \frac{-(1 - rk_g)(r(\lambda + r\mu) - (\mu - r\mu k_g))}{(1 - rk_g)^2}$$

elde edilir. Böylece  $1 - rk_g \neq 0$  için

$$D^r = \frac{-r\lambda - \mu(r^2 + rk_g - 1)}{1 - rk_g} \quad (4.53)$$

olarak bulunur.

**Teorem 4.2.5.** Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeyin dağılma parametresi  $D$  ve  $\mu^2 + \nu^2 = 1$  şartı dahilinde paralel regle yüzeyin dağılma parametresi  $D^r$  olmak üzere

$$D^r = \frac{-r\lambda + D(r^2 + rk_g - 1)}{1 - rk_g} \quad (4.54)$$

dir.

**İspat:** (4.52) ve (4.53) eşitliklerinden kolaylıkla (4.54) eşitliği elde edilebilir.

### 4.3. Striksiyon Çizgisinin Eğriliklerinden Elde Edilen Sonuçlar

Bu bölümde striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeyler için striksiyon çizgisinin (3.6) ve (3.7) denklemleri ile ifade edilen eğrilik ve burulma fonksiyonları vasıtasıyla bu eğrinin hangi şartlarda helis, slant helis, Bertrand ve Mannheim eğri olma durumları incelenecektir.

#### 4.3.1. Striksiyon Çizgisinin Helis Eğrisi Olma Durumu

Bir eğrinin helis eğrisi olması için, Tanım 3.7.1 den biliyoruz ki  $\frac{\tau}{\kappa}$  nin sabit olması gerekir.

Buna göre ele aldığımız striksiyon çizgisinin (3.6) ve (3.7) ile ifade edilen eğrilikleri  $\frac{\tau}{\kappa}$  ifadesinde yerine yazılırsa;

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{(\lambda - \mu k_g)(\lambda \mu'' - \lambda' \mu + (\lambda k_g + \mu)(\lambda - \mu k_g)) + (\lambda' \mu - \lambda \mu') (2\lambda' - 2k_g \mu' - k_g' \mu)}{(\lambda - k_g \mu)^2 (\lambda^2 + \mu^2) + (\lambda' \mu - \lambda \mu')^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{(\lambda - k_g \mu)^2 (\lambda^2 + \mu^2) + (\lambda' \mu - \lambda \mu')^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^3}}} \quad (4.55)$$

olur. (4.56) denkleminde eğer;  $\frac{\lambda}{\mu}$  sabit olarak ele alınırsa  $\lambda' \mu - \lambda \mu' = 0$  olur. Buradan

$\lambda \mu'' - \lambda' \mu = 0$  elde edilir. Böylece

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{(\lambda - \mu k_g)(\lambda k_g + \mu)(\lambda - \mu k_g)}{(\lambda - \mu k_g)^2 (\lambda^2 + \mu^2)} \cdot \frac{(\lambda^2 + \mu^2) \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{(\lambda - \mu k_g) \sqrt{(\lambda^2 + \mu^2)}} \quad (4.56)$$

eşitliği bulunmuş olur. Yani;

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\lambda k_g + \mu}{\lambda - k_g \mu} \quad (4.57)$$

olur. Eğer striksiyon çizgisi helis eğrisi ise (4.57) eşitliği bir sabit olmalıdır. O halde,

$$\frac{\lambda k_g + \mu}{\lambda - k_g \mu} = c, \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$k_g = \frac{c\lambda - \mu}{\lambda + c\mu} \quad (4.58)$$

elde edilir. Buna göre aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

**Teorem 4.3.1.** Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan bir regle yüzeyde striksiyon çizgisinin bir helis eğrisi olması için striksiyon çizgisinin yapı fonksiyonları olan  $\lambda, \mu$  ve  $k_g$  nin

$\frac{\lambda}{\mu}$  sabit ve  $k_g = \frac{c\lambda - \mu}{\lambda + c\mu}$ , ( $c \in \mathbb{R}$ ) şartlarını sağlamasıdır.

#### 4.3.2. Striksiyon Çizgisinin Slant Helis Olma Durumu

Bir eğrinin slant helis eğrisi olması için, Önerme 3.7.1 gereği (3.17) denklemindeki  $\sigma(s)$  in sabit fonksiyon olması gerekir.

Buna göre yay parametresi ile ele aldığımız striksiyon çizgisinin yapı fonksiyonları olan  $\lambda$  ve  $\mu$  yine  $\frac{\lambda}{\mu}$  sabit olarak ele alındığında (3.6) ve (3.7) ile ifade edilen eğrilikleri  $\kappa$  ve  $\tau$  sırasıyla

$$\kappa = \frac{\lambda - k_g \mu}{\lambda^2 + \mu^2} \quad (4.59)$$

$$\tau = \frac{\lambda k_g + \mu}{\lambda^2 + \mu^2} \quad (4.60)$$

olarak hesaplanır. (3.17) eşitliğinde birim hızlı bir eğrinin slant helis olma şartı

$\left( \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \right) (s) = \sigma(s)$  olmak üzere,  $\sigma(s)$  in sabit bir fonksiyon olması gerektiği

belirtilmişti. (4.59) ve (4.60) eşitliklerinden,

$$\kappa^2 + \tau^2 = \frac{1 + k_g^2}{\lambda^2 + \mu^2} \quad (4.61)$$

ve

$$\left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' = \left( \frac{\lambda k_g + \mu}{\lambda - k_g \mu} \right)' = \frac{(\lambda' k_g + \lambda k_g' + \mu')(\lambda - k_g \mu) - (\lambda' - k_g' \mu - k_g \mu')(\lambda k_g + \mu)}{(\lambda - k_g \mu)^2} = \frac{k_g' (\lambda^2 + \mu^2)}{(\lambda - k_g \mu)^2} \quad (4.62)$$

olarak bulunur. Buna göre (4.59), (4.60), (4.61) ve (4.62) denklemleri (3.17) de yerine yazılırsa;

$$\frac{(\lambda - k_g \mu)^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} \frac{k_g' (\lambda^2 + \mu^2)}{(1 + k_g^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(\lambda - k_g \mu)^2 (\lambda^2 + \mu^2) \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} k_g' (\lambda^2 + \mu^2)}{(\lambda^2 + \mu^2)^2 (1 + k_g^2)^{\frac{3}{2}} (\lambda - k_g \mu)^2} = \frac{k_g'}{(1 + k_g^2)^{\frac{3}{2}}}$$

elde edilir. Burada  $\frac{k_g'}{(1 + k_g^2)^{\frac{3}{2}}} = c$  sabitine eşitlenip bu diferansiyel denklem çözülürse,

$$\frac{k_g}{\sqrt{1 + k_g^2}} = cu + d, (c, d \text{ sabit})$$

bulunur. Buradan aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

**Teorem 4.3.2.** Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan bir regle yüzeyde; eğer  $u$  yay parametresiyle verilmiş striksiyon çizgisi bir slant helis ise striksiyon çizgisinin yapı fonksiyonları olan  $\lambda, \mu$  ve  $k_g$  nin  $\frac{\lambda}{\mu}$  sabit ve  $\frac{k_g}{\sqrt{1 + k_g^2}} = cu + d$  ( $c, d$  sabit) şartlarını sağlamasıdır.

### 4.3.3. Striksiyon Çizgisinin Bertrand Eğrisi Olma Durumu

Bir uzay eğrisinin eğrilikleri  $\kappa \neq 0$ ,  $\tau \neq 0$  olmak üzere, Sonuç 3.6.1 den biliyoruz ki; eğrinin Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$A(\tau' \kappa - \tau \kappa') = \tau' \quad (4.63)$$

olacak şekilde bir  $A \neq 0$  reel sayısının olmasıdır.

Buna göre (4.63) eşitliği düzenlenirse;

$$\left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \kappa^2 A = \tau' \quad (4.64)$$

elde edilir.



Buna göre yay parametresi ile ele aldığımız striksiyon çizgisinin yapı fonksiyonları olan  $\lambda$  ve  $\mu$  için  $\frac{\lambda}{\mu}$  yine sabit olmak üzere, (4.62) de elde ettiğimiz  $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$ , (4.59) (4.60) da ki  $\kappa$  ve  $\tau$  değerleri (4.64) te yerine yazılır ve  $\lambda^2 + \mu^2 = 1$  olduğu göz önüne alınırsa,

$$\frac{k_g'(\lambda^2 + \mu^2)(\lambda - \mu k_g)^2}{(\lambda - \mu k_g)^2(\lambda^2 + \mu^2)^2} A = \lambda' k_g + \lambda k_g' + \mu'$$

$$A = \lambda + \frac{\lambda' k_g + \mu'}{k_g'} \quad (4.65)$$

eşitliği elde edilir.  $A$  nın sıfırdan farklı bir reel sayı olması için  $\lambda$  ve  $\mu$  sabit olmalıdır. O halde aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

**Teorem 4.3.3.** Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan bir regle yüzeyde; yay parametresiyle verilmiş striksiyon çizgisinin bir Bertrand eğrisi olması için yeter ve gerek şart striksiyon çizgisinin yapı fonksiyonları olan  $\lambda$  ve  $\mu$  nün sabit olmasıdır.

**Sonuç 4.3.1.**  $\lambda$  ve  $\mu$  nün sabit olması durumunda (4.65) eşitliğinde  $A = \lambda$  olduğu görülür.

#### 4.3.4. Striksiyon Çizgisinin Mannheim Eğri Olma Durumu

$E^3$  de bir uzay eğrisinin bir Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şart Teorem 3.7.1 ve (3.18) eşitliğinden bildiğimiz gibi eğrinin eğrilikleri  $\kappa$  ve  $\tau$  olmak üzere  $\kappa = c(\kappa^2 + \tau^2)$  eşitliğinin sağlanması gerekir. Burada  $c \neq 0$  olmak üzere bir sabittir.

Buna göre açılmayan regle yüzeyde dayanak eğrisi olan yay parametrelili striksiyon çizgisinin yapı fonksiyonları  $\lambda$ ,  $\mu$  ve  $k_g$  olmak üzere daha önce (4.59) ve (4.61) ile ifade edilen  $\kappa$  ve  $\kappa^2 + \tau^2$  değerleri (3.18) de yerine yazılırsa;

$$c \frac{1 + k_g^2}{\lambda^2 + \mu^2} = \frac{\lambda - k_g \mu}{\lambda^2 + \mu^2}$$

olur. Buradan,

$$c = \frac{\lambda - k_g \mu}{1 + k_g^2} \quad (4.66)$$

olarak bulunmuş olur. Böylece aşağıdaki teoremi yazabiliriz:

**Teorem 4.3.4:** Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan bir regle yüzeyde, striksiyon çizgisinin bir Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şart striksiyon çizgisinin yapı fonksiyonları olan

$\lambda, \mu$  ve  $k_g$  nin  $\frac{\lambda}{\mu}$  sabit ve  $c$  sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere  $c = \frac{\lambda - k_g \mu}{1 + k_g^2}$  şartını sağlamasıdır.

#### 4.4. Striksiyon Çizgisinin Geodezik, Asimptotik ve Eğrilik Çizgisi Olma Durumları

Bu bölümde striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeyler için striksiyon çizgisinin eğri yüzey ikilisinin eğrilikleri hesaplanıp bazı sonuçlar çıkarılacaktır.

$X(u, v) = a(u) + vb(u)$  biçimindeki striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeyin  $u$  yay parametres ile verilen  $a(u)$  striksiyon eğrisi için,  $a'(u) = \lambda x + \mu y$  olmak üzere Tanım 3.3.1 den Darboux çatı elemanları

$$T = \lambda x + \mu y \quad (4.67)$$

$$n = \frac{-\mu\alpha + \nu y}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \quad (4.68)$$

$$Y = n \times T = \mu^2 x - \lambda\nu\alpha - \lambda\mu y \quad (4.69)$$

için;  $T = \lambda x + \mu y$ ,  $Y = \mu^2 x - \lambda\mu y$ ,  $n = -\alpha$ .

Buradan Tanım 3.3.3 ve (3.1) eşitliğinden striksiyon çizgisinin ikinci türevi ve (4.69) göz önüne alınarak  $\nu = 0$ ; için  $u$  parametre eğrisinin  $a(u)$  noktasındaki  $(X, a(u))$  eğri-yüzey ikilisinin geodezik eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \langle a'', Y \rangle = \langle \lambda'x + (\lambda - \mu k_g)\alpha + \mu'y, \mu^2 x - \lambda\mu y \rangle \\ \kappa_g &= \mu(\lambda'\mu - \lambda\mu') \end{aligned} \quad (4.70)$$

(4.70) olarak kolayca hesaplanabilir.

**Teorem 4.4.1.** Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeylerin striksiyon çizgisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\frac{\lambda}{\mu}$  nin sabit olmasıdır.

**İspat:** Geodezik eğrilik sıfır olduğunda eğri geodezik eğri olduğundan, (4.70) eşitliği sıfıra eşitlendiği takdirde

$$\kappa_g = \mu(\lambda'\mu - \lambda\mu') = 0$$

olur. Burada  $\mu \neq 0$  olduğundan  $\lambda'\mu - \lambda\mu' = 0$  olup,  $\frac{\lambda}{\mu}$  nün sabit olduğu sonucu ortaya çıkar.

Tanım 3.3.5 ve (3.2) eşitliğinden striksiyon çizgisinin ikinci türevi ve (4.68) göz önüne alınarak  $v=0$ ; için  $u$  parametre eğrisinin  $a(u)$  noktasındaki  $(X, a(u))$  eğri-yüzey ikilisinin asimptotik eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \langle a'', n \rangle = \langle \lambda'x + (\lambda - \mu k_g)\alpha + \mu'y, -\alpha \rangle \\ \kappa_n &= \mu k_g - \lambda \end{aligned} \quad (4.71)$$

bulunur.

**Teorem 4.4.2.** Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeylerin striksiyon çizgisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart  $k_g = \frac{\lambda}{\mu}$  olmasıdır.

**İspat:**  $\kappa_n = 0$  olduğunda eğri asimptotik eğri olduğundan (4.71) eşitliği sıfıra eşitlenirse,

$$\kappa_n = \mu k_g - \lambda = 0$$

ve buradan  $k_g = \frac{\lambda}{\mu}$  elde edilir.

Tanım 3.3.7 ve (3.3) eşitliği göz önüne alınarak (4.68) in türev değeri ve (4.69) eşitliği (3.3) de yazılırsa  $v=0$ ; için  $u$  parametre eğrisinin  $a(u)$  noktasındaki  $(X, a(u))$  eğri-yüzey ikilisinin geodezik burulması

$$\begin{aligned} \tau_g &= -\langle n', Y \rangle = -\langle x - k_g y, \mu^2 x - \lambda \mu y \rangle \\ \tau_g &= -\mu(\mu + \lambda k_g) \end{aligned} \quad (4.72)$$

olarak hesaplanır.

**Teorem 4.4.3:** Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeylerin striksiyon çizgisinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $k_g = -\frac{\mu}{\lambda}$  olmasıdır.

**İspat:** Geodezik burulma sıfır olduğunda eğri eğrilik çizgisi olur. O halde (4.72) denlemi sıfıra eşitlenirse,

$$\tau_g = -\mu(\mu + \lambda k_g) = 0$$

ve buradan  $\mu \neq 0$  olduğundan  $\mu + \lambda k_g = 0$  olup,  $k_g = -\frac{\mu}{\lambda}$  elde edilir.

#### 4.5. Striksiyon Çizgisinin Paralel Yüzey Üzerindeki Görüntüsü

Bu bölümde striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeyler için striksiyon çizgisinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsü elde edilerek bulunan eğrinin eğri yüzey ikilisinin eğrilikleri hesaplanarak bazı sonuçlar elde edilecektir.

Parametrik ifadesi  $X(u, v) = a(u) + vb(u)$  olan striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeyler için  $a' = \lambda(u)x(u) + \mu(u)y(u)$  biçiminde tanımlanmıştır. Yine bu tanımlarda  $k_g(u), b(u)$  nun küresel eğrilik fonksiyonu ve  $\{\alpha(u), x(u) = b(u), y(u)\}$  üçlüsünün  $b(u)$  küresel eğrisinin küresel Frenet çatısı olduğu belirtilmiştir. Böylece,  $k_g(u), \lambda(u), \mu(u)$  fonksiyonları 3-boyutlu Öklid uzayında  $X(u, v)$  açılmayan regle yüzeyler için yapı fonksiyonlarını göstermek üzere ve (3.8) ile tanımlı yüzey normali  $n$  olmak üzere, paralel yüzey tanımından hareketle

$$\beta(u) = a(u) + rn$$

paralel yüzey üzerindeki eğri olarak tanımlanabilir. Bu durumda önceki bölümdeki benzer hesaplamalarla paralel yüzey üzerinde ki eğri-yüzey ikilisinin  $T^*, Y^*, n^*$  çatı elemanları;

$$T^* = \frac{1}{\sqrt{(1+r(\lambda - \mu k_g))^2 + (r(\mu + k_g \lambda))^2}} \left[ (1+r(\lambda - \mu k_g))T + r(\mu + \lambda k_g)Y \right] \quad (4.73)$$

$$Y^* = \frac{1}{\sqrt{(1+r(\lambda - \mu k_g))^2 + (r(\mu + k_g \lambda))^2}} \left[ (-r(\mu + \lambda k_g))T + (1+r(\lambda - \mu k_g))Y \right] \quad (4.74)$$

$$n^* = n \quad (4.75)$$

olur. Yine önceki bölümdeki benzer hesaplamalarla, geodezik eğrilik, asimptotik eğrilik ve geodezik burulma sırasıyla;

$$\kappa_g^* = \frac{-r^2(\mu + k_g \lambda) \left[ (\lambda' - \mu' k_g - \mu k_g') - (\lambda' \mu - \mu' \lambda)(\mu + k_g \lambda) \right] - \left[ 1 + r(\lambda - \mu k_g) \right]^2 (\lambda' \mu - \lambda \mu') - r(1 + r(\lambda - \mu k_g))(\mu' + k_g' \lambda + k_g \lambda')}{\sqrt{(1 + r(\lambda - \mu k_g))^2 + r^2(\mu + k_g \lambda)^2}} \quad (4.76)$$

$$\kappa_n^* = -(\lambda - \mu k_g)(1 + r(\lambda - \mu k_g)) - r(\mu + k_g \lambda)^2 \quad (4.77)$$

$$\tau_g^* = \frac{-(\mu + k_g \lambda)}{\sqrt{(1 + r(\lambda - \mu k_g))^2 + r^2(\mu + k_g \lambda)^2}} \quad (4.78)$$

olarak hesaplanır. Bu durumda aşağıdaki teoremleri ifade edebiliriz:

**Teorem 4.5.1.** Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeyin striksiyon çizgisinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart striksiyon çizgisinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsünün de eğrilik çizgisi olmasıdır ( $\tau_g = 0 \Leftrightarrow \tau_g^* = 0$ ).

**Teorem 4.5.2.** Striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeyin striksiyon çizgisi asimptotik eğri olsun. Bu durumda;

$$\kappa_g^* = \frac{(\lambda' \mu - \lambda \mu')(1 + r^2(\mu + \lambda k_g)^2) - r(\mu' + \lambda k_g' + k_g \lambda')}{\sqrt{1 + r^2(\mu + \lambda k_g)^2}} \quad (4.79)$$

$$\kappa_n^* = -r(\mu + \lambda k_g)^2 \quad (4.80)$$

$$\tau_g^* = \frac{-(\mu + \lambda k_g)}{\sqrt{1 + r^2(\mu + \lambda k_g)^2}} \quad (4.81)$$

**Teorem 4.5.3.** Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan regle yüzeyin striksiyon çizgisi eğrilik çizgisi olsun. Bu durumda

$$\kappa_g^* = \pm(\lambda' \mu - \lambda \mu')(1 + r(\lambda - \mu k_g)) \quad (4.82)$$

$$\kappa_n^* = (-\lambda + \mu k_g)(1 + r\lambda - rk_g \mu) \quad (4.83)$$

$$\tau_g^* = \tau_g. \quad (4.84)$$

**Sonuç 4.5.1.** Striksiyon çizgisi eğrilik çizgisi ise striksiyon çizgisinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsünün asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart striksiyon çizgisinin  $k_g = \frac{\lambda}{\mu}$  şartını sağlaması yani asimptotik olmasıdır.

**Sonuç 4.5.2.** Striksiyon çizgisi eğrilik çizgisi ise striksiyon eğrisinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsünün geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart striksiyon çizgisinin geodezik eğri olmasıdır (Yani;  $\frac{\lambda}{\mu}$  nün sabit olmasıdır).

**Teorem 4.5.4.** Striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeyin striksiyon çizgisinin asimptotik eğriliği  $\kappa_n = \frac{1}{r}$  olsun. Bu durumda striksiyon çizgisinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsünün geodezik eğriliği  $\kappa_g^*$ , asimptotik eğriliği  $\kappa_n^*$  ve geodezik burulması  $\tau_g^*$  aşağıdaki gibidir.

$$\kappa_g^* = \mp r(\lambda'\mu - \lambda\mu')(\mu + \lambda k_g) \quad (4.85)$$

$$\kappa_n^* = -r(\mu + \lambda k_g)^2 \quad (4.86)$$

$$\tau_g^* = -\frac{1}{r} \quad (4.87)$$

**Sonuç 4.5.3.** Striksiyon çizgisinin asimptotik eğriliği  $k_n = \frac{1}{r}$  ise striksiyon çizgisinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsünün geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart striksiyon çizgisinin geodezik (yani  $\frac{\lambda}{\mu}$  nün sabit) olmasıdır.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde öncelikle bu tez çalışmasında ele alınan sonuçlar özetlenecek, daha sonra bu konu ile ilgili başka nelerin yapılabileceği hakkında öneriler verilecektir.

### 5.1. Sonuçlar

Bu tezde, Öklid uzayda regle yüzeylerin paralel yüzeyleri incelenmiştir. Bunun için öncelikle herhangi bir regle yüzeyin paralel yüzeyi elde edilmiş, elde edilen bu yüzeyin regle yüzey olması için silindirik bir yüzey olduğu gösterilmiş ve eğrilikler arasındaki ilişkiler belirtilmiştir. Sonra tezimizin asıl belirleyici kısmı olan striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılmayan regle yüzeylerin paralel yüzeyleri elde edilerek, asıl yüzey ile paralelinin Gauss ve ortalama eğrilikleri arasındaki ilişkiler belirtilmiştir. Yine elde edilen paralel yüzeyin  $\mu^2 + \nu^2 = 1$  şartı dâhilinde regle yüzey olduğu gösterilmiştir. Bu şart dâhilinde yeniden eğrilikler hesaplanarak, geometrik sonuçlar çıkarılmıştır. Son olarak, striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan bir regle yüzeyde; yay parametresiyle verilmiş striksiyon çizgisinin eğrilikleri kullanılarak, bir Bertrand eğrisi, helis eğrisi slant helis ve Mannheim eğrisi olma şartları elde edilmiştir. Bu striksiyon eğrisinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsü elde edilerek eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri hesaplanarak asıl yüzeyin eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Bu sonuçlar Bulgular ve Tartışma bölümünde verilmiştir. Bu sonuçlara ulaşabilmek için gerekli lemmalar, teoremler ve yardımcı sonuçlar Materyal ve Yöntem başlığı altında verilmiştir.

### 5.2. Öneriler

Tezde, özellikle striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olan regle yüzeyin paralel yüzeyi elde edilerek, yüzeyler arasındaki geometrik özellikler incelenmiştir. Ayrıca, striksiyon çizgisinin helis, slant helis, Bertrand ve Mannheim eğri olma şartları elde edilmiştir. Bu striksiyon çizgisinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsü elde edilerek eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri hesaplanarak asıl yüzeyin eğri-yüzey eğrilikleri arasında bağıntılar kurulmuştur. Bu çalışma, Öklid uzay yerine Lorentz uzay seçilerek burada elde edilen bulguların yeniden değerlendirilmesi önerilir.

## KAYNAKLAR

- [1] Craig T, 1883. Note on parallel surfaces, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik (Crelle's journal), 94; 162-170.
- [2] Eisenhart LP, 1909. A Treatise On The Differential Geometry Of Curves and Surfaces, Ginn and Company, Boston: New York.
- [3] Nizamoglu S, 1986. Surfaces réglées parallèles, Ege Univ. Fen Fak. Derg., 9 (Ser. A), 37-48.
- [4] Tarakcı Ö, 2002. Sabit Sırt Uzaklıklı Hiperyüzeyler Doktora tezi Ankara Üniv. Fen Bilimleri Ens. Ankara.
- [5] Yaşar A, 2011.  $L^n$  Lorentz Uzayında Bir Hiperyüzeyin Yüksek Mertebeden Gauss Eğrilikleri. Yüksek lisans tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- [6] Cöken AC, Çiftci U, Ekici C, 2008. On parallel timelike ruled surfaces with timelike rulings, Kuwait Journal of Science & Engineering, 35; 21-31.
- [7] Yoon DW, 2008. Some Properties of Parallel Surfaces in Euclidean 3-Spaces, Honam Mathematical J. 30, No. 4, pp. 637-644.
- [8] Kızıltuğ S, 2013. Paralel Yüzeyler ve Eğriler. Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- [9] Kızıltuğ S, Yaylı Y, 2012. Timelike Curves on Timelike Parallel Surfaces in Minkowski 3-space, Mathematica Aeterna, 2(8); 675-687.
- [10] Kızıltuğ S, Yaylı Y, 2013. Spacelike Curves on Spacelike Parallel Surfaces in Minkowski 3-space, International Journal of Mathematics and Computation, (19) 0974-5718.



- [11] Ünlütürk Y, Özusağlam E, 2012. On Parallel Surfaces in Minkowski 3-Space, TWMS. J. App. Eng. Math. V.3, N.2, 2013, pp. 214-22.
- [12] H.R. Müller, 1951. Über geschlossene Bewegungsvorgänge, Monatsh. Math., 5; 206-214.
- [13] Liu H, Yu Y, Jung SD, 2014. Invariants of non-developable ruled surfaces in Euclidean 3-space, Contrib. Algebra Geom, 55; 189-199.
- [14] Liu H, Yuan Y, 2012. Pitch functions of ruled surfaces and B-scrolls in Minkowski 3-space, J. Geom. Phys, 62; 47-52.
- [15] Yu Y, Liu H, Jung SD, 2014. Structure and characterization of ruled surfaces in Euclidean 3-space, Applied Mathematics and Computation, 233; 252-259.
- [16] Hacısalihoğlu H H, 1983. Diferensiyel Geometri. İnönü Üniv. Fen Ed. Fak. Yayınları, No: 2, 895s., Ankara.
- [17] Struik, D.J., 1988. Lectures on Classical Differential Geometry. 2<sup>nd</sup> ed. Addison Wesley, Dover.
- [18] Salimov A, Mağden A, 2008. Diferensiyel Geometri, Aktif yayıncılık, Erzurum.
- [19] O Neil B, 2006. Elementary Differential Geometry, Revised second ed. Academic Press Inc., 503p., USA.
- [20] Gray, A. 1998. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. Second ed. Crc Press 1053 p. USA.
- [21] Sabuncuoğlu A, 2010. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayın Dağıtım, No:258, 515s.,Ankara.
- [22] Carmo M, 1976. Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, 503p., New Jersey.

- [23] Izumiya S, Takeuchi N, 2002. Generic properties of helices and Bertrand curves, *Journal of Geometry*, 74; 97-109.
- [24] Hacısalihoğlu H H, 2000. *Diferensiyel Geometri*, Fen Fakóltesi, Beşevler-Ankara.
- [25] Karger A, Novak J, 1985. *Space Kinematics and Lie Group*, Gordon and Breach- Science Publishers.
- [26] Öncü İ, 2005. *Özel Eğriler ve Regle Yüzeyler*. Yüksek lisans tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- [27] Liu H, Wang F, 2008. Mannheim partner curves in 3-space, *Journal of Geometry*, 88; 120-126.

## ÖZGEÇMİŞ

Bitlis Merkezde doğdu. İlköğretimi ve ortaokulu Muştakbaba İlköğretim Okulu'nda, liseyi Bitlis Lisesi'nde tamamladı. 2008 yılında kazandığı Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nden 2012 yılında mezun oldu. Yabancı dili İngilizce'dir.

SERPİL KAYA

