T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ VE MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

N-KESİRLİ HESAP YÖNTEMİ

Canan MERİÇ

ŞUBAT 2018

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

N-KESİRLİ HESAP YÖNTEMİ

Hazırlayan

Canan MERİÇ

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Ökkeş ÖZTÜRK

Jüri Üyeleri

Yrd. Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

Yrd. Doç. Dr. Ökkeş ÖZTÜRK

Yrd. Doç. Dr. Ufuk KAYA

ŞUBAT 2018

Canan MERİÇ tarafından hazırlanan "**N-Kesirli Hesap Yöntemi**" adlı tez çalışması 07/02/2018 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bitlis Eren Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Yrd. Doç. Dr. Erdal KORKMAZ (Başkan)	
Yrd. Doç. Dr. Ökkeş ÖZTÜRK (Danışman)	
Yrd. Doç. Dr. Ufuk KAYA (Üye)	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 19./03/2018 gün ve 15./02 Sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Koray KÖKSAL

Enstitü Müdürü

ÖZET

N-KESİRLİ HESAP YÖNTEMİ

Canan MERİÇ

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ökkeş ÖZTÜRK
Şubat 2018, 32 sayfa

Bu tez çalışmasında öncelikle kesirli hesabın tarihçesi ve kesirli hesap ile alakalı bazı çalışmalar belirtilmiştir. Bazı özel fonksiyonların tanımları, kesirli hesabın bazı özellikleri, örnekler ile birlikte önemli kesirli türev ve kesirli integral tanımları ve N-kesirli hesap yöntemi verilmiştir. Bu yöntem kullanılarak bazı singüler diferansiyel denklemler çözülebilmektedir. Son bölümde, iki farklı potansiyel altında radyal Schrödinger denklemlerinin çözümleri N-kesirli hesap yöntemi ile elde edilmiştir. Böylece, bu iki denklemi çözmek için yeni bir yöntem kullanılmış ve çözümler de kesirli formlarda bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Kesirli Hesap, N-Kesirli Hesap Yöntemi, Genelleştirilmiş Leibniz Kuralı, Radyal Schrödinger Denklemi

ABSTRACT

N-FRACTIONAL CALCULUS METHOD

Canan MERİÇ

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ökkeş ÖZTÜRK

February 2018, 32 pages

In this thesis, history of the fractional calculus and some of the studies related to the fractional calculus have been indicated. Definitions of some special functions, some properties of the fractional calculus, definitions of fractional derivative and fractional integral with examples and N-fractional calculus method have been given. Some singular differential equations can be solved by using this method. In the last section, solutions of the radial Schrödinger equation under two different potentials were obtained via N-fractional calculus method. Thus, a new method has been used to solve these two equations and solutions have been found in fractional forms.

Keywords: Fractional Calculus, N-Fractional Calculus Method, Generalized Leibniz Rule, Radial Schrödinger Equation

TEŞEKKÜR

Tezimin konusunu belirlememde, tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren ve yapıcı eleştirileriyle destek olan, kendime olan inancımı sorguladığım vakitlerde bile bana olan inancını bir an dahi yitirmeyen, bu sayede tezimin varlığının meydana gelmesinde etkisi yadsınamayacak kadar büyük olan değerli Danışman Hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Ökkeş ÖZTÜRK'e, tezimin başlangıcından bitimine kadar varlığı bir an olsun beni terk etmeyen, benden yardımlarını esirgemeyen, gülen yüzüyle her zaman yanımda olan, sevgili kardeşim Can Okan MERİÇ'e ve son olarak da; özellikle stresli geçen dönemlerimde gösterdikleri sabır ve verdikleri her türlü maddi manevi destekleri için ev arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}^{+}$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
N^{μ}	N-Kesirli hesap operatörü
$R(r)$	Dalga fonksiyonu
$\Gamma(x)$	Gama fonksiyonu
$B(x,y)$	Beta fonksiyonu
$E_{\alpha}(x)$	Bir parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}(x)$	İki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu
$erf(x)$	Hata fonksiyonu

KISALTMALAR DİZİNİ

RL	Riemann-Liouville
GL	Grünwald-Letnikov

1. GİRİŞ

Kesirli mertebeden türev ve integral kavramları, tamsayı mertebeli türev ve integralleri kesirli mertebeye genelleştiren kavramlardır. Kesirli matematiğin ve kesirli mertebeden türev kavramının ortaya çıkmasının en önemli nedenlerinden birisi, doğada meydana gelen birçok olayın tam sayılarla ifade edilememesidir. Klasik analizde bilinen integral ve türev tanımlarının hem gelişen teknoloji hem de hızla ilerlemekte olan bilim alanları için yetersiz kaldığı görülmüştür. Böylece kesirli mertebeden türev kavramı uygulamalı matematiğin önemli bir dalını oluşturmuştur [1,2].

Kesirli analiz alanının geliştirilmesi, mertebesi tamsayı olmayan ifadelerin türev ve integral hesaplarının kolaylıkla bulunmasını sağlamıştır. Araştırmacı toplulukların ilgisini çeken kesirli analiz alanı 300 yıldan fazla bir geçmişe dayanmaktadır. İlk olarak, 1695 yılında L'Hospital'in Leibniz'e yazdığı ve içerisinde ½. mertebeden türevin anlamını sorduğu mektup ile başlar. İşte bu soru belki de farkında olmadan kesirli analizin ortaya çıkmasına ve merakla araştırılmasına sebep olan soru olmuştur. Daha sonra bu konu, aynı yıl Bernoulli'nin Leibniz'e ''Kuvvetlerin kesirli veya irrasyonel olması'' durumuyla ilgili sorular yönelttiği bir mektupla tekrar gündeme gelmiştir. Leibniz'in L'Hospital'a yazdığı mektuba benzer fakat daha ayrıntılı bir mektupla karşılık vermiştir [3].

Pek çok olgu kesirli hesap kullanılarak daha gerçeğe uygun modellenebilmiş ve açıklanabilmiştir. Kesirli analizin klasik analizden en önemli farkı, klasik analizde olduğu gibi tek bir türev tanımının olmayışıdır. Kesirli analizdeki birden fazla türev tanımının olması probleme en uygun olanının kullanılmasını, problemin en iyi çözümünün elde edilmesini sağlar. En önemli kesirli tanımlar: Riemann-Liouville (RL), Caputo, Grünwald-Letnikov (GL), Weyl, Riesz ve Marchaud tanımlarıdır. Bu tanımlar arasında geçişler olmasına rağmen tanımları ve tanımlarının fiziksel yorumları açısından farklılık gösterirler. GL tanımı nümerik hesaplamalar için, RL tanımı hem nümerik hem de analitik hesaplamalar için, Caputo kesirli türev tanımı da analitik hesaplamalar için daha uygundur. Genel olarak, GL ve RL kesirli türev tanımı matematik ve mühendislik bilimlerinde, Caputo kesirli türev tanımı ise fizikte kullanılmaktadır [4].

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Leibniz'in hayatını kaybetmesiyle kesirli mertebeden türev ile ilgili çalışmalar sona ermemiştir. Langrange kesirli analiz ile ilgilenmeye başlamış ve tamsayı mertebeli diferansiyel operatörü için bir denklem geliştirmiş, çalışmalarının sonunda da verilen şartlar altında bu ifadenin tamsayı mertebeden olmayan operatörlere de dönüştürülebileceğini göstermiştir. Euler faktöriyel kavramının genelleştirilmiş hali olan ve kesirli analizde önemli bir denklem olan ''Gama'' fonksiyonunu geliştirmiştir. Lacroix ise, x^a kuvvet fonksiyonunun ½. mertebeden türevi için Euler'in kullandığı ifadeye yakın bir formül bulmuştur. Bu çalışmaların yanında bir de Abel, kesirli mertebeden denklemin çözümünü ilk defa ortaya koyarak yeni çalışmalara ışık tutmuştur [5].

1832 yılından sonra kesirli analizin lineer adi diferansiyel denklemlerin bazı ifadelerinde uygulandığı Liouville'nin makalesinde görülmüştür. Boole, sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin çözümünde kesirli hesabı kullanmıştır. Riemann da, belirli bir integrali içeren ve üssü tam sayı olmayan kuvvet serilerine uygulanabilen farklı bir tanım geliştirmiştir. Riemann ve Liouville'nin elde ettikleri sonuçları Grünwald ve Krug birleştirmiştir. Grünwald, limiti kullandığı bir türev tanımını belirlemiş ve türev için belirli integral formüllerine ulaşmıştır. Caputo 1967 yılında, tam sayı mertebeden başlangıç durumlarını kullanmak yerine, kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri çözmek için RL kesirli türevinin daha klasik tanımını vermiştir [6].

Özellikle 20.yy'da kesirli kuvvetlere sahip çok sayıda denklemin çeşitli yollarla elde edildiği görülür. Örneğin; kesirli Boussinesq denklemi, zaman kesirli dalga denklemi, kesirli mertebeli difüzyon denklemi, kesirli Burgers denklemi vb. ilgi çekici yönünün ve geniş uygulama alanlarına sahip olmasının keşfedilmesiyle bilim dünyasında yerini alan kesirli hesap tekniği, birçok çalışmaya imkân sağlamış ve sağlamaya devam etmektedir. Kesirli türev ve integral hesabının uygulamaları üzerine birçok araştırma yapılmıştır. Doğal ve yapay sistemlerin çalışma şekillerini anlamada çok önemli bir araçtır. Kesirli türev ve integraller, bazı belirli integrallerin alınması, seri toplamlarının bulunması gibi konularda da yararlı bir teknik olarak karşımıza çıkar. Ayrıca histerezis, hafıza ve gerilim faktörlerinin doğal olarak ortaya çıktığı viskoelastik (yapışkan ve esnek) materyallerin (kıkırdak, deri, kas) fiziksel durumlarının modellenmesinde kesirli hesaplamanın kullanımı kendiliğinden ortaya çıkar. 2002 yılında Manabe, bir uzay aracının serbest uzayda hareketlerinin modellenmesinde kesirli mertebeden türevlerin kullanımını ve üstün yanlarını göstermiştir. 2009 da Petras, doğru akım kaynağı kullanan bir motorun geri besleme hızının kontrolünün tamsayı mertebeli türevler yerine kesirli mertebeden türevler ile hesaplanmasının daha net sonuçlar vereceğini göstermiştir. Yine günümüzde biyolojik sistemleri modellemede, fizik alanında, beyin analizi ve fiyat analizi gibi doğrusal olmayan hareketlerin modellenmesinde, tıp alanında sinir hücrelerinin anormal davranışlarının modellenmesi çalışmalarında, depremde fay hatlarının anormal davranışların analiz edilmesinde, ilaç sektöründeki içerik incelenmesinde sıkça kullanılmaktadır [6].

Bu alanda yapılmış çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bunlardan bazıları;
1840'da De Morgan kesirli hesap ile ilgili yayımladığı makalelerinde bu konuyla ilgili daha önce bahsedilen sistemlerin aslında daha genel bir sistemin parçaları olduğunu söylemiştir. 1868'de ise Holmgren kesirli hesabın adi diferansiyel denklemlere uygulanışı hakkında uzun bir monolog çalışması yapmıştır. RL tanımının ilk çalışması, Sonin'in 1869'da yayımladığı ''Keyfi mertebeden diferansiyel'' adlı makalesinde ortaya konmuştur. Bu alan ile ilgili ilk kitap Oldham ve Spainer tarafından 1974 yılında çıkarılmıştır. Aynı yıl Ross tarafından New Hawen Üniversitesi'nde ilk konferans düzenlenmiştir. 1999 yılında daha geniş kapsamlı bir kitap I. Podlubny tarafından yayınlanmıştır. Bu uygulamalar sayesinde önceleri dar bir çalışma alanına sahip olan ''Kesirli Analiz'' günümüzde büyük bir araştırmacı topluluğunun da ilgi alanı olmuştur [6].

Ayrıca 2002'de Srivastava, adi ve kısmi denklemlerin (açık) belirli çözümlerinin türetilmesinde kesirli hesabın kullanımı göstermiştir [7].

Watson, kesirli hesapla ilgili bir inceleme yapmış ve kesirli hesaplamadaki Laplace dönüşümünün faydasını araştırıp kesirli diferansiyel denklemler hakkında bazı temel gerçekleri tanıtmıştır [8].

2004'te Özen ve Öztürk, GL, RL ve Caputo kesirli türevleri üzerinde durmuştur. Ayrıca GL, RL ve Caputo kesirli türevlerinin birbiriyle olan ilişkilerini gösteren bazı özel örnekler vermiştir [9].

Lüleci, örneklerle kesirli diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemlerinin çözüm metodu olarak kullanılabileceği göstermiştir [10].

Yılmazer ve Öztürk, N-kesirli hesap tekniği kullanarak Gegenbauer denkleminin açık çözümleri elde etmiştir [11].

2015’te Kömekçi, Mellin dönüşümünü tanıtmış ve kesirli basamaktan değişken katsayılı diferensiyel denklemlerin çözümlerini bu dönüşüm yardımıyla hesaplamıştır [12].

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Basit fakat gerekli olan matematiksel ifadeleri tartışmak ve geliştirebilmek, bu kavramların ortaya çıkmasını sağlamıştır. Gama fonksiyonu, beta fonksiyonu, Mittag-Leffler fonksiyonu ve hata fonksiyonu kesirli diferansiyel denklemlerin açığa ve çözüme kavuşması için çok önemli bir yere sahiptir. Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı metot ve yöntemler verilecektir.

3.1. Gama Fonksiyonu

Gama fonksiyonu en kısa tanımıyla faktöriyelin reel sayılara genelleştirilmiş halidir. Bu yüzden kesirli denklemlerle yakından ilgilidir. Gama fonksiyonu negatif değerler hariç tam sayı olmayan değerler, hatta kompleks sayı değerleri için geçerlidir.

$x > 0$ değerleri ile sınırlı olan,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-y} y^{x-1} dy \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona gama fonksiyonu denir. $x \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\Gamma(x)$ fonksiyonu, kompleks düzlemin sağ yarısında yakınsaktır.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-y} y^{x-1} dy = (x-1)! \tag{3.2}$$

olduğundan gama fonksiyonu genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu olarak da bilinir.

Gama fonksiyonu ayrıca;

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1.2.3 \ldots n}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} n^x, \quad (x \neq 0, -1, -2, -3, \ldots) \tag{3.3}$$

limit şeklinde de tanımlanabilir.

Burada x yerine $x+1$ alırsak;

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1.2.3 \ldots n}{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+n+1)} n^{x+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{x+n+1} \frac{1.2.3 \ldots n}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} n^{x} \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned} \tag{3.4}$$

ve

$$\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1.2.3 \ldots n}{1.2.3 \ldots n(n+1)} n = 1 \tag{3.5}$$

$$\left.\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1 \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2 \\ &\vdots \\ \Gamma(n) &= 1.2.3 \ldots (n-1) = (n-1)!\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

olduğu kolayca görülebilir [2].

Çizelge 3.1. Bazı x değerleri için gama fonksiyonunun değerleri [13].

$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$	$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
$\Gamma(1) = 1$	$\Gamma(-1) = \pm\infty$
$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
$\Gamma(0) = \pm\infty$	$\Gamma(3) = 2$
$\Gamma(2) = 1$	$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$

3.2. Beta Fonksiyonu

$x, y > 0$ olmak üzere beta fonksiyonunun tanımı;

$$\beta(x,y) = \int_0^{\infty} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{3.7}$$

ile verilir. $t = 1 - a$ değişken dönüşümü ile beta fonksiyonu

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{3.8}$$

olup, en belirgin özelliği

$$\beta(x,y) = \beta(y,x) \tag{3.9}$$

dir.

Bazı durumlarda gama fonksiyonu yerine beta fonksiyonu olarak bilinen bağıntıyı kullanmak daha uygun olmaktadır [14].

3.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu

Üstel fonksiyonun genelleştirilmiş hali olan bu fonksiyon kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinde ortaya çıkmıştır.

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \tag{3.10}$$

fonksiyonunu 1903 yılında Mittag-Leffler tarafından tanımlanmıştır.

$\alpha > 0, \beta > 0$ olmak üzere, iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu ise,

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \tag{3.11}$$

şeklinde verilir. Özel olarak; $\alpha = \beta = 1$ için $E_1(x) = E_{1,1}(x) = e^x$ şeklindedir [2].

3.4. Hata Fonksiyonu

Gauss hata fonksiyonu olarak da bilinen hata fonksiyonu

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlanır [15].

3.5. Kesirli Hesap Tanımları

3.5.1. Grünwald-Letnikov Tanımları

$\mu > 0$ bir reel sayı, her sonlu $[a, x]$ kapalı aralığında f fonksiyonu sürekli, $f^{(n)}(x)$ türevleri var ve $m < \mu < m + 1$ olacak şekilde bir f fonksiyonunun μ. mertebeden GL kesirli türevi;

$${}_{a}^{GL}D_x^{\mu} f(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^{-\mu+n}}{\Gamma(-\mu+n+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\mu+m+1)} \int_a^x (x-t)^{m-\mu} f^{(m+1)}(t) dt \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlanır.

f fonksiyonunun μ katlı GL kesirli integrali ise;

$${}_{a}^{GL}D_x^{-\mu} f(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^{\mu+n}}{\Gamma(\mu+n+1)} + \frac{1}{\Gamma(\mu+m+1)} \int_a^x (x-t)^{m+\mu} f^{(m+1)}(t) dt \tag{3.14}$$

biçimindedir [2].

Örnek 3.1. $f(x) = x^2 + 4x$ fonksiyonunun $\mu = \frac{1}{2}$. mertebeden GL kesiri türev ve integraline bakalım. $(a = 0)$

$m = 0 < \frac{1}{2} < 1$ ve $f(0) = 0$ olmak üzere,

$$ {}_{0}^{GL}D_x^{1/2}(x^2 + 4x) = \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right)} \int_0^x (x - t)^{-1/2}(t^2 + 4t)' dt $$

$$ = 2\left(\frac{4\sqrt{x} + \frac{4x^{3/2}}{3}}{\sqrt{\pi}}\right) $$

ve

$$ {}_{0}^{GL}D_x^{-1/2}(x^2 + 4x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right)} \int_0^x (x - t)^{1/2}(t^2 + 4t)' dt $$

$$ = \frac{16x^{3/2}(5 + x)}{15\sqrt{\pi}} $$

olarak bulunur.

3.5.2. Riemann-Liouville Tanımları

$\mu > 0$ bir reel sayı, her sonlu $[a, x]$ aralığında f fonksiyonu sürekli ve integrallenebilir olsun. $n \in \mathbb{Z}^+, n - 1 \leq \mu < n$ olmak üzere bir f fonksiyonunun $\mu.$ mertebeden RL kesirli türevi;

$$ {}_{a}^{RL}D_x^{\mu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \mu)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x - t)^{n-\mu-1} f(t) dt \tag{3.15} $$

şeklinde tanımlanır.

f fonksiyonunun μ katlı RL kesirli integrali;

$$ {}_{a}^{RL}D_x^{-\mu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^x (x-t)^{\mu-1} f(t) dt \tag{3.16} $$

biçimindedir [2].

Örnek 3.2. $f(x) = x^3$ fonksiyonunun $\mu = \sqrt{2}$. mertebeden RL kesirli türev ve integraline bakalım. $(a = 0)$

$1 \leq \sqrt{2} < 2 = n$ olduğundan

$$ {}_{0}^{RL}D_x^{\sqrt{2}} x^3 = \frac{1}{\Gamma(2-\sqrt{2})} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x (x-t)^{1-\sqrt{2}} t^3 dt $$

$$ = 4.24175 x^{1.58579} $$

ve

$$ {}_{0}^{RL}D_x^{-\sqrt{2}} x^3 = \frac{1}{\Gamma(\sqrt{2})} \int_0^x (x-t)^{\sqrt{2}-1} t^3 dt $$

$$ = 0.131522 x^{4.41421} $$

elde edilir.

3.5.3. Caputo Tanımı

Riemann-Liouville tanımları zamanla fiziksel olguları modellemede yetersiz kalmıştır. Böylece kesirli hesap tekniğinde başlangıç koşullarını fiziksel durumlara en iyi şekilde uygulayan Caputo olmuştur.

Kesirli türevin bir başka tanımı olan Caputo kesirli türevi;

$$ {}_{a}^{C}D_{x}^{\mu}f(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\mu)}\int_{a}^{x}\frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\mu+1-n}}dt, \qquad (n-1<\mu<n) \tag{3.17}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Caputo yaklaşımının en önemli avantajı tam sayı mertebeden diferansiyel denklemlerdeki gibi başlangıç koşullarının aynı olmasıdır [2,16].

Örnek 3.3. $f(x)=2e^{x}$ fonsiyonunun $\mu=\frac{3}{2}$. mertebeden Caputo türevini bulalım. $(a=0)$ $1<\frac{3}{2}<2=n$ olduğundan

$$ {}_{0}^{C}D_{x}^{\frac{3}{2}}2e^{x}=\frac{1}{\Gamma\left(2-\frac{3}{2}\right)}\int_{0}^{x}\frac{(2e^{t})''}{(x-t)^{1/2}}dt$$

$$=2e^{x}erf(\sqrt{x})$$

şeklindedir.

3.5.4. Miller-Ross Ardışık Kesirli Türevi

Bir $f(x)$ fonksiyonunun tamsayı mertebeden ardışık türevi,

$$\frac{d^{n}f(x)}{dx^{n}}=\underbrace{\frac{d}{d(x)}\frac{d}{d(x)}\cdots\frac{d}{d(x)}}_{n}f(x), \qquad (n\in\mathbb{N}) \tag{3.18}$$

biçimindedir. Benzer şekilde, $0<p<1$ olmak üzere ardışık kesirli türev,

$$D^{n\mu}f(x)=\underbrace{D^{\mu}D^{\mu}\ldots D^{\mu}}_{n}f(x) \tag{3.19}$$

ile ifade edilir.

Miller-Ross bu eşitliği daha genel bir ifadeyle,

$$D^{\mu}f(x) = D^{\mu_1}D^{\mu_2}\dots D^{\mu_n}f(x), \qquad (\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n) \tag{3.20}$$

şeklinde tanımlayarak bunu ardışık kesirli türev olarak isimlendirmiştir. Ardışık kesirli türevler bazı fizik ve uygulamalı matematik problemlerinin formüllerinin elde edilmesinde ortaya çıkar. Fiziksel süreçleri veya objeleri modelleyen diferansiyel denklemler böylece kesirli türevle ifade edilen bir durumun yine kesirli türevle ifade edilen bir başka durum içinde işleme alınmasının bir sonucu olarak ortaya çıkar. Ayrıca Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevi de ardışık kesirli türevlerin özel halleridir [2].

3.5.5. Riemann Formülü

$\mu > 0, k > -1$ olacak şekilde birer reel sayı, $n \in \mathbb{Z}^{+}$ ve $n - 1 \leq \mu < n$ olsun. $f(x) = (x-a)^k$ fonksiyonunun μ. mertebeden kesirli türevi;

$${}_aD_x^{\mu}(x-a)^k = \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-\mu)}\,(x-a)^{k-\mu} \tag{3.21}$$

formülü ile hesaplanır [2].

Örnek 3.4. $f(x) = 2x^7$ fonksiyonunun π. mertebeden türevini bulalım. $(a = 0, k = 7)$

$$2\ {}_0D_x^{\pi}x^7 = \frac{\Gamma(8)}{\Gamma(8-\pi)}\,x^{7-\pi}$$

$$= 518.67x^{3.85841}$$

Diferintegrallerin diğer bazı özellikleri:

$$\left.\begin{aligned} (e^{\alpha x})_\mu &= \alpha^\mu e^{\alpha x}, \quad (\alpha \neq 0, \mu \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{C}) \\ (e^{-\alpha x})_\mu &= e^{-i\pi\mu} \alpha^\mu e^{-\alpha x}, \quad (\alpha \neq 0, \mu \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{C}) \\ (x^\alpha)_\mu &= e^{-i\pi\mu} \frac{\Gamma(\mu-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} x^{\alpha-\mu}, \quad \left(\mu \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{C}, \left|\frac{\Gamma(\mu-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)}\right| < \infty\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

biçimindedir. Buradaki α değeri sabittir.

Lemma 3.1. *(Lineerlik).* $f(x)$ ve $g(x)$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$'de analitik ve tek değerli fonksiyonlar olsunlar. Eğer f_μ ve g_μ türevleri mevcut ise;

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))_\mu = \alpha f_\mu(x) + \beta g_\mu(x) \tag{3.23}$$

biçimindedir. Burada $\mu \in \mathbb{R}, x \in \Omega$ ve α, β sabitlerdir [2].

Lemma 3.2. *(İndis Kuralı).* $f(x)$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$'de analitik ve tek değerli fonksiyon olsun. Eğer $(f_\mu)_\eta$ ve $(f_\eta)_\mu$ türevleri mevcut ise;

$$(f_\mu(x))_\eta = f_{\mu+\eta}(x) = (f_\eta(x))_\mu \tag{3.24}$$

biçimindedir. Burada $\mu, \eta \in \mathbb{R}$ ve $x \in \Omega$ dır [2].

Lemma 3.3. *(N-Kesirli Hesap Yöntemi).* $f(x)$ ve $g(x)$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$'de analitik ve tek değerli fonksiyonlar olsunlar. Eğer f_μ ve g_μ türevleri mevcut ise genelleştirilmiş Leibniz kuralı ile

$$N^\mu[f(x)g(x)] = (f(x)g(x))_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-n)\Gamma(n+1)} f_n(x) g_{\mu-n}(x) \tag{3.25}$$

biçimindeki *N-kesirli hesap yöntemi* tanımlanır. Burada $\mu \in \mathbb{R}, x \in \Omega, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ve $\left|\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-n)\Gamma(n+1)}\right| < \infty$ dur [2].

4. BULGULAR

N-kesirli hesap operatörü yardımıyla bazı singüler diferansiyel denklemlerin çözümleri elde edilmektedir. Yeni bir çözüm yöntemi olarak karşımıza çıkan N- kesirli hesap yönteminde çözümler kesirli türev veya integral formlarında karşımıza çıkmaktadır. Bu yöntem, seri çözümünden farklı olmakla birlikte daha hızlı ve doğru sonuçlar vermektedir.

Bu bölümde, iki farklı potansiyel altında radyal Schrödinger denklemlerinin çözümlerini bulmak için N- kesirli hesap yöntemini kullandık. Radyal Shrödinger denklemi, fiziksel bir denklem olup singüler bir diferansiyel denklemdir. Sırasıyla genelleştirilmiş Morse potansiyeli ve Kratzer-Fues potansiyeli altındaki radyal denklemleri çözmeyi amaçladık.

4.1. Genelleştirilmiş Morse Potansiyeli Altında Radyal Schrödinger Denkleminin Çözümleri

Genelleştirilmiş Morse potansiyeli altında radyal Schrödinger denklemi;

$$r^2 R_2 + rR_1 - (Ar^2 - Br - C)R = 0 \tag{4.1}$$

şeklindedir. Burada, $R = R(r)$ dalga fonksiyonu ve $r = \sqrt{w}e^{-ax}$ ile tanımlıdır (a parametredir). Ayrıca;

$$A = -\frac{2m}{\hbar^2 a^2},\ B = \frac{2mW}{\hbar^2 a^2 \sqrt{w}},\ \ C = 4\varepsilon^2,\ \ \varepsilon^2 = -\frac{mE}{2\hbar^2 a^2},\ \ \mathcal{V}(x) = we^{-2ax} - We^{-ax} \tag{4.2}$$

biçimindedir. Burada, m: kütle, $\hbar$: Planck sabiti, $\mathcal{V}$: elektirik potansiyel, E: elektrik alandır [17].

Teorem 4.1. $R \in \{ R: 0 \neq |R_\mu| < \infty,\ \mu \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere (4.1) denkleminin

$$R^{(1)} = \mathcal{A} r^{\sqrt{C}} e^{r\sqrt{A}} \left[r^{\frac{-2\sqrt{AC}+B-\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}} e^{-2r\sqrt{A}} \right]_{\frac{2\sqrt{AC}-\sqrt{A}+B}{2\sqrt{A}}}, \tag{4.3}$$

$$R^{(2)} = \mathcal{A} r^{\sqrt{C}} e^{-r\sqrt{A}} \left[r^{\frac{-2\sqrt{AC}-B-\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}} e^{2r\sqrt{A}} \right]_{\frac{2\sqrt{AC}-\sqrt{A}-B}{2\sqrt{A}}}, \tag{4.4}$$

$$R^{(3)} = \mathcal{A} r^{-\sqrt{C}} e^{r\sqrt{A}} \left[r^{\frac{2\sqrt{AC}+B-\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}} e^{-2r\sqrt{A}} \right]_{\frac{-2\sqrt{AC}-\sqrt{A}+B}{2\sqrt{A}}}, \tag{4.5}$$

$$R^{(4)} = \mathcal{A} r^{-\sqrt{C}} e^{-r\sqrt{A}} \left[r^{\frac{2\sqrt{AC}-B-\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}} e^{2r\sqrt{A}} \right]_{\frac{-2\sqrt{AC}-\sqrt{A}-B}{2\sqrt{A}}} \tag{4.6}$$

kesirli formda çözümleri vardır. Buradaki $\mathcal{A}$ keyfi sabit sayıdır.

İspat: $g = g(r)$ olmak üzere,

$$R = r^v g, \quad (r \neq 0) \tag{4.7}$$

olsun. O halde,

$$R_1 = v r^{v-1} g + r^v g_1 \tag{4.8}$$

ve

$$R_2 = v(v-1) r^{v-2} g + 2v r^{v-1} g_1 + r^v g_2 \tag{4.9}$$

olur. R, R_1 ve R_2'yi (4.1)'de yerine yazarsak

$$r g_2 + (2v+1) g_1 + [B - Ar + (v^2 - C) r^{-1}] g = 0 \tag{4.10}$$

şeklinde elde edilir. Burada, $v^2 - C = 0$ kabul edersek;

$$v = \pm\sqrt{C} \tag{4.11}$$

olur. Böylece iki durum söz konusu olur.

<u>*1.Durum:*</u> $v = \sqrt{C}$ olsun. Bu değer (4.7) ve (4.10)'da yerlerine yazılırsa

$$R = r^{\sqrt{C}} g \tag{4.12}$$

ve

$$r g_2 + \left(2\sqrt{c} + 1\right) g_1 + (B - Ar) g = 0 \tag{4.13}$$

elde edilir. Şimdi de , $h = h(r)$ olmak üzere,

$$g = e^{\lambda r} h, \quad (r \neq 0) \tag{4.14}$$

diyelim.

$$g_1 = \lambda e^{\lambda r} h + e^{\lambda r} h_1 \tag{4.15}$$

ve

$$g_2 = \lambda^2 e^{\lambda r} h + 2\lambda e^{\lambda r} h_1 + e^{\lambda r} h_2 \tag{4.16}$$

türevleri ve (4.14), (4.13) denkleminde yerlerine yazılırsa;

$$r h_2 + \left(2r\lambda + 2\sqrt{C} + 1\right) h_1 + \left[r(\lambda^2 - A) + \lambda(2\sqrt{C} + 1) + B\right] h = 0 \tag{4.17}$$

bulunur. λ değeri, $\lambda^2 - A = 0$ şeklinde seçilirse,

$$\lambda = \pm\sqrt{A} \tag{4.18}$$

olur. Yine iki durum geçerlidir.

<u>(1-i):</u> $\lambda = \sqrt{A}$ olsun. O halde (4.14) ve (4.17)'de yerine yazarsak,

$$g = e^{\sqrt{A}r}h \tag{4.19}$$

ve

$$rh_2 + \left(2r\sqrt{A} + 2\sqrt{C} + 1\right)h_1 + (2\sqrt{AC} + \sqrt{A} + B)h = 0 \tag{4.20}$$

şeklinde yazılır. (4.20)'deki denklemin her iki yanına (3.25)'de tanımlı olan N^{μ} operatörü uygulanırsa,

$$(rh_2)_{\mu} + \left(2r\sqrt{A}h_1\right)_{\mu} + (2\sqrt{C} + 1)h_{1+\mu} + \left(2\sqrt{AC} + \sqrt{A} + B\right)h_{\mu} = 0 \tag{4.21}$$

elde edilir. (3.25) bağıntısından,

$$(rh_2)_{\mu} = \sum_{n=0}^{1} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-n)\Gamma(n+1)}(r)_n(h_2)_{\mu-n} = rh_{2+\mu} + \mu h_{1+\mu} \tag{4.22}$$

ve

$$(rh_1)_{\mu} = \sum_{n=0}^{1} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-n)\Gamma(n+1)}(r)_n(h_1)_{\mu-n} = rh_{1+\mu} + \mu h_{\mu} \tag{4.23}$$

olur. (4.22) ve (4.23), (4.21)'de yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$rh_{2+\mu} + \left(\mu + 2r\sqrt{A} + 2\sqrt{C} + 1\right)h_{1+\mu} + \left(2\mu\sqrt{A} + 2\sqrt{AC} + \sqrt{A} + B\right)h_{\mu} = 0 \tag{4.24}$$

dir. O halde μ değeri, $2\mu\sqrt{A} + 2\sqrt{AC} + \sqrt{A} + B = 0$ dan,

$$\mu = \frac{-2\sqrt{AC} - \sqrt{A} - B}{2\sqrt{A}} \tag{4.25}$$

bulunur.

(4.24)'de her terim r^{-1} ile çarpılıp μ yerine bırakılırsa,

$$\left[h_{\left(\frac{\sqrt{A}-2\sqrt{AC}-B}{2\sqrt{A}}\right)}\right]_1 + \left[\left(\frac{-2\sqrt{AC}-\sqrt{A}-B}{2\sqrt{A}} + 2\sqrt{C}+1\right)r^{-1} + 2\sqrt{A}\right]h_{\left(\frac{\sqrt{A}-2\sqrt{AC}-B}{2\sqrt{A}}\right)} = 0 \qquad (4.26)$$

elde edilir.

$$h_{\left(\frac{\sqrt{A}-2\sqrt{AC}-B}{2\sqrt{A}}\right)} = u = u(r), \quad \left[h(r) = u_{\left(\frac{B+2\sqrt{AC}-\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}\right)}\right] \qquad (4.27)$$

olsun. Bu eşitlik (4.26)'da yerine yazılırsa

$$u_1 + \left[\left(\frac{2\sqrt{AC}+\sqrt{A}-B}{2\sqrt{A}}\right)r^{-1} + 2\sqrt{A}\right]u = 0 \qquad (4.28)$$

biçiminde birinci mertebeden homojen lineer adi diferensiyel denklem elde edilir. (4.28)'in çözümü,

$$u = \mathcal{A}e^{-\int\left[\left(\frac{2\sqrt{AC}+\sqrt{A}-B}{2\sqrt{A}}\right)r^{-1}+2\sqrt{A}\right]dr} \quad \left[u = \mathcal{A}r^{\left(\frac{B-\sqrt{A}-2\sqrt{AC}}{2\sqrt{A}}\right)}e^{-2r\sqrt{A}}\right] \qquad (4.29)$$

olarak bulunur. (4.3) için geriye dönüp işlemleri yerine bırakırsak,

$$h = \mathcal{A}\left[r^{\left(\frac{B-\sqrt{A}-2\sqrt{AC}}{2\sqrt{A}}\right)}e^{-2r\sqrt{A}}\right]_{\frac{2\sqrt{AC}-\sqrt{A}+B}{2\sqrt{A}}} \qquad (4.30)$$

ve

$$R^{(1)} = r^{\sqrt{C}}e^{r\sqrt{A}}\mathcal{A}\left[r^{\frac{B-\sqrt{A}-2\sqrt{AC}}{2\sqrt{A}}}e^{-2r\sqrt{A}}\right]_{\frac{2\sqrt{AC}-\sqrt{A}+B}{2\sqrt{A}}} \qquad (4.31)$$

çözümü elde edilir.

(1-ii): $\lambda = -\sqrt{A}$ olsun. (1-i)'deki benzer işlemler yapılarak,

$$\mu = \frac{-2\sqrt{AC} - \sqrt{A} + B}{2\sqrt{A}} \tag{4.32}$$

ve

$$h_{\left(\frac{\sqrt{A}-2\sqrt{AC}+B}{2\sqrt{A}}\right)} = u = u(r), \quad \left[h(r) = u_{\left(\frac{2\sqrt{AC}-B-\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}\right)}\right] \tag{4.33}$$

bulunur. Buradan,

$$u_1 + \left[\left(\frac{2\sqrt{AC} + \sqrt{A} + B}{2\sqrt{A}}\right) r^{-1} - 2\sqrt{A}\right] u = 0 \tag{4.34}$$

biçiminde birinci mertebeden homojen lineer adi diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü,

$$u = \mathcal{A} r^{\left(\frac{-B-\sqrt{A}-2\sqrt{AC}}{2\sqrt{A}}\right)} e^{2r\sqrt{A}} \tag{4.35}$$

biçimindedir. (4.4) için tersine işlemlerle,

$$h = \mathcal{A}\left[r^{\left(\frac{-B-\sqrt{A}-2\sqrt{AC}}{2\sqrt{A}}\right)} e^{2r\sqrt{A}}\right]_{\frac{2\sqrt{AC}-\sqrt{A}-B}{2\sqrt{A}}} \tag{4.36}$$

ve

$$R^{(2)} = r^{\sqrt{C}} e^{-r\sqrt{A}} A\left[r^{\frac{-B-\sqrt{A}-2\sqrt{AC}}{2\sqrt{A}}} e^{2r\sqrt{A}}\right]_{\frac{2\sqrt{AC}-\sqrt{A}-B}{2\sqrt{A}}} \tag{4.37}$$

şeklinde bir özel çözüm daha elde edilir.

2.Durum: $v = -\sqrt{C}$ olsun. Bu değer (4.6) ve (4.10)'da yerine yazılırsa,

$$R = r^{-\sqrt{c}} g \tag{4.38}$$

ve

$$rh_2 + \left(2\lambda r - 2\sqrt{c} + 1\right)h_1 + \left[r(\lambda^2 - A) - \lambda(2\sqrt{c} - 1) + B\right]h = 0 \tag{4.39}$$

elde edilir. Bu denkleme 1. Durumdaki gibi (4.14) dönüşümü uygulanıp ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\lambda = \pm\sqrt{A} \tag{4.40}$$

bulunur.

(2-i): $\lambda = \sqrt{A}$ olsun. (1-i)'de yapılan işlemlere benzer işlemler yapılarak,

$$\mu = \frac{2\sqrt{AC} - \sqrt{A} - B}{2\sqrt{A}} \tag{4.41}$$

ve

$$h_{\left(\frac{\sqrt{A}+2\sqrt{AC}-B}{2\sqrt{A}}\right)} = u = u(r), \quad \left[h(r) = u_{\left(\frac{-2\sqrt{AC}+B-\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}\right)}\right] \tag{4.42}$$

bulunur. Buradan,

$$u_1 + \left[\left(\frac{-2\sqrt{AC} + \sqrt{A} - B}{2\sqrt{A}}\right) r^{-1} + 2\sqrt{A}\right] u = 0 \tag{4.43}$$

biçiminde birinci mertebeden homojen lineer adi diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü,

$$u = \mathcal{A} r^{\left(\frac{B-\sqrt{A}+2\sqrt{AC}}{2\sqrt{A}}\right)} e^{-2r\sqrt{A}} \tag{4.44}$$

biçimindedir. (4.5) için tersine işlemlerle,

$$h = \mathcal{A}\left[r^{\left(\frac{B-\sqrt{A}+2\sqrt{AC}}{2\sqrt{A}}\right)} e^{-2r\sqrt{A}}\right]_{\left(\frac{-2\sqrt{AC}-\sqrt{A}+B}{2\sqrt{A}}\right)} \tag{4.45}$$

ve

$$R^{(3)} = r^{-\sqrt{C}} e^{r\sqrt{A}} \mathcal{A}\left[r^{\frac{B-\sqrt{A}+2\sqrt{AC}}{2\sqrt{A}}} e^{-2r\sqrt{A}}\right]_{\left(\frac{-2\sqrt{AC}-\sqrt{A}+B}{2\sqrt{A}}\right)} \tag{4.46}$$

şeklinde bir diğer özel çözüm elde edilir.

<u>*(2-ii):*</u> $\lambda = -\sqrt{A}$ olsun. (1-ii)'deki işlemlere benzer işlemler yapılarak,

$$\mu = \frac{2\sqrt{AC} - \sqrt{A} + B}{2\sqrt{A}} \tag{4.47}$$

ve

$$h_{\left(\frac{\sqrt{A}+2\sqrt{AC}+B}{2\sqrt{A}}\right)} = u = u(r), \quad \left[h(r) = u_{\left(\frac{-2\sqrt{AC}-B-\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}\right)}\right] \tag{4.48}$$

bulunur. Buradan,

$$u_1 + \left[\left(\frac{-2\sqrt{AC} + \sqrt{A} + B}{2\sqrt{A}}\right) r^{-1} - 2\sqrt{A}\right] u = 0 \tag{4.49}$$

biçiminde birinci mertebeden homojen lineer adi diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü,

$$u = \mathcal{A} r^{\left(\frac{-B-\sqrt{A}+2\sqrt{AC}}{2\sqrt{A}}\right)} e^{2r\sqrt{A}} \tag{4.50}$$

biçimindedir. (4.6) için tersine işlemlerle,

$$h = \mathcal{A}\left[r^{\left(\frac{-B-\sqrt{A}+2\sqrt{AC}}{2\sqrt{A}}\right)} e^{2r\sqrt{A}}\right]_{\left(\frac{-2\sqrt{AC}-\sqrt{A}-B}{2\sqrt{A}}\right)} \tag{4.51}$$

ve

$$R^{(4)} = r^{-\sqrt{C}} e^{-r\sqrt{A}} \mathcal{A}\left[r^{\frac{-B-\sqrt{A}+2\sqrt{AC}}{2\sqrt{A}}} e^{2r\sqrt{A}}\right]_{\left(\frac{-2\sqrt{AC}-\sqrt{A}-B}{2\sqrt{A}}\right)} \tag{4.52}$$

şeklinde son bir özel çözüm elde edilir.

4.2. Kratzer-Fues Potansiyeli Altında Radyal Schrödinger Denkleminin Çözümleri

Kratzer-Fues potansiyeli altında radyal Schrödinger denklemi;

$$r^2R_2 + 2rR_1 - (Ar^2 - Br + C)R = 0 \tag{4.53}$$

biçimindedir. $R = R(r)$ dalga fonksiyonu, X_e: atomlar arası denge uzaklığı ve D_e: iki atam arasındaki ayrılma enerjisi olmak üzere,

$$A = \frac{2m}{\hbar^2}(D_e - E) = -\mathcal{E}^2, \qquad B = \frac{4m}{\hbar^2}D_e x_e \tag{4.54}$$

ve

$$C = \frac{2m}{\hbar^2}\left[D_e x_e + \frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2m}\right], \qquad \mathcal{V}(x) = D_e\left(\frac{x - x_e}{x}\right)^2 \tag{4.55}$$

şeklindedir. Burada ℓ: yan kuantum sayısıdır [17].

Teorem 4.2. $R \in \{R: 0 \neq |R\_\mu| < \infty, \mu \in R\}$ olmak üzere (4.53) denkleminin

$$R^{(1)} = \mathcal{A}r^{\frac{-1+\alpha}{2}}\left[r^{\left(\frac{-\alpha\sqrt{A}-\sqrt{A}+B}{2\sqrt{A}}\right)}e^{-2r\sqrt{A}}\right]_{\left(\frac{\alpha\sqrt{A}-\sqrt{A}+B}{2\sqrt{A}}\right)}, \tag{4.56}$$

$$R^{(2)} = \mathcal{A}r^{\frac{-1+\alpha}{2}}\left[r^{\left(\frac{\alpha\sqrt{A}+\sqrt{A}-B}{-2\sqrt{A}}\right)}e^{2r\sqrt{A}}\right]_{\left(\frac{-\alpha\sqrt{A}+\sqrt{A}-B}{-2\sqrt{A}}\right)}, \tag{4.57}$$

$$R^{(3)} = \mathcal{A}r^{\frac{-1-\alpha}{2}}\left[r^{\left(\frac{\alpha\sqrt{A}-\sqrt{A}+B}{2\sqrt{A}}\right)}e^{-2r\sqrt{A}}\right]_{\left(\frac{-\alpha\sqrt{A}-\sqrt{A}+B}{2\sqrt{A}}\right)}, \tag{4.58}$$

$$R^{(4)} = \mathcal{A}r^{\frac{-1-\alpha}{2}}\left[r^{\left(\frac{-\alpha\sqrt{A}+\sqrt{A}+B}{-2\sqrt{A}}\right)}e^{2r\sqrt{A}}\right]_{\left(\frac{\alpha\sqrt{A}+\sqrt{A}+B}{-2\sqrt{A}}\right)}. \tag{4.59}$$

kesirli formda çözümleri vardır. Buradaki $\mathcal{A}$ keyfi sabit sayıdır.

İspat: $g = g(r)$ olmak üzere,

$$R = r^{v} g \qquad (4.60)$$

olsun. Böylece

$$r g_2 + 2(v+1) g_1 - [Ar - Br + (v^2 + v + C) r^{-1}] g = 0 \qquad (4.61)$$

elde edilir. $v^2 + v + C = 0$ olacak şekilde seçilsin. $\alpha = \sqrt{1 - 4C}$ alırsak, $v = \frac{-1 \pm \alpha}{2}$ yazılır. Böylece iki durum söz konusu olur.

<u>*1.Durum:*</u> $v = \frac{-1+\alpha}{2}$ olsun. Bu değer, (4.60) ve (4.61)'de yerine yazılırsa,

$$R = r^{\frac{-1+\alpha}{2}} g \qquad (4.62)$$

ve

$$r g_2 + (1+\alpha) g_1 - (Ar - B) g = 0 \qquad (4.63)$$

elde edilir. Şimdi de, $h = h(r)$ olmak üzere,

$$g = e^{\lambda r} h, \quad (r \neq 0) \qquad (4.64)$$

dönüşümü (4.63) denklemine uygulanırsa,

$$r g_2 + (2r\lambda + 1 + \alpha) g_1 + [r\lambda^2 + \lambda(1+\alpha) - Ar + B] g = 0 \qquad (4.65)$$

olur. λ değeri, $r(\lambda^2 - A) = 0$ şeklinde seçilirse

$$\lambda = \pm\sqrt{A} \qquad (4.66)$$

bulunur. Yine iki durum söz konusu olur.

<u>(1-i)</u>: $\lambda = \sqrt{A}$ olsun. Böylece,

$$rg_2 + \left(1 + \alpha + 2r\sqrt{A}\right)g_1 + \left[B + (1 + \alpha)\sqrt{A}\right]g = 0 \tag{4.67}$$

yazılır. (4.67)'nin her iki tarafına (3.25)'de tanımlı olan N^{μ} operatörü uygulanırsa,

$$rg_{2+\mu} + \left(\mu + 1 + \alpha + 2r\sqrt{A}\right)g_{1+\mu} + \left[B + (2\mu + 1 + \alpha)\sqrt{A}\right]g_{\mu} = 0 \tag{4.68}$$

elde edilir. O halde μ değeri $B + (2\mu + 1 + \alpha)\sqrt{A} = 0$ dan,

$$\mu = \frac{-B - (1 + \alpha)\sqrt{A}}{2\sqrt{A}} \tag{4.69}$$

bulunur. (4.68)'de her terim r^{-1} ile çarpılır ve μ nün değeri yerine yazılırsa,

$$\left[g_{\left(\frac{2\sqrt{A} - B - (1+\alpha)\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}\right)}\right]_1 + \left(\frac{\alpha\sqrt{A} + \sqrt{A} - B}{2\sqrt{A}} + 2r\sqrt{A}\right)r^{-1}g_{\left(\frac{2\sqrt{A} - B - (1+\alpha)\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}\right)} = 0 \tag{4.70}$$

elde edilir.

$$g_{1+\mu} = u \tag{4.71}$$

olarak alırsak

$$g_{\left(\frac{2\sqrt{A} - B - (1+\alpha)\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}\right)} = u = u(r), \quad \left[g(r) = u_{\frac{\sqrt{A} - B - \alpha\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}}\right] \tag{4.72}$$

olsun. Bu eşitlik (4.70)'de yerine yazılırsa,

$$u_1 + \left[2\sqrt{A} + \left(\frac{\alpha\sqrt{A} + \sqrt{A} - B}{2\sqrt{A}}\right)r^{-1}\right]u = 0 \tag{4.73}$$

biçiminde birinci mertebeden homojen lineer adi diferansiyel denklem elde edilir.

Bu denklemin çözümü,

$$u = \mathcal{A} r^{\left(\frac{-\alpha\sqrt{A}-\sqrt{A}+B}{2\sqrt{A}}\right)} e^{-2r\sqrt{A}} \tag{4.74}$$

biçimindedir. Benzer işlemlerle (4.56) denklemi,

$$g = \mathcal{A}\left[r^{\left(\frac{-\alpha\sqrt{A}-\sqrt{A}+B}{2\sqrt{A}}\right)} e^{-2r\sqrt{A}}\right]_{\left(\frac{\alpha\sqrt{A}-\sqrt{A}+B}{2\sqrt{A}}\right)} \tag{4.75}$$

ve

$$R^{(1)} = r^{\frac{-1+\alpha}{2}} \mathcal{A}\left[r^{\left(\frac{-\alpha\sqrt{A}-\sqrt{A}+B}{2\sqrt{A}}\right)} e^{-2r\sqrt{A}}\right]_{\left(\frac{\alpha\sqrt{A}-\sqrt{A}+B}{2\sqrt{A}}\right)} \tag{4.76}$$

olarak bulunur.

<u>(1-ii):</u> $\lambda = -\sqrt{A}$ olsun. (1-i)'deki benzer işlemlerle,

$$\left.\begin{array}{c} \mu = \dfrac{B+(1+\alpha)\sqrt{A}}{-2\sqrt{A}}, \\ \left[g_{\left(\frac{-2\sqrt{A}+B+(1+\alpha)\sqrt{A}}{-2\sqrt{A}}\right)}\right]_1 + \left(\dfrac{-(1+\alpha)\sqrt{A}\ +B}{-2\sqrt{A}} - 2\sqrt{A}\,r\right) r^{-1} g_{\left(\frac{-2\sqrt{A}+B+(1+\alpha)\sqrt{A}}{-2\sqrt{A}}\right)} = 0 \\ u_1 + \left[-2\sqrt{A}\ + \left(\dfrac{-(1+\alpha)\sqrt{A}\ +B}{-2\sqrt{A}}\right) r^{-1}\right] u = 0 \end{array}\right\} \tag{4.77}$$

ve

$$u = \mathcal{A} r^{\left(\frac{(1+\alpha)\sqrt{A}-B}{-2\sqrt{A}}\right)} e^{2r\sqrt{A}} \tag{4.78}$$

elde edilir.

Benzer işlemlerle (4.57) denklemi,

$$g = \mathcal{A}\left[r^{\left(\frac{(1+\alpha)\sqrt{A}-B}{-2\sqrt{A}}\right)}e^{2r\sqrt{A}}\right]_{\left(\frac{(-\alpha+1)\sqrt{A}-B}{-2\sqrt{A}}\right)} \tag{4.79}$$

ve

$$R^{(2)} = r^{\frac{-1+\alpha}{2}}\mathcal{A}\left[r^{\left(\frac{\alpha\sqrt{A}+\sqrt{A}-B}{-2\sqrt{A}}\right)}e^{2r\sqrt{A}}\right]_{\left(\frac{-\alpha\sqrt{A}+\sqrt{A}-B}{-2\sqrt{A}}\right)} \tag{4.80}$$

olarak bulunur.

<u>2.Durum</u>: $v = \frac{-1-\alpha}{2}$ olsun. Benzer adımlarla,

$$rg_2 + (2r\lambda + 1 - \alpha)g_1 + [r\lambda^2 + \lambda(1-\alpha) - Ar + B]g = 0 \tag{4.81}$$

olup, buradan $\lambda = \pm\sqrt{A}$ elde edilir.

<u>(2-i):</u> $\lambda = \sqrt{A}$ olsun.

$$rg_2 + \left(2r\sqrt{A} + 1 - \alpha\right)g_1 + \left[\sqrt{A}(1-\alpha) + B\right]g = 0 \tag{4.82}$$

şeklinde olur. (4.82)'nin her iki tarafına (3.25)'de tanımlı olan N^{μ} operatörü uygulanırsa,

$$rg_{2+\mu} + \left(\mu + 1 - \alpha + 2r\sqrt{A}\right)g_{1+\mu} + \left[B + (2\mu + 1 - \alpha)\sqrt{A}\right]g_{\mu} = 0 \tag{4.83}$$

elde edilir. $B + (2\mu + 1 - \alpha)\sqrt{A} = 0$ olacak şekilde seçilirse,

$$\mu = \frac{-B - (1-\alpha)\sqrt{A}}{2\sqrt{A}} \tag{4.84}$$

bulunur.

(4.83)’de her terim r^{-1} ile çarpılır ve μ nün değeri yerine yazılırsa,

$$\left[g_{\left(\frac{2\sqrt{A}-B-(1-\alpha)\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}\right)}\right]_1+\left(\frac{-\alpha\sqrt{A}+\sqrt{A}-B}{2\sqrt{A}}+2r\sqrt{A}\right)r^{-1}g_{\left(\frac{2\sqrt{A}-B-(1-\alpha)\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}\right)}=0 \qquad (4.85)$$

olur. $g_{1+\mu}=u$ olarak kabul edilirse,

$$g_{\left(\frac{2\sqrt{A}-B-(1-\alpha)\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}\right)}=u=u(r), \quad \left[g(r)=u_{\frac{\sqrt{A}-B+\alpha\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}}\right] \qquad (4.86)$$

olur. Bu eşitlik (4.85)’de yerine yazılırsa,

$$u_1+\left[2\sqrt{A}+\left(\frac{-\alpha\sqrt{A}+\sqrt{A}-B}{2\sqrt{A}}\right)r^{-1}\right]u=0 \qquad (4.87)$$

biçiminde birinci mertebeden homojen lineer adi diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü,

$$u=\mathcal{A}r^{\left(\frac{\alpha\sqrt{A}-\sqrt{A}+B}{2\sqrt{A}}\right)}e^{-2r\sqrt{A}} \qquad (4.88)$$

biçimindedir. Benzer işlemlerle (4.58) denklemi,

$$g=\mathcal{A}\left[r^{\left(\frac{\alpha\sqrt{A}-\sqrt{A}+B}{2\sqrt{A}}\right)}e^{-2r\sqrt{A}}\right]_{\left(\frac{-\alpha\sqrt{A}-\sqrt{A}+B}{2\sqrt{A}}\right)} \qquad (4.89)$$

ve

$$R^{(3)}=r^{\frac{-1-\alpha}{2}}\mathcal{A}\left[r^{\left(\frac{\alpha\sqrt{A}-\sqrt{A}+B}{2\sqrt{A}}\right)}e^{-2r\sqrt{A}}\right]_{\left(\frac{-\alpha\sqrt{A}-\sqrt{A}+B}{2\sqrt{A}}\right)} \qquad (4.90)$$

şeklinde bulunur.

(2-ii): $\lambda = -\sqrt{A}$ olsun. Benzer işlemlerle,

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \frac{-B+(1-\alpha)\sqrt{A}}{-2\sqrt{A}}, \\ \left[g_{\left(\frac{-2\sqrt{A}-B+(1-\alpha)\sqrt{A}}{-2\sqrt{A}}\right)}\right]_1 &+ \left(\frac{\alpha\sqrt{A}-\sqrt{A}-B}{-2\sqrt{A}} - 2\sqrt{A}r\right) r^{-1} g_{\left(\frac{-2\sqrt{A}-B+(1-\alpha)\sqrt{A}}{-2\sqrt{A}}\right)} = 0 \\ u_1 &+ \left[-2\sqrt{A} + \left(\frac{\alpha\sqrt{A}-\sqrt{A}-B}{-2\sqrt{A}}\right) r^{-1}\right] u = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.91}$$

ve

$$u = \mathcal{A} r^{\left(\frac{-\alpha\sqrt{A}+\sqrt{A}+B}{-2\sqrt{A}}\right)} e^{2r\sqrt{A}} \tag{4.92}$$

biçimindedir. Benzer işlemlerle (4.59) denklemi,

$$g = \mathcal{A}\left[r^{\left(\frac{-\alpha\sqrt{A}+\sqrt{A}+B}{-2\sqrt{A}}\right)} e^{2r\sqrt{A}}\right]_{\left(\frac{\alpha\sqrt{A}+\sqrt{A}+B}{-2\sqrt{A}}\right)} \tag{4.93}$$

ve

$$R^{(4)} = r^{\frac{-1-\alpha}{2}} \mathcal{A}\left[r^{\left(\frac{-\alpha\sqrt{A}+\sqrt{A}+B}{-2\sqrt{A}}\right)} e^{2r\sqrt{A}}\right]_{\left(\frac{\alpha\sqrt{A}+\sqrt{A}+B}{-2\sqrt{A}}\right)} \tag{4.94}$$

olarak elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde, tez çalışmasının genel bir değerlendirmesi yapılarak, çalışmanın katkıları ve ilerki çalışmalar için birtakım öneriler verilmiştir.

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada, klasik analizdeki türev ve integral tanımlarından çok farklı ve yeni olan kesirli türev ve integral tanımları açıklayıcı örneklerle birlikte verilmiştir. Kesirli hesap kavramı içerisinde yer alan ve genelleştirilmiş Leibniz kuralı olarak bilinen N-kesirli hesap yöntemi belirtilmiş ve bu yöntemi uygulayabileceğimiz iki problem türü bir önceki bölümde ele alınmıştır.

Fiziksel problem olan radyal Schrödinger problemleri, yöntemimizin uygulanabileceği türden singüler katsayılı problemlerdir. İki farklı potansiyel altında ele aldığımız bu problemleri, kesirli diferansiyel denklemlere dönüştürüp, yönteme uygun hale getirip, kesirli formlardaki çözümler elde ettik.

5.2. Öneriler

Bu tezde, ele aldığımız problemler ve benzer problemler için yeni bir yöntemin varlığı ve başarılı sonuçları gösterilmiştir. Kesirli formlardaki çözümler uygun kesirli hesap tanımları yardımıyla hesaplandığında analitik çözümler elde edilecektir.

Çalışmamız, uygun singüler diferansiyel denklemlere yeni bir çözüm yöntemi kullanarak uygulamalı matematik çalışmalarına ve fiziksel problemlerin çözülmesinden dolayı da fizik çalışmalarına olumlu katkılar sağlayacaktır. Bu yöntem, benzer denklemlere de uygulanabileceği gibi benzer yöntemler de geliştirilebilir. Daha yüksek mertebeli singüler diferansiyel denklemlerin çözümünde de bu yöntemin kullanılabilirliği test edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Oldham KB, Spainer J, 1974. The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order. Academic Press. New York.

[2] Podlubny I, 1999. Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications, Vol. 198. Academic Press. New York, London, Tokyo and Toronto.

[3] Weilbeer M, 2005. Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and their Analytical Background, PhD Thesis, Von der Carl-Friedrich-GaubFakultät für Mathematik und Informatik der Technischen Universität Braunschweig, Germany.

[4] Das S, 2011. Functional Fractional Calculus. Springer. India.

[5] Konuralp A, 2012. Kaotik Davranışa Sahip Kesirli Diferansiyel Denklem Sistemleri ve Nümerik Çözümü. Doktora Tezi, Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Manisa.

[6] Enkür E, 2015. Kesirli Türevlere Sahip Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.

[7] Lin S-D, Tu S-T, Srivastava HM, 2002. Certain classes of ordinary and partial differential equations solvable by means of fractional calculus. Appl. Math. Comput., 131 (2-3): 223-233.

[8] Watson DP, 2004. Fractional Calculus and Its Applications. http://www.umw.edu/cas/math/students/documents/damian1.pdf (Erişim tarihi: 08.06.2017).

[9] Özen S, Öztürk İ, 2004. Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirsel türevleri üzerine. Erciyes Üniv. Fen Bil. Enst. Derg., 20 (1-2): 66-76.

[10] Lüleci A, 2011. Kesirli Basamaktan Bazı Diferensiyel Denklem Modelleri. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

[11] Yılmazer R, Öztürk Ö, 2012. N-fractional calculus operator N^{μ} method applied to a Gegenbauer differential equation. Çankaya Univ. J. Sci. Eng., 9 (1): 37-48.

[12] Kömekçi C, 2015. Kesirli Basamaktan Diferensiyel Denklemlerin Laplace ve Mellin Dönüşümleri ile Çözümleri. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

[13] Bayin S, 2006. Mathematical Methods in Science and Engineering. Wiley Interscience. New Jersey.

[14] Güngör F, 1995. Diferansiyel Denklemler. Beta Basım Yayım Dağıtım A.Ş. İstanbul.

[15] Miller KS, Ross B, 1993. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equation. Wiley Interscience. New York.

[16] Öztürk Ö, 2015. Radyal Schrödinger Denkleminin Kesirli Diferintegral Yardımıyla Açık Çözümleri. Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.

[17] Akcay H, Sever R, Analytical solutions of Schrödinger equation for the diatomic molecular potentials with any angular momentum. J. Math. Chem., 50 (7): 1973-1987.

ÖZGEÇMİŞ

Canan Meriç 1992'te Bitlis'de doğdu. İlk ve ortaokulu Akıncı Türk İhsan Dikmen İlköğretim Okulunda, liseyi Yıldırım Beyazıt Lisesinde okudu. 2010'da Bitlis Eren Üniversitesi Matematik bölümünde başladığı lisans öğrenimini 2014 yılında tamamladı. Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde tezli yüksek lisans öğrenimine 2015 yılında başladı. Özel bir kurumda Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır.

Canan MERİÇ