T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ ve MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇİFT DİZİLER İÇİN M_λ-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Şerife GÜNAL

EYLÜL 2019

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇİFT DİZİLER İÇİN M_λ-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Hazırlayan
Şerife GÜNAL

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Nazlım Deniz ARAL

Jüri Üyeleri
Doç. Dr. Muhammed ÇINAR
Doç. Dr. Murat KARAKAŞ
Dr. Öğr. Üyesi Nazlım Deniz ARAL

EYLÜL 2019

ONAY

Şerife GÜNAL tarafından hazırlanan "**Çift Diziler İçin M_λ İstatistiksel Yakınsaklık**" adlı tez çalışması 27/09/2019 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Doç. Dr. Muhammed ÇINAR	
(Başkan)	
Dr. Öğr. Üyesi Nazlım Deniz ARAL	N. Deniz Aral
(Danışman)	
Doç. Dr. Murat KARAKAŞ	
(Üye)	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 16./12./2019 gün ve 62/02 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fatih Ahmet ÇELİK
Enstitü Müdür V.

BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI

ETİK BEYANI

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre hazırlamış olduğum **"Çift Diziler için M_λ-İstatistiksel Yakınsaklık"** adlı tezimin özgün bir çalışma olduğunu, tez hazırlanırken tüm aşamalarda bilimsel etik ilkelerine uygun davrandığımı, tez kapsamında sunulan tüm verileri bilimsel etik ilkelerine uygun elde ettiğimi, tezde faydalandığım tüm eserlere atıf yaptığımı ve kaynaklar kısmında bu eserleri gösterdiğimi beyan ederim. 23/10/2019

Şerife GÜNAL

ÖZET

ÇİFT DİZİLER İÇİN M_λ-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Şerife GÜNAL

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nazlım Deniz ARAL
Eylül 2019, 29 sayfa

Bu tez çalışmasında, P. N. Natarajan tarafından tanımlanan çift diziler için (M, λ_{mn}) toplanabilme metodu kullanılarak çift diziler için yeni bir istatistiksel yakınsaklık tanımı verilmiştir. Ayrıca, çift diziler için yeni tanımlanan $M_{\lambda_{mn}}$-istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasında bazı içerme bağıntıları elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: İstatistiksel Yakınsaklık, Çift Diziler, Sonsuz Matris, Toplanabilme.

ABSTRACT

$\boldsymbol{M_{\lambda}}$-STATISTICAL CONVERGENCE OF DOUBLE SEQUENCES

Şerife GÜNAL

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Nazlım Deniz ARAL
September 2019, 29 pages

In this thesis, we introduce a new type of statistical convergence method for double sequences by using (M, λ_{mn})-method of summability which is defined by P. N. Natarajan. We also obtain some inclusion reltions between $M_{\lambda_{mn}}$-statistical convergence and statistical convergence for double sequences.

Keywords: Statistical Convergence, Double Sequence, Infinity Matrix, Summability.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması sırasında, tez konusunun belirlenmesinden başlayarak son aşamaya kadar her konuda yardımlarını benden esirgemeyen tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Nazlım Deniz ARAL'a teşekkürlerimi borç bilirim. Ayrıca, bana her zaman destek olan Doç. Dr. Şükran KONCA'ya teşekkürlerimi sunarım.

Bu günlere gelmemde büyük emekleri olan annem Binnaz, amcam Hakan'a, yoğun çalışma temposunda benden maddi ve manevi desteğini esirgemeyen kardeşim Merve'ye, varlıkları ile birer motivasyon kaynağı olan ablam Tuğba ve kardeşim Hilal'e sonsuz teşekkür ve minnettarlığımı sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
χ_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$x=(x_k)$	Reel sayıların bir dizisi
$\delta_2(A)$	A kümesinin çift doğal yoğunluğu
C_1	Cesaro operatörü
$st-\lim x$	$x=(x_k)$ dizisinin istatistiksel limiti
P-lim	Pringsheim limit
$x=(x_{jk})$	Reel sayıların bir çift dizisi
ω	Tüm diziler uzayı
$(M,\lambda_{m,n})$	Natarajan toplanabilme metodu

1.GİRİŞ

Toplanabilme Teorisi ve Fonksiyonel Analizde önemli bir yer tutan yakınsaklık kavramının bir genelleşmesi olan istatistiksel yakınsaklık fikri 1935 yılında Zygmund [1] tarafından hemen hemen yakınsaklık adı altında verilmişti. Daha sonra 1951 yılında Steinhaus [2] ve Fast [3] tarafından tanımı yapılan istatistiksel yakınsaklık kavramı birçok önemli yazarın katkılarıyla aktif bir araştırma alanı haline gelmiştir. İstatistiksel yakınsaklık kavramı matematiğin çeşitli alanlarında uygulamalara sahiptir örneğin, Ölçüm teorisi (Miller [4]), toplanabilme teorisi (Freedman vd.[5], Connor [6], Et [7-9]), Sayılar Teorisi (Erdös[10]), Trigonometrik seriler (Zygmund [1]) gibi. Aynı zamanda yaklaşım teorisinde de uygulamalara sahiptir [11-12].

Çift diziler üzerinde ilk çalışma Bromwich [13] tarafından yapılmıştır. Daha sonra Hardy [14], Moricz [15], Moricz ve Rhoades [16], Tripathy [17,18] tarafından ve diğer pek çok matematikçi tarafından çalışıldı. Pringsheim 1900 yılında çift diziler için yakınsaklık kavramını vermiştir ve P-lim olarak göstermiştir [19]. Bu yakınsaklık satır ve sütunların yakınsak olup olmadığına bakılmaksızın tanımlanmıştır. Daha sonra Hardy [14] çift diziler için yakınsaklığı daha detaylı inceleyerek P-limit in yanında satır ve sütunların yakınsaklığını da eklediği regüler yakınsaklığı tanımladı. İstatistiksel yakınsaklığın çift dizilere genelleşmesi ilk defa Mursaleen ve Edely [20] tarafından elde edilmiştir. Çift diziler, alışılmış dizilerde elde edilen pek çok kavrama taşınmıştır. Patterson ve Savaş tarafından Lacunary istatistiksel yakınsaklık elde edilmiştir [21]. Türkmenoğu çift dizi uzaylarını tanımlamıştır [22]. Savaş ve Mursaleen [23] tarafından Fuzzy sayılarına, Das vd. [24] tarafından I ve I^* yakınsaklığa taşınmıştır.

P. N. Natarajan [25], çift diziler için $\left(M, \lambda_{m,n}\right)$ toplanabilme metodunu tanımlamış ve bazı özelliklerini çalışmıştır. Bu çalışmasında $\left(M, \lambda_{m,n}\right)$ toplanabilme metodunun regüler olması için gerek ve yeter koşul verilmiş ve herhangi iki Natarajan metodunun tutarlı olduğunu göstermiştir. Aynı zamanda farklı λ'lar için içerme ve denklik bağıntılarını elde etmiştir.

Bu tez çalışmasında çift diziler için istatistiksel yakınsaklığın bir genelleşmesi olarak P. N. Natarajan'ın çalışması kullanılarak yeni bir yakınsaklık tanımı verilecektir. Ayrıca farklı λ'lar için içerme bağıntıları elde edilecek ve istatistiksel yakınsaklık ile $M_{\lambda_{m,n}}$-istatistiksel yakınsaklık arasındaki bağıntılar verilecektir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli olan alışılmış ve çift diziler ile ilgili temel kavramlar hatırlatılacak, temel teoremler ve tanımlar verilecektir.

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. Tanım kümesi pozitif tamsayılar kümesi olan her fonksiyona dizi denir [26].

Tanım 2.1.2. Bir (x_n) reel sayı dizisi alalım. Eğer verilen her $\varepsilon > o$ için bir n_0 doğal sayısı bulunabiliyor ve $n > n_0$ için

$$|x_n - L| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman L sayısına (x_n) dizisinin limiti denir [26].

Tanım 2.1.3. Bir $x = (x_n)$ dizisi alalım. $\sup_n |x_n| < \infty$ ise (x_n) dizisine sınırlı dizi denir [26].

Tanım 2.1.4. A doğal sayılar kümesinin alt kümesi olmak üzere A kümesinin karakteristik fonksiyonu χ_A ile gösterilir ve,

$$\chi_A(j) = \begin{cases} 1, & j \in A \\ 0, & j \in (\mathbb{N}/A) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanımların benzeri çift diziler için aşağıdaki şekilde verilir.

Tanım 2.1.5. Tanım kümesi $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olan fonksiyonlara çift dizi denir. $x = (x_{m,n})$ şeklinde gösterilir [27].

Örnek verilirse, her m, n için $x_{m,n} = mn$ ile tanımlı çift dizisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 2 & 4 & 6 & \cdots \\ 3 & 6 & 9 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklinde bir gösterime sahiptir.

Çift dizilerde birden fazla yakınsaklık tanımlanabilir. Biz bu çalışmada aşağıda tanımı verilen Pringsheim anlamında yakınsaklığı kullanacağız.

Tanım 2.1.6. Bir $x = (x_{m,n})$ çift dizisi alalım. Eğer verilen her $\varepsilon > o$ için bir n_0 sayısı bulunabiliyor ve $m, n > n_0$ için

$$\left|x_{m,n} - L\right| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $(x_{m,n})$ dizisi L sayısına Pringsheim anlamında yakınsaktır (P-yakınsak) denir. $P\text{-}\lim_{m,n} x = L$ ile gösterilir [19].

Bu çalışma boyunca $P - \lim_{m,n} x = L$ yerine $\lim_{m,n} x = L$ kullanılacaktır.

Tanım 2.1.7. Bir $x = (x_{m,n})$ çift dizisi alalım. $\sup_{m,n}\left|x_{m,n}\right| < \infty$ ise x dizisine sınırlı dizi denir [16].

Tüm sınırlı çift dizilerin kümesini ℓ_∞^2 ile göstereceğiz.

Tanım 2.1.8. $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olmak üzere A kümesinin karakteristik fonksiyonu χ_A ile gösterilir ve,

$$\chi_A(j,k) = \begin{cases} 1, & (j,k) \in A \\ 0, & (j,k) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash A) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Yakınsak olan alışılmış dizi için elde edilen sonuçların hepsi Pringsheim anlamında yakınsak olan çift dizilerde geçerli olmayabilir. Örneğin, yakınsak olan alışılmış bir dizi sınırlıdır fakat Pringsheim anlamında yakınsak olan bir çift dizi sınırlı olmayabilir. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyelim.

$$x_{m,n} := \begin{cases} n, & m = 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

tanımlanırsa $x = (x_{m,n})$ çift dizisi sıfıra Pringsheim anlamında yakınsak olduğu halde sınırlı değildir.

Teorem 2.1.1. Eğer $x = (x_{m,n})$ çift dizisi Pringsheim anlamında yakınsak ise limiti tektir [19].

İspat: L ve L' sayıları bu çift dizinin iki farklı limitleri olsun. Böylece verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için $\forall m, n \geq n_1$ olduğunda

$$\left|x_{m,n} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Benzer şekilde, $\forall m, n \geq n_2$ için,

$$\left|x_{m,n} - L'\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $n_2 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $\max\{n_1, n_2\} = n_0$ olsun. Böylece $\forall m, n \geq n_0$ için,

$$0 \leq |L - L'| = \left|L - x_{m,n} + x_{m,n} - L'\right| \leq \left|x_{m,n} - L\right| + \left|x_{m,n} - L'\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. Bu ise $L = L'$ olmasını verir.

Pringsheim anlamında bir L noktasına yakınsak olan bir $x = (x_{m,n})$ dizisi için aynı zamanda $\lim_m x_{m,n} (m \in \mathbb{N})$ ve $\lim_n x_{m,n} (n \in \mathbb{N})$ limitleri de var ise $x = (x_{m,n})$ dizisine Regüler yakınsaktır denir. Yani, regüler yakınsak bir $x = (x_{m,n})$ dizisi için $\lim_m \lim_n x_{m,n}$ ve $\lim_n \lim_m x_{m,n}$ limitleri vardır ve bu limitler Pringsheim limitine eşittir.

Örnek 2.1.1. $x = \left(x_{m,n}\right) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ dizisi verilsin. Bu dizinin Pringsheim anlamında 0 noktasına yakınsak olduğu görülür. Bununla beraber her $n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{m\to\infty} x_{m,n} = \frac{1}{n}$ ve $m \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} x_{m,n} = \frac{1}{m}$ olduğundan,

$$\lim_m \lim_n x_{m,n} = \lim_n \lim_m x_{m,n} = 0$$

bulunur. O halde, $x = \left(x_{m,n}\right)$ dizisinin 0 noktasına regüler yakınsak olduğu elde edilir. Böylece bu dizi sınırlı bir dizidir.

Tanım 2.1.9. $x = \left(x_{m,n}\right)$ bir çift dizi olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için, bir n_0 doğal sayısı bulunabiliyor ve $m, n, p, q > n_0$ için

$$\left|x_{m,n} - x_{p,q}\right| < \varepsilon$$

sağlanıyorsa $x = \left(x_{m,n}\right)$ dizisine Pringsheim anlamında Cauchy dizisi denir [19].

Teorem 2.1.2. $x = \left(x_{m,n}\right)$ çift dizisi verilsin. $x = \left(x_{m,n}\right)$ dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul bu dizinin Cauchy dizisi olmasıdır [28].

Şimdi toplanabilme kavramını hatırlayalım.

Tanım 2.1.10. X ve Y tüm kompleks terimli diziler uzayı ω'nın iki alt kümesi, $x = (x_n) \in X$ ve $A = (a_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ bir matris olsun. Eğer, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$y_n = (Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serisi yakınsak ve $y = (y_n) \in Y$ ise A'ya X'ten Y'ye bir matris dönüşümü denir.
(y_n) dizisi yakınsak ve limiti $L \in \mathbb{C}$ ise (x_n) dizisine L değerine A-toplanabilir denir ve $A - \lim_{n\to\infty} x_n = L$ ile gösterilir [29].

Tanım 2.1.11. $(a_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ bir matris ve $x = (x_n)$ dizisi verilsin. Eğer, $\lim_{n} x_n = L$ olduğunda $\lim_{n}(Ax)_n = L$ ise $A = (a_{nk})$ matrisine regüler matris denir [30].

Bu tanımların benzeri çift diziler için aşağıdaki şekilde verilir. Bunun için önce çift seri tanımını verelim.

Tanım 2.1.12. $(x_{m,n})$ bir çift dizi olmak üzere $\sum_{m,n} x_{m,n}$ toplamına bir çift seri denir.
Bu serinin kısmi toplamlar dizisi olan $\left\{\left(\sum_{m=1,n=1}^{s,t} x_{m,n}\right)_{s,t}\right\}$ P-yakınsak ise yani P-$\lim_{s,t} \sum_{m=1,n=1}^{s,t} x_{m,n}$ limiti varsa seri bu limit değerine Pringsheim anlamında yakınsaktır (P-yakınsak) denir [13].

Teorem 2.1.3. Eğer $\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} x_{m,n}$ çift serisi yakınsak ise

$$\lim_{m,n\to\infty} x_{m,n} = 0$$

dır. Fakat tersi doğru değildir [31].

Tanım 2.1.13. Eğer $\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} |x_{m,n}|$ serisi yakınsak ise $\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} x_{m,n}$ çift serisi mutlak yakınsaktır denir.
Eğer $\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} x_{m,n}$ serisi mutlak yakınsak ise $\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} x_{m,n}$ serisi yakınsaktır. Fakat tersi doğru değildir [32].

Tanım 2.1.14. $x = (x_{m,n})$ bir çift dizi ve $A = \left(a_{mn}^{jk}\right)_{m,n=1}^{\infty}$ dört boyutlu bir matris olsun. Eğer, $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için

$$(Ax)_{jk} := \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}^{jk} x_{m,n}$$

çift serisi P-yakınsak ise

$$Ax := \left(\sum_{m,n} x_{mn} a_{mn}^{jk} \right)_{j,k}$$

dizisine x dizisinin A-dönüşüm dizisi denir [31].

Ax çift dizisi bir L sayısına P-yakınsak ise x dizisi L sayısına A-toplanabilirdir ve $A(x) = L$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.15. $\lim_{m,n\to\infty} x_{m,n} = s$ olduğunda $\lim_{m,n\to\infty} (Ax)_{m,n} = s$ ise dört boyutlu sonsuz $A = (a_{m,n,k,l})$ matrisi regülerdir denir [31].

Teorem 2.1.4. Bir $\left(a_{nm}^{jk}\right)$ matrisinin sınırlı regüler olması için gerek ve yeter koşul,

i)P-$\lim_{j,k} a_{mn}^{jk} = 0$, her n, m

ii) P-$\lim_{j,k} \sum_{m,n} a_{mn}^{jk} = 1$

iii) P-$\lim_{j,k} \sum_{m} \left|a_{mn}^{jk}\right| = 0$, her n

iv) P-$\lim_{j,k} \sum_{n} \left|a_{mn}^{jk}\right| = 0$, her m

v) Her m, n için $\sum_{m,n=1} \left|a_{mn}^{jk}\right| < M$ olacak biçimde M sayısının mevcut olmasıdır [32].

Bilindiği gibi istatistiksel yakınsaklık kavramı doğal yoğunluğu sıfır olan kümelerle ilgili olduğundan şimdi yoğunluk kavramı verilecektir.

Tanım 2.1.16. $K \subset \mathbb{N}$ için $K(n)$, $K \cap \{1,2,\ldots,n\}$ kümesinin eleman sayısını göstersin. Bu takdirde $\underline{\Delta}: \mathrm{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$

$$\underline{\Delta}(K) = \liminf_{n\to\infty} \frac{K(n)}{n} \tag{2.1}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona alt asimptotik yoğunluk fonksiyonu denir. Buna bağlı olarak bir K kümesinin üst asimptotik yoğunluğu

$$\overline{\Delta}(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{K(n)}{n}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $\underline{\Delta}(K) = \overline{\Delta}(K)$ ise K'ya asimptotik yoğunluğa sahiptir denir ve K'nın asimptotik yoğunluğu $\Delta(K)$ ile gösterilir. Bu durumda

$$\Delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{K(n)}{n} \tag{2.2}$$

eşitliği sağlanır [33].

Şimdi yakınsaklığın bir genelleşmesi olan istatistiksel yakınsaklık tanımını verelim.

Tanım 2.1.17. $(x_n) \subset \mathbb{C}$ ve $L \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $\forall\varepsilon > 0$ için,

$$\Delta(\{k\epsilon\mathbb{N}: |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ya da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \leq n|: |x_k - L| \geq \varepsilon\}|}{n} = 0$$

ise (x_n) dizisi L'ye istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim_{n\to\infty} x_n = L$ ya da $x_n \xrightarrow{st} L$ ile gösterilir [3].

Teorem 2.1.5. $x = (x_n) \subset \mathbb{C}$ ve $L \in \mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde $x_n \xrightarrow{st} L$ olması için gerek ve yeter koşul $x = y + z$ olacak biçimde $y = (y_n)$ ve $z = (z_n)$ dizilerinin bulunmasıdır öyle ki $\lim_{n\to\infty} y_n = L$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \leq n|: z_k \neq 0\}|}{n} = 0$$

sağlanır [6].

Sonuç 2.1.1. Bir dizi bir noktaya yakınsak ise aynı noktaya istatistiksel yakınsaktır [6].
Sonuç 2.1.1'in tersi doğru değildir. Bunu bir örnekle açıklayalım:

Örnek 2.1.2.

$$x_n = \begin{cases} n, & n \in P \\ 0, & n \notin P \end{cases}$$

dizisini ele alalım. Burada P asal sayılar kümesini göstermektedir. Bu dizi sınırlı olmadığı için klasik anlamda yakınsak değildir. Fakat 0'a istatistiksel yakınsaktır. Bunu göstermek için $\varepsilon > 0$ verildiğinde

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\{k\le n: |x_k-0|\ge\varepsilon\}|}{n}$$

limitinin 0 olduğunu göstermeliyiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\{k\le n: |x_k|\ge\varepsilon\}|}{n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{|\{k\le n: k\in P\}|}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)\ln n}{n}.\frac{1}{\ln n}=1.0=0.$$

Buradaki $\pi(n)=|\{k\le n: k\in P\}|$ fonksiyonuna asal sayı fonksiyonu denir. 1 den n ye kadar tüm asal sayıların sayısı $\pi(n)$ ile gösterilir. Bilindiği gibi asal sayı teoremi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)\ln n}{n}=1$$

olduğunu ifade eder. Görüldüğü gibi sınırlı olmayan bir dizi istatistiksel yakınsak olabilir. Bu durum klasik yakınsaklıkta geçerli değildir. Bu örnek ayrıca, asal sayılar kümesinin asimptotik yoğunluğunun 0 olduğunu da gösterir.

Teorem 2.1.6. Bir dizi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir [34].

Teorem 2.1.7. $(x_n),(y_n)\subset\mathbb{C}$ ve $L_1,L_2,\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde $x_n\overset{st}{\to}L_1$ ve $y_n\overset{st}{\to}L_2$ ise $\alpha x_n+\beta y_n\overset{st}{\to}\alpha L_1+\beta L_2$ sağlanır. Başka bir deyişle, istatistiksel yakınsaklık, lineer bir fonksiyoneldir [35].

Çift diziler için istatistiksel yakınsaklık kavramı Murselen ve Edely [20] tarafından verilmiştir. Önce çift diziler için yoğunluk kavramını verelim.

Tanım 2.1.18. $K\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ olmak üzere $\{(i,j):(i,j)\in K, i\le m, j\le n\}$ kümesinin eleman sayısı $K(m,n)$ ile gösterilsin. Bir $K\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinin alt asimptotik yoğunluğu

$$\underline{\delta_2}(K)=\lim_{m,n}inf\frac{K(m,n)}{nm}$$

olarak tanımlanır. $\left(\frac{K(m,n)}{nm}\right)$ dizisinin Pringsheim anlamında limiti varsa K kümesi çift doğal yoğunluğa sahiptir denir ve bu kümenin çift doğal yoğunluğu

$$\delta_2(K)=\lim_{m,n}\frac{K(m,n)}{nm}$$

ile verilir [20].

Örnek olarak, $\{(j^2,k^2): j,k\in\mathbb{N}\}$ kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta_2(K)=\lim_{m,n}\frac{K(m,n)}{nm}\le\lim_{m,n}\frac{\sqrt{m}\sqrt{n}}{mn}=0$$

Çift doğal yoğunluk ile ilgili aşağıdaki özellikleri verebiliriz. A ve B, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin herhangi iki alt kümesi olmak üzere,

i) $\delta_2(A)$ var ve $0 \leq \delta_2(A) \leq 1$ dir. Aynı zamanda $\delta_2(\mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash A)$ vardır ve $\delta_2(\mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash A) = 1 - \delta_2(A)$ dır.

ii) Eğer $\delta_2(A) = 1$ ve $A \subset B$ ise $\delta_2(B) = 1$ dir.

iii) $\delta_2(A) = 0$ ve $\delta_2(B) = 0$ ise $\delta_2(A \cup B) = 0$

iv) $\delta_2(A) = 1$ ve $\delta_2(B) = 1$ ise $\delta_2(A \cap B) = 1$ dir.

Tanım 2.1.19. $x = (x_{m,n})$ bir çift dizi olsun. Verilen her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\{(m,n): |x_{m,n} - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır ise, yani

$$\lim_{j,k\to\infty} \frac{1}{(j+1)(k+1)} \left|\{(m,n), m \leq j \; ve \; n \leq k: |x_{m,n} - L| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

ise $x = (x_{m,n})$ çift dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve st-$\lim x_{m,n} = L$ şeklinde gösterilir [20].

Not 2.1.1 [20] a) $x = (x_{m,n})$ Pringsheim anlamında yakınsak bir çift dizi olsun. O halde, sınırlı veya sınırsız satır ve (veya) sütunlar için sınırlı birer sayı bulunabilir. Bu sayılar s_1 ve s_2 olarak tanımlanırsa,

$$K(m,n) \leq s_1 m + s_2 n$$

olur. Böylece bu sayıların varlığından $x = (x_{m,n})$ dizisinin istatistiksel yakınsak olduğu anlaşılır.

b) Eğer $x = (x_{m,n})$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak ise bu L sayısı tektir.

c) Eğer $x = (x_{m,n})$ dizisi istatistiksel yakınsak ise Pringsheim anlamında yakınsak olması gerekmez. Aynı zamanda sınırlı olmasına da gerek yoktur.

Örnek 2.1.3. $(x_{m,n}) = \begin{cases} mn, & m \text{ ve } n \text{ tam kare} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

dizisi tanımlansın. $x = (x_{m,n})$ çift dizisi 1 noktasına istatistiksel yakınsaktır. Fakat ne Pringsheim anlamında yakınsak ne de sınırlı değildir. Çünkü dizinin 1 haricindeki elemanlarının yoğunluğu 0 dır. Yani her $\varepsilon > 0$ sayısı için;

$$\left|\left\{(m,n): i \leq m\,, j \leq n\,, \left|x_{m,n}-1\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \leq \sqrt{m}\sqrt{n}$$

dır. Böylece her iki tarafın limiti alınırsa,

$$\lim_{i,j}\left|\left\{(m,n): i \leq m\,, j \leq n\,, \left|x_{m,n}-1\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \leq \lim_{i,j}\frac{\sqrt{i}\sqrt{j}}{ij}=0$$

bulunur.

Teorem 2.1.8. $x=\left(x_{m,n}\right)$ çift reel sayı dizisi verilsin. Bu dizinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $K=\{(m,n) \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}: m,n=1,2,3,\ldots\}$, $\delta_2(K)=1$ ve

$$\lim_{m,n\to\infty,(m,n)\in K} x_{m,n}=L$$

olacak şekilde $K \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ alt kümesinin var olmasıdır [20].

Teorem 2.1.9. $st\text{-}\lim_{m,n} x_{m,n}=L_1$, $st\text{-}\lim_{m,n} y_{m,n}=L_2$ ve $c\in\mathbb{R}$ ise

i) $st-\lim_{m,n}\left(x_{m,n}+y_{m,n}\right)=st-\lim_{m,n} x_{m,n}+st-\lim_{m,n} y_{m,n}=L_1+L_2$ dir.

ii) $st\text{-}\lim_{m,n} c\, x_{m,n}=cL_1$dir [20].

2.2. Çift Diziler için $\left(M,\lambda_{m,n}\right)$ (Natarajan) Toplanabilme Metodu

Bu kısımda P. N. Natarajan'ın çalışmasında elde edilen $\left(M,\lambda_{m,n}\right)$ (Natarajan) toplanabilme metodu tanımını ve elde edilmiş bazı sonuçları verilecektir.

Tanım 2.2.1. $\left\{\lambda_{m,n}\right\}$ dizisi $\sum_{m.n=0}^{\infty,\infty}\left|\lambda_{m,n}\right|<\infty$ koşulunu sağlayan bir çift dizi olsun. $\left(M,\lambda_{m,n}\right)$ metodu 4-boyutlu $\left(a_{m,n,k,l}\right)$ sonsuz matrisi ile tanımlanır. Burada $\left(a_{m,n,k,l}\right)$ aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$a_{m,n,k,l}=\begin{cases}\lambda_{m-k,n-l}\ , & k\leq m,\ l\leq n\\ 0\ , & \text{diğer durumlarda}\end{cases} \tag{2.3}$$

Tanım 2.2.2. Eğer $s_{k,l}\to\sigma\left(M,\lambda_{m,n}\right)$ ve $s_{k,l}\to\sigma'\left(M,\mu_{m,n}\right)$ olduğunda $\sigma=\sigma'$ ise herhangi iki $\left(M,\lambda_{m,n}\right)$, $\left(M,\mu_{m,n}\right)$ metodları tutarlıdır denir.

Tanım 2.2.3. Eğer $s_{k,l} \to \sigma(M, \lambda_{m,n})$ olduğunda $s_{k,l} \to \sigma(M, \mu_{m,n})$ ise $(M, \lambda_{m,n})$ metodu $(M, \mu_{m,n})$ metodu tarafından içerilir denir. Ve bu içerme $(M, \lambda_{m,n}) \subseteq (M, \mu_{m,n})$ şeklinde gösterilir.

Eğer $(M, \lambda_{m,n}) \subseteq (M, \mu_{m,n})$ ve tersi sağlanırsa bu iki metod denktir denir.

Teorem 2.2.1. (Silverman-Toeplitz) [36] Dört boyutlu sonsuz $A = (a_{m,n,k,l})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul

i) $\sup\limits_{m,n} \sum_{k,l=0}^{\infty,\infty} |a_{m,n,k,l}| < \infty$;

ii) $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{m,n,k,l} = 0$, $k, l = 0,1,2, \dots$;

iii) $\lim\limits_{m,n\to\infty} \sum_{k,l=0}^{\infty,\infty} a_{m,n,k,l} = 1$;

iv) $\lim\limits_{m,n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{m,n,k,l}| = 0$, $l = 0,1,2, \dots$ ve

v) $\lim\limits_{m,n\to\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |a_{m,n,k,l}| = 0$, $k = 0,1,2, \dots$.

Teorem 2.2.2. $(M, \lambda_{m,n})$ metodunun regüler olması için gerek ve yeter şart $\sum_{m.n=0}^{\infty,\infty} \lambda_{m,n} = 1$ olmasıdır.

İspat: $\sum_{m.n=0}^{\infty,\infty} \lambda_{m,n} = 1$ olsun. O halde, $\sum_{m.n=0}^{\infty,\infty} |\lambda_{m,n}| < \infty$ olduğundan

$$\sup_{m,n\geq 0} \sum_{k.l=0}^{\infty,\infty} |a_{m,n,k,l}| = \sup_{m,n\geq 0} \sum_{k.l=0}^{m,n} |\lambda_{m-k,n-l}| < \infty$$

ve $\lim\limits_{m,n\to\infty} \lambda_{m,n} = 0$ olduğundan $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{m,n,k,l} = \lim\limits_{m,n\to\infty} \lambda_{m-k,n-l} = 0$, $k, l = 0,1,2, \dots$ dir.

Böylece $(M, \lambda_{m,n})$ metodunun regüler olması için gerek ve yeter şart

$$1 = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k,l=0}^{\infty,\infty} a_{m,n,k,l} = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k,l=0}^{m,n} \lambda_{m-k,n-l} = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k,l=0}^{m,n} \lambda_{k,l} = \sum_{k,l=0}^{\infty,\infty} \lambda_{k,l}$$

olmasıdır.

Teorem 2.2.3. Herhangi iki Natarajan metodu tutarlıdır.

İspat: $(M, \lambda_{m,n})$, $(M, \mu_{m,n})$ iki regüler metod olsun öyleki $(\lambda_{m,n})$, $(\mu_{m,n})$ sonsuz matrislerinin her bir satır ve sütunları basit diziler için regüler Natarajan metodudur. Üçüncü bir metod olarak $(M, \gamma_{m,n})$ tanımlayalım. Burada $\gamma_{m,n} = \sum_{i,j=0}^{m,n} \lambda_{i,j}\mu_{m-i,n-j}$, $m, n = 0,1,2, \dots$ dir. $s = \{s_{m,n}\}$ için

$(M,\gamma_{m,n})(s)=\sum_{i,j=0}^{m,n} u_{m,n,i,j}(M,\mu_{i,j})(s)$ alalım. Burada $u_{m,n,i,j}=\lambda_{m-i,n-j}Q_{i,j}$, $Q_{i,j}=\sum_{k,l=0}^{i,j}\mu_{k,l}$, $i,j=0,1,2,\ldots$. Teorem 2.2.2'yi kullanarak $(M,\gamma_{m,n})$ regüler olduğu görülür. Böylece $s_{k,l}\to\sigma'(M,\mu_{m,n})$ olması $s_{k,l}\to\sigma'(M,\gamma_{m,n})$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde $s_{k,l}\to\sigma(M,\lambda_{m,n})$ olması ile $s_{k,l}\to\sigma(M,\gamma_{m,n})$ olduğu gösterilebilir.

Sonuç olarak, $\sigma=\sigma'$ elde edilir ve böylece $(M,\lambda_{m,n})$ ve $(M,\mu_{m,n})$ metodlarının tutarlı olduğu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi

$$\lambda(x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}\lambda_{m,n}x^m y^n\ ,\ \mu(x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}\mu_{m,n}x^m y^n$$

alalım. Bu seriler $|x|,|y|<1$ için yakınsaktır.

$$k(x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}k_{m,n}x^m y^n=\frac{\mu(x,y)}{\lambda(x,y)},\quad h(x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}h_{m,n}x^m y^n=\frac{\lambda(x,y)}{\mu(x,y)}$$

verilsin.

$$\sum_{i,j=0}^{m,n}k_{i,j}\lambda_{m-i,n-j}=\mu_{m,n}\ ,\quad \sum_{i,j=0}^{m,n}h_{i,j}\mu_{m-i,n-j}=\lambda_{m,n}$$

olsun.

Aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.2.4. Eğer $(M,\lambda_{m,n})$ ve $(M,\mu_{m,n})$ regüler metodlar olsun. $(M,\lambda_{m,n})\subseteq(M,\mu_{m,n})$ olması için gerek ve yeter koşul $\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}|k_{m,n}|<\infty$ ve $\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}k_{m,n}=1$ olmasıdır.

İspat: $s(x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}s_{m,n}x^m y^n$ olsun. O halde

$$\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}(M,\mu_{m,n})(s)x^m y^n=\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}\left(\sum_{i,j=0}^{m,n}\mu_{m-i,n-j}s_{i,j}\right)x^m y^n$$
$$=\mu(x,y)s(x,y).$$

Benzer şekilde,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}(M,\lambda_{m,n})(s)x^m y^n=\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}\left(\sum_{i,j=0}^{m,n}\lambda_{m-i,n-j}s_{i,j}\right)x^m y^n$$
$$=\lambda(x,y)s(x,y).$$

Böylece,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}(M,\mu_{m,n})(s)x^my^n = k(x,y)\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}(M,\lambda_{m,n})(s)x^my^n$$
$$= \left(\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}k_{m,n}x^my^n\right)\left(\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}(M,\lambda_{m,n})(s)x^my^n\right)$$

elde edilir. Buradan,

$$(M,\mu_{m,n})(s) = \sum_{i,j=0}^{m,n}k_{m-i,n-j}(M,\lambda_{i,j})(s) = \sum_{i,j=0}^{m,n}c_{m,n,i,j}(M,\lambda_{i,j})(s)$$

bulunur. Burada

$$c_{m,n,i,j} = \begin{cases} k_{m-i,n-j}\ , & i \le m, \quad j \le n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir.

Eğer, $(M,\lambda_{m,n}) \subseteq (M,\mu_{m,n})$ ise $(c_{m,n,i,j})$ regülerdir. Silverman-Toeplitz teoremindeki (iii)'ye göre $\lim\limits_{m,n\to\infty}\sum_{i,j=0}^{\infty,\infty}c_{m,n,i,j} = 1$, yani $\lim\limits_{m,n\to\infty}\sum_{i,j=0}^{m,n}k_{m-i,n-j} = 1$ dir. Buradan $\lim\limits_{m,n\to\infty}\sum_{i,j\to\infty}^{m,n}k_{i,j} = 1$ olduğu ve dolayısıyla $\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}k_{i,j} = 1$ elde edilir.

Yine Silverman-Toeplitz teoremindeki (i)'ye göre bir $H > 0$ vardır öyleki

$$\sum_{i,j=0}^{\infty,\infty}|c_{m,n,i,j}| \le H, \qquad m,n = 0,1,2,...,$$

olduğunu yani,

$$\sum_{i,j=0}^{m,n}|k_{m-i,n-j}| \le H, \qquad m,n = 0,1,2,...,$$

dolayısıyla

$$\sum_{i,j=0}^{m,n}|k_{i,j}| \le H, \qquad m,n = 0,1,2,...$$

dir. Buradan, $\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}|k_{m,n}| \le \infty$ elde edilir.

Tersine eğer $\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}|k_{m,n}| < \infty$ ve $\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}k_{i,j} = 1$ ise $(c_{m,n,i,j})$ regüler olduğu ve $(M,\lambda_{m,n}) \subseteq (M,\mu_{m,n})$ olduğu ispatlanır.

Bu teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.2.5. $(M, \lambda_{m,n})$, $(M, \mu_{m,n})$ regüler metodlarının denk olması için yani $(M, \lambda_{m,n}) \subseteq (M, \mu_{m,n})$ ve tersinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} |k_{m,n}| \leq \infty, \sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} k_{m,n} = 1$$

ve

$$\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} |h_{m,n}| \leq \infty, \sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} h_{m,n} = 1$$

olmasıdır.

3. BULGULAR

Bu bölümde P. N. Natarajan tarafından tanımlanan (M, λ_{mn}) toplanabilme metodu kullanılarak çift diziler için istatistiksel yakınsaklık tanımı verildi. Aynı zamanda, çift diziler için $M_{\lambda_{mn}}^{st}$ istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasında bazı içerme teoremleri ispatlandı.

$x = (x_{m,n})$ reel değerli çift dizisi verilsin. $(x_{m,n})$ dizisinin $M_{\lambda_{mn}}$ ortalaması olan (t_{mn}) dizisi tüm $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$t_{mn} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} \lambda_{m-k,n-l} x_{kl} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1. $x = (x_{m,n})$ çift dizisi $L \in \mathbb{R}$ değerine $(M_{\lambda_{mn}})$ toplanabilirdir denir eğer $t_{mn} \to L$ sağlanırsa ve $x_{m,n} \to L\ (M_{\lambda_{mn}})$ ile gösterilir.

Tanım 3.2. Eğer $(|x_{mn} - L|)$ dizisi sıfıra $(M_{\lambda_{mn}})$ toplanabilirse, (x_{mn}) çift dizisi $L \in \mathbb{R}$ değerine $M_{\lambda_{mn}}$-güçlü toplanabilirdir denir ve $x_{mn} \to L([M_{\lambda_{mn}}])$ ile gösterilir. Güçlü $M_{\lambda_{mn}}$ toplanabilir dizilerin kümesini $M_{\lambda_{mn}}$ göstereceğiz ve aşağıdaki şekilde tanımlayacağız.

$$M_{\lambda_{mn}} = \left\{ x = (x_{m,n}) \colon \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} \lambda_{m-k,n-l} |x_{kl} - L| = 0 \right\}$$

Herhangi bir (λ_{mn}) için (2.3) de $M_{\lambda_{mn}}$ matrisi dikkate alınarak doğal yoğunluk ve istatistiksel yakınsaklık aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.3. ($M_{\lambda_{mn}}$-yoğunluk) K kümesi $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nin bir alt kümesi olsun. Eğer

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} \lambda_{m-k,n-l} \chi_K(k, l)$$

limiti varsa bu limite K'nın $M_{\lambda_{mn}}$-yoğunluğu denir ve $\delta_{\lambda_{mn}}(K)$ ile gösterilir.

Tanım 3.4. ($M_{\lambda_{mn}}$-istatistiksel yakınsaklık) $x = (x_{m,n})$ çift dizisine L'ye $M_{\lambda_{mn}}$-istatistiksel yakınsaktır denir ve $x_{m,n} \to L(M_{\lambda_{mn}} - st)$ ile gösterilir eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$K(\varepsilon) = \{(k, l) \colon k \le m\, , l \le n \colon |x_{kl} - L| \ge \varepsilon\}$$

kümesinin $M_{\lambda_{mn}}$-yoğunluğu sıfır ise yani,

$$\lim_{m,n} \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} \lambda_{m-k,n-l} \chi_{K(\varepsilon)}(k,l) = 0.$$

$M_{\lambda_{mn}}$-istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini $M_{\lambda_{mn}}^{st}$ ile göstereceğiz yani,

$$M_{\lambda_{mn}}^{st} = \{x = (x_{m,n}) : \exists L \in \mathbb{R} \text{ öyleki } x_{m,n} \to L(M_{\lambda_{m,n}} - st)\}.$$

Teorem 3.1. $x = (x_{m,n})$ ve $y = (y_{m,n})$ iki çift indisli dizi olsun.

a) $x_{m,n} \to L_1(M_{\lambda_{mn}} - st)$ ve $y_{m,n} \to L_2(M_{\lambda_{mn}} - st)$ olsun. O halde $(x_{m,n} + y_{m,n}) \to (L_1 + L_2)(M_{\lambda_{mn}} - st)$ dir.

b) $x_{m,n} \to L_1(M_{\lambda_{mn}} - st)$ ve $(c \neq 0) \in \mathbb{R}$ olsun. O halde $cx_{m,n} \to cL_1(M_{\lambda_{mn}} - st)$ dir.

İspat: i) $x_{m,n} \to L_1(M_{\lambda_{mn}} - st)$ olsun. O halde $K \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta_{mn}(K) = 0$ olduğunda $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall m, n > s_1$ ve $(m,n) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash K)$ için

$$|x_{m,n} - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $s_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Benzer şekilde, $y_{m,n} \to L_2(M_{\lambda_{mn}} - st)$ olsun. O halde $T \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta_{mn}(T) = 0$ olduğunda $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall m, n > s_2$ ve $(m,n) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash T)$ için

$$|y_{m,n} - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $s_2 \in \mathbb{N}$ vardır.

$s_0 = \max\{s_1, s_2\}$ olsun. $\forall (m,n) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash (K \cap T))$ ve her $m, n > s_0$ için

$$\begin{aligned} |(x_{m,n} + y_{m,n}) - (L_1 + L_2)| &\leq |x_{m,n} - L_1| + |y_{m,n} - L_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{m,n} \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} \lambda_{m-k,n-l} \chi_{(K \cap T)(\varepsilon)}(k,l) = 0$$

olduğundan $(x_{m,n} + y_{m,n}) \to (L_1 + L_2)(M_{\lambda_{mn}} - st)$.

ii) Eğer $c = 0$ ise $cx_{m,n} \to 0$ dır.

$c \neq 0$ ve $x_{m,n} \to L_1(M_{\lambda_{mn}} - st)$ olsun. O halde $K \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $\delta_{mn}(K) = 0$ olduğunda $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall m, n > s_1$ ve $(m,n) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash K)$ için

$$\left|x_{m,n} - L_1\right| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

olacak şekilde $s_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $\forall(m,n) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash K)$ ve her $m,n > s_1$ için

$$\left|cx_{m,n} - cL_1\right| \leq |c|\left|x_{m,n} - L_1\right| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

olur. $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{m,n} \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} \lambda_{m-k,n-l} \chi_{(K)(\varepsilon)}(k,l) = 0$$

olduğundan $cx_{m,n} \to cL_1(M_{\lambda_{mn}} - st)$.

3.1. $M_{\lambda_{mn}}^{st}$' ın Bazı Özellikleri ve $M_{\lambda_{mn}}$ ile Karşılaştırma

Λ ve Λ_0 kümelerini

$$\Lambda \coloneqq \left\{\lambda = (\lambda_{mn}) \colon \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_{mn}| < \infty\right\}, \qquad \Lambda_0 \colon= \left\{\lambda \in \Lambda \colon \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} = 1\right\}$$

tanımlayalım.

Teorem 3.1.1. $\lambda = (\lambda_{mn}) \in \Lambda_0$ olsun. Eğer $x = \left(x_{m,n}\right)$ çift dizisi L'ye $M_{\lambda_{mn}}$-istatistiksel yakınsak ise bu limit tektir.

İspat: Varsayalım ki $x_{m,n} \to L_1(M_{\lambda_{mn}} - st)$, $x_{m,n} \to L_2\left(M_{\lambda_{mn}} - st\right)$ ve $L_1 \neq L_2$olsun.

$\varepsilon < \frac{1}{2}\left|L_1 - L_2\right|$ alalım.

$$A_\varepsilon(L_1) \coloneqq \left\{(m,n) \colon \left|x_{m,n} - L_1\right| \geq \varepsilon\right\}$$

ve

$$A_\varepsilon(L_2) \coloneqq \left\{(m,n) \colon \left|x_{m,n} - L_2\right| \geq \varepsilon\right\}$$

kümelerini tanımlayalım. $x_{m,n} \to L_1(M_{\lambda_{mn}} - st)$ ve $x_{m,n} \to L_2(M_{\lambda_{mn}} - st)$ olduğundan $\delta_{\lambda_{mn}}(A_\varepsilon(L_1)) = 0$ ve $\delta_{\lambda_{mn}}(A_\varepsilon(L_2)) = 0$.

Buradan,

$$\left\{(m,n) \colon \left|x_{m,n} - L_2\right| < \varepsilon\right\} \subset A_\varepsilon(L_1)$$

içermesi sağlanır. Böylece,

$$\delta_{\lambda_{mn}}\{(m,n): |x_{m,n}-L_2| < \varepsilon\} \leq \delta_{\lambda_{mn}}(A_\varepsilon(L_1))$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, $\{(m,n): |x_{m,n}-L_2| < \varepsilon\}$ ve $A_\varepsilon(L_2)$ kümeleri ayrık ve

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \{(m,n): |x_{m,n}-L_2| < \varepsilon\} \cup A_\varepsilon(L_2) \tag{3.2}$$

(3.2) den

$$\delta_{\lambda_{mn}}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) = \delta_{\lambda_{mn}}(\{(m,n): |x_{m,n}-L_2| < \varepsilon\} + \delta_{\lambda_{mn}}(A_\varepsilon(L_2)))$$

elde edilir. Son eşitsizlik $\delta_{\lambda_{mn}}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) = 0$ olmasını verir fakat bu $\delta_{\lambda_{mn}}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) = 1$ olması ile çelişkidir. Böylece, $x = (x_{m,n})$ dizisinin $M_{\lambda_{mn}}$-istatistiksel limiti tektir.

Teorem 3.1.2. $\lambda = (\lambda_{nm}) \in \Lambda_0$ da bir çift dizi olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır,

i) Eğer $x_{m,n} \to L([M_{\lambda_{mn}}])$ ise $x_{m,n} \to L(M_{\lambda_{mn}} - st)$ ve $(M_{\lambda_{mn}}) \subsetneq M_{\lambda_{mn}}^{st}$ dir.

ii) Eğer $x = (x_{m,n}) \in \ell_\infty^2$ ve $x_{m,n} \to L(M_{\lambda_{mn}} - st)$ ise $x_{m,n} \to L([M_{\lambda_{mn}}])$ dir.

İspat:

i) $\varepsilon > 0$ ve $x_{m,n} \to L([M_{\lambda_{mn}}])$ olsun. O halde

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\lambda_{m-k,n-l}|x_{kl}-L| = \sum_{k,l=0,(k,l)\in K(\varepsilon)}^{m,n}\lambda_{m-k,n-l}|x_{kl}-L| + \sum_{k,l=0,(k,l)\notin K(\varepsilon)}^{m,n}\lambda_{m-k,n-l}|x_{kl}-L|$$

$$\geq \sum_{k,l=0,(k,l)\in K(\varepsilon)}^{m,n}\lambda_{m-k,n-l}|x_{kl}-L| \geq \varepsilon\sum_{k,l=0}^{m,n}\lambda_{m-k,n-l}\,\chi_{K(\varepsilon)}(k,l).$$

elde edilir. $m,n\to\infty$ limit alırsak, $x_{mn} \to L(M_{\lambda_{mn}} - st)$ elde ederiz .

ii) Varsayalım ki $x = (x_{m,n}) \in \ell_\infty^2$ ve $x_{m,n} \to L(M_{\lambda_{mn}} - st)$ olsun. O halde tüm $m,n\in\mathbb{N}$ için $|x_{m,n}-L| \leq K$ olacak şekilde pozitif bir $K>0$ sabiti vardır.

$\varepsilon > 0$ sayısı verilsin, o halde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\lambda_{m-k,n-l}|x_{kl}-L| = \sum_{k,l=0,(k,l)\in K(\varepsilon)}^{m,n}\lambda_{m-k,n-l}|x_{kl}-L| + \sum_{k,l=0,(k,l)\notin K(\varepsilon)}^{m,n}\lambda_{m-k,n-l}|x_{kl}-L|$$

$$\leq K \sum_{k,l=0}^{m,n} \lambda_{m-k,n-l}\, \chi_{K(\varepsilon)}(k,l) + \varepsilon \sum_{k,l=0,(k,l)\notin K(\varepsilon)}^{m,n} \lambda_{m-k,n-l}$$

$m,n \to \infty$ limit alınırsa, $x_{m,n} \to L([M_{\lambda_{mn}}])$ elde edilir.

Uyarı 3.1.1. Teorem 3.1.2. de (i)'nin tersi sağlanmaz.

$\lambda = (\lambda_{mn}) = \frac{1}{(mn+1)^2}$ ve

$$x_{m,n} = \begin{cases} s^3r^3, & k = r^2 \text{ ve } l = s^2 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece,

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{(mn+1)^2} \chi_{K(\varepsilon)}(k,l) = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{r=0}^{[\![m]\!]}\sum_{s=0}^{[\![n]\!]} \frac{1}{((m-r)(n-s)+1)^2} \leq 0$$

sağlanır. Fakat

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{((m-k)(n-l)+1)^2} x_{kl} = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{r=0}^{[\![m]\!]}\sum_{s=0}^{[\![n]\!]} \frac{1}{((m-r)(n-s)+1)^2} s^3r^3$$

$$\geq \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{(mn+1)^2} \sum_{r=0}^{[\![m]\!]}\sum_{s=0}^{[\![n]\!]} s^3r^3 = \infty$$

bulunur. Bu sonuç $(M_{\lambda_{mn}}) \subset M_{\lambda_{mn}}^{st}$ olduğunu gösterir.

Sonuç 3.1.1 Eğer $x_{m,n} \to L(m,n \to \infty)$ olsun. O halde herhangi bir $\lambda = (\lambda_{mn}) \in \Lambda_0$ dizisi için için $x_{mn} \to L(M_{\lambda_{mn}} - st)$ dır.

İspat: $x_{m,n} \to L(m,n \to \infty)$ ve $\lambda = (\lambda_{mn}) \in \Lambda_0$ için $M_{\lambda_{mn}}$ regüler olduğundan $x_{m,n} \to L([M_{\lambda_{mn}}])$ bulunur. Teorem 3.1.2. i) den $x_{m,n} \to L(M_{\lambda_{mn}} - st)$ elde edilir.

3.2. $M_{\lambda_{mn}}$ İçin İçerme Sonuçları

$\lambda, \mu \in \Lambda_0$ için aşağıdaki serileri ele alalım:

$\lambda(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} \lambda_{mn} x^m y^n$ ve $\mu(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} \mu_{mn} x^m y^n$ (3.3)

Açıktır ki $\lambda(x,y)$ ve $\mu(x,y)$ serileri tüm $|x|, |y| < 1$ için yakınsaktır.

$\frac{\mu(x,y)}{\lambda(x,y)} = k(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} k_{mn} x^m y^n$ ve $\frac{\lambda(x,y)}{\mu(x,y)} = l(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} l_{mn} x^m y^n$ (3.4) olsun.

Teorem 3.2.1. Herhangi bir $\lambda, \mu \in \Lambda$ için $\gamma = (\gamma_{mn}) \in \Lambda$ bir çift dizisi vardır öyle ki $M_{\lambda_{mn}}^{st} \subset M_{\gamma_{mn}}^{st}$ ve $M_{\mu_{mn}}^{st} \subset M_{\gamma_{mn}}^{st}$ dir.

İspat Herhangi $\lambda = (\lambda_{mn}) \in \Lambda$ ve $\mu = (\mu_{mn}) \in \Lambda$ için $\gamma = (\gamma_{mn})$ dizisini $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\gamma_{mn} := \lambda_{00}\mu_{m,n} + \lambda_{11}\mu_{m-1,n-1} + \cdots + \lambda_{mn}\mu_{00} \tag{3.5}$$

alalım. $\gamma \in \Lambda$ olduğunu gösterelim. $\lambda, \mu \in \Lambda$ olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} |\gamma_{mn}| &= \left| \sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} \lambda_{00}\mu_{m,n} + \lambda_{11}\mu_{m-1,n-1} + \cdots + \lambda_{mn}\mu_{00} \right| \\ &\leq \sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} |\lambda_{00}||\mu_{mn}| + |\lambda_{11}||\mu_{m-1,n-1}| + \cdots + |\lambda_{mn}||\mu_{00}| \\ &= \left(\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} |\lambda_{mn}| \right) \left(\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} |\mu_{mn}| \right) < \infty\end{aligned}$$

sağlanır.

(t_{mn}^{λ}) ve (t_{mn}^{μ}) sırasıyla $x = (x_{m,n})$ dizisinin $M_{\lambda_{mn}} - st$ ve $M_{\mu_{mn}} - st$ dönüşümleri olsun. Aynı zamanda (t_{mn}^{γ}) dizisi $x = (x_{m,n})$ dizisinin $M_{\gamma_{mn}} - st$ dönüşümü olmak üzere,

$$t_{mn}^{\gamma} := \sum_{k,l=0}^{m,n} \gamma_{m-k,n-l}\chi_{K(\varepsilon)}(k,l) = \gamma_{mn}\chi_{K(\varepsilon)}(0,0) + \cdots + \gamma_{00}\chi_{K(\varepsilon)}(m,n)$$

dir. (3.5)'ten

$$\begin{aligned} t_{mn}^{\gamma} &= \left(\lambda_{00}\mu_{m,n} + \lambda_{11}\mu_{m-1,n-1} + \cdots + \lambda_{mn}\mu_{00}\right)\chi_{K(\varepsilon)}(0,0) + \cdots + \lambda_{00}\mu_{00}\chi_{K(\varepsilon)}(m,n) \\ &= \lambda_{00}\mu_{00}\chi_{K(\varepsilon)}(m,n) + \cdots + \left(\lambda_{mn}\mu_{00} + \lambda_{m-1,n-1}\mu_{11} + \cdots + \lambda_{00}\mu_{mn}\right)\chi_{K(\varepsilon)}(0,0) \\ &= \lambda_{11}\left(\mu_{00}\chi_{K(\varepsilon)}(m,n) + \cdots + \mu_{mn}\chi_{K(\varepsilon)}(0,0)\right) + \cdots + \lambda_{mn}\left(\mu_{nm}\chi_{K(\varepsilon)}(0,0)\right) \\ &= \lambda_{11}t_{mn}^{\mu} + \lambda_{22}t_{m-1,n-1}^{\mu} + \cdots + \lambda_{mn}t_{11}^{\mu}\end{aligned}$$

elde edilir. $t_{mn}^{\mu} \to 0,\ m, n \to \infty$ için $\lim_{m,n\to\infty} t_{mn}^{\gamma} = 0$ bulunur. Böylece, $x_{m,n} \to L(M_{\gamma_{mn}} - st)$ elde edilir. Benzer ispat yöntemiyle $M_{\lambda_{mn}}^{st} \subset M_{\gamma_{mn}}^{st}$ elde edilir.

Uyarı 3.2.1. Teorem 3.2.1. $\lambda, \mu \in \Lambda_0$ içinde sağlanır.

Teorem 3.2.2. Herhangi iki $\lambda, \mu \in \Lambda$ için $M_{\lambda_{mn}}^{st}$ ve $M_{\mu_{mn}}^{st}$ metodları tutarlıdır.

İspat: $(x_{m,n})$ çift dizisi $x_{m,n} \to L(M_{\lambda_{mn}} - st)$ ve $x_{m,n} \to T(M_{\mu_{mn}} - st)$ olsun. $\gamma = (\gamma_{mn}) \in \Lambda$ dizisini Teorem 3.2.1. de (3.5) gibi düşünürsek, $x_{m,n} \to L(M_{\gamma_{mn}} - st)$ ve $x_{m,n} \to T(M_{\gamma_{mn}} - st)$ elde edilir. Limitin tek olmasından $L = T$ bulunur.

Teorem 3.2.3. $\lambda, \mu \in \Lambda_0$ olsun. O halde $M_{\lambda_{mn}}^{st} \subset M_{\mu_{mn}}^{st}$ gerek ve yeter koşul $\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}|k_{mn}| < \infty$ ve $\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} k_{mn} = 1$.

İspat:

(t_{mn}^{λ}) ve (t_{mn}^{μ}) sırasıyla $x = (x_{m,n})$ dizisinin $M_{\lambda_{mn}} - st$ ve $M_{\mu_{mn}} - st$ dönüşümleri olsun. Eğer

$|x| < 1$ ve $|y| < 1$ ise

$$\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} t_{mn}^{\lambda} x^m y^n = \sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} \left(\sum_{k,l=0}^{m,n} \lambda_{m-k,n-l} \chi_{K(\varepsilon)}(k,l) \right) x^m y^n$$

sağlanır. (3.4)'ten tüm $|x| < 1$ ve $|y| < 1$ için

$$\mu(x,y) = \lambda(x,y) k(x,y)$$

dir. (3.3) ve (3.5)'ten

$$k(x,y)\lambda(x,y) \sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} \chi_{K(\varepsilon)}(m,n) x^m y^n = \mu(x,y) \sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} \chi_{K(\varepsilon)}(m,n) x^m y^n$$

bulunur. Buradan,

$$k(x,y) \sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} t_{mn}^{\lambda} x^m y^n = \sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} t_{mn}^{\mu} x^m y^n$$

elde edilir. Böylece,

$$t_{mn}^{\mu} \coloneqq k_{00} t_{mn}^{\lambda} + k_{11} t_{mn}^{\lambda} + \cdots + k_{mn} t_{00}^{\lambda} = \sum_{i,j=0}^{\infty,\infty} a_{m,n,i,j} t_{ij}^{\lambda}$$

dir. Burada

$$a_{m,n,i,j} = \begin{cases} k_{m-i,n-j}, & i \le m, \quad j \le n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir. O halde $M_{\lambda_{mn}}^{st} \subset M_{\mu_{mn}}^{st}$ olması için gerek ve yeter koşul $(a_{m,n,i,j})$ matrisinin regüler olmasıdır. Böylece,

$$\sup_{m,n\geq 0}\sum_{i,j=0}^{\infty,\infty}\left|a_{m,n,i,j}\right| = \sup_{m,n\geq 0}\sum_{i,j=0}^{\infty,\infty}\left|k_{m-i,n-j}\right| < \infty$$

elde edilir. Yani, $\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}|k_{mn}| < \infty$ dir. Aynı zamanda

$$\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i,j=0}^{\infty,\infty} a_{m,n,i,j} = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i,j=0}^{m,n} k_{m-i,n-j} = 1$$

dir. Yani, $\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} k_{mn} = 1$. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.2. $\lambda,\mu \in \Lambda_0$ olsun. $M_{\lambda_{mn}}^{st} = M_{\mu_{mn}}^{st}$ gerek ve yeter koşul $\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}|k_{mn}| < \infty$, $\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty}|h_{mn}| < \infty$ ve $\sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} k_{mn} = \sum_{m,n=0}^{\infty,\infty} h_{mn} = 1$.

Tanım 3.2.2. $\lambda = (\lambda_{mn})$ ve $\mu = (\mu_{mn})$, Λ'nın elemanı olan iki dizi olsun. Eğer

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{\lambda_{mn}}{\mu_{mn}} = 1$$

ise bu iki diziye denktir denir ve $\lambda\sim\mu$ ile gösterilir [37].

Teorem 3.2.4. $\lambda = (\lambda_{mn})$ ve $\mu = (\mu_{mn})$, Λ'nın elemanı olan iki dizi ve $\lambda\sim\mu$ olsun. O halde $M_{\lambda_{mn}}^{st} = M_{\mu_{mn}}^{st}$.

İspat: $x = (x_{m,n}) \in M_{\lambda_{nm}}^{st}$ keyfi bir dizi olsun öyle ki herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k,l=0}^{m,n}\lambda_{m-k,n-l}\chi_{K(\varepsilon)}(k,l) = 0$$

dır. Böylece,

$$\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k,l=0}^{m,n}\mu_{m-k,n-l}\chi_{K(\varepsilon)}(k,l) = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{k,l=0}^{m,n}\frac{\mu_{m-k,n-l}}{\lambda_{m-k,n-l}}\lambda_{m-k,n-l}\chi_{K(\varepsilon)}(k,l)$$

elde edilir. $\lambda\sim\mu$ olduğundan herhangi bir sabitlenmiş $\varepsilon_0 > 0$ sayısı için $n_0 \equiv n_0(\varepsilon_0) \in \mathbb{N}$, $m_0 \equiv m(\varepsilon_0) \in \mathbb{N}$ sayıları vardır öyleki tüm $n \geq n_0$ ve $m \geq m_0$ için

$$1-\varepsilon_0 < \frac{\mu_{m-k,n-l}}{\lambda_{m-k,n-l}} < 1+\varepsilon_0$$

sağlanır. Böylece, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\sum_{k,l=0}^{m,n}\mu_{m-k,n-l}\chi_{K(\varepsilon)}(k,l) = \sum_{k,l=0}^{m(\varepsilon_0),n_0(\varepsilon_0)}\frac{\mu_{m-k,n-l}}{\lambda_{m-k,n-l}}\lambda_{m-k,n-l}\chi_{K(\varepsilon)}(k,l)$$

$$+\sum_{k,l=m(\varepsilon_0),n_0(\varepsilon_0)}^{m,n}\frac{\mu_{m-k,n-l}}{\lambda_{m-k,n-l}}\lambda_{m-k,n-l}\chi_{K(\varepsilon)}(k,l)$$

$$\leq \sum_{k,l=0}^{m(\varepsilon_0),n_0(\varepsilon_0)}\frac{\mu_{m-k,n-l}}{\lambda_{m-k,n-l}}\lambda_{m-k,n-l}\chi_{K(\varepsilon)}(k,l)+(1+\varepsilon_0)\sum_{k,l=m(\varepsilon_0),n_0(\varepsilon_0)}^{m,n}\lambda_{m-k,n-l}\chi_{K(\varepsilon)}(k,l)$$

$$\leq c\sum_{k,l=0}^{m,n}\lambda_{m-k,n-l}\chi_{K(\varepsilon)}(k,l)$$

Burada

$$c=\max\left\{1+\varepsilon_0,\frac{\mu_{m,n}}{\lambda_{m,n}},\frac{\mu_{m-1,n-1}}{\lambda_{m-1,n-1}},\ldots,\frac{\mu_{m-m_0,n-n_0}}{\lambda_{m-m_0,n-n_0}}\right\}$$

dir .$m,n\to\infty$ limit alınırsa $x_{m,n}\to L(M_{\mu_{mn}}-st)$ elde edilir. Böylece, $M^{st}_{\lambda_{mn}}\subset M^{st}_{\mu_{mn}}$ bulunur. Bu içermenin tersi aynı yöntemle elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.1. $E=\{\lambda_{mn}: m,n\in\mathbb{N}\}$ ve $F=\{\mu_{mn}: m,n\in\mathbb{N}\}$ kümeleri $\lambda=(\lambda_{mn})$ ve $\mu=(\mu_{mn})$ dizileriyle bağlantılı kümeler olmak üzere eğer $E\backslash F$ $(F\backslash E)$ sonlu ise $M^{st}_{\lambda_{mn}}=M^{st}_{\mu_{mn}}$.

3.3 İstatistiksel Yakınsaklık ile $M^{st}_{\lambda_{mn}}$-Yakınsaklığın Karşılaştırılması

Teorem 3.3.1 $x=(x_{m,n})$ bir çift dizi ve $\lambda\in\Lambda$ olsun. $x_{m,n}\to L(st)$ ise $x_{m,n}\to L(M_{\lambda_{mn}}-st)$ ancak ve ancak $0\leq k\leq n$ ve $0\leq l\leq m$ için $mn\lambda_{m-k,n-l}=O(1)$ dir.

İspat $\varepsilon>0$ için

$$K(\varepsilon)=\{(m,n):\ |x_{m,n}-L|\geq\varepsilon\}$$

alalım. $0\leq k\leq m$ ve $0\leq l\leq n$ için $mn\lambda_{m-k,n-l}=O(1)$ olduğundan

$$\sum_{k,l=0}^{m,n}\lambda_{m-k,n-l}\chi_{K(\varepsilon)}(k,l)=\frac{1}{mn}\sum_{k,l=0}^{m,n}mn\lambda_{m-k,n-l}\chi_{K(\varepsilon)}(k,l)$$

$$\leq O(1)\frac{1}{mn}\sum_{k,l=0}^{m,n}\chi_{K(\varepsilon)}(k,l)$$

$m,n\to\infty$ için limit alınırsa $x_{mn}\to L(M_{\lambda_{mn}}-st)$ olması için gerek ve yeter koşul $0\leq k\leq m$ ve $0\leq l\leq n$ için $mn\lambda_{m-k,n-l}=O(1)$ olmasıdır.

Teorem 3.4.2. $x = (x_{m,n})$ bir çift dizi ve $\lambda \in \Lambda$ olsun. $x_{m,n} \to L(M_{\lambda_{mn}} - st)$ ise $x_{m,n} \to L(st)$ ancak ve ancak $k \leq m$ ve $l \leq n$ için $\frac{1}{mn\lambda_{m-k,n-l}} = O(1)$ dir.

İspat $\varepsilon > 0$ için

$$K(\varepsilon) = \{(m,n) : \; |x_{m,n} - L| \geq \varepsilon\}$$

alalım.

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn} \sum_{k,l=0}^{m,n} \chi_{K(\varepsilon)}(k,l) = \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn} \sum_{k,l=0}^{m,n} \frac{\lambda_{m-k,n-l}}{\lambda_{m-k,n-l}} \chi_{K(\varepsilon)}(k,l)$$

$$= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k,l=0}^{m,n} \frac{1}{mn\lambda_{m-k,n-l}} \lambda_{m-k,n-l} \chi_{K(\varepsilon)}(k,l) = O(1) \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k,l=0}^{m,n} \lambda_{m-k,n-l} \chi_{K(\varepsilon)}(k,l)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

5. SONUÇ

Bu tezde, çift diziler için Natarajan metodu kullanılarak yeni bir istatistiksel yakınsaklık tanımı verilmiş, bu yeni yakınsaklık türünün, istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirilmesi olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, tezde $M_{\lambda_{mn}}$-istatistiksel limitin tekliği, $M_{\lambda_{mn}}$-istatistiksel yakınsaklığın regülerliği elde edilmiştir. Bunun yanı sıra, farklı λ'lar için içerme sonuçları elde edilmiş, herhangi iki istatistiksel yakınsaklık metodunun tutarlı olduğu gösterilmiştir. Bu sonuçlar Bulgular bölümünde verilmiştir. Problemin çözümü için gerekli lemmalar, teoremler ve yardımcı sonuçlar Materyal ve Yöntem başlığı altında verilmiştir.

$M_{\lambda_{mn}}$-istatistiksel yakınsaklık çift diziler ile ilgili daha önce yapılmış olan çalışmalara taşınıp yeni sonuçlar elde edilebilir.

5. KAYNAKLAR

[1] Zygmund A, 1979. Trigonometric Series. Cambridge University Press.

[2] Steinhaus H, 1951. Sur la Convergence Ordinaire et la Convergence Asymptotique. Colloq. Math., 2: 73-74.

[3] Fast H, 1951. Sur la Convergence Statistique. Colloq. Math., 2: 241-244.

[4] Miller HI, 1995. A Measure Theoretical Subsequence Characterization of Statistical Convergence. Trans. Of Amer. Math. Soc., 347(5): 1811-1819.

[5] Freedman AR, Sember JJ, Raphael M, 1978. Some Cesaro-type summability spaces. Proc. London Math. Soc., 37(3): 508-520.

[6] Connor JS, 1988. The Statistical and Strong p-Cesaro Convergence of Sequences. Analysis, 8:47-63.

[7] Et M, Nuray F, 2001. Δ^m-Statistical Convergence. Indian J. Pure Appl. Math., 32(6): 961-969.

[8] Çınar M, Karakaş M, Et M, 2013. On pointwise and uniform statistical convergence of order α for sequences of functions. Fixed Point Theory and Applications, 2013(33): 11.

[9] Et M, Çınar M, Karakaş M, 2013. On λ-statistical convergence of order α of sequences of function. Journal of Inequalities and Applications, 2013: 204.

[10] Erdös P, Tenenbaum, 1989. Sur les densities de certaines suites d'entiers. Proc. London Math. Soc., 3(59): 417-438.

[11] Anastassiou GA, Duman O, 2010. Statistical Korovkin Theory for Multivariate Stochastic Processes. Stoch. Anal. Appl., 28(4): 648-661.

[12] Gadjiev AD, Orhan C, 2002. Some Approximation Theorems via Statistical Convergence. Rocky Mountain J. Math., 32(1): 129-138.

[13] Bromwich TJ, 1908. An Introduction to the Theory of Infinite Series. Macmillan and Co. Ltd., London.

[14] Hardy GH, 1917. On the Convergence of Certain Multiple Series. Proc. Camb. Phil. Soc., 19:86-95.

[15] Moricz F, 1991. Extension of the Spaces c and c_0 from Single to Double Sequences. Acta Math. Hungarica, 57: 129-136.

[16] Moricz F, Rhoades BE, 1988. Almost Convergence of Double Sequences and Strong Regularity of Summability Matrices. Math. Proc. Phil. Soc., 104: 283-294.

[17] Tripathy BC, 2004. Generalized Difference Paranormed Statistically Convergent Sequences Defined by Orlicz Function in a Locally Convex Space, Soochow J. Math., 30(4): 431-446.

[18] Tripathy BC, 2003. Statistically Convergent Double Sequences. Tamkang J. Math., 34(3): 231-237.

[19] Pringsheim A, 1897. Elementare Theorie der unendliche Doppel-reihen. Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaft, Munich 27: 101-153.

[20] Mursaleen M, Edely OHH, 2003. Statistical Convergence of Double Sequences. J. Math. Anal. Appl., 288: 223-231.

[21] Patterson RF, Savaş E, 2005. Lacunary Statistical Convergence of Double Sequences. Math. Commun. 10: 55-61.

[22] Türkmenoğlu A, 1993. Bazı Çift İndisli Dizi Uzayları. Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.

[23] Savaş E, Mursaleen M, 2004. On Statistically Convergent Double Sequences of Fuzzy Numbers. Inf. Sci., 162: 183-192.

[24] Das P, Kostyrko P, Wilczynski W, Malik P, 2008. I and I^*-Convergence of Double Sequences. Math. Slovaca, 58(5): 605-620.

[25] Natarajan PN, 2016. Natarajan Method of Summability for Double Sequences and Series. An. Ştiint. Univ. Al. I. Cuza Iaşi Mat. (N.S.), 2(2): 547-552.

[26] Balcı M, 1997. Matematik Analiz, Ankara.

[27] Burkill JC, Burkill H, 1980. A second Course in Mathematical Analysis. Cambridge University Pres., Cambridge, New York.

[28] Habil ED, 2005. Double Sequences and Double Series. The Islamic University Journal, 14: 1-32.

[29] Maddox IJ, 1970. Elements of Functional Analysis. Cambridge University Pres.

[30] Hardy GH, 1949. Divergent Series. Oxford Üniv. Pres., London.

[31] Kojima T, 1922. On the Theory of Double Sequences. Tohoku Math. J., 21: 3-14.

[32] Robison GM, 1926. Divergent Double Sequences and Series. Trans. Amer. Math. Soc., 28: 50-73.

[33] Freedman AR, Sember JJ, 1981. Density and Summability. Pac. J. Math., 95(2): 293-305.

[34] Salat T, 1980. On Statistically Convergent Sequences of Real Numbers. Math. Slovaca, 30(2): 139-150.

[35] Connor JS, 1985. Some Applications of Functional Analysis to Summability Theory. Doktora Tezi. Kent State University, Ohio, ABD.

[36] Natarajan PN, 2014. A New Definition of Convergence of a Double Sequence and a Double series and Silverman-Toeplitz Theorem. Comment. Math., 54: 129-139.

[37] Patterson RF, 2002. Rates of Convergence for Double Sequences. Southeast Asian Bull. Math., 26(3): 469-478.

ÖZGEÇMİŞ

1993 yılında Kayseri'nin Yeşilhisar ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Kayseri'de tamamladı. 2011-2015 yılları arasında Bitlis Eren Üniversitesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. Aynı zamanda 2015 yılında Van Yüzüncüyıl Üniversitesi Eğitim Fakültesinde pedagojik formasyon sertifikası aldı. 2015 yılında Bitlis Eren Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans programına başladı ve halen yüksek lisans programına devam etmektedir. 2016 yılında Erasmus programı dahilinde Portekiz'in Dos Açores Üniversitesi Matematik bölümünde staj yaptı.

Şerife GÜNAL