T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ VE MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI LİMİT VE SÜREKLİLİK ÇEŞİTLERİ ÜZERİNE

Gökhan TURAN

ARALIK 2019

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI LİMİT VE SÜREKLİLİK ÇEŞİTLERİ ÜZERİNE

Hazırlayan

Gökhan TURAN

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Ufuk KAYA

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Erdal Korkmaz

Dr. Öğr. Üyesi Ufuk KAYA

Dr. Öğr. Üyesi Derya ARSLAN

ARALIK 2019

ONAY

Gökhan TURAN tarafından hazırlanan "**Bazı Limit ve Süreklilik Çeşitleri Üzerine**" adlı tez çalışması 16/12/2019 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bitlis Eren Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Doç. Dr. Erdal KORKMAZ (Başkan)	__________________
Dr. Öğr. Ufuk KAYA (Danışman)	__________________
Dr. Öğr. Üyesi Derya ARSLAN (Üye)	__________________

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …/…/…gün ve …/… Sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fatih Ahmet ÇELİK

Enstitü Müdür V.

BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI

ETİK BEYANI

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre hazırlamış olduğum "**Bazı Limit ve Süreklilik Çeşitleri Üzerine**" adlı tezimin özgün bir çalışma olduğunu, tez hazırlanırken tüm aşamalarda bilimsel etik ilkelerine uygun davrandığımı, tez kapsamında sunulan tüm verileri bilimsel etik ilkelerine uygun elde ettiğimi, tezde faydalandığım tüm eserlere atıf yaptığımı ve kaynaklar kısmında bu eserleri gösterdiğimi beyan ederim. 16/12/2019

Gökhan TURAN

İmza

ÖZET

BAZI LİMİT VE SÜREKLİLİK ÇEŞİTLERİ ÜZERİNE

Gökhan TURAN

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ufuk KAYA
Aralık 2019, 30 sayfa

Bu tez çalışmasında, matematik analizin temel kavramlarından biri olan limit kavramı ele alınmıştır. Klasik limit tanımına göre reel tanımlı ve reel değerli bir f fonksiyonunun bir $\alpha \in \mathbb{R}$ noktasında limitinin $L \in \mathbb{R}$ olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\{x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)\backslash\{\alpha\}: |f(x) - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesi boş küme olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısının bulunmasıdır. Bu çalışmada, yukarıdaki küme boş değil de daha farklı biçimde alındığında neler olduğu araştırılacaktır. Bu sayede yeni limit tanımları ve bu yeni limit tanımlarının bazı temel özellikleri (varlık, teklik, toplamsallık, çarpımsallık vs.) üzerine teoremler elde edilecektir. Ayrıca, elde ettiğimiz limit tanımları ile daha önceki limit tanımları karşılaştırılarak ve örnekler verilecektir.

Anahtar kelimeler: Limit, Süreklilik, Yaklaşık Limit, Lebesgue Ölçüsü, Ölçülebilir Fonksiyonlar.

ABSTRACT

ON SOME LIMIT AND CONTINUITY TYPES

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Ufuk KAYA
December 2019, 30 pages

In this thesis, the limit concept that is one of the fundamental concepts of mathematical analysis is considered. By the definition of the clasical limit, at a point $\alpha \in \mathbb{R}$, the limit of a function f from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ is $L \in \mathbb{R}$ if and only if there exists $\delta > 0$ such that the set

$$\{x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)\backslash\{\alpha\}: |f(x) - L| \geq \varepsilon\}$$

is empty for each $\varepsilon > 0$. In this study, it is investigated what happens when the above set is not empty. In this way, new limit definitions are obtained. Theorems on some basic properties of these new limit definitions (existence, uniqueness, additivity, multiplicitivity, etc.) are obtained. In addition, the limit definitions we have obtained are compared with the previous limit definitions and some examples are given.

Keywords: Limit, Continuity, Approximate Limit, Lebesgue Measure, Measurable Functions.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunun belirlenmesinde ve tezin hazırlanmasında yardımlarını benden esirgemeyen, bildiği her şeyi benimle paylaşan ve bilmediklerimi öğreten tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Ufuk KAYA'ya teşekkürlerimi borç bilirim.

Eğitim hayatımın en başından bugüne kadar desteklerini her an yanımda bulduğum, haklarını hiçbir şekilde ödeyemeyeceğim, hayatlarını evlatlarına adayan değerli annem Mecbüre TURAN ve babam Ahmet TURAN'a sonsuz teşekkür ve minnettarlığımı sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
C	Cantor kümesi
$\sum$	Toplam sembolü
$D(x)$	Dirichlet fonksiyonu
μ	Ölçü
μ^*	Dış ölçü
λ^*	Lebesgue dış ölçüsü
$\Delta(x, E)$	x'in E kümesi üzerindeki yoğunluğu
$\lvert A \rvert$	A'nın ölçüsü
$\ell(I_k)$	I_k aralığının uzunluğu
A'	A'nın yığılma noktaları kümesi

1.GİRİŞ

Limit kavramı analizin en temel kavramlarındandır. Limiti ilk olarak 17. yüzyılın ünlü matematikçilerinden Isaac Newton ve Gottfried Leibniz tanımlamışlar ve bazı karmaşık limitleri hesaplamışlardır. Isaac Newton ve Gottfried Leibniz'den önceki dönemlerde de limit kullanılmış ama o döneme kadar unutulmaya yüz tutmuştur. Newton ile Leibniz'in eserlerinde sıkça Limit kavramı kullanılmıştır. Bu dönemden sonra Limit kavramına daha da önem verilmiştir. Cauchy ile birlikte sonsuza kadar küçülen ve sonsuza kadar büyüyen sayılar kuramı "Limit kuramı" na yerini bırakmıştır. Cauchy yayınladığı eserinde limiti "Bir değişkenin ardışık değerleri, sabit bir sayıya olabildiğince çok yaklaştığında elde edilen son değerdir" şeklinde tanımlamıştır. Cauchy tarafından yapılan bu tanım günümüz matematiğinde kullandığımız tanıma en yakın tanımdır. Günümüz matematiğinde kullandığımız tanım Weierstrass tarafından verilmiştir.

Limit bize anlamsız gözüken şeyleri anlamlı kılmaya yöneliktir. Limit, nokta belirli bir sayıya yaklaşırken, bir fonksiyonun değerinin yaklaştığı değerdir. Süreklilik ise fonksiyonun limiti ile değerinin çakışması halidir.

Limit tanımına göre reel tanımlı ve reel değerli bir f fonksiyonunun bir $\alpha \in \mathbb{R}$ noktasında limitinin $L \in \mathbb{R}$ olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\{x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)\backslash\{\alpha\} : |f(x) - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesi boş küme olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısının bulunmasıdır. Denjoy [3] bu kümeyi sıfır yoğunluklu alarak yaklaşık limit (approximate limit) kavramına giriş yapmış ve yaklaşık limit kavramının özelliklerini incelemiştir. Bu konudaki en önemli teoremi "Bir fonksiyonun ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul fonksiyonun hemen hemen her yerde yaklaşık sürekli olmasıdır" biçimindedir.

Biz ise, bu çalışmada, yukarıda verilen küme boş ya da sıfır yoğunluklu değil de daha farklı biçimde alındığında neler olduğunu araştıracağız. Bu küme sonlu, yığılma noktaları kümesi boş, sayılabilir veya sıfır ölçülü olduğunda limit tanımının nasıl olduğunu, bu şekilde yeni limit tanımı verilip verilmeyeceğini bu tezde araştıracağız. Yeni bir limit tanımı verdiğimizde öncelikle bu yeni tanımın daha önceki verilen limit tanımları ile aynı olup olmadığını örnekler ya da teoremlerle kontrol edip eğer farklı ise bu yeni kavramın temel özelliklerini inceleyeceğiz. Bu temel özellikler varlık, teklik, toplamsallık, çarpımsallık gibi özelliklerdir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, bulgular kısmında kullanılacak bazı tanımlar ve temel teoremler verilecektir.

2.1. Limit

Tanım 2.1.1. [2]. δ bir pozitif sayı olsun. $K = \{x \in \mathbb{R}: |x - x_0| < \delta\}$ kümesine x_0 noktasının δ komşuluğu denir.

Tanım 2.1.2. [2]. $A \subset \mathbb{R}$ ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. x_0 noktasının her δ komşuluğunda A kümesinin x_0 dan farklı en az bir elemanı varsa bu x_0 noktasına A kümesinin bir yığılma noktası denir.

Tanım 2.1.3. [2]. $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $L \in \mathbb{R}$ ve x_0 da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, eğer $0 < |x - x_0| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ kalacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x, x_0'a yaklaştığında f nin limiti L dir denir ve $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ biçiminde gösterilir. Örneğin,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

dir.

Teorem 2.1.1. [2]. $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ ve $g: A \to \mathbb{R}$ birer fonksiyon, $x_0, \lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ve $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ limitleri varsa

1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f.g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) . \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
3) Her $x \in A$ için $g(x) \neq 0$ ve $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$ ise

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$

4) Her $\lambda \in A$ için $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda . f)(x) = \lambda . \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

olur.

2.2. Süreklilik

Tanım 2.2.1. [2]. $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in A$ olsun. f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir. $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

dur. Örneğin, $\cos x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$'nin her bir noktasında, $\frac{1}{1-x^2}$ fonksiyonu ise $\mathbb{R} \backslash \{-1,1\}$ kümesinin her bir noktasında süreklidir.

2.3. Ölçü

Tanım 2.3.1. [1]. X bir küme olsun. X in $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanırsa bu $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir cebirdir denir.

i) $X \in \mathcal{A}$

ii) Her $E \in \mathcal{A}$ için $E^c = X \backslash E \in \mathcal{A}$

iii) $k = 1, 2, \dots, n$ için $E_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

Eğer (iii) yerine "Her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$" şartı alınırsa $\mathcal{A}$ cebirine bir σ-cebir adı verilir.

Tanım 2.3.2. [1]. X bir küme $\mathcal{A}$ da X üzerinde bir σ-cebir olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) Her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0$

iii) Her ayrık $\{A_n\}$ dizisi için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlarsa bu fonksiyona bir ölçü fonksiyonu veya kısaca ölçü adı verilir.

Tanım 2.3.3. [1]. X bir küme ve $P(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

ii) Her $E \in P(x)$ için $\mu^*(E) \geq 0$

iii) $A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

iv) Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in P(X)$ ise $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

şartlarını sağlıyorsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçüdür denir.

Tanım 2.3.4. [1]. (I_k), $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının dizisi

$$\mathcal{T}_A = \{(I_k): A \subset \cup I_k\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$\lambda^*(A) = inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k): (I_k) \in \mathcal{T}_A\right\}$$

biçiminde tanımlanan λ^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsü adı verilir.

Teorem 2.3.1. [1]. A sayılabilir bir küme ise $\lambda^*(A) = 0$ dır.

Tanım 2.3.5. [1]. X bir küme, μ^* da X üzerinde bir dış ölçü olsun. Eğer X in her bir A alt kümesi için

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

ise X in E alt kümesi μ^* ölçülebilir denir.

Teorem 2.3.2. [1]. A ve B μ^* ölçülebilir kümeler ise $A \cup B$ de μ^* ölçülebilirdir.

Teorem 2.3.3. [1]. X bir küme, μ^* X üzerinde bir dış ölçü ve $\mathcal{M}(X,\mu^*)$ da X üzerinde μ^* ölçülebilir kümelerin sınıfı olsun

i) $\mathcal{M}(X,\mu^*)$ bir σ cebirdir.

ii) μ^* ın $\mathcal{M}(X,\mu^*)$ sınıfına kısıtlanması bir ölçüdür.

Tanım 2.3.6. [1]. $(X,\mu,\mathcal{A})$ bir ölçü uzayı olsun. $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna ölçülebilirdir denir $\Leftrightarrow$ $\forall a \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}\big((a,+\infty)\big) = \{x \in X: f(x) > a\} \in \mathcal{A}.$$

2.4 Yaklaşık Limit

Tanım 2.4.1. [6]. $E \subset \mathbb{R}$ ve $c \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{|E \cap (c-\delta, c+\delta)|}{2\delta}$$

limiti varsa bu limite c noktasının E kümesi üzerindeki yoğunluğu denir ve $\Delta(c, E)$ ile gösterilir. Tanımdan da anlaşılacağı gibi $0 \leq \Delta(c, E) \leq 1$'dir.

Tanım 2.4.2. [6]. $E \subset \mathbb{R}$ ölçülebilir bir küme. $f: E \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon, $c \in \mathbb{R}$, $\Delta(c, E) > 0$ ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\Delta(c, \{x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}: |f(x) - L| \geq \varepsilon\}) = 0$ olacak biçimde $\delta > 0$ sayısı mevcut ise f'in c'deki yaklaşık limiti (approximate limiti) L'dir denir ve

$$ap \lim_{x \to c} f(x) = L$$

ile gösterilir.

Teorem 2.4.1. [6]. $E \subset \mathbb{R}$ ölçülebilir bir küme, $f: E \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon, $c, L \in \mathbb{R}$ ve $\Delta(c, E) > 0$ olsun. Bu durumda,

$$ap \lim_{x \to c} f(x) = L$$

olması için gerek ve yeter şart $f(x) = g(x) + h(x)$, $\lim_{x \to c} g(x) = L$ ve

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{|\{x \in E \cap (c-\delta, c+\delta): h(x) \neq 0\}|}{2\delta} = 0$$

koşullarını sağlayan $g, h: E \to \mathbb{R}$ ölçüleblir fonksiyonlarının var olmasıdır. Bu teoreme yaklaşık limitin ayrışım teoremi denir.

Teorem 2.4.2. [6]. $E \subset \mathbb{R}$ ölçülebilir bir küme, $c, \lambda, L_1, L_2 \in \mathbb{R}$, $\Delta(c, E) > 0$, $f_1, f_2: E \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonlar ve

$$ap \lim_{x \to c} f_1(x) = L_1, \quad ap \lim_{x \to c} f_2(x) = L_2$$

olsun. Bu durumda,

1) $ap \lim_{x \to c} \big(f_1(x) + f_2(x)\big) = L_1 + L_2$,
2) $ap \lim_{x \to c} \big(f_1(x).f_2(x)\big) = L_1.L_2$,
3) $ap \lim_{x \to c} \lambda.f_1(x) = \lambda.L_1$,
4) $ap \lim_{x \to c} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ $(L_2 \neq 0)$

bağıntıları sağlanır.

3. BULGULAR

Bu tezde limit tanımlarını T1, T2… şeklinde tanımlayacağız. İlk olarak temel limit tanımını vereceğiz. Bu limit tanımını T1 olarak adlandıracağız.

Tanım 3.1. $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $L \in \mathbb{R}$ ve x_0 da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A : |f(x) - L| \geq \varepsilon\} = \emptyset$$

olacak biçimde bir $\delta_\varepsilon > 0$ sayısı varsa ise f'in x_0'daki limiti L'dir. Biz tezde bu durumu

$$T1 \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

olarak göstereceğiz. Şimdi bir başka limit tanımı olan aproximate limit tanımını T2 olarak tanımlayacağız.

Tanım 3.2. $A \subset \mathbb{R}$ ölçülebilir bir küme, $f: A \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon, $x_0, L \in \mathbb{R}$ ve $\Delta(x_0, A) > 0$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\Delta(x_0, \{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A : |f(x) - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

olacak biçimde $\delta_\varepsilon > 0$ sayısı varsa f'in yaklaşık limiti L'dir denir. Biz tezde bu durumu

$$T2 \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

olarak göstereceğiz.

T2 limiti ile T1 limiti arasında bir bağlantı vardır. T1 limiti varsa T2 limiti de vardır ve bunlar aynıdır:

$$T1 \lim_{x \to x_0} f(x) = L \Longrightarrow T2 \lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Bu ifadenin tersi doğru değildir. Bir örnekle açıklayalım:

Örnek 3.1: $D: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

fonksiyonu Dirichlet fonksiyonu olarak bilinir. $x_0 \in \mathbb{R}$ alalım. $T1 \lim\limits_{x \to x_0} D(x)$ yoktur. Fakat $L = 0$ için

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{|\{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\} : |D(x)| \geq \varepsilon\}|}{2\delta} = 0,$$

yani $T2 \lim\limits_{x \to x_0} D(x) = 0$ dır. Sonuçta T2 limiti varken T1 limiti yoktur.

T1 ve T2 limitinden yola çıkarak yeni limit tanımları vereceğiz. Bu limit tanımlarının tanımlanmış limitlerden farklı olup olmadığını inceleyeceğiz. Şimdi T3 limitini verelim:

Tanım 3.3. $A \subset \mathbb{R}$ bir küme, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $x_0, L \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A : |f(x) - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesi sonlu olacak biçimde bir $\delta_\varepsilon > 0$ varsa f'in T3 limiti L'dir diyeceğiz. Biz tezde bu durumu

$$T3 \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

olarak göstereceğiz.

Teorem 3.1. $A \subset \mathbb{R}$ bir küme, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $x_0, L \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda,

$$T1 \lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff T3 \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

koşulu sağlanır. Yani tanımladığımız T3 limiti aslında temel limit tanımıyla aynıdır.

İspat: $T1 \lim_{x\to x_0} f(x) = L$ olsun. Bu durumda

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A : |f(x) - L| \geq \varepsilon\} = \emptyset$$

olur. Yani $\{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A : |f(x) - L| \geq \varepsilon\}$ kümesi sonludur. Buradan $T3 \lim_{x\to x_0} f(x) = L$ yazılır. Tersine, $T3 \lim_{x\to x_0} f(x) = L$ olsun. O halde,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A : |f(x) - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesi sonludur. Bu kümeyi $\{t_1, t_2, t_3, \dots, t_n\}$ ile gösterelim.
$\delta'_\varepsilon = \min_{1\leq k\leq n} |t_k - x_0|$ yazarsak

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta'_\varepsilon > 0 : \{x \in (x_0 - \delta'_\varepsilon, x_0 + \delta'_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A : |f(x) - L| \geq \varepsilon\} = \emptyset$$

olur. Bu da $T1 \lim_{x\to x_0} f(x) = L$ olduğunu gösterir. Şimdi T4 limiti için gerekli olan bir lemma verelim:

Lemma 3.1. $A \subset \mathbb{R}$ sınırlı bir küme olsun. O halde, A sonludur $\Leftrightarrow$ $A' = \emptyset$.

Tanım 3.4. $A \subset \mathbb{R}$ bir küme, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0, L \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A : |f(x) - L| \geq \varepsilon\}' = \emptyset$$

olacak biçimde bir $\delta_\varepsilon > 0$ varsa f'in T4 limiti L'dir diyeceğiz. Biz tezde bu durumu

$$T4 \lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

olarak göstereceğiz. Buradan Lemma 3.1. yardımıyla

$$T1 \Leftrightarrow T3 \Leftrightarrow T4$$

gerekliliklerin doğruluğu görülür. Yani T1, T3 ve T4 limitleri aynıdır. Şimdi farklı bir limit tanımı olan T5 limitini verelim:

Tanım 3.5. $A \subset \mathbb{R}$ bir küme, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $x_0, L \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A: |f(x) - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesi sayılabilir olacak biçimde bir $\delta_\varepsilon > 0$ varsa f'in T5 limiti L'dir diyeceğiz. Biz tezde bu durumu

$$T5 \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

olarak göstereceğiz. T5 limitinin önceki verdiğimiz limitlerden farklı olduğunu bir örnekle gösterelim:

Örnek 3.2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \exists n \in \mathbb{N} : x = \dfrac{1}{n}, \\ 0, & diğer\ durumlarda, \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu fonksiyonun limitini hesaplayalım.

$$x_n = \frac{1}{n}, t_n = \frac{e}{n}$$

olarak alırsak

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} t_n = 0$$

olduğu görülür. $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 1$, $\lim_{n \to \infty} f(t_n) = 0$ ve $1 \neq 0$ olduğundan $T1 \lim_{x \to 0} f(x)$ yoktur. T5 limitinin varlığını göstermek için $L = 0$ olarak alalım. $\forall \varepsilon, \delta > 0$ için

$$\{x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\} : \ |f(x)| \geq \varepsilon\} \subset \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

bağıntısı doğrudur. O halde $\forall\varepsilon, \delta > 0$ için

$$\{x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\} : |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

kümesi sayılabilir bir kümedir. Buna göre,

$$T5 \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

olur. Bu bilgilere göre aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz:

$$T1 \Longrightarrow T5, \qquad T5 \nRightarrow T1$$

Yani T1 limiti varsa T5 limiti de vardır. Bunun tersi doğru değildir. Sayılabilir her küme sıfır ölçülü olduğundan, T5 limiti varsa T2 limitinin de var olduğunu açıktır. Şimdi tersinin doğru olmadığını göstereceğiz. Bunun için Cantor kümesini tanımlayalım ve bazı özelliklerini verelim.

Tanım 3.6.[4]. $[0, 1]$ kapalı aralığı üç eşit parçaya bölelim ve $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ açık doğru parçası olan ortadaki kısmı atalım. Böylece,

$$T_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

kümesini elde ederiz. Aynı işlemi kalan kısımlara uygularsak geriye,

$$T_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

kümesi kalır. Bu şekilde üçe bölme işlemlerine devam edilerek, $T_1, T_2, \ldots$ kümelerini buluruz. Tanım olarak Cantor kümesi,

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} T_i$$

şeklinde verilir.

Teorem 3.2.[4] Cantor kümesi sayılabilir bir küme değildir fakat ölçüsü sıfırdır, yani $\lambda^*(C) = 0$ dır.

Örnek 3.3: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in C, \\ 0, & x \notin C, \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım ve

$$x_0 = 0, L = 0$$

olarak seçelim. Buna göre,

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{\delta \to 0^+} \frac{|\{x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}: |f(x)| \geq \varepsilon\}|}{2\delta} = 0$$

olduğundan

$$T2 \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

elde edilir. Şimdi bu fonksiyonun T5 limitinin var olmadığını göstermek için aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma 3.2. $\forall \delta > 0$ için $C \cap (0, \delta)$ sayılamaz bir kümedir.

İspat: $\delta > 0$ olduğunda $\exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{3^n} < \delta$. $\left[0, \frac{1}{3^n}\right]$ aralığı Cantor kümesini tanımlarken kullandığımız T_n'in birinci parçasıdır. Cantor kümesini inşa ederken bu parça da üçe bölünmeler biçiminde devam eder. $\varphi: C \cap \left[0, \frac{1}{3^n}\right] \to C$, $\varphi(x) = 3^n x$ olarak tanımlarsak, bu fonksiyonunun birebir ve örten olduğu açıktır. Aslında $C \cap \left[0, \frac{1}{3^n}\right]$ kümesi sadece Cantor kümesinin 3^n kat daralmış halidir. Bu yüzden $C \cap \left[0, \frac{1}{3^n}\right]$ de sayılamazdır. $C \cap [0, \delta)$ kümesi $C \cap \left[0, \frac{1}{3^n}\right]$ kümesini kapsadığından $C \cap [0, \delta)$ de sayılamazdır. Sonuç olarak $C \cap (0, \delta)$ kümesi de sayılamazdır. Şimdi Örnek 3.3'te tanımladığımız f fonksiyonunu incelemeye devam edelim:

$\forall\delta > 0$ için $\left\{x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\} : |f(x)| \geq \frac{1}{2}\right\} = C \cap (0, \delta)$ sayılamaz bir kümedir. $T5 \lim_{x \to 0} f(x) \neq 0$ veya yoktur. Bu bilgilere göre aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz:

$$T1 \Rightarrow T5, \qquad T5 \nRightarrow T1$$
$$T5 \Rightarrow T2, \qquad T2 \nRightarrow T5$$

Şimdi, T5 limitinin tekliğini aşağıdaki teoremle ispatlayalım.

Teorem 3.3. $A \subset \mathbb{R}$ ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. x_0'da $T5$ limiti var olan her $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $T5 \lim_{x \to x_0} f(x)$ tektir $\Leftrightarrow \forall\delta > 0, (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \cap A$ kümesi sayılamazdır.

İspat: x_0'da $T5$ limiti var olan her $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $T5 \lim_{x \to x_0} f(x)$ tek olsun. "$\forall\delta > 0, (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \cap A$ kümesi sayılamazdır" önermesinin aksini varsayalım. Yani, $\exists\delta_0 > 0, (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A$ sayılabilir olsun. O halde,

$$\{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \cap A: |f(x) - L| \geq \varepsilon\} \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \cap A$$

olduğundan $\forall\delta < \delta_0$, $\forall L \in \mathbb{R}$ için

$$\{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \cap A: |f(x) - L| \geq \varepsilon\}$$

sayılabilir olur. Buna göre, $\forall L \in \mathbb{R}$ için

$$T5 \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

eşitliği sağlanır. Yani f'in sonsuz farklı $T5$ limiti vardır. O zaman varsayım yanlıştır. $\forall\delta > 0$ için $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \cap A$ sayılamazdır. Şimdi teoremin diğer tarafını ispatlayalım. $\forall\delta > 0, (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \cap A$ sayılamaz olsun. $T5 \lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ ve $T5 \lim_{x \to x_0} f(x) = L_2$ olsun. Buna göre $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta'_\varepsilon > 0$ $\{x \in (x_0 - \delta'_\varepsilon, x_0 + \delta'_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A: |f(x) - L_1| \geq \varepsilon\}$ sayılabilirdir ve $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta''_\varepsilon > 0$ $\{x \in (x_0 - \delta''_\varepsilon, x_0 + \delta''_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A: |f(x) - L_2| \geq \varepsilon\}$ sayılabilirdir.

$$\delta_\varepsilon = \min\{\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon\}$$

seçelim. Buradan,

$$A_1^\varepsilon = \{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A \colon |f(x) - L_1| \geq \varepsilon\}$$

ve

$$A_2^\varepsilon = \{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A \colon |f(x) - L_2| \geq \varepsilon\}$$

sayılabilir küme olur. O halde$A_1^\varepsilon \cup A_2^\varepsilon$ da sayılabilirdir. O halde

$$\forall \varepsilon > 0, \{(x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A\} \setminus (A_1^\varepsilon \cup A_2^\varepsilon) \neq \emptyset.$$

Buradan, $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A\ x_\varepsilon \notin A_1^\varepsilon$ ve $x_\varepsilon \notin A_2^\varepsilon$ ve sonuç olarak $\forall \varepsilon > 0, |f(x_\varepsilon) - L_1| < \varepsilon$ ve $|f(x_\varepsilon) - L_2| < \varepsilon$ elde edilir.

$$\forall \varepsilon > 0, |L_1 - L_2| = |L_1 - f(x_\varepsilon) + f(x_\varepsilon) - L_2| \leq |f(x_\varepsilon) - L_1| + |f(x_\varepsilon) - L_2| < 2\varepsilon$$

sağlandığından $L_1 = L_2$ olur. Burdan T5 limiti varsa tektir sonucuna ulaşırız.

T5 limitinin aşağıdaki gibi bir ayrışım teoremini sağladığını gösterelim.

Teorem 3.4. $A \subset \mathbb{R}$, $f \colon A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0, L \in \mathbb{R}$ olsun. $T5 \lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \exists g, h \colon A \to \mathbb{R} :\ \forall x \in A, f(x) = g(x) + h(x),\ \lim_{x \to x_0} g(x) = L$ ve $\exists \delta_0 > 0 : \{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A \colon h(x) \neq 0\}$ sayılabilirdir.

İspat: "$\exists g, h \colon A \to \mathbb{R} \colon \forall x \in A, f(x) = g(x) + h(x) :\ \lim_{x \to x_0} g(x) = L,\quad \exists \delta_0 > 0 : \{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A \colon h(x) \neq 0\}$ sayılabilirdir" önermesini doğru kabul edelim ve $T5 \lim_{x \to x_0} f(x) = L$ olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$ olduğundan

$$\exists \delta_\varepsilon^* > 0 :\ \{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon^*, x_0 + \delta_\varepsilon^*) \setminus \{x_0\} \cap A \colon |g(x) - L| \geq \varepsilon\} = \emptyset$$

olur. $\delta_\varepsilon = \min\{\delta_\varepsilon^*, \delta_0\}$ seçelim.

$$\{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A : |f(x) - L| \geq \varepsilon\}$$
$$\subset \{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A : h(x) \neq 0\}$$

sağlandığından ve sağ taraftaki küme sayılabilir olduğundan soldaki küme de sayılabilirdir. O halde

$$T5 \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

sağlanır.

Şimdi $T5 \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ varsayalım. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$:

$$\{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A : |f(x) - L| \geq \varepsilon\}$$

sayılabilirdir. $\varepsilon = \frac{1}{n}$ seçelim. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \delta_n > 0$:

$$\left\{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A : |f(x) - L| \geq \frac{1}{n}\right\} = A_n$$

sayılabilirdir. $g: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$g(x) = \begin{cases} L \quad , & \exists k \in \mathbb{N} : x \in A_k, \\ f(x), & diğer\ durumlarda. \end{cases}$$

$\varepsilon > 0$ için $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$. $0 < |x - x_0| < \delta_n$ ve $x \in A$ olsun. $\exists k \in \mathbb{N} : x \in A_k$ ise $|g(x) - L| = 0 < \varepsilon$ olur. $\forall k \in \mathbb{N}, x \notin A_k$ ise, A_k kümelerinin ve g fonksiyonunun tanımına göre $|g(x) - L| = |f(x) - L| < \frac{1}{n} < \varepsilon$ olur. Bu da $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$ olduğunu gösterir.

$h: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $h(x) = f(x) - g(x)$ olarak tanımlayalım. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\{x \in (x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n) \setminus \{x_0\} \cap A : h(x) \neq 0\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

olur. Dolayısıyla $\{x \in (x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n) \setminus \{x_0\} \cap A: h(x) \neq 0\}$ sayılabilirdir. $\delta_0 = sup\delta_n$ olarak seçelim.

$$\{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A: h(x) \neq 0\}$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in (x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n) \setminus \{x_0\} \cap A: h(x) \neq 0\}$$

olduğundan $\{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A: h(x) \neq 0\}$ kümesi de sayılabilir bir kümedir. Bu şekilde Teorem 3.4'ün ispatı bitmiş olur.

T5 limitinin bazı cebirsel özellikleri aşağıdaki şekildedir:

Teorem 3.5. $A \subset \mathbb{R}, f_1, f_2: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar ve $x_0, \lambda, L_{1,} L_2 \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda, $T5 \lim_{x \to x_0} f_1(x) = L_1$ ve $T5 \lim_{x \to x_0} f_2(x) = L_2$ ise

1) $T5 \lim_{x \to x_0} \big(f_1(x) + f_2(x)\big) = L_1 + L_2$,
2) $T5 \lim_{x \to x_0} \big(f_1(x). f_2(x)\big) = L_1. L_2$,
3) $T5 \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) = \frac{L_1}{L_2}$ $(L_2 \neq 0)$,
4) $T5 \lim_{x \to x_0} \lambda. f_1(x) = \lambda. L_1$

özellikleri sağlanır.

İspat:

$$T5 \lim_{x \to x_0} f_1(x) = L_1$$

olduğundan $\exists g_1, h_1: A \to \mathbb{R}: \ \forall x \in A, f_1(x) = g_1(x) + h_1(x): \ \lim_{x \to x_0} g_1(x) = L_1$ ve $\exists \delta_1 > 0:$ $\{x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \setminus \{x_0\} \cap A: h_1(x) \neq 0\}$ sayılabilirdir.

$$T5 \lim_{x \to x_0} f_2(x) = L_2$$

olduğundan $\exists g_2, h_2: A \to \mathbb{R}: \ \forall x \in A, f_2(x) = g_2(x) + h_2(x): \ \lim_{x\to x_0} g_2(x) = L_2$ ve $\exists \delta_2 > 0:$ $\{x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \setminus \{x_0\} \cap A: h_2(x) \neq 0\}$ sayılabilirdir. $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ seçelim.

1) $f_1(x) + f_2(x) = g_1(x) + g_2(x) + h_1(x) + h_2(x)$ ve $\lim_{x\to x_0}\big(g_1(x) + g_2(x)\big) = \lim_{x\to x_0} g_1(x) + \lim_{x\to x_0} g_2(x) = L_1 + L_2$ eşitlikleri doğrudur.

$$h_1(x) + h_2(x) \neq 0 \Longrightarrow h_1(x) \neq 0 \ \vee h_2(x) \neq 0$$

önermesi doğru olduğundan

$$\begin{gathered}\{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A: h_1(x) + h_2(x) \neq 0\} \\ \subset \{x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \setminus \{x_0\} \cap A: h_1(x) \neq 0\} \cup \\ \{x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \setminus \{x_0\} \cap A: h_2(x) \neq 0\}\end{gathered}$$

ifadesi de doğrudur. Sayılabilir kümelerin sonlu birleşimi sayılabilir. Sayılabilir kümenin tüm alt kümeleri de sayılabilirdir. Buna göre

$$\{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A: h_1(x) + h_2(x) \neq 0\}$$

sayılabilir bir kümedir. Buradan ve Teorem 3.4'ten

$$T5 \lim_{x\to x_0}\big(f_1(x) + f_2(x)\big) = L_1 + L_2$$

elde edilir.

2) $f_1(x). f_2(x) = g_1(x). g_2(x) + g_1(x). h_2(x) + h_1(x). g_2(x) + h_1(x). h_2(x) = g_1(x). g_2(x) + h_1(x). g_2(x) + \big(g_1(x) + h_1(x)\big). h_2(x)$ ve $\lim_{x\to x_0}\big(g_1(x). g_2(x)\big) = \lim_{x\to x_0} g_1(x). \lim_{x\to x_0} g_2(x) = L_1. L_2$ eşitlikleri doğrudur. $h(x) = h_1(x). g_2(x) + \big(g_1(x) + h_1(x)\big). h_2(x)$ yazalım.

$$\begin{gathered}\{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A: h(x) \neq 0\} \\ \subset \{x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \setminus \{x_0\} \cap A: h_1(x) \neq 0\}\end{gathered}$$

$$\cup \{x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \setminus \{x_0\} \cap A: h_2(x) \neq 0\}$$

bağıntısı doğru olduğundan $\{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A: h(x) \neq 0\}$ kümesi sayılabilirdir. Buradan ve Teorem 3.4'ten

$$T5 \lim_{x \to x_0} \big(f_1(x). f_2(x)\big) = L_1. L_2$$

elde edilir. 4)'ün ispatı f_2 fonksiyonu sabit fonksiyon ($f_2(x) = \lambda$) seçilerek kolayca elde edilir.

3) Öncelikle, $T5 \lim_{x \to x_0} f(x) = L$ ve $L \neq 0$ iken

$$T5 \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$$

olduğunu gösterelim. $T5 \lim_{x \to x_0} f(x) = L$ olduğundan ve Teorem 3.4'ten

$$f(x) = g(x) + h(x) : \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

$$\exists \delta_0 > 0 : \{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A: h(x) \neq 0\}$$

sayılabilir olacak biçimde g ve h fonksiyonlarının varlığı elde edilir.

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{g(x)} - \frac{h(x)}{g(x).\big(g(x) + h(x)\big)},$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L}$$

ve

$$\{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A: -\frac{h(x)}{g(x).\big(g(x) + h(x)\big)} \neq 0\}$$

$$\subset \{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A: h(x) \neq 0\}$$

olduğundan $\{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A: -\frac{h(x)}{g(x).(g(x)+h(x))} \neq 0\}$ sayılabilirdir. Buradan ve Teorem 3.4'ten

$$T5 \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$T5 \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right) = T5 \lim_{x \to x_0} f_1(x) \,.\, T5 \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

kolayca bulunur.

Tanım 3.7. $A \subset \mathbb{R}$ bir küme, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $x_0, L \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A : \ |f(x) - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak biçimde bir $\delta_\varepsilon > 0$ varsa f'in T6 limiti L'dir diyeceğiz. Biz tezde bu durumu

$$T6 \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

olarak göstereceğiz. Burada $|.|$ kümenin Lebesgue ölçüsünü göstermektedir. Sayılabilir her kümenin ölçüsü sıfırdır. Buna göre $T5 \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Rightarrow T6 \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ önermesi doğrudur. Tersinin doğru olmadığını bir örnekle gösterelim:

Örnek 3.4: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in C, \\ 0, & x \notin C, \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Burada C Cantor kümesidir. $x_0 = L = 0$ alalım. Cantor kümesi sayılamaz olduğundan $T5 \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ yoktur. Öte yandan $\forall \varepsilon, \delta > 0$ için

$$|\{x \in (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \setminus \{0\} : \ |f(x)| \geq \varepsilon\}| \leq |\{x \in (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \setminus \{0\} : \ x \in C\}| = 0$$

eşitliği sağlanır. Tanım 3.7'den

$$T6 \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

elde edilir. Yani T5 limiti varsa T6 limiti vardır. T6 limiti varken T5 limiti olmayabilir. Şimdi T6 limiti ile T2 limiti arasındaki bağıntıyı inceleyelim: Bir kümenin ölçüsü sıfır ise ℝ'deki her nokta üzerindeki yoğunluğu sıfırdır. Buna göre T6 limiti varsa T2 limiti de vardır. Tersinin doğru olmadığını aşağıdaki örneklerle görelim:

Örnek 3.5.

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}, \frac{1}{n}\right)$$

olsun. Önce $\Delta(0, \Omega) = 0$ olduğunu gösterelim. Yani,

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{|\Omega \cap (-\delta, \delta)|}{2\delta} = 0$$

olduğunu göstermeliyiz. $\delta > 0$ için $\exists n_\delta \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_\delta + 1} \leq \delta < \frac{1}{n_\delta}$. Buna göre

$$\frac{|\Omega \cap (-\delta, \delta)|}{2\delta} \leq \frac{\left|\bigcup_{k=n_\delta}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{2^k}, \frac{1}{k}\right)\right|}{2 \frac{1}{n_\delta + 1}} = \frac{\sum_{k=n_\delta}^{\infty} \frac{1}{2^k}}{\frac{2}{n_\delta + 1}} = \frac{n_\delta + 1}{2^{n_\delta + 2}}$$

eşitsizliği doğrudur. $\delta \to 0^+ \Leftrightarrow n_\delta \to \infty$ olduğundan

$$0 \leq \Delta(0, \Omega) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{|\Omega \cap (-\delta, \delta)|}{2\delta} \leq \lim_{n_\delta \to \infty} \frac{n_\delta + 1}{2^{n_\delta + 1}} = 0$$

sağlanır. Yani $\Delta(0, \Omega) = 0$ olur.

İkinci olarak

$$\forall \delta > 0, |\Omega \cap (-\delta, \delta)| > 0$$

olduğunu gösterelim. $\delta > 0$ için $\exists n_\delta \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_\delta} < \delta$. Buna göre,

$$\bigcup_{k=n_\delta+1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{2^k}, \frac{1}{k}\right) \subset \Omega \cap (-\delta, \delta)$$

olur.

$$\left|\bigcup_{k=n_\delta+1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{2^k}, \frac{1}{k}\right)\right| = \sum_{k=n_\delta+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n_\delta+2}} > 0$$

olduğundan istenen elde edilir.

Örnek 3.6.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega, \end{cases}$$

olarak tanımlayıp $x_0 = L = 0$ alalım. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{|\{x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}: |f(x)| \geq \varepsilon\}|}{2\delta} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{|\Omega \cap (-\delta, \delta) \setminus \{0\}|}{2\delta} = \Delta(0, \gamma) = 0$$

olduğundan

$$T2 \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

olur. Öte yandan $\forall \varepsilon, \delta > 0$ için

$$|\{x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}: |f(x)| \geq \varepsilon\}| = |\Omega \cap (-\delta, \delta) \setminus \{0\}| > 0$$

olduğundan

$$T6 \lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$$

ya da fonksiyonun T6 limiti yoktur. Sonuç olarak T6 limiti varsa T2 limiti vardır. Ancak T2 limiti varken T6 limiti olmayabilir. Şimdi T6 limitinin tekliğini ispatlayalım.

Teorem 3.6. $A \subset \mathbb{R}$ ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. x_0'da $T6$ limiti var olan her $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $T6 \lim_{x\to x_0} f(x)$ tektir $\Leftrightarrow$ $\forall\delta > 0, |(x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\} \cap A| > 0$.

İspat: x_0'da $T6$ limiti var olan her $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $T6 \lim_{x\to x_0} f(x)$ tek olsun. "$\forall\delta > 0, |(x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\} \cap A| > 0$" önermesinin aksini varsayalım. Yani, $\exists\delta_0 > 0$:

$$|(x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\} \cap A| = 0$$

olsun. $\forall\delta < \delta_0$, $\forall L \in \mathbb{R}$ için

$$\{x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\} \cap A: |f(x) - L| \geq \varepsilon\} \subset (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\} \cap A$$

olduğundan

$$|\{x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\} \cap A: |f(x) - L| \geq \varepsilon\}| \leq |(x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\} \cap A| = 0$$

olur. Buna göre, $\forall L \in \mathbb{R}$ için

$$T6 \lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

eşitliği sağlanır. Yani f'in sonsuz farklı $T6$ limiti vardır. O zaman varsayım yanlıştır. $\forall\delta > 0$ için $|(x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\} \cap A| > 0$.

Şimdi teoremin diğer tarafını ispatlayalım. $\forall\delta > 0, (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\} \cap A$ sayılamaz olsun. $T6 \lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ ve $T6 \lim_{x\to x_0} f(x) = L_2$ varsayalım. O halde, $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon > 0$:

$$|\{x \in (x_0-\delta'_\varepsilon, x_0+\delta'_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A: |f(x) - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ve

$$|\{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon'', x_0 + \delta_\varepsilon'') \setminus \{x_0\} \cap A : |f(x) - L| \geq \varepsilon\}| = 0.$$

$\delta_\varepsilon = \min\{\delta_\varepsilon', \delta_\varepsilon''\}$ seçelim ve

$$A_1^\varepsilon = \{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A : |f(x) - L_1| \geq \varepsilon\}$$
$$A_2^\varepsilon = \{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A : |f(x) - L_2| \geq \varepsilon\}$$

olarak işaretleyelim. $|A_1^\varepsilon| = |A_2^\varepsilon| = 0$ olduğu açıktır. Buna göre $|A_1^\varepsilon \cup A_2^\varepsilon| \leq |A_1^\varepsilon| + |A_2^\varepsilon| = 0$ yazabiliriz. O halde $\forall \varepsilon > 0, \big((x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A\big) \setminus (A_1^\varepsilon \cup A_2^\varepsilon) \neq \emptyset$, yani $\forall \varepsilon > 0$ için $x_\varepsilon \notin A_1^\varepsilon$ ve $x_\varepsilon \notin A_2^\varepsilon$ olacak biçmde $x_\varepsilon \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A$ vardır. Buna göre $\forall \varepsilon > 0, |f(x_\varepsilon) - L_1| < \varepsilon$ ve $|f(x_\varepsilon) - L_2| < \varepsilon$ olur. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x_\varepsilon) + f(x_\varepsilon) - L_2| \leq |f(x_\varepsilon) - L_1| + |f(x_\varepsilon) - L_2| < 2\varepsilon,$$

yani $L_1 = L_2$ olur.

T6 limitinin aşağıdaki gibi bir ayrışım teoremini sağladığını gösterelim.

Teorem 3.7. $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0, L \in \mathbb{R}$ olsun. $T6 \lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \exists g, h: A \to \mathbb{R} : \forall x \in A, f(x) = g(x) + h(x), \lim_{x \to x_0} g(x) = L$ ve $\exists \delta_0 > 0$:

$$|\{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A : h(x) \neq 0\}| = 0.$$

İspat: "$\exists g, h: A \to \mathbb{R} : \forall x \in A, f(x) = g(x) + h(x) : \lim_{x \to x_0} g(x) = L, \quad \exists \delta_0 > 0 : |x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A : h(x) \neq 0| = 0$" önermesini doğru kabul edelim ve $T6 \lim_{x \to x_0} f(x) = L$ olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$ olduğundan

$$\exists \delta_\varepsilon^* > 0 : \{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon^*, x_0 + \delta_\varepsilon^*) \setminus \{x_0\} \cap A : |g(x) - L| \geq \varepsilon\} = \emptyset$$

olur. $\delta_\varepsilon = \min\{\delta_\varepsilon^*, \delta_0\}$ seçelim.

$$\{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A: |f(x) - L| \geq \varepsilon\}$$
$$\subset \{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A: h(x) \neq 0\}$$

sağlandığından ve sağ taraftaki küme sıfır ölçülü olduğundan soldaki küme de sıfır ölçülüdür. O halde

$$T6 \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

sağlanır.

Şimdi $T6 \lim_{x \to x_0} f(x) = L$ varsayalım. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$:

$$|\{x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap A: |f(x) - L| \geq \varepsilon\}| = 0.$$

$\varepsilon = \frac{1}{n}$ seçelim. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \delta_n > 0$:

$$\left|\left\{x \in (x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n) \setminus \{x_0\} \cap A: |f(x) - L| \geq \frac{1}{n}\right\}\right| = 0$$

olur.

$$A_n = \left\{x \in (x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n) \setminus \{x_0\} \cap A: |f(x) - L| \geq \frac{1}{n}\right\}$$

yazalım. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$, $|A_n| = 0$ olur. $g: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$g(x) = \begin{cases} L \quad, & \exists k \in \mathbb{N}: x \in A_k, \\ f(x), & diğer\ durumlarda. \end{cases}$$

$\varepsilon > 0$ için $\exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < \varepsilon$. $0 < |x - x_0| < \delta_n$ ve $x \in A$ olsun. $\exists k \in \mathbb{N}: x \in A_k$ ise $|g(x) - L| = 0 < \varepsilon$ olur. $\forall k \in \mathbb{N}, x \notin A_k$ ise, A_k kümelerinin ve g fonksiyonunun tanımına göre $|g(x) - L| = |f(x) - L| < \frac{1}{n} < \varepsilon$ olur. Bu da $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$ olduğunu gösterir.

$h: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $h(x) = f(x) - g(x)$ olarak tanımlayalım. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\{x \in (x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n) \setminus \{x_0\} \cap A: h(x) \neq 0\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

ve dolayısıyla

$$|\{x \in (x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n) \setminus \{x_0\} \cap A: h(x) \neq 0\}| \leq \left|\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right| = 0$$

olur. $\delta_0 = sup\delta_n$ olarak seçelim.

$$\begin{aligned}\{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A: h(x) \neq 0\}& \\ = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in (x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n) \setminus \{x_0\} \cap A: h(x) \neq 0\}&\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}&|\{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A: h(x) \neq 0\}| \\ &= \left|\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in (x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n) \setminus \{x_0\} \cap A: h(x) \neq 0\}\right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}|\{x \in (x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n) \setminus \{x_0\} \cap A: h(x) \neq 0\}| = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.\end{aligned}$$

sağlanır. Teorem 3.7'nin ispatı bitmiş olur.

T6 limitinin bazı cebirsel özellikleri aşağıdaki şekildedir:

Teorem 3.8. $A \subset \mathbb{R}, f_1, f_2: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar ve $x_0, \lambda, L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda, $T6 \lim_{x \to x_0} f_1(x) = L_1$ ve $T6 \lim_{x \to x_0} f_2(x) = L_2$ ise

1) $T6 \lim_{x \to x_0} \big(f_1(x) + f_2(x)\big) = L_1 + L_2$,
2) $T6 \lim_{x \to x_0} \big(f_1(x). f_2(x)\big) = L_1. L_2$,
3) $T6 \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) = \frac{L_1}{L_2}$ $(L_2 \neq 0)$,

4) $T6 \lim_{x \to x_0} \lambda . f_1(x) = \lambda . L_1$

özellikleri sağlanır.

İspat:

$$T6 \lim_{x \to x_0} f_1(x) = L_1$$

olduğundan $\exists g_1, h_1 : A \to \mathbb{R} : \forall x \in A, f_1(x) = g_1(x) + h_1(x) : \lim_{x \to x_0} g_1(x) = L_1$ ve $\exists \delta_1 > 0 :$ $|\{x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \setminus \{x_0\} \cap A : h_1(x) \neq 0\}| = 0.$

$$T6 \lim_{x \to x_0} f_2(x) = L_2$$

olduğundan $\exists g_2, h_2 : A \to \mathbb{R} : \forall x \in A, f_2(x) = g_2(x) + h_2(x) : \lim_{x \to x_0} g_2(x) = L_2$ ve $\exists \delta_2 > 0 :$ $|\{x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \setminus \{x_0\} \cap A : h_2(x) \neq 0\}| = 0.$ $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ seçelim.

1) $f_1(x) + f_2(x) = g_1(x) + g_2(x) + h_1(x) + h_2(x)$ ve $\lim_{x \to x_0} \left(g_1(x) + g_2(x)\right) = \lim_{x \to x_0} g_1(x) + \lim_{x \to x_0} g_2(x) = L_1 + L_2$ eşitlikleri doğrudur.

$$h_1(x) + h_2(x) \neq 0 \Longrightarrow h_1(x) \neq 0 \lor h_2(x) \neq 0$$

önermesi doğru olduğundan

$$\begin{gathered} \{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A : h_1(x) + h_2(x) \neq 0\} \\ \subset \{x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \setminus \{x_0\} \cap A : h_1(x) \neq 0\} \cup \\ \{x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \setminus \{x_0\} \cap A : h_2(x) \neq 0\} \end{gathered}$$

ifadesi de doğrudur. Sıfır ölçülü kümelerin sonlu birleşimi sıfır ölçülüdür ve ölçüsü sıfır olan bir kümenin tüm alt kümelerinin de ölçüsü sıfırdır. Buna göre

$$|\{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A : h_1(x) + h_2(x) \neq 0\}| = 0.$$

Buradan ve Teorem 3.7'den

$$T6 \lim_{x \to x_0} \big(f_1(x) + f_2(x)\big) = L_1 + L_2$$

elde edilir.

2) $f_1(x). f_2(x) = g_1(x). g_2(x) + g_1(x). h_2(x) + h_1(x). g_2(x) + h_1(x). h_2(x) = g_1(x). g_2(x) + h_1(x). g_2(x) + \big(g_1(x) + h_1(x)\big). h_2(x)$ ve $\lim_{x \to x_0} \big(g_1(x). g_2(x)\big) = \lim_{x \to x_0} g_1(x). \lim_{x \to x_0} g_2(x) = L_1. L_2$ eşitlikleri doğrudur. $h(x) = h_1(x). g_2(x) + \big(g_1(x) + h_1(x)\big). h_2(x)$ yazalım.

$$\begin{gathered}\{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A : h(x) \neq 0\} \\ \subset \{x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \setminus \{x_0\} \cap A : h_1(x) \neq 0\} \\ \cup \{x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \setminus \{x_0\} \cap A : h_2(x) \neq 0\}\end{gathered}$$

bağıntısı doğru olduğundan $|\{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A : h(x) \neq 0\}| = 0$ olur. Buradan ve Teorem 3.7'den

$$T6 \lim_{x \to x_0} \big(f_1(x). f_2(x)\big) = L_1. L_2$$

elde edilir. 4'ün ispatı f_2 fonksiyonu sabit fonksiyon ($f_2(x) = \lambda$) seçilerek kolayca elde edilir.

3) Öncelikle, $T6 \lim_{x \to x_0} f(x) = L$ ve $L \neq 0$ iken

$$T6 \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$$

olduğunu gösterelim. $T6 \lim_{x \to x_0} f(x) = L$ olduğundan ve Teorem 3.7'den

$$f(x) = g(x) + h(x) : \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

$$\exists \delta_0 > 0 : |\{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A : h(x) \neq 0\}| = 0$$

olacak biçimde g ve h fonksiyonlarının varlığı elde edilir.

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{g(x)} - \frac{h(x)}{g(x).\left(g(x)+h(x)\right)},$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L}$$

ve

$$\left\{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A : -\frac{h(x)}{g(x).\left(g(x)+h(x)\right)} \neq 0\right\}$$
$$\subset \{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A : h(x) \neq 0\}$$

olduğundan $\left|\left\{x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \cap A : -\frac{h(x)}{g(x).\left(g(x)+h(x)\right)} \neq 0\right\}\right| = 0$'dır. Buradan ve Teorem 3.7'den

$$T6 \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$T6 \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) = T6 \lim_{x \to x_0} f_1(x) \, . \, T6 \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

kolayca bulunur.

KAYNAKLAR

[1] Balcı M, 2012. Reel Analiz. Sürat Üniversite Yayınları. İstanbul.

[2] Balcı M, 2012. Analiz I. Sürat Üniversite Yayınları. İstanbul.

[3] Denjoy A, 1915. Sur les fonctions derivees sommables. Bulletin de la SMF, 43: 161-248.

[4] Dönmez A, 2001. Reel Analiz. Seçkin Yayınları. Ankara.

[5] Musayev B, Alp M, Mustafayev N, Ekincioğlu İ, 2003. Analiz I. Tekağaç Eylül Yayıncılık. Ankara.

[6] Pap E, 2002. Handbook of Measure Theory. Elsevier Academic Press Pub. Amsterdam.

ÖZGEÇMİŞ

1994 yılında Bitlis'in Tatvan ilçesinde doğdum. İlk, orta ve lise eğitimini Tatvan'da tamamladım. 2012 yılında Diyarbakır Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Matematik Öğretmenliğine kayıt yaptırdım. 2014 yılında Anadolu Üniversitesi Adalet Bölümüne kayıt yaptırdım. 2017 yılında her iki üniversiteden mezun oldum. 2017 yılında Siirt Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlk Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümüne kayıt yaptırdım. 2017 yılında Bitlis Eren Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans programına başladım ve halen yüksek lisans programına devam etmekteyim.

Gökhan TURAN