T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ VE FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

LUCAS SAYILARI YARDIMIYLA TANIMLANAN α. DERECEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Hacer DÖNMEZ

EYLÜL 2019

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

LUCAS SAYILARI YARDIMIYLA TANIMLANAN α. DERECEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Hazırlayan
Hacer DÖNMEZ

Danışman
Doç. Dr. Murat KARAKAŞ

Jüri Üyeleri
Doç. Dr. Muhammed ÇINAR
Doç. Dr. Murat KARAKAŞ
Dr. Öğr. Üyesi Nazlım Deniz ARAL

EYLÜL 2019

ONAY

Hacer DÖNMEZ tarafından hazırlanan "**Lucas Sayıları Yardımıyla Tanımlanan α. Dereceden İstatistiksel Yakınsaklık**" adlı tez çalışması 27/09/2019 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Doç. Dr. Muhammed ÇINAR	....
(Başkan)	
Doç. Dr. Murat KARAKAŞ	....
(Danışman)	
Dr. Öğr. Üyesi Nazlım Deniz ARAL	....
(Üye)	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 02/12/2019 gün ve 59/03 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fatih Ahmet ÇELİK

Enstitü Müdür V.

BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI
ETİK BEYANI

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre hazırlamış olduğum " **Lucas Sayıları Yardımıyla Tanımlanan α. Dereceden İstatistiksel Yakınsaklık**" adlı tezimin özgün bir çalışma olduğunu, tez hazırlanırken tüm aşamalarda bilimsel etik ilkelerine uygun davrandığımı, tez kapsamında sunulan tüm verileri bilimsel etik ilkelerine uygun elde ettiğimi, tezde faydalandığım tüm eserlere atıf yaptığımı ve kaynaklar kısmında bu eserleri gösterdiğimi beyan ederim. 22/10/2019

Hacer DÖNMEZ

ÖZET

LUCAS SAYILARI YARDIMIYLA TANIMLANAN
α. DERECEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Hacer DÖNMEZ

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Murat KARAKAŞ
Eylül 2019, 33 sayfa

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde konumuza temel oluşturan kavramlar açıklanarak, bu kavramlarla ilgili literatürde günümüze kadar yapılan araştırmalardan bahsedilmiş ve bu çalışmaların bir kısmına atıf yapılmıştır.

İkinci bölümde ise çalışmamıza temel oluşturan temel tanım ve teoremlerden bahsedilmiştir. Doğal yoğunluk kavramı tanımlanarak, doğal yoğunluk yardımıyla istatistiksel yakınsaklık ve α.dereceden istatistiksel yakınsaklık kavramları örneklerle açıklanmıştır.

Sonuçlarımızın yer aldığı üçüncü bölümde ise Lucas sayıları yardımıyla yeni bir regüler matris ve yeni bir dizi uzayı oluşturulmuştur. Bu matrisin terimleri yardımıyla elde edilen Lucas dizilerini kullanarak α. dereceden istatistiksel yakınsaklık kavramı ve α. dereceden istatistiksel yakınsaklıkla ilgili bazı özellikler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde elde ettiğimiz bulguların literatüre katkısı ve sonrasında neler yapılabileceği hakkında değerlendirmede bulunulmuştur.

Son bölümde ise bu çalışmanın tamamlanması sürecinde yararlandığımız makale, kitap ve tezlere atıf yapılmıştır.

Anahtar kelimeler: Doğal Yoğunluk, İstatistiksel Yakınsaklık, α. Dereceden İstatistiksel Yakınsaklık, Lucas Sayıları, Cesaro Toplanabilme.

ABSTRACT

STATISTICAL CONVERGENCE OF ORDER α DEFINED BY LUCAS NUMBERS

Hacer DÖNMEZ

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat KARAKAŞ
September 2019, 33 pages

In the first part of this study which consists of five parts, the concepts that form the basis for our subject are explained and some of the research that has been done in the literature about these concepts are mentioned and some of these studies have been referred to.

In the second part, the basic definitions and theorems that form the basis of our work are mentioned. With the help of the concept of natural density, we explain the concepts of statistical convergence and statistical convergence of order α with some examples.

In the third section in which we give our results, a new regular matrix and a new sequence space are created by using Lucas numbers. Using the Lucas sequences obtained by the help of the terms of this matrix, some properties related to statistical convergence and statistical convergence of order α are examined.

In the fourth section, we evaluate the contribution of the findings to the literature and what can be done afterwards.

In the last section, the articles, books and theses that we used during the completion of this study are cited.

Keywords: Natural density, statistical convergence, Statistical convergence of order α, Lucas Numbers, Cesaro Summability.

TEŞEKKÜRLER

Tüm lisansüstü eğitim sürecim boyunca ve bu çalışmanın her aşamasında, desteğini esirgemeyen tez danışman hocam Sayın Doç. Dr. Murat KARAKAŞ’ a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca hayatımın her noktasında destek ve sevgileriyle her zaman yanımda olan aileme özellikle tüm eğitim hayatım boyunca yanımda olan ve desteğini esirgemeyen halam Ayfer DÖNMEZ’e en içten teşekkürlerimi sunarım.

ÖNSÖZ

Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili son yıllarda dizi uzayları bakış açısıyla ve toplanabilme teorisiyle ilişkilendirilerek çalışmalar yapılmaktadır. İstatistiksel yakınsaklık kavramı da uzun yıllardır farklı isimler altında ve farklı bakış açılarıyla birçok alanda pek çok yazar tarafından çalışılmaktadır.

Son zamanlarda ise bu kavramlar bir araya getirilerek yeni sonuçlar elde edilmekte ve literatüre eklenmektedir. Bu bilgiler ışığında, tezimizde Lucas sayıları ve dereceli istatistiksel yakınsaklık kavramları birleştirilmeye ve yeni sonuçlar oluşturulmaya çalışılmıştır.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar
$\mathbb{K}$	Reel yada kompleks sayılar cismi
$\|K\|$	K kümesinin eleman sayısı
c_0	Reel yada kompleks değerli sıfıra yakınsak diziler uzayı
l_∞	Reel yada kompleks değerli sınırlı diziler uzayı
f_n	Fibonacci sayıları
L_n	Lucas sayıları
S	Bütün istatistiksel yakınsak diziler
S_0	Sıfıra istatistiksel yakınsak diziler
S^α	α.Dereceden istatistiksel yakınsak diziler uzayı
S_0^α	α. Dereceden sıfıra istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
$\bar{\delta}(K)$	K kümesinin üst asimptotik yoğunluğu
$\underline{\delta}(K)$	K kümesinin alt asimptotik yoğunluğu
$\aleph_K$	K kümesinin karekteristik fonksiyonu
C_1	Cesaro matrisi
w	Bütün reel ve kompleks terimli diziler uzayı
w_P	Kuvvetli $p - Cesaro$ toplanabilir diziler uzayı
w_p^α	α. Dereceden kuvvetli $p - Cesaro$ toplanabilir diziler uzayı

1. GİRİŞ

Fransız Matematikçi Edward Lucas tarafından tanımlanan Lucas sayı dizisi, Fibonacci sayı dizisindeki f_0= f_1 = 1, f_{n+1}=$f_n + f_{n-1}$, $n \geq 1$ başlangıç koşullarının, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ şeklinde değiştirilmesiyle L_n= L_{n-1} +L_{n-2}, $n \geq 2$ bağıntısı kullanılarak Fibonacci tekrarlama bağıntısına benzer bir şekilde elde edilmiştir. Günümüze dek yapılan araştırmalar bu iki sayı dizisi arasında ilginç bağıntıların olduğunu kanıtlamıştır.

İstatistiksel yakınsaklık düşüncesi ilk kez Zygmund [1], tarafından kendi monografisinin Varşova'da basılan ilk baskısında verildi ve bu kavram ilk defa Fast [2], tarafından tanımlandı. İstatistiksel yakınsaklık günümüze dek farklı isimler altında Fourier analiz teorisi, ergodic teori, sayılar teorisi, ölçü teorisi, trigonometrik seriler ve Banach uzaylar teorisinde tartışılmıştır. Daha sonra, dizi uzayları bakış açısı ve toplanabilme teorisiyle ilişkilendirilerek Schoenberg [3], Fridy [4], Connor [5], Fridy ve Orhan [6], Savaş [7], Mursaleen [8], Moricz [9], Bhardwaj ve Bala [10] tarafından araştırılmıştır. Son yıllarda, istatistiksel yakınsaklık kuvvetli integral toplanabilmede ve yerel kompakt uzaylar üzerinde tanımlı sınırlı sürekli fonksiyon ideallerinin yapısında görülmeye başlandı. Ayrıca, istatistiksel yakınsaklık olasılık teorisindeki yakınsaklık kavramıyla yakından ilişkilidir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramının klasik anlamda yakınsaklık kavramıyla da yakından ilişkisi vardır. Bu kavram $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin altkümelerinin yoğunluğuna bağlıdır. İstatistiksel yakınsaklığın temeli olan yoğunluk kavramı oldukça geniş bir kavram olup doğal yoğunluk, asimptotik yoğunluk, düzgün yoğunluk, rasyonel ve reel sayıların yoğunluğu, oran kümelerinin yoğunluğu v.b. gibi birbirinden farklı birçok şekilde tanımlanmıştır. Asimptotik yoğunluğun tam sayılar kümesi için genelleştirmesi Buck [11] tarafından verilmiştir. Freedman ve Sember [12] tarafından da tanımlama yapılarak bazı özellikleri incelenmiştir.

Bir sayı dizisi için dereceli istatistiksel yakınsaklık Gadjiev ve Orhan [13] tarafından verilmiş ve sonrasında Duman vd. [14] tarafından $A -$istatistiksel yakınsaklık metodu için genelleştirilmiştir. Daha sonra, sayı dizileri için α.dereceden istatistiksel yakınsaklık ve α. dereceden kuvvetli $p - Cesaro$ toplanabilme Çolak [15] tarafından çalışılmıştır.

Salat [16] ayrıca ω_0 ın ω, FK topolojisi ile verildiğinde ω' nın reel değerli dizilerinin birinci kategoriden bir alt kümesi olduğunu göstermiş ve $\omega_0{}'$ın bir açık teorik tanımını kurmuştur. Yine Salat [16], reel değerli sınırlı istatistiksel dizileri $l_\infty{}'$un kapalı bir alt uzayı formunda vermiştir.

Kuvvetli $p - Cesaro$ toplanabilmenin geçmişi uzun zaman belirgin olamamıştır. Kuvvetli Cesaro toplanabilme kavramı ilk olarak bir Fourier serisinin yakınsaklığına bağlı olarak Hardy ve Littlewood [17] tarafından ortak çalışmalarında belirtilmiştir. Ancak bu kavram, Kuttner [18] tarafından bir toplanabilme metodu olarak çalışılıncaya kadar ortada görünmemiştir. Maddox [19-20], ω_p'nin $1 \leq p < \infty$ iken bir BK uzayı olarak ve 0$< p < 1$ iken bir $p -$normlu uzay olarak ele alınabileceğine işaret etmiş, aynı zamanda $0 < p < \infty$ için $\omega_p$den c 'ye matris dönüşümlerini de karakterize etmiştir. Bu kavram sıkça genelleştirilmektedir ve fonksiyonel analizin bakış açısından sıkça ele alınmaktadır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. $X \neq \emptyset$ bir cümle ve K reel veya kompleks sayılar cismi olmak üzere,

$$+ : X \times X \to X,$$

$$. : K \times X \to X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) adı verilir. Her $x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu \in K$ için

- $x + y = y + x$
- $(x + y) + z = x(y + x)$
- $\forall\ x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir θ vardır.
- Her bir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x)$ vardır.
- $1. x = x$
- $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ [24].

Tanım 2.1.2. Lucas sayı dizisi L_0 = 2 ve L_1= 1 başlangıç koşulları ile verilen ve genel terimi

$$L_n = L_n - 1 + L_n - 2, \qquad n \geq 2$$

olan bir dizidir. Bu sayı dizisi

2,1,3,4,7,11,18,29,47,76,123,199,322,521,….

şeklinde oluşmuştur [22].

Tanım 2.1.3. $x = (x_k)$ dizisi bir P özelliğini yoğunluğu sıfır olan bir küme dışındaki her k için gerçekliyorsa x dizi P özelliğini hemen hemen her k için gerçekliyor denir [4].

Tanım 2.1.4. $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi verilmiş olsun. Eğer A matrisi yakınsak her diziyi yakınsak bir diziye limiti koruyarak dönüştürüyorsa A matrisine regüler matris denir ve $A \in (c, c, P)$ şeklinde gösterilir [23].

Tanım 2.1.5. X boş olmayan bir cümle olsun. $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,aşağıdaki şartları sağlıyorsa d'ye X üzerinde metrik veya uzaklık fonksiyonu (X, d) çiftine de metrik uzay denir [26].

- $\forall x, y \in X$ için, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x, y \in X$ için, $d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Tanım 2.1.6. X boş olmayan bir cümle ve " $\leq$" X'de bir bağıntı olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa "$\leq$ " bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı denir [26].

- $\forall x \in X$ için, $x \leq x$ (Yansıma özelliği)
- $(x \leq y$ ve $y \leq x)$ ise $x = y$ (Ters simetri özelliği)
- $(x \leq y\, ve\, y \leq z)$ ise $z \leq x$ (Geçişme özelliği)

Tanım 2.1.7. $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir cümle, $A \neq \emptyset$ ve $A \subset X$ olsun. $\forall x \in A$ için, $u \leq x$ olacak şekilde $u \in X$ varsa u'ya A' nın X'deki alt sınırı, $\forall x \in A$ için, $x \leq v$ olacak şekilde $v \in X$ varsa v'ye A nın X 'deki üst sınırı denir [26].

Tanım 2.1.8. $(X, \|.\|)$ Bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\, \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ iken

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [27].

Tanım 2.1.9. $w = \{x = (x_k) | x: \mathbb{N}^\circ \to \mathbb{K},\ k \to x_k = x(k)\}$ kümesi

$$\big((x_k), (y_k)\big) \to (x_k + y_k) \quad \text{ve} \quad \big(\lambda, (x_k)\big) \to (\lambda x_k)$$

ile tanımlı toplama ve skaler ile çarpma işlemleri ile birlikte $\mathbb{K}$ üzerinde bir lineer uzaydır. w lineer uzayı ve w nin her bir lineer alt uzayı dizi uzayı olarak adlandırılır. c_0, c ve l_∞ sırasıyla sıfıra yakınsak dizilerin uzayı, yakınsak diziler uzayı ve sınırlı diziler uzayı olarak adlandırılır. c_0, c ve l_∞ dizi uzayları $\|x\| = \sup\limits_k |x_k|$ normu ile birlikte birer normlu uzay oluşturur [23].

Tanım 2.1.10. Bir Banach uzayı tam normlu bir lineer uzaydır. Buradaki tamlık $x_n \in X$ için $\|x_m - x_n\|$→0 ve $m, n \to 0$ olduğunda bir $x \in X$ mevcuttur öyle ki,

$$\|x_n - x\| \to 0 \;\; (n \to \infty)$$

olur.

Tanım 2.1.11. X bir lineer topolojik uzay ve s bütün kompleks dizilerin uzayı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa X e bir FK −uzayı denir [28-29].

- X metriklenebilirdir.
- X tamdır.
- X'in koordinat izdüşümleri süreklidir.

Kısaca FK −uzayına Frechet koordinat uzayı da denir. Normlu bir FK −uzayına bir BK −uzayı denir. FK ve BK −uzaylarının topolojilerine FK ve BK −topolojisi denir.

Tanım 2.1.12. $A \subset \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. a noktasının her ε komşuluğunda A kümesinin a'dan farklı en az bir elamanı varsa, bu a noktasına A'nın bir yığılma noktasıdır denir [27].

Tanım 2.1.13. (X, d) bir metrik uzay ve (x_n), X'de bir dizi olsun.

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x)$$

olacak şekilde $x \in X$ varsa yakınsak (x_n), X 'de yakınsak ve dizinin limiti x ise bu, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x_n \to x$ veya $n \to \infty$ için $x_n \to x$ sembollerinden biri ile ifade edilir. $(x_n\ )$ yakınsak değilse ıraksaktır [26].

Teorem 2.1.14. (Silverman-Toeplitz) $A = (a_{nk}) \in (c: c; p)$ olması için gerek ve yeter şart;

- $sup_n \sum_k \left| a_{nk} \right| < \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$

- $\lim_{n\to\infty} \sum_k |a_{nk}| = 1$

koşullarının sağlanmasıdır [21].

Tanım 2.1.15. $n,k \in \mathbb{N}$ için $a_{nk} \in \mathbb{C}$ olmak üzere $(a_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ ifadesine bir sonsuz matris denir ve

$$A = (a_{nk}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

biçiminde gösterilir [21].

Teorem 2.1.16. X uzayı $\|.\|$ normuna göre bir BK −uzayı olsun. Bu takdirde $\forall x \in X_T$ için $\|X\|_T = \|T(x)\|$ olmak üzere X_T bir BK −uzayıdır [25].

2.2. İstatistiksel Yakınsaklık

İstatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamak için ilk önce doğal yoğunluğu açıklamamız gerekir. Çünkü pozitif tamsayılar kümesinin doğal yoğunluğunun sıfır olduğu durumlarda istatistiksel yakınsaklık incelenebilir.

Tanım 2.2.1.(Doğal Yoğunluk) $K \subseteq \mathbb{N}$ olsun. $K_n = \{m \le n : m \in K\}$ ifadesi için $\delta(K) = |\{m \le n : m \in K\}|$ ya da $\lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}$ limit değeri mevcutsa bu limit değerine K kümesinin yoğunluğu denir. Burada limit durumundaki çubuklar K_n kümesinin eleman sayısını göstermektedir.

$$\underline{d}_0(K) = \overline{d}_0(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{K(n)}{n}$$

şeklinde gösterilir. [32]

Her $\varepsilon > 0$ ve $x_0 \in \mathbb{R}$ için $K = K_n(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| \ge \varepsilon\}$ kümesinin eleman sayısı $|K|$ olarak gösterilmek üzere K kümesinin doğal yoğunluğu ya da asimptotik yoğunluğu

$$d_n(K) = \frac{1}{n}|\{k \le n : k \in K\}|$$

olarak gösterilir. Burada

$$\text{alt asimptotik yoğunluk} \Rightarrow \underline{d}_0(K) = \lim_n sup \frac{K(n)}{n}$$

$$\text{üst asimptotik yoğunluk} \Rightarrow \overline{d}_0(K) = \lim_n inf \frac{K(n)}{n}$$

şeklinde ifade edilir. Eğer $\lim_{n\to\infty} d_n(K) = d(K)$ ve $\lim_{n\to\infty} \delta_n(K) = \delta(K)$ limitleri mevcutsa $d(K)$'ya K'nın asimptotik yoğunluğu $\delta(K)$'ya ise K'nın logaritmik yoğunluğu denir. Benzer şekilde

$$\text{üst logaritmik yoğunluk} \Rightarrow \overline{\delta}_n(K) = \lim_{n\to\infty} sup\, \delta_n(K)$$

$$\text{alt logaritmik yoğunluk} \Rightarrow \underline{\delta}_n(K) = \lim_{n\to\infty} inf\ \delta_n(K)$$

eğer $\lim_{n\to\infty} d_n(K) = d(K)$ ve $\lim_{n\to\infty} \delta_n(K) = \delta(K)$ limitleri mevcutsa $d(K)$ ve $\delta(K)$ gösterimlerine sırasıyla K'nın asimptotik yoğunluğu ve K'nın logaritmik yoğunluğu denir. Her bir $K \subseteq \mathbb{N}$ için,

$$\underline{d}_0(K) \leq \underline{\delta}_0(K) \leq \overline{\delta}(K) \leq \overline{d}(K)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece $d(K)$ mevcutsa $d(K) = \delta(K)$ olacak şekilde $\delta(K)$ da mevcuttur. Ayrıca asimptotik ve logaritmik yoğunluk değerleri $[0,1]$ aralığındadır.[32]

Önerme 2.2.2. $\underline{\delta}(K)$ bir alt yoğunluk ve $\overline{\delta}(K)$ da bir üst yoğunluk olmak üzere $A \subseteq \mathbb{N}$ ve $B \subseteq \mathbb{N}$ için

- $A \subseteq B$ ise $\underline{\delta}(\text{A}) \leq \underline{\delta}(\text{B})$
- $A \subseteq B$ ise $\overline{\delta}(\text{A}) \leq \overline{\delta}(\text{B})$
- $\forall\, A, B$ için $\overline{\delta}(\text{A}) + \overline{\delta}(\text{B}) \geq \overline{\delta}(A \cup B)$
- $\underline{\delta}(\emptyset) = \overline{\delta}(\emptyset) = 0$
- $\underline{\delta}(\mathbb{N})$
- $A \sim B$ ise $\overline{\delta}(\text{A}) = \overline{\delta}(\text{B})$
- $\underline{\delta}(\text{A}) \leq \overline{\delta}(\text{A})$

özellikleri sağlanır.[32]

Örnek 2.2.3. $A = \{1,2,3,\dots\} = \mathbb{N}$ kümesi için $d_0 = 1$'dir. Gerçekten,

$$A(1) = 1,\ A(2) = 2,\ A(3) = 3, \dots A(n) = n$$

$$d_0(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1\text{'dir.}$$

Örnek 2.2.4. $K = \{2,4,6,\dots\}$ kümesinin iki farklı yoldan doğal yoğunluğunun $\frac{1}{2}$ olduğunu görebiliriz.

1.Yol: $K(1) = 0,\ K(2) = 1, K(3) = 1, A(4) = 2, \dots, K(n) = \left\|\frac{n}{2}\right\|$ olduğundan,

$$\underline{d}_0(K) = \overline{d}_0(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{K(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left\|\frac{n}{2}\right\|}{n} = \frac{1}{2}$$

olarak bulunur.

2.Yol:

$$\frac{A(n)}{n} = \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \dots, \frac{n}{2n}, \frac{n}{2n+1}$$

olup,

$$\underline{d}_0(K) = \lim_{n} inf \frac{K(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{d}_0(K) = \lim_{n} sup \frac{K(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

$$\underline{d}_0(K) = \overline{d}_0(K) = d_0(K) = \frac{1}{2}$$

Tanım 2.2.5. $x = (x_k)$ reel (ya da kompleks) değerli bir dizi olmak üzere $\forall\ \varepsilon > 0$ sayısı için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir x_0 sayısı mevcut ise bu $x = (x_k)$ dizisi x_0 sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. $st - \lim x = x_0$ ile gösterilir. Tanımdan da anlaşılacağı gibi istatistiksel yakınsaklık doğal yoğunluğun sıfır olduğu durumlarla ilgilenir [2].

h.h.k için $|x_k - x_0| < \varepsilon$ özelliği "bir $y = (y_k)$ dizisinin terimlerinin bir özelliği sıfır yoğunluklu bir cümle dışında bütün k'lar için sağlanması" olarak ifade edilir.

Şimdi istatistiksel yakınsaklık ile Cesaro matrisini karşılaştıralım. $C_1 = (c_{nk})$ Cesaro matrisi olmak üzere bu matris;

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 1 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases} \quad 1$$

ile verilir. $K(\varepsilon) = \{k: |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}$ ve $\lambda_{K(\varepsilon)}$, $K(\varepsilon)$ kümesinin karekteristik fonksiyonunu göstermek üzere,

$$st - \lim_k x_k = x_0 \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0,\ \ \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - x_0| > \varepsilon\}| = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0,\ \ \lim_n \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{K(\varepsilon)}(k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0,\ \ \lim_n (C_1 \lambda_{K(\varepsilon)})_n = 0$$

olduğu açıktır.

Teorem 2.2.6. Hiçbir matris toplanabilme metodu, istatistiksel yakınsaklık metodunu içermez.[6]

Teorem 2.2.7. $p \in \mathbb{N}$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır. [5]

- Bir dizi x_0 sayısına kuvvetli $p - Cesaro$ toplanabilir ise x_0 sayısına istatistiksel yakınsaktır.
- Sınırlı bir dizi x_0 sayısına istatistiksel yakınsak ise x_0 sayısına kuvvetli $p - Cesaro$ toplanabilirdir.

Lemma 2.2.8. $st - \lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ ve $st - \lim\limits_{k\to\infty} y_k = b$ ve c bir reel sayı olsun. Bu durumda

- $st - \lim\limits_{k\to\infty}(x_k + y_k) = a + b$
- $st - \lim\limits_{k\to\infty}(cx_k) = ca$.[16]

Örnek 2.2.9. Aşağıdaki gibi tanımlanan,

$$x = (x_n) = \begin{cases} n, & n = k^2 \\ 0, & n \neq k^2 \end{cases} \qquad (n = 1,2,3,\dots)$$

dizisini inceleyelim. Burada

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k \le n: |x_k - x_0| \ge \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir x_0 sayısı bulmalıyız.

$$n = k^2 \Rightarrow x_n = n \Rightarrow |n - 0| = |n| = n \ge \varepsilon \Rightarrow k^2 \ge \varepsilon \quad k \ge \sqrt{\varepsilon}$$

$$n \neq k^2 \Rightarrow x_n = 0 \Rightarrow |n - 0| = |0 - 0| = 0 \ge \varepsilon \Rightarrow Ç.K = \emptyset$$

Şimdi ise parçalı fonksiyonu birleşim şeklinde gösterelim.

$$|\{k \le n: |x_k - 0| \ge \varepsilon\}| = |\{k \le n: n = k^2, |x_k - 0| \ge \varepsilon\}| + |\{k \le n: n \neq k^2 |x_k - 0| \ge \varepsilon\}|$$

$$= \left|\left\{k \le n: n = k^2, k \ge \sqrt{\varepsilon}|x_k - x_0| \ge \varepsilon\right\}\right| + |\{k \le n: n \neq k^2, 0 \ge \varepsilon\}|$$

Her iki tarafın doğal yoğunluğuna bakacak olursak,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k \le n: |x_k - 0| \ge \varepsilon\}|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k \le n: n = k^2, k \ge \varepsilon\}| + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k \le n: n \neq k^2, 0 \ge \varepsilon\}|$$

$$\le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt{n} + 0 = 0$$

Dolayısıyla (x_n) dizisinin $st - limx = 0$ olduğu görülür.

Örnek 2.2.10. Aşağıdaki gibi tanımlanan

$$x = x_n = \begin{cases} n, & n = k^2 \\ \dfrac{n-1}{n} & n \neq k^2 \end{cases} (n = 1,2,3,\dots)$$

bir (x_n) dizisinin $st - limx = 1$ olduğunu gösterelim.

$$n = k^2 \Rightarrow x_n = n \Rightarrow |x_n - 1| = |n - 1| = n - 1 \geq \varepsilon \Rightarrow k^2 \geq \varepsilon + 1 \Rightarrow k \geq \sqrt{\varepsilon + 1}$$

$$n \neq k^2 \Rightarrow x_n = \tfrac{n-1}{n} \Rightarrow \left|\tfrac{n-1}{n} - 1\right| = \tfrac{1}{n} \geq \varepsilon \Rightarrow n \leq \tfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow k \leq \tfrac{1}{\varepsilon}$$

$\varepsilon > 0$ olduğundan $k \leq \frac{1}{\varepsilon}$ kümesi sonlu bir kümedir.

$$|\{k \leq n: |x_n - 1| \geq \varepsilon\}| = |\{k \leq n: n = k^2, |x_n - 1| \geq \varepsilon\}| + |\{k \leq n: n \neq k^2, |x_n - 1| \geq \varepsilon\}|$$

$$= \left|\{k \leq n: n = k^2, \quad k > \sqrt{\varepsilon + 1}\}\right| + \left|\left\{k \leq n: n \neq k^2, k \leq \frac{1}{\varepsilon}\right\}\right|$$

$$k = \sqrt{n}, \quad k \leq n \Rightarrow k \leq n$$

$k \leq \frac{1}{\varepsilon}$ olup k sınırlı olduğundan sağ tarafın doğal yoğunluğu sıfırdır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_n - 1| \geq \varepsilon\}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n: n = k^2, k \geq \sqrt{\varepsilon + 1}\}\right| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n: n \neq k^2, k \leq \frac{1}{\varepsilon}\right\}\right|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} . \sqrt{n} + 0 = 0$$

olduğundan x_n dizisi 1'e istatistiksel yakınsaktır. $x_n \to 1(S)$ veya $st - limx = 1$’dir.

Uyarı 2.2.11. Klasik anlamdaki yakınsak diziler sınırlıdır. Fakat istatistiksel yakınsak her dizi sınırlı olmayabilir. Şimdi buna bir örnek verelim.

Örnek 2.2.12. Aşağıdaki gibi tanımlanan bir

$$x = (x_n) = \begin{cases} n, & n = k^2 \\ 0, & n \neq k^2 \end{cases} \qquad (n = 1,2,3,\dots)$$

dizisini incelediğimizde $n = k^2$ için x_n dizisinin üstten sınırlı olmadığı açıktır [32].

Uyarı 2.2.13. Bilindiği gibi istatistiksel yakınsaklık bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha genel bir kavramdır. Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsak iken istatistiksel yakınsak her dizi yakınsak olmayabilir. Şimdi buna dair bir örnek inceleyeceğiz.

$$x = (x_n) = \begin{cases} 1, & n = k^2 \\ 0, & n \neq k^2 \end{cases} \qquad (n = 1,2,3,\dots)$$

dizisini incelediğimizde

$$x = (x_n) = (1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,\dots)$$

şeklinde elde edilir.

Burada (x_{n^2})= 1 olduğu görülür. Diğer durumlarda ise (x_n)= 0'dır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7}, \dots, \frac{2}{n}, \dots\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

olup istatistiksel yakınsaktır. Ancak $\underline{lim}_n x_n = 0$ ve $\overline{lim}_n x_n = 1$ olup alt ve üst limitler eşit olmadığı için bu dizi yakınsak değildir [32].

Örnek 2.2.14

$$x = (x_k) = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \\ 1, & k \neq m^2 \end{cases} \qquad (m = 1,2,3,\dots)$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini inceleyelim. $\forall\ \varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k - 1| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 1\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\le n: |x_k-1|\ge\varepsilon\}|\le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\le n: x_k\ne 1\}|\le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt{n}=0$$

elde edilir. Demek ki,

$$|\{k\le n: |x_k-1|\ge\varepsilon\}| = \{k=m^2: m\in\mathbb{N}\}$$

ve

$$\delta(\{k=m^2: m\in\mathbb{N}\})=0$$

olup $\forall\ \varepsilon>0$ için $|x_k-1|<\varepsilon$ (h.h.k) olduğundan $st-limx=1$ bulunur.

Örnekte görüldüğü gibi klasik anlamda yakınsak olan her dizi istatistiksel yakınsak iken sınırsız ıraksak bazı diziler de istatistiksel yakınsak olabilmektedir.

Örnek 2.2.15

$$x=(x_k)=\begin{cases}\sqrt{k}, & k=m^2\\ 1, & k\ne m^2\end{cases}\qquad (m=1,2,3,\dots)$$

dizisi 1'e istatistiksel yakınsaktır fakat $x_k\notin l_\infty$'dur. Diğer yandan $x_k=(1,0,1,0,\dots)$ dizisi istatistiksel yakınsak değildir. Fakat sınırlıdır.

Tanım 2.2.16. Her ε> 0 için

$$lim\frac{1}{n}|\{k\le n: \lfloor x_k-x_N\rfloor\ge\varepsilon\}|=0$$

yani

$$\lfloor x_k-x_N\rfloor<\varepsilon\quad (h.h.k)$$

olacak biçimde bir $N=N(\varepsilon)$ sayısı mevcut ise x dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.2.17 Aşağıdaki ifadeler denktir.

- $x=(x_k)$ istatistiksel yakınsak dizidir.
- $x=(x_k)$ istatistiksel Cauchy dizidir.

- h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır.

Teorem 2.2.18. $p \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ olsun. Eğer bir dizi L'ye kuvvetli $p - Cesaro$ toplanabilir ise o zaman bu dizi L'ye istatistiksel yakınsaktır. Eğer sınırlı bir dizi L'ye istatistiksel yakınsak ise o zaman bu dizi L'ye kuvvetli $p - Cesaro$ toplanabilirdir.

Teorem 2.2.19. (Ayrışma Teoremi) Eğer $x = (x_k)$ dizisi L'ye kuvvetli $p - Cesaro$ toplanabilir veya istatistiksel yakınsak ise o zaman $y = (y_k)$'nın limiti L, $x = y + z$ ve $\lim_n n^{-1}|\{k \le n: z_k \neq 0\}| = 0$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi ve sıfıra istatistiksel yakınsak bir $z = (z_k)$ dizisi vardır. Dahası, eğer $x = (x_k)$ dizisi sınırlı ise o zaman $z = (z_k)$ dizisi de sınırlıdır ve $\|z\|_\infty < \|x\|_\infty + |L|$'dir.

2.3. α . Dereceden İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 2.3.1. 0< α ≤ 1 olacak şekilde α herhangi bir reel sayı olsun. $|\{k \le n: k \in M\}|$, M kümesinin n'den büyük olmayan eleman sayılarını göstermek üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \le n: k \in M\}|$$

limiti mevcut ise bu limit değerine M alt kümesinin $\alpha -$ yoğunluğu denir ve $S_\alpha(M)$ ile gösterilir [15].

$x = (x_k)$ dizisi, $\alpha -$yoğunluğu sıfır olan cümle hariç, her k için $p(k)$ özelliğini sağlayacak şekilde bir dizi ise o zaman (x_k) dizisi, α 'ya göre hemen hemen her k için $p(k)$ özelliğini sağlar denir. Kısaca h.h.k(α) ile gösterilir.

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin herhangi bir sonlu alt kümesi sıfır α-yoğunluğa sahiptir.$\delta_\alpha(M^c) = 1 - \delta_\alpha(M)$ eşitliği genelde 0< $\alpha < 1$ için sağlanmaz, ancak α $= 1$ ise bu eşitlik sağlanır. Herhangi bir $M \subset \mathbb{N}$ kümesinin α yoğunluğu α $= 1$ durumunda kümenin doğal yoğunluğuna indirgenir.

Lemma 2.3.2. $M \subset \mathbb{N}$ olsun. Eğer 0< α $\le \beta \le 1$ ise o zaman $\delta_\beta(M) \le \delta_\alpha(M)$ dir [15].

İspat: $0 < \alpha$ $\le \beta \le 1$ olsun . Her $n \in \mathbb{N}$ için $n^\alpha \le n^\beta$ ve bu nedenle $\frac{1}{n^\beta} \le \frac{1}{n^\alpha}$ olduğundan,

$$\frac{1}{n^\beta} \left|\{k \le n: k \in M\}\right| \le \frac{1}{n^\alpha} \left|\{k \le n: k \in M\}\right|$$

elde ederiz. Bu eşitsizlikten $\delta_\beta(M) \le \delta_\alpha(M)$ elde edilir.

Şimdi $0 < \alpha \le \beta \le 1$ olsun. O zaman Lemma 2.3.2' den eğer M sıfır α −yoğunluğuna sahipse o zaman M sıfır β-yoğunluğuna sahiptir ve en az bir $0 < \alpha \le 1$ için sıfır α −yoğunluğuna sahipse, o zaman sıfır doğal yoğunluğuna sahiptir.

Tanım 2.3.3. $x = (x_k) \in w$ olsun. $0 < \alpha \le 1$ olarak verilsin. ∀ Ɛ> 0 için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \le n : |x_k| - L \ge \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde kompleks bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L’ye α. dereceden istatistiksel yakınsaktır denir. Başka bir ifadeyle ∀ Ɛ> 0 ve h.h.k(α) için $|x_k - L| < \varepsilon$ ise x dizisi L’ye α. dereceden istatistiksel yakınsaktır denir. Bu yakınsaklık $S^\alpha - \lim x_k = L$ şeklinde gösterilir. α. dereceden tüm istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi ise S^α ile gösterilir [15].

Tanım 2.3.4. $x = (x_k) \in w$ olsun. $0 < \alpha \le 1$ olarak verilsin. $\forall\, \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \le n : |x_k - x_N| \ge \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $\mathbb{N} = \mathbb{N}(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine α.dereceden istatistiksel Cauchy dizisi denir. Bir başka ifadeyle her $\varepsilon > 0$ ve $h.h.k(\alpha)$ için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ ise x dizisine α.dereceden istatistiksel Cauchy dizisi denir.[4]

Teorem 2.3.5. $0 < \alpha \le 1$ için aşağıdaki ifadeler denktir [30].

- **i.** x, α. dereceden istatistiksel yakınsak bir dizidir.
- **ii.** x, α. dereceden istatistiksel Cauchy dizisidir.
- **iii.** $x = (x_k)$ dizisi verilsin. h.h.k(α) için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır.

İspat. **(i)** ⇒ **(ii)**: $S^\alpha - \lim x_k = L$ olduğunu kabul edelim ve $\varepsilon > 0$ olsun. h.h.k(α) için

$$|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve seçilen bir N için

$$|x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. h.h.k(α) için

$$|x_k - x_N| < |x_k - L| + |x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Böylece x, α. dereceden istatistiksel Cauchy dizisidir.

(ii) $\Rightarrow$ **(iii)**: **(ii)** sağlansın, yani $x = (x_k)$, α. dereceden istatistiksel Cauchy dizisi olsun. N doğal sayısını $I = (x_N - 1, x_N + 1)$ aralığı h.h.k(α) için x_k 'yı içerecek şekilde seçelim. Aynı şekilde M doğal sayısını öyle seçelim ki $I' = \left(x_M - \frac{1}{2}, x_M + \frac{1}{2}\right)$ aralığı h.h.k(α) için x_k'yı içersin. İddia ediyoruz ki

$$I_1 = I \cap I'$$

h.h.k(α) için x_k'yı içerir; çünkü,

$$\{k \leq n: x_k \notin I'\} = \{k \leq n: x_k \notin I\} + \{k \leq n: x_k \notin I'\}$$

ve dolayısıyla $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n: x_k \notin I \cap I'\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n: x_k \notin I\}| \leq + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n: x_k \notin I'\}| = 0$$

dır. bu nedenle l_1 uzunluğu küçük veya eşit 1 olan ve $h.h.k(\alpha)$ için x_k'yı içeren kapalı bir aralıktır. Şimdi $I'' = \left(x_{N(2)} - \frac{1}{4}, x_{N(2)} + \frac{1}{4}\right)$ aralığı $h.h.k(\alpha)$ için x_k'yı içerecek şeklinde $N(2)'$yi seçelim. Yukarıdaki düşünceyle $I_2 = I_1 \cap I''$ aralığının $h.h.k(\alpha)$ için x_k'yı içerdiğini ve l_2 aralığının uzunluğunun $\frac{1}{2}$'den küçük veya eşit olduğunu verir. bu yolla devam ederek her m için, $l_m \supseteq l_{m+1}$'in uzunluğu 2^{1-m} den daha büyük olmayacak ve $h.h.k(\alpha)$ için $x_k \in l_m$ olacak şekilde kapalı aralıkların bir $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini elde ederiz. İç içe aralıklar teoremi gereğince $\cap_{m=1}^{\infty} I_m = \{\lambda\}$ olacak şekilde bir λ sayısı vardır. $h.h.k(\alpha)$ için $x_k \in l_m$ gerçeğini kullanarak her $n > T_m$ için

$$\frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n: x_k \notin l_m\}| < \frac{1}{m} \tag{2.3.1}$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların artan bir $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini seçebiliriz. Şimdi $x = (x_k)$ dizisinin $k > T_1$ ve

$$T_m < k \leq T_{m+1}$$

ise $x_k \notin l_m$ olacak şekilde bütün x_k terimlerinden oluşan bir $z = (z_k)$ alt dizisini tanımlayalım. Şimdi $y = (y_k)$ dizisini

$$y_k = \begin{cases} \lambda, & eğer\ x_k, z = (z_k)'nın\ bir\ terimi\ ise, \\ x_{k,} & diğer\ hallerde\ , \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman $\lim y_k = \lambda$ 'dır. çünkü, eğer $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ ve $k > T_m$ ise ya $x_k, y_k = \lambda$ olacak şekilde z' nin bir terimidir ya da $y_k = x_k \in l_m$ ve $|y_k - \lambda| \leq l_m$ nin uzunluğu $\leq 2^{1-m}$' dir. Ayrıca $h.h.k(\alpha)$ için $x_k = y_k$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunu göstermek için $T_m < n < T_{m+1}$ olarak alırsak $\{k \leq n: y_k \neq x_k\} \subset \{k \leq n: x_k \notin l_m\}$ dolayısıyla (2.3.1) gereğince

$$\frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n: y_k \neq x_k\}| \leq \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n: x_k \notin l_m\}| < \frac{1}{m}$$

dir. Böylece $n \to \infty$ için limit 0'dır ve $h.h.k(\alpha)$ için $x_k = y_k$ dır. Bu nedenle (ii), (iii) gerektirir.

(iii)⇒(i): (iii)'ün sağlandığını, $h.h.k(\alpha)$ için $x_k = y_k$ ve $\lim y_k = L$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon > 0$ olsun. $\lim y_k = L$ olduğundan

$$\{k \leq n: |x_k - L| \geq \varepsilon\} \subseteq \{k \leq n: x_k \neq y_k\} \cup \{k \leq n: |y_k - L| > \varepsilon\}$$

dır. Son cümle belli bir sabit sayıda doğal sayı içerir, bunu ise $l = l(\varepsilon)$ ile gösterelim. $h.h.k(\alpha)$ için $x_k = y_k$ olduğundan $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n: |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n: \neq y_k\}| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$$

yazabiliriz. Böylece $h.h.k(\alpha)$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ elde edilir.

Sonuç.2.3.5. x dizisi için $S^\alpha - \lim x_k = L$ ise x dizisi, $\lim y_k = L$ olacak şekilde bir y alt dizisine sahiptir.

3. BULGULAR

3.1. Lucas Matrisi Ve Lucas Dizi Uzayı

Bu bölümde Lucas sayılarını kullanarak yeni bir regüler matris oluşturup, bu matris yardımıyla Lucas dizi uzayı tanımlayacağız ve bazı özelliklerini inceleyeceğiz. $L_0 = 2, L_1 = 1,\ L_2 = 3, L_3 = 4, \ldots$ olmak üzere Lucas matrisimizi,

$$\widehat{H} = (L_{nk}) = \begin{cases} \dfrac{L_k}{L_{n+2} - 3}, & 1 \leq k \leq n \text{ } için \\ 0, & diğer \ (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlıyoruz. Bu matrisin terimlerini açtığımızda;

$$\begin{pmatrix}
\frac{L_1}{L_3-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\frac{L_1}{L_4-3} & \frac{L_2}{L_4-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\frac{L_1}{L_5-3} & \frac{L_2}{L_5-3} & \frac{L_3}{L_5-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\frac{L_1}{L_6-3} & \frac{L_2}{L_6-3} & \frac{L_3}{L_6-3} & \frac{L_4}{L_6-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\frac{L_1}{L_7-3} & \frac{L_2}{L_7-3} & \frac{L_3}{L_7-3} & \frac{L_4}{L_7-3} & \frac{L_5}{L_7-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\frac{L_1}{L_8-3} & \frac{L_2}{L_8-3} & \frac{L_3}{L_8-3} & \frac{L_4}{L_8-3} & \frac{L_5}{L_8-3} & \frac{L_6}{L_8-3} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\frac{L_1}{L_9-3} & \frac{L_2}{L_9-3} & \frac{L_3}{L_9-3} & \frac{L_4}{L_9-3} & \frac{L_5}{L_9-3} & \frac{L_6}{L_9-3} & \frac{L_7}{L_9-3} & 0 & 0 & \cdots \\
\frac{L_1}{L_{10}-3} & \frac{L_2}{L_{10}-3} & \frac{L_3}{L_{10}-3} & \frac{L_4}{L_{10}-3} & \frac{L_5}{L_{10}-3} & \frac{L_6}{L_{10}-3} & \frac{L_7}{L_{10}-3} & \frac{L_8}{L_{10}-3} & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}$$

olup buradan;

$$H=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&\dots\\ \frac{1}{4}&\frac{3}{4}&0&0&0&0&0&0&0&\dots\\ \frac{1}{8}&\frac{3}{8}&\frac{4}{8}&0&0&0&0&0&0&\dots\\ \frac{1}{15}&\frac{3}{15}&\frac{4}{15}&\frac{7}{15}&0&0&0&0&0&\dots\\ \frac{1}{26}&\frac{3}{26}&\frac{4}{26}&\frac{7}{26}&\frac{11}{26}&0&0&0&0&\cdots\\ \frac{1}{44}&\frac{3}{44}&\frac{4}{44}&\frac{7}{44}&\frac{11}{44}&\frac{18}{44}&0&0&0&\dots\\ \frac{1}{73}&\frac{3}{73}&\frac{4}{73}&\frac{7}{73}&\frac{11}{73}&\frac{18}{73}&\frac{29}{73}&0&0&\dots\\ \frac{1}{120}&\frac{3}{120}&\frac{4}{120}&\frac{7}{120}&\frac{11}{120}&\frac{18}{120}&\frac{29}{120}&\frac{47}{120}&0&\dots\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matrisin üçgensel olduğu açıkça görülmektedir. Yani $L_{nn}\neq 0$ ve $k>n$ için $L_{nk}=0$ $(n=1,2,3,\dots)$'dir. Ayrıca Silverman-Toeplitz teoreminin şartlarını sağladığından H matrisi regüler bir matristir. Ayrıca H matrisinin tersi

$$H^{-1}=\begin{cases}\dfrac{L_{n+2}-3}{L_k}, & k=n\ ise\\ -\dfrac{L_{n+1}-3}{L_{k+1}}, & k=n-1\ ise\\ 0, & diğer\end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Şimdi $x=(x_k)$ dizisinin H dönüşümü olarak adlandırılan $y=(y_k)=H_k(x)$ dizisini

$$y=(y_k)=H_k(x)=\frac{1}{L_{k+2}-3}\sum_{i=1}^{k}L_ix_i \tag{3.1.1}$$

şeklinde tanımlıyoruz. Bu dönüşüm yardımıyla

$$X(H)=\{x=(x_k)\in w\colon y=(y_k)\in X\}$$

Lucas dizi uzayını tanımlayabiliriz.

Teorem 3.1.1. $X(H)$ Lucas dizi uzayı;

$$\|x\|_{X(H)}=\|H(x)\|_X=\|y\|_X=\begin{cases}\sup_k|y_k|, & X=l_\infty, c\ veya\ c_0\\ \left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{1/p}, & X=l_p;\ 1\leq p<\infty\end{cases} \tag{3.1.2}$$

normuna göre bir BK $-$uzayıdır.

İspat. H matrisimiz üçgensel olduğundan, (3.1.2.) normu ve teorem 2.1.17'den $X(H)$ uzayı bir BK $-$uzayıdır.

Teorem 3.1.2. $X(H)$ Lucas dizi uzayı X uzayına izometrik izomorftur.

İspat. İlk olarak $X(H)$ ve X uzayları arasında izometrik izomorfizmin varlığını göstermeliyiz. Dolayısıyla aşağıdaki K dönüşümünü göz önüne alırsak;

$$K: X(H) \to X, \qquad x \to Kx = y,$$

$$y = (y_k) = H_k(x) = \frac{1}{L_{k+2} - 3} \sum_{i=1}^{k} L_i x_i$$

dir. $\forall x \in X(H)$ için $Kx = y = H(x) \in X$ olur. Ayrıca K dönüşümünün lineer olduğu görülür. Gerçekten,

$$K(x+y) = \frac{1}{L_{k+2} - 3} \sum_{i=1}^{k} L_i (x_i + y_i) = \frac{1}{L_{k+2} - 3} \sum_{i=1}^{k} L_i x_i + \frac{1}{L_{k+2} - 3} \sum_{i=1}^{k} L_i y_i = Kx + Ky$$

Ayrıca Kx=0$\Rightarrow$ $x = 0$ olduğundan K dönüşümü 1-1$'$dir. Şimdi $y = (y_k) \in X$ verilsin. $x = (x_k)$ dizisini,

$$x_k = \frac{L_{k+2}-3}{L_k} y_k - \frac{L_{k+1}-3}{L_k} y_{k-1}, \;\; k \in \mathbb{N}^0 \tag{3.1.3}$$

şeklinde tanımlayalım. (3.1.1) ve (3.1.3) eşitlikleri yardımıyla

$$H_k(x) = \frac{1}{L_{k+2} - 3} \sum_{i=1}^{k} L_i x_i = \frac{1}{L_{k+2} - 3} \sum_{i=1}^{k} L_i \left[\frac{L_{i+2} - 3}{L_i} y_i - \frac{L_{i+1} - 3}{L_i} y_{i-1} \right]$$

$$= \frac{1}{L_{k+2} - 3} \sum_{i=1}^{k} [(L_{i+2} - 3) y_i - (L_{i+1} - 3) y_{i-1}]$$

$$= \frac{1}{L_{k+2}-3}(L_{k+2}-3)y_k = y_k$$

bulunur. Bu ise $H(x) = y$ olduğunu gösterir ve $y \in X$ olduğundan $H(x) \in X$ bulunur. Bu takdirde $x \in X(H)$ ve $Kx = y$ olur. Bu da K dönüşümünün örten olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\exists x \in X(H)$ için K dönüşümünün,

$$\|Kx\|_X = \|y\|_X = \|H(x)\|_X = \|x\|_{X(H)}$$

eşitliğini sağladığını, yani normu koruyan bir dönüşüm olduğunu görürüz. O halde K dönüşümü bir izometri olup, $X(H)$ ve X uzaylarının izometrik izomorf olduklarını göstermiş oluruz.

Teorem 3.1.3. $c_0(H) \subset c(H) \subset l_\infty(H)$.

İspat. $\forall\, i \in \mathbb{N}^0$ için $x_i = 1$ olacak şekilde $x = (x_i)$ dizisini gözönüne alalım. Buradan $\forall\, k \in \mathbb{N}$ için,

$$H_k(x) = \frac{1}{L_{k+2}-3}\sum_{i=1}^{k} L_i x_i = \frac{1}{L_{k+2}-3}\sum_{i=1}^{k} L_i = \frac{L_{k+2}-3}{L_{k+2}-3} = 1$$

olur. O halde $Hx \in c$, $Hx \notin c_0$ olduğu açıktır. Bu takdirde $x \in c(H)$ fakat $x \notin c_0(H)$ elde edilir ki bu $c_0(H) \subset c(H)$ kapsamasının kesinliğini ifade eder. Şimdi $i \in \mathbb{N}^0$ için,

$$x_i = \frac{(-1^i)(L_{i+2}+L_{i+1}-3)}{L_i}$$

dizisini göz önüne alalım. Bu diziyi kullanarak $\forall\, k \in \mathbb{N}^0$ için

$$H_k(x) = \frac{1}{L_{k+2}-3}\sum_{i=1}^{k} L_i x_i = \frac{1}{L_{k+2}-3}\sum_{i=1}^{k} L_i \cdot \frac{(-1^i)(L_{i+2}+L_{i+1}-3)}{L_i}$$

$$= \frac{(-1)^k(L_{i+2}-3)}{L_{k+2}-3} = (-1)^k$$

buluruz. O halde $Hx \in l_\infty$ fakat $Hx \notin c$'dir. Yani $x \in l_\infty(H)$, $x \notin c(H)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $c(H) \subset l_\infty(H)$ kapsaması kesindir.

3.2. Lucas Dizisi Yardımıyla Tanımlanan Dereceli İstatistiksel Yakınsaklık

Çalışmamızın bu bölümünde $x = (x_k)$ dizisi yerine Lucas matrisimiz yardımıyla oluşturulan $Hx = (Hx)_k$ dizisini alarak α. dereceden istatistiksel yakınsaklık kavramını ve özelliklerini vereceğiz.

Tanım 3.2.1. $Hx = (Hx_k) \in w$ olsun ve 0< $\alpha \leq 1$ verilsin. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left|\{k \leq n: \left|Hx_k - \ell\right| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

olacak şekilde kompleks bir ℓ sayısı varsa $Hx = Hx_k$ dizisi ℓ'ye α. dereceden Lucas tipi istatistiksel yakınsaktır denir. Bir başka ifadeyle her ε> 0 ve h.h.k(α) için $\left|Hx_k - \ell\right| < \varepsilon$ ise $Hx = Hx_k$ dizisi ℓ'ye α. dereceden Lucas tipi istatistiksel yakınsaktır denir. Bunu $S^\alpha(H) - \lim x_k = \ell$ şeklinde yazarız.

Tüm α. dereceden istatistiksel yakınsak sıfır dizilerinin kümesini göstermek için $S_0^\alpha(H)$ yazacağız. Her 0< $\alpha \leq 1$için $S_0^\alpha(H) \subset S_0(H)$ olduğu açıktır. α. dereceden Lucas tipi istatistiksel yakınsaklık $\alpha = 1$ için Lucas tipi istatistiksel yakınsaklık ile aynıdır. 0< $\alpha \leq 1$ için α. dereceden Lucas tipi istatistiksel yakınsaklık iyi tanımlıdır. Fakat $\alpha > 1$ için iyi tanımlı değildir. Bunun için

$$x = (x_k) = (0, \frac{4}{3}, -1, \frac{15}{7}, -\frac{15}{11}, \frac{44}{18}, -\frac{44}{29}, \frac{120}{47}, \dots)$$

olarak seçelim. Bu takdirde $Hx = (Hx_k)$ dizisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$(Hx_k) = \begin{cases} 1, & k = 2n, \quad n = 1,2,3,\dots \\ 0, & k \neq 2n, \quad n = 1,2,3,\dots \end{cases}$$

Bu durumda hem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left|\{k \leq n: \left|Hx_k - 1\right| \geq \varepsilon\}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^\alpha} = 0$$

hem de

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\left|\{k\le n:\left|Hx_k\right|\ge\varepsilon\}\right|\le\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n^{\alpha}}=0$$

dır. Buna göre $\alpha>1$ için $Hx=(Hx_k)$ dizisi hem 0'a hem de 1'e α. Dereceden Lucas tipi istatistiksel yakınsak, yani $S^{\alpha}(H)-\lim x_k$ =1 ve $S^{\alpha}(H)-\lim x_k$ =0'dır. Fakat bu mümkün değildir.

Teorem 3.2.2. 0< $\alpha\le1$ ve $x=(x_k)$, $y=(y_k)$ kompleks terimli iki sayı dizisi olsun.

- Eğer $S^{\alpha}(H)-\lim x_k=x_0$ ve $c\in ₵$ ise o zaman $S^{\alpha}(H)-\lim cx_k=cx_0$'dır.
- Eğer $S^{\alpha}(H)-\lim x_k=x_0$ ve $S^{\alpha}(H)-\lim y_k=y_0$ ise $S^{\alpha}(H)-\lim(x_k+y_k)=x_0+y_0$ ' dır.

İspat. $c=0$ durumunda ilk koşul açıktır. Varsayalım ki $c\neq0$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\left|\{k\le n:\left|c.Hx_k-cx_0\right|\ge\varepsilon\}\right|\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\left|\{k\le n:\left|Hx_k-x_0\right|\ge\frac{\varepsilon}{\left|c\right|}\}\right|$$

eşitsizliğinden ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\left|\{k\le n:\left|Hx_k+Hy_k-(x_0+y_0)\right|\ge\varepsilon\}\right|\le$$

$$\frac{1}{n^{\alpha}}\left|\{k\le n:\left|Hx_k-x_0\right|\ge\frac{\varepsilon}{2}\}\right|+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\left|\{k\le n:\left|Hy_k-y_0\right|\ge\frac{\varepsilon}{2}\}\right|$$

eşitsizliğinden ispat çıkar.

Her yakınsak dizinin α. dereceden Lucas tipi istatistiksel yakınsak olduğunu göstermek kolaydır. Yani her 0< $\alpha\le1$ için $c\subset S^{\alpha}(H)$ dir. Fakat tersi doğru değildir. Örneğin,

$$x=(x_k)=(1,-\frac{1}{3},0,0,0,0,0,\frac{120}{47},\ldots)$$

dizisi seçilirse $Hx=Hx_k$ dizisi

$$(Hx_k) = \begin{cases} 1, & k = n^3, \quad ise \\ 0, & k \neq n^3, \quad ise \end{cases} \tag{3.2.1}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda bu dizi $\alpha > \frac{1}{3}$ iken $S^{\alpha}(H) - \lim x_k = 0$ olduğundan α . dereceden Lucas tipi istatistiksel yakınsak fakat yakınsak değildir. Yukarıdaki teoremden $S^{\alpha}(H)$ cümlesi bir vektör uzayıdır.

Teorem 3.2.3. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. Bu taktirde $S^{\alpha}(H) \subseteq S^{\beta}(H)$ dir ve kapsama $\alpha < \beta$ olacak şekilde bazı α ve β'lar için kesindir.

İspat. Eğer $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ise o zaman her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{n^{\beta}} \left|\{k \leq n: \left|Hx_k - \ell\right| \geq \varepsilon\}\right| \leq \frac{1}{n^{\alpha}} \left|\{k \leq n: \left|Hx_k - \ell\right| \geq \varepsilon\}\right|$$

sağlanır ve buradan $S^{\alpha}(H) \subseteq S^{\beta}(H)$ elde edilir. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için;

$$x = (x_k) = (1, -\tfrac{1}{3}, 0, \tfrac{15}{7}, -\tfrac{15}{11}, 0,0,0, \dots) \tag{3.2.2}$$

dizisini göz önüne alalım. Buradan $Hx = (Hx_k)$ dizisini

$$(Hx_k) = \begin{cases} 1, & k = n^2, \quad ise \\ 0, & k \neq n^2, \quad ise \end{cases}$$

şeklinde elde ederiz. Bu durumda $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ için $S^{\beta}(H) - \lim x_k = 0$, yani $x \in s^{\beta}(H)$'dir. Fakat $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ için $x \in S^{\alpha}(H)'dir.$ Eğer Teorem 3.2.3 de $\beta = 1$ alınırsa o zaman aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.4. Eğer bir dizi en az bir $0 < \alpha \leq 1$ için ℓ'ye α. dereceden Lucas tipi istatistiksel yakınsak ise o zaman bu dizi ℓ'ye istatistiksel yakınsaktır, yani $S^{\alpha}(H) \subseteq S(H)$'dir.

Sonuç 3.2.5.

- $S^{\alpha}(H) = S^{\beta}(H)$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha = \beta$ olmasıdır.
- $S^{\alpha}(H) = S(H)$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha = 1$ olmasıdır.

Teorem 3.2.6. $0 < \alpha < 1$ olsun ve $x = (x_k)$, $S^{\alpha}(H) - \lim x_k = \ell$ olacak şekilde α. dereceden Lucas tipi istatistiksel yakınsak bir dizi olsun. Bu taktirde $\lim(Hy)_k = \ell$ olacak şekilde $Hx = (Hx_k)$ dizisinin bir $Hy = (Hy_k)$ alt dizisi vardır.

Teorem 3.2.7. $0 < \alpha \leq 1$ ve her $k \in K \subset \mathbb{N}$ için $(Hx)_k \leq (Hy)_k \leq (Hz)_k$ olsun. Eğer $S^\alpha(H(K)) = 1$ ve

$$S^\alpha(H) - \lim x_k = L = S^\alpha(H) - \lim z_k$$

ise bu taktirde

$$S^\alpha(H) - \lim y_k = L$$

dir.

İspat. Eğer $A = \{k \in \mathbb{N}: \left|Hx_k - L\right| \geq \varepsilon\}$ ve $B = \{k \in \mathbb{N}: \left|Hz_k - L\right| \geq \varepsilon\}$ ise, o zaman

$$\left|\{k \leq n: \left|Hy_k - L\right| \geq \varepsilon\}\right| \subset A \cup B \cup K^\circ$$

elde edilir.

Teorem 3.2.8. Her $k \in K \subset \mathbb{N}$ için $Hx_k > 0$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $Hx_k \neq 0$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde $\delta^\alpha H(K) = 1$ olsun. Bu takdirde

$$S^\alpha(H) - \lim x_k = \infty \Leftrightarrow S^\alpha(H) - \lim x_k^{-1} = 0$$

dır.

İspat. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N}: Hx_k < \varepsilon^{-1}\} = \{k \in \mathbb{N}: Hx_k^{-1} \geq \varepsilon\}$$

olduğundan istenilen elde edilir.

3.3 Lucas Dizisi Yardımıyla Tanımlanan α. Dereceden Kuvvetli $p -$ Cesaro Toplanabilme

Tanım 3.3.1. $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı α ve p pozitif bir reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \left|Hx_k - \ell\right|^p = 0$$

olacak şekilde kompleks bir ℓ sayısı varsa, $Hx = (Hx_k)$ dizisine α. Dereceden Lucas tipi kuvvetli $p - Cesaro$ toplanabilir denir. Bu durumda $Hx = (Hx_k)$ dizisi ℓ'ye α. dereceden Lucas tipi kuvvetli $p - Cesaro$ toplanabilir denir. $\alpha = 1$ için α. dereceden Lucas tipi $p - Cesaro$ toplanabilirlik Lucas tipi kuvvetli $p - Cesaro$ toplanabilirliğe indirgenir. α. dereceden Lucas tipi tüm kuvvetli $p - Cesaro$ toplanabilir dizilerin kümesini $w_p^\alpha(H)$ ile göstereceğiz. $\ell = 0$ durumunda $w_{0,p}^\alpha(H)$ yazacağız.

Teorem 3.3.2. $0 < \alpha \le \beta \le 1$ ve p pozitif bir reel sayı olsun. Bu takdirde $w_p^\alpha(H) \subseteq w_p^\beta(H)$ dir ve $\alpha < \beta$ olacak şekilde bazı α ve β sayıları için kapsama kesindir.

İspat. $Hx = (Hx_k) \in w_p^\alpha$ herhangi bir dizi $0 < \alpha \le \beta \le 1$ ve p pozitif bir rel sayı olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{n^\beta}\sum_{k=1}^{n} |Hx_k - \ell|^p \le \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} |Hx_k - \ell|^p$$

yazabiliriz ki bu eşitsizlikten $w_p^\alpha(H) \subseteq w_p^\beta(H)$ olduğu görülür.

Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için (3.2.2) ile tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım.

$$\frac{1}{n^\beta}\sum_{k=1}^{n} |Hx_k - 0|^p \le \frac{\sqrt{n}}{n^\beta} = \frac{1}{n^{\beta - \frac{1}{2}}}$$

olduğunu göstermek kolaydır. n→∞ iken $\frac{1}{2} < \beta \le 1$ için $\frac{1}{n^{\beta-\frac{1}{2}}}$ →0 olduğundan $w_p^\beta(H) - \lim x_k = 0$'dır. Yani $\frac{1}{2} < \beta \le 1$ için $x \in w_p^\beta(H)$'dır. Fakat

$$\frac{\sqrt{n} - 1}{n^\alpha} \le \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} |Hx_k - 0|^p$$

ve $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için $n \to \infty$ iken $\frac{\sqrt{n}-1}{n^\alpha}$ →∞ olduğundan, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için $x \notin w_p^\alpha(H)$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.3.3. 0$< \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun ve p pozitif reel sayı olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- $w_p^{\alpha}(H) = w_p^{\beta}(H)$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha = \beta$ olmasıdır.
- Her $\alpha \in (0,1]$ ve 0$< p < \infty$ için $w_p^{\alpha}(H) = w_p(H)$

Teorem 3.3.4. $0 < \alpha \leq 1$ ve 0$< p < q < \infty$ olsun. Bu durumda $w_q^{\alpha}(H) \subseteq w_p^{\alpha}(H)$'dir.

Teorem 3.3.4$'$de $\alpha = 1$ alarak Maddox [31] tarafından verilen bir sonucu elde ederiz. Eğer 0$< p < q < \infty$ ise $w_q(H) \subseteq w_p(H)$'dir.

Teorem 3.3.5. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ sabit bir reel sayı ve $0 < \alpha < \infty$ olsun. Eğer bir dizi ℓ'ye $\alpha.$ dereceden Lucas tipi kuvvetli $p - Cesaro$ toplanabilir ise o zaman bu dizi ℓ'ye $\beta.$ dereceden Lucas tipi istatistiksel yakınsaktır.

İspat. Herhangi bir $Hx = (Hx_k)$ dizisi ve $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{k=1}^{n} \left| Hx_k - \ell \right|^p \geq \left| \{k \leq n \colon \left| Hx_k - \ell \right| \geq \varepsilon\} \right| . \varepsilon^p$$

yazabiliriz. Bu eşitlik ve $n^{\alpha} \leq n^{\beta}$ olduğu öz önüne alınırsa

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \left| Hx_k - \ell \right|^p \geq \frac{1}{n^{\alpha}} \left| \{k \leq n \colon |Hx_k - \ell| \geq \varepsilon\} \right| . \varepsilon^p$$

$$\geq \frac{1}{n^{\beta}} \left| \{k \leq n \colon \left| Hx_k - \ell \right| \geq \varepsilon\} \right| . \varepsilon^p$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten, eğer $Hx = (Hx_k)$ dizisi ℓ'ye $\alpha.$ dereceden Lucas tipi kuvvetli $p - Cesaro$ toplanabilir ise o zaman bu dizinin ℓ'ye $\beta.$ dereceden Lucas tipi istatistiksel yakınsak olduğu sonucu elde edilir.

Eğer Teorem 3.3.5'de $\beta = \alpha$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.3.6. 0$< p < \infty$ ve α sayısı $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde sabit bir reel sayı olsun. Eğer bir dizi ℓ'ye $\alpha.$ dereceden Lucas tipi kuvvetli $p - Cesaro$ toplanabilir ise o zaman bu dizi ℓ'ye $\alpha.$ dereceden Lucas tipi istatistiksel yakınsaktır.

Uyarı 3.3.7. Dikkat edelim ki Teorem 3.3.5'in tersi genelde geçerli değildir. Sınırlı ve α. dereceden Lucas tipi istatistiksel yakınsak bir dizinin $0 < \alpha < 1$ için genelde dizinin α. dereceden kuvvetli Lucas tipi kuvvetli $p - Cesaro$ toplanabilir olması gerekmez. Örneğin,

$$x = (x_k) = \left(1, \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}, \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{6}, \frac{45 - 8\sqrt{3}}{21}, \frac{26\sqrt{5} - 75}{55}, \frac{110\sqrt{6} - 78\sqrt{5}}{270}, \dots\right)$$

dizisi seçilirse;

$$(Hx_k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}}, & k \neq m^2, \quad ise \\ 1, & k = m^2, \quad ise \end{cases}$$

olarak elde edilen

$$Hx = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, 1, \dots)$$

dizisi bu duruma bir örnektir. Her $\alpha(0 < \alpha \leq 1)$ için $Hx \in \ell_\infty$ ve $Hx \in S^\alpha(H)$ olduğu açıktır. İlk olarak her $n \geq 2$ pozitif tamsayısı için sağlanan

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$$

eşitliğini göz önüne alalım. $H_n = \{k \leq n: k \neq m^2, m = 1,2,3, \dots\}$ tanımlayalım ve $p = 1$ olsun.

$$\sum_{k=1}^{n} |Hx_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |Hx_k| = \sum_{k \in H_n,\ 1 \leq k \leq n} |Hx_k|$$

$$+ \sum_{k \notin H_n,\ 1 \leq k \leq n} |Hx_k| = \sum_{k \in H_n,\ 1 \leq k \leq n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \sum_{k \notin H_n,\ 1 \leq k \leq n} 1 > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$$

olduğundan $p = 1$ için

$$\frac{1}{n^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}|Hx_k|^p=\frac{1}{n^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}|Hx_k|>\frac{1}{n^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{1}{n^{\alpha}}\sqrt{n}=\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$$

yazılabilir. $n\to\infty$ iken $0<\alpha<\frac{1}{2}$ için $\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}\to\infty$ olacağından, yukarıdaki eşitsizlik de göz önüne alınırsa $0<\alpha<\frac{1}{2}$ için $Hx\in S^{\alpha}(H)-w_p^{\alpha}$ elde edilir.

Sonuç 3.3.8. $0<\alpha\leq 1$ ve pozitif bir reel sayı p olsun. O zaman $w_p^{\alpha}(H)\subset S(H)$'dir. Eğer $0<\alpha<1$ ise kapsama kesindir.

İspat. Sonuç 3.3.6 ve sonuç 3.2.4'den $w_p^{\alpha}(H)\subset S(H)$ elde ederiz. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için (3.2.1) ile tanımlanan $Hx=(Hx_k)$ dizisini göz önüne alalım. O zaman $S^{\alpha}(H)-\lim x_k=0$ olduğu açıktır. Yani $Hx\in S$ fakat $0<\alpha\leq\frac{1}{3}$ ve $p=1$ için $Hx\notin w^{\alpha}(p)$ dir. Gerçekten

$$\frac{1}{n^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}|Hx_k-0|^p=\frac{1}{n^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}|Hx_k|^p\geq\frac{\sqrt[3]{n}-1}{n^{\alpha}}$$

olduğunu görmek kolaydır. $n\to\infty$ için $\frac{\sqrt[3]{n}-1}{n^{\alpha}}\to\infty$ olduğundan o zaman $0<\alpha\leq\frac{1}{3}$ ve $p=1$ için $Hx\notin w_p^{\alpha}$'dır. Sonuç olarak $0<\alpha\leq\frac{1}{3}$ ve $p=1$ için $Hx\in S-w_p^{\alpha}$'dır. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 3.2.4, sonuç 3.3.8 ve [5, teorem 2.1]' den $0<\alpha\leq 1$ ve $0<p<\infty$ olmak üzere her α için

$$S^{\alpha}(H)\cap l_{\infty}\subset w_p^{\alpha}(H)\subset S(H)$$

elde edilir.

4. SONUÇ

Bir matrisin yakınsaklık alanı yardımıyla dizi uzayı oluşturma düşüncesi yıllardır birçok yazar tarafından farklı bakış açılarıyla kullanılmaktadır. Son yıllarda Fibonacci ve Lucas sayıları bu fikrin bir parçası haline gelmiştir. Biz de bu çalışmamızda Lucas sayılarını kullanarak yeni bir regüler matris tanımladık ve bu matrisin yakınsaklık alanını kullanarak yeni bir dizi uzayı oluşturup bazı özelliklerini inceledik.

Buna ek olarak, tanımladığımız matrisin terimlerinden oluşan diziler yardımıyla $\alpha.$ dereceden istatistiksel yakınsaklık ve $\alpha.$ dereceden kuvvetli $p - Cesaro$ toplanabilme kavramlarını tanımladık ve aralarındaki ilişkiyi inceledik.

Bunun neticesinde yeni ve literatüre katkısı olacak sonuçlar elde ettik. Bu sonuçlar genişletilebilir ve farklı istatistiksel yakınsaklık türleri araştırmacılar tarafından çalışılabilir. Bakış açısı değiştirilerek elde etmiş olduğumuz sonuçlar farklı şekilde yorumlanabilir.

5. KAYNAKLAR

[1] Zygmund A, 1979. Trigonometric Series. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

[2] Fast H. 1951. Sur la convergnce statisque. Colloq. Math., 2: 241-244.

[3] Schoenberg IJ, 1959. The integrabilitynof certain functions and related summability methods. Amer Math Monthly, 66: 361-375.

[4] Fridy J, 1985. On statistical convergence. Analysis, 5: 301-313.

[5] Connor JS, 1988. The statistical and strongg p −Cesaro convergence of sequences. Analysis, 8: 47-63.

[6] Fridy J, Orhan C, 1993. C. Lacunary statistical convergence. Pacific J Math., 160: 43-51.

[7] Savaş E, 2000. Strong almost convergence and almost λ −statistically convergence. Hokkaido Math. J., 20: 531-536.

[8] Mursaleen M, 2000. λ −statistically convergence. Math. Slovaca, 50 (1): 111-115.

[9] Moricz F, 2003.Statistical convergence of multiple sequenceS. Arch. Math., 81: 82-89.

[10] Bhardwaj VK, Bala I, 2007. On weak statistical convergence. Int. J. Math. Sci, Article ID 38530.

[11] Buck RC, 1953. Generalized asymptotic density. Amer. J. Math., 75-335.

[12] Freedman AR, Sember IJ, 1981. Densities and summability. Pacific J. Math., 95: 293-305.

[13] Gadjiev AD, Orhan C, 2002. Some approximation theorems via statistical convergence. Rocky Mountain J. Math., 32 (1): 129-138.

[14] Duman O, Khan MK, Orhan C, 2003. A-statistical convergence of approximating operators. Math. Inequal. Appl., 6 (4): 689-699.

[15] Çolak R, 2010. Statistical convergence of order α. Modern Methods in Analysis and Its Applications, New Delhi, India: Anamaya Pub., 121-129.

[16] Salat T, 1980. On statistically convergent sequence of real numbers. Math. Slovaca, 30: 139-150.

[17] Hardy GH, Littlewood JE, 1913. Sur la serie de Fourier dune function a' carve' sommable. Comptes rendus, 156: 1307-1309.

[18] Kuttner B, 1946. Note on strong summabilty. J. London Math. Soc., 21: 118-122.

[19] Maddox I J, 1968. On Kuttner's theorem. J. London Math. Soc., 43: 285-301.

[20] Maddox IJ, 1970. Elements of Functional Analysis. Cambridge Universtiy Press, London.

[21] Başar F, 2011. Summability theory and its applications. Bentham Science Publishers, İstanbul.

[22] Karabudak H, 2016. Fibonacci ve Lucas sayıları yardımıyla tanımlanan bazı regüler matrisler ve uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Bitlis Eren Üniversitesi ve Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüleri, Bitlis.

[23] Yıldız MA, 2008. Dizi uzaylarında istatistiksel yakınsaklık genelleştirmeleri. Yüksek Lisans Tezi, Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Van.

[24] Çakar Ö, 2007. Fonksiyonel Analize Giriş I. A.Ü Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları. No:13. Ankara.

[25] Wilansky A, 1984. Summability through Functional Analysis, North-Holland Mathematics Studies 85. Elsevier Science Publishers, Amsterdem New York: Oxford.

[26] Soykan Y, 2008. Fonksiyonel Analiz. Zonguldak Karaelmas Üniversitesi.

[27] Balcı M, 1975. Matematik Analiz cilt 1, Ankara Üniversitesi.

[28] Maddox IJ, 1983. FK Spaces which Include Strongly Summable Sequences. Math. Proc. Camb. Phil. Sec., 93: 131-135.

[29] Thorpe B, 1981. An Extension of Kuttner's Theorem, Bull. London Math. Soc., 13: 301-302.

[30] Şengül H, 2013. α. Dereceden Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık ve α. Dereceden $I -$yakınsaklık. Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.

[31] Maddox IJ, 1967. Spaces of strongly summable sequences. Quart. J. Math. Oxford, 18 (2): 345-355.

[32] Demirci K, 1998. İstatistiksel Yakınsaklık. Yüksek Lisans Tezi,Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Bitlis'te doğdum. İlköğretimi Muştakbaba İlköğretim Okulu'nda, ortaokulu Kazımpaşa İlköğretim Okulu'nda ve liseyi Bitlis Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi'nde tamamladım. 2010 yılında kazandığım Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2015 yılında mezun oldum. Eylül 2017'de Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başladım. Yabancı dilim İngilizce'dir.

Hacer DÖNMEZ