

T.C.  
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI  
YÜKSEK LİSANS TEZİ

3-BOYUTLU GALİLE UZAYINDA SABİT SIRT UZAKLIKLI EĞRİLER VE BU  
EĞRİLERİN SMARANDACHE EĞRİLERİ

İshak GÜRGAR

AĞUSTOS 2020

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

3-BOYUTLU GALİLE UZAYINDA SABİT SIRT UZAKLIKLI EĞRİLER VE BU  
EĞRİLERİN SMARANDACHE EĞRİLERİ

Hazırlayan

İshak GÜRGAR

Danışman

Doç. Dr. Ali ÇAKMAK

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Sezai KIZILTUĞ

Doç. Dr. Ali ÇAKMAK

Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

AĞUSTOS 2020

## ONAY

İshak GÜRGAR tarafından hazırlanan “**3-Boyutlu Galile Uzayında Sabit Sırt Uzaklıklı Eğriler ve Bu Eğrilerin Smarandache Eğrileri**” adlı tez çalışması 18/08/2020 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bitlis Eren Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### İmza

Doç Dr. Sezai KIZILTUĞ  
(Başkan)

Doç. Dr. Ali ÇAKMAK  
(Danışman)

Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI  
(Üye)

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_


Bu tezin kabulü, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun .../.../...gün ve .../... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Zeki ARGUNHAN  
Enstitü Müdürü

**BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**  
**YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI**  
**ETİK BEYANI**

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre hazırlamış olduğum “**3-Boyutlu Galile Uzayında Sabit Sırt Uzaklıklılı Eğriler ve Bu Eğrilerin Smarandache Eğrileri**” adlı tezimin özgün bir çalışma olduğunu, tez hazırlanırken tüm aşamalarda bilimsel etik ilkelerine uygun davrandığımı, tez kapsamında sunulan tüm verileri bilimsel etik ilkelerine uygun elde ettiğimi, tezde faydalandığım tüm eserlere atıf yaptığımı ve kaynaklar kısmında bu eserleri gösterdiğimi beyan ederim. 18/08/2020

**İshak GÜRGAR**

  
17.04.2020

## ÖZET

### 3-BOYUTLU GALİLE UZAYINDA SABİT SIRT UZAKLIKLIL EĞRİLER VE BU EĞRİLERİN SMARANDACHE EĞRİLERİ

İshak GÜRGAR

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ali ÇAKMAK

Ağustos 2020, 54 sayfa

Bu tez çalışmasında öncelikle 3-boyutlu Galile uzayıyla alakalı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Sonra, Galile uzayı ve Öklid uzayında bazı özel eğrilerin tanımları ve özellikleri belirtilmiştir. Daha sonra sabit sırt uzaklı eğriler ve Bertrand, involüt-evolüt, Mannheim ve Smarandache eğrileri arasında ilişkiler kurulmuştur. Son bölümde örnekler verilerek, konu görsellerle desteklenmiş aynı zamanda bulunan sonuçlar somutlaştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** 3-Boyutlu Galile Uzay, Sabit Sırt Uzaklıklılı Eğriler, Bazı Özel Eğriler, Smarandache eğrisi

## ABSTRACT

### CURVES AT A CONSTANT DISTANCE FROM THE EDGE OF REGRESSION AND SMARANDACHE CURVES OF THESE CURVES IN 3-DIMENSIONAL GALILE SPACE

İshak GÜRGAR

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate Education Institute

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

August 2020, 54 pages

In this thesis, firstly, basic definitions and theorems related to 3-dimensional Galilean space are given. Then, the definitions and properties of some special curves in Galile space and Euclidean space are specified. Later, relations between the curves at a constant distance from the edge of regression and Bertrand, involute-evolute, Mannheim and Smarandache curves are established. In the last section, by giving examples, the subject is supported with visuals and the results are concretized.

**Keywords:** 3-Dimensional Galile Space, Curves at a Constant Distance from the Edge of Regression, Some Special Curves, Smarandache curve

## TEŞEKKÜR

Tezimin konusunu belirlememde, tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren ve yapıcı eleştirileriyle destek olan, kendime olan inancımı sorguladığım vakitlerde bile bana olan inancımı bir an dahi yitirmeyen, bu sayede tezimin varlığının meydana gelmesinde etkisi azımsanmayacak kadar çok olan değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ali ÇAKMAK'a Őukranlarımı sunarım.

Tezimin başlangıcından bitimine kadar benden yardımlarını esirgemeyen, glen yüzüyle her zaman yanımda olan, özellikle stresli geçen dönemlerimde gösterdiği sabırdan dolayı aileme teŐekkürlerimi sunuyorum.



# İÇİNDEKİLER DİZİNİ

**Sayfa**

<b>ÖZET</b> .....	i
<b>ABSTRACT</b> .....	ii
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	iii
<b>İÇİNDEKİLER DİZİNİ</b> .....	iv
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b> .....	v
<b>SİMGELER DİZİNİ</b> .....	vi
<b>1. GİRİŞ</b> .....	1
<b>2. MATERYAL VE YÖNTEM</b> .....	4
2.1. 3-Boyutlu Galile Uzayı.....	4
2.2. 3-Boyutlu Galile Uzayında Eğriler .....	5
2.3. 3-Boyutlu Öklid ve Galile Uzayında Bazı Özel Eğriler .....	7
2.3.1. 3-Boyutlu Öklid ve Galile Uzayında Helis Eğrisi .....	7
2.3.2. 3- Boyutlu Öklid ve Galile Uzayında Bertrand Eğrileri.....	9
2.3.3. 3- Boyutlu Öklid ve Galile Uzayında İnvolut ve Evolüt Eğrileri.....	11
2.3.4. 3-Boyutlu Öklid ve Galile Uzayında Mannheim Eğrileri .....	12
2.3.5. 3-Boyutlu Öklid ve Galile Uzayında Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri.....	13
2.4. 3-Boyutlu Öklid ve Galile Uzayında Sabit Sırt Uzaklıklı Eğriler .....	15
2.4.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Sabit Sırt Uzaklıklı Eğriler .....	15
2.4.2. 3-Boyutlu Galile Uzayında Sabit Sırt Uzaklıklı Eğriler.....	15
<b>3. BULGULAR VE TARTIŞMA</b> .....	21
3.1. İzotropik Olmayan $d$ Vektörüne Göre Elde Edilen Sabit Sırt Uzaklıklı Eğriler ile Bazı Özel Eğriler Arasındaki Bağlıntılar .....	21
3.2. İzotropik $d$ Vektörüne Göre Elde Edilen Sabit Sırt Uzaklıklı Eğriler ile Bazı Özel Eğriler Arasındaki Bağlıntılar.....	26
3.3. 3-Boyutlu Galile Uzayında Sabit Sırt Uzaklıklı Eğri Örnekleri.....	31
<b>4. SONUÇ VE ÖNERİLER</b> .....	51
4.1. Öneriler.....	51
<b>5. KAYNAKLAR</b> .....	52
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	54



## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>ŞEKİL</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1. Helis eğrisi.....	8
Şekil 2.2. Bertrand eğri çifti .....	10
Şekil 2.3. İnvolut-evolüt eğri çifti .....	12
Şekil 2.4. Sabit sırt uzaklıklı eğri .....	15
Şekil 3.1. $G_3$ de Mannheim eğrisi ( $\kappa(s) = e^{-s}$ ve $\tau(s) = s$ ).....	23
Şekil 3.2. $G_3$ de Bertrand eğrisi ( $r_2 = \frac{1}{2}$ , $r_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $c_1 = 1$ , $\kappa(s) = 1, s \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ) .....	27
Şekil 3.3. $r_2 = \frac{1}{2}, r_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tau(s) = s$ ve $\kappa = r_2\tau^2 + r_3\tau'$ değerleri için elde edilen eğrinin grafiği ....	29
Şekil 3.4. $\alpha(s)$ eğrisi (a); $\alpha_r(s)$ sabit sırt uzaklıklı eğri (b); $(\alpha, \alpha_r)$ eğri çifti (c). .....	33
Şekil 3.5. $(\alpha_r)_{T,N_r}$ eğrisi (a); $(\alpha_r)_{T,B_r}$ eğrisi (b); $(\alpha_r)_{T,N_r,B_r}$ eğrisi (c).....	36
Şekil 3.6. $\alpha(s)$ eğrisi (a); $\alpha_r(s)$ sabit sırt uzaklıklı eğri (b); $(\alpha, \alpha_r)$ eğri çifti (c) .....	38
Şekil 3.7. $(\alpha_r)_{T,N_r}$ eğrisi.....	40
Şekil 3.8. $(\alpha_r)_{T,N_r,B_r}$ eğrisi .....	41
Şekil 3.9. $\alpha(s) = (s, s^2, s^3)$ eğrisi (a); $\alpha_r(s) = (1+s, 2s+s^2, 3s^2+s^3)$ eğrisi (b); $\alpha$ ve $\alpha_r$ ikilisi (c),(d) .....	43
Şekil 3.10. $(\alpha_r)_{T,N_r} = \left( 1, 2+2s + \frac{1}{\sqrt{9s^2+18s+10}}, 3s^2+6s + \frac{6+6s}{2\sqrt{9s^2+18s+10}} \right)$ eğrisi (a), (b)....	45
Şekil 3.11. $(\alpha_r)_{T,B_r} = \left( 1, 2+2s - \frac{3+3s}{\sqrt{9s^2+18s+10}}, 3s^2+6s + \frac{1}{\sqrt{9s^2+18s+10}} \right)$ eğrisi (a), (b) .....	46
Şekil 3.12. $(\alpha_r)_{T,N_r,B_r} = \left( 1, 2+2s - \frac{2+3s}{\sqrt{9s^2+18s+10}}, 3s^2+6s + \frac{4+3s}{\sqrt{9s^2+18s+10}} \right)$ eğrisi .....	48
Şekil 3.13. $\alpha(s) = (s, s^2, s^3)$ eğrisi (a); $\alpha_r(s) = \left( s, s^2 + \frac{1-3\sqrt{3}s}{2\sqrt{1+9s^2}}, s^3 + \frac{\sqrt{3}+3s}{2\sqrt{1+9s^2}} \right)$ eğrisi (b); $\alpha$ ve $\alpha_r$ ikilisi (c),(d).....	50

## SİMGELER DİZİNİ

$E^3$	3-boyutlu Öklid uzayı
$G_3$	3-boyutlu Galile uzayı
$\  \cdot \ $	$E^3$ de norm
$\langle \cdot \rangle$	$E^3$ de iç çarpım
$\langle A, B \rangle_G$	$A$ ve $B$ vektörlerinin Galile iç (skaler) çarpımı
$AB$	$A$ ve $B$ vektörlerinin Galile skaler çarpımı
$\ A\ _G$	$A$ vektörünün Galile normu
$A \times_G B$	$A$ ve $B$ vektörlerinin Galile vektörel çarpımı
$T$	Teğet vektör
$N$	Asli normal vektör
$B$	Binormal vektör
$\alpha$	Galile uzayında regüler bir eğri
$\alpha_r$	$\alpha$ eğrisinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi
$\kappa$	Eğrinin eğriliği
$\tau$	Eğrinin burulması

## 1. GİRİŞ

Geometri kelime anlamı olarak “yerin ölçülmesi” anlamına gelen; uzay ve uzayda tasarlanabilen (nokta, düzlem, doğru vs.) biçimleri ve bunların birbirleriyle olan ilişkilerini inceleyen bir bilim dalıdır. Geometri çok geniş bir kavram olup içerisinde birçok işlem, uzay ve özellik bulunur. Özellikle son iki yüzyılda çeşitli yeni geometriler keşfedildi ve geliştirildi. Geliştirilen bu geometriler birçok alanda incelendi. Özellikle A. Cayley ve F. Klein tarafından çeşitli geometrilerin mümkün olduğunu ifade etmişlerdir.

Bu geometriler arasında aynı zamanda Galile geometrisi de vardır. Galile geometrisi fizikte de büyük bir öneme sahiptir. Galile geometrisi hareket dönüşümleri altında değişmezlerin teorisidir. Bu geometrinin daha doğru adı, Galile rölativite prensipleriyle birleşen geometridir. Bu ifade uzun olduğundan kısaca Galile geometrisi adı verilmiştir.

Bu tezdeki çalışma alanımız olan Galile geometrisinde özellikle vektör çarpımının lineer olmaması, burada yapılacak işlemlerde geometrideki diğer konulara göre daha dikkatli olmamıza ve işlemlerin daha da uzamasına yol açarken bu durum bazen de bazı kolaylıklara da yol açmaktadır. Bundan dolayı Öklid geometrisinde genel durumlar için çözülemeyen bazı problemler Galile geometrisinde kolaylıkla çözülebilir. Örneğin; bir eğrinin eğrilik fonksiyonlarına göre genel konum vektörünün belirlenmesi problemi Öklid geometrisinde genel durumlarda çözülemezken Galile geometrisinde eğrinin türüne bağlı olmaksızın çözülebilir.

Diferansiyel geometri alanında eğriler ve yüzeylerin diferansiyel geometrisi her zaman araştırmacılar için önemli bir çalışma alanı olup birçok çalışmalar yapılmıştır. Son yıllarda Galile ve yarı-Galile uzaylarında eğriler ve yüzeyler teorisiyle ilgili araştırmalar artmıştır. Bu uzayların genel bir çalışması ve araştırması Röschel ve Divjak tarafından yapılmıştır [1, 2].

Eğri kavramının incelenmeye başladığı ilk anlardan bugüne kadar birçok araştırmacı ilk olarak eğri üzerinde tanımlanan Frenet üçyüzlülerini incelemiştir. Frenet elemanları olarak adlandırılan  $\kappa(s)$ ,  $\tau(s)$ ,  $T(s)$ ,  $N(s)$ ,  $B(s)$  ifadeleri kullanılarak eğriler hakkında birçok bilgi elde edilmiştir. Çalışılan uzaya göre Frenet elemanları hakkında farklılıklar da karşımıza çıkmaktadır [3].

Eğrilerin diferansiyel geometrisi birçok geometrici tarafından ele alınarak incelenmiştir. Özellikle eğrinin eğriliği ve eğrinin burulması gibi kavramlarla eğriyi incelemek oldukça önemlidir. Bir regüler eğrinin teğet vektörü sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyorsa eğri genel helis veya sabit eğimli eğri olarak adlandırılır. Bir eğrinin genel helis olması için gerek ve yeter şart

$\tau$  ve  $\kappa$  oranının sabit olması sonucu 1802 yılında M. A. Lancret tarafından ifade edilmiş ve ilk olarak 1845 yılında B. de Saint Venant tarafından ispat edilmiştir. Eğer bu oranda hem eğrilik hem de burulma sıfırdan farklı ve sabit iseler eğriye dairesel helis denir [4].

Diferansiyel geometride önemli diğer bir eğri 1850 yılında J. Bertrand tarafından bulunan Bertrand eğrileridir. Kısaca, bu eğrinin her noktasındaki asli normal vektörü Bertrand çifti denilen diğer bir eğrinin de asli normal vektörü olur [5].

$\alpha$  ve  $\alpha^*$  eğrilerinin normal vektörleri birbiriyle lineer bağımlı ise  $\alpha$  eğrisine Bertrand eğrisi,  $\alpha^*$  eğrisine  $\alpha$  eğrisinin Bertrand partner eğrisi,  $(\alpha, \alpha^*)$  ikilisine de Bertrand eğri çifti denilmektedir.

Mannheim tarafından ilk olarak 1878 yılında ortaya atılmış olan Mannheim eğrileri de Bertrand eğrilerine benzer bir özelliktedir. Burada da eğrinin normal diğ er eğrinin binormali ile lineer bağımlıdır [6].

Sabit sırt uzaklıklı eğri kavramı ilk defa Hans Vogler tarafından ortaya atılmıştır. O makalesinde bir uzay eğrisinin pseudo rektifiyan torslarına dual karşılık olan, bir tors üzerine çizilmiş sabit sırt uzaklıklı eğrilerin Frenet çatısı tarafından teşkil edilen geometrik özellikleri incelemiştir [7]. Daha sonra Hacısalihoğlu, bir uzay eğrisinin Frenet çatısının eğri boyunca hareketi esnasında, rektifiyan düzlemine sıkı suretle bağılı bir doğrunun oluşturduğu açılmayan bir yüzey üzerine çizilmiş parametre eğrilerinin (sabit sırt uzaklıklı eğrilerden daha genel) özelliklerini incelemiştir [8]. Taracık ise, Vogler'in ileri sürdüğü problemde bir eğri yerine bir yüzey almış ve ortaya çıkan yeni yüzeye ilk yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olarak bakmıştır. Söz konusu yüzeyler arasındaki geometrik ve diferensiyel geometrik özellikleri incelemiştir [9]. Daha sonraki yıllarda araştırmacılar tarafından sabit sırt uzaklıklı eğriler ve yüzeyler üzerine incelemeler süregelmiştir [10,11,12,13,14,15].

Bu tez çalışmasında ise 3-boyutlu Galile uzayında bazı özel eğrilerle sabit sırt uzaklıklı eğriler arasında bağıntılar kurulmaya çalışılacaktır. Bunun için ilk olarak 3-boyutlu Galile uzayda temel tanım ve teoremlere yer verilecektir. Sonra, Frenet elemanları yardımıyla Bertrand, involüt-evolüt, Mannheim ve Smarandache eğrilerinin tanımları yapılacak ve özellikleri ele alınacaktır. Daha sonra asıl inceleme konumuzu oluşturan [16] daki bulgular incelenerek yukarıda bahsi geçen özel eğrilerle sabit sırt uzaklıklı eğriler arasında ilişkiler kurarak özel eğri çifti oluşturup oluşturmayacakları araştırılacaktır. Son olarak 3-boyutlu Galile uzayında Smarandache eğrileri izotropik olma veya olmama durumuna göre sabit sırt uzaklıklı eğrinin  $T_r N_r$ ,  $T_r B_r$  ve  $T_r N_r B_r$  eğrileri elde edilecektir.

Dört bölümden oluşması oluşan bu çalışma, giriş bölümünden sonra temel tanım ve kavramlara yer verilerek özel eğriler incelenecektir. Asıl çalışma alanımız üçüncü bölüm bulgular kısmında yer alacaktır. Bütün bu çalışmalarda SWP ve Mathematica programıyla şekil ve grafiklere yer verilerek görseller yardımıyla örneklendirmeler yapılacaktır. Dördüncü bölümde ise bu çalışmamızda elde edilen sonuçlar verilecektir.



## 2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, çalışma alanımıza kaynaklık eden Galile uzayı ile ilgili temel tanım ve teoremler üzerinde durulacaktır. Daha sonra, 3-boyutlu Öklid uzayı ve 3-boyutlu Galile uzayında sırasıyla helis, Bertand, Mannheim, involüt-evolüt eğrileri ve Smarandache eğrilerinin tanımları yapılacaktır. Bu eğrilerin Frenet çatı elemanları arasındaki bağıntılar belirtilecektir. Son kısımda çalışmamızın temelini oluşturan [16] daki bulgular ele alınacaktır.

### 2.1. 3-Boyutlu Galile Uzayı

#### Tanım 2.1.1. (Galile Skaler Çarpım)

3-boyutlu Galile uzayı  $G_3$  de;  $A = (x, y, z)$  ve  $B = (x_1, y_1, z_1)$  vektörleri verilmiş olsun. Bu durumda bu iki vektörün skaler çarpımı;

$$\langle A, B \rangle_G = A.B = \begin{cases} xx_1, & x \neq 0 \text{ veya } x_1 \neq 0 \\ yy_1 + zz_1, & x = 0 \text{ ve } x_1 = 0 \end{cases}$$

şeklinde olur [17].

#### Tanım 2.1.2. (Galile Uzayında İki Vektörün Dikliği)

3-boyutlu Galile uzayında  $x, y, z$  vektörleri verilsin,  $A = (x, y, z)$  ve  $B = (x_1, y_1, z_1)$  vektörleri olsun. Bu durumda  $A.B = 0$  ise bu vektörlere Galile uzayında Galile anlamında vektörler diktirler denir [17].

#### Tanım 2.1.3. (Norm)

$A = (x, y, z)$  vektörünün Galile normu,

$$\|A\|_G = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ \sqrt{y^2 + z^2}, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde olur [17].

#### Tanım 2.1.4. (İzotropik Vektör)

Bir  $A = (x, y, z) \in G_3$  vektöründe  $x = 0$  ise  $A$  vektörüne izotropik vektördür, eğer  $x \neq 0$  ise

$A$  vektörüne izotropik vektör değildir denir [17].

### Tanım 2.1.5. (Galile Vektörel Çarpımı)

$A = (x_1, y_1, z_1)$  ve  $B = (x_2, y_2, z_2) \in G_3$  olsun.  $A$  ve  $B$  Galile vektörel çarpımı

$$A \times_G B = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

biçimindedir. Eğer  $x_1 = 0, x_2 = 0$  ise

$$A \times_G B = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & y_1 & z_1 \\ 0 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanır [17, 18].

## 2.2. 3-Boyutlu Galile Uzayında Eğriler

### Tanım 2.2.1. (Eğri)

$G_3$  de bir  $\alpha$  dönüşümü

$$\alpha: I \rightarrow G_3,$$

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

şeklinde olsun. Bu ifadede  $x(t), y(t), z(t) \in C^3$  (sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlar) ve  $t \in I$  'dır. Burada  $\alpha$  dönüşümüne  $G_3$  de bir eğri denir.  $\alpha(t)$ ,  $G_3$  de bir eğri ve bu durumda eğer  $x'(t) \neq 0$  olursa  $\alpha(t)$  eğrisine regülerdir denir [19].

### Tanım 2.2.2. (Yay uzunluk parametresi)

$G_3$  de bir  $\alpha$  regüler eğrisi

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

olarak verilsin. Bu eğrinin yay uzunluk parametresi

$$ds = |x'(t)dt| = |dx|$$

şeklinde olur.  $\alpha$  eğrisinin yay uzunluğu ise  $ds = dx$  ve  $s = x$  olarak elde edilir [19].

Galile uzayında yay parametresine göre eğri parametrelendirilirse eğri

$$\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$$

biçiminde olur.

$I \subseteq \mathbb{R}$  açık aralığında

$$\alpha : I \rightarrow G_3,$$

$$\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$$

eğrisi verilsin. Bu durumda  $y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisine ait Galile koordinat fonksiyonları adı verilir.  $\alpha(x)$  de  $x$ 'e göre türev alınırsa;

$$\alpha'(x) = (1, y'(x), z'(x))$$

bulunur. Burada  $\|\alpha'(x)\|_G = 1$  olduğundan,  $\alpha$  eğrisinin Galile uzayında birim hızlı bir eğri olduğu görülmüş olur [19].

### Tanım 2.2.3. (Galile Uzayında Eğrinin Serret-Frenet Çatısı)

$I \subseteq \mathbb{R}$  açık aralığında

$$\alpha : I \rightarrow G_3,$$

$$\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$$

eğrisi verilsin. Burada  $\alpha$  ard arda iki defa türevlenirse;

$$\alpha'(x) = (1, y'(x), z'(x))$$

$$\alpha''(x) = (0, y''(x), z''(x))$$

eşitlikleri bulunur.  $\|\alpha'(x)\|_G = 1$  olacağından,

$$T(x) = (1, y'(x), z'(x))$$

olur ki; bu vektöre eğrinin teğet vektörü denir. Bu türevlerin iç çarpımı alınırsa;

$$\alpha'(x) \cdot \alpha''(x) = 0$$

olur. Bu demektir ki;  $\alpha'(x) \perp \alpha''(x)$  olup,  $\alpha''(x)$ ,  $T(x)$  vektörüne diktir. Böylece eğrinin birim normal vektörü

$$N(x) = \frac{\alpha''(x)}{\|\alpha''(x)\|_G}$$

biçiminde hesaplanır. Eğrinin parametrik ifadesindeki değerler kullanılırsa;

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{y''^2(x) + z''^2(x)}} (0, y''(x), z''(x))$$

denklemini bulunur. Son olarak, eğrinin birim binormal vektörü;

$$B(x) = \frac{1}{\sqrt{y''^2(x) + z''^2(x)}} (0, -z''(x), y''(x))$$



olarak elde edilir. Böylece  $G_3$  de elde edilen  $\{T(x), N(x), B(x)\}$  çatısına birim hızlı eğriler için Serret-Frenet çatısı adı verilir [20].

**Önerme 2.2.4.** 3-boyutlu Galile uzayında birim hızlı  $\alpha$  eğrisi için, Frenet formülleri;

$$\begin{pmatrix} T'(x) \\ N'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(x) & 0 \\ 0 & 0 & \tau(x) \\ 0 & -\tau(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(x) \\ N(x) \\ B(x) \end{pmatrix}$$

biçiminde olup, bu durumda  $\kappa$  eğrilik ve  $\tau$  burulma fonksiyonları

$$\kappa(x) = \sqrt{y''^2(x) + z''^2(x)}$$

$$\tau(x) = \frac{\det(\alpha'(x), \alpha''(x), \alpha'''(x))}{\kappa^2(x)}$$

denklemleriyle verilir [20].

**Tanım 2.2.5. (Birim Hızlı Olmayan Eğriler İçin Eğrilik)**

$G_3$ , Galile uzayında birim hızlı olmayan bir  $\beta: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G_3$  eğrisi için eğrilik ise

$$\kappa = \frac{\|\beta' \times_G \beta''\|_G}{\|\beta'\|_G^3}$$

şeklinde tanımlıdır [21].

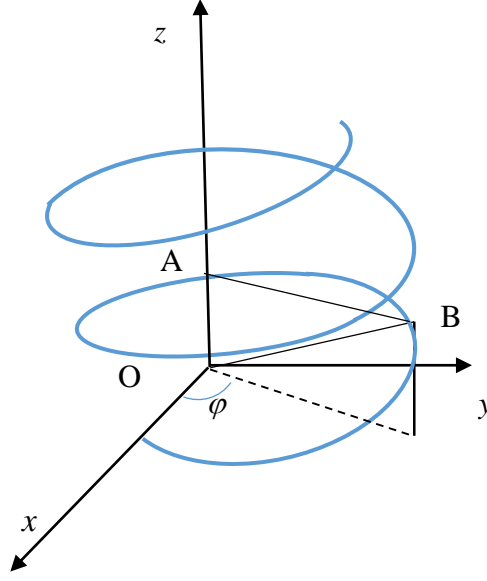
## 2.3. 3-Boyutlu Öklid ve Galile Uzayında Bazı Özel Eğriler

### 2.3.1. 3-Boyutlu Öklid ve Galile Uzayında Helis Eğrisi

**Tanım 2.3.1.1. (Helis Eğrisi)**

Sabit  $a$  uzunluğundaki  $AB$  doğru parçası bir doğruya (mesela  $O_2$  eksenine) dik olarak bağlansın ve bu doğru parçasının bir ucu dik doğru boyunca hareket ettirilsin. Eğer, bu hareket eden  $A$  uç noktasının  $O$  başlangıcından olan  $OA$  uzaklığı, doğru parçasının  $OX$  eksenine ile yaptığı  $\varphi$  dönme açısıyla orantılı olursa ( $OA = b\varphi$ ), bu takdirde diğer  $B$  uç noktasının çizdiği eğriye helis eğrisi denir (şekil 2.1) [22].

**Tanım 2.3.1.2.**  $E^3$  uzayında bir  $\alpha$  eğrisinin birim teğet vektör alanı  $T$  olsun.  $T$  vektör alanı, belirli bir  $u$  vektörü ile sabit açı yapıyorsa  $\alpha$  eğrisine bir helis adı verilir [5].



Şekil 2.1. Helis eğrisi

**Teorem 2.3.1.3.**  $E^3$  de bir eğrinin helis eğrisi olabilmesi için  $\frac{\tau}{\kappa}$  nın sabit olması gerekir.

**İspat:**  $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$  parametrik denklemi ile verilen helis eğrisini ele alalım. Bu durumda

$$\alpha'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), b)$$

$$\alpha''(t) = (-a \cos(t), -a \sin(t), 0)$$

$$\alpha'''(t) = (a \sin(t), -a \cos(t), 0)$$

türevleri yardımıyla  $\kappa$  ve  $\tau$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

$$\tau = \frac{\|\alpha', \alpha'', \alpha'''\|}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

olduğundan dolayı buradan da

$$(\alpha', \alpha'', \alpha''') = ba^2$$

olarak hesap edilir. Böylece

$$\|\alpha' \times \alpha''\|^2 = \sqrt{a^4 + a^2 b^2}$$

$$\|\alpha' \times \alpha''\| = a\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\|\alpha'\|^3 = (\sqrt{a^2 + b^2})^3$$

olduğundan  $\tau$  ve  $\kappa$  hesaplanıp oranlandığında

$$\tau = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{b}{a}$$

sabit olarak elde edilir [22].

**Tanım 2.3.1.4.**  $\alpha$ ;  $G_3$  3-boyutlu Galile uzayında bir eğri ve  $\{T, N, B\}$  de  $\alpha$  nın Frenet çatısı olsun. Eğer  $\kappa$  ve  $\tau$ ,  $\alpha$  boyunca pozitif sabitlerse o zaman  $\alpha$  Frenet çatısına göre bir dairesel helis olarak isimlendirilir [23].

**Tanım 2.3.1.5.**  $\alpha$ ;  $G_3$  3-boyutlu Galile uzayında bir eğri ve  $\{T, N, B\}$ ,  $\alpha$  eğrisi boyunca Frenet çatısı olsun; eğer

$$\frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit}$$

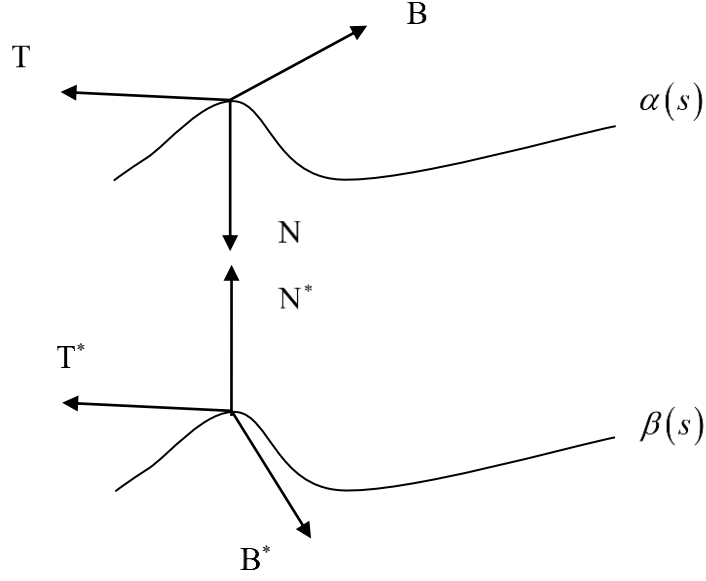
olmak üzere  $\alpha$  Frenet çatısına göre bir genel helis olarak isimlendirilir [23].

### 2.3.2. 3- Boyutlu Öklid ve Galile Uzayında Bertrand Eğrileri

1850'de J.Bertrand tarafından keşfedilen Bertrand eğrileri özel eğri teorisinin önemli, klasik ve en ilginç konularından biridir. Bir Bertrand eğrisi asli normallerini diğer özel eğriyle paylaşan bir özel eğri olarak tanımlanır. (Bertrand eşi diye adlandırılır). Bertrand eğrileri eğrilik ve burulmasının lineer bağlantılı olduğu özel eğriler olarak karakterize edilirler [21].

#### Tanım 2.3.2.1. (Bertrand Eğri Çifti)

$M, N \subset E^3$  eğrileri sırasıyla  $(I, \alpha), (I, \beta)$  koordinat koşullukları ile verilsin.  $\forall s \in I$  ya karşılık gelen  $\alpha(s) \in M$  ve  $\beta(s) \in N$  noktalarında  $M$  ve  $N$  nin  $\{T, N, B\}$  ve  $\{T^*, N^*, B^*\}$  Frenet üç ayaklıları ile verildiğinde  $\forall s \in I$  için  $\{N, N^*\}$  ikilisi lineer bağımlı ise  $(M, N)$  eğri çiftine Bertrand eğri çifti denir [24].



**Şekil 2.2.** Bertrand eğri çifti

**Teorem 2.3.2.2.**  $E^3$  de  $M$  ve  $N$  Bertrand eğri çifti olmak üzere;  $M$  ve  $N$  sırası ile  $(I, \alpha)$  ve  $(I, \beta)$  koordinat komşulukları ile verilsin.  $\forall s \in I$  için  $d(\alpha(s), \beta(s))$  sabittir [24].

**İspat:**  $M$  ve  $N$  Bertrand eğri çifti olduğundan

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda N(s)$$

yazılabilir. Bu ifade diferansiyellenirse,

$$\frac{d\beta(s)}{ds} = T^* \frac{ds^*}{ds} = (1 - \lambda\kappa)T + \lambda'N + \lambda\tau B$$

olur. Bu durumda  $N$  ve  $N^*$  lineer bağımlı ve  $\langle T^*, N^* \rangle = 0$  dan  $\langle T^*, N \rangle = 0$  olup,

$$\lambda' = 0$$

bulunur. Böylece;

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda N(s)$$

ve

$$d(\alpha(s), \beta(s)) = \|\alpha(s) - \beta(s)\| = \|\lambda N(s)\| = |\lambda|$$

eşitliklerinden  $\lambda$  sabit olarak elde edilmiş olur [24].

**Tanım 2.3.2.3.** ( $G_3$  de Bertrand Eğrisi)

$G_3$  de  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  eğrilerinin eğrilikleri ve burulmaları sıfırdan farklı olsun. Yani  $\forall s \in I$  için

$$\kappa_\alpha(s) \neq 0, \kappa_{\alpha^*}(s) \neq 0, \tau_\alpha(s) \neq 0, \tau_{\alpha^*}(s) \neq 0$$

olsun. Ayrıca  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla  $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$  ve  $\{T_{\alpha^*}, N_{\alpha^*}, B_{\alpha^*}\}$  şeklinde olsunlar.  $\forall s \in I$  noktasındaki  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  in asli normaleri birbirine paralel oluyorsa diğer bir deyişle lineer bağımlı ise bu eğrilere  $G_3$  de Bertrand eğrileri denir.  $(\alpha, \alpha^*)$  eğri çiftine de  $G_3$  de bir Bertrand eğri çifti denir.

$\alpha^*$  eğrisine  $\alpha$ 'nın Bertrand partner eğrisi ve aynı şekilde  $\alpha$  eğrisine de  $\alpha^*$ 'in Bertrand eş eğrisi denir. Tanımdan  $(\alpha, \alpha^*)$  Bertrand eğri çifti için,  $u^*(s^*(s)) = u(s)$  olan bir  $s^* = s^*(s)$  fonksiyonel bağıntısı vardır. O zaman,  $(\alpha, \alpha^*)$   $G_3$  de bir Bertrand eğri çifti olmak üzere,

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + u(s)N_\alpha(s)$$

yazılabilir [25].

### 2.3.3. 3- Boyutlu Öklid ve Galile Uzayında İvolüt ve Evolüt Eğrileri

#### Tanım 2.3.3.1. (İvolüt ve Evolüt Eğri)

$M \subset E^3, (I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile  $N \subset E^3, (I, \beta)$  koordinat komşuluğu ile verilmiş bir eğri olsun.  $M$  ve  $N$  eğrilerinin Frenet üç ayaklıları sırasıyla  $\{T, N, B\}$  ve  $\{T^*, N^*, B^*\}$  olsun. Eğer,  $\langle T(s), T^*(s) \rangle = 0$  ise yani  $\alpha$  nın teğeti  $\beta$  nin asli normali ise  $\beta$  ya  $\alpha$  nın involütü denir ve  $\alpha$  ya da  $\beta$  nın evolütü denir [24].

**Teorem 2.3.3.2.**  $M, E^3$  de  $(I, \alpha)$  koordinat komşulukları ile  $N$  ise  $(\alpha, \beta)$  koordinat komşulukları ile verilsin.  $M$  ve  $N \subset E^3$  de involüt evolüt eğri çifti olsun. Burada  $\forall s \in I, c = \text{sabit}$  için

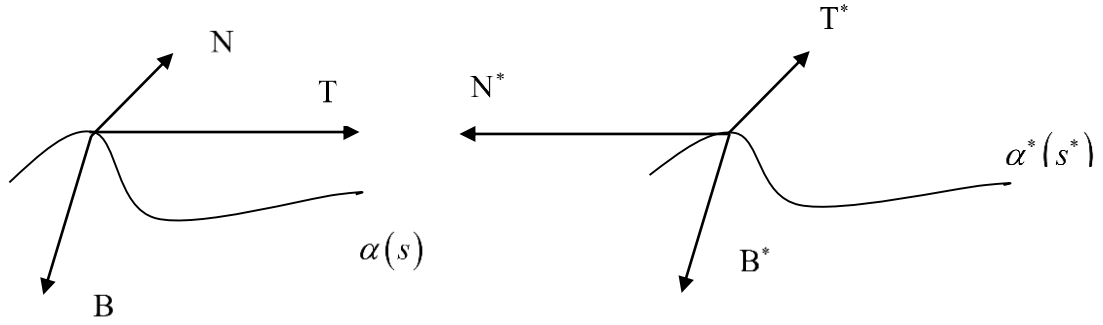
$$d(\alpha(s), \beta(s)) = |c - s|$$

dır [24].

#### Tanım 2.3.3.3. ( $G_3$ de İvolüt ve Evolüt Eğrileri)

$\alpha$  ve  $\alpha^*$ ;  $G_3$  Galile uzayında iki eğri olsun, eğer  $\alpha(s)$  noktasındaki  $\alpha$  eğrisinin teğet vektörü  $\alpha^*(s)$  noktasında  $\alpha^*$  eğrisinin teğet vektörü boyunca geçiyorsa ve  $\langle T, T^* \rangle = 0$  ise  $\alpha^*$ ,  $\alpha$  eğrisinin involütü olarak isimlendirilir.

Burada  $\{T, N, B\}$  ve  $\{T^*, N^*, B^*\}$  sırasıyla  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  'n Frenet çatılarıdır. Üstelik  $\alpha$  eğrisi,  $\alpha^*$  eğrisinin evolütü olarak adlandırılır [26].



Şekil 2.3. İvolüt-evolüt eğri çifti

### 2.3.4. 3-Boyutlu Öklid ve Galile Uzayında Mannheim Eğrileri

#### Tanım 2.3.4.1. (Mannheim Eğri Çifti)

$E^3$  de  $M$  ve  $N$  sırasıyla  $\{I, \alpha\}, \{I, \beta\}$  koordinat komşuluklarıyla verilsin.  $s \in I$  ya karşılık gelen  $\alpha(s) \in M$  ve  $\beta(s) \in N$  noktalarında  $M$  ve  $N$  nin  $\{T, N, B\}$  ve  $\{T^*, N^*, B^*\}$  Frenet üç ayaklıları verildiğinde  $\{N, B^*\}$  ikilisi lineer bağımlı ise  $(M, N)$  eğri çiftine Mannheim eğri çifti denir [27].

**Teorem 2.3.4.2.**  $M$  ve  $N$  Mannheim eğri çifti olsun.  $M$  ve  $N$  sırası ile  $\{I, \alpha\}, \{I, \beta\}$  koordinat komşuluklarıyla verilsin.  $\forall s \in I$  için  $d(\alpha(s), \beta(s))$  sabittir [27].

#### Tanım 2.3.4.3. ( $G_3$ de Mannheim Eğrileri)

$G_3$  3-boyutlu Galile uzayında iki eğri  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  olsun.  $\alpha^*$  'n binormal doğrusu  $\alpha$  'n birim normal doğrusu ise  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  a Mannheim eğrileri denir.  $(\alpha, \alpha^*)$  çiftine ise Mannheim eğri çifti denir [28].

**Teorem 2.3.4.4.**  $\alpha$ ,  $G_3$  Galile uzayında bir eğri olsun. Bu durumda  $\alpha$  'n bir Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şart  $\alpha$  'n  $\kappa_\alpha$  eğriliği ve  $\tau_\alpha$  burulması ve bir  $c$  sabiti için

$$\kappa_\alpha = c\tau_\alpha^2$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [28].

**İspat:**  $\alpha = \alpha(s)$  regüler Mannheim eğrisi olmak üzere  $\alpha$  nın Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$  üçlüsü olsun.

Diğer taraftan  $\alpha^* = \alpha^*(s)$  eğrisinin binormal doğrultusu  $\alpha$  eğrisinin normali ile çakışan bir regüler eğri olsun. Bu durumda  $\alpha^*$  nın Frenet çatı alanını da  $\{T^*, N^*, B^*\}$  olarak gösterelim.

Burada  $B^*(s^*) = \pm N(s)$  dir.  $\alpha^*$  eğrisi;  $c(s) \neq 0$  olmak üzere  $s$  yay uzunluğuna göre bir  $c(s)$  fonksiyonu için

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + c(s)N(s)$$

formunda yazılabilir. Bu son eşitliğin  $s$  ye göre türevi

$$\alpha^{*'} = T + c'N + c\tau_\alpha B$$

dir.  $\alpha^*$  nın binormali  $\alpha$  nın normali ile çakıştığından  $c' = 0$  olur. Bu durumda  $c$  sabit olup,  $s$  ye göre de  $\alpha^*$  nın ikinci türevi alınarak,

$$\alpha^{*''} = (\kappa_\alpha - c\tau_\alpha^2)N + c\tau_\alpha'' B$$

eşitliği bulunur.  $N$ ;  $\alpha^*$  nın binormal doğrultusunda olacağından

$$\kappa_\alpha - c\tau_\alpha^2 = 0$$

olur.

Tersine,  $\alpha$   $G_3$  de bir eğri ve

$$\kappa_\alpha = c\tau_\alpha^2$$

olsun. Bir  $c$  sabiti için

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + cN(s)$$

eğrisi  $N(s)$  binormal doğrultusuna sahiptir. Böylece ispat tamamlanır.

### 2.3.5. 3-Boyutlu Öklid ve Galile Uzayında Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri

$\alpha = \alpha(s)$  ve  $\beta = \beta(s^*)$  3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı regüler eğriler olsunlar.

Burada  $\alpha$  nın Serret-Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$  olarak verilsin. Bu durumda TN -Smarandache eğrisi, NB -Smarandache eğrisi ve TNB - Smarandache eğrisi aşağıdaki gibi tanımlanırlar [29].

**Tanım 2.3.5.1.**  $\alpha = \alpha(s)$ ;  $E^3$  de bir birim hızlı regüler eğri olsun.  $\{T, N, B\}$  de  $\alpha$  nın Serret - Frenet çatısı olarak verildiğinde TN -Smarandache eğrisi aşağıda verilen

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + N)$$

denklemleri ile tanımlanır [29].

**Tanım 2.3.5.2.**  $\alpha = \alpha(s)$  ;  $E^3$  de bir birim hızlı regüler eğri olsun.  $\{T, N, B\}$  de  $\alpha$  nın Serret - Frenet çatısı olarak verildiğinde NB -Smarandache eğrisi aşağıda verilen

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + B)$$

denklemleri ile gösterilir [29].

**Tanım 2.3.5.3.**  $\alpha = \alpha(s)$  ;  $E^3$  de bir birim hızlı regüler eğri olsun.  $\{T, N, B\}$  de  $\alpha$  nın Serret - Frenet çatısı olarak verildiğinde TNB -Smarandache eğrisi aşağıda verilen

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T + N + B)$$

denklemleri ifade edilir [29].

**Tanım 2.3.5.4.** Minkowski uzay-zamanda konum vektörü; başka bir regüler eğrinin Frenet çatı vektörleriyle meydana gelen bir regüler eğri; bir Smarandache eğrisi olarak isimlendirilir [30].

Yukarıdaki tanım ışığında, Galile uzayında geçerli eğriler için tanımı şöyle ifade edebiliriz:

**Tanım 2.3.5.5.**  $\alpha = \alpha(s)$  Galile 3-uzayında regüler bir eğri ve  $\{T, N, B\}$  ;  $\alpha$  nın Serret-Frenet çatısı olsun. TN -Smarandache, TB - Smarandache ve TNB - Smarandache eğrileri sırasıyla;

$$\alpha_{TN} = \frac{T + N}{\|T + N\|_G},$$

$$\alpha_{TB} = \frac{T + B}{\|T + B\|_G},$$

$$\alpha_{TNB} = \frac{T + N + B}{\|T + N + B\|_G}$$

olarak tanımlanır [31].



## 2.4. 3-Boyutlu Öklid ve Galile Uzayında Sabit Sırt Uzaklıklı Eğriler

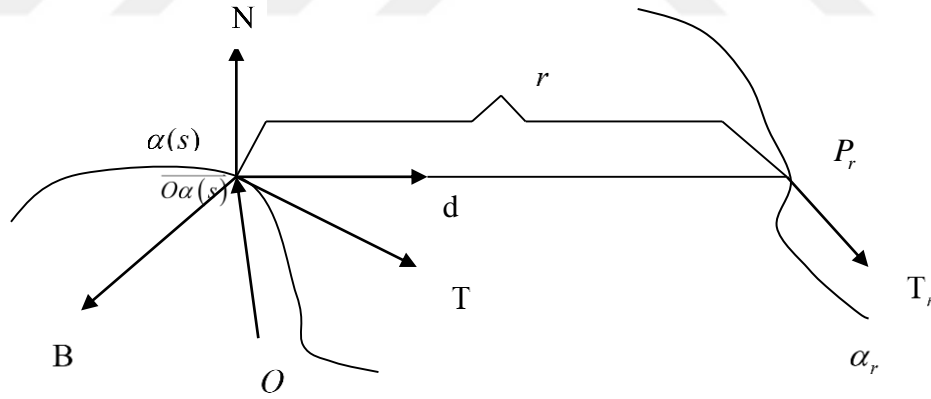
### 2.4.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Sabit Sırt Uzaklıklı Eğriler

**Tanım 2.4.1.1.**  $\alpha$ , 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri,  $\alpha$  nın bir  $P = \alpha(s)$  noktasındaki Serret-Frenet üç ayaklısı  $\{T, N, B\}$  olsun.  $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$  için  $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$  olmak üzere;

$$d = d_1T + d_2N + d_3B$$

vektörüne  $\{T, N, B\}$  ye sıkı suretle bağlı vektör,  $P$  noktasından geçen ve  $d$  doğrultusundaki  $k$  doğrusuna  $\{T, N, B\}$  ye sıkı suretle bağlı doğru denir [8, 9].

**Tanım 2.4.1.2.**  $\alpha$ , 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri ve  $\alpha$  nın bir  $P$  noktasındaki Serret-Frenet üç ayaklısı  $\{T, N, B\}$  olsun.  $\{T, N, B\}$  ye sıkı suretle bağlı  $k$  doğrusu üzerindeki  $P$  den sabit bir  $r$  uzaklığındaki nokta  $P_r$  ile gösterilmiş olsun.  $\{T, N, B\}$  nin eğri üzerinde hareketi boyunca  $P_r$  noktasının çizdiği geometrik yer olan  $\alpha_r$  eğrisine  $\alpha$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi denir [8, 9].



Şekil 2.4. Sabit sırt uzaklıklı eğri

### 2.4.2. 3-Boyutlu Galile Uzayında Sabit Sırt Uzaklıklı Eğriler

**Tanım 2.4.2.1.**  $\alpha$ ;  $G_3$  de bir eğri ve  $\alpha$  nın bir  $P = \alpha(s)$  noktasında Frenet üç ayaklısı  $\{T, N, B\}$  ve  $P$  noktasından sabit bir  $r$  uzaklığındaki nokta  $P_r$  olsun.  $\{T, N, B\}$  nin eğri boyunca hareketi esnasında  $P_r$  noktasının geometrik yeri olan  $\alpha_r = \alpha + rd$  eğrisine  $\alpha$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi denir [16].

Burada  $d = (d_1, d_2, d_3)$  vektörü,  $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$  sabit sayılar ve  $d^2 = 1$  ya da  $|d| = 1$  olmak üzere,

$$d = \begin{cases} d_1 T, & d \text{ izotropik değilse} \\ d_2 N + d_3 B, & d \text{ izotropikse} \end{cases}$$

olarak tanımlanır [16].

Buna göre;  $\alpha_r$  sabit sırt uzaklıklı eğrisini iki durumda incelemek gerekir.

**1.  $d$  izotropik değilse:** Bu durumda  $d_1 \neq 0$  ve  $d_1^2 = 1$  olur ki  $d = \mp T$  olur. O halde  $\alpha$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi  $d = T$  olmak üzere;

$$\alpha_r(s) = \alpha(s) + rT(s)$$

olur [16]. Bu durumda aşağıdaki teoremleri yazabiliriz:

**Teorem 2.4.2.2.** Eğer  $\alpha(s)$  eğrisi  $s$  yay uzunluk parametresi ile verilmişse o zaman  $\alpha$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi de  $s$  yay uzunluk parametresi ile yazılabilir [16].

**İspat:**  $\alpha(s)$  eğrisi  $s$  yay uzunluk parametresi ile verilmiş olsun.  $\alpha_r$  eğrisi  $\alpha$  nın  $d$  izotropik olmayan vektörüne göre sabit sırt uzaklıklı eğrisi olmak üzere

$$\alpha_r(s) = \alpha(s) + rT(s)$$

eşitliğinde her iki tarafın türevi alınarak normlanırsa;

$$\|\alpha'_r(s)\|_G = \|\alpha'(s) + rT'(s)\|_G$$

elde edilir. Bu demektir ki,  $\|\alpha_r(s)\|_G = 1$  olup,  $\alpha$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi de  $s$  yay uzunluk parametrelidir.

**Teorem 2.4.2.3.**  $\alpha(s)$ ,  $G_3$  de  $s$  yay uzunluk parametresi ile verilmiş bir eğri ve  $\alpha_r$ ;  $\alpha$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi olsun. Eğer  $\alpha$  ve  $\alpha_r$  nin sırasıyla Frenet vektörleri  $\{T, N, B\}$  ve  $\{T_r, N_r, B_r\}$ ; eğrilikleri  $\kappa$ ,  $\tau$  ve  $\kappa_r$ ,  $\tau_r$  olmak üzere,

$$T_r = T + r\kappa N$$

$$N_r = \frac{1}{\kappa_r} [(\kappa + r\kappa')N + r\kappa\tau B]$$

$$B_r = \frac{1}{\kappa_r} [-r\kappa\tau N + (\kappa + r\kappa')B]$$

$$\kappa_r = \sqrt{\kappa^2 + 2r\kappa\kappa' + r^2(\kappa'^2 + \kappa^2\tau^2)}$$

ve

$$\tau_r = \frac{\kappa_r^2\tau + r\kappa^2\tau' + r^2(\kappa'^2\tau + \kappa\kappa'\tau' - \kappa\kappa''\tau)}{\kappa_r^2}$$

bağıntılarını sağlar [16].

**İspat:**  $\alpha_r(s) = \alpha(s) + rT(s)$  ifadesinde her iki tarafın türevi alınarak ve Galile 3-uzayında Frenet formülleri kullanılarak

$$\alpha'_r = T_r = T + r\kappa N$$

olur. Benzer şekilde  $s$  e göre ikinci türev alınarak ve yine Galile 3-uzayında Frenet formülleri kullanılarak

$$\alpha''_r = (\kappa + r\kappa'N) + r\kappa\tau B$$

elde edilir. Önerme 2.2.4 den eğrilik hesaplama formülü kullanılarak,

$$\kappa_r = \sqrt{\kappa^2 + 2r\kappa\kappa' + r^2(\kappa'^2 + \kappa^2\tau^2)}$$

bulunur. Tanım 2.2.3 de belirtildiği gibi  $N(x) = \frac{\alpha''(x)}{\|\alpha''(x)\|_G}$  olduğundan  $N_r$  eşitliği kolayca elde

edilir. Böylece yine Tanım 2.2.3 den  $B(x) = \frac{1}{\sqrt{y''^2(x) + z''^2(x)}} (0, -z''(x), y''(x))$  eşitliğinden

$$B_r = \frac{1}{\kappa_r} [-r\kappa\tau N + (\kappa + r\kappa')B]$$

bulunur. Son olarak Önerme 2.2.4 yardımıyla burulma değeri

$$\tau_r = \frac{\kappa_r^2\tau + r\kappa^2\tau' + r^2(\kappa'^2\tau + \kappa\kappa'\tau' - \kappa\kappa''\tau)}{\kappa_r^2}$$

olarak elde edilir.

**Teorem 2.4.2.4.**  $\alpha(s)$ ,  $G_3$  de  $s$  yay uzunluk parametresi ile verilmiş bir eğri ve  $\alpha_r$ ;  $\alpha$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi olsun. Eğer  $\alpha$ , dairesel helis ise  $\alpha_r$  de dairesel helis olur [16].

**İspat:** Teorem 2.4.2.3. den bilindiği gibi  $\alpha_r$  sabit sırt uzaklıklı eğrisinin eğrilik ve burulması sırasıyla;

$$\kappa_r = \sqrt{(\kappa + r\kappa')^2 + (r\kappa\tau)^2}$$

$$\tau_r = \frac{(\kappa + r\kappa')(r\kappa\tau' + \tau(\kappa + r\kappa') + r^2\tau(\kappa^2\tau^2 + \kappa'^2 - \kappa\kappa''))}{(\kappa + r\kappa')^2 + (r\kappa\tau)^2}$$

şeklinde olur. Eğer  $\alpha$  eğrisi helis ise  $\tau$  ve  $\kappa$  sabit olduğundan

$$\kappa_r = \sqrt{\kappa^2 + r^2\kappa^2\tau^2}$$

olur. Ayrıca

$$\tau_r = \frac{\kappa(\kappa\tau) + r^2\kappa^2\tau^3}{\kappa^2 + r^2\kappa^2\tau^2} = \frac{\tau(\kappa^2 + r^2\kappa^2\tau^2)}{\kappa^2 + r^2\kappa^2\tau^2}$$

olduğundan; buradan da

$$\tau_r = \tau$$

elde edilir.

$$\frac{\tau_r}{\kappa_r} = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + (r\kappa\tau)^2}} = \text{sabit}$$

olduğundan  $\alpha_r$  eğrisi de bir helis olur.

**2.  $d$  izotropik ise:** Bu durumda  $d_1 = 0$ ,  $d_2^2 + d_3^2 = 1$  olur ki;  $d = d_2\mathbf{N} + d_3\mathbf{B}$  dir. O halde  $\alpha$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi

$$\alpha_r(s) = \alpha(s) + rd$$

eşitliğinden

$$\alpha_r(s) = \alpha(s) + r_2\mathbf{N}(s) + r_3\mathbf{B}(s)$$

denklemini elde edilir [16]. Burada  $r_2, r_3 \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$r_2 = rd_2 \text{ ve } r_3 = rd_3$$

olarak ele alınmıştır. Böylece aşağıdaki teoremler yazılabilir:

**Teorem 2.4.2.5.** Eğer  $\alpha(s)$  eğrisi  $s$  yay uzunluk parametresi ile verilmişse o zaman  $\alpha$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi  $\alpha_r(s)$  de  $s$  yay uzunluk parametresi ile verilebilir [16].

**İspat:**  $\alpha(s)$  eğrisi  $s$  yay uzunluk parametresi ile verilmiş olsun.  $\alpha_r$  eğrisi  $\alpha$  nın  $d$  izotropik vektörüne göre sabit sırt uzaklıklı eğrisi olmak üzere

$$\alpha_r(s) = \alpha(s) + r_2 N(s) + r_3 B(s)$$

eşitliğinde her iki tarafın türevi alınarak normlanırsa;

$$\|\alpha'_r(s)\|_G = \|\alpha'(s) + r_2 N'(s) + r_3 B'(s)\|_G$$

elde edilir. Bu demektir ki,  $\|\alpha_r(s)\|_G = 1$  olup,  $\alpha$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi de  $s$  yay uzunluk parametrelidir.

**Teorem 2.4.2.6.**  $\alpha(s)$ ,  $G_3$  de  $s$  yay uzunluk parametresi ile verilmiş bir eğri ve  $\alpha_r$ ;  $\alpha$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi olsun. Eğer  $\alpha$  ve  $\alpha_r$  nın sırasıyla Frenet vektörleri  $\{T, N, B\}$  ve  $\{T_r, N_r, B_r\}$ , eğrilikleri  $\kappa$ ,  $\tau$  ve  $\kappa_r$ ,  $\tau_r$  olmak üzere aşağıdaki bağıntılar sağlanır [16].

$$T_r = T - r_3 \tau N + r_2 \tau B$$

$$N_r = \frac{1}{\kappa_r} \left[ (\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau') N + (r_2 \tau' - r_3 \tau^2) B \right]$$

$$B_r = \frac{1}{\kappa_r} \left[ (-r_2 \tau' + r_3 \tau^2) N + (\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau') B \right]$$

$$\kappa_r = \sqrt{\kappa^2 + (r_2^2 + r_3^2)(\tau^4 + \tau'^2) - 2\kappa(r_2 \tau^2 + r_3 \tau')}$$

ve

$$\tau_r = \frac{\kappa_r^2 \tau + (r_2^2 + r_3^2)(2\tau \tau'^2 - \tau^2 \tau'') + r_2(\kappa \tau'' - \kappa' \tau') + r_3(\kappa' \tau^2 - 2\kappa \tau \tau')}{\kappa_r^2}.$$

**İspat:**  $\alpha_r(s) = \alpha(s) + rT(s)$  ifadesinde her iki tarafın türevi alınarak ve 3-boyutlu Galile uzayında Frenet formülleri kullanılarak

$$\alpha'_r = T_r = T - r_3 \tau N + r_2 \tau B$$

olur. Benzer şekilde  $s$  e göre ikinci türev alınarak ve yine 3-boyutlu Galile uzayında Frenet formülleri kullanılarak

$$\alpha''_r = (\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau') N + (r_2 \tau' - r_3 \tau^2) B$$

olur. Önerme 2.2.4 den,

$$\kappa_r = \sqrt{\kappa^2 + (r_2^2 + r_3^2)(\tau^4 + \tau'^2) - 2\kappa(r_2 \tau^2 + r_3 \tau')}$$

bulunur. Tanım 2.2.3 de belirtildiği gibi  $N(x) = \frac{\alpha''(x)}{\|\alpha''(x)\|_G}$  olduğundan  $N_r$  eşitliği kolayca elde

edilir. Böylece yine Tanım 2.2.3 den  $B(x) = \frac{1}{\sqrt{y''^2(x) + z''^2(x)}} (0, -z''(x), y''(x))$  eşitliğinden

$$B_r = \frac{1}{\kappa_r} [(-r_2\tau' + r_3\tau^2)N + (\kappa - r_2\tau^2 - r_3\tau')B]$$

olarak bulunur. Son olarak Önerme 2.2.4 yardımıyla burulma değeri

$$\tau_r = \frac{\kappa_r^2\tau + (r_2^2 + r_3^2)(2\tau\tau'^2 - \tau^2\tau'') + r_2(\kappa\tau'' - \kappa'\tau') + r_3(\kappa'\tau^2 - 2\kappa\tau\tau')}{\kappa_r^2}$$

biçiminde elde edilir.

**Teorem 2.4.2.7.**  $\alpha(s)$ ,  $G_3$  de  $s$  yay uzunluk parametresi ile verilmiş bir eğri ve  $\alpha_r$ ;  $\alpha$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi olsun. Eğer  $\alpha$ , dairesel helis ise  $\alpha_r$  de dairesel helis olur [16].

**İspat:** Teorem 2.4.2.6. dan bilindiği gibi  $\alpha_r$  sabit sırt uzaklıklı eğrisinin eğrilik ve burulma değerleri sırasıyla;

$$\kappa_r = \sqrt{(\kappa + r\kappa')^2 + (r\kappa\tau)^2}$$

ve

$$\tau_r = \frac{(\kappa + r\kappa')(r\kappa\tau' + \tau(\kappa + r\kappa') + r^2\tau(\kappa^2\tau^2 + \kappa'^2 - \kappa\kappa''))}{(\kappa + r\kappa')^2 + (r\kappa\tau)^2}$$

olup, eğer  $\alpha$  helis eğrisi ise  $\tau$  ve  $\kappa$  sabit olarak ele alınır ve denklemlerde yerine yazılırsa;

$$\kappa_r = \sqrt{(\kappa - r_2\tau^2)^2 + r_3^2\tau^4},$$

$$\tau_r = \frac{(r_2^2 + r_3^2)\tau^5 + r_3(-2\kappa\tau^3) + \kappa^2\tau}{(r_2^2 + r_3^2)\tau^4 - r_2(2\kappa\tau^2) + \kappa^2}$$

olarak hesap edilir. Görüldüğü gibi yine bu durumda da  $\frac{\tau_r}{\kappa_r}$  nın sabit olduğu görülür.

Özel olarak  $r_2 = r_3$  olarak ele alınırsa,

$$\tau_r = \tau$$

bulunur.

### 3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde ilk olarak, 2.bölümde bahsi geçen 3-boyutlu Galile uzayında bazı özel eğriler ve aynı kısımda verilen ilgili çalışmalar gözönüne alınarak; Galile uzayında ki özel eğrilerle, bu eğrilerin sabit sırt uzaklıklı eğrileri arasında Frenet çatı elemanları yardımıyla, bazı bağıntılar elde edilecektir. Daha sonra elde edilen bulgular örneklerle desteklenecek ve son olarak, SWP programı yardımıyla verilen örneklerin şekilleri çizilecektir.

#### 3.1. İzotropik Olmayan $d$ Vektörüne Göre Elde Edilen Sabit Sırt Uzaklıklı Eğriler ile Bazı Özel Eğriler Arasındaki Bağıntılar

$G_3$  de bir eğrinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi bulunurken, 2.4.2 başlık altında belirtildiği gibi  $d$  vektörünün izotropik ve non-izotropik olma durumuna göre iki durumda ele alınmıştır. Bu başlıkta bazı özel eğriler olan Bertrand, involüt-evolüt ve Mannheim eğrileri için  $d$  vektörünün izotropik olmadığı duruma göre regüler bir eğrinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi ile bir eğri çifti yani Bertrand, Mannheim ve involüt-evolüt eğri çifti oluşturup oluşturmadığı araştırılacaktır. Bunun yanı sıra,  $G_3$  de bir eğrinin sabit sırt uzaklıklı eğrisinin Smarandache eğrileri elde edilecektir.

**Teorem 3.1.1.**  $G_3$  de  $s$  yay uzunluk parametrelili  $\alpha$  eğrisinin

$$\alpha_r(s) = \alpha(s) + rT(s)$$

ile tanımlı sabit sırt uzaklı eğrisi olmak üzere  $(\alpha, \alpha_r)$  ikilisi bir Bertrand eğri çifti oluşturmaz.

**İspat:** Tanım 2.3.2.3. den bilindiği gibi  $\forall s \in I$  noktasındaki  $\alpha$  ve  $\alpha_r$  in normalleri birbirine paralel oluyorsa diğer bir deyişle lineer bağımlı ise bu eğrilere  $G_3$  de Bertrand eğrisi denir. O halde;

$$\alpha_r = \alpha + rT$$

eğrisinin  $s$  e göre birinci türevi alınarak

$$\alpha'_r = T_r = T + r\kappa N$$

elde edilir. Teorem 2.4.2.3. de verildiği üzere,  $N_r$  vektörü

$$N_r = \frac{1}{\kappa_r} [(\kappa + r\kappa')N + r\kappa\tau B]$$

olduğundan  $N$  ile  $N_r$  vektörünün lineer bağımlı olmadığı

$$N \times_G N_r = \frac{r\kappa\tau}{\kappa_r} T$$

eşitliğinden görülmektedir. Böylece  $(\alpha, \alpha_r)$  bir Bertrand eğri çifti oluşturmaz.

**Sonuç 3.1.2.** Teorem 3.1.1 de ifade edilen  $(\alpha, \alpha_r)$  ikilisinin bir Bertrand eğri çifti oluşturması için gerek ve yeter şart  $\alpha$  eğrisinin bir düzlem eğrisi olmasıdır ( $\tau = 0$ ).

**Teorem 3.1.3.**  $G_3$  de  $s$  yay uzunluk parametrelili  $\alpha$  eğrisinin

$$\alpha_r(s) = \alpha(s) + rT(s)$$

ile tanımlı sabit sırt uzaklı eğrisi olmak üzere  $(\alpha, \alpha_r)$  ikilisi involüt-evolüt eğri çifti oluşturmazlar.

**İspat:** Tanım 2.3.3.3. den biliyoruz ki  $\alpha$  ve  $\alpha_r$ ;  $G_3$  Galile uzayında iki eğri olmak üzere, eğer  $\alpha(s)$  noktasında  $\alpha$  eğrisinin teğet vektörü  $\alpha_r(s)$  noktasında ki  $\alpha_r$  eğrisinin teğet vektörü boyunca geçiyorsa ve  $\langle T, T_r \rangle_G = 0$  ise  $\alpha_r$ ,  $\alpha$  eğrisinin involütü;  $\alpha$  eğrisi,  $\alpha_r$  eğrisinin evolütü olarak adlandırılır.

O halde  $\alpha$ ,  $G_3$  de yay uzunluk parametrelili bir eğri  $\alpha_r = \alpha + rT$ ;  $\alpha$  nın sabit sırt uzaklı eğrisi olsun.  $\alpha$  ve  $\alpha_r$  nin teğetlerinin dikliğine bakalım:

$$\alpha' = T \text{ ve } \alpha'_r = T_r = T + r\kappa N$$

olduğuna göre,

$$\langle T, T + r\kappa N \rangle_G \neq 0$$

bulduğundan  $T$  ve  $T_r$  dik olmaz. Bu durumda  $\alpha$  ve  $\alpha_r$  involüt-evolüt eğri çifti oluşturmaz.

**Teorem 3.1.4.**  $G_3$  de  $s$  parametereli ve  $\kappa$  eğriliği birim hızlı bir  $\alpha$  eğrisinin

$$\alpha_r = \alpha + rT$$

ile tanımlı sabit sırt uzaklı eğrisi olmak üzere,  $(\alpha, \alpha_r)$  ikilisinin bir Mannheim eğri çifti olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa(s) = c_1 e^{-\frac{s}{r}}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.



**İspat:** Tanım 2.3.4.3. den bilindiği gibi  $\alpha_r$  ın binormal doğrusu  $\alpha$  nın birim normal doğrusu ise  $\alpha$  ve  $\alpha_r$  e Mannheim eğrileri denir.  $(\alpha, \alpha_r)$  çiftine ise Mannheim eğri çifti denir. O halde,

$$\alpha_r = \alpha + rT$$

eğrisinin  $s$  e göre birinci türevi alınarak

$$\alpha'_r = T_r = T + r\kappa N$$

elde edilir. Teorem 2.4.2.3 de verildiği üzere,  $B_r$  vektörü

$$B_r = \frac{1}{\kappa_r} [-r\kappa N + (\kappa + r\kappa')B]$$

olduğundan  $N$  ile  $B_r$  vektörünün lineer bağımlılığı  $\kappa + r\kappa' = 0$  eşitliği ile mümkündür. Bu diferansiyel denklem çözülürse  $c_1 \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$\kappa(s) = c_1 e^{-\frac{s}{r}}$$

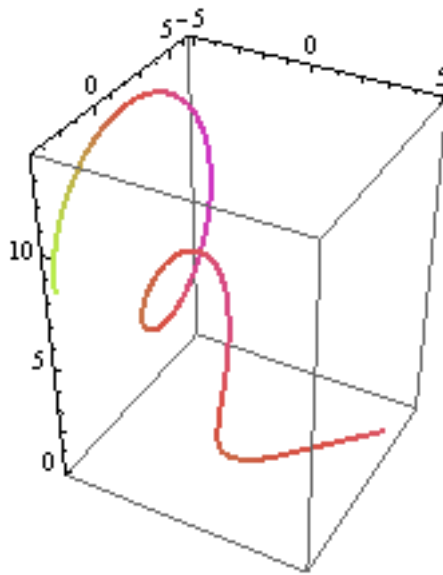
olur.

Tersine,  $\kappa(s) = c_1 e^{-\frac{s}{r}}$  olarak alınırsa  $\kappa + r\kappa' = 0$  olup  $N$  ile  $B_r$  vektörünün lineer bağımlı olduğu aşikârdır.

$\kappa(s) = c_1 e^{-\frac{s}{r}}$  eşitliğinde  $r=1$  ve  $c_1=1$  için

$$\kappa(s) = e^{-s}$$

olur ve  $\tau(s) = s$  için Mathematica programı yardımıyla çizilen Mannheim eğri Şekil 3.1. de görülmektedir.



**Şekil 3.1.**  $G_3$  de Mannheim eğrisi ( $\kappa(s) = e^{-s}$  ve  $\tau(s) = s$ )

**Teorem 3.1.5.**  $G_3$  de  $s$  yay uzunluk parametrelili  $\kappa$  eğrilikli ve  $\tau$  torsiyonlu bir  $\alpha$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi

$$\alpha_r(s) = \alpha(s) + rT(s)$$

olsun.  $\alpha_r$  nin Frenet elemanları Teorem 2.4.2.3. te ki gibi olmak üzere  $\alpha_r(s)$  eğrisinin sırasıyla  $T_rN_r$ ,  $T_rB_r$  ve  $T_rN_rB_r$ -Smarandache eğrileri

$$(\alpha_r)_{T_rN_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} \left[ (\kappa + r\kappa\kappa_r + r\kappa')N + r\kappa\tau B \right]$$

$$(\alpha_r)_{T_rB_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} \left[ (r\kappa\kappa_r - r\kappa\tau)N + (\kappa + r\kappa')B \right]$$

$$(\alpha_r)_{T_rN_rB_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} \left[ (\kappa + r\kappa\kappa_r + r\kappa' - r\kappa\tau)N + (\kappa + r\kappa\tau + r\kappa')B \right]$$

biçiminde olur.

**İspat:** Tanım 2.3.5.5. gözönüne alınarak, Galile 3-uzayında  $\alpha_r$  sabit sırt uzaklıklı eğrisinin  $T_rN_r$ -Smarandache,  $T_rB_r$ -Smarandache ve  $T_rN_rB_r$ -Smarandache eğrileri sırasıyla;

$$(\alpha_r)_{T_rN_r} = \frac{T_r + N_r}{\|T_r + N_r\|_G},$$

$$(\alpha_r)_{T_rB_r} = \frac{T_r + B_r}{\|T_r + N_r\|_G},$$

$$(\alpha_r)_{T_rN_rB_r} = \frac{T_r + N_r + B_r}{\|T_r + N_r + B_r\|_G}$$

eşitlikleri ile bulunur. O halde,  $\alpha_r$  nin Frenet elemanları Teorem 2.4.2.3 belirtildiği gibi olmak üzere,  $\alpha_r$  nin  $T_rN_r$ -Smarandache eğrisi;

$$(\alpha_r)_{T_rN_r} = \frac{T + \left( \frac{\kappa}{\kappa_r} + r\kappa + \frac{r\kappa'}{\kappa_r} \right) N + \frac{r\kappa\tau}{\kappa_r} B}{\|T_r + N_r\|_G} = \frac{T + r\kappa N + \frac{1}{\kappa_r} \left[ (\kappa + r\kappa')N + r\kappa\tau B \right]}{\|T_r + N_r\|_G}$$

olur ve burada  $\|T_r + N_r\| = 1$  olduğundan,

$$(\alpha_r)_{T_rN_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} \left[ (\kappa + r\kappa\kappa_r + r\kappa')N + r\kappa\tau B \right]$$

elde edilir.  $\alpha_r$  nin  $T_rB_r$ -Smarandache eğrisi;

$$(\alpha_r)_{T_r, B_r} = \frac{T_r + B_r}{\|T_r + N_r\|} = \frac{T + r\kappa N + \frac{1}{\kappa_r} [-r\kappa\tau N + (\kappa + r\kappa')B]}{\left\| T + r\kappa N + \frac{1}{\kappa_r} [-r\kappa\tau N + (\kappa + r\kappa')B] \right\|_G}$$

olur ve gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$(\alpha_r)_{T_r, B_r} = \frac{T + \left( r\kappa - \frac{r\kappa\tau}{\kappa_r} \right) N + \frac{\kappa + r\kappa'}{\kappa_r} B}{\left\| T + \left( r\kappa - \frac{r\kappa\tau}{\kappa_r} \right) N + \frac{\kappa + r\kappa'}{\kappa_r} B \right\|_G}$$

elde edilir.  $\left\| T + \left( r\kappa - \frac{r\kappa\tau}{\kappa_r} \right) N + \frac{\kappa + r\kappa'}{\kappa_r} B \right\|_G = 1$  olduğundan,

$$(\alpha_r)_{T_r, B_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} [(r\kappa\kappa_r - r\kappa\tau)N + (\kappa + r\kappa')B]$$

bulunur.  $\alpha_r$  nin  $T_r, N_r, B_r$  -Smarandache eğrisi

$$(\alpha_r)_{T_r, N_r, B_r} = \frac{T_r + N_r + B_r}{\|T_r + N_r + B_r\|_G}$$

$$(\alpha_r)_{T_r, N_r, B_r} = \frac{T + r\kappa N + \frac{1}{\kappa_r} [(\kappa + r\kappa')N + r\kappa\tau B] + \frac{1}{\kappa_r} [-r\kappa\tau N + (\kappa + r\kappa')B]}{\left\| T + r\kappa N + \frac{1}{\kappa_r} [(\kappa + r\kappa')N + r\kappa\tau B] + \frac{1}{\kappa_r} [-r\kappa\tau N + (\kappa + r\kappa')B] \right\|_G}$$

olur ve gerekli düzenlemeler yapırsa,

$$(\alpha_r)_{T_r, N_r, B_r} = \frac{T + \left( r\kappa + \frac{(\kappa + r\kappa')}{\kappa_r} - \frac{r\kappa\tau}{\kappa_r} \right) N + \left( \frac{r\kappa\tau + \kappa + r\kappa'}{\kappa_r} \right) B}{\left\| T + \left( r\kappa + \frac{(\kappa + r\kappa')}{\kappa_r} - \frac{r\kappa\tau}{\kappa_r} \right) N + \left( \frac{r\kappa\tau + \kappa + r\kappa'}{\kappa_r} \right) B \right\|_G}$$

elde edilir.  $\left\| T + \left( r\kappa + \frac{(\kappa + r\kappa')}{\kappa_r} - \frac{r\kappa\tau}{\kappa_r} \right) N + \left( \frac{r\kappa\tau + \kappa + r\kappa'}{\kappa_r} \right) B \right\|_G = 1$  olduğundan,

$$(\alpha_r)_{T_r, N_r, B_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} [(\kappa + r\kappa\kappa_r + r\kappa' - r\kappa\tau)N + (\kappa + r\kappa\tau + r\kappa')B]$$

bulunur.

### 3.2. İzotropik $d$ Vektörüne Göre Elde Edilen Sabit Sırt Uzaklıklı Eğriler ile Bazı Özel Eğriler Arasındaki Bağlıntılar

Bu başlıkta bazı özel eğriler olarak ele alınan Bertrand, involüt-evolüt ve Mannheim eğrileri için  $d$  vektörünün izotropik olduğu gözönüne alınarak regüler bir eğrinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi ile özel bir eğri çifti meydana getirip getirmediği incelenecektir. Buna ilaveten,  $d$  vektörünün izotropik olma durumuna göre  $G_3$  de bir eğrinin sabit sırt uzaklıklı eğrisinin Smarandache eğrileri elde edilecektir.

**Teorem 3.2.1.**  $G_3$  de  $s$  yay uzunluk parametrelili ve  $\tau(s)$  torsiyonlu  $\alpha$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi

$$\alpha_r(s) = \alpha(s) + r_2 N(s) + r_3 B(s)$$

olmak üzere  $(\alpha, \alpha_r)$  ikilisinin bir Bertrand eğri çifti oluşturması için gerek ve yeter şart  $c_1 \in \mathbb{R}$  ve  $s \neq \frac{c_1 r_2}{r_3}$  için

$$\tau(s) = \frac{r_2}{c_1 r_2 - r_3 s}$$

denkleminin sağlanmasıdır.

**İspat:** Tanım 2.3.2.3. den bilindiği gibi  $\forall s \in I$  noktasındaki  $\alpha$  ve  $\alpha_r$  nin normalleri birbirine paralel oluyorsa diğer bir deyişle lineer bağımlı ise bu eğrilere  $G_3$  de Bertrand eğrisi denir. O halde;

$$\alpha_r = \alpha + r_2 N + r_3 B$$

eğrisinin Teorem 2.4.2.6. ya göre  $N_r$  vektörü

$$N_r = \frac{1}{\kappa_r} \left[ (\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau') N + (r_2 \tau' - r_3 \tau^2) B \right]$$

olduğundan  $N$  ile  $N_r$  vektörünün lineer bağımlı olmadığı

$$N \times N_r = \frac{(r_2 \tau' - r_3 \tau^2)}{\kappa_r} T$$

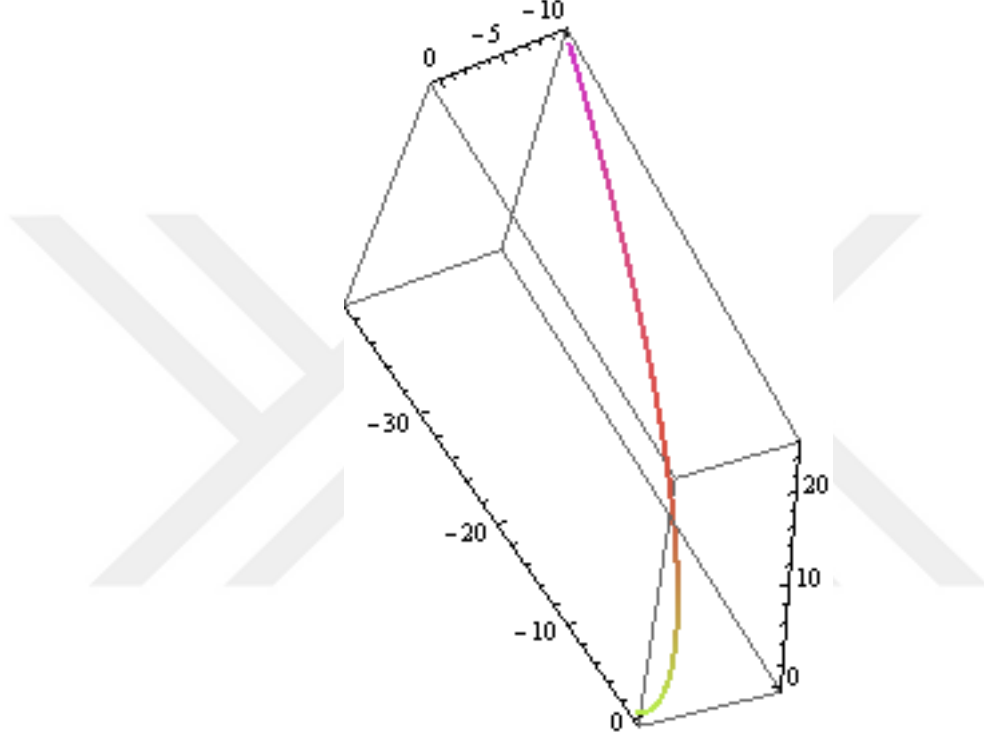
eşitliğinden görülmektedir.  $N$  ile  $N_r$  vektörünün lineer bağımlılığı  $r_2 \tau' - r_3 \tau^2 = 0$  eşitliği ile mümkündür. Bu diferansiyel denklem çözümlerse  $c_1 \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$\tau(s) = \frac{r_2}{c_1 r_2 - r_3 s}$$

olur. Tersine,  $\tau(s) = \frac{r_2}{c_1 r_2 - r_3 s}$  olarak alınırsa  $N$  ile  $N_r$  vektörünün lineer bağımlı olduğu aşikârdır.

$$\tau(s) = \frac{r_2}{c_1 r_2 - r_3 s} \text{ denkleminde } r_2 = \frac{1}{2}, r_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ve } c_1 = 1 \text{ için } \kappa(s) = 1, s \neq \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ olmak üzere,}$$

Bertrand eğrisine ait grafik Şekil 3.2. de görülmektedir.



Şekil 3.2.  $G_3$  de Bertrand eğrisi ( $r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $r_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ve  $c_1 = 1$ ,  $\kappa(s) = 1, s \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$ )

**Teorem 3.2.2.**  $G_3$  de  $s$  yay uzunluk parametrelili  $\alpha$  eğrisinin sabit sırt uzaklı eğrisi

$$\alpha_r(s) = \alpha(s) + r_2 N(s) + r_3 B(s)$$

olmak üzere  $(\alpha, \alpha_r)$  ikilisi involüt-evolüt eğri çifti oluşturmazlar.

**İspat:** Tanım 2.3.3.3. den biliyoruz ki  $\alpha$  ve  $\alpha_r$ ;  $G_3$  Galile uzayında iki eğri olmak üzere, eğer  $\alpha(s)$  noktasında  $\alpha$  eğrisinin teğet vektörü  $\alpha_r(s)$  noktasında ki  $\alpha_r$  eğrisinin teğet vektörü boyunca geçiyorsa ve  $\langle T, T_r \rangle_G = 0$  ise  $\alpha_r$ ,  $\alpha$  eğrisinin involütü;  $\alpha$  eğrisi,  $\alpha_r$  eğrisinin evolütü olarak adlandırılır.

O halde,  $\alpha, G_3$  de yay uzunluk parametrelili bir eğri ve  $\alpha_r = \alpha + r_2N + r_3B$ ,  $\alpha$  nın sabit sırt uzaklı eğrisi olsun.  $\alpha' = T$  ve Teorem 2.4.2.6 ya göre  $\alpha_r$  nin teğeti

$$T_r = T - r_3\tau N + r_2\tau B$$

biçimindedir. O zaman  $\alpha$  ve  $\alpha_r$  nin teğetlerinin dikliğine bakacak olursak;

$$\langle T, T - r_3\tau N + r_2\tau B \rangle_G \neq 0$$

olduğundan  $T$  ve  $T_r$  dik olmaz. Böylece,  $\alpha$  ve  $\alpha_r$  involüt-evolüt eğri çifti oluşturmazlar.

**Teorem 3.2.3.**  $G_3$  de  $\kappa$  eğrilikli ve  $s$  parametrelili birim hızlı bir  $\alpha$  eğrisinin sabit sırt uzaklı eğrisi

$$\alpha_r(s) = \alpha(s) + r_2N(s) + r_3B(s)$$

olmak üzere,  $(\alpha, \alpha_r)$  ikilisinin bir Mannheim eğri çifti olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa = r_2\tau^2 + r_3\tau'$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

**İspat:** Tanım 2.3.4.3. den bilindiği gibi  $\alpha_r$  nin binormal doğrusu  $\alpha$  nın birim normal doğrusu ise  $\alpha$  ve  $\alpha_r$  ye Mannheim eğrileri denir.  $(\alpha, \alpha_r)$  çiftine ise Mannheim eğri çifti denir. O zaman, Teorem 2.4.2.6. da verildiği üzere,  $B_r$  vektörü

$$B_r = \frac{1}{\kappa_r} [(-r_2\tau' + r_3\tau^2)N + (\kappa - r_2\tau^2 - r_3\tau')B]$$

olduğundan  $N$  ile  $B_r$  vektörünün lineer bağımlılığı  $\kappa - r_2\tau^2 - r_3\tau' = 0$  eşitliği ile mümkündür. Bu denklemde  $\kappa$  yalnız bırakılırsa

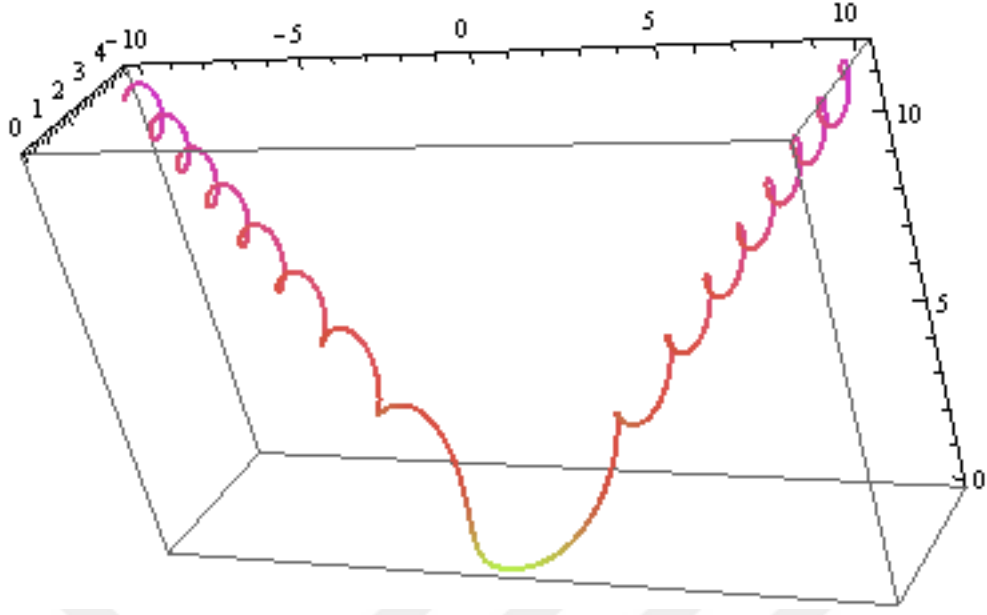
$$\kappa = r_2\tau^2 + r_3\tau'$$

elde edilir.

Tersine,  $\kappa = r_2\tau^2 + r_3\tau'$  olarak ele alınırsa  $\kappa - r_2\tau^2 - r_3\tau' = 0$  dan  $N$  ile  $B_r$  vektörünün lineer bağımlı olduğu görülecektir.

$$\kappa - r_2\tau^2 - r_3\tau' = 0 \text{ eşitliğinde; } r_2 = \frac{1}{2}, \quad r_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ve } \tau(s) = s \text{ olmak üzere Mathematica}$$

programı yardımıyla elde edilen grafik Şekil 3.3. de çizilmiştir.



**Şekil 3.3.**  $r_2 = \frac{1}{2}, r_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tau(s) = s$  ve  $\kappa = r_2\tau^2 + r_3\tau'$  değerleri için elde edilen eğrinin grafiği

**Teorem 3.2.4.**  $G_3$  de  $s$  yay uzunluk parametrelili  $\kappa$  eğrilikli ve  $\tau$  torsiyonlu bir  $\alpha$  eğrisinin sabit sırt uzaklı eğrisi

$$\alpha_r(s) = \alpha(s) + r_2N(s) + r_3B(s)$$

olsun.  $\alpha_r$  nin Frenet elemanları Teorem 2.4.2.6. da olduğu gibi verilsin. Bu durumda  $\alpha_r(s)$  eğrisinin  $T_rN_r$ ,  $T_rB_r$  ve  $T_rN_rB_r$  Smarandache eğrileri sırasıyla;

$$(\alpha_r)_{T_rN_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} \left[ (\kappa - r_2\tau^2 - r_3\tau' - r_3\kappa_r\tau)N + (r_2\kappa_r\tau + r_2\tau' - r_3\tau^2)B \right],$$

$$(\alpha_r)_{T_rB_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} \left[ (r_3\tau^2 - r_2\tau' - r_3\tau\kappa_r)N + (\kappa - r_2\tau^2 - r_3\tau' + r_2\tau\kappa_r)B \right],$$

$$(\alpha_r)_{T_rN_rB_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} \left[ (\kappa - r_2\tau^2 - r_3\tau' + r_3\tau^2 - r_2\tau' - r_3\tau\kappa_r)N + (\kappa - r_2\tau^2 - r_3\tau' + r_2\tau' - r_3\tau^2 + r_2\tau\kappa_r)B \right]$$

olarak yazılır.

**İspat:** Tanım 2.3.5.5. ve Teorem 2.4.2.6 birlikte ele alınarak  $\alpha_r$  nin  $T_rN_r$  -Smarandache eğrisi;

$$(\alpha_r)_{T_rN_r} = \frac{T_r + N_r}{\|T_r + N_r\|_G}$$

$$(\alpha_r)_{T_r, N_r} = \frac{T - r_3 \tau N + r_2 \tau B + \frac{\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau'}{\kappa_r} N + \frac{r_2 \tau' - r_3 \tau^2}{\kappa_r} B}{\left\| T - r_3 \tau N + r_2 \tau B + \frac{\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau'}{\kappa_r} N + \frac{r_2 \tau' - r_3 \tau^2}{\kappa_r} B \right\|_G}$$

elde edilir ve yeniden düzenlenirse

$$= \frac{T + \left( \frac{\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau'}{\kappa_r} - r_3 \tau \right) N + \left( r_2 \tau + \frac{r_2 \tau' - r_3 \tau^2}{\kappa_r} \right) B}{\left\| T + \left( \frac{\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau'}{\kappa_r} - r_3 \tau \right) N + \left( r_2 \tau + \frac{r_2 \tau' - r_3 \tau^2}{\kappa_r} \right) B \right\|_G}$$

bulunur ve  $\left\| T - r_3 \tau N + r_2 \tau B + \frac{\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau'}{\kappa_r} N + \frac{r_2 \tau' - r_3 \tau^2}{\kappa_r} B \right\|_G = 1$  olduğundan

$$(\alpha_r)_{T_r, N_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} \left[ (\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau' - r_3 \kappa_r \tau) N + (r_2 \kappa_r \tau + r_2 \tau' - r_3 \tau^2) B \right]$$

elde edilir.  $T_r, B_r$  -Smarandache eğrisi benzer şekilde;

$$(\alpha_r)_{T_r, B_r} = \frac{T_r + B_r}{\|T_r + B_r\|_G}$$

eşitliği kullanılarak

$$(\alpha_r)_{T_r, B_r} = \frac{T - r_3 \tau N + r_2 \tau B + \frac{r_3 \tau^2 - r_2 \tau'}{\kappa_r} N + \frac{\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau'}{\kappa_r} B}{\left\| T - r_3 \tau N + r_2 \tau B + \frac{r_3 \tau^2 - r_2 \tau'}{\kappa_r} N + \frac{\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau'}{\kappa_r} B \right\|_G}$$

bulunur. Paydanın normu 1 olduğundan

$$(\alpha_r)_{T_r, B_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} \left[ (r_3 \tau^2 - r_2 \tau' - r_3 \tau \kappa_r) N + (\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau' + r_2 \tau \kappa_r) B \right]$$

olur. Son olarak,  $T_r, N_r, B_r$  -Smarandache eğrisi

$$(\alpha_r)_{T_r, N_r, B_r} = \frac{T_r + N_r + B_r}{\|T_r + N_r + B_r\|_G}$$

eşitliğinden

$$(\alpha_r)_{T_r, N_r, B_r} = \frac{T - r_3 \tau N + r_2 \tau B + \frac{\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau'}{\kappa_r} N + \frac{r_2 \tau' - r_3 \tau^2}{\kappa_r} B + \frac{r_3 \tau^2 - r_2 \tau'}{\kappa_r} N + \frac{\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau'}{\kappa_r} B}{\left\| T - r_3 \tau N + r_2 \tau B + \frac{\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau'}{\kappa_r} N + \frac{r_2 \tau' - r_3 \tau^2}{\kappa_r} B + \frac{r_3 \tau^2 - r_2 \tau'}{\kappa_r} N + \frac{\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau'}{\kappa_r} B \right\|_G}$$

olarak elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa



$$(\alpha_r)_{T,N,B_r} = \frac{T + \left( \frac{\kappa - r_2\tau^2 - r_3\tau' + r_3\tau^2 - r_2\tau'}{\kappa_r} \right) N + \left( \frac{r_2\tau' - r_3\tau^2 + \kappa - r_2\tau^2 - r_3\tau'}{\kappa_r} + r_2\tau \right) B}{\left\| T + \left( \frac{\kappa - r_2\tau^2 - r_3\tau' + r_3\tau^2 - r_2\tau'}{\kappa_r} \right) N + \left( \frac{r_2\tau' - r_3\tau^2 + \kappa - r_2\tau^2 - r_3\tau'}{\kappa_r} + r_2\tau \right) B \right\|_G}$$

bulunur. Yine burada da

$$\left\| T + \left( \frac{\kappa - r_2\tau^2 - r_3\tau' + r_3\tau^2 - r_2\tau'}{\kappa_r} \right) N + \left( \frac{r_2\tau' - r_3\tau^2 + \kappa - r_2\tau^2 - r_3\tau'}{\kappa_r} + r_2\tau \right) B \right\|_G = 1$$

olduğundan

$$(\alpha_r)_{T,N,B_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} \left[ (\kappa - r_2\tau^2 - r_3\tau' + r_3\tau^2 - r_2\tau' - r_3\tau\kappa_r) N + (\kappa - r_2\tau^2 - r_3\tau' + r_2\tau' - r_3\tau^2 + r_2\tau\kappa_r) B \right]$$

eşitliği elde edilir.

### 3.3. 3-Boyutlu Galile Uzayında Sabit Sırt Uzaklıklı Eğri Örnekleri

Bu başlık altında sabit sırt uzaklıklı eğri örnekleri sunulacaktır. Buna ilaveten bulgular kısmında elde edilen sonuçların da birer uygulaması yapılarak örnek çizimlerle somutlaştırılmaya çalışılacaktır.

**Örnek 3.3.1.**  $G_3$  de  $s$  yay uzunluk parametrelili

$$\alpha(s) = (s, \cos s, \sin s)$$

eğrisini gözönüne alalım. Bu eğrinin izotropik olmayan bir  $d$  vektörü için sabit sırt uzaklıklı eğrisi;

$$T = \alpha'(s) = (1, -\sin s, \cos s)$$

olmak üzere,

$$\alpha_r(s) = \alpha(s) + rT$$

eşitliğinden  $r=1$  için,

$$\alpha_r(s) = (1 + s, \cos s - \sin s, \cos s + \sin s)$$

olarak bulunur. Ayrıca  $\alpha(s)$  in normal, binormal birim vektörleri ve eğrilik burulma değerleri sırasıyla;

$$N = (0, -\cos s, -\sin s)$$

$$B = (0, \sin s, -\cos s)$$

$$\kappa = \sqrt{y''^2 + z''^2} = 1$$

ve

$$\tau = 1$$

olur. Böylece  $\alpha_r(s)$  nin Teorem 2.4.2.3. e göre Frenet elemanları

$$T_r = (1, -\cos s - \sin s, \cos s - \sin s)$$

olarak ve

$$\kappa_r = \sqrt{2}$$

ve

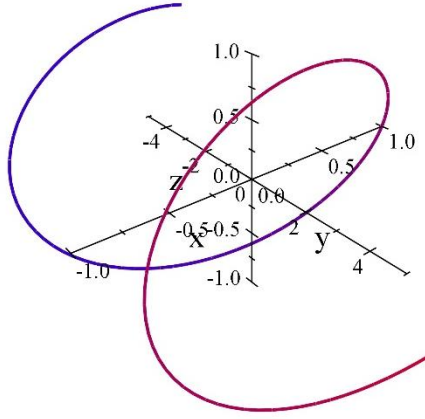
$$\tau_r = 1$$

olmak üzere,

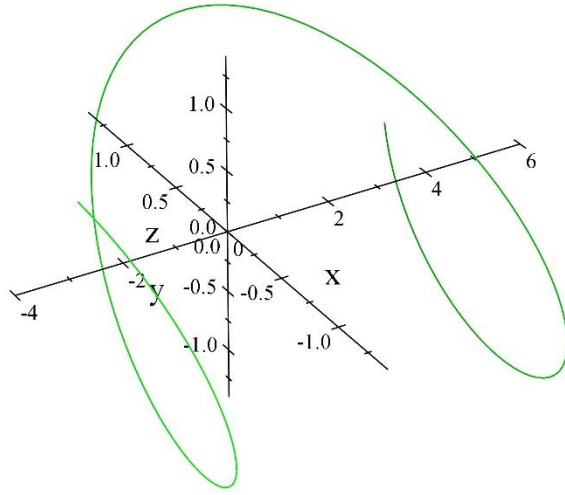
$$N_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -\cos s + \sin s, -\sin s - \cos s),$$

$$B_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \sin s + \cos s, -\cos s + \sin s)$$

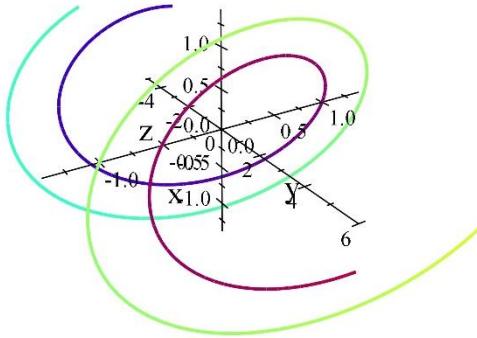
bulunur. SWP programı yardımıyla çizilen  $\alpha(s)$  ve  $\alpha_r(s)$  eğrileri Şekil 3.4. de görülmektedir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 3.4.  $\alpha(s)$  eğrisi (a);  $\alpha_r(s)$  sabit sırt uzaklıklı eğri (b);  $(\alpha, \alpha_r)$  eğri çifti (c).

Ayrıca yine izotropik olmayan  $d$  vektörü için  $\alpha(s)$  ve  $\alpha_r(s)$  eğrilerinin Mannheim eğri çifti olmaları için Teorem 3.1.4. e göre

$$\kappa(s) = c_1 e^{-\frac{s}{r}}$$

olmalıdır.  $\kappa = 1$  olduğu gözönüne alındığı takdirde,

$$s = -\frac{r}{1 + \ln c_1}$$

olmak üzere  $(\alpha, \alpha_r)$  Mannheim eğri çifti elde edilir.

Teorem 3.1.5. i gözönüne alarak izotropik olmayan  $d$  vektörüne göre  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi olan

$$\alpha_r(s) = (1 + s, \cos s - \sin s, \cos s + \sin s)$$

eğrisinin  $r=1$  için  $T_r N_r$ ,  $T_r B_r$  ve  $T_r N_r B_r$ -Smarandache eğrilerini yazalım:

İlk olarak  $T_r N_r$ -Smarandache eğrisi;

$$(\alpha_r)_{T_r N_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} [(\kappa + r\kappa\kappa_r + r\kappa')N + r\kappa\tau B]$$

eşitliğinde

$$T = (1, -\sin s, \cos s),$$

$$N = (0, -\cos s, -\sin s),$$

$$B = (0, \sin s, -\cos s),$$

$\kappa = 1$ ,  $\kappa_r = \sqrt{2}$ ,  $\tau = 1$ ,  $\tau_r = 1$  eşitlikleri kullanılırsa,

$$(\alpha_r)_{T_r N_r} = (1, -\sin s, \cos s) + \frac{1}{\sqrt{2}} [(1 + \sqrt{2})(0, -\cos s, -\sin s) + (0, \sin s, -\cos s)]$$

$$\alpha_r)_{T_r N_r} = \left( 1, \left( -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cos s + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) \sin s, \left( -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sin s + \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cos s \right)$$

olur. Şimdi de yukardaki ifadeleri dikkate alarak  $T_r B_r$ - Smarandache eğrisini bulalım;

$$(\alpha_r)_{T_r B_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} [(r\kappa\kappa_r - r\kappa\tau)N + (\kappa + r\kappa')B]$$

eşitliğinden

$$(\alpha_r)_{T_r B_r} = (1, -\sin s, \cos s) + \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sqrt{2} - 1)(0, -\cos s, -\sin s) + (0, \sin s, -\cos s)]$$

olur ve katsayılar dağıtılıp gerekli düzenlemler yapılırsa,

$$(\alpha_r)_{T,B_r} = \left( 1, \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) (\sin s + \cos s), \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) (\sin s - \cos s) \right)$$

bulunur.

Son olarak,  $T_r N_r B_r$  -Smarandache eğrisini elde edelim;

$$(\alpha_r)_{T_r N_r B_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} \left[ (\kappa + r\kappa\kappa_r + r\kappa' - r\kappa\tau) N + (\kappa + r\kappa\tau + r\kappa') B \right]$$

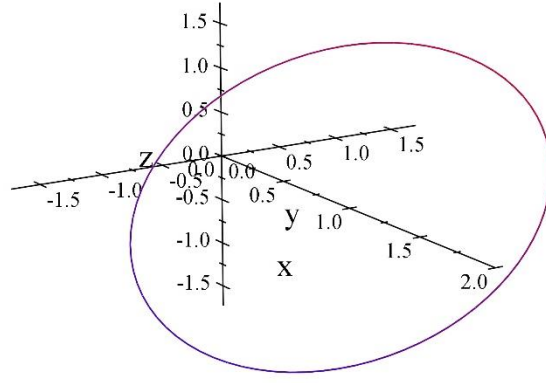
eşitliği göz önüne alınarak,

$$(\alpha_r)_{T_r N_r B_r} = (1, -\sin s, \cos s) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{2} (0, -\cos s, -\sin s) + 2(0, \sin s, -\cos s) \right]$$

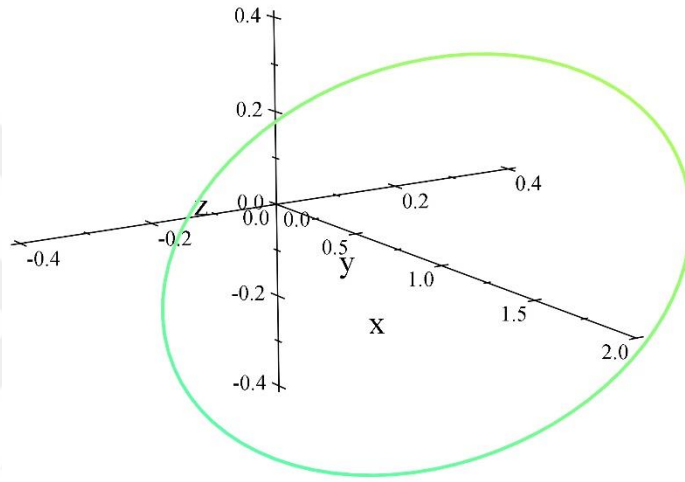
dır ve gerekli düzenlemler yapılarak,

$$(\alpha_r)_{T_r N_r B_r} = (1, -\sin s - \cos s + \sqrt{2} \sin s, \cos s - \sin s - \sqrt{2} \cos s)$$

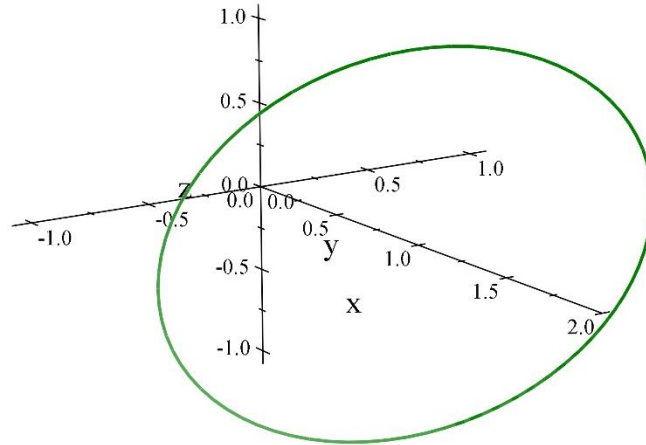
eğrisi olarak bulunur. Eğrilere ait şekiller Şekil 3.5. de verilmektedir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 3.5.  $(\alpha_r)_{T_r N_r}$  eğrisi (a);  $(\alpha_r)_{T_r B_r}$  eğrisi (b);  $(\alpha_r)_{T_r N_r B_r}$  eğrisi (c)

Şimdi de  $G_3$  de  $s$  yay uzunluk parametrelili

$$\alpha(s) = (s, \cos s, \sin s)$$

eğrisinin  $d$  izotropik vektörüne göre sabit sırt uzaklıklı eğrisini ele alalım. Öncelikle  $r_2 = rd_2$  ve  $r_3 = rd_3$  olmak üzere,

$$\alpha_r(s) = \alpha(s) + r_2 N(s) + r_3 B(s)$$

eşitliğinden  $r = 1$ ,  $d_2 = \frac{1}{2}$  ve  $d_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$  için  $\alpha_r$  sabit sırt uzaklıklı eğrisi

$$\alpha_r(s) = \left( s, \frac{1}{2} \cos s + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin s, \frac{1}{2} \sin s - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s \right)$$

olarak elde edilir. Bu eğrinin Frenet elemanları da

$$T_r = \alpha'_r(s) = \left( 1, -\frac{1}{2} \sin s + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s, \frac{1}{2} \cos s + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin s \right)$$

$$N_r = \left( 0, -\frac{1}{2} \cos s - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin s, -\frac{1}{2} \sin s + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s \right)$$

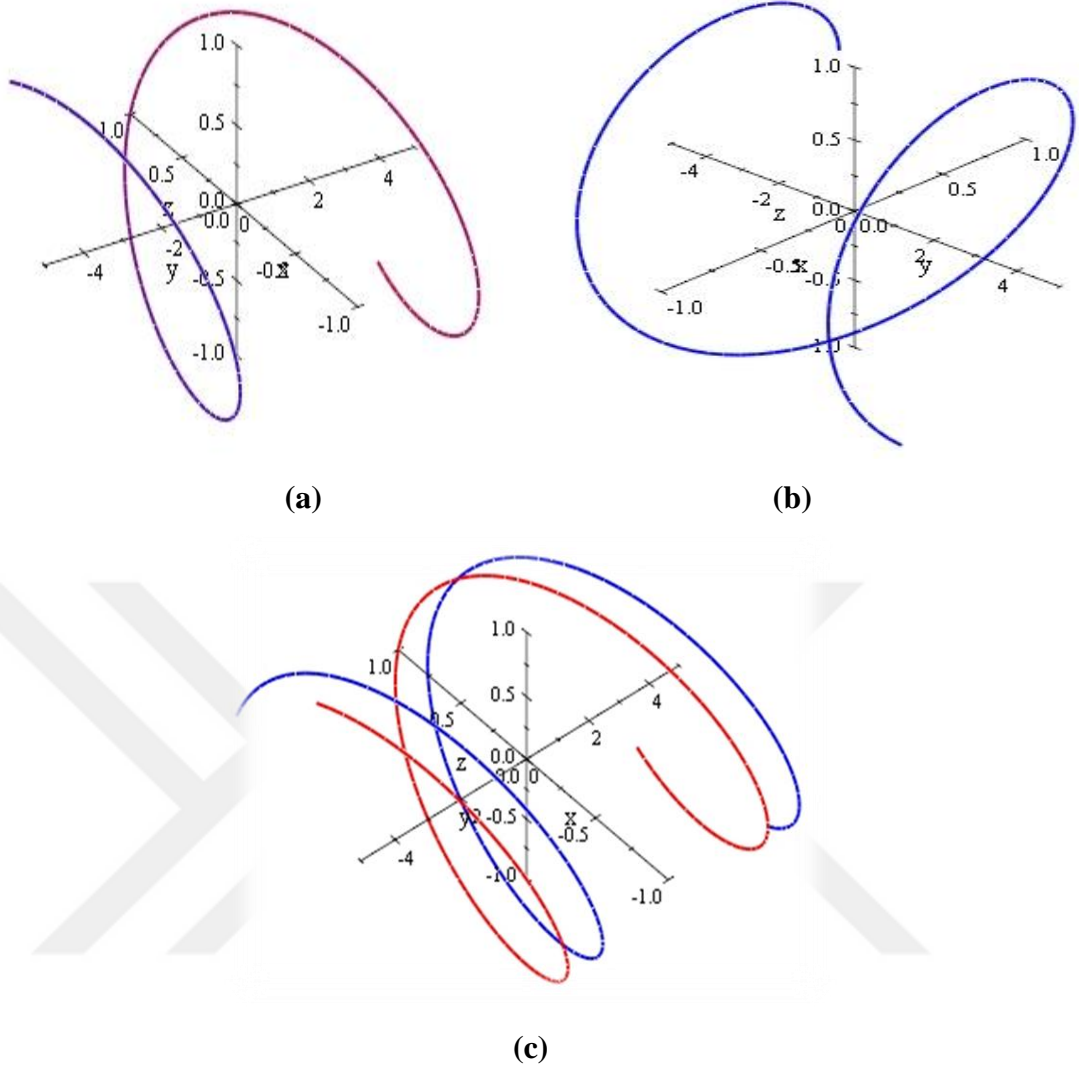
$$B_r = \left( 0, \frac{1}{2} \sin s - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s, -\frac{1}{2} \cos s - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin s \right)$$

$$\kappa_r = 1$$

ve

$$\tau_r = 1$$

olarak hesaplanır. Bu durumda elde edilen  $\alpha(s)$  ve  $\alpha_r(s)$  eğrileri Şekil 3.6. da görülmektedir.



**Şekil 3.6.**  $\alpha(s)$  eğrisi (a);  $\alpha_r(s)$  sabit sırt uzaklıklı eğri (b);  $(\alpha, \alpha_r)$  eğri çifti (c)

Teorem 3.2.1. den biliyoruz ki;  $G_3$  de  $s$  yay uzunluk parametrelili ve  $\tau(s)$  torsiyonlu  $\alpha$  eğrisinin sabit sırt uzaklı eğrisi

$$\alpha_r(s) = \alpha(s) + r_2 N(s) + r_3 B(s)$$

olmak üzere,  $(\alpha, \alpha_r)$  ikilisinin bir Bertrand eğri çifti oluşturması için gerek ve yeter şart  $c_1 \in \mathbb{R}$  için

$$\tau(s) = \frac{r_2}{c_1 r_2 - r_3 s}, c_1 r_2 - r_3 s \neq 0$$

denkleminin sağlanmasıdır. O halde  $\tau(s) = 1$  olduğu gözönüne alındığında,

$$s = \frac{r_2}{r_3} (c_1 - 1)$$



olarak seçildiğinde  $(\alpha, \alpha_r)$  ikilisi bir Bertrand eğri çifti oluşturur.

Son olarak, Teorem 3.2.4. ü gözönüne alarak izotropik olan  $d$  vektörüne göre  $\alpha_r(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi olan

$$\alpha_r(s) = \left( s, \frac{1}{2} \cos s + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin s, \frac{1}{2} \sin s - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s \right)$$

eğrisinin  $r=1$  için  $T_r N_r$ ,  $T_r B_r$  ve  $T_r N_r B_r$  Smarandache eğrilerini elde edelim.

$$(\alpha_r)_{T_r B_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} \left[ (r_3 \tau^2 - r_2 \tau' - r_3 \tau \kappa_r) N + (\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau' + r_2 \tau \kappa_r) B \right],$$

$$(\alpha_r)_{T_r N_r B_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} \left[ (\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau' + r_3 \tau^2 - r_2 \tau' - r_3 \tau \kappa_r) N + (\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau' + r_2 \tau' - r_3 \tau^2 + r_2 \tau \kappa_r) B \right]$$

İlk olarak  $T_r N_r$ -Smarandache eğrisi

$$(\alpha_r)_{T_r N_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} \left[ (\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau' - r_3 \kappa_r \tau) N + (r_2 \kappa_r \tau + r_2 \tau' - r_3 \tau^2) B \right]$$

eşitliğinde

$$T = (1, -\sin s, \cos s),$$

$$N = (0, -\cos s, -\sin s),$$

$$B = (0, \sin s, -\cos s),$$

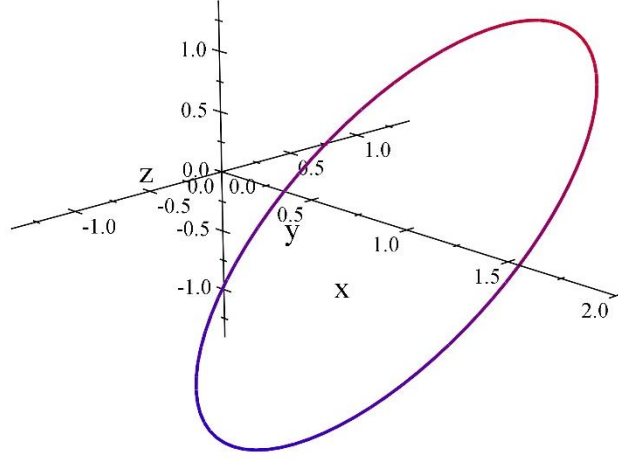
ve  $r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $r_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\kappa_r = 1$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\tau = 1$ ,  $\tau_r = 1$  eşitlikleri kullanılarak denklemde yerine yazılırsa,

$$(\alpha_r)_{T_r N_r} = (1, -\sin s, \cos s) + \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (0, -\cos s, -\sin s) + \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (0, \sin s, -\cos s) \right]$$

elde edilir ve son olarak düzenlenirse

$$(\alpha_r)_{T_r N_r} = \left( 1, -\sin s - \left( \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) (\cos s - \sin s), \cos s - \left( \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) (\cos s - \sin s) \right)$$

bulunur (Bakınız Şekil 3.7.).



Şekil 3.7.  $(\alpha_r)_{T_r N_r}$  eğrisi

Şimdi de  $T_r B_r$  - Smarandache eğrisini bulalım:

$$(\alpha_r)_{T_r B_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} \left[ (r_3 \tau^2 - r_2 \tau' - r_3 \tau \kappa_r) N + (\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau' + r_2 \tau \kappa_r) B \right]$$

eşitliğini ve yukarıdaki eşitlikleri dikkate alarak

$$(\alpha_r)_{T_r B_r} = (1, 0, 0)$$

olarak bulunur.

Son olarak,  $T_r N_r B_r$  -Smarandache eğrisini elde edelim. Yukarıdakilere benzer şekilde

$$(\alpha_r)_{T_r N_r B_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} \left[ (\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau' + r_3 \tau^2 - r_2 \tau' - r_3 \tau \kappa_r) N + (\kappa - r_2 \tau^2 - r_3 \tau' + r_2 \tau' - r_3 \tau^2 + r_2 \tau \kappa_r) B \right]$$

eşitliği ve denklemdaki değerler yerlerine yazılırsa;

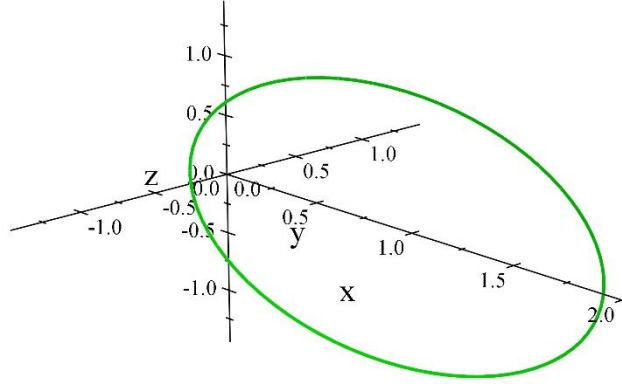
$$(\alpha_r)_{T_r N_r B_r} = (1, -\sin s, \cos s) + \left( \frac{1}{2} \right) (0, -\cos s, -\sin s) + \left( \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) (0, \sin s, -\cos s)$$

olur. Buradan,

$$(\alpha_r)_{T_r N_r B_r} = (1, -\sin s, \cos s) + \left( 0, -\frac{1}{2} \cos s, -\frac{1}{2} \sin s \right) + \left( 0, \left( \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) \sin s, -\left( \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) \cos s \right)$$

$$(\alpha_r)_{T_r N_r B_r} = \left( 1, -\frac{1}{2} \cos s - \left( \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) \sin s, \frac{1}{2} \sin s + \left( \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) \cos s \right)$$

olarak bulunur (Bakınız Şekil 3.8.).



Şekil 3.8.  $(\alpha_r)_{T,N,B_r}$  eğrisi

**Örnek 3.3.2.**  $G_3$  de  $s$  yay uzunluk parametrelili

$$\alpha(s) = (s, s^2, s^3)$$

eğrisini gözönüne alalım. Bu eğrinin izotropik olmayan bir  $d$  vektörüne göre sabit sırt uzaklıklı eğrisi;

$$T = \alpha'(s) = (1, 2s, 3s^2)$$

olmak üzere,

$$\alpha_r(s) = \alpha(s) + rT$$

eşitliğinden  $r = 1$  için,

$$\alpha_r(s) = (1 + s, 2s + s^2, 3s^2 + s^3)$$

olarak bulunur. Ayrıca  $\alpha(s)$  in normal, binormal birim vektörleri ve eğrilik burulma değerleri sırasıyla;

$$N = \frac{1}{2\sqrt{1+9s^2}}(0, 2, 6s)$$

$$B = \frac{1}{2\sqrt{1+9s^2}}(0, -6s, 2)$$

$$\kappa = 2\sqrt{1+9s^2}$$

ve

$$\tau = \frac{12}{4+36s^2} = \frac{3}{1+9s^2}$$

olur. Böylece  $\alpha_r(s)$  nin Teorem 2.4.2.3. e göre Frenet elemanları

$$T_r = (1, 2 + 2s, 6s + 3s^2)$$

olarak ve

$$\kappa_r = 2\sqrt{9s^2 + 18s + 10}$$

ve

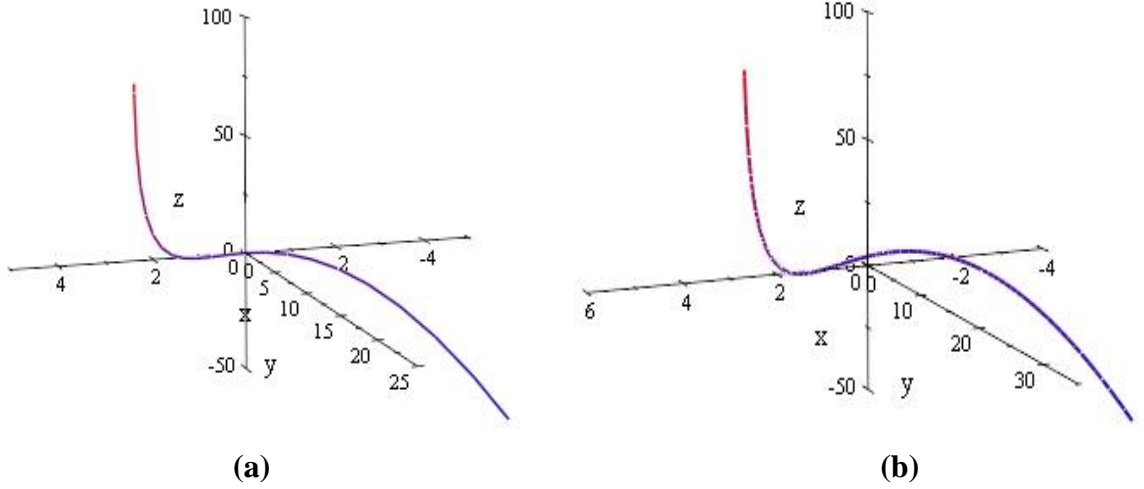
$$\tau_r = \frac{12}{36s^2 + 72s + 40} = \frac{3}{9s^2 + 18s + 10}$$

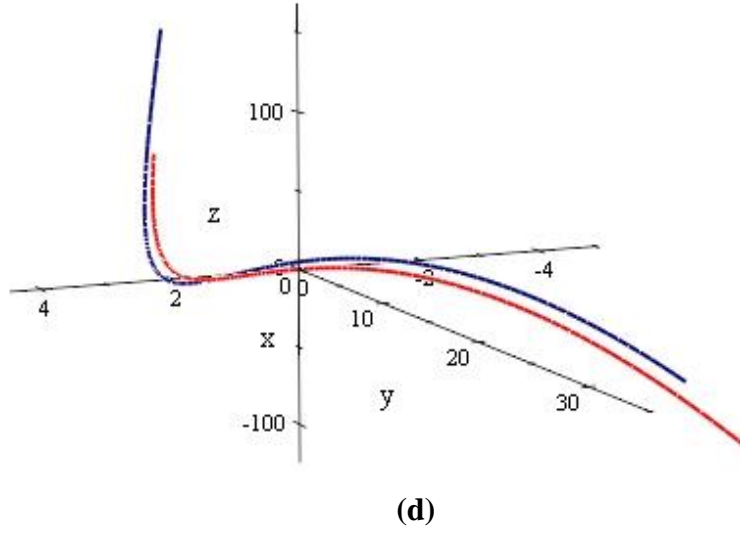
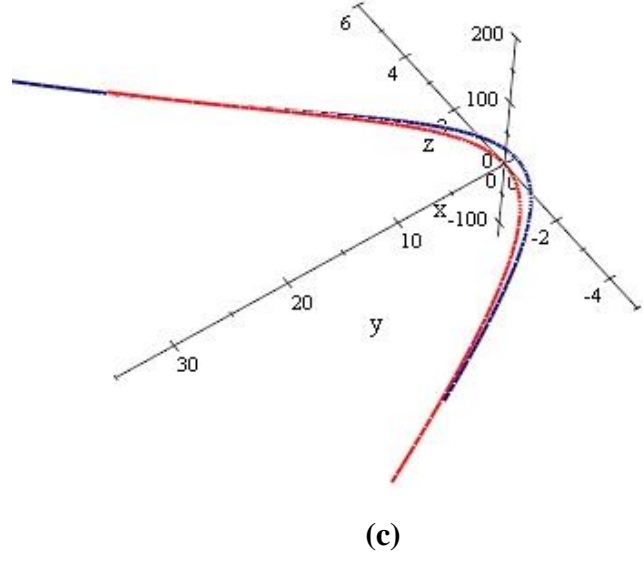
olmak üzere

$$N_r = \frac{1}{2\sqrt{9s^2 + 18s + 10}}(0, 2, 6 + 6s),$$

$$B_r = \frac{1}{2\sqrt{9s^2 + 18s + 10}}(0, -6 - 6s, 2)$$

eşitlikleri bulunur. SWP programı yardımıyla çizilen  $\alpha(s)$  ve  $\alpha_r(s)$  eğrileri Şekil 3.9. da görülmektedir.





**Şekil 3.9.**  $\alpha(s) = (s, s^2, s^3)$  eğrisi **(a)**;  $\alpha_r(s) = (1 + s, 2s + s^2, 3s^2 + s^3)$  eğrisi **(b)**;  
 $\alpha$  ve  $\alpha_r$  ikilisi **(c),(d)**

Ayrıca yine izotropik olmayan  $d$  vektörü için  $\alpha(s)$  ve  $\alpha_r(s)$  eğrilerinin Mannheim eğri çifti olmaları için Teorem 3.1.4. e göre

$$\kappa(s) = c_1 e^{-\frac{s}{r}}$$

olmalıdır.  $\kappa = 2\sqrt{1+9s^2}$  olduğu gözönüne alınırsa,  $s \neq 0$  olmak üzere

$$c_1 = \frac{1}{e(4+36s^2)^{\frac{1}{2s}}}$$

değeri için  $(\alpha, \alpha_r)$  çifti Mannheim eğri çifti olur.

Son olarak, Teorem 3.1.5. i gözönüne alarak izotropik olmayan  $d$  vektörüne göre  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi olan

$$\alpha_r(s) = (1 + s, 2s + s^2, 3s^2 + s^3)$$

eğrisinin  $r=1$  ve yukarıda verilen  $\alpha$  eğrisinin Frenet elamanlarını kullanarak  $T_r N_r$ ,  $T_r B_r$  ve  $T_r N_r B_r$ -Smarandache eğrilerini elde edelim:

İlk olarak  $T_r N_r$ -Smarandache eğrisi;

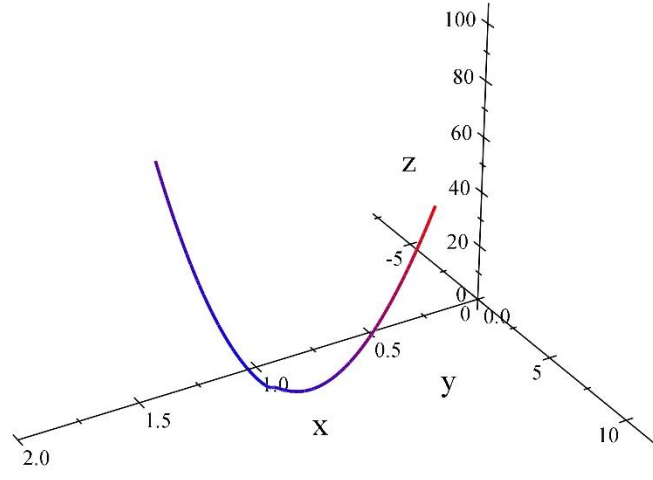
$$(\alpha_r)_{T_r N_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} [(\kappa + r\kappa\kappa_r + r\kappa')N + r\kappa\tau B]$$

eşitliğinden

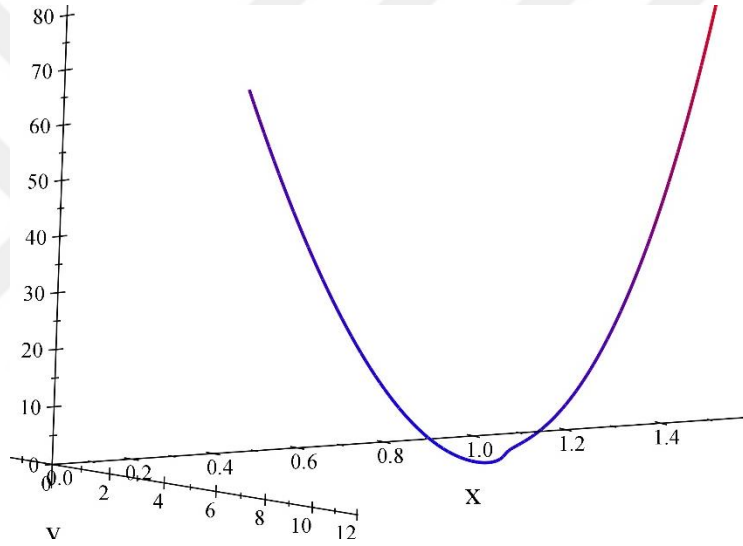
$$(\alpha_r)_{T_r N_r} = (1, 2s, 3s^2) + \frac{1}{2\sqrt{9s^2 + 18s + 10}} \left[ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} 2\sqrt{1+9s^2} \\ + (2\sqrt{1+9s^2})(2\sqrt{9s^2 + 18s + 10}) \\ + \frac{18s}{\sqrt{1+9s^2}} \end{array} \right) \\ \left( \frac{1}{2\sqrt{1+9s^2}} \right) (0, 2, 6s) \\ + \left( \frac{3}{1+9s^2} \right) (2\sqrt{1+9s^2}) \\ \left( \frac{1}{2\sqrt{1+9s^2}} \right) (0, -6s, 2) \end{array} \right]$$

$$(\alpha_r)_{T_r N_r} = \left( 1, 2 + 2s + \frac{1}{\sqrt{9s^2 + 18s + 10}}, 3s^2 + 6s + \frac{6 + 6s}{2\sqrt{9s^2 + 18s + 10}} \right)$$

olur. Bu eğriye ait grafikler Şekil 3.10. da görülmektedir.



(a)



(b)

Şekil 3.10.  $(\alpha_r)_{T,N,r} = \left( 1, 2 + 2s + \frac{1}{\sqrt{9s^2 + 18s + 10}}, 3s^2 + 6s + \frac{6 + 6s}{2\sqrt{9s^2 + 18s + 10}} \right)$  eğrisi (a), (b).

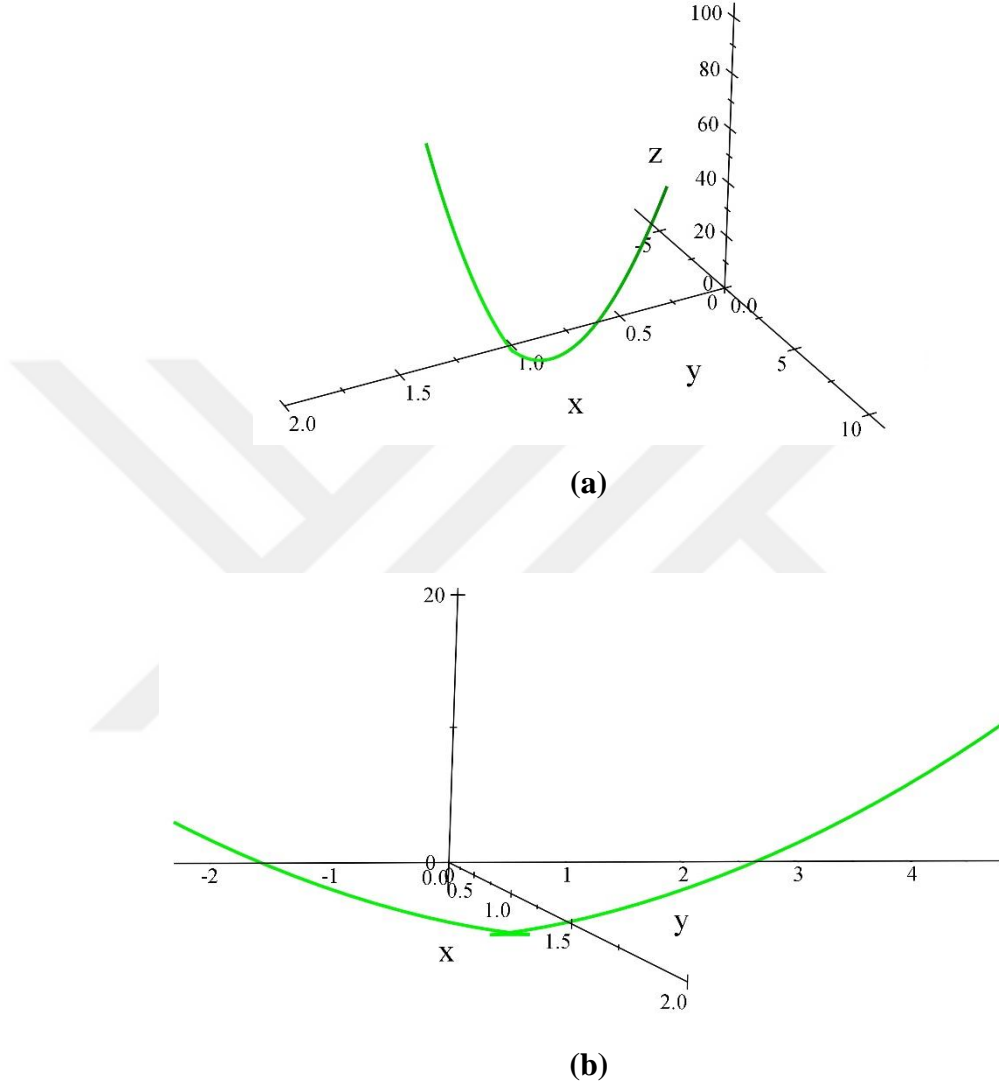
İkinci olarak  $T_r B_r$ -Smarandache eğrisi;

$$(\alpha_r)_{T,B_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} [(r\kappa\kappa_r - r\kappa\tau)N + (\kappa + r\kappa')B]$$

$$(\alpha_r)_{T,B_r} = \left( 1, 2s, 3s^2 \right) + \frac{1}{2\sqrt{9s^2 + 18s + 10}} \left[ \begin{array}{l} \left( 2\sqrt{9s^2 + 18s + 10} - \frac{3}{1 + 9s^2} \right) (0, 2, 6s) + \\ \left( 1 + \frac{9s}{1 + 9s^2} \right) (0, -6s, 2) \end{array} \right]$$

$$(\alpha_r)_{T,B_r} = \left( 1, 2 + 2s - \frac{3+3s}{\sqrt{9s^2+18s+10}}, 3s^2 + 6s + \frac{1}{\sqrt{9s^2+18s+10}} \right)$$

olur. Bu eğriye ait grafikler Şekil 3.11. de görülmektedir.



**Şekil 3.11.**  $(\alpha_r)_{T,B_r} = \left( 1, 2 + 2s - \frac{3+3s}{\sqrt{9s^2+18s+10}}, 3s^2 + 6s + \frac{1}{\sqrt{9s^2+18s+10}} \right)$  eğrisi **(a)**, **(b)**

Son olarak  $T_r, N_r, B_r$  -Smarandache eğrisi;

$$(\alpha_r)_{T_r, N_r, B_r} = T + \frac{1}{\kappa_r} \left[ (\kappa + r\kappa\kappa_r + r\kappa' - r\kappa\tau)N + (\kappa + r\kappa\tau + r\kappa')B \right]$$

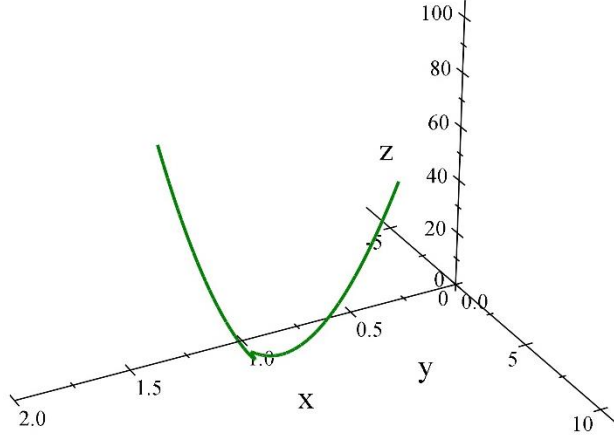
eşitliğinden



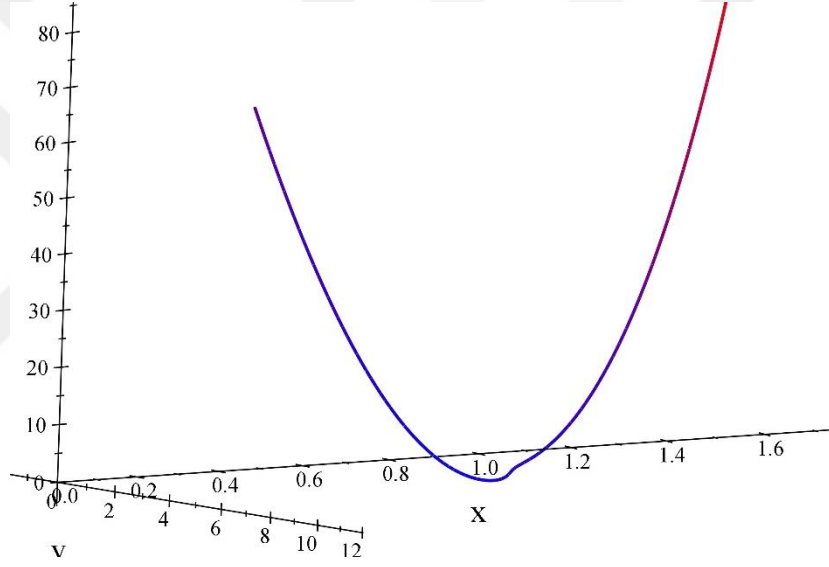
$$(\alpha_r)_{T,N,B_r} = (1, 2s, 3s^2) + \frac{1}{2\sqrt{9s^2+18s+10}} \left[ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} (2\sqrt{1+9s^2}) \\ + (2\sqrt{1+9s^2})(2\sqrt{9s^2+18s+10}) \\ + \left( \frac{18s}{\sqrt{1+9s^2}} \right) \\ - (2\sqrt{1+9s^2}) \left( \frac{3}{1+9s^2} \right) \end{array} \right) \\ \left( \frac{1}{2\sqrt{1+9s^2}} \right) (0, 2, 6s) \\ + \left( \begin{array}{l} (2\sqrt{1+9s^2}) \\ + (2\sqrt{1+9s^2}) \left( \frac{3}{1+9s^2} \right) \\ + \left( \frac{18s}{\sqrt{1+9s^2}} \right) \end{array} \right) \\ \left( \frac{1}{2\sqrt{1+9s^2}} \right) (0, -6s, 2) \end{array} \right]$$

$$(\alpha_r)_{T,N,B_r} = \left( 1, 2+2s - \frac{2+3s}{\sqrt{9s^2+18s+10}}, 3s^2+6s + \frac{4+3s}{\sqrt{9s^2+18s+10}} \right)$$

olur. Bu eğriye ait grafikler Şekil 3.12. de görülmektedir.



(a)



(b)

**Şekil 3.12.**  $(\alpha_r)_{T_r, N_r, B_r} = \left( 1, 2 + 2s - \frac{2 + 3s}{\sqrt{9s^2 + 18s + 10}}, 3s^2 + 6s + \frac{4 + 3s}{\sqrt{9s^2 + 18s + 10}} \right)$  eğrisi

Şimdi de  $G_3$  de  $s$  yay uzunluk parametrelili

$$\alpha(s) = (s, s^2, s^3)$$

eğrisinin  $d$  izotropik vektörüne göre sabit sırt uzaklıklı eğrisini elde ederek grafik üzerinde gösterelim:

Öncelikle  $r_2 = rd_2$  ve  $r_3 = rd_3$  olmak üzere,

$$\alpha_r(s) = \alpha(s) + r_2 N(s) + r_3 B(s)$$

eşitliğinden  $r = 1$ ,  $d_2 = \frac{1}{2}$  ve  $d_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$  için  $\alpha_r$  sabit sırt uzaklıklı eğrisi

$$\alpha_r(s) = \left( s, s^2 + \frac{1-3\sqrt{3}s}{2\sqrt{1+9s^2}}, s^3 + \frac{\sqrt{3}+3s}{2\sqrt{1+9s^2}} \right)$$

olarak elde edilir. Bu eğrinin Frenet emanları da

$$T_r = \alpha'_r(s) = \left( 1, 2s - \frac{3\sqrt{3}+9s}{2(1+9s^2)^{\frac{3}{2}}}, 3s^2 + \frac{3-9\sqrt{3}s}{2(1+9s^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$N_r = \left( 0, -\frac{1}{2}\cos s - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin s, -\frac{1}{2}\sin s + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos s \right)$$

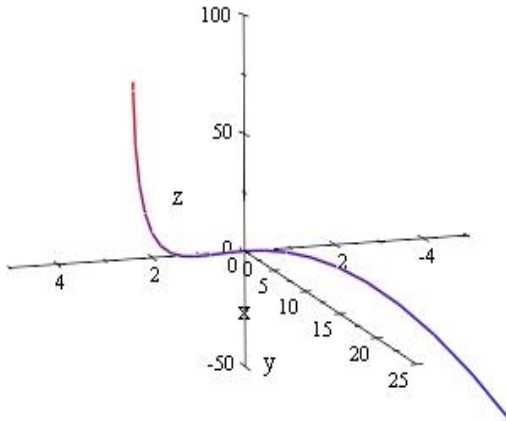
$$B_r = \left( 0, \frac{1}{2}\sin s - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos s, -\frac{1}{2}\cos s - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin s \right)$$

$$\kappa_r = 1$$

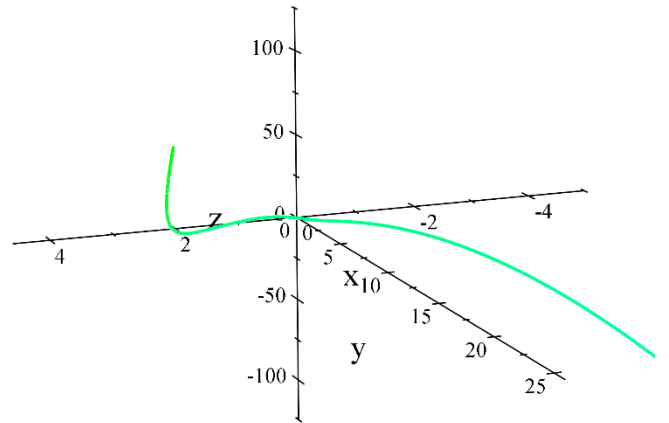
ve

$$\tau_r = 1$$

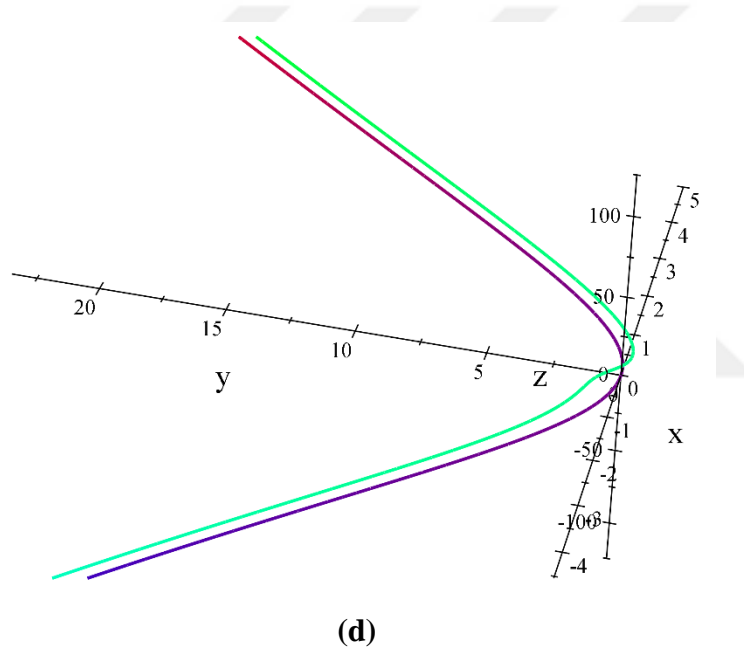
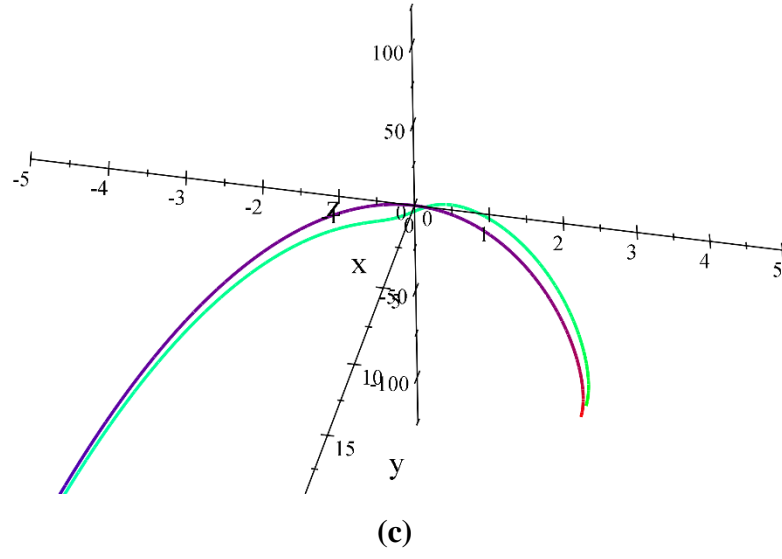
olarak hesaplanır. Bu durumda elde edilen  $\alpha(s)$  ve  $\alpha_r(s)$  eğrileri Şekil 3.13. de görülmektedir.



(a)



(b)



Şekil 3.13.  $\alpha(s) = (s, s^2, s^3)$  eğrisi (a);  $\alpha_r(s) = \left( s, s^2 + \frac{1-3\sqrt{3}s}{2\sqrt{1+9s^2}}, s^3 + \frac{\sqrt{3}+3s}{2\sqrt{1+9s^2}} \right)$  eğrisi (b);  $\alpha$  ve  $\alpha_r$  ikilisi (c), (d)

## 4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde, tez çalışmasının genel bir değerlendirmesi yapılarak, elde edilen sonuçlar verilmiş ve sonraki çalışmalara yön verecek öneriler sunulmuştur. İlk olarak son zamanlarda sıkça çalışılan 3-boyutlu Galile geometrisinin temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Özellikle bu kısımda ele alınan konular, tezimizde çalıştığımız eğriler başlığı için temel teşkil etmektedir. Tezimizin diğer bir önemli başlığı olan 3-boyutlu Galile uzayında sabit sırt uzaklıklı eğri kavramı [16] daki bulgularla ikinci bölümün son başlığı olarak yer almaktadır. Daha öncesinde ise inceleme konumuz olan bazı özel eğrilerden Bertrand, involüt-evolüt, Mannheim ve Smarandache eğrilerinin hem Öklid hem de Galile uzayında tanımları ve özellikleri verilmiştir. Bulgular kısmında ise araştırma konumuz olan 3-boyutlu Galile uzayında ki sabit sırt uzaklıklı eğrilerin, yukarıda bahsi geçen dört özel eğri ile arasında bağıntılar kurulmuştur. Daha açık olarak elde edilen sonuçları maddeler halinde yazarsak:

1. Birim hızlı bir eğrinin  $d$  izotropik veya izotropik olmayan vektöre göre sabit sırt uzaklıklı eğrisi belli koşullar altında Bertrand eğri çifti olur.
2. Birim hızlı bir eğrinin  $d$  izotropik veya izotropik olmayan vektöre göre sabit sırt uzaklıklı eğrisi hiç bir koşulda involüt-evolüt eğri çifti oluşturmaz.
3. Birim hızlı bir eğrinin  $d$  izotropik veya izotropik olmayan vektöre göre sabit sırt uzaklıklı eğrisi belli koşullar altında Mannheim eğri çifti olur.

Elde edilen bu bulgulara ek olarak, 3-boyutlu Galile uzayda  $d$  izotropik veya izotropik olmayan vektöre göre elde edilmiş olan sabit sırt uzaklıklı eğrinin  $T_r N_r$ ,  $T_r B_r$  ve  $T_r N_r B_r$ -Smarandache eğrilerini elde ederek çizimlerle görsel olarak desteklenmiştir.

Son bölümde incelediğimiz konu örnekler üzerinde somutlaştırılıp yine SWP ve Mathematica programları yardımıyla grafikler eklenerek görsel açıdan zenginleştirilmiştir.

### 4.1. Öneriler

Bu araştırmada ele alınan özel eğrilere ilaveten başka tip özel eğriler için yeni bir inceleme yapıp farklı bulgular elde edilebilir.

Ayrıca, burada elde edilen sonuçlar; yarı-Galile uzayı gibi başka uzay tiplerinde yeniden incelenip farklı teoremler ve sonuçlar elde edilebilir.

## 5. KAYNAKLAR

- [1] Röschel O, 1986. Die Geometrie Des Galileischen Raumes. Berichte der Math.-Stat. Sektion im Forschungszentrum Graz Ber., 256(19): 1-20.
- [2] Divjak B, 1998. Curves in Pseudo-Galilean Geometry, Annales Univ. Sci. Budapest. 41: 117-128.
- [3] Hacısalihoğlu H, 1983. Difeansiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları.
- [4] Millman RS, Parker GD, 1977. Elements of Differential Geometry. Englewood Cliffs, Prentice-Hall. New Jersey.
- [5] Sabuncuoğlu A, 2010. Diferensiyel Geometri. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- [6] Coşkun Ö, 2010. 3-Boyutlu Öklid ve Minkowski Uzaylarında Mannheim Eğri Çiftleri. Yüksek Lisans Tezi, Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Uşak.
- [7] Vogler H, 1963. Die auf einer Torse Verlaufenden Linien konstanten Gratabstandes als duale Seitenstücke zu den pseudorektifizieren den Torsen einer Raumkurve, Vorgelegt in der Sitzung, Wien.
- [8] Hacısalihoğlu HH, 1968. On The Motion of The Frenet Trihedron of a Space Curve Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara, pp: 33-55.
- [9] Tarakcı Ö, 2002. Sabit Sırt Uzaklıklı Hiper Yüzeyle. Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü, Ankara.
- [10] Çakmak A, 2015. Bazı Özel Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyle. Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü. Erzurum.
- [11] Yurttañıkılmaz S, Tarakcı Ö, 2015. The Relationship between Focal Surfaces and Surfaces at a Constant Distance from the Edge of Regression on a Surface. Advances in Mathematical Physics, Article ID 397126.
- [12] Çakmak A, Tarakcı Ö, 2016. The Image Curves on Surfaces at a Constant Distance from the Edge of Regression on a Surface of Revolution. International Journal of Mathematics and Computation, (27)1: 74-85.
- [13] Çakmak A, Tarakcı Ö, 2016. Surfaces at a Constant Distance from the Edge of Regression on a Surface of Revolution. Applied Mathematical Sciences, 10(15): 707-719.
- [14] Yurttañıkılmaz S, 2016. Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyle Üzerine. Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

- [15] Çakmak A, Tarakcı Ö. 2017. On the Tubular Surfaces in  $E^3$ . *New Trends in Mathematical Sciences*, (5)1: 40-50.
- [16] Kızıltuğ S, Çakmak A, Mumcu G, 2020. Notes on the Curves at a Constant Distance From The Edge of Regression on a Curve (Submitted).
- [17] Yaglom IM, 1979. *A Simple Non-Euclidean Geometry and Physical Basis*. Springer. Verlag, New York.
- [18] Ali AT, 2012. Position Vectors of Curves in the Galilean Space  $G_3$ . *Matematnykm Bechnk*, 64(3): 200-210.
- [19] Divjak B, 1998. Curves in Pseudo-Galilean Geometry. *Annales Univ. Sci. Budapest*. 111-118.
- [20] Balgetir ÖH, 2009. Weakened Bertrand Curves in the Galilean Space 3  $G_3$ . *J. Adv. Math. Studies*, 2: 69-76.
- [21] Pavkovic BJ, Kamenarovic I, 1987. The Equiform Differential Geometry of Curves in the Galilean Space  $G_3$ . *Glasnik Matematicki*, 22 (42): 449-457.
- [22] Salimov A, Mağden A, 2008. *Diferensiyel Geometri*. Aktif Yayınevi, Erzurum.
- [23] Öğrenmiş AO, Ergüt M, Bektas M, 2007. On The Helices in the Galilean Space  $G_3$ . *Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A*, 31(2): 177-181.
- [24] Yüce S, 2017. *Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri*. Pegem akademi, Çankaya, Ankara.
- [25] Öğrenmiş A, Öztekin H, Ergüt M, 2009. Bertrand Curves in Galile Space and Their Characterizations. *Kragujevac J. Math*, 32: 139-147.
- [26] Azak AZ, Yiğit MAK, Ersoy S, 2010. Involute-Evolute Curves in Galilean Space  $G_3$ , arxiv:1003.3113v1 [math.DG].
- [27] Hiulu L, Fan W, 2008. Mannheim Partner Curves in 3-space. *Journal of Geometry*, 88: 120-126.
- [28] Öğrenmiş A, Öztekin H, Ergüt M. 2011. Some Properties of Mannheim Curves in Galilean and Pseudo-Galile space. arXiv:1111.0424v1 [math.DG].
- [29] Ali AT, 2010. Special Smarandache Curves in th Euclidean Space. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 2: 30-36.
- [30] Turgut M, Yılmaz S, 2008. Smarandche curves in Minkowski space-time. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 3: 51-55.
- [31] Abdul-Aziz HS, Khalifa SM, 2015. Smarandache curves of some special curves in the Galilean 3-space, arXiv:1501.05245v2.

## ÖZGEÇMİŞ

Bitlis Tatvan doğumluyum. İlköğretimi ve ortaokulu Benekliköyü İlköğretim Okulu'nda ve liseyi Konya Ereğli İvriz Anadolu Öğretmen Lisesinde tamamladım. 2009 yılında kazandığım Gaziantep Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlk Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nden 2013 yılında mezun oldum. 2017'de Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başladım. Temmuz 2020'de yüksek lisansımı tamamladım. Yabancı dilim İngilizce'dir.

İshak GÜRGAR

