T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA HELİSLER VE KARAKTERİZASYONLARI

Feyzi TARTIK

KASIM 2020

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA HELİSLER

VE KARAKTERİZASYONLARI

Hazırlayan

Feyzi TARTIK

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Fatma BULUT

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Muaz SEYDAOĞLU

Dr. Öğr. Üyesi Fatma BULUT

Dr. Öğr. Üyesi Muhsin İNCESU

KASIM 2020

ONAY

Feyzi TARTIK tarafından hazırlanan "**4-Boyutlu Öklid Uzayında Helisler ve Karakterizasyonları**" adlı tez çalışması 02/11/2020 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Doç. Dr. Muaz SEYDAOĞLU (Başkan)	____________________
Dr. Öğr. Üye. Fatma BULUT (Danışman)	____________________
Dr. Öğr. Üye. Muhsin İNCESU (Üye)	____________________

Bu tezin kabulü, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …/…/…gün ve …/… sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Zeki ARGUNHAN

Enstitü Müdürü

BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI

ETİK BEYANI

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre hazırlamış olduğum "**4-Boyutlu Öklid Uzayında Helisler ve Karakterizasyonları**" adlı tezimin özgün bir çalışma olduğunu, tez hazırlanırken tüm aşamalarda bilimsel etik ilkelerine uygun davrandığımı, tez kapsamında sunulan tüm verileri bilimsel etik ilkelerine uygun elde ettiğimi, tezde faydalandığım tüm eserlere atıf yaptığımı ve kaynaklar kısmında bu eserleri gösterdiğimi beyan ederim. 02/11/2020

Feyzi TARTIK

İmza

ÖZET

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA HELİSLER
VE KARAKTERİZASYONLARI

Feyzi TARTIK

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Dr. Öğr. Üye. Fatma BULUT
Kasım 2020, 48 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalışmamızın tarihsel gelişimi hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, tezin içeriği ile ilgili temel tanımlar verilmiştir. Ayrıca, 4-boyutlu Öklid uzayında Darboux helisler, slant helisler, slant helislerin karekterizasyonu ve (k,m)-tipi adı verilen yeni tip slant helisler incelenmiştir. Üçüncü bölümde, 4-boyutlu Öklid uzayında yeni bir frenet çatı ve bu çatıya göre (k,m)-tipi slant helisler elde edilmiştir. Dördüncü bölümde ise sonuçlar verildikten sonra son bölümde kaynaklar yazılmıştır.

Anahtar kelimeler: Slant Helis, Genel Helis, Darboux Helis, Eğrilik, Burulma.

ABSTRACT

HELICES AND CHARACTERIZATIONS
IN EUCLIDEAN 4-SPACE

Feyzi TARTIK

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate Education Institute
Department of Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Fatma BULUT
November 2020, 48 pages

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, the historical development of our study is given. In the second chapter, basic definitions about the content of the thesis are given. In addition, Darboux helices, slant helices, the characterization of slant helices and new types of slant helix called (k,m)-type in Euclidean 4-space are examined. In the third chapter, a new frenet frame and (k,m)-type slant helix according to this frame are obtained.
In the fourth chapter, after the results are given, the references are written in the last chapter.

Keywords: Slant Helix, General Helix, Darboux Helix, Curvature, Torsion.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması sırasında, tez konusunun belirlenmesinden başlayarak son aşamaya kadar her konuda benden yardımlarını esirgemeyen danışman bildiği her şeyi benimle paylaşan ve bilmediklerimi öğreten danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Fatma BULUT' a teşekkürlerimi borç bilirim.

Eğitim hayatımın en başından bugüne kadar desteklerini her an yanımda bulduğum, haklarını hiçbir şekilde ödeyemeyeceğim, hayatlarını evlatlarına adayan bu süreçte en az benim kadar stres yaşayan, bu günlere gelmemde büyük emekleri olan, bana sabırla katlanan, elinden geldiğince bana destek olan değerli anne ve babama sonsuz teşekkür ve minnettarlığımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim ve tez sürecim boyunca sabırlı ve anlayışlı olan, bana her konuda destek olan ve her zaman yanımda olan eşim Zeynep DİNLER TARTIK'a ve zamanından fedakârlık yapıp beni sabırla bekleyen kızım Hiranur TARTIK" a çok teşekkür ederim.

ÖNSÖZ

Son yıllarda diferansiyel geometride bazı özel eğriler ve özel yüzeyler büyük önem arz etmektedir. Eğrilerle ilgili yapılan çalışmalarda Frenet denklemleri ve eğrinin eğrilikleri anahtar rol oynamaktadır. Birçok eğriler teorisinin inşasında Frenet denklemleri kullanılmakta olup ilginç sonuçlar ortaya koymaktadır. Bu eğrilerin en önemlilerinden biri helis eğrisidir.

Helisler, teğet vektörü sabit bir doğrultu ile sabit açı yapan eğriler olarak tanımlanır. Bu klasik tanım 1802 yılında Lancret tarafından yapılmıştır. İlk olarak bir dik dairesel silindir üzerine çizilmiş helis ele alınmış ve buna dairesel helis denilmiştir. Bu helislerde eğrilik κ ve burulmanın τ ayrı ayrı birer sabit olduğu ilk tespit edilen karakterizasyonlardandır. Daha sonra bu eğriliklerin sabit olmamasına rağmen oranlarının sabit olduğu eğri bulunmuştur ki bu eğriye genel helis adı verilmiştir. Bulunan genel helis sayesinde bir dik dairesel silindir üzerine çizilmiş helislerden başka helislerin de var olduğu ortaya çıkmıştır.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL **Sayfa**

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
τ	Burulma
κ	Eğrilik
V	Vektör uzayı
V_i	Öklid uzayında i-yinci Frenet vektörü
H_i	Harmonik eğrilikler
E^n	n-boyutlu Öklid uzay
$\langle .,. \rangle$	İç çarpım
x	Vektörel çarpım
$\lVert . \rVert$	Norm
κ_i	E^4 Öklid uzayında i-yinci Frenet eğriliği
U	E^4 Öklid uzayında sabit açı yapan vektör
U'	U Vektörünün s parametresine göre diferansiyeli
T , N , B_1, B_2	E^4 Öklid uzayında Frenet vektörleri
$\sum$	Toplam sembolü
D	α Eğrisinin Darboux vektörü

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometride, eğriler teorisi en temel çalışma alanlarından biridir. Bir eğrinin pek çok özelliğini karakterize etmek için; Frenet üçlüsü ve bunların eğri boyunca değişimlerini içeren Frenet denklemleri kullanılır. Diğer taraftan Frenet denklemleri ve eğrinin eğrilikleri, eğrileri sınıflandırmada kullanılan önemli bir araçtır. Birçok eğriler teorisinin inşasında Frenet denklemleri kullanılmakta olup ilginç sonuçlar ortaya koymaktadır. Bu eğrilerin en önemlilerinden biri helis eğrisidir. Hiç şüphesiz, helis, bilim ve doğadaki en büyüleyici eğrilerden biridir.

Helisler, birçok farklı bilim dalında çok geniş kullanım alanlarına ve uygulamalara sahiptirler. Helisler, nano yaylarda, karbon nanotüpleri, DNA'da, çiftli ve kollajen üçlü helisde, lipitin çiftli katmanlarında, Salmonella ve Escherichia coli'deki bakteriyel flagellada, aktinometiklerdeki hava hiflerinde, spiroketlerde bakteri şekillerinde, boynuzlarda, dallarda, sarmaşıklarda, vidalarda, yaylarda, helis merdivenler ve deniz kabukların (heliko-sarmal yapılar) da ortaya çıkar. Ayrıca fraktal geometride, bilgisayar destekli tasarım ve bilgisayar grafikleri alanlarında helis eğrisini veya helisel yapıları kolayca görebiliriz. Helisler, araçların yol tanımı, kinematik hareket simülasyonu veya otoyolların tasarımı için de kullanılabilir.

Frenet denklemlerinden; klasik diferansiyel geometri de silindirik helisler, dairesel helisler, slant helisler ve Darboux helisler kavramlarına ulaşılmaktadır. Slant helis, asli normal vektörü sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğri olarak tanımlanmıştır. Bununla birlikte, Darboux helis adı verilen ve Darboux vektörü sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan yeni özel eğriler olarak bilinir.

Tanım olarak bir genel helis, teğet vektörü sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan bir eğri olarak verilir. Bu tanım 1806 yılında Michel Ange Lancret tarafından yapılmış ve 1845 yılında Barre Saint Venant tarafından ispatlanmıştır. Helisin tanımına benzeyen, yeni bir helis türü olan slant helis; eğrinin asli normal vektör alanı sabit doğrultuyla sabit açı yapan eğri olarak tanımlanır. Bu tanım ise 2004 yılında Izumiya ve Takeuchi [1] tarafından ilk defa yapılmıştır. 3-boyutlu Öklid uzayında Darboux helis kavramı Yaylı ve arkadaşları tarafından [2] 2012 tarihinde tanıtılmış ve çalışılmıştır. Öklid uzayında Darboux helisleri 2018 yılında İlarslan ve Yıldırım [3] tarafından incelenmiştir. Öklid uzayında slant helisleri 2009 yılında Ali ve arkadaşları tarafından [4] incelenmiştir. Ayrıca, son yıllarda, bu konuda birçok çalışma yapan çoğu araştırmacılar [5]- [15] tarafından eğrinin asli normal vektör alanı ile sabit doğrultu arasındaki açının sabit olması halindeki eğriler $slant$ helis olarak adlandırılmıştır.

Diferansiyel geometri açısından, bir helis, sıfırlanmayan sabit eğriliği (veya birinci eğriliği) k_1 ve sıfırlanmayan sabit burulması (veya ikinci eğriliği) k_2 olan geometrik bir eğridir. Gerçekten, bir helis, genel helisin özel bir halidir.

Eğriler teorisinde ise son zamanlarda en çok ilgi çeken eğriler helisler, slant helisler ve bağlantılı eğrilerdir [16]- [25]. Eğriliklerin aldığı değerlere göre bir eğri, geodezik, çember ve helis olarak adlandırılabilmektedir. (Doğru ve çember dejenere helis örnekleri olup eğri bir doğru ise $\kappa = 0$ ve eğri bir çember ise $\tau = 0$ dır).

Bir helis eğrisi, burulmasının eğriliğine oranının sabit olması ile yani $\frac{\tau}{\kappa} = c$ sabit ile karakterize edilir. Darboux helis sınıfının slant helis sınıfına denk geldiğini göstermişlerdir [3]. Özel bir durumda, eğer eğrilik fonksiyonları $\kappa^2 + \tau^2 =$ sabit ise, o zaman bu eğriler sürekli durgunluğun eğrisidir.

Bu çalışmada, E^4 Öklid uzayında (k, m)-tipi adı verilen yeni tip slant helisleri tanımladıktan sonra ve (1, k)-tipi (1 ≤ k ≤ 4) slant helisler olmadığı sonucuna varılmıştır.
Ayrıca, 4-boyutlu Öklid uzayında Darboux helisler üzerinde bir Darboux helis olması için regüler eğrinin karakterizasyonunu vermekteyiz. E^4 Öklid uzayında k_1, k_2 ve k_3 sıfır ve sabit olmayan eğrilik fonksiyonları ile verilen birim hızlı bir α eğrisinin darboux helis olması için karakterizasyon teoremi verilmiştir. Dahası, parametrik bir eğrinin birinci ve üçüncü eğrilikleri eşit ise, Darboux helis, genel helis ve $V_4 -$slant helis arasındaki bağıntılar elde edilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Diferansiyel geometri üzerinde durulan helislerin sınıflandırılmasında ve eğrilerin eğrilikleri bakımından farklı karakterizasyonların incelenmesinden dolayı, teorik çalışmayı gerektirmektedir. 4-boyutlu Öklid uzayında yapılacak olan hesaplamalarla ilgili helisler arasındaki bağıntılar kurularak, orijinal teoriler ortaya konulacaktır. Sonuç olarak, ortaya konulacak olan bu teorik kısım çeşitli örneklerle desteklenecektir. Diferansiyel geometrinin birçok kez ele alınan bu kavramlar ileriye dönük çalışmalarda literatüre yeni teorilerin eklenmesi açısından kayda değerdir.

Bu çalışmada, eğrilikleri bakımından eğrilerin farklı karakterizasyonları verilmiştir. Dahası, Darboux helislerinin genel helislere denk geldiğini kanıtlamaktayız. Ayrıca farklı tip slant helisler için bazı koşullar elde edilmiştir.

2.1. Temel Tanımlar

Bu bölümde, kullanılacak bazı tanımlar verilecektir.

2.1.1 Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1 A boş olmayan bir cümle ve bir K cismi üzerindeki vektör uzayı da V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan $f : A\times A \to V$ fonksiyonu varsa buradaki A ya V vektör uzayı üzerinde bir afin uzay adı verilir.

$\triangleright$ $\forall P,Q,R \in A$ için $f(P,Q)+f(Q,P)=f(P,R)$

$\triangleright$ $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in \mathrm{V}$ için $f(P,Q)=\alpha$

olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır [6].

Tanım 2.1.2 Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak,

$x=(x_1,x_2,x_3...,x_n)$ ve $y=(y_1,y_2,y_3,...,y_n)$ için,

$\langle , \rangle : \mathrm{V}\times\mathrm{V}\to E$ ve $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ dir.

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A Afin uzayı da yeni bir ad olarak Öklid uzayı adını alır [6].

Tanım 2.1.3 $K = E$ olmak üzere X bir lineer uzay olsun. $\langle .,. \rangle : X \times X \to K$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa, bu fonksiyona X 'de bir iç çarpım ve $(X, \langle .,. \rangle)$ ikilisine de bir iç çarpım uzayı denir.

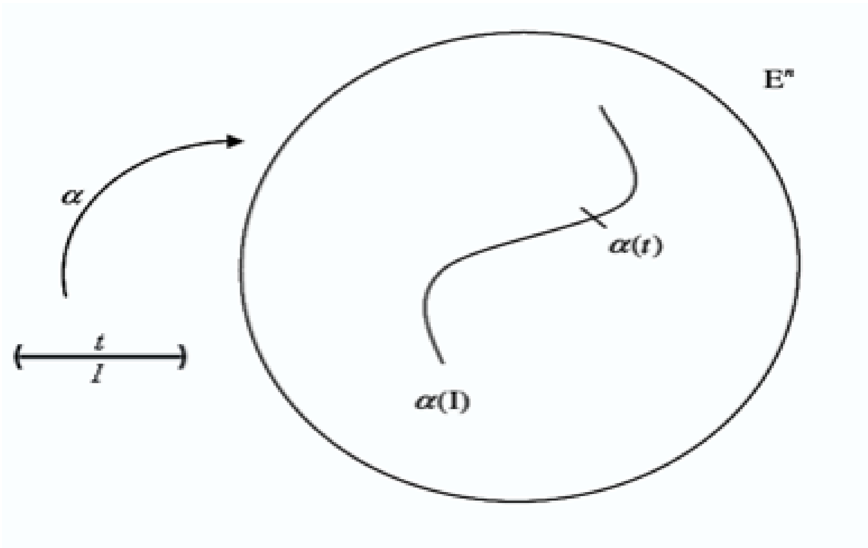
$\forall x, y, z \in X$ ve $\lambda \in K$ için $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ olduğundan,

$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

$\langle \lambda \cdot x, y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$,

$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ dir [26].

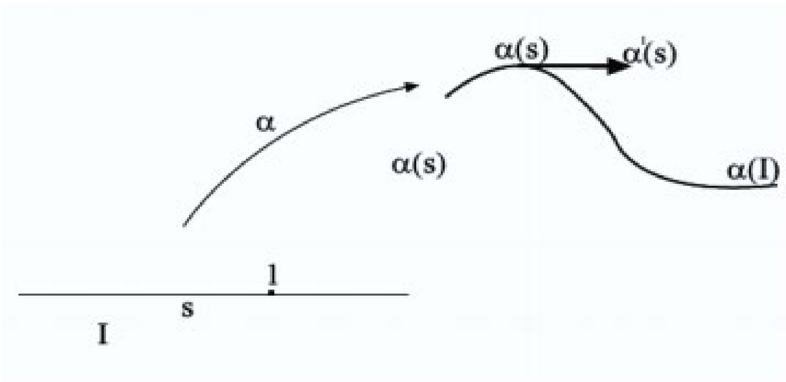
Tanım 2.1.4 $I \subseteq E$ bir açık aralık olmak üzere $\vec{\alpha} : I \to E^n$ şeklinde diferansiyellenebilir bir dönüşümüne E^n de bir eğri adı verilir.



Şekil 2.1 E^n eğri

$\vec{\alpha}(t)$ eğrisinin bileşenlerinin her mertebeden türevleri mevcut ise bu eğriye diferansiyellenebilir eğri denir. $\forall t \in I$ için $\vec{\alpha}(t) \neq 0$ oluyorsa $\vec{\alpha}(t)$ eğrisine regüler eğri denir [6].

Tanım 2.1.5 $\vec{\alpha}$ eğrisinin bir birim hızlı eğri olması için gerek ve yeterli şart $\|\vec{\alpha}\| = 1$ olmasıdır. E^n uzayında birim hızlı regüler bir $\vec{\alpha} : I \to E^n$ eğrisi için $\vec{T}(s) = \vec{\alpha}'(s)$ ise verilen $\vec{T}(s)$ vektörüne, $\vec{\alpha}'$ eğrisinin $\vec{\alpha}'(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü veya hız vektörü denir.



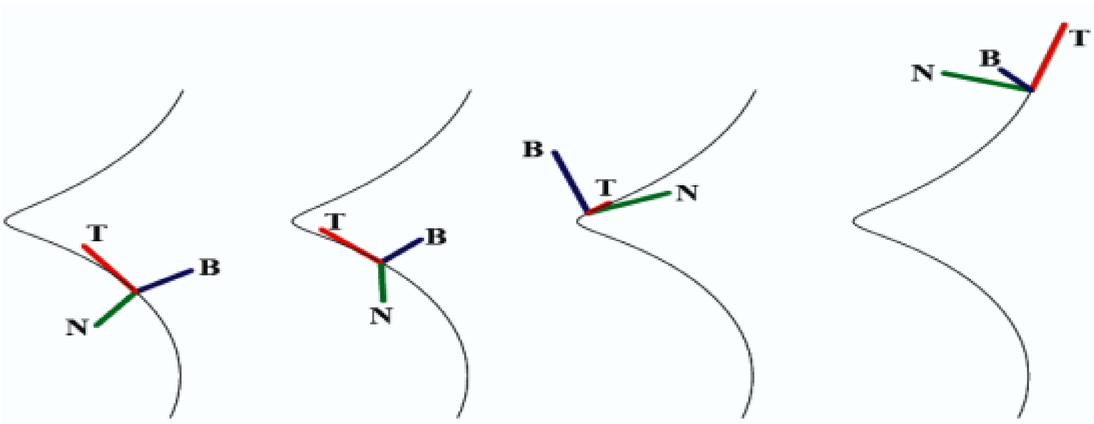
Şekil 2.2 E^n hız vektörü

Tanım 2.1.6 E^n uzayında birim hızlı regüler bir $\vec{\alpha} : I \to E^n$ eğrisi için,

$$\kappa_\alpha : I \to E,\ \kappa_\alpha(s) = \left\| \vec{T}'(s) \right\|$$

tanımlı κ_α fonksiyonuna, $\vec{\alpha}(s)$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa_\alpha(s)$ sayısına da eğrinin $\vec{\alpha}(s)$ noktasındaki eğriliği denir.

Tanım 2.1.7 E^n de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $S = \{\alpha'(t),\ \alpha''(t), ..., \alpha^r(t)\}$ lineer bağımsız sistemi göz önüne alınsın. Bu sisteme Gramm-Schmidth ortogonalleştirme ve ortonormalleştirme metodu uygulanırsa; elde edilen sistemine $\{V_1(t), V_2(t), ..., V_r(t)\}$ $r \le n$ Serret – Frenet r-ayaklısı veya r- ayaklı alanı, buradaki her bir $V_i(t)$, $1 \le i \le r$ vektörlerine de Frenet vektörleri adı verilir.



Şekil 2.3 E^n frenet vektörleri

Tanım 2.1.8 $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ eğrisinin, eğrilik ve burulması, sırasıyla, κ_α, τ_α olan ve türevlenebilen bir eğri olsun. Bu takdirde, $\vec{\alpha}$ eğrisinin bir genel helis olması için gerek ve yeter şart $\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = \text{sabit}$ olmasıdır. Ayrıca $\kappa_\alpha = \text{sabit} > 0$ ve $\tau_\alpha = \text{sabit} \neq 0$ ise eğriye dairesel helis denir. $\vec{\alpha} : I \to E^n$ eğrisinin tanjant doğruları sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa α ya bir silindirik helis (genel helis) denir.

Tanım 2.1.9 $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ bir birim hızlı eğri $\vec{\alpha} : I \to E^n$ ve $\|\vec{\alpha}'(s)\| = 1$ olsun. Eğer $\kappa_\alpha \neq 0$ olacak şekilde $\vec{\alpha}$ eğrinin asli normal doğruları sabit U doğrultusu ile sabit bir açı yapıyor ise yani; $\forall s \in I$ için $\langle N(s), U \rangle = \cos\varphi$ ise $\vec{\alpha}$ bir slant helistir. Başka bir deyişle, bir birim hızlı $\alpha : \mathrm{I} \to E^4$ eğrisinin, asli normal N vektörü, sabit bir U yönü ile sabit bir açı yaparsa slant helis olarak adlandırılır[1].

Tanım 2.1.10 $\alpha : I \subset E \to E^n$, E^n de sıfır olmayan $k_i\,(i = 1,2,3,...,n-1)$ eğrilikleriyle verilen birim hızlı bir eğri olsun. α 'nın harmonik eğrilikleri
$H_i : I \subset E \to E$, $(i = 0,1,2,...,n-2)$,

$$H_i = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ \dfrac{k_1}{k_2}, & i = 1 \\ \left\{H'_{i-1} + H_{i-2}k_i\right\}\dfrac{1}{k_{i+1}}, & i = 2,3,...,n-2. \end{cases} \tag{2.1}$$

ile verilir [3].

Tanım 2.1.11 $V_i\,(i = 1,2,3,...,n)$ i'inci Frenet vektör alanları olmak üzere, α birim hızlı eğri boyunca $\{V_1, V_2, V_3, ..., V_n\}$ hareket eden Frenet çatısı olsun. O halde $k_i\,(i = 1,2,3,...,n-1)$ eğrinin eğrilik fonksiyonlarını göstermek üzere Frenet formülleri

$$
\begin{cases}
V_1'(s) = k_1(s)V_2(s), \\
V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), \ i = 2,3,...,n-1 \\
V_n'(s) = -k_{n-1}(s)V_{n-1}(s),
\end{cases}
\tag{2.2}
$$

ile verilir [2].

Eğrinin k_i tüm eğrilikleri $I \subset E$ de hiçbir yerde sıfır olmaz ise, o halde eğri dejenere olmayan bir eğri olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.12 E^4 uzayında birim hızlı regüler bir $\vec{\alpha}: I \to E^4$ eğrisinin Frenet çatısı $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ ve eğrilik fonksiyonları, sırasıyla, k_1, k_2, k_3 ise,

$$
D = V_1 + \frac{k_1}{k_2}V_3 + \frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' V_4
$$

vektörüne α eğrisinin Darboux vektörü denir [3].

E^4 uzayında birim hızlı regüler bir eğri $\vec{\alpha}: I \to E^4$ olsun. α eğrisinin Frenet çatısı $\{V_1, V_2, V_3, ..., V_n\}$ ve $\{H_1, H_2, H_3, ..., H_{n-2}\}$ harmonik eğrilikleri olsun.
$D = V_1 + H_1V_3 + ... + H_{n-2}V_n$ vektörüne α eğrisinin genelleştirilmiş Darboux vektörü denir [3].

Tanım 2.1.13 $\alpha: I \subset E \to E^n$, E^n de birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Darboux vektörü D, sabit bir U yönü ile, sabit bir φ açı yaparsa, yani, U, E^n de birim vektör alanı olmak üzere eğri boyunca $\langle D, U \rangle = \text{sabit} \neq 0$ ise buna Darboux helis denir.

Bu bölümde, E^4 4-boyutlu Öklid uzayında Darboux helisleri, slant helislerin karekterizasyonunu ve (k,m)-tipi slant helisleri elde ediyoruz[3].

2.2. 4- Boyutlu Öklid Uzayında Darboux Helisler

Teorem 2.2.1 k_1, k_2, k_3 eğrilik fonksiyonları ve $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ Frenet vektörleri ile verilmiş ve E^4 4- boyutlu Öklid uzayında bir s yay uzunluklu parametrik eğri α olsun. O halde α, E^4 4- boyutlu

Öklid uzayında bir Darboux helisidir ancak ve ancak eğrilik fonksiyonları, λ_1, λ_2 sıfır olmayan sabitler olmak üzere aşağıdaki eşitliği sağlar [3]:

$$\frac{k_1}{k_2} = \lambda_1 \cos\left(\int k_3(s)\, ds \right) + \lambda_2 \sin\left(\int k_3(s)\, ds \right). \tag{2.1}$$

İspat: Farz edelim ki α , E^4 4- boyutlu Öklid uzayında bir Darboux helis olsun. O halde E^4 Öklid uzayında (c_1, c_2, c_3, c_4 ler sıfırdan farklı sabitler olmak üzere)

$U = c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 + c_4V_4$ sabit yönlü vektör ile sabit bir açı yapan α 'nın Darboux vektör tanımı gereğince,

$$D = V_1 + \frac{k_1}{k_2}V_3 + \frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' V_4 ,$$

şeklindedir. O halde,

$$\langle D, U \rangle = \text{sabit} \neq 0 \tag{2.2}$$

olur. Denklem (2.2)' nin s'ye göre türevi alınırsa,

$$\langle D', U \rangle = 0 \tag{2.3}$$

$$D' = V_1' + V_3' \frac{k_1}{k_2} + V_3 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' + V_4' \left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \right) + V_4 \left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \right)' ,$$

dır.

$$\begin{cases} V_1' = k_1V_2, \\ V_2' = -k_1V_1 + k_2V_3, \\ V_3' = -k_2V_2 + k_3V_4, \\ V_4' = -k_3V_3. \end{cases}$$

Frenet formülleri D' ifadesinde yazılırsa;

$$\left\langle V_1' + V_3' \frac{k_1}{k_2} + V_3 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' + V_4' \left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right) + V_4 \left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right)',\ c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 + c_4V_4 \right\rangle = 0\,,$$

$$\left\langle k_1V_2 + \left(-k_2V_2 + k_3V_4\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right) + V_3\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' + \left(-k_3V_3\right)\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right) + V_4\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right)',\ c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 + c_4V_4 \right\rangle = 0,$$

olup, gereken sadeleştirmeler yapıldıktan sonra,

$$\left\langle k_1V_2 + \frac{k_1k_3}{k_2}V_4 - k_1V_2 + V_3\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' - V_3\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' + V_4\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right)',\ c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 + c_4V_4 \right\rangle = 0\,,$$

$$\left\langle \frac{k_1k_3}{k_2}V_4 + V_4\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right)',\ c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 + c_4V_4 \right\rangle = 0\,,$$

$$\left\langle V_4\left(\frac{k_1k_3}{k_2} + \left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right)'\right),\ c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 + c_4V_4 \right\rangle = 0\,,$$

denklemi elde edilir. Böylece, $\langle V_4, V_1\rangle = 0$ ve $\langle V_4, V_4\rangle = 1$ olup; aşağıdaki denklem elde edilir.

$$c_4\left[\frac{k_1k_3}{k_2} + \left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right)'\right] = 0\,, \tag{2.4}$$

burada $c_4 \neq 0$ olup, aşağıdaki denklem bulunur.

$$\frac{k_1k_3}{k_2} + \left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right)' = 0\,, \tag{2.5}$$

(2.5) denkleminde değişken değişimi yapılırsa yani,

$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = y(s)$, $\frac{1}{k_3(s)} = p(s)$ ve $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{p(s)}$ alırsak,

$$\frac{1}{p(s)} y(s) + \left(p(s) \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1}{k_2} \right) \right)' = 0,$$

$$\frac{y}{p(s)} + \left(p(s) \frac{d}{dt} \frac{dt}{ds} (y(s)) \right)' = 0,$$

$$\frac{y}{p(s)} + \left(p(s) \frac{1}{p(s)} \frac{d}{dt} (y(s)) \right)' = 0,$$

$$\frac{y}{p(s)} + \left(\frac{dy}{dt} \right)' = 0,$$

$$\frac{y}{p(s)} + \frac{d}{ds} \left(\frac{dy}{dt} \right) = 0,$$

$$\frac{y}{p(s)} + \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = 0,$$

$$\frac{y}{p(s)} + \frac{1}{p(s)} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = 0,$$

$$\frac{y}{p(s)} + \frac{1}{p(s)} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = 0,$$

olur ve son denklemin her iki tarafını $p(s)$ ifadesi ile çarparsak;

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0, \tag{2.6}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. (2.6) denklemin çözümü yapılırsa; $r^2 + 1 = 0$ olur ve reel kök olmadığından kökler; $r_{1,2} = \pm i$ bulunur. Burdan ise $y = \lambda_1 \cos t + \lambda_2 \sin t$, çözümü elde edilir ve $\frac{dt}{ds} = k_3(s)$ ifadesinin her iki tarafının integralini alırsak,

$$t = \int k_3(s) ds$$

buluruz. t ve $\dfrac{k_1}{k_2}=y$ ifadesi y çözümünde yerine yazılırsa,

$$\frac{k_1}{k_2}=\lambda_1\cos\left(\int k_3(s)\,ds\right)+\lambda_2\sin\left(\int k_3(s)\,ds\right)$$

dır. Aksine, α 'nın eğrilik fonksiyonlarının (2.1) denklemini sağladığını varsayalım. O halde

$$D=V_1+\frac{k_1}{k_2}V_3+\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{'}V_4,$$

α 'nın Darboux vektörüdür. Bu Darboux vektörünün türevini alırsak,

$$D^{'}=\left[\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{'}\right)^{'}+\frac{k_1k_3}{k_2}\right]V_4 \tag{2.7}$$

elde edilir. Diğer yandan denklem (2.1) denklem (2.7)'de kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{'}\right)^{'}&=-\lambda_1k_3(s)\cos\left(\int k_3(s)\,ds\right)-\lambda_2k_3(s)\sin\left(\int k_3(s)\,ds\right)\\&=-k_3\frac{k_1}{k_2},\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, denklem (2.7)'den $D^{'}=0$ elde ediyoruz. Yani D Darboux vektörü sabit bir vektör olur. O halde, $U=\lambda D,\ \lambda\neq 0$ vektörünü tanımlarız. Bu takdirde U, E^4 4- boyutlu Öklid uzayında sıfırdan farklı ve sabit bir vektör olduğu açıktır; böylece $<D,U>=\lambda\ \|D\|^2=sabit\neq 0$ buluruz. O halde, tanım 2.1.13'e göre, α, E^4 Öklid uzayında bir Darboux helistir.

Teorem 2.2.2 k_1,k_2,k_3 eğrilik fonksiyonları ve $\{V_1,V_2,V_3,V_4\}$ Frenet vektörleri ile verilmiş E^4 4- boyutlu Öklid uzayında bir yay uzunluklu parametrik eğri α olsun. O halde α, E^4 4- boyutlu

Öklid uzayında bir genel helisidir ancak ve ancak eğrilik fonksiyonları, λ_1, λ_2 sıfır olmayan sabitler olmak üzere aşağıdaki eşitliği sağlar [3]:

$$\frac{k_1}{k_2} = \lambda_1 \cos\left(\int k_3(s)\,ds\right) + \lambda_2 \sin\left(\int k_3(s)\,ds\right). \tag{2.8}$$

İspat: Farz edelim ki k_1, k_2, k_3 eğrilik fonksiyonları ve $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ Frenet vektörleri ile verilmiş 4- boyutlu E^4 Öklid uzayında bir s yay uzunluklu fonksiyon ile parametrelenen genel helis α olsun. O halde, sabit yönlü bir $U = c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 + c_4V_4$ vektörü vardır, öyle ki;

$$\langle V_1, U \rangle = c_1 = \text{sabit} \neq 0\,. \tag{2.9}$$

(3.9) denkleminin türevini alırsak ve (2.2) denklemindeki Frenet formüllerini kullanarak $0 = \langle V_1', U \rangle \Rightarrow \langle k_1V_2, c_2V_2 \rangle = 0 \Rightarrow k_1c_2 = 0$ elde edilir. Burada $k_1 \neq 0$ olduğundan $c_2 = 0$ elde edilir. α, E^4 4- boyutlu Öklid uzayında bir genel helis ise tanım gereği $c_2 = \langle V_2, U \rangle = 0$ dir. Bu son eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\langle V_2', U \rangle = 0 \;\Rightarrow \langle -k_1V_1 + k_2V_3, c_1V_1 + c_3V_3 \rangle = 0$$

elde edilir. O halde

$$c_3 = \langle V_3, U \rangle = \frac{c_1k_1(s)}{k_2(s)},$$

bulunur. Benzer şekilde bu son eşitliğin her iki tarafının da türevi alınırsa,

$$c_3' = \langle V_3', U \rangle,$$

$$c_1' \frac{k_1(s)}{k_2(s)} + c_1\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)' = \langle -k_2V_2 + k_3V_4, c_2V_2 + c_4V_4 \rangle.$$

Buradan,

$$c_4 = \langle V_4, U \rangle = \frac{c_1}{k_3(s)} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right)' ,$$

elde edilir. Bazı hesaplamalardan sonra, U vektörünün bileşenlerini aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$\begin{aligned}
&\langle V_1, U \rangle = c_1 = \text{sabit} \neq 0, \\
&c_2 = \langle V_2, U \rangle = 0, \\
&c_3 = \langle V_3, U \rangle = \frac{c_1 k_1(s)}{k_2(s)}, \\
&c_4 = \langle V_4, U \rangle = \frac{c_1}{k_3(s)} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right)' .
\end{aligned}$$

dır. Böylece,

$$U = c_0 V_1 + \frac{c_0 k_1(s)}{k_2(s)} V_3 + \frac{c_0}{k_3(s)} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right)' V_4 \tag{2.10}$$

buluruz. Buradan (2.10) denkleminin s'ye göre türevi alınırsa ve Frenet denklemlerini kullanırsak;

$$\begin{aligned}
U' &= c_0 \left(k_1 V_2 + \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' V_3 + \frac{k_1}{k_2} \left(-k_2 V_2 + k_3 V_4 \right) + \left(\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right)' V_4 + \frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \left(-k_3 V_3 \right) \right) \\
&= c_0 \left(\left(\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right)' + \frac{k_3 k_1}{k_2} \right) V_4
\end{aligned} \tag{2.11}$$

şeklinde elde ederiz. U sabit bir yön olduğu için, $U' = 0$ alırız. Denklem (3.11)'den,

$$\left(\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right)' + \frac{k_3 k_1}{k_2} = 0$$

elde ederiz. Yukarıdaki teorem 2.1.1 in (2.5) denklemi gereğince,

$$\frac{k_1}{k_2}=c_1\cos\left(\int k_3(s)\,ds\right)+c_2\sin\left(\int k_3(s)\,ds\right)$$

buluruz. Tersine, varsayalım ki eğrinin eğrilik fonksiyonları (2.8) denklemini sağlasın.

$$U=c_0\left(V_1+\frac{k_1(s)}{k_2(s)}V_3+\frac{1}{k_3(s)}\left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)}\right)'V_4\right),\quad c_0\in E_0$$

ile verilen U vektörünü ele alalım. Önceki denklemi s'ye göre türevi alınarak ve (2.2) Frenet denklemleri ve (2.5) kullanılarak $U'=0$ olduğunu elde ederiz, o halde U sabit bir yöndür öyle ki $\langle V_1,U\rangle=c_1=\text{sabit}\neq 0$ buluruz. Genel helis tanımına göre, α 4- boyutlu E^4 Öklid uzayında bir genel helistir.

Teorem 2.2.3 k_1,k_2,k_3 eğrilik fonksiyonları ve $\{V_1,V_2,V_3,V_4\}$ Frenet vektörleri ile verilmiş E^4 4- boyutlu Öklid uzayında bir yay uzunluklu parametrik eğri α olsun. O halde α E^4 4- boyutlu Öklid uzayında bir V_4-slant helisdir ancak ve ancak

$$\left(\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)'+\frac{k_3k_1}{k_2}=0 \tag{2.12}$$

eşitliği sağlanır [3].

İspat: Farz edelim ki k_1,k_2,k_3 eğrilik fonksiyonları ve $\{V_1,V_2,V_3,V_4\}$ Frenet vektörleri ile verilmiş 4- boyutlu E^4 Öklid uzayında bir s yay uzunluklu fonksiyon ile parametrelenen V_4-slant helisi α olsun. O halde, E^4 Öklid uzayında sabit yönlü bir $U=c_1V_1+c_2V_2+c_3V_3+c_4V_4$ vektörü vardır, öyle ki,

$$\langle V_4,U\rangle=c_4=\text{sabit}\neq 0. \tag{2.13}$$

(2.13) denkleminin türevini alırsak ve (2.2) denklemindeki Frenet formüllerini kullanarak, bazı hesaplamalardan sonra, U vektörünü aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$U = c_4\left(-\frac{1}{k_1(s)}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)' V_1 + \frac{k_3(s)}{k_2(s)} V_2 + V_4\right), \quad c_4 \neq 0. \tag{2.14}$$

Buradan (2.14) denkleminin s'ye göre türevi alınırsa ve Frenet denklemlerini kullanırsak;

$$U' = -c_4\left(\left(\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)' + \frac{k_1 k_3}{k_2}\right), \quad c_4 \neq 0$$

olur. U sabit bir vektör ve $c_4 \neq 0$ sabit olduğundan α E^4 4- boyutlu Öklid uzayında bir V_4-slant helisidir.

Tersine, varsayalım ki eğrinin eğrilik fonksiyonları (2.12) denklemini sağlasın.

$$U = c_4\left(-\frac{1}{k_1(s)}\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)' V_1 + \frac{k_3(s)}{k_2(s)} V_2 + V_4\right), \quad c_4 \in E_0$$

ile verilen U vektörünü ele alalım. Önceki denklemi s'ye göre türevi alınarak ve (2.2) Frenet denklemleri ve (2.5) kullanılarak $U' = 0$ olduğunu elde ederiz, o halde U sabit bir yöndür öyle ki $\langle V_4, U\rangle = c_4 = \text{sabit} \neq 0$ buluruz. O halde, α 4- boyutlu E^4 Öklid uzayında bir V_4-slant helisidir.

Örnek 2.2.1 α, eğrisi $k_1(s) = c_1 s\ coss + c_2 s\ sins,\ k_2(s) = s,\ k_3(s) = 1$ eğrilikleri ile E^4 'te bir regüler eğri olsun. O halde α bir Darboux helisidir.

Çözüm: E^4 'te, k_1, k_2, k_3 eğrilikleri ile verilen regüler eğri α olsun, α nın Darboux helis olması için teorem 2.1.1 de

$$\frac{k_1}{k_2} = \lambda_1 \cos\left(\int k_3(s)\,ds\right) + \lambda_2 \sin\left(\int k_3(s)\,ds\right)$$

ifadesinde örnekte verilenler yerine yazılırsa,

$$\frac{c_1\, s\cos(s) + c_2\, s\sin(s)}{s} = \lambda_1 \cos\left(\int k_3(s)\,ds\right) + \lambda_2 \sin\left(\int k_3(s)\,ds\right)$$

$$c_1 \cos(s) + c_2 \sin(s) = \lambda_1 \cos\left(\int 1\,ds\right) + \lambda_2 \sin\left(\int 1\,ds\right)$$

$$c_1 \cos(s) + c_2 \sin(s) = \lambda_1 \cos(s) + \lambda_2 \sin(s)$$

$$c_1 = \lambda_1 \text{ ve } c_2 = \lambda_2$$

olur ki bu da α nın bir Darboux helis olduğunu gösterir.

Örnek 2.2.2 α , eğrisi

$k_1(s) = c_1 s^2\ coss + c_2 s^2\ sins,\ k_2(s) = s^2\ ,\ k_3(s) = 1$

eğrilikleri ile E^4 'te bir regüler eğri olsun. O halde α bir Darboux helisidir.

Sonuç 2.2.1 $\forall s \in I \subset R$ için $k_1(s) = k_3(s)$ durumunda, aşağıdakiler eşdeğerdir.

(1) α , E^4 'te bir Darboux helisidir.

(2) α , E^4 'te bir genel helistir.

(3) α , E^4 'te bir V_4−slant helistir.

Sonuç 2.2.2 Sıfırdan farklı sabit eğrilikler ile verilen Darboux helis yoktur.

2.3. 4- Boyutlu Öklid Uzayında Slant Helisler

E^3 Öklid uzayında bir helis, sabit bir yönde sabit bir açı yapan teğet çizgilerinden oluşan bir eğridir. Bir helis eğrisi, sırasıyla burulma ve eğriliği τ ve κ gösterilen eğri boyunca sabit $\frac{\tau}{\kappa}$ oranı tarafından karakterize edilir. Klasik diferansiyel geometrinin helisler, uzay eğrilerinden iyi bilinen eğrilerdir $[10]$ ve bu tür eğrilerle ilgili yapılan çalışmalar, bilim adamları tarafından çalışılmıştır$[20-25]$. Son zamanlarda, Izumiya ve Takeuchi [1] normal çizgilerin sabit bir yönde sabit bir açı oluşturduğunu söyleyerek slant helisler kavramını tanıtmışlardır.

Slant helis ancak ve ancak;

$$\frac{\kappa^2}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{\frac{3}{2}}}.\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$$

fonksiyonu sabit ise karakterize edilir.

E^4 Öklid uzayında, keyfi bir eğri $\alpha : \mathrm{I} \subset E \to E^4$ olsun. $\alpha : \mathrm{I} \subset E \to E^4$ birim hızlı bir eğri (veya s yay uzunluğu fonksiyonu ile parametrelenen), eğer $\left\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \right\rangle = 1$ ise, burada $\langle .,. \rangle$, E^4 Öklid uzayındaki standart skaler iç çarpım olup, her bir,

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4),\ Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in E^4$$

için,

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

ile verilir. $\{\mathrm{T}(s), \mathrm{N}(s), B_1(s), B_2(s)\}$, α boyunca hareket eden çatı olsun, burada T, N, B_1 ve B_2 sırasıyla tanjant, asli normal, birinci binormal ve ikincil binormal vektör alanlarını göstersin. Burada $\mathrm{T}(s)$, $\mathrm{N}(s)$, $B_1(s)$ ve $B_2(s)$ karşılıklı olarak ortogonal vektörler olup

$$\langle T, T \rangle = \langle N, N \rangle = \langle B_1, B_1 \rangle = \langle B_2, B_2 \rangle = 1$$

sağlanır. α eğrisi için $\{\mathrm{T}, \mathrm{N}, B_1, B_2\}$ çatısının Frenet denklemleri (TNBBF)

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 \\ 0 & 0 & -\kappa_3 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

ile verilir. Sırası ile $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$ ve $\kappa_3(s)$ fonksiyonlarına, α eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü eğrilikleri denir. Her hangi bir $s \in \mathrm{I}$ için $\kappa_3(s) = 0$ ise, o halde $B_2(s)$ sabit bir B vektörüdür ve α eğrisi E^3 Öklid 3-uzayı izometrik olan B vektörüne dik 3-boyutlu afin alt uzayında bulunur. Bu çalışmada her hangi bir $s \in \mathrm{I}$, $1 \le i \le 3$ için her üç eğriliğin, $\kappa_i \ne 0$ sağladığını var sayacağız.

Tanım 2.3.1 Bir birim hızlı $\alpha : \mathrm{I} \to E^4$ eğrisi, sıfır olmayan bir sabit U vektör alanı ve bir $X \in \{T, N, B_1, B_2\}$ vektör alanı için $s \to \langle X(s), U \rangle$, $s \in \mathrm{I}$ fonksiyonu sabit ise, genel bir helis olur. X vektör alanını seçmek için aşağıdaki durumlar mevcuttur:

1. X bir T birim teğet vektör alanı ise, α silindirik bir helis olarak adlandırılır. $\alpha(s)$ 'in silindirik bir helis olması ancak ve ancak

$$\frac{\kappa_1^2}{\kappa_2^2} + \left[\frac{1}{\kappa_3} \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right)' \right]^2$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır $[10,19]$.

2. X bir B_2 vektör alanı ise, o halde eğri B_2 slant eğri olarak adlandırılır. Dahası, α böyle bir eğri ise ancak ve ancak

$$\frac{\kappa_3^2}{\kappa_2^2} + \left[\frac{1}{\kappa_1} \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2} \right)' \right]^2$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır $[22]$. Bu bölümdeki slant helislerin karekterizasyonunu aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.3.1 $\alpha : \mathrm{I} \to E^4$, E^4 te bir birim hızlı eğri olsun. O halde,

$$\left(\int \kappa_1(s)\,ds\right)^2 + \left[\frac{1}{\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \kappa_1 ds\right)' + \frac{\kappa_2}{\kappa_3}\right]^2 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \kappa_1 ds\right)^2$$

fonksiyonu sabit ise α slant bir helistir. Dahası bu sabit $\tan^2\theta$ olup burda α yı belirleyen N vektörü, sabit bir U yönü ile sabit bir θ açı yapmıştır [4].

İspat: $\alpha \in E^4$ bir birim hızlı eğri olsun. α nın slant eğri olduğunu var sayalım. N vektörü, sabit bir U yönü ile sabit yaptığı açı θ olsun. $\langle U, U \rangle = 1$ olduğunu varsayalım. Diferansiyellenebilir fonksiyonlar α_i, $1 \le i \le 4$, ele alalım.

$$U = \alpha_1(s).T(s) + \alpha_2(s).N(s) + \alpha_3(s).B_1(s) + \alpha_4(s).B_2(s),\ s \in \mathrm{I} \tag{2.16}$$

yani;

$$\alpha_1 = \langle T, U \rangle,\ \alpha_2 = \langle N, U \rangle,\ \alpha_3 = \langle B_1, U \rangle,\ \alpha_4 = \langle B_2, U \rangle$$

olsun. U vektör alanı sabit olduğu için, (2.16) nın türevi (2.15) ile birlikte alınırsa aşağıdaki adi diferansiyel denklem sistemini verir.

$$\begin{aligned} &\alpha_1' - \kappa_1\alpha_1 &&= 0 \\ &\alpha_2' + \kappa_1\alpha_1 - \kappa_2\alpha_3 &&= 0 \\ &\alpha_3' + \kappa_2\alpha_2 - \kappa_3\alpha_4 &&= 0 \\ &\alpha_4' + \kappa_3\alpha_3 &&= 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

dır. Burda $\alpha_2(s) = \langle N(s), U \rangle$ fonksiyonu sabittir ve $\cos\theta$ ya eşit olur. O halde (2.17) denklem sistemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \alpha_1' - \kappa_1\alpha_2 \quad\quad &= 0 \\ \kappa_1\alpha_1 - \kappa_2\alpha_3 \quad &= 0 \\ \alpha_3' + \kappa_2\alpha_2 - \kappa_3\alpha_4 &= 0 \\ \alpha_4' + \kappa_3\alpha_3 \quad\quad &= 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

(2.18) denklem sisteminin ilk üç denklemi

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 \int \kappa_1 ds \\ \alpha_3 &= \alpha_2 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \\ \alpha_4 &= \alpha_2 \left[\frac{1}{\kappa_3} \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \right)' + \frac{\kappa_3}{\kappa_2} \right] \end{aligned} \tag{2.19}$$

elde edilir. Buradan da,

$$t(s) = \int^{s} \kappa_3(u)\, du, \quad \frac{dt}{ds} = \kappa_3(s),$$

şeklinde değişken değişimi yapılırsa, (2.18) denklem sisteminden aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\alpha_3'(t) = \alpha_4 - \alpha_2 \frac{\kappa_2}{\kappa_3}.$$

Sonuç olarak, α bir slant helis ise (2.18) denklem sisteminin son denklemi,

$$\alpha_4''(t) + \alpha_4(t) - \alpha_2 \frac{\kappa_2(t)}{\kappa_3(t)} = 0 \tag{2.20}$$

elde ederiz. Bu denklemin genel çözümü;

$$\alpha_4(t) = \alpha_2 \left[\left(A - \int \frac{\kappa_2(t)}{\kappa_3(t)} \sin t\, dt \right) \cos t + \left(B - \frac{\kappa_2(t)}{\kappa_3(t)} \cos t\, dt \right) \sin t \right], \tag{2.21}$$

dır. Burada A ve B keyfi sabitlerdir ve (2.21) denklemi ile verilir.

$$\alpha_4(s) = \alpha_2 \begin{bmatrix} \left(A - \int \left[\kappa_2(s)\sin\int\kappa_3(s)ds\right]ds\right)\cos\int\kappa_3(s)ds + \\ \left(B + \int \left[\kappa_2(s)\cos\int\kappa_3(s)ds\right]ds\right)\sin\int\kappa_3(s)ds \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

dır. Buradan da (2.18) denkleminden, α_3 fonksiyonu ile hesaplanır.

$$\alpha_3(s) = \alpha_2 \begin{bmatrix} \left(A - \int \left[\kappa_2(s)\sin\int\kappa_3(s)ds\right]ds\right)\sin\int\kappa_3(s)ds - \\ \left(B + \int \left[\kappa_2(s)\cos\int\kappa_3(s)ds\right]ds\right)\cos\int\kappa_3(s)ds \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

o halde (2.22), (2.23) ve (2.19) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1 ds\right)' + \frac{\kappa_2}{\kappa_3} &= \left(A - \int \left[\kappa_2(s)\sin\int\kappa_3(s)ds\right]ds\right)\cos\int\kappa_3(s)ds \\ &+ \left(B + \int \left[\kappa_2(s)\cos\int\kappa_3(s)ds\right]ds\right)\sin\int\kappa_3(s)ds \end{aligned} \tag{2.24}$$

dır. Buradanda,

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1 ds &= \left(A - \int \left[\kappa_2(s)\sin\int\kappa_3(s)ds\right]ds\right)\sin\int\kappa_3(s)ds - \\ &\left(B + \int \left[\kappa_2(s)\cos\int\kappa_3(s)ds\right]ds\right)\cos\int\kappa_3(s)ds \end{aligned} \tag{2.25}$$

dır. (2.25) koşulu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \kappa_1(s)\int\kappa_1(s)ds = &\left(A - \int \left[\kappa_2(s)\sin\int\kappa_3(s)ds\right]ds\right)\kappa_2(s)\sin\int\kappa_3(s)ds \\ &-\left(B + \int \left[\kappa_2(s)\cos\int\kappa_3(s)ds\right]ds\right)\kappa_2(s)\cos\int\kappa_3(s)ds. \end{aligned}$$

olup yukarıdaki denklemin integrali alınırsa,

$$\left(\int \kappa_1(s)\,ds\right)^2 = C - \left(A - \int\left[\kappa_2(s)\sin\int \kappa_3(s)\,ds\right]ds\right)^2$$
$$-\left(B + \int\left[\kappa_2(s)\cos\int \kappa_3(s)\,ds\right]ds\right)^2 \tag{2.26}$$

elde edilir. Burada C bir integral sabitidir. (2.24), (2.25) denklemlerinden

$$\left[\frac{1}{\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \kappa_1 ds\right)' + \frac{\kappa_2}{\kappa_3}\right]^2 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \kappa_1 ds\right)^2 = \left(A - \int\left[\kappa_2(s)\sin\int \kappa_3(s)\,ds\right]ds\right)^2$$
$$+\left(B + \int\left[\kappa_2(s)\cos\int \kappa_3(s)\,ds\right]ds\right)^2 \tag{2.27}$$

dır. Buradan da (2.25) ve (2.26) denklemlerinden,

$$\left(\int \kappa_1(s)\,ds\right)^2 + \left[\frac{1}{\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \kappa_1 ds\right)' + \frac{\kappa_2}{\kappa_3}\right]^2 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \kappa_1 ds\right)^2 = C \tag{2.28}$$

buluruz. Ayrıca bu C sabiti U bir birim vektör alanı olduğunu ve (2.16) denklemini kullanırsak, (2.28) ve (2.19) denklemlerinden aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$C = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2}{\alpha_2^2} = \frac{1-\alpha_2^2}{\alpha_2^2} = \tan^2\theta \text{ dır.}$$

Şimdi aksini ispatlayalım. Varsayalım ki (2.28) denklemi bir α eğrisi için sağlansın. $\theta \in E$, için $C = \tan^2\theta$ olsun. Birim U vektörünü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$U = \cos\theta\left[\int \kappa_1\, ds\, T + N\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \kappa_1\, ds\, B_1 + \left[\frac{1}{\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \kappa_1 ds\right)' + \frac{\kappa_2}{\kappa_3}\right]^2 B_2\right] \tag{2.29}$$

(2.28) denkleminden, U nun türevi yani $\frac{dU}{ds}=0$ verir. Bu da U nun sabit bir vektör olduğu anlamına gelir. Öte yandan, birim asli normal vektör alanı N ile U arasındaki iç çarpım $\langle N(s),U\rangle=\cos\theta$, böylece α slant eğridir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

2.4. Slant Helislerin Karekterizasyonu

Bu bölümde E^4 Öklid uzayında slant helislerin iki yeni karekterizasyonunu vereceğiz.

Teorem 2.4.1 $\alpha:\mathrm{I}\to E^4$, E^4 Öklid uzayında bir birim hızlı eğri olsun. O halde α bir slant helistir ancak ve ancak. [4]

$$\kappa_3 f(s)=\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1 ds\right)'+\kappa_2,\quad \frac{d}{ds}f(s)=-\frac{\kappa_3\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1 ds. \tag{2.30}$$

İspat: Şimdi α slant helis olduğunu varsayalım ve (2.28) denkleminin türevi,

$$\begin{aligned}&\left(\int\kappa_1(s)ds\right)\left(\int\kappa_1(s)ds\right)'+\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1 ds\right)\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1 ds\right)'\\&+\left(\frac{1}{\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1 ds\right)'+\frac{\kappa_2}{\kappa_3}\right)\left(\frac{1}{\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1 ds\right)'+\frac{\kappa_2}{\kappa_3}\right)'=0\end{aligned} \tag{2.31}$$

Denklemini verir. Bazı düzenlemelerden sonra, denklem (2.31) aşağıdaki formu alır.

$$\frac{\kappa_3\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1 ds+\left(\frac{1}{\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1 ds\right)'+\frac{\kappa_2}{\kappa_3}\right)'=0 \tag{2.32}$$

Eğer $f=f(s)$ şeklinde fonksiyonu;

$$\kappa_3 f(s)=\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1 ds\right)'+\kappa_2,$$

denklemi ile tanımlarsak o halde denklem (2.32) şöyle yazılır;

$$\frac{d}{ds} f(s) = -\frac{\kappa_3 \kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \, .$$

Tersine, eğer (2.30) denklemi sağlanırsa, bir birim sabit U vektörünü $U = \cos\theta \left[\int \kappa_1 \, ds \, T + N \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 \, ds \, B_1 + f(s) B_2 \right]$ ile tanımlarız. Bu bize $\langle N(s), U \rangle = \cos\theta$ sabit olduğunu verir yani, α bir slant helistir.

Şimdide bir slant helisin integral karakterizasyonunu verelim.

Teorem 2.4.2 $\alpha : \mathrm{I} \to E^4$, E^4 Öklid uzayında bir birim hızlı eğri olsun. O halde α bir slant helistir ancak ve ancak A ve B sabitleri için aşağıdaki koşul sağlanır [4].

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds = & \left(A - \int \left[\kappa_2(s) \sin \int \kappa_3(s) ds \right] ds \right) \sin \int \kappa_3(s) ds \\ & - \left(B + \int \left[\kappa_2(s) \cos \int \kappa_3(s) ds \right] ds \right) \cos \int \kappa_3(s) ds. \end{aligned} \tag{2.33}$$

İspat: Şimdi bir α slant helis olduğunu varsayalım ve teorem 2.2.1'i kullanarak $m(s)$ ve $n(s)$ yi;

$$\phi = \phi(s) = \int^{s} \kappa_3(u) du, \tag{2.34}$$

şeklinde olmak üzere,

$$\begin{aligned} m(s) &= f(s) \cos\phi + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \right) \sin\phi + \int [\kappa_2 \sin\phi] ds \\ n(s) &= f(s) \sin\phi - \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \right) \cos\phi - \int [\kappa_2 \cos\phi] ds \end{aligned} \tag{2.35}$$

şeklinde tanımlayalım. Denklem (2.35) in s’ye göre türevini alalım (2.30) ve (2.34)’ü dikkate alarak düzenlersek $\frac{dm}{ds}=0$ ve $\frac{dn}{ds}=0$ elde ederiz. Böylece, A ve B sabitleri için $m(s)=A$ ve $n(s)=B$ elde edilir. Bunları (2.35) denkleminde yerine yazarsak, $\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \kappa_1 ds$, için elde edilen denklemleri çözersek,

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \kappa_1 ds=\left(A-\int\left[\kappa_2(s)\sin\phi\right]ds\right)\sin\phi-\left(B+\int\left[\kappa_2(s)\cos\phi\right]ds\right)\cos\phi,$$

elde ederiz. Tersine, varsayalım ki (2.33) denklemi sağlansın teorem 2.2.1 uygulamak için,

$f=f(s)$ yi

$$f(s)=\left(A-\int\left[\kappa_2(s)\sin\phi\right]ds\right)\cos\phi+\left(B+\int\left[\kappa_2(s)\cos\phi\right]ds\right)\sin\phi, \tag{2.36}$$

$$\phi(s)=\int \kappa_3(u)\,du,$$

ile tanımlarız. (2.33) denkleminin türevi, $\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \kappa_1 ds\right)'=\kappa_3 f(s)-\kappa_2$ yi ve bu son denklem (2.30) denkleminin sol tarafını gösterir. Dahası, basit bir hesaplama $f'(s)=-\frac{\kappa_3\kappa_1}{\kappa_2}\int \kappa_1 ds$, olur ve böylece ispat tamamlanır.

2.5. (k,m)-Tipi Slant Helisler

Bu bölümde E^4 Öklid uzayındaki (k,m)-tipi slant helisler elde edilmiştir [25].

Tanım 2.5.1 $\{V_1,V_2,V_3,V_4\}$ Frenet çatısı ile verilen E_1^4 Öklid uzayında α regüler birim hızlı bir eğri olsun. α bir (k,m)-tipi slant helis ise $U\in E^4$ sıfırdan farklı sabit vektör alanı olmak üzere $1\le k\le 4$, $k\neq c$ için $\langle V_k,U\rangle=c$ (c sabit sayı) dır. $1\le i\le 3$, $k_i\neq 0$, $U\in E^4$ (k,m)-tipi slant helis üzerinde sabit vektördür. Diferansiyellenebilir s fonksiyonuna göre $u_i = u_i(s)$ için $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısına göre $U = u_1 T + u_2 N + u_3 B_1 + u_4 B_2$ yazılabilir.

Teorem 2.5.1 E^4 Öklid uzayında $(1,2)$-tip slant helis yoktur.

İspat: Kabul edelim ki α bir $(1,2)$-tip slant helis olsun. O halde $U \in E^4$ sıfırdan farklı sabit vektör alanı olmak üzere,

$$\langle T, U \rangle = c_1 = \text{sabit} \tag{2.23}$$

ve

$$\langle N, U \rangle = c_2 \tag{2.24}$$

sabittir. Buradan da

$$T' = k_1 N,$$

$$N' = -k_1 T + k_2 B_1,$$

$$B_1' = -k_2 N + k_3 B_2,$$

$$B_2' = -k_3 B_1,$$

dır. Yukarıdaki Frenet denklemleri kullanılarak, (2.23) ve (2.24) denklemlerinin türevi alınırsa $\langle T', U \rangle = 0$ ve $\langle N', U \rangle = 0$ elde edilir. Buradan $\langle T', U \rangle = 0$ ise, $\langle k_1 N, U \rangle = 0$,

$$k_1 \langle N, U \rangle = 0. \tag{2.25}$$

(2.25) denkleminde (2.24) yerine yazılırsa, $k_1 . c_2 = 0$ buluruz. c_2 bir sabit olmak üzere $k_1 = 0$ elde edilir. Bu bir çelişki olup $(1,2)$-tip slant helis yoktur.

Teorem 2.5.2 E^4 Öklid uzayında $(1,3)$-tip slant helis yoktur.

İspat: Kabul edelim ki α bir $(1,3)$-tip slant helis olsun. O halde $U \in E^4$ sıfırdan farklı sabit vektör alanı olmak üzere,

$$\langle T,U\rangle = c_1 \tag{2.26}$$

ve

$$\langle B_1,U\rangle = c_3 \tag{2.27}$$

sabittir. (2.26) ve (2.27) denklemlerinin türevi alınırsa $\langle T',U\rangle = 0$ ve $\langle B_1',U\rangle = 0$ olup Frenet denklemleri kullanılarak,

$$k_1\langle N,U\rangle = 0 \tag{2.28}$$

ve

$$-k_2\langle N,U\rangle + k_3\langle B_2,U\rangle = 0 \tag{2.29}$$

elde edilir.

Teorem 2.4.1 e göre (2.28) denkleminde ise $k_1 \neq 0$ olup bunun anlamı N ve U nun ortoganal olmasıdır. O halde $(1,3)$-tip slant helis yoktur.

Teorem 2.5.3 E^4 Öklid uzayında $(1,4)$-tip slant helis yoktur.

İspat: Kabul edelim ki α bir $(1,4)$-tip slant helis olsun. O halde $U \in E^4$ sıfırdan farklı sabit vektör alanı olmak üzere,

$$\langle T,U\rangle = c_1 \tag{2.30}$$

ve

$$\langle B_2,U\rangle = c_4 \tag{2.31}$$

sabittir. (2.30) ve (2.31) denklemlerinin türevi alınırsa, $\langle T',U\rangle = 0$ ve $\langle B_2',U\rangle = 0$ olup Frenet denklemleri kullanılarak,

$k_1 \langle N,U \rangle = 0$

ve

$$-k_3 \langle B_1,U \rangle = 0 \tag{2.32}$$

denklemleri elde edilir. Teorem 2.4.1 e göre (2.31) ve (2.32) denklemlerinde ise $k_1 \neq 0$ ve $k_3 \neq 0$ olup bunun anlamı N ve U nun ve B_1 ve U nun ortoganal olması demektir. O halde $(1,4)$-tip slant helis yoktur.

Sonuç 2.5.1 E^4 Öklid uzayında $(1,k)$-tipi slant helisler yoktur.

Teorem 2.5.4 Eğer α E^4 Öklid uzayında bir $(2,3)$-tip slant helis ise o halde

$$\langle T,U \rangle = \frac{k_2}{k_1} c_3 \ , \ \langle B_2,U \rangle = \frac{k_2}{k_3} c_2 ,$$

burada c_2 ve c_3 sabitlerdir.

İspat: Kabul edelim ki α bir $(2,3)$-tip slant helis olsun. O halde $U \in E^4$ sıfırdan farklı sabit vektör alanı olmak üzere

$$\langle N,U \rangle = c_2 \tag{2.33}$$

ve

$$\langle B_1,U \rangle = c_3 \tag{2.34}$$

denklemleri sabittir. (2.33) ve (2.34) denklemlerinin türevi alınırsa $\langle N',U \rangle = 0$ ve $\langle B_1',U \rangle = 0$ olup Frenet denklemleri kullanılarak,

$$-k_1 \langle T,U \rangle + k_2 \langle B_1,U \rangle = 0 \tag{2.35}$$

ve

$$-k_2 \langle N,U \rangle + k_3 \langle B_2,U \rangle = 0 \tag{2.36}$$

elde edilir. (2.35) denkleminde (2.34) denklemi yerine yazılarak, $\langle T,U\rangle = \frac{k_2}{k_1}c_3$ ve (2.36) denkleminde (2.33) denklemi yerine yazılarak $\langle B_2,U\rangle = \frac{k_2}{k_3}c_2$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.5.5 E^4 Öklid uzayında $(2,4)$-tip slant helis yoktur.

İspat: Kabul edelim ki α, E^4 Öklid uzayında bir $(2,4)$-tip slant helis olsun. O halde $U \in E^4$ sıfırdan farklı sabit vektör alanı olmak üzere,

$$\langle N,U\rangle = c_2 \tag{2.37}$$

ve

$$\langle B_2,U\rangle = c_4 \tag{2.38}$$

denklemleri sabittir. (2.37) ve (2.38) denklemlerinin türevi alınırsa, $\langle N',U\rangle = 0$ ve $\langle B_2',U\rangle = 0$ olup Frenet denklemleri kullanılarak,

$$-k_1\langle T,U\rangle + k_2\langle B_1,U\rangle = 0 \tag{2.39}$$

ve

$$-k_3\langle B_1,U\rangle = 0 \tag{2.40}$$

elde edilir. (2.40) denkleminde $k_3 \neq 0$ olup bunun anlamı B_1 ve U nun ortogonal olması demektir. O halde $(2,4)$-tip slant helis yoktur.

Teorem 2.5.6 E^4 Öklid uzayında $(3,4)$-tip slant helis yoktur.

İspat: Kabul edelim ki α, E^4 Öklid uzayında bir $(3,4)$-tip slant helis olsun. O halde $U \in E^4$ sıfırdan farklı sabit vektör alanı olmak üzere,

$$\langle B_1, U \rangle = c_3 \tag{2.41}$$

ve

$$\langle B_2, U \rangle = c_4 \tag{2.42}$$

sabittir. (2.41) ve (2.42) denklemlerinin türevi alınırsa, $\langle B_1', U \rangle = 0$ ve $\langle B_2{}', U \rangle = 0$ olup Frenet denklemleri kullanılarak,

$$-k_2 \langle N, U \rangle + k_3 \langle B_2, U \rangle = 0 \tag{2.43}$$

ve

$$-k_3 \langle B_1, U \rangle = 0 \tag{2.44}$$

elde edilir. (2.44) denkleminde $k_3 \neq 0$ olup bunun anlamı B_1 ve U nun ortogonal olması demektir. O halde $(3,4)$-tip slant helis yoktur.

3. BULGULAR

Bu bölümde, E^4 4- boyutlu Öklid uzayında yeni bir Frenet çatı ve yeni eğrilikler elde ediyoruz. E^4 te aşağıdaki gibi verilen $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısını göz önüne alalım. Bu vektör alanının türev denklemin matris şeklindeki yazılımı aşağıdaki gibi yazalım;

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Burada $\{T, N, B_1, B_2\}$ ortonormal çatı olduğundan,

$\langle T, T\rangle = \langle N, N\rangle = \langle B_1, B_1\rangle = \langle B_2, B_3\rangle = 1$

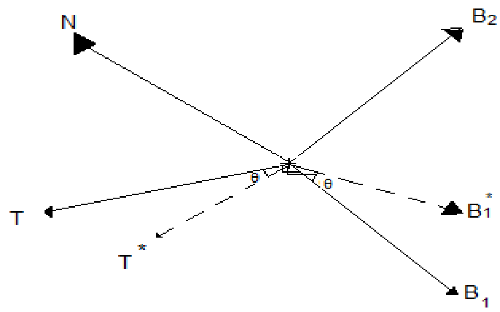
ve

$\langle T, N\rangle = \langle T, B_1\rangle = \langle T, B_2\rangle = \langle N, B_1\rangle = \langle N, B_2\rangle = \langle B_1, B_2\rangle = 0$ dır.

Şimdi bu çatıyı E^4 de keyfi döndürelim. Yani $\{T, N, B_1, B_2\}$ yi döndürdüğümüzde $\{T^*, N^*, B_1^*, B_2^*\}$ vektörlerini elde etmiş olalım. $\{T, N, B_1, B_2\}$ vektörlerini sırasıyla V_1, V_2, V_3, V_4 diye sıralarsak $\{T^*, N^*, B_1^*, B_2^*\}$ da $\{V_1^*, V_2^*, V_3^*, V_4^*\}$ olur. Şimdi V_i vektörü ile V_j^* vektörü arasındaki açıya θ_{ij} dersek dönme dönüşümü,

$$\begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \\ V_3^* \\ V_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{11} & \cos\theta_{21} & \cos\theta_{31} & \cos\theta_{41} \\ \cos\theta_{12} & \cos\theta_{22} & \cos\theta_{32} & \cos\theta_{42} \\ \cos\theta_{13} & \cos\theta_{23} & \cos\theta_{33} & \cos\theta_{43} \\ \cos\theta_{14} & \cos\theta_{24} & \cos\theta_{34} & \cos\theta_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

olur. Burada N ve B_2 vektörlerini sabit bırakırsak dönmeyi sadece $\{T, B_1\}$ düzleminde T ile B_1 vektörlerini bir θ kadar döndürürsek,



Şekil 3.1

şekli elde edilir. Bu şekilden de,

$$\theta_{11}=\theta \quad \theta_{21}=90^\circ \quad \theta_{31}=\left(90^\circ-\theta\right) \quad \theta_{41}=90^\circ$$

$$\theta_{12}=90^\circ \quad \theta_{22}=0^\circ \quad \theta_{32}=90^\circ \quad \theta_{42}=90^\circ$$

$$\theta_{13}=\left(90^\circ+\theta\right) \quad \theta_{23}=90^\circ \quad \theta_{33}=\theta \quad \theta_{43}=90^\circ$$

$$\theta_{14}=90^\circ \quad \theta_{24}=90^\circ \quad \theta_{34}=90^\circ \quad \theta_{44}=0^\circ$$

ifadeleri yazılabilir. O halde $\{T^*,N^*,B_1^*,B_2^*\}$ alanını $\{\overline{T},\overline{N},\overline{B}_1,\overline{B}_2\}$ olarak yeniden adlandırırsak,

$$\begin{aligned}
\overline{T}(s)&=T\cos\theta(s)+B_1\sin\theta(s)\\
\overline{N}(s)&=N(s)\\
\overline{B}_1(s)&=-\overline{T}\sin\theta(s)+B_1\cos\theta(s)\\
\overline{B}_2(s)&=B_2(s)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

çatısı elde edilir. Ya da bu çatıyı matrisel formda,

$$\begin{bmatrix}\overline{T}\\ \overline{N}\\ \overline{B}_1\\ \overline{B}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta(s) & 0 & \sin\theta(s) & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\theta(s) & 0 & \cos\theta(s) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T\\ N\\ B_1\\ B_2\end{bmatrix},$$

şeklinde yazılır. Burada $A=\begin{bmatrix}\cos\theta(s) & 0 & \sin\theta(s) & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\theta(s) & 0 & \cos\theta(s) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ matrisi ile gösterirsek, A matrisi ortogonal bir matris olduğunda tersi vardır ve tersinden, aşağıdaki matris

$$\begin{bmatrix}T\\ N\\ B_1\\ B_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta(s) & 0 & -\sin\theta(s) & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\theta(s) & 0 & \cos\theta(s) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{T}\\ \overline{N}\\ \overline{B}_1\\ \overline{B}_2\end{bmatrix},$$

elde edilir veya aşağıdaki biçimde

$$\left.\begin{aligned}&\overline{T}(s)=T\cos\theta(s)+B_1\sin\theta(s)\\ &\overline{N}(s)=N(s)\\ &\overline{B}_1(s)=-\overline{T}\sin\theta(s)+B_1\cos\theta(s)\\ &\overline{B}_2(s)=B_2(s)\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

yazılabilir. Şimdi (3.2) denklemlerinin $s-$ye göre türevi alınıp, $T^{'},N^{'},B_1^{'},B_2^{'}$ yerine yazılırsa (3.1) denklemi yazılıp burada T,N,B_1,B_2 yerine de (3.3) sonuçları yazılırsa;

$$\begin{aligned}\overline{T}^{'} &=T^{'}\cos\theta-T\sin\theta.\theta^{'}+B_1^{'}.\sin\theta+B_1\cos\theta.\theta^{'}\\ &=k_1N\cos\theta-T\sin\theta.\theta^{'}+\left(-k_2N+k_3B_2\right)\sin\theta+B_1\cos\theta.\theta^{'}\\ &=k_1\overline{N}\cos\theta-\left[\overline{T}\cos\theta-T\sin\theta\overline{B}_1\right]\sin\theta+\left[\overline{T}\sin\theta+\overline{B}_1\cos\theta\right].\cos\theta.\theta^{'}\\ &=\left(\cos\theta\sin\theta.\theta^{'}+\sin\theta\cos\theta.\theta^{'}\right)\overline{T}+\left(k_1\cos\theta-k_2\sin\theta\right)\overline{N}+\left(\sin^2\theta.\theta^{'}+\cos^2\theta.\theta^{'}\right)\overline{B}_1+k_3\sin\theta\overline{B}_2\end{aligned}$$

$$\overline{T}^{'}=\left(k_1\cos\theta(s)-k_2\sin\theta(s)\right)\overline{N}+\theta^{'}(s)\overline{B}_1+k_3\sin\theta(s)\overline{B}_2 \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\overline{N}^{'} &=N^{'}=-k_1T+k_2B_1\\ &=-k_1\left[\overline{T}\cos\theta-\overline{B}_1\sin\theta\right]+k_2\left[\overline{T}\sin\theta+\overline{B}_1\cos\theta\right]\end{aligned}$$

$$\overline{N}^{'}=\left(k_2\sin\theta(s)-k_1\cos\theta(s)\right)\overline{T}+\left(k_2\cos\theta(s)+k_1\sin\theta(s)\right)\overline{B}_1 \tag{3.5}$$

$$\overline{B}_1^{'} = -T^{'}\sin\theta - T\cos\theta.\theta^{'} + B_1^{'}\cos\theta - B_1\sin\theta.\theta^{'}$$
$$= \left(-k_1 N\right)\sin\theta - T\cos\theta.\theta^{'} + \left(-k_2 N + k_3 B_2\right)\cos\theta - \overline{B}_1\sin\theta.\theta^{'}$$
$$= \cos\theta.\theta^{'} T + \left(-k_1\sin\theta - k_2\cos\theta\right)N - \sin\theta.\theta^{'} B_1 + k_3 B_2\cos\theta$$
$$= -\cos\theta.\theta^{'}\left[\overline{T}\cos\theta - \overline{B}_1\sin\theta\right] + \left[-k_1\sin\theta - k_2\cos\theta\right]\overline{N} - \theta^{'}\sin\theta\left(\overline{T}\sin\theta + \overline{B}_1\cos\theta\right) + k_3\overline{B}_2\cos\theta$$

$$\overline{B}_1^{'} = -\theta^{'}\overline{T} - \left(k_1\sin\theta + k_2\cos\theta\right)\overline{N} + k_3\cos\theta\overline{B}_2 \tag{3.6}$$

$$\overline{B}_2^{'} = B_2^{'} = -k_3 B_1$$
$$= -k_3\left[\overline{T}\sin\theta + \overline{B}_1\cos\theta\right]$$

$$\overline{B}_2^{'} = -k_3\overline{T}\sin\theta - k_3\overline{B}_1\cos\theta \tag{3.7}$$

elde edilir. Buna göre, yeni çatı $\left\{\overline{T}, \overline{N}, \overline{B}_1, \overline{B}_2\right\}$ olup bu yeni çatımıza göre Frenet denklemleri aşağıdaki matrisel formda yazabiliriz:

$$\begin{bmatrix} \overline{T} \\ \overline{N} \\ \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{bmatrix}^{'} = \begin{bmatrix} 0 & k_1\cos\theta - k_2\sin\theta & \theta^{'} & k_3\sin\theta \\ k_2\sin\theta - k_1\cos\theta & 0 & k_2\cos\theta + k_1\sin\theta & 0 \\ -\theta^{'} & -k_2\cos\theta - k_1\sin\theta & 0 & k_3\cos\theta \\ -k_3\sin\theta & 0 & -k_3\cos\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{T} \\ \overline{N} \\ \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{bmatrix}.$$

Yeni çatımızın eğrilikleri $\left\{\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3\right\}$ olsun. O halde bu eğrilikler

$$\left.\begin{aligned} \overline{k}_1 &= k_1\cos\theta - k_2\sin\theta \\ \overline{k}_2 &= k_2\cos\theta + k_1\sin\theta \\ \overline{k}_3 &= k_3\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

$$\theta = \vartheta_0 = sbt\,,\ \theta^{'} = 0$$

şeklinde elde ederiz. Buna göre türev denklemi;

$$\begin{bmatrix} \overline{T} \\ \overline{N} \\ \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \overline{k}_1 & \theta' & tg\theta\overline{k}_3 \\ -\overline{k}_1 & 0 & \overline{k}_2 & 0 \\ 0 & -\overline{k}_2 & 0 & \overline{k}_3 \\ -tg\theta\overline{k}_3 & 0 & -\overline{k}_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{T} \\ \overline{N} \\ \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Bu yeni çatıya 4-tip paralel transport Frenet çatı (T4PTFF) diye tanımlayalım ve burada bu yeni çatının eğrilikleri,

$$\left.\begin{array}{l} \overline{k}_1 = k_1\cos\theta - k_2\sin\theta \\ \overline{k}_2 = k_2\cos\theta + k_1\sin\theta \\ \overline{k}_3 = k_3\cos\theta \end{array}\right\} \tag{3.9}$$

$\theta = \varphi_0 = sbt$ ve $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ şeklindedir.

3.1. Öklid Uzayında Yeni Bir Frenet Çatı ve Bu Çatıya Göre (k,m)-Tipi Slant Helisler

Bu bölümde, E^4 4- boyutlu Öklid uzayında 4-tip paralel transport Frenet çatısına (T4PTFF) göre slant helislerin karakterizasyonunu ve yeni (k,m)-tip slant helisleri elde ediyoruz.

$$\begin{bmatrix} \overline{T} \\ \overline{N} \\ \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \overline{k}_1 & 0 & \tan\theta\overline{k}_3 \\ -\overline{k}_1 & 0 & \overline{k}_2 & 0 \\ 0 & -\overline{k}_2 & 0 & \overline{k}_3 \\ -\tan\theta\overline{k}_3 & 0 & -\overline{k}_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{T} \\ \overline{N} \\ \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{bmatrix}$$

ve

$$\left.\begin{array}{l} \overline{k}_1 = k_1\cos\theta - k_2\sin\theta \\ \overline{k}_2 = k_2\cos\theta + k_1\sin\theta \\ \overline{k}_3 = k_3\cos\theta \end{array}\right\} \tag{3.10}$$

$\theta = \varphi_0 = sbt$ ve $\theta' = 0$ ve $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dir.

O halde $\{\overline{T},\overline{N},\overline{B}_1,\overline{B}_2\}$ T4PTFF ile verilen E_1^4 Öklid uzayında α regüler birim hızlı bir eğri olsun. α bir $(k,m)-$tipi slant helis ise $U\in E^4$ sıfırdan farklı sabit vektör alanı olmak üzere $\langle\overline{T},U\rangle$, $\langle\overline{N},U\rangle$, $\langle\overline{B}_1,U\rangle$ ve $\langle\overline{B}_2,U\rangle$ iç çarpımlar sabit bir c sayısına eşittir. $U\in E^4$ $(k,m)-$tipi slant helis üzerinde sabit vektör olmak üzere diferansiyellenebilir s fonksiyonuna göre, $U_i=U_i(s)$ için $\{\overline{T},\overline{N},\overline{B}_1,\overline{B}_2\}$ T4PTFF göre, $U=u_1\overline{T}+u_2\overline{N}+u_3\overline{B}_1+u_3\overline{B}_2$ yazılabilir.

Teorem 3.1.1 Eğer α bir E^4 Öklid uzayında $(1,2)-$tip slant helis ise, o halde;

$$\langle\overline{B}_1,U\rangle=\frac{\overline{k}_1}{\overline{k}_2}c_1$$

ve

$$\langle\overline{B}_2,U\rangle=\frac{-\overline{k}_1}{\tan\theta\,\overline{k}_3}c_2$$

burada c_1 ve c_2 sabitlerdir.

İspat: Kabul edelim ki α bir $(1,2)-$tip slant helis olsun. O halde $U\in E^4$ sıfırdan farklı sabit vektör alanı olmak üzere

$$\langle\overline{T},U\rangle=c_1 \tag{3.11}$$

$$\langle\overline{N},U\rangle=c_2 \tag{3.12}$$

sabitlerdir. Yukarıdaki paralel transport çatıyı göre düzenleyip (3.11) ve (3.12) denklemlerinin türevi alınırsa,

$$\langle\overline{T}',U\rangle=0 \text{ ve } \langle\overline{N}',U\rangle=0$$

elde edilir. Buradan $\langle\overline{N}',U\rangle=0$ denkleminde paralel transport Frenet çatısı yerine yazılırsa;

$$-\bar{k}_1\left\langle \bar{T},U\right\rangle+\bar{k}_2\left\langle \bar{B}_1,U\right\rangle=0 \tag{3.13}$$

denklemi elde edilir. Buradan, (3.7) denkleminde (3.5) denklemini kullanırsak aşağıdaki,

$$\left\langle \bar{B}_1,U\right\rangle=\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}c_1$$

denklemini buluruz. Daha sonra $\left\langle \bar{T}',U\right\rangle=0$ denkleminde paralel transport Frenet çatısı yerine yazılırsa;

$$\left\langle \bar{k}_1\bar{N}+\tan\theta\bar{k}_3\,\bar{B}_2,U\right\rangle=0\,, \tag{3.14}$$

$$\bar{k}_1\left\langle \bar{N},U\right\rangle+\tan\theta\bar{k}_3\left\langle \bar{B}_2,U\right\rangle=0 \tag{3.15}$$

elde edilir. Buradan (3.14) denkleminde (3.15) yerine yazılırsa,

$$\bar{k}_1.c_2+\tan\theta\bar{k}_3\left\langle \bar{B}_2,U\right\rangle=0\,.$$

Bu son denklem yeniden düzenlenirse

$$\left\langle \bar{B}_2,U\right\rangle=\frac{-\bar{k}}{\tan\theta\bar{k}_3}.c_2$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur. Ayrıca $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ olmak üzere

$$\left\langle \bar{B}_2,U\right\rangle=-\frac{k_1\cos\theta+k_2\sin\theta}{\sin\theta k_3}c_2$$

ise

$\left\langle \bar{B}_2,U\right\rangle=\left(-\frac{k_1}{k_3}\cot\theta+\frac{k_2}{k_3}\right)c_2$ şeklindedir.

Teorem 3.1.2 E^4 Öklid uzayın da bir $(1,3)-$tip slant helis yoktur.

İspat: Kabul edelim ki α bir $(1,3)-$tip slant helis olsun. O halde $U \in E^4$ sıfırdan farklı sabit vektör alanı olmak üzere;

$$\langle \overline{T}, U \rangle = c_1 \tag{3.16}$$

ve

$$\langle \overline{B}_1, U \rangle = c_3 \tag{3.17}$$

olduğundan sabitlerdir. (3.16) ve (3.17) denklemlerinin türevi alınırsa;

$$\langle \overline{T}', U \rangle = 0 \tag{3.18}$$

ve

$$\langle \overline{B}_1, U \rangle = 0 \tag{3.19}$$

olup bu denklemlerde T4PTFF'yi kullanırsak;

$$\langle \overline{k}_1 \overline{N} + \tan\theta \overline{k}_3 \overline{B}_2, U \rangle = 0 \tag{3.20}$$

ve

$$\langle -\overline{k}_2 \overline{N} + \overline{k}_3 \overline{B}_2, U \rangle = 0 \tag{3.21}$$

elde edilir. (3.20) ve (3.21) denklemlerini düzenlersek;

$$\overline{k}_1 \langle \overline{N}, U \rangle + \tan\theta \overline{k}_3 \langle \overline{B}_2, U \rangle = 0 \tag{3.22}$$

ve

$$-\overline{k}_2 \langle \overline{N}, U \rangle + \overline{k}_3 \langle \overline{B}_2, U \rangle = 0 \tag{3.23}$$

dır. (3.22) denklemi (3.23) denkleminde yerine yazılırsa,

$$-\overline{k}_2\left(-\tan\theta\frac{\overline{k}_3}{\overline{k}_1}.\left\langle \overline{B}_2,U\right\rangle\right)+\overline{k}_3\left\langle \overline{B}_2,U\right\rangle=0 \tag{3.24}$$

dır. Buradan $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ olmak üzere

$$\left(\tan\theta\frac{\overline{k}_2.\overline{k}_3}{\overline{k}_1}+\overline{k}_3\right)\left\langle \overline{B}_2,U\right\rangle=0 \tag{3.25}$$

elde edilir. $\overline{k}_1$, $\overline{k}_2$ ve $\overline{k}_3$ eğrilikleri sıfırdan farklı olup $\left\langle \overline{B}_2,U\right\rangle=0$ elde edilir ki bunun anlamı $\overline{B}_2$ ve U nun ortogonal olması demektir. O halde $(1,3)-$tip slant helis yoktur.

Teorem 3.1.3 α, E^4 Öklid uzayın da bir $(1,4)-$tip slant helis ise o halde;

$$\left\langle \overline{N},U\right\rangle=-\tan\theta\frac{\overline{k}_3}{\overline{k}_1}c_4 \text{ ve } \left\langle \overline{B}_1,U\right\rangle=-\tan\theta\, c_1,$$

burada c_1 ve c_4 sabitlerdir.

İspat: Kabul edelim ki α bir $(1,4)-$tip slant helis olsun. O halde $U\in E^4$ sıfırdan farklı sabit vektör alanı olmak üzere;

$$\left\langle \overline{T},U\right\rangle=c_1 \tag{3.26}$$

ve

$$\left\langle \overline{B}_1,U\right\rangle=c_4 \tag{3.27}$$

denklemleri sabittir. O halde (3.26) ve (3.27) denklemlerinin türevi alınırsa ve T4PTFF denklemlerini kullanırsak;

$$\left\langle \overline{k}_1\overline{N}+\tan\theta\overline{k}_3\,\overline{B}_2,U\right\rangle=0 \tag{3.28}$$

ve

$$\left\langle -\tan\theta\overline{k}_3\overline{T}-\overline{k}_3\overline{B}_1,U\right\rangle=0 \tag{3.29}$$

denklemleri elde edilir. (3.28) denkleminde (3.29) yerine yazılırsa;

$\left\langle \overline{N},U\right\rangle=\dfrac{\tan\theta\overline{k}_3}{-\overline{k}_1}c_4$ denklemi elde edilir. Buradan da (3.29) denklemi (3.26) ifadesi yerine yazılırsa;

$$\left\langle \overline{B}_1,U\right\rangle=-\tan\theta\, c_1$$

denklemi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.4 α , E^4 Öklid uzayın da bir $(2,3)-$tip slant helis ise;

$$\left\langle \overline{T},U\right\rangle=\frac{\overline{k}_2}{\overline{k}_1}c_3 \quad \text{ve} \quad \left\langle \overline{B}_2,U\right\rangle=\frac{\overline{k}_2}{\overline{k}_3}c_2$$

dır. Burada c_2 ve c_3 sabitlerdir.

İspat: Kabul edelim ki α bir $(2,3)-$tip slant helis olsun. O halde $U\in E^4$ sıfırdan farklı sabit vektör alanı olmak üzere;

$$\left\langle \overline{N},U\right\rangle=c_2 \tag{3.30}$$

ve

$$\left\langle \overline{B}_1,U\right\rangle=c_3 \tag{3.31}$$

denklemleri sabit olup (3.30) ve (3.31) denklemlerinin türevi alınırsa;

$$\left\langle \overline{N}',U\right\rangle=0 \quad \text{ve} \quad \left\langle \overline{B}_1',U\right\rangle=0$$

olup burada T4PTFF denklemleri kullanılırsa;

$$\left\langle -\overline{k}_1\overline{T}+\overline{k}_2\,\overline{B}_1,U\right\rangle =0 \tag{3.32}$$

ve

$$\left\langle -\overline{k}_2\overline{N}+\overline{k}_3\,\overline{B}_2,U\right\rangle =0 \tag{3.33}$$

elde edilir. Buradan da (3.32) ve (3.33) denklemlerinde (3.31) ve (3.30) denklemleri yerine yazılırsa;

$$\left\langle \overline{T},U\right\rangle =\frac{\overline{k}_2}{\overline{k}_1}c_3 \tag{3.34}$$

ve

$$\left\langle \overline{B}_2,U\right\rangle =\frac{\overline{k}_2}{\overline{k}_3}c_2 \tag{3.35}$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.5 E^4 Öklid uzayın da bir $(2,4)-$tip slant helis yoktur.

İspat: Kabul edelim ki α , E^4 Öklid uzayında bir $(2,4)-$tip slant helis olsun. O halde $U\in E^4$ sıfırdan farklı sabit vektör alanı olmak üzere;

$$\left\langle \overline{N},U\right\rangle =c_2 \tag{3.36}$$

ve

$$\left\langle \overline{B}_2,U\right\rangle =c_4 \tag{3.37}$$

sabitlerdir. (3.36) ve (3.37) denklemlerin türevi alınırsa;

$$\left\langle \overline{N}',U\right\rangle =0 \tag{3.38}$$

ve

$$\left\langle \overline{B}_2',U\right\rangle =0 \tag{3.39}$$

olup burada T4PTFF denklemlerini kullanırsak;

$$\left\langle -\overline{k}_1\overline{T}+\overline{k}_2\,\overline{B}_1,U\right\rangle =0 \tag{3.40}$$

ve

$$\left\langle -\tan\theta\overline{k}_3\overline{T}-\overline{k}_3\overline{B}_1,U\right\rangle =0 \tag{3.41}$$

elde edilir. (3.40) denklemi (3.41) de yerine yazılırsa;

$$-\overline{k}_1\left\langle \overline{T},U\right\rangle =-\overline{k}_2\left\langle \overline{B}_1,U\right\rangle \tag{3.42}$$

ve

$$-\tan\theta\overline{k}_3\frac{\overline{k}_2}{\overline{k}_1}\left\langle \overline{B}_1,U\right\rangle -\overline{k}_3\left\langle \overline{B}_1,U\right\rangle =0 \tag{3.43}$$

ve son denklemden;

$$\left\langle \tan\theta\frac{\overline{k}_2}{\overline{k}_1}+1\right\rangle \overline{k}_3\left\langle \overline{B}_1,U\right\rangle =0 \tag{3.44}$$

elde edilir. (3.44) denkleminde,

$\overline{k}_1$, $\overline{k}_2$ ve $\overline{k}_3=k_3.\cos\theta\neq 0$ eğrilikleri sıfırdan farklı olup $\left\langle \overline{B}_1,U\right\rangle =0$ elde edilir ki bunun anlamı $\overline{B}_1$ ve U nun ortogonal olması demektir. O halde $(2,4)-$tip slant helis yoktur.

Teorem 3.1.6 α , E^4 Öklid uzayın da $(3,4)-$tip slant helis ise o halde;

$$\left\langle \overline{N},U\right\rangle =\frac{\overline{k}_3}{\overline{k}_2}c_4 \tag{3.45}$$

ve

$$\left\langle \overline{T},U\right\rangle =-\frac{c_3}{\tan\theta} \tag{3.46}$$

Burada c_3 ve c_4 sabitler olup $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ dır.

İspat: Kabul edelim ki α , E^4 Öklid uzayında bir $(3,4)-$tip slant helis olsun. O halde $U \in E^4$ sıfırdan farklı sabit vektör alanı olmak üzere;

$$\left\langle \overline{B}_1, U \right\rangle = c_3 \tag{3.47}$$

ve

$$\left\langle \overline{B}_2, U \right\rangle = c_4 \tag{3.48}$$

sabitlerdir. (3.47) ve (3.48) denklemlerinin türevini alırsak;

$$\left\langle \overline{B}_1', U \right\rangle = 0 \tag{3.49}$$

ve

$$\left\langle \overline{B}_2', U \right\rangle = 0 \tag{3.50}$$

elde edilir. T4PTFF denklemlerini kullanırsak;

$$\left\langle -\overline{k}_2 \overline{N} + \overline{k}_3 \overline{B}_2, U \right\rangle = 0 \tag{3.51}$$

ve

$$\left\langle -\tan\theta \overline{k}_3 \overline{T} - \overline{k}_3 \overline{B}_1, U \right\rangle = 0 \tag{3.52}$$

elde edillir ve düzenlersek;

$$-\overline{k}_2 \left\langle \overline{N}, U \right\rangle = -\overline{k}_3 \left\langle \overline{B}_2, U \right\rangle \tag{3.53}$$

ve

$$-\tan\theta \overline{k}_3 \left\langle \overline{T}, U \right\rangle = \overline{k}_3 \left\langle \overline{B}_1, U \right\rangle \tag{3.54}$$

buluruz. (3.53) ve denkleminde (3.48) denklemi yerine yazılırsa; $\left\langle \overline{N}, U \right\rangle = \frac{\overline{k}_3}{\overline{k}_2} c_4$ denklemi elde edilir. Buradan da (3.54) ve (3.47) denklemlerini kullanırsak,

$$\langle \overline{T}, U \rangle = -\frac{c_3}{\tan\theta} \tag{3.55}$$

buluruz. O halde ispat tamamlanmış olur.

4. SONUÇ

Bu tezde, Darboux helis, genel helis ve V_4-slant helis olmak üzere sırasıyla sıfır ve sabit olmayan k_1, k_2, k_3 eğrilik fonksiyonlarına sahip olan E^4 4- boyutlu Öklid uzayında birim hızlı α eğrisi için karakterizasyon teoremleri çalışılmıştır. Ayrıca, E^4 Öklid uzayında slant helislerin iki yeni karakterizasyonunu ve integral karakterizasyonları elde edilmiştir. 4- boyutlu Öklid uzayında TNBBFF'ye göre $(1,k)$-tipi slant helisler olmadığı sonucuna varılmıştır. Bulgular kısmında ise E^4 4- boyutlu Öklid uzayında yeni bir çatı olan T4PTFF bulunarak T4PTFF'ye göre slant helislerin karakterizasyonunu bulunmuş ve yeni (k,m)-tip slant helisler elde edilmiştir.

Bu tezde, 0-tip helis genel helis ve 1-tip slant helis sadece slant helis demektir. $2 \leq k \leq 3$ için k-tip slant helisler hiperbolik uzayda kısmen null eğrilere ve pseudo null eğrilere karşılık gelebilir. Son zamanlarda, bu özel çatılar, kanal ve boru şeklindeki yüzeyleri incelemek için de ele alınabilir. Bu kavramlarla ilgili birçok araştırma makalesi Öklid uzayında, Minkowski uzayında ve dual uzayda ele alınmıştır.

5. KAYNAKLAR

[1] Izumiya S, Takeuchi N, 2004. New Special Curves and Developable Surfaces. Turkish Journal of Mathematics, 28 (2): 153-164.

[2] Zıplar E, Şenol A, Yaylı Y, 2012. On Daboux helices in Euclidean 3-space. Global J Sci Front Res Mathem Decision Sci, 12 (13): 73-80.

[3] İlarslan K, Yıldırım M, 2018. On Darboux helices in Euclidean 4-space. Mathematical Methods in The Applied Sciences, 42(16): 5184-5189.

[4] Ali AT, López R, 2009. Slant Helices in Euclidean 4-space E^4. arXiv: 0901.3324v1.

[5] Forterre Y, Dumais J, 2011. Generating Helices in Nature. Science, 333 (6050): 1715-1716.

[6] Hacısalihoğlu, HH, 1983. Diferansiyel Geometri. Fen Fakültesi, Ankara.

[7] Barros M, Ferrández A, 2009. A Conformal Yariational Approach For Helices in Nature. J Math Phys, 50 (10): 103529.

[8] Chouaieb N, Goriely A, Maddocks JH, 2006. Helices. Proc Natl Acad Sci U S A, 103 (25): 9398-403.

[9] Bulut F, Bektaş M, 2020. Special Helices On Equiform Differential Geometry Of Spacelike Curves in Minkowski Space-Time. Comm Fac Sci Univ Ankara Ser A1. Math. Stat, 69 (2): 51-62.

[10] Milman RS, Parker GD, 1977. Elements of Differential Geometry, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

[11] Gluck H, 1966. Higher Curvatures of Curves in Euclidean Space. Amer Math Monthly, 73: 699-704.

[12] Lancret MA, 1806. Mémoire Sur Les Courbes à Double courbure. Mé,moires présentés à l'Institute, 1: 416-454.

[13] Ali A, 2012. Position Yectors of Slant Helices in Euclidean 3–Space. J Egyptian Math Soc, 20: 1-6.

[14] Kula L, Yaylı Y, 2005. On slant Helix and its Spherical İndicatrix. Appl Math Comput, 169: 600-607.

[15] Kula L, Ekmekçi N, Yaylı Y, İlarslan K, 2010. Characterizations of slant helices in Euclidean 3 space. Turkish J Math, 34: 261-273.

[16] Yang X, 2003. High Accuracy Approximation of Helices by Quintic Curve. Comput Aided Geometric Design, 20: 303-317.

[17] Gök I, Camcı Ç, Hacisalihoğlu HH, 2009. V_n-slant helices in Euclidean n-space. En. Math. Commun, 14 (2): 317-329.

[18] Camci C, İlarslan K, Kula L, Hacisalihoğlu HH, 2008. Harmonic curvatures and Generalized Helices in E^n. Chaos, Solitons Fractals, 40 (5): 2590-2596.

[19] Ozdamar E, Hacisalihoglu HH, 1975. A characterization of İnclined Curves in Euclidean n-Space. Comm Fac Sci Univ Ankara Ser, A1. 24: 15-23.

[20] Kuhnel W, 1999. Differential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds. Student Mathematical Library, 16: Providence, RI, American Mathematical Society.

[21] Ozdamar E, Hacisalihoğlu HH, 1975. A Characterization of İnclined Curves in Euclidean n-Space. Comm Fac Sci Univ Ankara, 24A: 15–23.

[22] Onder M, Kazaz M, Kocayiğit H, Kılıç O, 2008. B_2-Slant helix in Euclidean 4-Space E^4 Int. J Cont. Math. Sci, 3 (29): 1433–1440.

[23] Petrovic-Torgasev M, Sucurovic E, 2002. W-Curves in Minkowski Spacetime, Novi. Sad. J Math, 32: 55–65.

[24] Scofield PD, 1995. Curves of Constant Precession. Amer. Math. Monthly, 102: 531–537.

[25] Yılmaz MY, Bektaş M, 2018. Slant Helices of (k,m)-Type in E^4. Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica, 10 (2): 395–401.

[26] Musayev B, Alp M, 2000. Fonksiyonel Analiz. Balcı Yayınları, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Bingöl Genç Keklikdere köyünde doğup, ilköğretimi ve orta öğretimini Genç YİBO da ve liseyi Atatürk Lisesinde tamamladım. 2010 yılında kazandığım Bingöl Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2014 yılında mezun oldum. 2018'de Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladım. Kasım 2020'de yüksek lisansımı tamamladım. Yabancı dilim İngilizcedir.

Feyzi TARTIK