T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ALT MATRİSLERİ ÜÇGENSEL OLAN BLOK MATRİSLERİN FAKTÖRİZASYONLARI VE DETERMİNANTLARININ HESAPLANMASI ÜZERİNE

Fatma ALTUN

EKİM 2020

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ALT MATRİSLERİ ÜÇGENSEL OLAN BLOK MATRİSLERİN FAKTÖRİZASYONLARI VE DETERMİNANTLARININ HESAPLANMASI ÜZERİNE

Hazırlayan

Fatma ALTUN

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Ufuk KAYA

Jüri Üyeleri

Dr. Öğr. Üyesi Günal BİLEK

Dr. Öğr. Üyesi Ufuk KAYA

Doç. Dr. Ali ÇAKMAK

EKİM 2020

ONAY

Fatma ALTUN tarafından hazırlanan "**Alt Matrisleri Üçgensel Olan Blok Matrislerin Faktörizasyonları ve Determinantlarının Hesaplanması Üzerine**" adlı tez çalışması 15/10/2020 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bitlis Eren Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Dr. Öğr. Üyesi Günal BİLEK (Başkan)	__________________
Dr. Öğr. Üyesi Ufuk KAYA (Danışman)	__________________
Doç. Dr. Ali ÇAKMAK (Üye)	__________________

Bu tezin kabulü, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …/…/…gün ve …/… Sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Zeki ARGUNHAN

Enstitü Müdürü

BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI
ETİK BEYANI

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre hazırlamış olduğum "**Alt Matrisleri Üçgensel Olan Blok Matrislerin Faktörizasyonları ve Determinantlarının Hesaplanması Üzerine**" adlı tezimin özgün bir çalışma olduğunu, tez hazırlanırken tüm aşamalarda bilimsel etik ilkelerine uygun davrandığımı, tez kapsamında sunulan tüm verileri bilimsel etik ilkelerine uygun elde ettiğimi, tezde faydalandığım tüm eserlere atıf yaptığımı ve kaynaklar kısmında bu eserleri gösterdiğimi beyan ederim. 15/10/2020

Fatma ALTUN
İmza

ÖZET

ALT MATRİSLERİ ÜÇGENSEL OLAN BLOK MATRİSLERİN FAKTÖRİZASYONLARI VE DETERMİNANTLARININ HESAPLANMASI ÜZERİNE

Fatma ALTUN

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ufuk KAYA
Ekim 2020, 34 sayfa

Bu tez çalışmasında, bileşenleri $n \times n$ tipinde üst üçgensel matris olan

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}$$

biçimindeki blok matrisler ele alınacaktır. Bu matrisin determinantının yalnızca alt matrislerinin köşegen elemanlarına bağlı olduğu ispatlanacak ve bu determinant daha küçük alt determinantların çarpımı olarak gösterilecektir. Ayrıca bu matrisin ek matrisi, öz değerleri, tersi ve faktörizasyonu üzerinde çalışılacaktır.

Anahtar Kelimeler: Blok Matris, Determinant, Üst Üçgensel Matris, Faktörizasyon

ABSTRACT

ON FACTORIZATION AND CALCULATION OF DETERMINANT OF BLOCK MATRICES WHOSE SUBMATRICES ARE TRIANGULAR

Fatma ALTUN

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate Education Institute
Department of Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ufuk KAYA
October 2020, 34 pages

In this thesis, we consider the block matrix

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}$$

whose components are $n \times n$ triangular matrices. This thesis aims to prove that the determinant of the matrix A is solely determined by the diagonal elements of its submatrices and this determinant is expressed as the multiplication of some subdeterminants. This work also aims to study on the adjoint matrix, eigenvalues, the inverse and factorization of the matrix A.

Keywords: Block Matrix, Determinant, Upper Triangular Matrix, Factorization

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunun belirlenmesinde ve tezin hazırlanmasında yardımlarını benden esirgemeyen, bildiği her şeyi benimle paylaşan ve bilmediklerimi öğreten tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Ufuk KAYA'ya teşekkürlerimi borç bilirim.

Eğitim hayatımın en başından bugüne kadar desteklerini her an yanımda bulduğum, haklarını hiçbir şekilde ödeyemeyeceğim, hayatlarını evlatlarına adayan değerli anne ve babama; bu süreçte en az benim kadar stres yaşayan, bana sabırla katlanan, elinden geldiğince bana destek olan sevgili ablam Züleyha'ya ve ailemin tüm üyelerine sonsuz teşekkür ve minnettarlığımı sunarım.

ÖNSÖZ

Teorik ve uygulamalı matematikte, matris ve determinant kavramlarının çok çeşitli kullanım alanları vardır. Özellikle doğrusal denklem sistemlerinin çözülmesi için matris kavramı büyük önem taşımaktadır. Elektrik devre analizleri, bilgisayar programcılığı ve mühendislikte yer alan dinamik sistemlerin analiz ve tasarım problemleri matrislerin ve determinantların kullanıldığı çalışma alanları içerisindedir.

Bir kare matrisin determinantını Leibnitz formülü veya Laplace formülü yardımıyla hesaplayabiliriz. 3×3 tipindeki bir matrisin determinantı Sarrus kuralı ile hesaplanabilir. 3×3 tipindeki bir matrisin determinantı kolaylıkla hesaplanabilirken, 4×4 ve daha büyük matrislerin determinantını hesaplamak bir hayli zordur.

Bu tez çalışmasında, üst üçgensel matrislerden oluşan daha büyük matrislerin determinantını hesaplayacağız. Ayrıca bu tip üst üçgensel matrislerden oluşan matrislerin ek matrisini, özdeğerlerini, tersini hesaplayacağız ve faktörizasyon uygulamaları yapacağız.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET .... **i**
ABSTRACT .... **ii**
TEŞEKKÜR .... **iii**
ÖNSÖZ .... **iv**
İÇİNDEKİLER DİZİNİ .... **v**
SİMGELER DİZİNİ .... **vi**
1.GİRİŞ **1**
2. MATERYAL VE YÖNTEM **3**
2.1. Gruplar 3
2.2. Matris ve Determinant 5
2.3. Türev 9
3. BULGULAR VE TARTIŞMA **11**
3.1. Temel Tanım ve Teoremler 11
3.2. Faktörizasyon 15
3.3. Determinant Formülü 18
3.4. Trigonometrik Fonksiyonların Wronski Determinantı 22
3.5. Dilimlenmiş Üst Üçgensel Matrisin Bazı Özellikleri 25
4. SONUÇ **32**
5. KAYNAKLAR **33**
ÖZGEÇMİŞ **34**

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
Σ	Toplam sembolü
$\prod$	Çarpım sembolü
$[n, m, k]$	$n(m-1)+k$ sayısı
$\|A\|$	A matrisinin determinantı

1.GİRİŞ

Bu tezde incelediğimiz matris üst üçgensel matrislerden oluşan bir blok matristir. Bu şekildeki matrisler daha önce incelenmemiştir. Sadece, lineer cebir kaynaklarında, üst üçgensel matrisler için “Bir üst üçgensel matrisin determinantı köşegen elemanlarının çarpımıdır.” biçiminde bir teorem mevcuttur. Bunun dışında, üst üçgensel blok matrisler için de ayrı bir teorem vardır. Üst üçgensel blok matrisler bizim çalıştığımız matrislerden farklıdır. Üst üçgensel blok matrisler

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ 0 & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{mm} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Bu tip matrislerde alt matrisler tezde ele aldığımız şekilde üst üçgensel değildir. Blok olarak köşegenin altında kalan matrisler sıfır matrisleridir. Bu tip matrislerin determinantı köşegendeki matrislerin determinantının çarpımına eşittir. Yani,

$$|B| = |B_{11}||B_{22}| \dots |B_{mm}|$$

dir [1]. Bizim tezde incelediğimiz matris yukarıdaki B matrisinden farklıdır. Bizim incelediğimiz A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Buradaki A_{ij} alt matrisleri üst üçgenseldir:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{n(i-1)+1,n(j-1)+1} & a_{n(i-1)+1,n(j-1)+2} & \cdots & a_{n(i-1)+1,n(j-1)+n} \\ 0 & a_{n(i-1)+2,n(j-1)+2} & \cdots & a_{n(i-1)+2,n(j-1)+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n(i-1)+n,n(j-1)+n} \end{bmatrix}.$$

Biz bu çalışmada A matrisinin, önce determinantının sadece A_{ij} alt matrislerinin köşegen elemanlarına bağlı olduğunu göstereceğiz ve daha sonra köşegen matrislere sahip A matrisinin bir faktörizasyonunu elde edip determinant için bir formül inşa edeceğiz. En sonunda da A matrisinin özdeğerleri, ek matrisi ve tersi gibi özellikleri üzerinde duracağız.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, bulgular kısmında kullanılacak bazı tanımlar ve temel teoremler verilecektir.

2.1. Gruplar

Tanım 2.1.1 [2] $G \neq \emptyset$ bir küme $*: G \times G \to G$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(G,*)$ ikilisine bir grup denir:

G1) $\forall\, a, b, c\ \in G, a * (b * c) = (a * b) * c,$

G2) $\exists\, e\ \in G: \forall a \in G, a * e = e * a = a,$

G3) $\forall\, a \in G, \exists\, b \in G: a * b = b * a = e.$

Bu koşullara ek olarak aşağıdaki koşul da sağlanırsa bu gruba abelyen grup denir:

G4) $\forall\, a, b \in G, a * b = b * a.$

Tanım 2.1.2 [2]. $(G,*)$ bir grup, $a \in G$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda a elemanının n defa kendisiyle işlemi a^n ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$a^n = \begin{cases} e, & n = 0, \\ a * a^{n-1}, & n > 0, \\ (a^{-1})^{-n}, & n < 0. \end{cases}$$

Teorem 2.1.1 [2]. $(G,.)$ sonlu bir grup ve $a \in G$ olsun. Bu durumda $a^{|G|} = e$ dir. Burada, $|G|$ sayısı grubun eleman sayısını (mertebesini) göstermektedir. Bu teorem, cebir kaynaklarında Lagrange teoremi olarak bilinen teoremin bir sonucudur.

Tanım 2.1.3 [2]. n elemanlı bir kümenin kendi üzerine 1-1 bir fonksiyonuna bir n −li permütasyon denir. Bütün n −li permütasyonların kümesi bileşke işlemi altında bir gruptur. Bu grup S_n ile gösterilir ve bu gruba simetrik grup veya permütasyon grubu denir. S_n, mertebesi $n!$ olan sonlu bir gruptur.

$f \in S_n$ ve $f, \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesinin kendi üzerine bir 1-1 fonksiyon olsun. $i_1, i_2, \dots, i_k$; $(1,2, \dots, n)$' nin bir değişik sırada sıralanışı, yani bir permütasyonu olmak üzere $f(x_k) = x_i, (k = 1,2, \dots, n)$ ise f fonksiyonunun her elemanının altına görüntüsünü yazarak

$f = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_{i_1} & x_{i_2} & \cdots & x_{i_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{i_k} \end{pmatrix}$ ile veya x'leri yazmayarak $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4 [2]. Bir $f \in S_n$ permütasyonu, j_1, j_2,..., j_k $(1 \leq k \leq n)$ farklı doğal sayılar olmak üzere; $f(j_1) = j_2$, $f(j_2) = j_3$, ..., $f(j_{k-1}) = j_k$, $f(j_k) = j_1$ ile tanımlı ve burada yazılmayan her $x = \overline{1, n}$ için $f(x) = x$ ise $f = (j_1, j_2, \dots, j_k)$ ile gösterilir ve k uzunluğunda bir devir denir. Uzunluğu 1 olan bir devir de özdeşlik fonksiyonu olarak alınır. Bir deviri saat yönünde yönlendirilmiş çember üzerinde dizilmiş semboller olarak düşünebilir ve herhangi bir j den başlayarak $f = (j_1, j_2, \dots, j_k) = (j_2, j_3, \dots, j_k, j_1) = \cdots = (j_k, j_1, \dots, j_{k-1})$ gibi farklı şekillerde yazabiliriz.

Teorem 2.1.2 [2]. Ayrık devirlerin çarpımı değişmelidir.

Teorem 2.1.3 [2]. r uzunluğundaki bir devrin mertebesi r dir.

Teorem 2.1.4 [2]. S_n deki her permütasyon sıra gözetmeksizin, ayrık devirlerin çarpımı olarak tek türlü yazılabilir.

Teorem.2.1.5 [2]. Bir $f \in S_n$ permütasyonunun mertebesi ayrıldığı ayrık devirlerin uzunluklarının EKOK'udur.

Teorem 2.1.6 [2]. Her permütasyon 2 li devirlerin (transpozisyonların) bir çarpımıdır.

Tanım 2.1.5 [2]. Bir permütasyon çift sayıda 2 linin çarpımı ise bu permütasyona çift aksi halde tek permütasyon denir.

Teorem 2.1.7 [2]. S_n nin $(n \geq 2)$ bütün çift permütasyonlarının kümesi A_n ile gösterilir. A_n, S_n nin $\frac{n!}{2}$ elemanlı bir alt grubudur.

Sonuç 2.1.1 [2]. S_n nin $(n \geq 2)$ çift permütasyonlarının sayısı da, tek permütasyonlarının sayısı da $\frac{n!}{2}$'dir. Yani, tek permütasyonlar ile çift permütasyonların sayısı eşittir. Ayrıca birim permütasyon çift olarak kabul edilir.

Örnek 2.1.1. S_5 grubunda $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ bir permütasyondur. Aynı zamanda bir devirdir. $f = (1235)$ olarak yazılabilir. $f(4) = 4$ olduğundan devir yazımında 4 sayısı görünmez. f'in devir olarak yazımında 4 adet sayı bulunduğundan mertebesi 4'tür. $f = (15)(13)(12)$ biçiminde transpozisyonların çarpımı olarak yazılabilir. Buradan f'in bir tek permütasyon olduğu söylenebilir.

Örnek 2.1.2. S_4 grubunda $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ bir permütasyondur fakat bir devir değildir. Aslında 2 devirin çarpımı olarak yazılır: $g = (12)(34)$. Buna göre g bir çift permütasyondur ve mertebesi 2'dir.

2.2. Matris ve Determinant

Tanım 2.2.1 [1]. $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i, j \leq n$ ve $a_{ij} \in \mathbb{C}$ olmak üzere bir matris

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

biçimindedir. $m = n$ ise matrise bir kare matris denir.

Tanım 2.2.2 [1]. A bir kare matris olsun. Aşağıdaki kompleks sayıya A matrisinin determinantı denir:

$$\sum_{\sigma \in S_n} (sgn\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots\, a_{n\sigma(n)}.$$

Bir A kare matrisinin determinantı $|A|$ ya da $det(A)$ ile gösterilir. Biz bu tezde $|A|$ gösterimini kullanacağız. Burada, $sgn: S_n \to \{-1,1\}$, permütasyonların işaret fonksiyonudur ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$sgn\sigma = \begin{cases} -1, & \sigma \text{ } tek \text{ } permütasyon \text{ } ise, \\ 1, & \sigma \text{ } çift \text{ } permütasyon \text{ } ise. \end{cases}$$

Yukarıdaki tanım determinantın permütasyonlar kullanılarak verilen tanımıdır. Determinantın kofaktörler ile verilen tanımı da mevcuttur. Şimdi bu tanımı vermek için minör ve kofaktör kavramlarını açıklayalım:

Tanım 2.2.3 [1]. Bir $A = (a_{ij})$ $n -$kare matrisini düşünelim. A'daki i. satırın ve j. sütunun çıkarılmasıyla elde edilen M_{ij}, $(n-1) \times (n-1)$ tipinde karesel bir matristir. $|M_{ij}|$ determinantına A'nın a_{ij} elemanının minörü, $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ sayısına da a_{ij} elemanının kofaktörü denir.

Teorem 2.2.1 [1]. $A = (a_{ij})$ matrisinin determinantı, herhangi bir satırın (sütunun) elemanlarının, kendilerine ait kofaktörlerle çarpılıp toplanmasına eşittir:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij},$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Tanım 2.2.4 [1]. $A = (a_{ij})$ $n -$kare matrisini düşünelim. A'nın ek matrisi, A'nın kofaktörler matrisinin transpozudur ve $adj(A)$ veya $ek(A)$ ile gösterilir:

$$ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Tanım 2.2.5 [1]. A bir $n -$kare matris olsun. Eğer

$$AB = BA = I_n$$

olacak biçimde bir $n -$kare B matrisi varsa B'ye A matrisinin tersi denir. A'ya da bir tersinir ya da singüler olmayan matris denir. Bir kare matrisin tersi yoksa bu matrise singüler matris denir. Burada I_n, $n \times n$ tipindeki birim matrisi göstermektedir. Birim matris köşegen elemanları 1, diğer elemanları 0 olan matristir:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Şimdi, tersinir bir matrisin ek matrisi ve tersi arasındaki ilişkiyi verelim:

Teorem 2.2.2 [1]. I birim matris olmak üzere kare bir A matrisi için,

$$A.ek(A) = ek(A).A = |A|I$$

eşitliği geçerlidir. O halde, eğer $|A| \neq 0$ ise,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} ek(A)$$

eşitliğinin doğru olduğu ters matris tanımından ortaya çıkar.

Örnek 2.2.1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ matrisini ele alalım. $|A| = -46$ olduğu ve

$$ek(A) = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

olduğu kolayca görülür. O zaman,

$$\begin{aligned} A(ekA) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -46 & 0 & 0 \\ 0 & -46 & 0 \\ 0 & 0 & -46 \end{bmatrix} = -46 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -46I = |A|I \end{aligned}$$

dır.

Teorem 2.2.3 [1]. Bir A kare matrisi için aşağıdakiler doğrudur:

i) Eğer A sıfırların bir satırına (sütununa) sahip ise, o zaman $|A| = 0$ dır.

ii) Eğer A eşit iki satıra (sütuna) sahip ise, o zaman $|A| = 0$ dır.

iii) Eğer A üçgensel ise, yani A'nın köşegeninin üstünde veya altında sıfırlara sahipse, o zaman A matrisinin determinantı, köşegen elemanlarının çarpımına eşittir. Böylece özel olarak, I birim matris olmak üzere $|I| = 1$ dir.

Teorem 2.2.4 [1]. B nin A dan bir temel satır (sütun) işlemiyle elde edildiğini varsayalım.

i) Eğer A'nın iki yanyana satırı (sütunu) yer değiştirirse $|B| = -|A|$ olur.

ii) Eğer bir satır (sütun) bir k skalarıyla çarpılırsa $|B| = k|A|$ olur.

iii) Eğer bir satırın (sütunun) bir k katı diğer bir satıra (sütuna) eklenirse $|B| = |A|$ olur.

Teorem 2.2.5 [1]. A herhangi bir n −kare matris olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:

i) A tersinirdir, yani A matrisi A^{-1} tersine sahiptir.

ii) $AX = 0$ denklemler sistemi sadece sıfır çözümüne sahiptir.

iii) A'nın determinantı sıfır değildir, yani $|A| \neq 0$'dır.

Teorem 2.2.6 [1]. Determinant fonksiyonu çarpımsal bir fonksiyondur. Yani, A ve B matrislerinin çarpımlarının determinantı, determinantlarının çarpımına eşittir:

$$|AB| = |A||B|.$$

Tanım 2.2.6 [1]. A bir n −kare matris olsun. Eğer

$$Av = \lambda v$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir $v \in \mathbb{C}^n$ (sütun) vektörü varsa $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı bir öz değer veya karakteristik değer olarak adlandırılır. Bu bağıntıyı sağlayan sıfırdan farklı her v vektörüne A'nın λ öz değerine karşılık gelen öz vektör veya karakteristik vektör denir.

$$A(kv) = k(Av) = k(\lambda v) = \lambda(kv)$$

olduğundan bir öz vektörün k katı da bir öz vektördür.

Örnek 2.2.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ve $v_1 = (2,3)^T$, $v_2 = (1,-1)^T$ olsun. O zaman,

$$Av_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 4v_1$$

ve

$$Av_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)v_2$$

olur. O halde, A'nın v_1 ve v_2 öz vektörleri, A'nın sırasıyla, $\lambda_1 = 4$ ve $\lambda_2 = -1$ öz değerlerine karşılık gelir.

2.3. Türev

Tanım 2.3.1 [3]. $(a,b) \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık ve f de (a,b)'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı bir fonksiyon olsun. $t, x \in (a,b)$ olmak üzere

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = A(x)$$

sonlu limiti varsa, bu $A(x)$ sayısına f fonksiyonunun x noktasındaki türevi denir ve $f'(x)$ ile gösterilir. Bu durumda, f fonksiyonu x noktasında türevlenebilirdir denir ve bu türev

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

veya

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.3.2 [4]. $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) \in \mathbb{R}^n$ noktasının $U(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ komşuluğunda tanımlı $f: U(x_0) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $k \in \{1,2,\dots,n\}$ için k-yıncı değişkeni dışındaki $x_1, x_2, \dots x_{k-1}, x_{k+1}, \dots x_n$ değişkenleri sabit tutularak tanımlanan $g: U(x_{0,k}) \to \mathbb{R}$, $g(x_k) = f(x_{0,1}, \dots x_{0,k-1}, x_k, x_{0,k+1}, \dots x_{0,n})$ fonksiyonunun eğer, varsa $x_{0,k}$ noktasındaki $g'(x_{0,k})$ türevine

f'in x_0 noktasındaki x_k değişkenine göre kısmi türevi denir ve $f_{x_k}(x_0), \partial_k f(x_0), D_k f(x_0), \frac{\partial_f}{\partial_{x_k}}(x_0)$ sembollerinden biri ile gösterilir.

Bu tanıma göre, $f: U(x_0) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki x_k değişkenine göre kısmi türevi, $h \in \mathbb{R}$, $\Delta_{x_k}^h f(x_0) = g(x_{0,k} + h) - g(x_{0,k}) = f(x_{0,1}, \dots, x_{0,k-1}, x_{0,k} + h, x_{0,k+1}, \dots x_{0,n}) - f(x_{0,1}, \dots, x_{0,k-1}, x_{0,k}, x_{0,k+1}, \dots, x_{0,n})$ olmak üzere

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x_{0,k} + h) - g(x_{0,k})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta x_k^h(x_0)}{h}$$

limiti olarak hesaplanır.

Teorem 2.3.1 [4]. $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) \in \mathbb{R}^n$ noktasının $U(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ komşuluğunda tanımlı $f: U(x_0) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda f fonksiyonunun x_k değişkenine bağlı olmaması için (x_k'ya göre sabit olması için) gerek ve yeter şart her $x \in U(x_0)$ için $\frac{\partial_f}{\partial_{x_k}}(x) = 0$ olmasıdır.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. Temel Tanım ve Teoremler

Biz bu tez çalışmasında, alt matrisleri üst üçgensel olan blok matrislerin temel özelliklerini (faktörizasyon, determinant, ek matris, ters matris, özdeğer vs.) inceleyeceğiz. Öncelikle, incelediğimiz matrisi ayrıntılı bir şekilde yazalım.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}$$

biçiminde bir blok matris ele alalım. Buradaki bütün A_{ij}'ler $n \times n$ tipinde üst üçgensel matris olsunlar. Buna göre, A matrisi $mn \times mn$ biçiminde bir matris olur. Şimdi, bu matrisi daha matematiksel bir biçimde ifade edelim. $X_n = \{1,2,\dots,n\}$ olsun. $f_n\colon \mathbb{Z} \to X_n$

$$f_n(k) = \begin{cases} k\text{'nın } n \text{ ile bölümünden kalan sayı}, & k \text{ sayısı } n\text{'e tam bölünmüyor ise}, \\ n, & k \text{ sayısı } n\text{'e tam bölünüyor ise}, \end{cases}$$

biçiminde bir fonksiyon tanımlayalım. Örneğin, $f_6(15) = 3$, $f_6(24) = 6$ ve $f_5(108) = 3$'tür. Biz, bu tezde bundan böyle $f_6(15)$ gösterimi yerine (n sayısı sabit bir sayı ise) $\overline{15}$ gösterimini kullanacağız.

Yukarıdaki A matrisini bu gösterimi kullanarak ifade edelim. m ve n pozitif tam sayılar ve $A = (a_{ij})$ matrisi $mn \times mn$ tipinde bir matris olsun. $\bar{i} > \bar{j} \Rightarrow a_{ij} = 0$ koşulu sağlanıyorsa A matrisine dilimlenmiş üst üçgensel matris diyeceğiz. Bu tip matrislerin genel yazımı

$$A =$$

$$
\begin{bmatrix}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,n+1} & \cdots & a_{1,2n} & \cdots & a_{1,n(m-1)+1} & \cdots & a_{1,mn} \\
0 & \cdots & a_{2,n} & 0 & \cdots & a_{2,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2,mn} \\
0 & \cdots & a_{3,n} & 0 & \cdots & a_{3,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{3,mn} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & a_{n,n} & 0 & \cdots & a_{n,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n,mn} \\
a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} & \cdots & a_{n+1,2n} & \cdots & a_{n+1,n(m-1)+1} & \cdots & a_{n+1,mn} \\
0 & \cdots & a_{n+2,n} & 0 & \cdots & a_{n+2,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n+2,mn} \\
0 & \cdots & a_{n+3,n} & 0 & \cdots & a_{n+3,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n+3,mn} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & a_{2n,n} & 0 & \cdots & a_{2n,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n,mn} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n(m-1)+1,1} & \cdots & a_{n(m-1)+1,n} & a_{n(m-1)+1,(n+1)} & \cdots & a_{n(m-1)+1,2n} & \cdots & a_{n(m-1)+1,n(m-1)+1} & \cdots & a_{n(m-1)+1,mn} \\
0 & \cdots & a_{n(m-1)+2,n} & 0 & \cdots & a_{n(m-1)+2,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n(m-1)+2,mn} \\
0 & \cdots & a_{n(m-1)+3,n} & 0 & \cdots & a_{n(m-1)+3,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n(m-1)+3,mn} \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & a_{mn,n} & 0 & \cdots & a_{mn,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{mn,mn}
\end{bmatrix}
$$

gibidir. Yukarıdaki gösterim yeterince anlaşılır olmadığından, biz örneklerle açıklayalım. Örneğin, $n = 3$ ve $m = 2$ alırsak,

$$
A = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\
0 & a_{22} & a_{23} & 0 & a_{25} & a_{26} \\
0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & a_{36} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\
0 & a_{52} & a_{53} & 0 & a_{55} & a_{56} \\
0 & 0 & a_{63} & 0 & 0 & a_{66}
\end{bmatrix}
$$

biçiminde, $n = 2$ ve $m = 3$ alırsak,

$$
A = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\
0 & a_{22} & 0 & a_{24} & 0 & a_{26} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\
0 & a_{42} & 0 & a_{44} & 0 & a_{46} \\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\
0 & a_{62} & 0 & a_{64} & 0 & a_{66}
\end{bmatrix}
$$

biçimindedir. m ve n'ye farklı değerler vererek örnekleri çoğaltabiliriz.

Biz bu tezde yukarıdaki gibi dilimlenmiş üst üçgensel matrislerin temel özelliklerini inceleyeceğiz. Dilimlenmiş alt üçgensel matrisler de aynı şekilde tanımlanabilir ve teoremler aynı yöntemlerle ispatlanabilir. Bu yüzden, biz sadece dilimlenmiş üst üçgensel matrislerle ilgileneceğiz.

Teorem 3.1.1. $A_{mn\times mn}$ matrisi $\bar{i} > \bar{j} \Rightarrow a_{ij} = 0$ koşulunu sağlasın. Matrisin $a_{i_0 j_0}$ elamanı $\overline{i_0} < \overline{j_0}$ koşulunu sağlayan herhangi bir eleman olsun. O halde

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_{mn}} (sgn\sigma).\, a_{1\sigma(1)}\,.\, a_{2\sigma(2)}.\, a_{3\sigma(3)} \ldots a_{mn\sigma(mn)}$$

determinant açılımında $a_{i_0 j_0}$'ı içeren herhangi bir çarpım 0'dır.

İspat: Matrisin $\overline{i_0} < \overline{j_0}$ koşulunu sağlayan bir $a_{i_0 j_0}$ elamanı ve $\sigma(i_0) = j_0$ koşulunu sağlayan bir $\sigma \in S_{mn}$ permütasyonunu alalım. Teorem 2.1.1'den $\sigma^{(mn)!} = e$ olduğunu biliyoruz. Burada, e fonksiyonu S_{mn}'deki birim permütasyondur. e birim fonksiyon olduğundan $1 \le k \le mn$ olan her k tamsayısı için $e(k) = k$'dır. Varsayalım ki, $1 \le k < (mn)!$ koşulunu sağlayan $\forall\, k \in \mathbb{Z}$ için $\overline{\sigma^k(i_0)} \le \overline{\sigma^{k+1}(i_0)}$'dir. O halde,

$$\overline{i_0} = \overline{e(i_0)} = \overline{\sigma^{(mn)!}(i_0)} \ge \overline{\sigma^{(mn)!-1}(i_0)} \ge \overline{\sigma^{(mn)!-2}(i_0)} \ldots \ge \overline{\sigma(i_0)} = \overline{j_0} \Rightarrow \overline{i_0} \ge \overline{j_0}.$$

bağıntıları sağlanır. Bu ise $\overline{i_0} < \overline{j_0}$ olması ile çelişir. O halde, varsayım yanlıştır. Yani, $\overline{\sigma^{k_0}(i_0)} > \overline{\sigma^{k_0+1}(i_0)}$ ve $1 \le k_0 < (mn)!$ olacak biçimde en az bir $k_0 \in \mathbb{Z}$ vardır. $\alpha_0 = \sigma^{k_0}(i_0)$ olarak tanımlarsak $\sigma(\alpha_0) = \sigma\left(\sigma^{k_0}(i_0)\right) = \sigma^{k_0+1}(i_0)$ olacağından $\overline{\alpha_0} > \overline{\sigma(\alpha_0)}$ olur. Buna göre, dilimlenmiş üst üçgensel matrislerin tanımı gereği $a_{\alpha_0 \sigma(\alpha_0)} = 0$ olmalıdır. Sonuç olarak,

$$a_{1\sigma(1)} \ldots a_{i_0\sigma(i_0)} \ldots\; a_{\alpha_0\sigma(\alpha_0)} \ldots a_{mn\sigma(mn)} = 0$$

olur.

Sonuç 3.1.1. A matrisi $\bar{i} > \bar{j} \Rightarrow a_{ij} = 0$ koşulunu sağlayan bir matris, yani bir dilimlenmiş üst üçgensel matris olsun. Bu durumda, A'nın determinantı yalnız $\bar{i} = \bar{j}$ olan elemanlara bağlıdır. Yani, determinant $\bar{i} < \bar{j}$ koşulunu sağlayan a_{ij} elemanlarına bağlı değildir. Bu yüzden, dilimlenmiş üst üçgensel bir A matrisinin determinantı hesaplanırken, kolaylık için, $\bar{i} < \bar{j}$ koşulunu sağlayan a_{ij} elemanları 0 olarak alınabilir. $\bar{i} > \bar{j}$ koşulunu sağlayan a_{ij} elemanları zaten 0 olduğundan, bu tip matrislerin determinantı yalnızca $\bar{i} = \bar{j}$ koşulunu sağlayan a_{ij} elemanlarına bağlıdır. Bu durumu determinant gösterimi ile açıklayalım.

A bir dilimlenmiş üst üçgensel matris olsun, yani $\bar{i} > \bar{j} \Rightarrow a_{ij} = 0$ koşulunu sağlasın. Yukarıda bahsedildiği gibi bu matrisin determinantını hesaplarken $\bar{i} < \bar{j}$ koşulunu sağlayan a_{ij} elemanları 0 alınabilir. $\bar{i} < \bar{j}$ koşulunu sağlayan a_{ij} elemanlarının yerine 0 yazılmış matrisi $D(A)$ ile gösterelim. Bu durumda, $D(A)$ matrisi aşağıdaki biçimi alır:

$$D(A) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & 0 & a_{1,n+1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1,n(m-1)+1} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n,n} & 0 & \cdots & a_{n,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n,mn} \\ a_{n+1,1} & \cdots & 0 & a_{n+1,n+1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n+1,n(m-1)+1} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{2n,n} & 0 & \cdots & a_{2n,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n,mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n(m-1)+1,1} & \cdots & 0 & a_{n(m-1)+1,n+1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n(m-1)+1,n(m-1)+1} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{mn,n} & 0 & \cdots & a_{mn,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{mn,mn} \end{bmatrix}.$$

Örnek 3.1.1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 9 & -4 & -19 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını hesaplayalım.

$n = 2$ denklik sınıflarına göre, $\bar{2} = 2 > 1 = \bar{1}$, $\bar{2} = 2 > 1 = \bar{3}$, $\bar{4} = 2 > 1 = \bar{1}$, $\bar{4} = 2 > 1 = \bar{3}$ iken $a_{21} = a_{23} = a_{41} = a_{43} = 0$ olduğundan, bu matris $m = n = 2$ olan bir dilimlenmiş üst üçgensel bir matristir. Dolayısıyla, Sonuç 3.1.1 uygulanabilir. Buna göre, A matrisinin determinantı ile $D(A)$ matrisinin determinantı aynıdır. $D(A)$ matrisi

$$D(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

biçimini alır. Görüldüğü gibi, $D(A)$ matrisinin determinantını hesaplamak A'nın determinantını hesaplamaktan daha kolaydır. Üstelik determinantlar aynıdır. Şimdi, $D(A)$'nın determinantını 1. satıra göre açalım:

$$|D(A)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 3. \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.(-28) + 3.21 = 35.$$

$D(A)$ matrisinin determinantını hesaplamanın A'nın determinantını hesaplamaktan daha kolay olduğunu bu örnekte gördük. Fakat, ileride vereceğimiz teoremlerle $D(A)$ matrisinin determinantını hesaplamanın (dolayısıyla A matrisinin determinantını hesaplamanın) çok daha kolay olduğunu göreceğiz.

3.2. Faktörizasyon

Şimdi, $D(A)$ gibi bir matrisi çarpanlarına ayırmanın bir yöntemini vereceğiz. $D(A)$ yukarıda verilen matris olsun. Yani, $D(A)$ matrisi $\bar{i} \neq \bar{j} \Rightarrow a_{ij} = 0$ koşulunu sağlayan $mn \times mn$ tipinde bir matristir. Biz bu matrisi çarpanlarına ayırabilirsek, Teorem 2.2.6'yı kullanarak, determinantını çarpanların ayrı ayrı determinantlarını alarak hesaplayabiliriz. Şimdi aşağıdaki matris çarpımını yapalım:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n+1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{1,n(m-1)+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n+1,1} & 0 & \cdots & 0 & a_{n+1,n+1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{n+1,n(m-1)+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n(m-1)+1,1} & 0 & \cdots & 0 & a_{n(m-1)+1,n+1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{n(m-1)+1,n(m-1)+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \times \tag{1}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 & 0 & a_{2,n+2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{2,n(m-1)+2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n+2,2} & \cdots & 0 & 0 & a_{n+2,n+2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{n+2,n(m-1)+2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n(m-1)+2,2} & \cdots & 0 & 0 & a_{n(m-1)+2,n+2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{n(m-1)+2,n(m-1)+2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \times \tag{2}$$

$$\times \cdots \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} & 0 & 0 & \cdots & a_{n,2n} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{n,mn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n,n} & 0 & 0 & \cdots & a_{2n,2n} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{2n,mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn,n} & 0 & 0 & \cdots & a_{mn,2n} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{mn,mn} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$
=\begin{bmatrix}
a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n+1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{1,[n,m,1]} & 0 & \cdots & 0\\
0 & a_{2,2} & \cdots & 0 & 0 & a_{2,n+2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{2,[n,m,2]} & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
a_{n+1,1} & 0 & \cdots & 0 & a_{n+1,n+1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{n+1,[n,m,1]} & 0 & \cdots & 0\\
0 & a_{n+2,2} & \cdots & 0 & 0 & a_{n+2,n+2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{n+2,[n,m,2]} & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{[n,m,1],1} & 0 & \cdots & 0 & a_{[n,m,1],n+1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{[n,m,1],[n,m,1]} & 0 & \cdots & 0\\
0 & a_{[n,m,2],2} & \cdots & 0 & 0 & a_{[n,m,2],n+2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{[n,m,2],[n,m,2]} & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}\times
$$

$$
\times\cdots\times\begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & a_{n,n} & 0 & 0 & \cdots & a_{n,2n} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{n,mn}\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & a_{2n,n} & 0 & 0 & \cdots & a_{2n,2n} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{2n,mn}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & a_{mn,n} & 0 & 0 & \cdots & a_{mn,2n} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{mn,mn}
\end{bmatrix}=D(A),
$$

burada $[n,m,k]=n(m-1)+k$’dır. Bu matris çarpımını daha iyi anlamak için $n=3$, $m=2$ üzerinden çarpımı yapalım:

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & 0 & 0 & a_{14} & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & a_{22} & 0 & 0 & a_{25} & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & a_{52} & 0 & 0 & a_{55} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & a_{36}\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & a_{63} & 0 & 0 & a_{66}
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
a_{11} & 0 & 0 & a_{14} & 0 & 0\\
0 & a_{22} & 0 & 0 & a_{25} & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0\\
0 & a_{52} & 0 & 0 & a_{55} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & a_{36}\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & a_{63} & 0 & 0 & a_{66}
\end{bmatrix}
$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & a_{25} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & a_{36} \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & a_{63} & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix}.$$

3.3. Determinant Formülü

Sonuç 3.1.1'de dilimlenmiş üst üçgensel bir A matrisinin determinantının $D(A)$ matrisinin determinantı ile aynı olduğunu gördük. Bölüm 3.2'de ise $D(A)$ matrisini çarpanlarına ayırdık. Bu bölümde ise bulduğumuz çarpanların determinantlarını hesaplayarak dilimlenmiş üst üçgensel matrisler için bir determinant formülü vereceğiz.

Teorem 3.3.1. A bir dilimlenmiş üst üçgensel matris olsun:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,n+1} & \cdots & a_{1,2n} & \cdots & a_{1,n(m-1)+1} & \cdots & a_{1,mn} \\ 0 & \cdots & a_{2,n} & 0 & \cdots & a_{2,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2,mn} \\ 0 & \cdots & a_{3,n} & 0 & \cdots & a_{3,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{3,mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n,n} & 0 & \cdots & a_{n,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n,mn} \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} & \cdots & a_{n+1,2n} & \cdots & a_{n+1,n(m-1)+1} & \cdots & a_{n+1,mn} \\ 0 & \cdots & a_{n+2,n} & 0 & \cdots & a_{n+2,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n+2,mn} \\ 0 & \cdots & a_{n+3,n} & 0 & \cdots & a_{n+3,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n+3,mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{2n,n} & 0 & \cdots & a_{2n,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n,mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n(m-1)+1,1} & \cdots & a_{n(m-1)+1,n} & a_{n(m-1)+1,(n+1)} & \cdots & a_{n(m-1)+1,2n} & \cdots & a_{n(m-1)+1,n(m-1)+1} & \cdots & a_{n(m-1)+1,mn} \\ 0 & \cdots & a_{n(m-1)+2,n} & 0 & \cdots & a_{n(m-1)+2,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n(m-1)+2,mn} \\ 0 & \cdots & a_{n(m-1)+3,n} & 0 & \cdots & a_{n(m-1)+3,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n(m-1)+3,mn} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{mn,n} & 0 & \cdots & a_{mn,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{mn,mn} \end{bmatrix}.$$

Bu durumda, A matrisi için aşağıdaki determinant formülü geçerlidir:

$$|A| = \prod_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{k,k} & a_{k,n+k} & \cdots & a_{k,n(m-1)+k} \\ a_{n+k,k} & a_{n+k,n+k} & \cdots & a_{n+k,n(m-1)+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n(m-1)+k,k} & a_{n(m-1)+k,n+k} & \cdots & a_{n(m-1)+k,n(m-1)+k} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

İspata geçmeden önce (4) formülünü $n = 3, m = 2$ için verelim:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & a_{63} & 0 & 0 & a_{66} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_{22} & a_{25} \\ a_{52} & a_{55} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_{33} & a_{36} \\ a_{63} & a_{66} \end{vmatrix} .$$

İspat: (1), (2) ve (3) formüllerindeki n tane matrisi sırasıyla $D(A)_1, D(A)_2, \ldots, D(A)_n$ ile gösterelim. Sonuç 3.1.1'de $|A| = |D(A)|$ olduğu gösterilmişti. Matrislerin çarpımının determinantının determinantlarının çarpımı olduğunu da Teorem 2.2.6'da vermiştik. Buna göre,

$$|A| = |D(A)| = |D(A)_1||D(A)_2| \ldots |D(A)_n|$$

eşitliği kolayca elde edilir. Şimdi, $D(A)_1$ matrisinin determinantını inceleyelim. Determinantı sırasıyla $2., 3., \ldots (n-1)$. satırlarına göre açarsak

$$|D(A)_1| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n+1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{1,n(m-1)+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n+1,1} & 0 & \cdots & 0 & a_{n+1,n+1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{n+1,n(m-1)+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n(m-1)+1,1} & 0 & \cdots & 0 & a_{n(m-1)+1,n+1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{n(m-1)+1,n(m-1)+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,n+1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{1,n(m-1)+1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,n+1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{n+1,n(m-1)+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n(m-1)+1,1} & a_{n(m-1)+1,n+1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{n(m-1)+1,n(m-1)+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

elde ederiz. Şimdi de sırasıyla $(n+1).,(n+2).,\dots,(2n-1).$ satırlarına göre açarsak

$$|D(A)_1| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,n+1} & a_{1,2n+1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{1,n(m-1)+1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,n+1} & a_{n+1,2n+1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{n+1,n(m-1)+1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2n+1,1} & a_{2n+1,n+1} & a_{2n+1,2n+1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n(m-1)+1,1} & a_{n(m-1)+1,n+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{n(m-1)+1,n(m-1)+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Bu şekilde devam edilirse

$$|D(A)_1| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,n+1} & \cdots & a_{1,n(m-1)+1} \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,n+1} & \cdots & a_{n+1,n(m-1)+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n(m-1)+1,1} & a_{n(m-1)+1,n+1} & \cdots & a_{n(m-1)+1,n(m-1)+1} \end{vmatrix}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$|D(A)_k| = \begin{vmatrix} a_{k,k} & a_{k,n+k} & \cdots & a_{k,n(m-1)+k} \\ a_{n+k,k} & a_{n+k,n+k} & \cdots & a_{n+k,n(m-1)+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n(m-1)+k,k} & a_{n(m-1)+k,n+k} & \cdots & a_{n(m-1)+k,n(m-1)+k} \end{vmatrix}$$

olduğu kolaylıkla elde edilir. Bu ise (4) formülünü ispatlar. Yukarıdaki formülde, sağdaki determinantın içindeki $m \times m$ tipindeki matrisler için $D(A)_k^*$ gösterimini kullanacağız:

$$D(A)_k^* = \begin{bmatrix} a_{k,k} & a_{k,n+k} & \cdots & a_{k,n(m-1)+k} \\ a_{n+k,k} & a_{n+k,n+k} & \cdots & a_{n+k,n(m-1)+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n(m-1)+k,k} & a_{n(m-1)+k,n+k} & \cdots & a_{n(m-1)+k,n(m-1)+k} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Sonuç 3.3.1. Teorem 3.3.1'in ifadesinde verildiği gibi bir A dilimlenmiş üst üçgensel matrisini ele alalım. Bu durumda, A'nın tersinin var olması için gerek ve yeter şart her $k = \overline{1,n}$ için

$$|D(A)_k^*| = \begin{vmatrix} a_{k,k} & a_{k,n+k} & \cdots & a_{k,n(m-1)+k} \\ a_{n+k,k} & a_{n+k,n+k} & \cdots & a_{n+k,n(m-1)+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n(m-1)+k,k} & a_{n(m-1)+k,n+k} & \cdots & a_{n(m-1)+k,n(m-1)+k} \end{vmatrix} \neq 0$$

olmasıdır.

İspat: Bu önermenin ispatı (4) formülünden kolayca elde edilir.

Örnek 3.3.1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -19 & 32 & -1 & 13 & 21 \\ 0 & -1 & -7 & 0 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 22 & -24 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 2 & 17 & 0 & -1 & -23 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ biçimindeki dilimlenmiş üst üçgensel matrisin determinantını hesaplayalım.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -19 & 32 & -1 & 13 & 21 \\ 0 & -1 & -7 & 0 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 22 & -24 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 2 & 17 & 0 & -1 & -23 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 45.$$

Örnek 3.3.2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 20 & -1 & 12 & 2 & 52 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 25 & -3 & 32 & 1 & 78 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 9 & 5 & 74 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ biçimindeki dilimlenmiş üst üçgensel matrisin determinantını hesaplayalım:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 20 & -1 & 12 & 2 & 52 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 25 & -3 & 32 & 1 & 78 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 9 & 5 & 74 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (-26)(-12) = 312.$$

3.4. Trigonometrik Fonksiyonların Wronski Determinantı

Bu bölümde bazı trigonometrik fonksiyonların Wronski determinantını dilimlenmiş üst üçgensel matrislerin yardımıyla hesaplayacağız. Öncelikle Wronski determinantını hatırlayalım.

Tanım 3.4.1 [5]. $f_1, f_2, \dots, f_n$ bir I aralığında tanımlı, $(n-1)$. mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1{}'(x) & f_2{}'(x) & \cdots & f_n{}'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

determinantına $f_1, f_2, \dots, f_n$ fonksiyonlarının Wronski determinantı ya da kısaca Wronskianı denir. Genellikle, $W[f_1, f_2, \dots, f_n](x)$ ya da $W(x)$ sembollerinden biri ile gösterilir.

Teorem 3.4.1 [5]. $f_1, f_2, \dots, f_n$ bir I aralığında,

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0$$

n. mertebeden homojen lineer diferansiyel denkleminin çözümleri olsunlar. Bu durumda, her $x_0 \in I$ için

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)dt}$$

dir. Bu formül kaynaklarda Abel formülü olarak geçer.

Sonuç 3.4.1 [5]. $f_1, f_2, \dots, f_n$ bir I aralığında,

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0$$

n. mertebeden homojen lineer diferansiyel denkleminin çözümleri olsunlar. Bu durumda, $f_1, f_2, \dots, f_n$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart her $x_0 \in I$ için $W(x_0) \neq 0$ olmasıdır.

Sonuç 3.4.2 [5]. $f_1, f_2, \dots, f_n$ bir I aralığında,

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0$$

$n.$ mertebeden homojen lineer diferansiyel denkleminin temel çözüm sistemi olsunlar. Bu durumda, bu fonksiyonların Wronskianının sabit olması için gerek ve yeter koşul her $x \in I$ için $p_1(x) = 0$ olmasıdır.

Şimdi, $\cos\alpha_1 x, \sin\alpha_1 x, \cos\alpha_2 x, \sin\alpha_2 x, \dots, \cos\alpha_m x, \sin\alpha_m x$ fonksiyonlarının Wronskianını hesaplayalım. Burada, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ keyfi kompleks sabitlerdir. Biliyoruz ki, bu $2m$ fonksiyon, karakteristik denklemi $2m.$ dereceden

$$(t^2 + \alpha_1^2)(t^2 + \alpha_2^2)\dots(t^2 + \alpha_m^2) = 0$$

polinomu olan $2m$ mertebeli diferansiyel denklemin çözümleridir. Yukarıdaki polinomda tek mertebeli ifade yoktur. Dolayısıyla, ona karşılık gelen diferansiyel denklemde de $p_1(x)$ fonksiyonu her noktada 0 olmalıdır. Sonuç 3.4.2'ye göre bu $2m$ fonksiyonunun Wronskianı sabittir, yani her $x \in \mathbb{C}$ noktasında aynı sabite eşittir. Buna göre, bu fonksiyonların Wronskianını $x = 0$ noktasında hesaplayabiliriz:

$$W = W[\cos\alpha_1 x, \sin\alpha_1 x, \cos\alpha_2 x, \sin\alpha_2 x, \dots, \cos\alpha_m x, \sin\alpha_m x] =$$

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 x & \sin\alpha_1 x & \cdots & \cos\alpha_m x & \sin\alpha_m x \\ -\alpha_1\sin\alpha_1 x & \alpha_1\cos\alpha_1 x & \cdots & -\alpha_m\sin\alpha_m x & \alpha_m\cos\alpha_m x \\ -\alpha_1^2\cos\alpha_1 x & -\alpha_1^2\sin\alpha_1 x & \cdots & -\alpha_m^2\cos\alpha_m x & -\alpha_m^2\sin\alpha_m x \\ \alpha_1^3\sin\alpha_1 x & -\alpha_1^3\cos\alpha_1 x & \cdots & \alpha_m^3\sin\alpha_m x & -\alpha_m^3\cos\alpha_m x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{m-1}\alpha_1^{2m-2}\cos\alpha_1 x & (-1)^{m-1}\alpha_1^{2m-2}\sin\alpha_1 x & \cdots & (-1)^{m-1}\alpha_m^{2m-2}\cos\alpha_m x & (-1)^{m-1}\alpha_m^{2m-2}\sin\alpha_m x \\ (-1)^{m}\alpha_1^{2m-1}\sin\alpha_1 x & (-1)^{m-1}\alpha_1^{2m-1}\cos\alpha_1 x & \cdots & (-1)^{m}\alpha_m^{2m-1}\sin\alpha_m x & (-1)^{m-1}\alpha_m^{2m-1}\cos\alpha_m x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos 0 & \sin 0 & \cdots & \cos 0 & \sin 0 \\ -\alpha_1\sin 0 & \alpha_1\cos 0 & \cdots & -\alpha_m\sin 0 & \alpha_m\cos 0 \\ -\alpha_1^2\cos 0 & -\alpha_1^2\sin 0 & \cdots & -\alpha_m^2\cos 0 & -\alpha_m^2\sin 0 \\ \alpha_1^3\sin 0 & -\alpha_1^3\cos 0 & \cdots & \alpha_m^3\sin 0 & -\alpha_m^3\cos 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{m-1}\alpha_1^{2m-2}\cos 0 & (-1)^{m-1}\alpha_1^{2m-2}\sin 0 & \cdots & (-1)^{m-1}\alpha_m^{2m-2}\cos 0 & (-1)^{m-1}\alpha_m^{2m-2}\sin 0 \\ (-1)^{m}\alpha_1^{2m-1}\sin 0 & (-1)^{m-1}\alpha_1^{2m-1}\cos 0 & \cdots & (-1)^{m}\alpha_m^{2m-1}\sin 0 & (-1)^{m-1}\alpha_m^{2m-1}\cos 0 \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 & \alpha_m \\
-\alpha_1^2 & 0 & -\alpha_2^2 & 0 & \cdots & -\alpha_m^2 & 0 \\
0 & -\alpha_1^3 & 0 & -\alpha_2^3 & \cdots & 0 & -\alpha_m^3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
(-1)^{m-1}\alpha_1^{2m-2} & 0 & (-1)^{m-1}\alpha_2^{2m-2} & 0 & \cdots & (-1)^{m-1}\alpha_m^{2m-2} & 0 \\
0 & (-1)^{m-1}\alpha_1^{2m-1} & 0 & (-1)^{m-1}\alpha_2^{2m-1} & \cdots & 0 & (-1)^{m-1}\alpha_m^{2m-1}
\end{vmatrix}.
$$

Son determinant bir dilimlenmiş üst üçgensel matrisin determinantıdır. Teorem 3.3.1'e göre bu determinant aşağıdaki gibi 2 determinanta ayrılır:

$$
W = \begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
-\alpha_1^2 & -\alpha_2^2 & \cdots & -\alpha_m^2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(-1)^{m-1}\alpha_1^{2m-2} & (-1)^{m-1}\alpha_2^{2m-2} & \cdots & (-1)^{m-1}\alpha_m^{2m-2}
\end{vmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{vmatrix}
\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\
-\alpha_1^3 & -\alpha_2^3 & \cdots & -\alpha_m^3 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(-1)^{m-1}\alpha_1^{2m-1} & (-1)^{m-1}\alpha_2^{2m-1} & \cdots & (-1)^{m-1}\alpha_m^{2m-1}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \left(\prod_{k=1}^{m} \alpha_k\right) \begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
-\alpha_1^2 & -\alpha_2^2 & \cdots & -\alpha_m^2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(-1)^{m-1}\alpha_1^{2m-2} & (-1)^{m-1}\alpha_2^{2m-2} & \cdots & (-1)^{m-1}\alpha_m^{2m-2}
\end{vmatrix}^2
$$

$$
= \left(\prod_{k=1}^{m} \alpha_k\right) \begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
{\alpha_1}^2 & {\alpha_2}^2 & \cdots & {\alpha_m}^2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
({\alpha_1}^2)^{m-1} & ({\alpha_2}^2)^{m-1} & \cdots & ({\alpha_m}^2)^{m-1}
\end{vmatrix}^2.
$$

Son determinant bir Vandermonde determinantıdır. O halde, yukarıdaki trigonometrik fonksiyonların Wronskianı aşağıdaki biçimini alır:

$$
W = \left(\prod_{k=1}^{m} \alpha_k\right)\left(\prod_{1 \le i < j \le m} \left(\alpha_j^2 - \alpha_i^2\right)\right)^2.
$$

Bu formülün bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Sonuç 3.4.3. $\cos\alpha_1 x, \sin\alpha_1 x, \cos\alpha_2 x, \sin\alpha_2 x, \ldots, \cos\alpha_m x, \sin\alpha_m x$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart her $k = \overline{1,m}$ için $\alpha_k \neq 0$ ve $i \neq j$ için $\alpha_i \neq \alpha_j$ ve $\alpha_i \neq -\alpha_j$ olmasıdır.

Sonuç 3.4.4. $\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos mx, \sin mx$ fonksiyonlarının Wronskianı

$$m!\left(\prod_{1\leq i<j\leq m}(j^2-i^2)\right)^2$$

dir.

Örnek 3.4.1. $\cos x, \sin x, \cos 3x, \sin 3x, \cos 8x, \sin 8x$ fonksiyonlarının Wronskianı

$$W = 1.3.8.(8^2-1^2)^2.(8^2-3^2)^2(3^2-1^2)^2 = 18441561600$$

dür.

3.5. Dilimlenmiş Üst Üçgensel Matrisin Bazı Özellikleri

Bu bölümde, dilimlenmiş üst üçgensel matrisin ek matrisi, tersi, özdeğerleri gibi özelliklerini vereceğiz.

Lemma 3.5.1. a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, değişkenlerine bağlı kare bir A matrisinin bir elemanının kofaktörü, matrisin determinantının o elemana göre türevidir.

İspat:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

matrisini ve onun a_{ij} elemanını ele alalım. A'nın determinantının $a_{i,j}$'ye göre türevini alalım. Determinantın bir değişkene göre türevi alınırken ayrı ayrı sütunlarının o değişkene göre türevleri alınır ve determinantlar toplanır [6]:

$$\frac{\partial |A|}{\partial a_{i,j}} = \frac{\partial}{\partial a_{i,j}} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial a_{1,1}}{\partial a_{i,j}} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \frac{\partial a_{2,1}}{\partial a_{i,j}} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{i-1,1}}{\partial a_{i,j}} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \frac{\partial a_{i,1}}{\partial a_{i,j}} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ \frac{\partial a_{i+1,1}}{\partial a_{i,j}} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{n,1}}{\partial a_{i,j}} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \frac{\partial a_{1,2}}{\partial a_{i,j}} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \frac{\partial a_{2,2}}{\partial a_{i,j}} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \frac{\partial a_{i-1,2}}{\partial a_{i,j}} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \frac{\partial a_{i,2}}{\partial a_{i,j}} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \frac{\partial a_{i+1,2}}{\partial a_{i,j}} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \frac{\partial a_{n,2}}{\partial a_{i,j}} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \frac{\partial a_{1,j-1}}{\partial a_{i,j}} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \frac{\partial a_{2,j-1}}{\partial a_{i,j}} & a_{2,j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & \frac{\partial a_{i-1,j-1}}{\partial a_{i,j}} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots & \frac{\partial a_{i,j-1}}{\partial a_{i,j}} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & \frac{\partial a_{i+1,j-1}}{\partial a_{i,j}} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \frac{\partial a_{n,j-1}}{\partial a_{i,j}} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & \frac{\partial a_{1,j}}{\partial a_{i,j}} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & \frac{\partial a_{2,j}}{\partial a_{i,j}} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \frac{\partial a_{i-1,j}}{\partial a_{i,j}} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots & a_{i,j-1} & \frac{\partial a_{i,j}}{\partial a_{i,j}} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & \frac{\partial a_{i+1,j}}{\partial a_{i,j}} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & \frac{\partial a_{n,j}}{\partial a_{i,j}} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & \frac{\partial a_{1,j+1}}{\partial a_{i,j}} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j} & \frac{\partial a_{2,j+1}}{\partial a_{ij}} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & \frac{\partial a_{i-1,j+1}}{\partial a_{i,j}} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & \frac{\partial a_{i,j+1}}{\partial a_{i,j}} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & \frac{\partial a_{i+1,j+1}}{\partial a_{i,j}} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & \frac{\partial a_{n,j+1}}{\partial a_{i,j}} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}+\cdots+$$

$$
+\begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & \dfrac{\partial a_{1,n}}{\partial a_{i,j}} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j} & a_{2,j+1} & \cdots & \dfrac{\partial a_{2,n}}{\partial a_{i,j}} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & \dfrac{\partial a_{i-1,n}}{\partial a_{i,j}} \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & \dfrac{\partial a_{i,n}}{\partial a_{i,j}} \\
a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & \dfrac{\partial a_{i+1,n}}{\partial a_{i,j}} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & \dfrac{\partial a_{n,n}}{\partial a_{i,j}}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
0 & a_{i,2} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
0 & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix}+
$$

$$
+\begin{vmatrix}
a_{1,1} & 0 & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & 0 & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i-1,1} & 0 & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i,1} & 0 & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
a_{i+1,1} & 0 & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n,1} & 0 & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix}+\cdots+
$$

$$
+\begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & 0 & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & 0 & a_{2,j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & 0 & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & 0 & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & 0 & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & 0 & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix}+
$$

$$
+\begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix}+
$$

$$
+\begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & 0 & \cdots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j} & 0 & \cdots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & 0 & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & 0 & \cdots & a_{i,n} \\
a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & 0 & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & 0 & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix}+\cdots+
$$

$$
+\begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & 0 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j} & a_{2,j+1} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & 0 \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & 0 \\
a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
=0+0+\cdots+0+\begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix}+0+\cdots+0
$$

$$
=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix}=A_{ij}.
$$

Son ifade $a_{i,j}$ elemanının kofaktörüdür. Bu ise ispatı bitirir.

Teorem 3.5.1. Dilimlenmiş üst üçgensel $mn \times mn$ tipinde bir matrisin ek matrisi de dilimlenmiş üst üçgensel $mn \times mn$ tipinde bir matristir.

İspat: Bir matrisin ek matrisi, kofaktörlerinin transpozudur. Yani dilimlenmiş üst üçgensel bir A matrisinin ekinin de kendi tipinde dilimlenmiş üst üçgensel matris olduğunu göstermek için $\overline{i_0} < \overline{j_0}$ koşulunu sağlayan $a_{i_0 j_0}$ elemanlarının kofaktörlerinin 0 olduğunu göstermek yeterlidir. $a_{i_0 j_0}$ elemanı için $\overline{i_0} < \overline{j_0}$ koşulu sağlansın. O zaman, Sonuç 3.1.1'e göre A'nın determinantı $a_{i_0 j_0}$ elemanından bağımsızdır. Teorem 2.3.1'e göre A'nın determinantının $a_{i_0 j_0}$ elemanına göre türevi 0'dır. Ayrıca yukarıdaki lemmaya göre, A'nın determinantının $a_{i_0 j_0}$ elemanına göre türevi, $a_{i_0 j_0}$ elemanının kofaktörüdür. Yani, $\overline{i_0} < \overline{j_0}$ koşulunu sağlayan $a_{i_0 j_0}$ elemanlarının kofaktörleri 0'dır. Bu sonuca göre, dilimlenmiş bir üst üçgensel $mn \times mn$ tipindeki matrisin kofaktörleri matrisi dilimlenmiş alt üçgensel $mn \times mn$ tipinde bir matristir. Ek matris, kofaktörler matrisinin transpozu olduğundan, A'nın ek matrisi dilimlenmiş bir üst üçgensel $mn \times mn$ tipinde matristir.

Sonuç 3.5.1. Dilimlenmiş bir üst üçgensel $mn \times mn$ tipinde matrisin determinantı sıfırdan farklı ise tersi de dilimlenmiş bir üst üçgensel $mn \times mn$ tipinde matristir.

İspat: Bu önermenin ispatı

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} ek(A)$$

eşitliğinden kolayca elde edilir.

Teorem 3.5.2. Dilimlenmiş üst üçgensel bir A matrisinin bir özdeğeri $D(A)_k^*$'lardan en az birinin de özdeğeridir. Tersine, $D(A)_k^*$'ların özdeğerleri aynı zamanda A'nın bir özdeğeridir (A ve $D(A)_k^*$ matrislerinin açılımları için Teorem 3.3.1'e ve (5) formülüne bakınız).

İspat: λ bir kompleks sayı olsun. Bu sayının A'nın bir özdeğeri olması için gerek ve yeter şart

$$|A - \lambda I| =$$

$$
\begin{vmatrix}
a_{1,1}-\lambda & \cdots & a_{1,n} & a_{1,n+1} & \cdots & a_{1,2n} & \cdots & a_{1,n(m-1)+1} & \cdots & a_{1,mn} \\
0 & \cdots & a_{2,n} & 0 & \cdots & a_{2,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2,mn} \\
0 & \cdots & a_{3,n} & 0 & \cdots & a_{3,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{3,mn} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & a_{n,n}-\lambda & 0 & \cdots & a_{n,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n,mn} \\
a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1}-\lambda & \cdots & a_{n+1,2n} & \cdots & a_{n+1,n(m-1)+1} & \cdots & a_{n+1,mn} \\
0 & \cdots & a_{n+2,n} & 0 & \cdots & a_{n+2,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n+2,mn} \\
0 & \cdots & a_{n+3,n} & 0 & \cdots & a_{n+3,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n+3,mn} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & a_{2n,n} & 0 & \cdots & a_{2n,2n}-\lambda & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n,mn} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n(m-1)+1,1} & \cdots & a_{n(m-1)+1,n} & a_{n(m-1)+1,(n+1)} & \cdots & a_{n(m-1)+1,2n} & \cdots & a_{n(m-1)+1,n(m-1)+1}-\lambda & \cdots & a_{n(m-1)+1,mn} \\
0 & \cdots & a_{n(m-1)+2,n} & 0 & \cdots & a_{n(m-1)+2,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n(m-1)+2,mn} \\
0 & \cdots & a_{n(m-1)+3,n} & 0 & \cdots & a_{n(m-1)+3,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n(m-1)+3,mn} \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & a_{mn,n} & 0 & \cdots & a_{mn,2n} & \cdots & 0 & \cdots & a_{mn,mn}-\lambda
\end{vmatrix}
= 0
$$

olmasıdır. (4) formülüne göre bu bağıntı

$$
\prod_{k=1}^{n} |D(A)_k^* - \lambda I| = \prod_{k=1}^{n}
\begin{vmatrix}
a_{k,k}-\lambda & a_{k,n+k} & \cdots & a_{k,n(m-1)+k} \\
a_{n+k,k} & a_{n+k,n+k}-\lambda & \cdots & a_{n+k,n(m-1)+k} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n(m-1)+k,k} & a_{n(m-1)+k,n+k} & \cdots & a_{n(m-1)+k,n(m-1)+k}-\lambda
\end{vmatrix}
= 0
$$

bağıntısına dönüşür. Bu ise ispatı bitirir.

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, alt matrisleri üst üçgensel olan blok matrisler, dilimlenmiş üst üçgensel matris olarak adlandırılmış ve bu tür matrislerin determinantı, faktörizasyonu, ek matrisi, tersi ve özdeğerleri incelenmiştir. Bu özellikler için teoremler ve örnekler verilmiştir. Ayrıca, trigonometrik fonksiyonların Wronskian özellikleri araştırılmıştır. Matrislerin bunların dışında birçok özellikleri ve uygulama alanları vardır. Araştırmacılar bizim incelemediğimiz bu özellikleri dilimlenmiş üst üçgensel ya da alt üçgensel matrisler için inceleyebilirler.

5. KAYNAKLAR

[1] Lipschutz S, 1991. Schaum's Outline of Theory and Problems of Linear Algebra. McGraw-Hill. New York, N.Y.

[2] Çallıalp F, 2011. Örneklerle Soyut Cebir. Birsen Yayınevi. İstanbul.

[3] Musayev B, Alp M, Mustafayev N, Ekincioğlu İ, 2003. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz 1.Tekağaç Eylül yayıncılık. Kütahya.

[4] Musayev B, Koca K, Mustafa N, 2006. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz 3.Seçkin yayıncılık. Ankara.

[5] Boyce WE, DiPrima RC, 1986. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Wiley. New York, N.Y.

[6] Adams, RA, 1995. Calculus – A Complete Course (3rd. ed.) Addison-Wesley. Ontario.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Bitlis'te doğdum. İlköğretimi ve ortaokulu Tatvan Uluer İlköğretim Okulunda; liseyi Tatvan Atatürk Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesinde tamamladım. 2008 yılında kazandığım Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Bölümünden 2012 yılında mezun oldum. 2013 yılında Milli Eğitim Bakanlığında İlköğretim Matematik Öğretmeni olarak Bitlis'in Tatvan ilçesinde çalışmaya başladım. 2018'de Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladım.