ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ
ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA AÇILABİLİR REGLE YÜZEYLER ÜZERİNE

Hilal KARAKAŞ
Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK, 2014

Ref. No: 10036216

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA AÇILABİLİR REGLE YÜZEYLER ÜZERİNE

Hilal KARAKAŞ
Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK, 2014

ANADOLU UNIVERSITY

BILECIK SEYH EDEBALI UNIVERSITY

Graduate School Of Sciences
Department of Mathematics

ON THE DETERMINATION OF A DEVELOPABLE RULED SURFACE IN MINKOWSKI 3-SPACE

Hilal KARAKAŞ
Master's Thesis

Thesis Advisor
Assoc. Prof. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK, 2014

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS

JÜRİ ONAY FORMU

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 24/04/2014 tarih ve 18 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 09/05/2014 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Hilal KARAKAŞ'ın "3-Boyutlu Minkowski Uzayında Açılabilir Regle Yüzeyler Üzerine" başlıklı tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

ÜYE : Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

ÜYE : Doç. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

ONAY

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ……….. tarih ve ……………/………… sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde bu çalışma için gerekli kavramlar, tanımlar ve teoremler verildi. İkinci bölümde dual vektörel hesaplamalar kullanılarak, açılabilir regle yüzeylerin belirlenmesi üzerine bir metot sunuldu. Açılabilir regle yüzeylerin ifadesi olan $m(t,u) = p(t) + ux(t)$'nin, dual vektörel ifadeler kullanılarak, taban eğrisi verildiğinde taban eğrisinin koordinatları yardımıyla elde edilmesine değinildi, burada $p(t)$, $m(t,u)$'nun taban eğrisidir. Üçüncü bölümde Ö. Köse'nin çalışması 3-boyutlu Minkowski uzayına genişletildi. Dual vektörel hesaplamalar kullanılarak, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında açılabilir regle yüzeylerin belirlenmesi üzerine bir metot sunuldu. Açılabilir timelike (zaman benzeri) veya spacelike (uzayımsı) regle yüzeylerin ifadesi olan $m(t,u) = p(t) + ux(t)$'nin, dual vektörel ifadeleri kullanılarak, taban eğrisi verildiğinde taban eğrisinin koordinatları yardımıyla elde edilmesine değinildi, burada $p(t)$, $m(t,u)$'nun taban eğrisidir. Dördüncü bölümde de sonuç kısmına yer verildi.

Anahtar Sözcükler: Açılabilir regle yüzey, dual sayı, dual vektör, dual Lorentz uzayı, 3-boyutlu Minkowski uzayı, Eduard Study dönüşümü.

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. First chapter deals with the concepts, definitions and necessary theorems. In second chapter, using dual vector calculus, a method of determination of a developable ruled surface is presented. The dual vectorial expression of a developable ruled surface $m(t,u) = p(t) + ux(t)$, $p(t)$ is called the base curve of $m(t,u)$, obtained from the coordinates of the base curve. In chapter three, the study of Ö. Köse is extended in the Minkowski 3-space. Using dual vector calculus, a method of determination of a developable ruled surface in $\mathbb{R}_1^3$ is presented. The dual vectorial expression of a developable timelike and spacelike ruled surface $m(t,u) = p(t) + ux(t)$, $p(t)$ is called the base curve of $m(t,u)$, obtained from the coordinates of the base curve. And finally, chapter four is devoted to the conclusion.

Key Words: Developable ruled surface, dual numbers, dual vectors, dual Lorentzian space, Minkowski 3-space, Eduard Study mapping.

TEŞEKKÜR

Danışmanlığımı üstlenip, bilgi ve tecrübesiyle destek veren, çalışmamın her safhasında yardımını esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ'a, birikimlerini severek paylaşan saygıdeğer hocam Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU'NA, tez yazım sürecinde bana sürekli destek olan fedakar eşim Hakan KARAKAŞ'a, tüm aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hilal KARAKAŞ

22.04.2014

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGE VE ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{E}^3$	3-boyutlu Öklid uzayı
ε	Dual birim
$\mathbb{D}$	Dual sayılar cümlesi
$\mathbb{D}^3$	Dual vektörler cümlesi
$\mathbb{D}_1^3$	Dual Lorentz uzayı
$\mathbb{H}_0^2$	Dual hiperbolik birim küre
P_x	Dağılma parametresi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{R}^3$	3-boyutlu reel vektör uzayı
$\mathbb{R}_1^3$	3-boyutlu Minkowski uzayı
$\mathbb{S}^2$	Dual birim küre
$\mathbb{S}_1^2$	Dual Lorentz birim küre
Λ	Dual light-like (Işık benzeri) koni
$\tilde{s}$	Dual yay uzunluğu
$\tilde{\delta}$	Dual hız
$\lVert\ \rVert$	Norm fonksiyonu
$\langle , \rangle$	İç çarpım
$\langle , \rangle_L$	Lorentz iç çarpımı
$\times$	Vektörel çarpım

$\wedge_L$	Lorentz vektörel çarpımı
Δ	$\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında dağılma parametresi

GİRİŞ

William Kingdon Clifford dual sayıları geometrik araştırmalarında bir araç olarak kullanmıştır. Onun ardından E. Study, dual sayıları ve dual vektörleri çizgiler ve hareket geometrideki araştırmalarında kullanmıştır. Birim dual vektörleri ve kendi ismiyle tanımlı dönüşümü kullanarak yönlü doğruların temsili ile ilgilenmiştir. $\mathbb{S}^2$ birim dual küresinin vektörleri ve $\mathbb{R}^3$ çizgiler uzayının yönlü doğruları arasında birebir eşleme olduğunu göstermiştir.

H. H. Uğurlu ve A. Çalışkan, E. Study dönüşümünü $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayına genişleterek çalışmalar yapmışlardır. $\mathbb{D}_1^3$ Dual Lorentz uzayında sırasıyla hiperbolik birim küre ve Lorentz birim küresi $\mathbb{H}_0^2$ ve $\mathbb{S}_1^2$'nin dual timelike (zaman benzeri) veya spacelike (uzayımsı) birim vektörleri, $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz doğrular uzayının (3-boyutlu Minkowski uzayının) yönlü timelike veya spacelike doğruları ile birebir eşleme içinde olduğu gösterilmiştir.

Bu tezin amacı dual vektörel hesaplamalar yardımıyla açılabilir regle yüzeylerin inşasında bir yöntem geliştirmektir. Bu amaçla Ö. Köse'nin "A method of the determination of a developable ruled surface" adlı çalışmasından yararlanılmıştır. Yüzeylerin dual vektörel ifadeleri kullanılarak, taban eğrisinin koordinatları yardımıyla regle yüzey elde edilmiştir. Daha sonra çalışma genişletilmiş ve açılabilir spacelike veya timelike regle yüzeylerin inşasında dual vektörel hesaplamalar kullanılmıştır. Yine aynı şekilde yüzeylerin dual vektörel ifadeleri kullanılarak, taban eğrisinin koordinatları yardımıyla regle yüzey elde edilmiştir.

1. TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Öklid Uzayı

Tanım 1.1.1 $A \neq \emptyset$ bir cümle V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \to V$$

fonksiyonu varsa A cümlesine V ile birleştirilmiş bir **afin uzay** denir.

i. $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$ dir.

ii. $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalihoğlu, 2000a).

Tanım 1.1.2 Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ olmak üzere V de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı da yeni bir ad olarak **Öklid uzayı** adını alır.

$\mathbb{R}^3$ 3-boyutlu standart reel vektör uzayı ile birleştirilmiş $\mathbb{R}^3$ afin uzayını ele alalım. Bu $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında Öklid iç çarpımı $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

biçiminde tanımlanır. Böylece $\mathbb{R}^3$ afin uzayı **3-boyutlu Öklid uzayı** olur ve $\mathbb{E}^3$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 2000a).

Tanım 1.1.3

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}: \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{R} \\ &(x, y) \to \mathrm{d}(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} \end{aligned}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $\mathrm{d}(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in \mathbb{E}^n$ noktaları arasındaki **uzaklık** denir (Hacısalihoğlu, 2000a).

Teorem 1.1.1 $\mathbb{E}^n$ de uzaklık fonksiyonu bir metriktir (Hacısalihoğlu, 2000a).

Tanım 1.1.4 $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\begin{aligned} &\|\alpha'\|: I \to \mathbb{R} \\ &t \to \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre **skalar hız fonksiyonu** ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da M nin (I, α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(t)$ noktasındaki **skalar hız** denir (Hacısalihoğlu, 2000a).

Tanım 1.1.5 M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Eğer $\forall s \in I$ için

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğuna göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine yay-parametresi adı verilir (Hacısalihoğlu, 2000a).

Tanım 1.1.6 M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $a, b \in I$ olmak üzere, a dan b ye M eğrisinin **yay uzunluğu**, eğrinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki uzunluğuna karşılık gelen

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \,, t \in I$$

reel sayısına denir (Hacısalihoğlu, 2000a).

1.2. Dual Sayılar

Tanım 1.2.1 Her $x, x^* \in \mathbb{R}$ için $A = (x, x^*)$ ikilisine bir sıralı ikili adı verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cümlesi $\mathbb{D}$ ile gösterilsin.

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, x^*) : x, x^* \in \mathbb{R}\}$$

cümlesi üzerinde iki iç işlem ve eşitlik aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 1.2.2 $A = (x, x^*),\ B = (y, y^*) \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

iç işlemi

$$A \oplus B = (x, x^*) \oplus (y, y^*) = (x + y, x^* + y^*)$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{D}$ deki toplama olarak isimlendirilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.2.3 $A = (x, x^*),\ B = (y, y^*) \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\otimes : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

iç işlemi

$$A \otimes B = (x, x^*) \otimes (y, y^*) = (xy, xy^* + x^* y)$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{D}$ deki çarpma olarak isimlendirilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.2.4 $A = (x, x^*),\ B = (y, y^*) \in \mathbb{D}$ için

$$x = y \text{ ve } x^* = y^*$$

ise A ile B eşittir denir ve $A = B$ şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.2.5 $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi olmak üzere

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise, $\mathbb{D}$ cümlesine dual sayılar sistemi ve $(x,x^*)\in\mathbb{D}$ elemanına da bir dual sayı denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 1.2.1 $(\mathbb{D},\oplus,\otimes)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 1.2.2 $(\mathbb{D},\oplus,\otimes)$ üçlüsü bir cisim değildir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 1.2.3 $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası, $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesine izomorf bir alt cümleyi alt cisim olarak kapsar (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.2.6 Bir $A=(x,x^*)\in\mathbb{D}$ dual sayısında "x" reel sayısına A nın reel kısmı, "x^*" reel sayısına da A nın dual kısmı denir ve $\operatorname{Re}A=x,\ DuA=x^*$ şeklinde yazılır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.2.7 $(1,0)=1$ dual sayısına $\mathbb{D}$ deki çarpma işleminin birim elemanı veya $\mathbb{D}$ deki reel birim denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.2.8 $(0,1)$ dual sayısı kısaca ε ile gösterilir ve dual birim olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu, 1983).

$$\varepsilon^2=(0,1)\otimes(0,1)=(0,0)$$

dır.

Teorem 1.2.4 $A=(x,x^*)\in\mathbb{D}$ dual sayısı

$$A=x+\varepsilon x^*$$

şeklinde yazılabilir. Yani

$$(x,x^*)=x+\varepsilon x^*$$

eşitliğini yazabiliriz (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 1.2.5 $A=(x,x^*)\in\mathbb{D}$ dual sayısı ve $\lambda\in\mathbb{R}$ ise λ skaları ile A nın çarpımı $\lambda A=(\lambda x,\lambda x^*)$ dır (Hacısalihoğlu, 1983).

1.3. Dual Vektörler Uzayı ($\mathbb{D}$ Modül)

Tanım 1.3.1 H birimi 1 olan değişmeli bir halka ve S bir Abel grubu olmak üzere

$$\begin{aligned} H \times S &\to S \\ (a,\alpha) &\to a\alpha \end{aligned}$$

dış işlemi, $a,b \in H$ ve her $\alpha,\beta \in S$ için

i. $a(\alpha+\beta) = a\alpha + a\beta$

ii. $(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha$

iii. $(ab)\alpha = a(b\alpha)$

iv. $1\alpha = \alpha$

özeliklerini sağlıyor ise S ye H üzerinde bir modül adı verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.3.2 $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası olmak üzere

$$\mathbb{D}\times\mathbb{D}\times\mathbb{D} = \mathbb{D}^3 = \{\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) : \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \in \mathbb{D}\}$$

cümlesi üzerinde $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3),\ \tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3) \in \mathbb{D}^3$ ve $\lambda \in \mathbb{D}$ için, sırasıyla, toplama, skalarla çarpma ve eşitlik,

Toplama;

$$\begin{aligned} + : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 &\to \mathbb{D}^3 \\ (\tilde{x}, \tilde{y}) &\to \tilde{x} + \tilde{y} = (\tilde{x}_1 + \tilde{y}_1, \tilde{x}_2 + \tilde{y}_2, \tilde{x}_3 + \tilde{y}_3) \end{aligned}$$

Skalar ile Çarpma;

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{D} \times \mathbb{D}^3 &\to \mathbb{D}^3 \\ (\lambda, \tilde{x}) &\to \lambda\tilde{x} = (\lambda\tilde{x}_1, \lambda\tilde{x}_2, \lambda\tilde{x}_3) \end{aligned}$$

Eşitlik; $\tilde{x} = \tilde{y} \Leftrightarrow \tilde{x}_i = \tilde{y}_i,\ \ i = (1,2,3)$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.3.1 $(\mathbb{D}^3,+)$ bir Abel grubudur (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.3.3 $(\mathbb{D}^3,+,\cdot)$ sistemi $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası üzerinde bir modüldür. Bu modüle $\mathbb{D}$-Modül denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.3.4 $\mathbb{D}$-Modül'ün elemanları olan sıralı üçlülere dual vektörler denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 1.3.2 $x, x^* \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $\mathbb{D}$-Modül'de her bir $\tilde{x}$ dual vektör

$$\tilde{x} = x + \varepsilon x^*$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\varepsilon = (0,1) \in \mathbb{D}$ dir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 1.3.3 $\tilde{x} = x + \varepsilon x^* = (x, x^*)$ dual vektörünün $\lambda \in \mathbb{D}$ skaları ile çarpımı

$$\lambda\tilde{x} = (\lambda x, \lambda x^*)$$

dır (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 1.3.4 $\tilde{x} = (x, x^*)$ ve $\tilde{y} = (y, y^*) \in \mathbb{D}$-Modül için

$$\tilde{x} = \tilde{y} \Leftrightarrow x = y \text{ ve } x^* = y^*$$

dır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.3.5 $\tilde{x} = x + \varepsilon x^*, \tilde{y} = y + \varepsilon y^* \in \mathbb{D}$-Modül dual vektörlerinin iç çarpımı

$$\text{f}: \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \to \mathbb{D}$$

şeklinde bir dönüşümdür ve

$$\text{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle = \langle x, y \rangle + \varepsilon\left[\langle x, y^* \rangle + \langle x^*, y \rangle\right]$$

şeklinde tanımlanır.

Herhangi bir vektör uzayı üzerinde olduğu gibi iç çarpım aksiyomları $\mathbb{D}$-Modül üzerinde de kabul edilebilir. O halde $\mathbb{D}$-Modül'de iç çarpım aşağıdaki şekilde

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle = \langle x, y \rangle + \varepsilon[\langle x^*, y \rangle + \langle x, y^* \rangle]$$

yazılabilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.3.6 Bir $\tilde{x} = x + \varepsilon x^*$ dual vektörün normu

$$\|\tilde{x}\| = \left(\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle\right)^{1/2} = (\|x\|, \frac{\langle x, x^* \rangle}{\|x\|}),\ x \neq \vec{0},$$

dual sayısına denir. Burada bu dual sayı için

$$a = \|x\| \text{ ve } a^* = \frac{\langle x, x^* \rangle}{\|x\|}$$

olmak üzere

$$\|\tilde{x}\| = a + \varepsilon a^*$$

yazılabilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.3.7 Normu $(1, 0)$ dual sayısı olan dual vektöre birim dual vektör denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 1.3.5 $\tilde{x} = x + \varepsilon x^*$ birim dual vektör ise,

$$\|x\| = 1,\ \langle x, x^* \rangle = 0$$

dır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.3.8 $\{\tilde{x} = x + \boldsymbol{\varepsilon} x^*;\ \|\tilde{x}\| = (1, 0),\ x, x^* \in \mathbb{R}^3\}$ cümlesine $\mathbb{D}$-Modül'de birim dual küre denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 1.3.6 (E. Study Dönüşümü) $\tilde{x} \neq (0, a) \in \mathbb{D}$-Modül olmak üzere $\mathbb{D}$-Modül'de denklemi

$$\|\tilde{x}\| = (1, 0)$$

olan birim dual kürenin dual noktaları, $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.3.9 $\mathbb{R}^3$ deki bir doğru (x, x^*) dual vektör çifti ile belirlenebilir. x ve x^* vektörlerinin bileşenlerine söz konusu doğrunun **normlanmış Plücker doğru koordinatları** denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.3.10 $\tilde{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbb{D}$-Modül olmak üzere

$$u = \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}$$

birim dual vektörüne $\tilde{x}$ dual vektörünün ekseni denir.

Tanım 1.3.11 Bir $\tilde{x} = x + \varepsilon x^*$ dual vektörü verilsin.

$$k = \frac{\langle x, x^* \rangle}{\|x\|^2}$$

reel sayısına o dual vektörün adımı veya yükselişi denir.

$$\tilde{x} = x(1 + \varepsilon k)u$$

dual vektörü için, k sonlu bir sayı ise $x \neq 0$ ve $x^* \neq 0$ dır. Bu $\tilde{x}$ dual vektörüne **has dual vektör** denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.3.12

$$f(z) = f(z_0) + \frac{z - z_0}{1!} f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} f''(z_0) + \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + \ldots$$

serisine f dual fonksiyonunun $z_0 \in \mathbb{D}$ noktasındaki **Taylor açılımı** denir. Bu tanım gereğince, f dual fonksiyonunun $x = 0$ daki Taylor açılımı

$$f(x + \varepsilon x^*) = f(x) + \varepsilon x^* f'(x)$$

şeklini alır. Özel olarak, $f(x+\varepsilon x^*)=\cos(x+\varepsilon x^*)$, $f(x+\varepsilon x^*)=\sin(x+\varepsilon x^*)$, $f(x+\varepsilon x^*)=ch(x+\varepsilon x^*)$ ve $f(x+\varepsilon x^*)=sh(x+\varepsilon x^*)$ dual fonksiyonları alınırsa bu fonksiyonların $0=(0,0)$ dual noktasındaki Taylor açılımları:

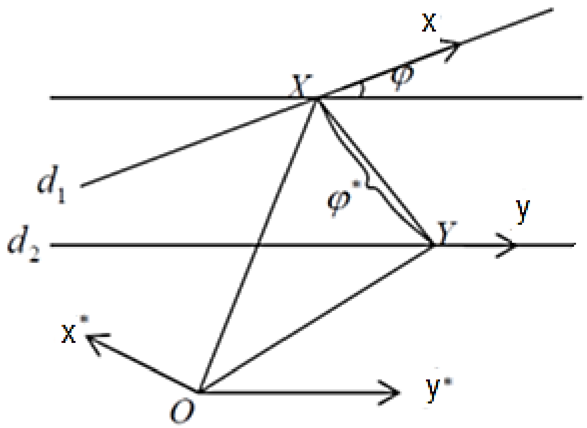
$$\begin{aligned}
\cos(x+\varepsilon x^*) &= \cos x-\varepsilon x^*\sin x\\
\sin(x+\varepsilon x^*) &= \sin x+\varepsilon x^*\cos x\\
ch(x+\varepsilon x^*) &= chx+\varepsilon x^* shx\\
sh(x+\varepsilon x^*) &= shx+\varepsilon x^* chx
\end{aligned}$$

olarak elde edilirler (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.3.13 $\tilde{x}$ ve $\tilde{y}$ iki birim dual vektör ve bu birim dual vektörlere $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen yönlü doğrular, sırasıyla, d_1 ve d_2 olsunlar. d_1 doğrusunun yönü x, yeri x^*, d_2 doğrusunun yönü y, yeri de y^* ile belirlidir. x ve y vektörleri arasındaki açı φ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{x},\tilde{y}\rangle &= \cos\Phi=\cos(\varphi+\varepsilon\varphi^*)\\
&= \cos\varphi-\varepsilon\varphi^*\sin\varphi,\quad 0\le\varphi\le\pi,\quad \varphi\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

dir.



Şekil 1.1. Dual açı.

Burada $\Phi=\varphi+\varepsilon\varphi^*$ dual sayısına $\tilde{x}$ ve $\tilde{y}$ birim vektörleri arasındaki **dual açı** denir. $\tilde{x}$ ve $\tilde{y}$ birim dual vektörleri arasındaki $\Phi=\varphi+\varepsilon\varphi^*$ dual açısı, bunların $\mathbb{R}^3$ te temsil ettikleri d_1 ve d_2-yönlü doğrularının arasındaki φ açısı ve en kısa uzaklığı gösteren φ^* reel çiftinden oluşur (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.3.14 $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{D}$-Modül dual vektörlerin dış çarpımı

$$\wedge : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \to \mathbb{D}^3$$
$$\tilde{x} \wedge \tilde{y} = x \wedge y + \varepsilon(x^* \wedge y + x \wedge y^*)$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 1.3.7 $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{D}$-Modül için

$$\tilde{x} \wedge \tilde{y} = \|\tilde{x}\| \|\tilde{y}\| \sin \Phi \vec{N}$$

dir (Hacısalihoğlu, 1983).

1.4. Lorentz Uzayı ($\mathbb{R}_1^3$ 3-Boyutlu Minkowski Uzayı)

Tanım 1.4.1 V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa, $\langle , \rangle$ fonksiyonuna V vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form denir.

i. Bilineerlik Aksiyomu: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall x, y, z \in V$ için

$$\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$$
$$\langle x, ay + bz \rangle = a\langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle$$

ii. Simetri Aksiyomu: $\forall x, y \in V$ için

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

(O'Neill, 1983).

Tanım 1.4.2 $\langle,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu simetrik bilineer form olsun.

i. $\forall x \in V$ ve $x \neq 0$ için $\langle x, x\rangle > 0$ ise simetrik bilineer forma pozitif tanımlı,

ii. $\forall x \in V$ ve $x \neq 0$ için $\langle x, x\rangle < 0$ ise simetrik bilineer forma negatif tanımlı,

iii. $\forall x \in V$ ve $x \neq 0$ için $\langle x, x\rangle \geq 0$ ise simetrik bilineer forma yarı-pozitif tanımlı,

iv. $\forall x \in V$ ve $x \neq 0$ için $\langle x, x\rangle \leq 0$ ise simetrik bilineer forma yarı-negatif tanımlı,

v. $\forall x \in V$ için $\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow y = 0$ ise simetrik bilineer forma non-dejeneredir denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.4.3 V bir vektör uzayı ve

$$\langle,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

bir simetrik bilineer form olsun.

$$\langle,\rangle\big|_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna $\langle,\rangle$ simetrik bilineer formunun indeksi denir ve ν ile gösterilir. ν, $\langle,\rangle$ nin indeksi olmak üzere $0 \leq \nu \leq boyV$ dir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.4.4 Bir V vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilineer forma V vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpım denir. V üzerindeki bir skalar çarpım $\langle,\rangle$ ise $(V, \langle,\rangle)$ ikilisine skalar çarpım uzayı denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.4.5 V bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi ν olmak üzere $\nu = 1$ ve $boyV \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir **Lorentz uzayı** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.4.6 $\mathbb{R}^n$, n-boyutlu standart reel vektör uzayı üzerinde her $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall v_{\mathrm{p}}, w_{\mathrm{p}} \in T_{\mathrm{p}}\mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\langle v_{\mathrm{p}}, w_{\mathrm{p}}\rangle_L = \sum_{i=1}^{n-\nu} v_i w_i - \sum_{i=n-\nu}^{n} v_i w_i$$

eşitliğiyle verilen ν indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya **yarı-Öklid uzayı** denir ve $\mathbb{R}_\nu^n$ ile gösterilir. Burada $1 \le i \le n$ olmak üzere, v_i ve w_i skalarları, sırasıyla, v_p ve w_p tanjant vektörlerinin bileşenleridir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.4.7 $\mathbb{R}_\nu^n$ yarı-Öklid uzayında $\nu = 1$ ve $n \ge 2$ ise $\mathbb{R}_1^n$ yarı-Öklid uzayına **Minkowski n-uzay** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.4.8 V bir Lorentz uzayı olsun. $x \in V$ olmak üzere

i. $\langle x, x \rangle_L > 0$ veya $x = 0$ ise x vektörüne spacelike,

ii. $\langle x, x \rangle_L < 0$ vektörüne timelike,

iii. $\langle x, x \rangle_L = 0$, $x \ne 0$ ise x vektörüne null (lightlike)

denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.4.9 $x, y \in V$ için $\langle x, y \rangle_L = 0$ ise $x \ne 0, y \ne 0$ vektörleri birbirine diktir denir ve $x \perp y$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.4.10 Bir V vektör uzayı üzerindeki skalar çarpım $\langle , \rangle_L$ olsun. Bir $x \in V$ vektörünün **modülü (normu)**

$$\|x\| = \sqrt{\left|\langle x, x \rangle_L\right|}$$

olarak tanımlanır.

Eğer $\|x\| = 1$ ise x vektörüne **birim vektör** denir. Ortogonal birim vektörlerin cümlesine ortonormal sistem denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.4.11 V Lorentz vektör uzayı ve $x, y \in V$ timelike birim vektörler olsun. Bu durumda

$$ch\rho = -\langle x, y \rangle_L$$

olacak şekildeki ρ sayısına x ve y timelike vektörleri arasındaki açı denir (Birman ve Nomizu, 1984).

1.4.1. $\mathbb{R}_1^3$ 3-Boyutlu Minkowski Uzayı

Tanım 1.4.1.1 Tanım 1.4.7 de özel olarak $n=3$ alınırsa, $\mathbb{R}_1^3$ uzayına **3-boyutlu Minkowski uzay** denir. Bu durumda bu uzayın standart metriği, $x=(x_1,x_2,x_3)$ ve $y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}_1^3$ olmak üzere

$$\langle x,y\rangle_L = x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3$$

dir (Lopez, 2008).

Tanım 1.4.1.2 $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}_1^3$ olsun. Eğer

i. $\langle x,x\rangle_L>0$ veya $x=0$ ise x vektörüne spacelike vektör,

ii. $\langle x,x\rangle_L<0$ vektörüne timelike vektör,

iii. $\langle x,x\rangle_L=0$, $x\neq 0$ ise x vektörüne null (lightlike) vektör

denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.4.1.3 $x,y\in\mathbb{R}_1^3$ olmak üzere

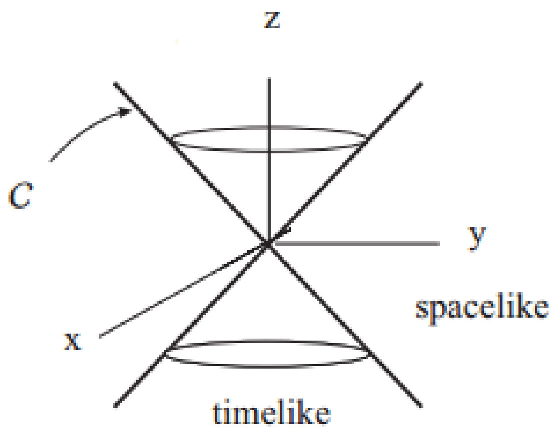
$$x\wedge_L y=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

vektörüne x ve y vektörlerinin Lorentz anlamında **vektörel çarpım**ı denir. Burada $e_1\wedge_L e_2=-e_3$, $e_2\wedge_L e_3=e_1$, $e_3\wedge_L e_1=e_2$ dir.

Tanım 1.4.1.4 $\mathbb{R}_1^3$ de bütün lightlike vektörleri içeren cümleye light koni denir ve C ile gösterilir.

$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}_1^3 : x^2+y^2-z^2=0\}-\{(0,0,0)\}$$

dır (Lopez, 2008).



Şekil 1.2. $\mathbb{R}_1^3$'de vektörler.

Tanım 1.4.1.5 Bir α eğrisi

$$\begin{aligned} \alpha &: I \to \mathbb{R}_1^3 \\ s &\to \alpha(s) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. Bu taktirde α eğrisinin,

i. $\alpha'(s)$ hız vektörü spacelike ise α eğrisine spacelike,

ii. $\alpha'(s)$ hız vektörü timelike ise α eğrisine timelike,

iii. $\alpha'(s)$ hız vektörü null ise α eğrisine nulldür

denir (O'Neill, 1983).

1.5. $\mathbb{D}_1^3$ Dual Lorentz Uzayı

Tanım 1.5.1 $\tilde{x} = x + \varepsilon x^*$ ve $\tilde{y} = y + \varepsilon y^* \in \mathbb{D}^3$ olmak üzere $\tilde{x}$ ve $\tilde{y}$ dual vektörlerinin Lorentz iç çarpımı

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_L = \langle x, y \rangle_L + \varepsilon\left(\langle x, y^* \rangle_L + \langle x^*, y \rangle_L \right)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece, bu Lorentz iç çarpımıyla birlikte $\mathbb{D}^3$ dual uzayına **dual Lorentz uzayı** denir ve $\mathbb{D}_1^3$ ile gösterilir.

Dual Lorentz vektörlerinin cümlesi

$$\mathbb{D}_1^3 = \left\{ \tilde{x} = x + \varepsilon x^* : x, x^* \in \mathbb{R}_1^3 \right\}$$

ile gösterilir (Yaylı vd., 2002).

Tanım 1.5.2 $\tilde{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbb{D}_1^3$ olsun. Bu taktirde

i. x vektörü spacelike ise $\tilde{x}$ dual vektörüne spacelike,

ii. x vektörü timelike ise $\tilde{x}$ dual vektörüne timelike,

iii. x vektörü null ise $\tilde{x}$ dual vektörüne nulldür

denir (Uğurlu ve Çalışkan, 1996).

Tanım 1.5.3 $\mathbb{D}_1^3$ deki bütün dual vektörlerin cümlesi **dual light-like koni** olarak isimlendirilir ve Λ ile ifade edilir (Uğurlu ve Çalışkan, 1996).

Tanım 1.5.4 Bir $\tilde{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbb{D}_1^3$ dual vektörünün normu

$$\|\tilde{x}\| = \|x\| + \varepsilon \frac{\langle x, x^* \rangle_L}{\|x\|}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\|x\| \neq 0$ dır (Uğurlu ve Çalışkan, 1996).

Tanım 1.5.5 $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ ve $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3) \in \mathbb{D}_1^3$ olsun.

$$\tilde{x} \wedge_L \tilde{y} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \tilde{x}_3 \\ \tilde{y}_1 & \tilde{y}_2 & \tilde{y}_3 \end{vmatrix}$$

ifadesine $\tilde{x}$ ve $\tilde{y}$ dual vektörlerinin **Lorentz anlamında vektörel çarpım** denir. Burada $e_1 \wedge_L e_2 = -e_3,\ e_2 \wedge_L e_3 = e_1,\ e_3 \wedge_L e_1 = e_2$ dir.

Lemma 1.5.1 $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \mathbb{D}_1^3$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i. $\langle \tilde{x} \wedge_L \tilde{y}, \tilde{z} \rangle = \det(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$

ii. $(\tilde{x} \wedge_L \tilde{y}) \wedge_L \tilde{z} = -\langle \tilde{x}, \tilde{z} \rangle_L \tilde{y} + \langle \tilde{y}, \tilde{z} \rangle_L \tilde{x}$

iii. $\langle \tilde{x} \wedge_L \tilde{y}, \tilde{x} \wedge_L \tilde{y} \rangle = -\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle_L \langle \tilde{y}, \tilde{y} \rangle_L + \left(\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_L \right)^2$

iv. $(\tilde{x} \wedge_L \tilde{y}) \wedge_L \tilde{z} + (\tilde{y} \wedge_L \tilde{z}) \wedge_L \tilde{x} + (\tilde{z} \wedge_L \tilde{x}) \wedge_L \tilde{y} = 0$

Tanım 1.5.6 $\tilde{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbb{D}_1^3$ olsun.

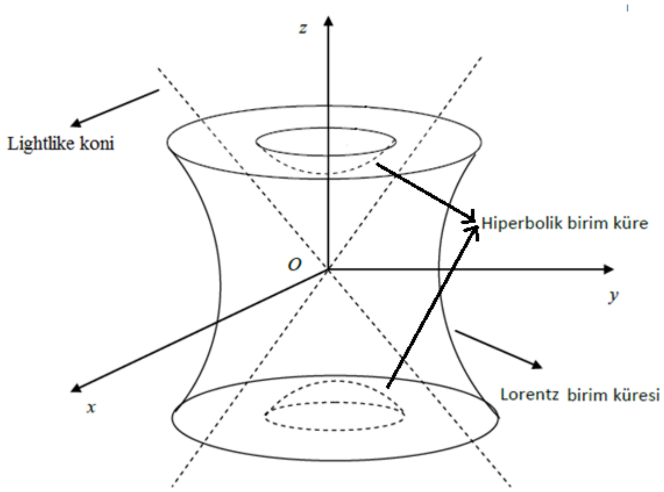
i. $\mathbb{D}_1^3$ de **dual hiperbolik birim küre**si

$$\mathbb{H}_0^2 = \left\{\tilde{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbb{D}_1^3 : \|\tilde{x}\| = (1,0); x, x^* \in \mathbb{R}_1^3 \text{ } ve \text{ } x \text{ } timelike\right\}$$

ii. $\mathbb{D}_1^3$ de **dual Lorentz birim küre**si

$$\mathbb{S}_1^2 = \left\{\tilde{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbb{D}_1^3 : \|\tilde{x}\| = (1,0); x, x^* \in \mathbb{R}_1^3 \text{ } ve \text{ } x \text{ } spacelike\right\}$$

dir (Uğurlu ve Çalışkan, 1996).



Şekil 1.3. $\mathbb{D}_1^3$ 'de birim küreler.

Teorem 1.5.1 $\langle x, x\rangle_L = 1$ (sırasıyla $\langle x, x\rangle_L = -1$) ve $\langle x, x^*\rangle_L = 0$ olmak üzere, $\mathbb{R}_1^3$ in yönlü spacelike (sırasıyla timelike) doğruları ile (x, x^*) sıralı çifti arasında birebir bir karşılık vardır (Uğurlu ve Çalışkan, 1996).

Teorem 1.5.2 $\mathbb{D}_1^3$ uzayındaki $\mathbb{H}_0^2$ dual hiperbolik ve $\mathbb{S}_1^2$ dual Lorentz birim kürelerin noktaları, $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz çizgiler uzayındaki yönlü timelike veya spacelike doğrulara birebir karşılık gelirler.

$\mathbb{S}_1^2$ dual birim küre üzerindeki diferansiyellenebilir bir eğri, herhangi bir regle yüzeye karşılık gelir. Benzer olarak, $\mathbb{H}_0^2$ dual hiperbolik birim küre üzerindeki diferansiyellenebilir bir eğri de bir timelike regle yüzeye karşılık gelir (Yaylı vd.,2002).

Tanım 1.5.7 $\tilde{x}$ ve $\tilde{y}$ spacelike dual birim vektörler olsun. Bu durumda

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_L = \cos \tilde{\Phi}$$

eşitliğini sağlayan $\tilde{\Phi} = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual sayısına $\tilde{x}$ ve $\tilde{y}$ spacelike birim dual vektörleri arasındaki dual merkezi açı denir.

$\tilde{x}$ ve $\tilde{y}$ dual spacelike vektörlerinin uç noktaları Lorentz birim küresi üzerinde A ve B noktalarını göstersinler. $\tilde{x}$ ve $\tilde{y}$ dual spacelike birim vektörleri arasındaki $\tilde{\Phi} = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual açı $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde A ve B noktalarını birleştiren AB yay uzunluğu olarak düşünülebilir.

Burada $\tilde{\Phi}$ açısının reel kısmı olan φ, iki doğru arasındaki açıyı ve φ^* ise bu iki doğru arasındaki uzaklığı verir (Uğurlu ve Çalışkan, 1996).

Tanım 1.5.8 $\tilde{x}$ ve $\tilde{y}$ timelike dual birim vektörler olsun. Bu durumda

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_L = -\cosh \tilde{\Theta}$$

eşitliğini sağlayan $\tilde{\Theta} = \theta + \varepsilon\theta^*$ dual sayısına $\tilde{x}$ ve $\tilde{y}$ timelike birim dual vektörleri arasındaki dual hiperbolik açı denir.

$\tilde{x}$ ve $\tilde{y}$ dual timelike vektörlerinin uç noktaları hiperbolik birim küresi üzerinde A ve B noktalarını göstersinler. $\tilde{x}$ ve $\tilde{y}$ dual timelike birim vektörleri arasındaki $\tilde{\Theta} = \theta + \varepsilon\theta^*$ dual açı $\mathbb{H}_0^2$ üzerinde A ve B noktalarının birleştirilmesiyle oluşan AB yay uzunluğu olarak düşünülebilir.

Burada $\tilde{\Theta}$ açısının reel kısmı olan θ, iki doğru arasındaki açıyı ve θ^* ise bu iki doğru arasındaki uzaklığı verir (Uğurlu ve Çalışkan, 1996).

1.6. Regle Yüzeyler

Tanım 1.6.1 $M \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyi verilsin. $\forall p \in M$ noktasında, $\mathbb{E}^3$ ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye bir **regle yüzey** denir (Hacısalihoğlu, 2000b).

Tanım 1.6.2 $p \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M nin **doğrultman**ı denir (Hacısalihoğlu, 2000b).

Regle yüzey, bir doğrunun bir eğriye dayanarak hareket etmesiyle oluşan yüzey olarak da tanımlanabilir.

M bir regle yüzey olsun. Doğrultmanları kesen ve yüzey üzerinde bulunan diferansiyellenebilir bir

$$\begin{aligned} \alpha &: I \to M \\ t &\to \alpha(t) \end{aligned}$$

eğrisi seçilsin. Bu eğriye regle yüzeyin **dayanak eğrisi** adı verilir. M regle yüzeyinin α dayanak eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki doğrultmanı üzerinde değişken bir nokta β ise

$$\begin{aligned} &\beta : \mathbb{R} \to M \\ &v \to \beta(v) = \left(\alpha_1(t) + va_1(t), \alpha_2(t) + va_2(t), \alpha_3(t) + va_3(t)\right) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $a_i(t) \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le 3$ skalarları, doğrultmanın $\alpha(t)$ noktasındaki bileşenleridir.

Böylece regle yüzeylerin parametrik denklemi

$$\begin{aligned} &\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3 \\ &(t,v) \to \varphi(t,v) = \left(\alpha_1(t) + va_1(t), \alpha_2(t) + va_2(t), \alpha_3(t) + va_3(t)\right) = \alpha(t) + va(t) \end{aligned}$$

dönüşümü ile belirtilmiş olur.

Teorem 1.6.1 $M \subset \mathbb{E}^3$ bir regle yüzey olsun. O zaman, M nin doğrultmanları, M de hem asimptotik ve hem de geodezik çizgilerdir (Hacısalihoğlu, 2000b).

Teorem 1.6.2 $M \subset \mathbb{E}^3$ bir regle yüzey ve M nin Gauss eğrilik fonksiyonu K olsun. O zaman, $\forall p \in M$ için $K(p) \le 0$ dır (Hacısalihoğlu, 2000b).

Tanım 1.6.3 Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın, bu iki komşu ana doğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin **dağılma parametresi (drali)** denir.

Ana doğrularının birim doğrultman vektörü x olan bir regle yüzeyin dralini P_x ile gösterelim. Komşu ana doğruların ortak dikmesi doğrultusundaki birim vektör $x \wedge x'$ olduğundan bu doğrultudaki birim vektör

$$\frac{x \wedge x'}{|x \wedge x'|} = \frac{x \wedge x'}{\|x'\|}$$

dir. Regle yüzeyin drali

$$P_x = \frac{\det\left[\dfrac{d\alpha}{ds}, x, x'\right]}{\|x'\|^2}$$

dir. Burada (x'), x 'in türevini göstermektedir (Hacısalihoğlu, 2000b).

Tanım 1.6.4 Bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilirdir denir (Hacısalihoğlu, 2000b).

Teorem 1.6.3 Bir $\varphi(t,v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır (Hacısalihoğlu, 2000b).

Tanım 1.6.5

$$\begin{aligned} &\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3 \\ &(t,v) \to \varphi(t,v) = \alpha(t) + va(t) \end{aligned}$$

regle yüzeyi $\forall t \in I$ için

$$\varphi(t+2\pi, v) = \varphi(t,v)$$

olacak şekilde periyodik ise regle yüzeye kapalıdır denir (Hacısalihoğlu, 2000b).

Tanım 1.6.6 Bir $\varphi(t,v)$ regle yüzeyinin anadoğrularının her birini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir (Hacısalihoğlu, 2000b).

Tanım 1.6.7 Bir $\varphi(t,v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına boğaz, merkez veya striksiyon noktası denir (Hacısalihoğlu, 2000b).

Tanım 1.6.8 Bir $\varphi(t,v)$ regle yüzeyinin anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi) denir (Hacısalihoğlu, 2000b).

1.7. $\mathbb{D}$- Modül Yardımıyla Regle Yüzeyler

Tanım 1.7.1 $\mathbb{D}$-Modül'deki birim dual $\tilde{x} = x + \varepsilon x^*$ vektörü $\mathbb{R}^3$ de bir yönlü doğru gösterir. $x = (x_1, x_2, x_3)$ birim reel vektörü $\tilde{x}$ doğrusunun yönünü ve $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ vektörü de başlangıç noktasına göre X in vektörel momentini ifade etmektedir. $\tilde{x} = x + \varepsilon x^*$ birim dual vektör olduğundan

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 1 \\ x_1 x_1^* + x_2 x_2^* + x_3 x_3^* &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

koşulunu sağlar.

Eğer (1.1) koşulundan başka bu altı Plücker doğru koordinatları arasında bir ikinci

$$F(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0$$

bağıntısı varsa bu halde $\tilde{x}$ doğrusunun bağımsız parametre sayısı üç olur. $\mathbb{R}^3$de üç bağımsız parametreye bağlı (∞^3) sayıdaki $\tilde{x}$ doğrularının cümlesine ışın kompleksi denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.7.2 $\tilde{a}$ bir has dual vektör olmak üzere

$$\langle a, x^* \rangle + \langle a^*, x \rangle = 0$$

denklemini sağlayan $\tilde{x} = x + \varepsilon x^*$ doğrularının cümlesine bir lineer ışın kompleksi denir.

$\tilde{x}$ doğrusunun bağımsız üç parametresi u, v, w ile gösterilirse $\tilde{x}$ birim dual vektörü

$$\tilde{x} = x(u, v, w) + \varepsilon x^*(u, v, w)$$

şeklinde u, v, w nin bir fonksiyonu olarak yazılabilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.7.3 $\tilde{x} = x + \varepsilon x^*$ doğrusunun $(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ Plücker doğru koordinatları arasında

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$
$$x_1 x_1^* + x_2 x_2^* + x_3 x_3^* = 0$$

ve

$$F(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0$$

bağıntılarından başka bir

$$\Phi(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0$$

bağıntısı varsa $\tilde{x}$ doğrusunun bağımsız parametre sayısı iki olur. İki bağımsız parametreye bağlı (∞^2) sayıdaki $\tilde{x}$ doğrularının cümlesine ışın kongrüansı denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.7.4 $\tilde{a},\ \tilde{b}$ has dual vektörleri için

$$F ... \langle a, x^* \rangle + \langle a^*, x \rangle = 0$$
$$\Phi ... \langle b, x^* \rangle + \langle b^*, x \rangle = 0$$

denklemlerini sağlayan $\tilde{x}$ doğrularının cümlesine lineer ışın kongrüansı denir.

Bağımsız parametrelere u ve v denirse $\tilde{x}$ birim dual vektörü u ve v reel parametrelerinin

$$\tilde{x} = x(u,v) + \varepsilon x^*(u,v)$$

şeklinde bir fonksiyonu olarak yazılabilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.7.5 $\tilde{x} = x + \varepsilon x^*$ birim dual vektörünün $(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ normlanmış homogen olmayan altı Plücker doğru koordinatları arasında

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$
$$x_1 x_1^* + x_2 x_2^* + x_3 x_3^* = 0$$

bağıntılarından başka

$$F(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0$$
$$\Phi(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0$$
$$\psi(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0$$

bağıntıları da varsa $\tilde{x}$ doğrusunun bağımsız parametre sayısı bir tanedir. E.Study tekabülüne uyan ve bağımsız bir parametreye bağlı (∞^1) sayıdaki $\tilde{x}$ doğrularının cümlesine **regle yüzey** veya **ışın yüzeyi** denir.

$\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ has dual vektörler olmak üzere

$$F ... \langle a, x^* \rangle + \langle a^*, x \rangle = 0$$
$$\Phi ... \langle b, x^* \rangle + \langle b^*, x \rangle = 0$$
$$\psi ... \langle c, x^* \rangle + \langle c^*, x \rangle = 0$$

şeklinde verilebilir. O zaman bir regle yüzey $F = 0, \Phi = 0$ ve $\psi = 0$ ışın komplekslerinin üçünde de ortak olan (∞^1) doğrunun cümlesi olarak düşünülebilir.

Bir regle yüzey, $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ bir t parametresine bağlı dual vektörel fonksiyon olmak üzere

$$\tilde{x} = x(t) + \varepsilon x^*(t)$$

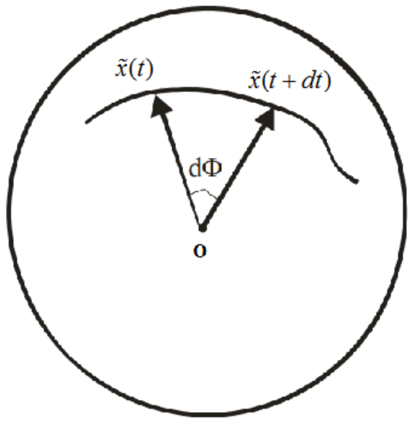
şeklinde yazılabilir. Bu birim dual vektörüne

$$\|\tilde{x}\| = (1, 0)$$

birim dual küresi üzerinde bir dual nokta karşılık gelir. Biliniyor ki bu noktaya da $\mathbb{R}^3$ de bir doğru karşılık gelir. t parametresi değiştikçe

$$\tilde{x}(t) = x(t) + \varepsilon x^*(t)$$

birim dual vektörü, birim dual küre üzerinde bir (X) dual eğrisi çizer. Bu eğriye de $\mathbb{R}^3$ de bir regle yüzey karşılık gelir.



Şekil 1.4. Dual eğri.

(X) dual eğrisine regle yüzeyin dual küresel resmi denir. Birim dual küre üzerinde dual eğrinin

$$d\Phi = d\varphi + \varepsilon d\varphi *$$

dual yay elementi için $d\varphi$ reel ve $d\varphi *$ dual kısımlarına, $\tilde{x}(t)$ ve $\tilde{x}(t+dt)$ birim dual vektörlerine regle yüzeyde karşılık gelen komşu iki anadoğru arasındaki açı ile bu komşu iki anadoğru arasındaki en kısa uzaklık karşılık gelir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.7.6

$$\frac{1}{\mathrm{d}} = \frac{\langle dx, dx^{*} \rangle}{\langle dx, dx \rangle} = \frac{d\varphi . d\varphi^{*}}{d\varphi . d\varphi} = \frac{d\varphi^{*}}{d\varphi}$$

ifadesindeki $\frac{1}{\mathrm{d}}$ büyüklüğüne regle yüzeyin t parametresine ait olan $\tilde{x}$ ana doğrusu boyunca **dağılma parametresi** veya **drali** denir (Hacısalihoğlu, 1983).

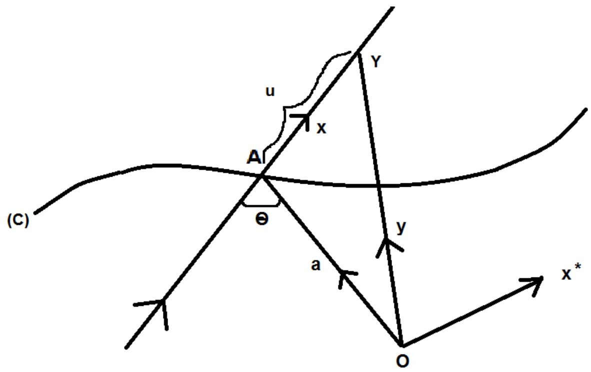
Tanım 1.7.7 Komşu ana doğruları kesişen regle yüzeylere torslar veya **açılabilir regle yüzeyler** denir.

Dralin sıfır olması açılabilir regle yüzeyler için karakteristiktir. Çünkü dral sıfır ise $d\varphi^{*} = 0$ dır.

Dayanak eğrisi $a = a(t)$ denklemi ile belli olan C eğrisi ve ana doğruları $x = x(t)$ birim vektörü olan regle yüzeyin denklemi

$$y(t,u) = a(t) + ux(t)$$

dir.



Şekil 1.5. Regle yüzey.

Şekil 1.5'de görüldüğü gibi

$$x^* = a \wedge x \text{ ve } x \wedge x^* = a - \langle a, x \rangle x$$

olduğundan regle yüzeyin denklemi

$$v = u + \langle a, x \rangle$$

olmak üzere

$$y(t,v) = x(t) \wedge x^*(t) + vx(t)$$

bulunur (Hacısalihoğlu, 1983).

1.8. $\mathbb{R}_1^3$ 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Regle Yüzeyler

Tanım 1.8.1 $\mathbb{R}_1^3$**,** 3-boyutlu Minkowski uzayında, verilen bir l doğrusu, verilen bir α eğrisi boyunca hareket ettirilerek bir yüzey elde edilebiliyorsa, bu yüzeye 3-boyutlu Minkowski uzayında bir regle yüzey denir. Bu durumda verilen l doğrusuna, regle yüzeyin dayanak eğrisi denir (Turgut, 1995).

Tanım 1.8.2 $\mathbb{R}_1^3$**,** 3-boyutlu Minkowski uzayında bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilirdir denir (Turgut, 1995).

Tanım 1.8.3 $\mathbb{R}_1^3$**,** 3-boyutlu Minkowski uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzey verilsin. Regle yüzeyin komşu iki ana doğrusunun ortak dikmesi varsa, bu dikmenin esas anadoğru üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası denir (Turgut, 1995).

Tanım 1.8.4 $\mathbb{R}_1^3$**,** 3-boyutlu Minkowski uzayında bir regle yüzeyin ana doğrularının her birini dik olarak kesen bir eğri varsa, bu eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir (Turgut, 1995).

2. AÇILABİLİR REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde dual vektörler kullanılarak açılabilir regle yüzeyler için bir metot elde edilecektir.

2.1. Dual Vektörlerin Gösterimi

E. Study dönüşümüne göre birim dual kürenin noktaları ile $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğruların birebir karşılık geldiğini biliyoruz. $\mathbb{R}^3$ deki bir L doğrusu, bir O başlangıç noktasına göre üzerindeki bir p noktası ve doğrunun yönünü belirten bir x vektörü ile tamamen belirlenir. Bu karşılık gelme $p \times x = x^*$ olmak üzere

$$\tilde{x} = x + \varepsilon x^*$$

şeklindedir.

$$m(t,u) = p(t) + ux(t)$$

regle yüzeyi,

$$\tilde{x}(t) = x(t) + \varepsilon p(t) \times x(t) = x(t) + \varepsilon x^*(t)$$

şeklinde verilen $\tilde{x}(t)$ dual vektör fonksiyonları gibi yazılabilir.

$x(t)$ birim vektör olduğundan dolayı, $\tilde{x}(t)$ dual vektörü de bir birim dual vektördür. Gerçekten,

$$\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle = \langle (x + \varepsilon p \times x), (x + \varepsilon p \times x) \rangle = \langle x, x \rangle + 2\varepsilon \langle x, p \times x \rangle + \varepsilon^2 \langle p \times x, p \times x \rangle = \langle x, x \rangle = 1 .$$

Böylece regle yüzey, birim dual küre yüzeyindeki bir dual eğri tarafından temsil edilebilir.

$\tilde{x}(t)$ regle yüzeyinin dual yay uzunluğu

$$\tilde{s}(t) = \int_0^t \left\| \frac{d\tilde{x}}{dt} \right\| dt \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır. (2.1) denkleminin integrantı $\tilde{\delta} = \left\| \frac{d\tilde{x}}{dt} \right\|$, $\tilde{x}(t)$ için dual hızdır.

$$\tilde{\delta} = \left\| \frac{d\tilde{x}}{dt} \right\|$$

$$= \left\| \frac{dx}{dt} + \varepsilon \frac{dx*}{dt} \right\|$$

$$= \sqrt{\left\langle \frac{dx}{dt} + \varepsilon \frac{dx*}{dt}, \frac{dx}{dt} + \varepsilon \frac{dx*}{dt} \right\rangle}$$

$$= \sqrt{\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt} \right\rangle + \varepsilon \left[\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dx*}{dt} \right\rangle + \left\langle \frac{dx*}{dt}, \frac{dx}{dt} \right\rangle \right] + \varepsilon^2 \left\langle \frac{dx*}{dt}, \frac{dx*}{dt} \right\rangle}$$

$$= \sqrt{\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt} \right\rangle + \varepsilon \left[\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dx*}{dt} \right\rangle + \left\langle \frac{dx*}{dt}, \frac{dx}{dt} \right\rangle \right]}$$

$$= \sqrt{\left\| \frac{dx}{dt} \right\|^2 + 2\varepsilon \left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dx*}{dt} \right\rangle + \varepsilon^2 \left(\frac{\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dx*}{dt} \right\rangle}{\left\| \frac{dx}{dt} \right\|} \right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\left\| \frac{dx}{dt} \right\| + \varepsilon \frac{\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dx*}{dt} \right\rangle}{\left\| \frac{dx}{dt} \right\|} \right)^2}$$

$$= \left\| \frac{dx}{dt} \right\| + \varepsilon \frac{\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dx*}{dt} \right\rangle}{\left\| \frac{dx}{dt} \right\|}$$

$$= \left\| \frac{dx}{dt} \right\| + \varepsilon \frac{\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dx*}{dt} \right\rangle \left\| \frac{dx}{dt} \right\|}{\left\| \frac{dx}{dt} \right\|^2}$$

$$=\left\|\frac{dx}{dt}\right\|\left(1+\varepsilon\frac{\left\langle \frac{dx}{dt},\frac{dx^*}{dt}\right\rangle}{\left\|\frac{dx}{dt}\right\|^2}\right)$$

veya

$$=\left\|\frac{dx}{dt}\right\|\left(1+\varepsilon\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dp}{dt}\times x}{\left\|\frac{dx}{dt}\right\|^2}\right)$$

$$\tilde{\delta}=\left\|\frac{dx}{dt}\right\|\left(1+\varepsilon\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dx^*}{dt}}{\left\|\frac{dx}{dt}\right\|^2}\right)=\delta(1+\varepsilon P_x)$$

olarak elde edilir. Bu regle yüzeyin dağılma parametresi (drali)

$$P_x=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dp}{dt}\times x}{\left\|\frac{dx}{dt}\right\|^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dx^*}{dt}}{\left\|\frac{dx}{dt}\right\|^2}$$

dir. Eğer $P_x=0$ ise regle yüzey açılabilirdir.

2.2. Açılabilir Regle Yüzeylerin Belirlenmesi Üzerine Bir Yaklaşım

Orijin merkezli birim dual küre üzerindeki bir $\tilde{x}$ noktasının dual koordinatları $\tilde{x}_i=x_i+\varepsilon x_i^*$ $(i=1,2,3)$ olmak üzere

$$\tilde{x}_1=x_1+\varepsilon x_1^*=\cos\tilde{\theta}\cos\tilde{\varphi},$$

$$\tilde{x}_2=x_2+\varepsilon x_2^*=\sin\tilde{\theta}\cos\tilde{\varphi},$$

$$\tilde{x}_3=x_3+\varepsilon x_3^*=\sin\tilde{\varphi}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\tilde{\varphi}=\varphi+\varepsilon\varphi^*$, $\tilde{\theta}=\theta+\varepsilon\theta^*$ dual açıları için $-\pi<\tilde{\theta}<\pi$ ve $-\frac{\pi}{2}<\tilde{\varphi}<\frac{\pi}{2}$ dır.

$\varepsilon^2=\varepsilon^3=...=0$ olduğundan Taylor açılımına göre:

$$\cos\tilde{\theta}=\cos(\theta+\varepsilon\theta^*)=\cos\theta-\varepsilon\theta^*\sin\theta,$$

$$\sin\tilde{\theta}=\sin(\theta+\varepsilon\theta^*)=\sin\theta+\varepsilon\theta^*\cos\theta,$$

$$\cos\tilde{\varphi}=\cos(\varphi+\varepsilon\varphi^*)=\cos\varphi-\varepsilon\varphi^*\sin\varphi,$$

$$\sin\tilde{\varphi}=\sin(\varphi+\varepsilon\varphi^*)=\sin\varphi+\varepsilon\varphi^*\cos\varphi$$

dır.

$$\tilde{x}_1=x_1+\varepsilon x_1^*=\cos\tilde{\theta}\cos\tilde{\varphi}=\cos\theta\cos\varphi+\varepsilon(-\varphi^*\sin\varphi\cos\theta-\theta^*\cos\varphi\sin\theta),$$

$$\tilde{x}_2=x_2+\varepsilon x_2^*=\sin\tilde{\theta}\cos\tilde{\varphi}=\sin\theta\cos\varphi+\varepsilon(-\varphi^*\sin\theta\sin\varphi+\theta^*\cos\theta\cos\varphi),$$

$$\tilde{x}_3=x_3+\varepsilon x_3^*=\sin\tilde{\varphi}=\sin\varphi+\varepsilon\varphi^*\cos\varphi$$

elde edilir. Burada

$$x_1=\cos\theta\cos\varphi,$$

$$x_2=\sin\theta\cos\varphi,$$

$$x_3=\sin\varphi$$

ve

$$x_1^*=-(\theta^*\sin\theta\cos\varphi+\varphi^*\cos\theta\sin\varphi),$$

$$x_2^*=\theta^*\cos\theta\cos\varphi-\varphi^*\sin\theta\sin\varphi,$$

$$x_3^*=\varphi^*\cos\varphi$$

dır.

$m(t,u) = p(t) + ux(t)$ regle yüzeyine karşılık gelen birim dual küre üzerinde bir dual eğriyi göz önüne alalım. Bu dual eğri,

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}(t) &= x(t) + \varepsilon x^*(t) \qquad (2.2)\\
&= (x_1, x_2, x_3) + \varepsilon(x_1^*, x_2^*, x_3^*)\\
&= (\cos\theta(t)\cos\varphi(t), \sin\theta(t)\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))\\
&\quad +\varepsilon\big[-\theta^*(t)\sin\theta(t)\cos\varphi(t) - \varphi^*(t)\cos\theta(t)\sin\varphi(t),\\
&\quad \theta^*(t)\cos\theta(t)\cos\varphi(t) - \varphi^*(t)\sin\theta(t)\sin\varphi(t),\\
&\quad \varphi^*(t)\cos\varphi(t)\big]
\end{aligned}
$$

dır. $x^* = p \times x$ olduğundan ve p_i, $1 \le i \le 3$, $p(t)$ nin koordinatları olmak üzere p_1, p_2, p_3 için lineer denklem sistemi oluşturabiliriz:

$$x^* = p \times x$$

$$
(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix}
$$

$$p_2 \sin\varphi - p_3 \sin\theta\cos\varphi = -(\theta^*\sin\theta\cos\varphi + \varphi^*\cos\theta\sin\varphi),$$

$$- p_1 \sin\varphi + p_3 \cos\theta\cos\varphi = \theta^*\cos\theta\cos\varphi - \varphi^*\sin\theta\sin\varphi,$$

$$p_1 \sin\theta\cos\varphi - p_2 \cos\theta\cos\varphi = \varphi^*\cos\varphi.$$

p_1, p_2, p_3 bilinmeyenlerinin katsayılar matrisi

$$
\begin{bmatrix} 0 & \sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & -\cos\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix}
$$

antisimetrik matristir. Bu nedenle bu matrisin rankı 2'dir, $\varphi(t) \neq 2k\pi$ (k tamsayı). Ayrıca,

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & -\theta^*\sin\theta\cos\varphi-\varphi^*\cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\theta\cos\varphi & \theta^*\cos\theta\cos\varphi-\varphi^*\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & -\cos\theta\cos\varphi & 0 & \varphi^*\cos\varphi \end{bmatrix}$$

ilaveli matrisin rankı da 2 olduğundan bu lineer denklem sistemi sonsuz çözüm içerir.

Matrisin 1. satırını $\sin\varphi$ ye bölüp 1. satıra yazarsak,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta\cot\varphi & -\theta^*\sin\theta\cot\varphi-\varphi^*\cos\theta \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\theta\cos\varphi & \theta^*\cos\theta\cos\varphi-\varphi^*\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & -\cos\theta\cos\varphi & 0 & \varphi^*\cos\varphi \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

Matrisin 2. satırını $-\sin\varphi$ ye bölüp 2. satıra yazarsak,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta\cot\varphi & -\theta^*\sin\theta\cot\varphi-\varphi^*\cos\theta \\ 1 & 0 & -\cos\theta\cot\varphi & -\theta^*\cos\theta\cot\varphi+\varphi^*\sin\theta \\ \sin\theta\cos\varphi & -\cos\theta\cos\varphi & 0 & \varphi^*\cos\varphi \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

Matrisin 1. satırını $\cos\theta\cos\varphi$ ile 2. satırını $-\sin\theta\cos\varphi$ ile çarpıp 3. satıra eklersek,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta\cot\varphi & -\theta^*\sin\theta\cot\varphi-\varphi^*\cos\theta \\ 1 & 0 & -\cos\theta\cot\varphi & -\theta^*\cos\theta\cot\varphi+\varphi^*\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

Matrisin 1. ve 2. satırını yer değiştirirsek,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos\theta\cot\varphi & -\theta^*\cos\theta\cot\varphi+\varphi^*\sin\theta \\ 0 & 1 & -\sin\theta\cot\varphi & -\theta^*\sin\theta\cot\varphi-\varphi^*\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_1-\cos\theta\cot\varphi p_3=-\theta^*\cos\theta\cot\varphi+\varphi^*\sin\theta\,,$$

$$p_2-\sin\theta\cot\varphi p_3=-\theta^*\sin\theta\cot\varphi-\varphi^*\cos\theta$$

elde ederiz. Denklem sistemini düzenlersek,

$$\begin{aligned} p_1 &= \left(p_3-\theta^*\right)\cos\theta\cot\varphi+\varphi^*\sin\theta \\ p_2 &= \left(p_3-\theta^*\right)\sin\theta\cot\varphi-\varphi^*\cos\theta \\ p_3 &= p_3 \end{aligned} \tag{2.3}$$

elde ederiz. $p_3(t)$ isteğe bağlı seçilebildiğinden $p_3(t)=\theta^*(t)$ alabiliriz. Bu durumda (2.3) denklem sistemi daha basit hale dönüşür.

$$\begin{aligned} p_1 &= \varphi^*\sin\theta \\ p_2 &= -\varphi^*\cos\theta \\ p_3 &= \theta^* \end{aligned} \tag{2.4}$$

dır.

(2.2) eşitliğinde verilen regle yüzeyin dağılma parametresi

$$P_x=\frac{\dfrac{dx}{dt}\cdot\dfrac{dx^*}{dt}}{\left\|\dfrac{dx}{dt}\right\|^2} \tag{2.5}$$

$$=\frac{\dfrac{d\theta^*}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}\cos^2\varphi-\varphi^*\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\sin\varphi\cos\varphi+\dfrac{d\varphi^*}{dt}\dfrac{d\varphi}{dt}}{\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\cos^2\varphi+\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{d\theta^*}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}\cos^2\varphi-\varphi^*\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\sin\varphi\cos\varphi+\dfrac{d\varphi^*}{dt}\dfrac{d\varphi}{dt}\right)\dfrac{1}{\cos^2\varphi}}{\left(\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\cos^2\varphi+\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)\dfrac{1}{\cos^2\varphi}}$$

$$=\frac{\dfrac{d\theta^*}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}-\varphi^*\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\tan\varphi+\dfrac{d\varphi^*}{dt}\dfrac{d\varphi}{dt}\dfrac{1}{\cos^2\varphi}}{\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2\dfrac{1}{\cos^2\varphi}}$$

dır. Eğer regle yüzey açılabilir ise (2.5) denklemini

$$\frac{d\theta^*}{dt}\frac{d\theta}{dt}-\varphi^*\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\tan\varphi+\frac{d\varphi^*}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\frac{1}{\cos^2\varphi}=0 \qquad (2.6)$$

şeklinde yazılabiliriz. (2.6) denkleminde $\dfrac{d(\tan\varphi)}{dt}=\dfrac{1}{\cos^2\varphi}\dfrac{d\varphi}{dt}$ eşitliği yerine yazılır ve denklem düzenlenirse,

$$\frac{d\varphi^*}{dt}\frac{d(\tan\varphi)}{dt}-\varphi^*\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\tan\varphi+\frac{d\theta^*}{dt}\frac{d\theta}{dt}=0\,,$$

$$\frac{\dfrac{d\varphi^*}{dt}\dfrac{d(\tan\varphi)}{dt}-\varphi^*\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\tan\varphi+\dfrac{d\theta^*}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}}{\dfrac{d\varphi^*}{dt}}=0\,,$$

$$y(t)=\tan\varphi,\quad A(t)=-\frac{\varphi^*\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2}{\dfrac{d\varphi^*}{dt}}\,,\quad B(t)=\frac{\dfrac{d\theta^*}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}}{\dfrac{d\varphi^*}{dt}}$$

birinci mertebeden lineer denklem elde edilir:

$$\frac{dy}{dt} + A(t)y + B(t) = 0 \tag{2.7}$$

dır.

Özel olarak, $\theta(t)$ ve $\varphi(t)$ her ikisi de sabit olduğunda regle yüzey bir silindirdir.

Şimdi önemli bir soruyu cevaplamaya çalışalım: Bir $p(t)$ eğrisi verildiğinde, taban eğrisi $p(t)$ olacak şekilde bir açılabilir regle yüzey bulabilir miyiz?

Sorunun cevabı olumludur, (2.4) denklem sisteminden

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\varphi^* \sin\theta}{-\varphi^* \cos\theta} = -\tan\theta\,,$$

$$\sqrt{{p_1}^2 + {p_2}^2} = \sqrt{(\varphi^* \sin\theta)^2 + (-\varphi^* \cos\theta)^2} = |\varphi^*|\,,$$

$$p_3 = \theta^*$$

elde edilir. Düzenlenirse

$$\tan\theta = -\frac{p_1}{p_2}$$

$$\varphi^* = \pm\sqrt{{p_1}^2 + {p_2}^2} \tag{2.8}$$

$$\theta^* = p_3$$

elde edilir.

Son olarak $\varphi(t)$ yi belirleyelim. (2.8) denklem sisteminde bulunan değerler (2.7) lineer diferansiyel denklemde yerine yazılırsa çözümü $\varphi(t)$ yi verir. Bu çözüm integral sabiti içerir. Bu sebeple taban eğrisi $p(t)$ olan sonsuz tane açılabilir regle yüzey elde ederiz.

Burada dikkat edilmelidir ki $\varphi^*(t)$ iki değere sahiptir. Verilen integral sabiti için (-) işareti kullandığımız zaman (+) işareti kullanılarak elde edilen regle yüzeyin karşıtını elde ederiz.

2.2.1 Örnek

$p(t) = \left(2t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}\right)$ eğrisini göz önüne alalım.

$$p_1 = 2t\,,\quad p_2 = \frac{t^2}{2}\,,\quad p_3 = \frac{t^3}{3}$$

için

$$\tan\theta = -\frac{p_1}{p_2} = -\frac{2t}{t^2/2} = -\frac{4}{t}\,,$$

$$\theta = \arctan(-\frac{4}{t})\,,$$

$$\varphi^* = \pm\sqrt{{p_1}^2 + {p_2}^2} = \pm\sqrt{(2t)^2 + \left(\frac{t^2}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{4t^2 + \frac{t^4}{4}} = \pm\sqrt{\frac{t^2}{4}\left(16 + t^2\right)} = \pm\frac{t}{2}\sqrt{t^2 + 16}\,,$$

$$\theta^* = p_3 = \frac{t^3}{3}$$

elde edilir.

$$y(t) = \tan\varphi\,,\quad A(t) = -\frac{\varphi^*\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}{\frac{d\varphi^*}{dt}}\,,\quad B(t) = \frac{\frac{d\theta^*}{dt}\frac{d\theta}{dt}}{\frac{d\varphi^*}{dt}}$$

ifadelerini elde edelim:

$$\frac{d\theta^*}{dt} = \frac{d\left(\frac{t^3}{3}\right)}{dt} = \frac{3t^2}{3} = t^2\,,$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\left(\arctan\left(-\frac{4}{t}\right)\right)}{dt}=\frac{\left(-\frac{4}{t}\right)'}{1+\left(-\frac{4}{t}\right)^2}=\frac{\frac{4}{t^2}}{\frac{t^2+16}{t^2}}=\frac{4}{t^2+16},$$

$$\frac{d\varphi^*}{dt}=\frac{d\left(\frac{t}{2}\sqrt{t^2+16}\right)}{dt}=\left(\frac{t}{2}\right)'\sqrt{t^2+16}+\frac{t}{2}\left(\sqrt{t^2+16}\right)'=\frac{1}{2}\sqrt{t^2+16}+\frac{t}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t^2+16}}(2t),$$

$$=\frac{1}{2}\frac{t^2+16}{\sqrt{t^2+16}}+\frac{t^2}{2}\frac{1}{\sqrt{t^2+16}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t^2+16}}\left(t^2+16+t^2\right)=\frac{t^2+8}{\sqrt{t^2+16}}.$$

Değerleri (2.7) denkleminde yerine yazılırsa 1. mertebeden lineer diferansiyel denklem elde edilir:

$$\frac{dy}{dt}+A(t)y+B(t)=0$$

$$\frac{dy}{dt}-\frac{\varphi^*\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}{\frac{d\varphi^*}{dt}}y+\frac{\frac{d\theta^*}{dt}\frac{d\theta}{dt}}{\frac{d\varphi^*}{dt}}=0$$

$$\frac{dy}{dt}-\frac{\frac{t}{2}\sqrt{t^2+16}\left(\frac{4}{t^2+16}\right)^2}{\frac{t^2+8}{\sqrt{t^2+16}}}y+\frac{t^2\frac{4}{t^2+16}}{\frac{t^2+8}{\sqrt{t^2+16}}}=0$$

$$\frac{dy}{dt}-\frac{8t}{\left(t^2+8\right)\left(t^2+16\right)}y+\frac{4t^2\sqrt{t^2+16}}{\left(t^2+8\right)\left(t^2+16\right)}=0.$$

Diferansiyel denklemin çözümü

$$y(t)=\tan\varphi=-4\sqrt{\frac{t^2+8}{t^2+16}}\left[\ln\left(t+\sqrt{t^2+8}\right)+\frac{8}{8+t^2+t\sqrt{t^2+8}}+c\right]$$

dır. Böylece

$$\varphi = \arctan\left(-4\sqrt{\frac{t^2+8}{t^2+16}}\left[\ln\left(t+\sqrt{t^2+8}\right)+\frac{8}{8+t^2+t\sqrt{t^2+8}}+c\right]\right)$$

değeri de bulunmuş olur. Dolayısıyla

$$x(t) = (x_1, x_2, x_3) = (\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi)$$

belirlenmiş olur.

$$p_1 = \varphi^*\sin\theta \;\Rightarrow\; \sin\theta = \frac{p_1}{\varphi^*},$$

$$p_2 = -\varphi^*\cos\theta \;\Rightarrow\; \cos\theta = -\frac{p_2}{\varphi^*},$$

$$p_3 = \theta^*$$

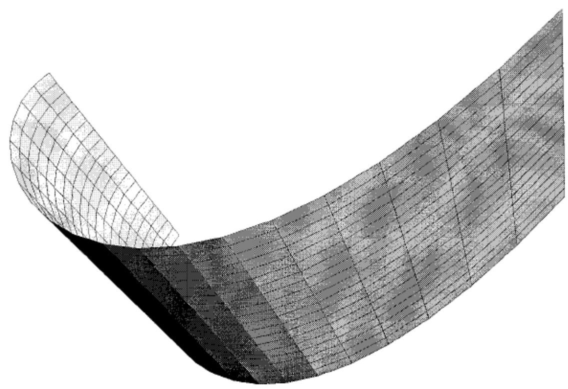
yazılabilir. Bu nedenle açılabilir regle yüzeylerin ailesi

$$m(t,u) = p(t) + ux(t)$$

eşitliği ile verilir, burada

$$x(t) = \left(-\frac{p_2}{\varphi^*}\cos\varphi, \frac{p_1}{\varphi^*}\cos\varphi, \sin\varphi\right)$$

dir.



Şekil 2.1. $m(t,u)$ Regle yüzeyi (Köse,1999).

Şekil 2.1, denklemde $c = 0$ ve

$$D : \begin{cases} -2 \leq \mathrm{t} \leq 2 \\ -4 \leq u \leq 4 \end{cases}$$

tanım aralığı için açılabilir regle yüzeyin grafiğidir.

3. $\mathbb{R}_1^3$ 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA AÇILABİLİR REGLE YÜZEYLER

3.1. Dual Vektörlerin Gösterimi

x ve x^* $\mathbb{R}_1^3$ de vektörler olmak üzere $\tilde{x}$ dual vektörü

$$\tilde{x} = x + \varepsilon x^*$$

şeklinde yazılabilir.

$\tilde{x} = x + \varepsilon x^*$ ve $\tilde{y} = y + \varepsilon y^*$ olmak üzere $\tilde{x}$ ve $\tilde{y}$ dual vektörlerinin Lorentz iç çarpımı

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_L = \langle x, y \rangle_L + \varepsilon\left(\langle x, y^* \rangle_L + \langle x^*, y \rangle_L \right)$$

şeklinde tanımlanır. $\tilde{x}$ dual vektörü eğer $\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle_L < 0$ ise timelike, $\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle_L > 0$ ise spacelike, $\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle_L = 0$ ise light-like (veya null) olarak adlandırılır. Burada $\langle , \rangle_L$ Lorentz iç çarpımı (+,+,-) işaretlidir. $\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle_L = 0$ şartını sağlayan bütün dual vektörlerin cümlesi dual light-like koni olarak isimlendirilir ve Λ ile gösterilir

$$\Lambda = \left\{ \tilde{x} = x + \boldsymbol{\varepsilon} x^* \in \mathbb{D}_1^3 : \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle_L = 0 \right\} - \left\{ \left(0 + \boldsymbol{\varepsilon} 0^* \right) \right\}$$

Dual vektörlerin normu

$$\|\tilde{x}\| = \|x\| + \varepsilon \frac{\langle x, x^* \rangle_L}{\|x\|}$$

şeklinde tanımlanır.

Dual Lorentz vektörlerin cümlesi $\mathbb{D}_1^3$ olmak üzere, sırasıyla, dual hiperbolik birim küre ve dual Lorentz birim küresi

$$\mathbb{H}_0^2 = \left\{ \tilde{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbb{D}_1^3 \,\middle|\, \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle_L = -1; x, x^* \in \mathbb{R}_1^3 \right\},$$

$$\mathbb{S}_1^2 = \left\{ \tilde{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbb{D}_1^3 \,\middle|\, \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle_L = 1;\, x, x^* \in \mathbb{R}_1^3 \right\}$$

olarak tanımlanır.

$\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ dual vektörlerinin dual Lorentz vektörel çarpımı

$$\tilde{a} \wedge_L \tilde{b} = a \wedge_L b + \varepsilon\left(a \wedge_L b^* + a^* \wedge_L b\right)$$

olarak tanımlanır. Buna göre

$$a \wedge_L b = \left(a_1, a_2, a_3\right) \wedge_L \left(b_1, b_2, b_3\right) = \left(a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_2 b_1 - a_1 b_2\right).$$

$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}_1^3$ regüler eğrisi, α' hız vektörünün spacelike, timelike veya null vektör olmasına göre sırasıyla spacelike, timelike veya null eğri olarak adlandırılır.

$\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında aşağıdaki özelikler sağlanır:

i. İki timelike vektör ortogonal olamaz.
ii. İki null vektör ortogonaldir gerek ve yeter şart lineer bağımlıdırlar.
iii. Timelike vektör hiçbir zaman null vektöre dik olamaz.

E. Study dönüşümüne göre $\mathbb{D}_1^3$ uzayındaki $\mathbb{H}_0^2$ dual hiperbolik ve $\mathbb{S}_1^2$ dual Lorentz birim kürelerin noktaları ile $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz çizgiler uzayındaki yönlü timelike veya spacelike dogruların birebir karsılık geldiğini biliyoruz. $\mathbb{R}_1^3$ deki bir L doğrusu, bir O başlangıç noktasına göre üzerindeki bir p noktası ve doğrunun yönünü belirten bir x vektörü ile tamamen belirlenir. Bu karşılık gelme $p \wedge_L x = x^*$ olmak üzere

$$\tilde{x} = x + \varepsilon x^*$$

şeklindedir.

$$m(t,u) = p(t) + u x(t)$$

regle yüzeyi,

$\tilde{x}(t) = x(t) + \varepsilon p(t) \wedge_L x(t) = x(t) + \varepsilon x^*(t)$

şeklinde verilen $\tilde{x}$ dual vektör fonksiyonları gibi yazılabilir.

$x(t)$ timelike (sırasıyla spacelike) birim vektör olduğundan $\tilde{x}$ de birim dual vektördür. Gerçekten,

$$\begin{aligned}\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle_L &= \langle (x + \varepsilon p \wedge_L x), (x + \varepsilon p \wedge_L x) \rangle \\ &= \langle x, x \rangle_L + 2\varepsilon \langle x, p \wedge_L x \rangle + \varepsilon^2 \langle p \wedge_L x, p \wedge_L x \rangle_L \\ &= \langle x, x \rangle_L \\ &= -1 \ \ (\text{sırasıyla } = 1)\end{aligned}$$

Böylece timelike veya spacelike regle yüzeyler, hiperbolik ve Lorentz dual birim küre yüzeyindeki dual eğriler tarafından temsil edilebilir.

Eğrilik fonksiyonu olan Δ,

$$\Delta = \frac{\left\langle \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dp}{dt} \wedge_L x \right\rangle_L}{\left\| \dfrac{dx}{dt} \right\|^2} = \frac{\left\langle \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dx^*}{dt} \right\rangle_L}{\left\| \dfrac{dx}{dt} \right\|^2}$$

$\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayındaki timelike veya spacelike regle yüzeyinin dağılma parametresidir (dralidir). Eğer $\Delta = 0$ ise timelike veya spacelike regle yüzeyi açılabilirdir denir.

Şimdi açılabilir timelike regle yüzeylerin belirlenmesi üzerine bir metot vereceğiz. Bir $m(t,u) = p(t) + ux(t)$ regle yüzeyi, $\tilde{x}(t)$ dual vektör fonksiyonu gibi yazılabildiğinden dolayı bu bölümde hiperbolik birim küre üzerinde bir dual eğriyi dikkate alacağız.

3.2. Hiperbolik Birim Küre Üzerindeki Dual Eğri Yardımıyla Açılabilir Timelike Regle Yüzeylerin Belirlenmesi Üzerine Bir Yaklaşım

Orijin merkezli, hiperbolik birim küre üzerindeki, dual koordinatları $\tilde{x}_i = x_i + \varepsilon x_i^*$ $(i = 1,2,3)$ olan keyfi bir $\tilde{x}$ noktası aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\tilde{x}_1 = x_1 + \varepsilon x_1{}^* = \sinh\tilde{\varphi}\cos\tilde{\theta}\,,$$

$$\tilde{x}_2 = x_2 + \varepsilon x_2{}^* = \sinh\tilde{\varphi}\sin\tilde{\theta}\,,$$

$$\tilde{x}_3 = x_3 + \varepsilon x_3{}^* = \cosh\tilde{\varphi}\,.$$

Burada $\tilde{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varphi^*$, $\tilde{\theta} = \theta + \varepsilon\theta^*$ sırasıyla dual hiperbolik ve dual açılardır.

$\varepsilon^2 = \varepsilon^3 = \ldots = 0$ olduğundan Taylor açılımına göre,

$$\cos\tilde{\theta} = \cos(\theta + \varepsilon\theta^*) = \cos\theta - \varepsilon\theta^*\sin\theta\,,$$

$$\sin\tilde{\theta} = \sin(\theta + \varepsilon\theta^*) = \sin\theta + \varepsilon\theta^*\cos\theta\,,$$

$$\cosh\tilde{\varphi} = \cosh(\varphi + \varepsilon\varphi^*) = \cosh\varphi + \varepsilon\varphi^*\sinh\varphi\,,$$

$$\sinh\tilde{\varphi} = \sinh(\varphi + \varepsilon\varphi^*) = \sinh\varphi + \varepsilon\varphi^*\cosh\varphi$$

elde edilir.

$$\tilde{x}_1 = x_1 + \varepsilon x_1{}^* = \sinh\tilde{\varphi}\cos\tilde{\theta} = \sinh\varphi\cos\theta + \varepsilon(\varphi^*\cosh\varphi\cos\theta - \theta^*\sinh\varphi\sin\theta)\,,$$

$$\tilde{x}_2 = x_2 + \varepsilon x_2{}^* = \sinh\tilde{\varphi}\sin\tilde{\theta} = \sinh\varphi\sin\theta + \varepsilon(\varphi^*\cosh\varphi\sin\theta + \theta^*\sinh\varphi\cos\theta)\,,$$

$$\tilde{x}_3 = x_3 + \varepsilon x_3{}^* = \cosh\tilde{\varphi} = \cosh\varphi + \varepsilon\varphi^*\sinh\varphi$$

dır.

$$x_1 = \sinh\varphi\cos\theta\,,$$

$$x_2 = \sinh\varphi\sin\theta\,,$$

$$x_3 = \cosh\varphi$$

ve

$$x_1{}^* = \varphi^*\cosh\varphi\cos\theta - \theta^*\sinh\varphi\sin\theta\,,$$

$$x_2{}^* = \varphi^* \cosh\varphi \sin\theta + \theta^* \sinh\varphi \cos\theta\,,$$

$$x_3{}^* = \varphi^* \sinh\varphi$$

elde edilir.

$$\langle x, x\rangle_L = \langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)\rangle$$

$$= \langle (\sinh\varphi\cos\theta, \sinh\varphi\sin\theta, \cosh\varphi), (\sinh\varphi\cos\theta, \sinh\varphi\sin\theta, \cosh\varphi)\rangle$$

$$= \sinh^2\varphi\cos^2\theta + \sinh^2\varphi\sin^2\theta - \cosh^2\varphi$$

$$= \sinh^2\varphi - \cosh^2\varphi$$

$$= -1$$

olmasının anlamı x yönlü vektörünün timelike olmasıdır.

$$m(t,u) = p(t) + ux(t)$$

timelike regle yüzeyine karşılık gelen hiperbolik birim küre üzerindeki dual eğri

$$\tilde{x}(t) = x(t) + \varepsilon x^*(t) \tag{3.1}$$

$$= (x_1, x_2, x_3) + \varepsilon(x_1{}^*, x_2{}^*, x_3{}^*)$$

$$= \left(\sinh\varphi(t)\cos\theta(t), \sinh\varphi(t)\sin\theta(t), \cosh\varphi(t)\right)$$

$$+\varepsilon\big[\varphi^*(t)\cosh\varphi(t)\cos\theta(t) - \theta^*(t)\sinh\varphi(t)\sin\theta(t),$$

$$\varphi^*(t)\cosh\varphi(t)\sin\theta(t) + \theta^*(t)\sinh\varphi(t)\cos\theta(t),$$

$$\varphi^*(t)\sinh\varphi(t)\big]$$

dır. İki timelike vektör ortogonal olamayacağından, $p(t)$ taban eğrisi, spacelike olmalıdır. $x^* = p \wedge_L x$ olduğundan ve p_i, $1 \le i \le 3$, $p(t)$ nin koordinatları olmak üzere p_1, p_2, p_3 için lineer denklem sistemi oluşturabiliriz.

$$x^* = p \wedge_L x$$

$$\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ \sinh\varphi\cos\theta & \sinh\varphi\sin\theta & \cosh\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \left(p_2\cosh\varphi - p_3\sinh\varphi\sin\theta,\ p_3\sinh\varphi\cos\theta - p_1\cosh\varphi,\ p_2\sinh\varphi\cos\theta - p_1\sinh\varphi\sin\theta\right)$$

$$\varphi^*\cosh\varphi\cos\theta - \theta^*\sinh\varphi\sin\theta = p_2\cosh\varphi - p_3\sinh\varphi\sin\theta,$$

$$\varphi^*\cosh\varphi\sin\theta + \theta^*\sinh\varphi\cos\theta = p_3\sinh\varphi\cos\theta - p_1\cosh\varphi,$$

$$\varphi^*\sinh\varphi = p_2\sinh\varphi\cos\theta - p_1\sinh\varphi\sin\theta\,.$$

p_1, p_2, p_3 bilinmeyenlerinin katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} 0 & \cosh\varphi & -\sinh\varphi\sin\theta \\ -\cosh\varphi & 0 & \sinh\varphi\cos\theta \\ -\sinh\varphi\sin\theta & \sinh\varphi\cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Bu matrisin rankı 2’dir. Ayrıca

$$\begin{bmatrix} 0 & \cosh\varphi & -\sinh\varphi\sin\theta & \varphi^*\cosh\varphi\cos\theta - \theta^*\sinh\varphi\sin\theta \\ -\cosh\varphi & 0 & \sinh\varphi\cos\theta & \varphi^*\cosh\varphi\sin\theta + \theta^*\sinh\varphi\cos\theta \\ -\sinh\varphi\sin\theta & \sinh\varphi\cos\theta & 0 & \varphi^*\sinh\varphi \end{bmatrix}.$$

ilaveli matrisin rankı da 2 olduğundan bu lineer denklem sistemi sonsuz çözüm içerir.

Matrisin 1. satırını $\cosh\varphi$ ye bölüp 1. satıra yazarsak,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\tanh\varphi\sin\theta & \varphi^*\cos\theta - \theta^*\tanh\varphi\sin\theta \\ -\cosh\varphi & 0 & \sinh\varphi\cos\theta & \varphi^*\cosh\varphi\sin\theta + \theta^*\sinh\varphi\cos\theta \\ -\sinh\varphi\sin\theta & \sinh\varphi\cos\theta & 0 & \varphi^*\sinh\varphi \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

Matrisin 2. satırını $-\cosh\varphi$ ye bölüp 2. satıra yazarsak,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\tanh\varphi\sin\theta & \varphi^*\cos\theta-\theta^*\tanh\varphi\sin\theta \\ 1 & 0 & -\tanh\varphi\cos\theta & -\varphi^*\sin\theta-\theta^*\tanh\varphi\cos\theta \\ -\sinh\varphi\sin\theta & \sinh\varphi\cos\theta & 0 & \varphi^*\sinh\varphi \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

Matrisin 1. satırını $-\sinh\varphi\cos\theta$ ile 2. satırını $\sinh\varphi\sin\theta$ ile çarpıp 3. satıra eklersek,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\tanh\varphi\sin\theta & \varphi^*\cos\theta-\theta^*\tanh\varphi\sin\theta \\ 1 & 0 & -\tanh\varphi\cos\theta & -\varphi^*\sin\theta-\theta^*\tanh\varphi\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

Matrisin 1. ve 2. satırını yer değiştirirsek,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\tanh\varphi\cos\theta & -\varphi^*\sin\theta-\theta^*\tanh\varphi\cos\theta \\ 0 & 1 & -\tanh\varphi\sin\theta & \varphi^*\cos\theta-\theta^*\tanh\varphi\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_1-\tanh\varphi\cos\theta p_3=-\varphi^*\sin\theta-\theta^*\tanh\varphi\cos\theta\,,$$

$$p_2-\tanh\varphi\sin\theta p_3=\varphi^*\cos\theta-\theta^*\tanh\varphi\sin\theta$$

elde ederiz. Denklem sistemini düzenlersek,

$$\begin{aligned} p_1 &= \left(p_3-\theta^*\right)\cos\theta\tanh\varphi-\varphi^*\sin\theta \\ p_2 &= \left(p_3-\theta^*\right)\sin\theta\tanh\varphi+\varphi^*\cos\theta \qquad (3.2) \\ p_3 &= p_3 \end{aligned}$$

elde ederiz. $p_3(t)$ isteğe bağlı seçilebildiğinden $p_3(t)=\theta^*(t)$ alabiliriz. Bu durumda (3.2) denklem sistemini daha basit hale dönüştürebiliriz.

$$p_1=-\varphi^*\sin\theta$$

$$p_2=\varphi^*\cos\theta \qquad (3.3)$$

$$p_3 = \theta^*$$

(3.1) eşitliğinde verilen timelike regle yüzeyin dağılma parametresi

$$\Delta = \frac{\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dx^*}{dt} \right\rangle_L}{\left\| \frac{dx}{dt} \right\|^2} \tag{3.4}$$

$$= \frac{\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta^*}{dt}\sinh^2\varphi + \varphi^*\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\cosh\varphi\sinh\varphi + \frac{d\varphi^*}{dt}\frac{d\varphi}{dt}}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sinh^2\varphi + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta^*}{dt}\sinh^2\varphi + \varphi^*\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\cosh\varphi\sinh\varphi + \frac{d\varphi^*}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\frac{1}{\sinh^2\varphi}}{\left(\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sinh^2\varphi + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)\frac{1}{\sinh^2\varphi}}$$

$$= \frac{\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta^*}{dt} + \varphi^*\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\coth\varphi + \frac{d\varphi^*}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\frac{1}{\sinh^2\varphi}}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\frac{1}{\sinh^2\varphi}}$$

dır. Eğer timelike regle yüzeyi açılabilir ise (3.4) denklemini

$$\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta^*}{dt} + \varphi^*\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\coth\varphi + \frac{d\varphi^*}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\frac{1}{\sinh^2\varphi} = 0 \tag{3.5}$$

şeklinde yazabiliriz. (3.5) denkleminde $\frac{d(\coth\varphi)}{dt} = \frac{-1}{\sinh^2\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$ eşitliği yerine yazılırsa ve denklem düzenlenirse,

$$\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta^*}{dt} + \varphi^*\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\coth\varphi - \frac{d\varphi^*}{dt}\frac{d(\coth\varphi)}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\varphi^*}{dt}\frac{d(\coth\varphi)}{dt} - \varphi^*\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\coth\varphi - \frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta^*}{dt} = 0,$$

$$\frac{\frac{d\varphi^*}{dt}\frac{d(\coth\varphi)}{dt}-\varphi^*\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\coth\varphi-\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta^*}{dt}}{\frac{d\varphi^*}{dt}}=0,$$

$$y(t)=\coth\varphi(t),\quad A(t)=-\frac{\varphi^*\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}{\frac{d\varphi^*}{dt}}\,,\quad B(t)=-\frac{\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta^*}{dt}}{\frac{d\varphi^*}{dt}}$$

birinci mertebeden lineer denklem elde edilir.

$$\frac{dy}{dt}+A(t)y+B(t)=0 \tag{3.6}$$

dır.

Şimdi önemli bir soruyu cevaplamaya çalışalım: Bir $p(t)$ eğrisi verildiğinde, taban eğrisi $p(t)$ olacak şekilde açılabilir timelike bir regle yüzey bulabilir miyiz?

Sorunun cevabı olumludur, (3.3) denklem sistemi için

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{-\varphi^*\sin\theta}{\varphi^*\cos\theta}=-\tan\theta\,,$$

$$\sqrt{p_1^{\,2}+p_2^{\,2}}=\sqrt{(-\varphi^*\sin\theta)^2+(\varphi^*\cos\theta)^2}=|\varphi^*|\,,$$

$$p_3=\theta^*$$

elde edilir. Düzenlenirse

$$\tan\theta=-\frac{p_1}{p_2}$$

$$\varphi^*=\pm\sqrt{p_1^{\,2}+p_2^{\,2}} \tag{3.7}$$

$$\theta^*=p_3$$

elde edilir.

Son olarak $\varphi(t)$ yi belirleyelim. (3.7) denklem sisteminde bulunan değerler (3.6) lineer diferansiyel denklemde yerine yazılırsa çözümü $\varphi(t)$ yi verir. Bu çözüm integral sabiti içerir. Bu sebeple taban eğrisi $p(t)$ olan sonsuz tane açılabilir timelike regle yüzey elde ederiz.

Burada dikkat edilmelidir ki $\varphi^*(t)$ iki değere sahiptir. Verilen integral sabiti için (-) işareti kullandığımız zaman (+) işareti kullanılarak elde edilen regle yüzeyin karşıtını elde ederiz.

3.2.1. Örnek

$p(t)=(t,1,t)$ eğrisini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}\langle p(t), p(t)\rangle_L &= \langle (p_1, p_2, p_3),(p_1, p_2, p_3)\rangle_L \\ &= \langle (t,1,t),(t,1,t)\rangle_L \\ &= t^2+1^2-t^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

olmasının anlamı $p(t)$ nin spacelike olmasıdır.

$$p_1=t,\quad p_2=1,\quad p_3=t$$

için

$$\tan\theta=-\frac{p_1}{p_2}=-\frac{t}{1}=-t\,,$$

$$\theta=\arctan(-t)\,,$$

$$\varphi^*=\pm\sqrt{p_1^{\,2}+p_2^{\,2}}=\pm\sqrt{t^2+1^2}=\pm\sqrt{1+t^2}\;,$$

$$\theta^*=p_3=t$$

elde edilir.

$$y(t)=\coth\varphi(t)\,,\quad A(t)=-\frac{\varphi^*\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2}{\dfrac{d\varphi^*}{dt}}\quad,\quad B(t)=-\frac{\dfrac{d\theta}{dt}\dfrac{d\theta^*}{dt}}{\dfrac{d\varphi^*}{dt}}$$

ifadelerini elde edelim:

$$\frac{d\theta^*}{dt}=\frac{d\left(t\right)}{dt}=1,$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\left(\arctan\left(-t\right)\right)}{dt}=\frac{\left(-t\right)'}{1+\left(-t\right)^2}=\frac{-1}{1+t^2}\,,$$

$$\frac{d\varphi^*}{dt}=\frac{d\left(\sqrt{1+t^2}\right)}{dt}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,.$$

Değerleri (3.6) denkleminde yerlerine yazılırsa bir 1. mertebeden lineer diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{dy}{dt}+A(t)y+B(t)=0$$

$$\frac{dy}{dt}-\frac{\varphi^*\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2}{\dfrac{d\varphi^*}{dt}}y-\frac{\dfrac{d\theta^*}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}}{\dfrac{d\varphi^*}{dt}}=0$$

$$\frac{dy}{dt}-\frac{\sqrt{1+t^2}\left(\dfrac{-1}{1+t^2}\right)^2}{\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}y-\frac{\left(\dfrac{-1}{1+t^2}\right)}{\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}=0$$

$$\frac{dy}{dt}-\frac{1}{t\left(1+t^2\right)}y+\frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}=0\,.$$

Diferansiyel denklemin çözümü

$$y(t)=\coth\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}+c\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

dır. Böylece

$$\varphi = \operatorname{arc}\coth\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + c\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

değeri de bulunmuş olur. Dolayısıyla

$$x(t) = (x_1, x_2, x_3) = \left(\sinh\varphi\cos\theta, \sinh\varphi\sin\theta, \cosh\varphi\right)$$

belirlenmiş olur.

$$p_1 = -\varphi^*\sin\theta \quad \Rightarrow \sin\theta = -\frac{p_1}{\varphi^*},$$

$$p_2 = \varphi^*\cos\theta \quad \Rightarrow \cos\theta = \frac{p_2}{\varphi^*},$$

$$p_3 = \theta^*$$

yazılabilir. Bu nedenle açılabilir timelike regle yüzeyler ailesi

$$m(t,u) = p(t) + ux(t)$$

eşitliği ile verilir, burada

$$x(t) = \left(\frac{p_2}{\varphi^*}\sinh\varphi, -\frac{p_1}{\varphi^*}\sinh\varphi, \cosh\varphi\right)$$

dır.

Şimdi açılabilir timelike veya spacelike regle yüzeylerin belirlenmesi üzerine bir metot vereceğiz. Bir $m(t,u) = p(t) + ux(t)$ regle yüzeyi, $\tilde{x}(t)$ dual vektör fonksiyonu gibi yazılabildiğinden dolayı bu bölümde Lorentz birim küre üzerindeki bir dual eğriyi dikkate alacağız. Eğer $p(t)$ taban eğrisi spacelike (timelike) ise regle yüzey spacelike (timelike) olacak (Turgut, 1995).

3.3. Lorentz Birim Küresi Üzerindeki Dual Eğri Yardımıyla Açılabilir Timelike veya Spacelike Regle Yüzeylerin Belirlenmesi Üzerine Bir Yaklaşım

Orijin merkezli, Lorentz birim küresi üzerindeki, dual koordinatları $\tilde{x}_i = x_i + \varepsilon x_i^*$ ($i = 1,2,3$) olan keyfi bir $\tilde{x}$ noktası aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\tilde{x}_1 = x_1 + \varepsilon x_1{}^* = \cosh\tilde{\varphi}\cos\tilde{\theta},$$

$$\tilde{x}_2 = x_2 + \varepsilon x_2{}^* = \cosh\tilde{\varphi}\sin\tilde{\theta},$$

$$\tilde{x}_3 = x_3 + \varepsilon x_3{}^* = \sinh\tilde{\varphi}.$$

Burada $\tilde{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varphi^*$, $\tilde{\theta} = \theta + \varepsilon\theta^*$,sırasıyla, dual hiperbolik ve dual açılardır.

$\varepsilon^2 = \varepsilon^3 = ... = 0$ olduğundan Taylor açılımından

$$\cos\tilde{\theta} = \cos(\theta + \varepsilon\theta^*) = \cos\theta - \varepsilon\theta^*\sin\theta,$$

$$\sin\tilde{\theta} = \sin(\theta + \varepsilon\theta^*) = \sin\theta + \varepsilon\theta^*\cos\theta,$$

$$\sinh\tilde{\varphi} = \sinh(\varphi + \varepsilon\varphi^*) = \sinh\varphi + \varepsilon\varphi^*\cosh\varphi,$$

$$\cosh\tilde{\varphi} = \cosh(\varphi + \varepsilon\varphi^*) = \cosh\varphi + \varepsilon\varphi^*\sinh\varphi$$

elde edilir.

$$\tilde{x}_1 = x_1 + \varepsilon x_1{}^* = \cosh\tilde{\varphi}\cos\tilde{\theta} = \cosh\varphi\cos\theta + \varepsilon(\varphi^*\sinh\varphi\cos\theta - \theta^*\cosh\varphi\sin\theta),$$

$$\tilde{x}_2 = x_2 + \varepsilon x_2{}^* = \cosh\tilde{\varphi}\sin\tilde{\theta} = \cosh\varphi\sin\theta + \varepsilon(\varphi^*\sinh\varphi\sin\theta + \theta^*\cosh\varphi\cos\theta),$$

$$\tilde{x}_3 = x_3 + \varepsilon x_3{}^* = \sinh\tilde{\varphi} = \sinh\varphi + \varepsilon\varphi^*\cosh\varphi$$

dır.

$$x_1 = \cosh\varphi\cos\theta,$$

$$x_2 = \cosh\varphi\sin\theta,$$

$$x_3 = \sinh\varphi$$

ve

$$x_1{}^* = \varphi^* \sinh\varphi\cos\theta - \theta^* \cosh\varphi\sin\theta\,,$$

$$x_2{}^* = \varphi^* \sinh\varphi\sin\theta + \theta^* \cosh\varphi\cos\theta\,,$$

$$x_3{}^* = \varphi^* \cosh\varphi$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle_L &= \langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)\rangle \\ &= \langle (\cosh\varphi\cos\theta, \cosh\varphi\sin\theta, \sinh\varphi), (\cosh\varphi\cos\theta, \cosh\varphi\sin\theta, \sinh\varphi)\rangle \\ &= \cosh^2\varphi\cos^2\theta + \cosh^2\varphi\sin^2\theta - \sinh^2\varphi \\ &= \cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi \\ &= 1\end{aligned}$$

olmasının anlamı x yönlü vektörünün spacelike olmasıdır.

$\mathbb{R}_1^3$ de $m(t,u) = p(t) + ux(t)$ regle yüzeyine karşılık gelen Lorentz birim küresi üzerindeki $\tilde{x}(t)$ için

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= x(t) + \varepsilon x^*(t) \qquad (3.7)\\ &= (x_1, x_2, x_3) + \varepsilon(x_1{}^*, x_2{}^*, x_3{}^*) \\ &= (\cosh\varphi(t)\cos\theta(t), \cosh\varphi(t)\sin\theta(t), \sinh\varphi(t)) \\ &\quad + \varepsilon\big[\varphi^*(t)\sinh\varphi(t)\cos\theta(t) - \theta^*(t)\cosh\varphi(t)\sin\theta(t), \\ &\quad \varphi^*(t)\sinh\varphi(t)\sin\theta(t) + \theta^*(t)\cosh\varphi(t)\cos\theta(t), \\ &\quad \varphi^*(t)\cosh\varphi(t)\big]\end{aligned}$$

dır. $x^* = p \wedge_L x$ olduğundan ve p_i, $1 \le i \le 3$, $p(t)$ nin koordinatları olmak üzere p_1, p_2, p_3 için lineer denklem sistemi oluşturabiliriz.

$$x^* = p \wedge_L x$$

$$\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ \cosh\varphi\cos\theta & \cosh\varphi\sin\theta & \sinh\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \left(p_2 \sinh\varphi - p_3 \cosh\varphi\sin\theta, p_3 \cosh\varphi\cos\theta - p_1 \sinh\varphi, p_2 \cosh\varphi\cos\theta - p_1 \cosh\varphi\sin\theta\right)$$

$$\varphi^* \sinh\varphi\cos\theta - \theta^* \cosh\varphi\sin\theta = p_2 \sinh\varphi - p_3 \cosh\varphi\sin\theta,$$

$$\varphi^* \sinh\varphi\sin\theta + \theta^* \cosh\varphi\cos\theta = p_3 \cosh\varphi\cos\theta - p_1 \sinh\varphi,$$

$$\varphi^* \cosh\varphi = p_2 \cosh\varphi\cos\theta - p_1 \cosh\varphi\sin\theta.$$

p_1, p_2, p_3 bilinmeyenlerinin katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} 0 & \sinh\varphi & -\cosh\varphi\sin\theta \\ -\sinh\varphi & 0 & \cosh\varphi\cos\theta \\ -\cosh\varphi\sin\theta & \cosh\varphi\cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Bu matrisin rankı 2'dir. Ayrıca

$$\begin{bmatrix} 0 & \sinh\varphi & -\cosh\varphi\sin\theta & \varphi^* \sinh\varphi\cos\theta - \theta^* \cosh\varphi\sin\theta \\ -\sinh\varphi & 0 & \cosh\varphi\cos\theta & \varphi^* \sinh\varphi\sin\theta + \theta^* \cosh\varphi\cos\theta \\ -\cosh\varphi\sin\theta & \cosh\varphi\cos\theta & 0 & \varphi^* \cosh\varphi \end{bmatrix}.$$

ilaveli matrisin rankı da 2 olduğundan bu lineer denklem sistemi sonsuz çözüm içerir.

Matrisin 1. satırını $\sinh\varphi$ ye bölüp 1. satıra yazarsak,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\coth\varphi\sin\theta & \varphi^* \cos\theta - \theta^* \coth\varphi\sin\theta \\ -\sinh\varphi & 0 & \cosh\varphi\cos\theta & \varphi^* \sinh\varphi\sin\theta + \theta^* \cosh\varphi\cos\theta \\ -\cosh\varphi\sin\theta & \cosh\varphi\cos\theta & 0 & \varphi^* \cosh\varphi \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Matrisin 2. satırını $-\sinh\varphi$ ye bölüp 2. satıra yazarsak,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\coth\varphi\sin\theta & \varphi^*\cos\theta-\theta^*\coth\varphi\sin\theta \\ 1 & 0 & -\coth\varphi\cos\theta & -\varphi^*\sin\theta-\theta^*\coth\varphi\cos\theta \\ -\cosh\varphi\sin\theta & \cosh\varphi\cos\theta & 0 & \varphi^*\cosh\varphi \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Matrisin 1. satırını $-\cosh\varphi\cos\theta$ ile 2. satırını $\cosh\varphi\sin\theta$ ile çarpıp 3. satıra eklersek,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\coth\varphi\sin\theta & \varphi^*\cos\theta-\theta^*\coth\varphi\sin\theta \\ 1 & 0 & -\coth\varphi\cos\theta & -\varphi^*\sin\theta-\theta^*\coth\varphi\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Matrisin 1. ve 2. satırını yer değiştirirsek,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\coth\varphi\cos\theta & -\varphi^*\sin\theta-\theta^*\coth\varphi\cos\theta \\ 0 & 1 & -\coth\varphi\sin\theta & \varphi^*\cos\theta-\theta^*\coth\varphi\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_1-\coth\varphi\cos\theta p_3=-\varphi^*\sin\theta-\theta^*\coth\varphi\cos\theta,$$

$$p_2-\coth\varphi\sin\theta p_3=\varphi^*\cos\theta-\theta^*\coth\varphi\sin\theta$$

elde ederiz. Denklem sistemini düzenlersek,

$$\begin{aligned} p_1 &= \left(p_3-\theta^*\right)\cos\theta\coth\varphi-\varphi^*\sin\theta \\ p_2 &= \left(p_3-\theta^*\right)\sin\theta\coth\varphi+\varphi^*\cos\theta \\ p_3 &= p_3 \end{aligned} \tag{3.8}$$

elde ederiz. $p_3(t)$ isteğe bağlı seçilebildiğinden $p_3(t)=\theta^*(t)$ alabiliriz. Bu durumda (3.8) denklem sistemini daha basit hale dönüştürebiliriz.

$$\begin{aligned} p_1 &= -\varphi^*\sin\theta \\ p_2 &= \varphi^*\cos\theta \\ p_3 &= \theta^* \end{aligned} \tag{3.9}$$

dır.

(3.7) eşitliğinde verilen regle yüzeyin dağılma parametresi

$$\Delta=\frac{\left\langle \frac{dx}{dt},\frac{dx^*}{dt}\right\rangle_L}{\left\|\frac{dx}{dt}\right\|^2} \tag{3.10}$$

$$=\frac{\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta^*}{dt}\cosh^2\varphi+\varphi^*\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sinh\varphi\cosh\varphi-\frac{d\varphi^*}{dt}\frac{d\varphi}{dt}}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\cosh^2\varphi-\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta^*}{dt}\cosh^2\varphi+\varphi^*\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sinh\varphi\cosh\varphi-\frac{d\varphi^*}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\frac{1}{\cosh^2\varphi}}{\left(\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\cosh^2\varphi-\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)\frac{1}{\cosh^2\varphi}}$$

$$=\frac{\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta^*}{dt}+\varphi^*\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\tanh\varphi-\frac{d\varphi^*}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\frac{1}{\cosh^2\varphi}}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\frac{1}{\cosh^2\varphi}}$$

dır.

Eğer $\mathbb{R}_1^3$ deki regle yüzey açılabilir ise (3.10) denklemini

$$\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta^*}{dt}+\varphi^*\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\tanh\varphi-\frac{d\varphi^*}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\frac{1}{\cosh^2\varphi}=0 \tag{3.11}$$

şeklinde yazabiliriz. (3.11) denkleminde $\frac{d(\tanh\varphi)}{dt}=\frac{1}{\cosh^2\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$ eşitliği yerine yazılır ve denklem düzenlenirse,

$$\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta^*}{dt}+\varphi^*\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\tanh\varphi-\frac{d\varphi^*}{dt}\frac{d(\tanh\varphi)}{dt}=0,$$

$$\frac{d\varphi^*}{dt}\frac{d(\tanh\varphi)}{dt}-\varphi^*\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\tanh\varphi-\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta^*}{dt}=0\,,$$

$$\frac{\dfrac{d\varphi^*}{dt}\dfrac{d(\tanh\varphi)}{dt}-\varphi^*\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\tanh\varphi-\dfrac{d\theta}{dt}\dfrac{d\theta^*}{dt}}{\dfrac{d\varphi^*}{dt}}=0\,,$$

$$y(t)=\tanh\varphi(t)\,,\;A(t)=-\frac{\varphi^*\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2}{\dfrac{d\varphi^*}{dt}}\,,\;B(t)=-\frac{\dfrac{d\theta}{dt}\dfrac{d\theta^*}{dt}}{\dfrac{d\varphi^*}{dt}}$$

birinci mertebeden lineer denklem elde edilir.

$$\frac{dy}{dt}+A(t)y+B(t)=0 \tag{3.12}$$

dır.

Şimdi önemli bir soruyu cevaplamaya çalışalım: Bir $p(t)$ eğrisi verildiğinde, taban eğrisi $p(t)$ olacak şekilde $\mathbb{R}_1^3$ de açılabilir regle yüzey bulabilir miyiz?

Sorunun cevabı olumludur, (3.9) denklem sisteminden

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{-\varphi^*\sin\theta}{\varphi^*\cos\theta}=-\tan\theta\,,$$

$$\sqrt{p_1^{\,2}+p_2^{\,2}}=\sqrt{\left(-\varphi^*\sin\theta\right)^2+\left(\varphi^*\cos\theta\right)^2}=|\varphi^*|\,,$$

$$p_3=\theta^*.$$

elde edilir. Düzenlenirse

$$\tan\theta=-\frac{p_1}{p_2}$$

$$\varphi^*=\pm\sqrt{p_1^{\,2}+p_2^{\,2}} \tag{3.13}$$

$$\theta^* = p_3$$

elde edilir.

Son olarak $\varphi(t)$ yi belirleyelim. (3.13) denklem sisteminde bulunan değerler (3.12) lineer diferansiyel denklemde yerine yazılırsa çözümü $\varphi(t)$ yi verir. Bu çözüm integral sabiti içerir. Bu sebeple taban eğrisi $p(t)$ olan sonsuz tane açılabilir regle yüzey elde ederiz.

Burada dikkat edilmelidir ki $\varphi^*(t)$ iki değere sahiptir. Verilen integral sabiti için (-) işareti kullandığımız zaman (+) işareti kullanılarak elde edilen regle yüzeyin karşıtını elde ederiz.

3.3.1. Örnek

$p(t) = \left(t^2, 1, \sqrt{2}t\right)$ eğrisini göz önüne alalım.

$$\langle p(t), p(t)\rangle_L = \langle (p_1, p_2, p_3), (p_1, p_2, p_3)\rangle_L$$

$$= \left\langle \left(t^2, 1, \sqrt{2}t\right), \left(t^2, 1, \sqrt{2}t\right)\right\rangle_L$$

$$= t^4 + 1^2 - 2t^2$$

$$= \left(t^2 - 1\right)^2$$

olmasının anlamı $p(t)$ nin spacelike olmasıdır. $p(t)$ taban eğrisi spacelike olduğu için regle yüzey spacelikedır.

$$p_1 = t^2, \quad p_2 = 1, \quad p_3 = \sqrt{2}t$$

için

$$\tan\theta = -\frac{p_1}{p_2} = -\frac{t^2}{1} = -t^2,$$

$$\theta = \arctan(-t^2),$$

$$\varphi^* = \pm\sqrt{p_1^{\;2} + p_2^{\;2}} = \pm\sqrt{1+t^4}\ ,$$

$$\theta^* = p_3 = \sqrt{2}t$$

elde edilir.

$$y(t) = \tanh\varphi(t)\,,\ \ A(t) = -\frac{\varphi^*\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2}{\dfrac{d\varphi^*}{dt}}\,,\ \ B(t) = -\frac{\dfrac{d\theta}{dt}\dfrac{d\theta^*}{dt}}{\dfrac{d\varphi^*}{dt}}$$

ifadelerini elde edelim:

$$\frac{d\theta^*}{dt} = \frac{d\left(\sqrt{2}t\right)}{dt} = \sqrt{2}\ ,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\left(\arctan(-t^2)\right)}{dt} = \frac{\left(-t^2\right)'}{1+\left(-t^2\right)^2} = \frac{-2t}{1+t^4}\ ,$$

$$\frac{d\varphi^*}{dt} = \frac{d\left(\sqrt{1+t^4}\right)}{dt} = \frac{2t^3}{\sqrt{1+t^4}}\ .$$

Değerleri (3.12) denkleminde yerlerine yazılırsa 1. mertebeden lineer diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{dy}{dt} + A(t)y + B(t) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} - \frac{\varphi^*\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2}{\dfrac{d\varphi^*}{dt}}y - \frac{\dfrac{d\theta^*}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}}{\dfrac{d\varphi^*}{dt}} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} - \frac{\sqrt{1+t^4}\left(\dfrac{-2t}{1+t^4}\right)^2}{\dfrac{2t^3}{\sqrt{1+t^4}}}y - \frac{\sqrt{2}\left(\dfrac{-2t}{1+t^4}\right)}{\dfrac{2t^3}{\sqrt{1+t^4}}} = 0$$

$$\frac{dy}{dt}-\frac{2}{t\left(t^4+1\right)}y+\frac{\sqrt{2}}{t^2\sqrt{t^4+1}}=0\,.$$

Diferansiyel denklem çözümü

$$y(t)=\tanh\varphi(t)=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{t\sqrt{t^4+1}}+c\frac{t^2}{\sqrt{t^4+1}}$$

dır. Böylece

$$\varphi=\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{t\sqrt{t^4+1}}+c\frac{t^2}{\sqrt{t^4+1}}\right)$$

değeri de bulunmuş olur. Dolayısıyla

$$x(t)=(x_1,x_2,x_3)=\left(\cosh\varphi\cos\theta,\cosh\varphi\sin\theta,\sinh\varphi\right)$$

belirlenmiş olur.

$$p_1=-\varphi^*\sin\theta \quad\Rightarrow \sin\theta=-\frac{p_1}{\varphi^*},$$

$$p_2=\varphi^*\cos\theta \quad\Rightarrow \cos\theta=\frac{p_2}{\varphi^*},$$

$$p_3=\theta^*$$

yazılabilir. Bu nedenle açılabilir timelike regle yüzeylerin ailesi

$$m(t,u)=p(t)+ux(t)$$

formülü ile verilir, burada

$$x(t)=\left(\frac{p_2}{\varphi^*}\cosh\varphi,-\frac{p_1}{\varphi^*}\cosh\varphi,\sinh\varphi\right)$$

dır.

4. SONUÇLAR

E. Study dönüşümüne göre birim dual kürenin noktaları ile $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrular birebir karşılık gelmektedir. $\mathbb{R}^3$ deki bir L doğrusu, bir O başlangıç noktasına göre üzerindeki bir p noktası ve doğrunun yönünü belirten bir x vektörü ile tamamen belirlenir. Bu karşılık gelme $p\times x = x^*$ olmak üzere

$$\tilde{x} = x + \varepsilon x^*$$

şeklindedir. $m(t,u) = p(t) + ux(t)$ regle yüzeyi,

$$\tilde{x}(t) = x(t) + \varepsilon p(t)\times x(t) = x(t) + \varepsilon x^*(t)$$

şeklinde verilen $\tilde{x}(t)$ dual vektörel fonksiyonları gibi yazılabilir. Bu tez çalışmasında $p(t)$ taban eğrisi verildiğinde, açılabilir regle yüzey $m(t,u)$'nun belirlenebileceği görüldü. Bunun için dual vektörel ifadeler kullanıldı ve taban eğrisinin koordinatlarından yararlanıldı. Daha sonra bu çalışma 3-boyutlu Minkowski uzayına genişletildi.

E. Study dönüşümüne göre $\mathbb{D}_1^3$ uzayındaki $\mathbb{H}_0^2$ hiperbolik ve $\mathbb{S}_1^2$ Lorentz birim dual kürelerin noktaları ile $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz çizgiler uzayındaki yönlü timelike veya spacelike doğruları birebir karşılık gelmektedir. $\mathbb{R}_1^3$ deki bir L doğrusu, bir O başlangıç noktasına göre üzerindeki bir p noktası ve doğrunun yönünü belirten bir x vektörü ile tamamen belirlenir. Bu karşılık gelme $p\wedge_L x = x^*$ olmak üzere

$$\tilde{x} = x + \varepsilon x^*$$

şeklindedir. $m(t,u) = p(t) + ux(t)$ regle yüzeyi,

$$\tilde{x}(t) = x(t) + \varepsilon p(t)\wedge_L x(t) = x(t) + \varepsilon x^*(t)$$

şeklinde verilen $\tilde{x}$ dual vektör fonksiyonları gibi yazılabilir. Bu tez çalışmasında $p(t)$ taban eğrisi verildiğinde, açılabilir timelike veya spacelike regle yüzey $m(t,u)$'nun belirlenebileceği görüldü. Bunun için dual vektörel ifadeler kullanıldı ve taban eğrisinin koordinatlarından yararlanıldı.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Hilal KARAKAŞ
Doğum Yeri ve Tarihi : Balıkesir / 1987

Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği (2005-2010)
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

İş Deneyimi

Stajlar : Kocatepe Mimar Kemal Anadolu Lisesi (2009-2010)
Çalıştığı Kurumlar : Adapazarı Kız Teknik ve Meslek Lisesi (2010-2012)
Yeşil D. Hatun Anadolu İmam Hatip Lisesi (2012-…)

İletişim

Adres : Hüdavendigar Mah. Hoşgörü sok. No:4/2 Osmangazi/BURSA
Tel : 05424051484
E-Posta Adresi : hilal-krks@hotmail.com

Tarih:
İmza

KAYNAKLAR

Akutagawa, K. and Nishikawa, S., “The Gauss Map and Spacelike Surfaces with Prescribed Mean Curvature in Minkowski 3-Space”, ***Töhoko Mathematical Journal,*** 42(1): 67-82 (1990).

Birman, G. S. and Nomizu, K., “Trigonometry in Lorentzian Geometry”, ***American Mathematical Monthly,*** 91(9): 543-549 (1984).

Ekici, C. and Özüsağlam, E., “On The Method Determination of a Developable Timelike Ruled Surface ”, ***Kuwait J. Sci. Eng.***, 39(1A): 19-41 (2012).

Hacısalihoğlu, H. H., “Diferansiyel Geometri 1. Cilt”, ***Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi***, Ankara, 2000a.

Hacısalihoğlu, H. H., “Diferansiyel Geometri 2. Cilt”, ***Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi***, Ankara, 2000b.

Hacısalihoğlu, H. H., “Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi”, ***Gazi Üniversitesi Fen – Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No. 2***, Ankara, 1983.

Kazaz, M., Özdemir, A. and Güroğlu, T., “On The Determination of a Developable Timelike Ruled Surface”, ***SDÜ Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi (E-Dergi)***, 3(1): 72-79 (2008).

Köse, Ö., “A Method of The Determination of a Developable Ruled Surface”, ***Mechanism and Machine Theory***, 34: 1187-1193 (1999).

Lopez, R., “Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space”, ***Departamento de Geometria y Topologia Universidad de Granada 18071,*** Espana, 1-2 (2008).

O’Neill, B., “Semi Riemannian Geometry”, ***Academic Press***, New York, 1983.

Turgut, A., “3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler”, Doktora Tezi, ***Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Ankara, 1995.

Uğurlu, H. H. and Çalışkan A., “The Study Mapping For Directed Spacelike and Timelike Lines in Minkowsky 3-Space $\mathbb{R}_1^3$”, ***Mathematical and Computational Applications***, 1(2): 142-148 (1996).

Yaylı, Y., Çalıskan, A. and Uğurlu H. H., “The E. Study Maps of Circles on Dual Hyperbolic and Lorentzian Unit Spheres $\mathbb{H}_0^2$ and $\mathbb{S}_1^2$”, ***Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy***, 102A (1): 37-47 (2002).