ANADOLU ÜNİVERSİTESİ **BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ**

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

YARIM TAMSAYI AĞIRLIKLI MODÜLER FORMLAR ÜZERİNE

Zeynep DEMİRKOL ÖZKAYA
Yüksek Lisans

Tez Danışmanı
Doç.Dr. İlker İNAM

BİLECİK, 2017

Ref.No: 10138159

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

YARIM TAMSAYI AĞIRLIKLI MODÜLER FORMLAR ÜZERİNE

Zeynep DEMİRKOL ÖZKAYA

Yüksek Lisans

Tez Danışmanı
Doç.Dr. İlker İNAM

BİLECİK, 2017

ANADOLU UNIVERSITY
BILECIK SEYH EDEBALI UNIVERSITY

Graduate School of Sciences
Department of Mathematics

ON THE HALF-INTEGRAL WEIGHT MODULAR FORMS

Zeynep DEMIRKOL OZKAYA

Master's Thesis

Thesis Advisor
Assoc.Prof.Dr. Ilker INAM

BILECIK, 2017

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS
JÜRİ ONAY FORMU

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 11.01.2017 tarih ve ......4.... sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 27.01.2017 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Zeynep DEMİRKOL ÖZKAYA'nın "Yarım Tamsayı Ağırlıklı Modüler Formlar Üzerine" başlıklı tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği/ ~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. İlker İNAM

ÜYE : Doç.Dr.Nülifer ÖZDEMİR

ÜYE : Yrd.Doç.Dr.Bilal DEMİR

ONAY

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../....... tarih ve ..../............ sayılı kararı.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimimin tez hazırlama süreci boyunca yardımlarını benden esirgemeyen, yoğun mesaisine rağmen beni ihmal etmeyen kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. İlker İNAM'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bana daima destek olan çok değerli anneme, babama ve sevgili eşim M.Murat ÖZKAYA'ya teşekkürü bir borç bilirim ve bu tez çalışmasını da hayatımıza girerek bizi çok mutlu eden minik kızım Zeynep Asya ÖZKAYA'ya armağan ederim.

Zeynep DEMİRKOL ÖZKAYA

ÖZET

Modüler formlar uzun yıllardır popülerliğini koruyan bir konudur. Matematik ve Fizik'in bir çok alanında önemli uygulamalara sahiptir. Dört bölümden oluşan bu çalışmada yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar tanıtılmıştır. İlk bölümde genel ve özel lineer grup tanıtılmış olup, bazı özellikleri ele alınmıştır. İkinci bölüm ise modüler formların tanımında önemli bir yere sahip olan modüler grup ve bu grubun denklik alt grupları tanıtılacaktır. Üçüncü bölümde tamsayı ağırlıklı modüler formlar incelenecek, bazı modüler form örnekleri verilecektir. Dördüncü ve son bölümde yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar tanımlanmış, bazı özellikleri incelenmiş ve örnekler verilmiştir. Bu çalışma derleme niteliğindedir.

Anahtar Kelimeler: Modüler grup; modüler formlar; yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar.

ABSTRACT

Modular forms are have attention and popularity for many years. They have applications in many areas of mathematics and physics. In this study which consists of four chapters, modular forms of weight half-integral is introduced. In the first part, general and special linear groups have been introduced, some properties are discussed. In the second part, the modular group that has an important place in the definition of modular forms is given. In the third chapter, modular forms areinvestigated and some examples of modular forms are given. In the fourth and final chapter, half–integral weight modular forms are defined, some features are examined and examples are given. This study is a compilation.

Keywords: Modular Group; modular forms; half-integral weight modular forms.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{N}$	:Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{H}$	: Üst Yarı Düzlem
$Re(z)$	: z Karmaşık Sayısının Reel Kısmı
$Im(z)$	: z Karmaşık Sayısının Sanal Kısmı
Dim(-)	: Vektör Uzayının Boyutu

1. GENEL VE ÖZEL LİNEER GRUP

Tanım 1.1. R bir değişmeli halka olsun. Bu durumda *genel lineer grup* $GL_2(R)$ ile gösterilir ve

$$GL_2(R) := \{g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | detg = ad - bc \neq 0\}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 1.2. Matris çarpımına göre $GL_2(R)$ bir grup olur (Başkan, 2012).

Tanım 1.3. $GL_2(R)$'nin determinantı 1 olan matrislerinin oluşturduğu alt gruba *özel lineer grup* denir ve bu grup $SL_2(R)$ ile gösterilir. O halde

$$SL_2(R) := \{g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | detg = ad - bc = 1\}$$

olur.

Uyarı 1.4. Yukarıda $2x2$ tipinde tanımlanan genel ve özel lineer grup tanımları daha genel olarak *nxn* tipinde matrislere de genişletilebilir.

Önerme 1.5. $SL_n(R) \leq GL_n(R)$'dir (Ali Osman Asar, vd, 2012).

Farklı R değişmeli halkaları seçilerek grubun özellikleri zenginleştirilebilir. Bu bölümde $R = \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ ve N bir pozitif tamsayı olmak üzere $R = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ durumlarıyla ilgilenilecektir.

Tanım 1.5. $\tilde{\mathbb{C}}$ ile $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ kümesi gösterilsin. $\tilde{\mathbb{C}}$'ya *Riemann küresi* ya da $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ *karmaşık projektif düzlemi* adı verilir.

Riemann küresinin oluşturulması hakkında ayrıntılı bilgi (Başkan, 2012)'da bulunabilir.

Tanım 1.6. Bir $z \in \mathbb{C}$ noktasını ve bir $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ elemanını göz önüne alalım. Bu durumda

$$gz = \frac{az+b}{cz+d} \tag{1.1}$$

ve

$$g\infty = \frac{a}{c} = \lim_{z\to\infty} gz \tag{1.2}$$

olarak tanımlanır. O halde $g - \frac{d}{c} = \infty$ ve $c = 0$ ise $g\infty = \infty$ olur.

$z \mapsto gz$ dönüşümlerine $\tilde{\mathbb{C}}$ *Riemann küresinin kesirli lineer dönüşümleri* adı verilir.

Teorem 1.7. (1.1) ve (1.2) dönüşümleri $\tilde{\mathbb{C}}$ kümesi üzerinde bir grup etkisi belirtir (Koblitz, 1984).

İspat. Her $g_1, g_2 \in SL_2(\mathbb{R})$ ve $z \in \tilde{\mathbb{C}}$ için $g_1(g_2 z) = (g_1 g_2)z$ olduğu gösterilirse ispat biter. $1z = z$ olduğu açıktır.

$$g_1 z = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$$

ve

$$g_2 z = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

olsun.

$$g_1(g_2 z) = g_1\left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\right) = \frac{a_1\left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\right) + b_1}{c_1\left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\right) + d_1} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + c_2 d_1)z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)}$$

ve

$$\begin{aligned}(g_1 g_2)z &= \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right)z \\ &= \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix} z \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + c_2 d_1)z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)}\end{aligned}$$

Bu son iki eşitlikten

$$g_1(g_2 z) = (g_1 g_2)z$$

olduğu görülür ve ispat biter.

Uyarı 1.8. $g = -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ için (1.1) eşitliği özdeşlik dönüşümünü verir. Her $z \in \tilde{\mathbb{C}}$ 'yi invaryant bırakan dönüşümleri inceleyelim. Böylece $z = \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$ eşitliğinden $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ elde edilir. Bu eşitlik $b = 0,\ c = 0\ ve\ a = d$ olması halinde doğrudur. Bu değerler $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisinde yerine yazılırsa $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ matrisi elde edilir. Bu matrislerin $SL_2(\mathbb{R})$'de yer alabilmesi için $a^2 = 1$ yani $a = \pm 1$ olması gerekir. a'nın bu değerlerine karşılık gelen matrisler $\pm I$'dır. Böylece $\pm I$'nın $\tilde{\mathbb{C}}$ üzerinde aşikar olarak hareket eden tüm matrisler olduğu sonucuna ulaşılır. O halde $SL_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$ bölüm grubunun $\mathbb{C}$ üzerinde özdeşlikten farklı her elemanı için aşikar olmayan bir hareket yaptığı sonucuna varılır. $SL_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$ bölüm grubu $PSL_2(\mathbb{R})$ ile gösterilir ve projektif özel lineer grup olarak adlandırılır.

Teorem 1.9. $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) > 0\}$ olsun. Bu durumda $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$'nin elemanları $\mathbb{H}$ 'yi korur. Yani $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$' nin elemanları üst yarı düzlemi üst yarı düzleme resmeder (Başkan, 2012).

İspat. $z \in \mathbb{C}\ ve\ Im(z) > 0$ olsun. Bu durumda $Im(gz) > 0$ olduğu gösterilirse ispat biter.

$$Im(gz) = Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = Im\left(\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2}\right) = |cz+d|^{-2} Im(az+b)(c\bar{z}+d)$$

elde edilir. $detg = 1, |z| \in \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$'nin bir cisim olduğu göz önüne alınır ve $z = x + iy$ yerine konulursa

$$\begin{aligned} Im\big((az+b)(c\bar{z}+d)\big) &= Im(ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd) = Im(adz + bc\bar{z}) \\ &= (ad - bc)Im(z) = Im(z) \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. O halde $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ için $Im(gz) = |cz + d|^{-2} Im(z)$ dir. $|cz + d| > 0$ ve kabul gereği $Im(z) > 0$ olduğundan $Im(gz) > 0$ olur ki bu da ispatı bitirir.

2. MODÜLER GRUP VE DENKLİK ALTGRUPLARI

Tanım 2.1. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$'nin girdileri tamsayı ve determinantı 1 olan matrislerinin kümesi modüler grup olarak adlandırılır ve $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ile gösterilir. Yani

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

olur.

Teorem 2.2. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ' dir.

İspat. $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix}, \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{f} \\ \mathrm{g} & \mathrm{h} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ olsun. Bu durumda iddianın doğru olduğunu göstermek için $X.Y^{-1} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ olduğunu göstermek gerekli ve yeterlidir. Kabul gereği $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \; ve \; eh - fg = 1$ olduğu biliniyor.

$$\mathrm{Y}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{Y}|} \begin{pmatrix} \mathrm{h} & -\mathrm{f} \\ -\mathrm{g} & \mathrm{e} \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathrm{eh} - \mathrm{fg}} \begin{pmatrix} \mathrm{h} & -\mathrm{f} \\ -\mathrm{g} & \mathrm{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{h} & -\mathrm{f} \\ -\mathrm{g} & \mathrm{e} \end{pmatrix}$$

olduğundan,

$$X.Y^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{h} & -\mathrm{f} \\ -\mathrm{g} & \mathrm{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ah} - \mathrm{bg} & -\mathrm{af} + \mathrm{be} \\ \mathrm{ch} - \mathrm{dg} & -\mathrm{cf} + \mathrm{de} \end{pmatrix}$$

dir. Bu matrisin girdilerinin tamsayılardan oluştuğu aşikar ve determinantına baktığımızda ise

$$(ah - bg)(-cf + de) - (-af + be)(ch - dg) = (ad - bc)(eh - fg) = 1$$

olarak bulduğumuzdan $X.Y^{-1} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ olur. Bu ise ispatı bitirir.

Uyarı 2.3. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$'ye tam modüler grup adı verilir. Birçok kaynakta bu grup Γ ile gösterilir. Örneğin (Schonoberg, 1974). Sayılar Teorisi'nde ve başka çeşitli dallarda bu grup sık sık karşımıza çıkmaktadır. İleride verilecek olan modüler formlar, modüler grup yardımıyla tanımlanır.

$\bar{\Gamma}$ ile $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\pm I$ bölüm grubunu gösterelim. Bu durumda $\bar{\Gamma}$, $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemi üzerinde aşikar olmayacak şekilde hareket eder (Koblitz, 1984).

$\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$'nin kendisi dışında alt grupları da oldukça ilgi çekici özelliklere sahiptir. İlk olarak N seviyeli temel denklik grubu tanımını verelim.

Tanım 2.4. N bir pozitif tamsayı olsun. Bu durumda

$$\Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \middle| a \equiv d \equiv 1 (modN), b \equiv c \equiv 0 (modN) \right\}$$

biçiminde tanımlanan gruba $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$'nin N seviyeli temel denklik alt grubu denir.

Teorem 2.5. $\Gamma(N) \leq \Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$'dir.

İspat. $\Gamma(N) \neq \emptyset$ ve $\Gamma(N) \subset \Gamma$ olduğundan $X, Y \in \Gamma(N)$ için $X.Y^{-1} \in \Gamma(N)$ olduğunu göstermemiz gerekli ve yeterlidir. $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix}, \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{f} \\ \mathrm{g} & \mathrm{h} \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$ olsun.

$\mathrm{Y}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{h} & -\mathrm{f} \\ -\mathrm{g} & \mathrm{e} \end{pmatrix}$ olduğundan

$$X.Y^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{h} & -\mathrm{f} \\ -\mathrm{g} & \mathrm{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ah} - \mathrm{bg} & -\mathrm{af} + \mathrm{be} \\ \mathrm{ch} - \mathrm{dg} & -\mathrm{cf} + \mathrm{de} \end{pmatrix}$$ olarak yazılabilir

Kabul gereği $a \equiv d \equiv e \equiv h \equiv 1(modN), b \equiv c \equiv f \equiv g \equiv 0(modN)$ olduğundan $ah - bg \equiv -cf + de \equiv 1(modN)$ ve $-\mathrm{af} + \mathrm{be} \equiv \mathrm{ch} - \mathrm{dg} \equiv 0(\mathrm{modN})$ dir. Böylece $X.Y^{-1} \in \Gamma(N)$ olur. Bu da ispatı bitirir.

Teorem 2.6. $\Gamma(N) \lhd \Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$'dir.

İspat. $[\Gamma : \Gamma(N)] = 2$ olduğundan sonuç aşikardır.

Uyarı 2.7. $\Gamma(1) = \Gamma$ olur. Diğer yandan dikkat edilirse $N = 2$ için $\bar{\Gamma}(2) = \Gamma(2)/\{\pm \mathrm{I}\}$ olurken $N > 2$ için $-1 \neq 1(modN)$ olacağından ve böylece $-\mathrm{I} \notin \Gamma(\mathrm{N})$ olduğundan $\bar{\Gamma}(N) = \Gamma(N)$ olur.

Tanım 2.8. Γ'nın $\Gamma(\mathrm{N})$'i bulunduran bir alt grubuna N seviyeli denklik alt grubu denir. Benzer tanım $\bar{\Gamma}$ ve $\bar{\Gamma}(N)$ için de yapılabilir.

Uyarı 2.9. Dikkat edilirse N', N nin bir katı ise bu durumda N seviyeli denklik alt grubu aynı zamanda N' seviyeye de sahip olur. Çünkü $\Gamma(N) \supset \Gamma(N')$ dir.

Γ'nın bir alt grubu denklik alt grubu olmayabilir. Buna köşegen dışındaki girdileri 2 ye eşit olan alt ve üst üçgensel matrisler tarafından üretilen alt grup örnek olarak verilebilir.

Tam modüler grubun diğer önemli denklik alt gruplarından ikisi :

$$\Gamma_0(\mathrm{N}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \middle| c \equiv 0(modN) \right\}$$

$$\Gamma_1(\mathrm{N}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(\mathrm{N}) \middle| a \equiv 1(modN) \right\}$$

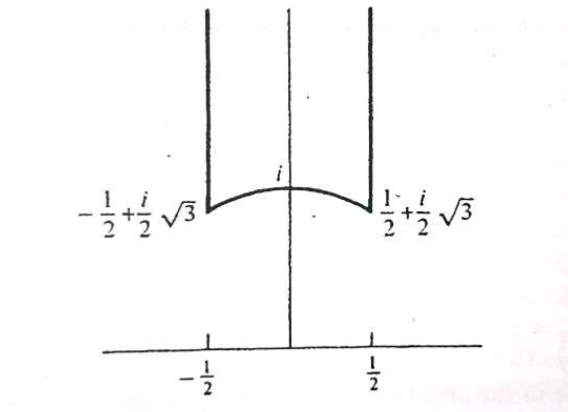
şeklindedir. $\Gamma_0(\mathrm{N})$'i yarım tamsayı ağırlıklı modüler formların tanımında kullanacağız. Bu gruba N seviyeli Hecke denklik alt grubu adı verilir

Teorem 2.10. $\Gamma_0(\mathrm{N}) \leq \Gamma$ ve $\Gamma_1(\mathrm{N}) \leq \Gamma$'dır.

$A \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve G bir grup olsun. G grubu A kümesi üzerinde hareket ettiği zaman G grubu A kümesini denklik sınıflarına böler. Bu durumda A kümesinin iki elemanı verildiğinde birini diğerine resmeden Γ'nın bir elemanı varsa bu durumda bu iki nokta aynı denklik sınıfında yer alır. Özel olarak, G, Γ'nın bir alt grubu ve $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ ise bu durumda $z_2 = gz_1$ olacak şekilde bir $g \in G$ bulunabiliyorsa z_1 ve z_2 noktalarına $G - denktir$ denir.

Tanım 2.11. G, Γ nın bir alt grubu ve F, $\mathbb{H}$üst yarı düzleminde kapalı ve basit bağlantılı bölge olsun. Eğer F deki her bir $z \in \mathbb{H}$ noktası F deki bir noktaya $G -$ denk ise ancak F nin içindeki iki farklı z_1 ve z_2 noktası $G -$denk değil ise (iki sınır noktası $G -$ denk olabilir) bu durumda F'ye Γ'nın G alt grubu için bir temel bölge denir.

Teorem 2.12. Γ nın temel bölgesi $F := \left\{ z \in \mathbb{H} \middle| \frac{-1}{2} \leq Rez \leq \frac{1}{2}\ ve\ |z| \geq 1 \right\}$ dir (Koblitz, 1984).



Şekil 2.1. Modüler grubun temel bölgesi.

Teorem 2.13.

$$\mathrm{T} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ :\ \mathrm{z} \mapsto \mathrm{z}+1$$

$$\mathrm{S} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ :\ \mathrm{z} \mapsto \frac{-1}{\mathrm{z}}$$

olarak tanımlansın. $\mathrm{T}, \mathrm{S} \in \Gamma$'dır. Bundan başka $\bar{\Gamma} = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm \mathrm{I}\}$ grubu T ve S yardımıyla üretilebilir. Başka bir deyişle herhangi bir kesirli lineer dönüşüm T, S ve bunların terslerinin lineer bir "kelimesi" olarak ifade edilebilir (Koblitz, 1984).

İspat : (Koblitz, 1984)'te sayfa 102'de bulunabilir.

Tanım 2.14. $\overline{\mathbb{H}}$ ile $\mathbb{H} \cup \{\infty\} \cup \mathbb{Q}$ kümesini gösterelim. Bu durumda $\overline{\mathbb{H}}$'ya $\mathbb{H}$ üst yarı düzleminin sonsuz ve reel eksen üzerindeki tüm rasyonel sayılarla genişletilmesi denir. Burada $\{\infty\} \cup \mathbb{Q}$'nun elemanlarına "cusp" noktaları denir.

Teorem 2.15. Γ'nın elemanları cusp noktaları için geçişli permütasyondur (Koblitz, 1984).

İspat. $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ yı göz önüne alalım. Bu durumda $ad - bc = 1$ olduğu kullanılarak $\frac{a}{c}$ kesri ile bir g matrisi eşleştirilebilir. Bu matris ∞'u $\frac{a}{c}$' ye götürür. Böylece tüm rasyonel sayılar ∞'un Γ denklik sınıfında yer alır.

Uyarı 2.16. Γ', Γ' nın bir alt grubu olsun. Bu durumda Γ'' nin elemanları cusp noktaları için bir permütasyon olup ancak bu etki geçişli değildir. Yani $\{\infty\} \cup \mathbb{Q}$ cuspları arasında genellikle birden fazla Γ' denklik sınıfı vardır. Γ'' nin cusp noktası denildiğinde aslında cusp noktalarının Γ' −denklik sınıfı kastedilmektedir. Böylece bir cusp noktasını belirtmek için uygun bir denklik sınıfı temsilcisi seçilebilir. O halde Γ' nın ∞' da tek bir cusp noktası vardır derken ∞ noktası herhangi bir $\frac{a}{c}$ rasyonel sayısıyla yer değiştirebilir demek anlamına gelir.

3. MODÜLER FORMLAR

3.1. Giriş

$\mathbb{H}$ üzerindeki alışılmış topolojiyi $\overline{\mathbb{H}}$ kümesine aşağıdaki şekilde genişletebiliriz. İlk olarak herhangi bir $c > 0$ için ∞ un açık komşuluklarının bir temel sistemi

$$N_C = \{z \in \mathbb{H} | Imz > C\} \cup \{\infty\}$$

olur.

$$z \mapsto q = e^{2\pi iz} \tag{3.1}$$

dönüşümü yardımıyla $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemi delinmiş açık birim diske resmedilir. Bu dönüşümde $\infty \in \overline{\mathbb{H}}$ noktası orjinle eşleştirilirse bu durumda N_C orjin merkezli ve $e^{-2\pi C}$ yarıçaplı açık diskin ters görüntüsünü verir. $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ üzerindeki topoloji (3.1) dönüşümü sürekli olacak şekilde tanımlanır.

(3.1)'deki z den q ya olan değişken değişimi modüler fonksiyonların teorisinde önemli bir yere sahiptir. Bu dönüşüm yardımıyla $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ üzerindeki bir analitik yapıyı tanımlarız. Başka bir deyişle, $\mathbb{H}$ üzerinde periyodu 1 olan fonksiyon verildiğinde bu fonksiyonun ∞'da meremorf olmasını bu fonksiyonun q değişkenine göre bir kuvvet serisi olan Fourier açılımında en fazla sonlu tane negatif kuvvetli terime sahip olması olarak açıklanır. O halde eğer $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi inz} = \sum_{n\epsilon\mathbb{Z}} a_n q^n$ fonksiyonu meromorfsa $n \ll 0$ için $a_n = 0$ ise $f(z)$, ∞'da da meromorftur. Eğer tüm negatif n ler için $a_n = 0$ ise $f(z)$, ∞'da analitiktir denir. Eğer $f(z)$, ∞'da analitik ve $a_0 = 0$ ise $f(z)$, ∞'da sıfır olur denir.

Daha genel olarak eğer $f(z)$ periyodu N olan bir fonksiyon ise bu durumda $z \mapsto q_N := e^{\frac{2\pi iz}{N}}$ dönüşümü $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ u açık birim diske resmeder. Böylece $f(z)$ fonksiyonu q_N e göre bir Fourier serisi elde edilir ve böylece yukarıdaki tanımların genelleştirilmişleri elde edilir.

Tanım 3.1.1. $f(z)$, $\mathbb{H}$ üst yarı düzleminde bir meromorf fonksiyon ve k bir tamsayı olsun. $f(z)$, her $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ için

$$f(\gamma z) = (cz + d)^k f(z) \tag{3.2}$$

eşitliğini sağlasın. Bundan başka $f(z)$ sonsuzda meromorf olsun. Bu durumda $f(z)$'ye $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ için k–ağırlıklı bir modüler fonksiyon denir. Γ için k–ağırlıklı modüler fonksiyonların kümesi $A_k(\Gamma)$ ile gösterilir.

Eğer yukarıdaki koşullara ilave olarak $f(z)$, $\mathbb{H}$ üst yarı düzleminin tamamında ve sonsuzda analitik ise bu durumda $f(z)$ ye $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ için k–ağırlıklı bir modüler form denir. Bu özellikteki fonksiyonların kümesi $M_k(\Gamma)$ ile gösterilir.

Eğer $f(z)$'nin Fourier serisi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ şeklinde ise yani $a_0 = 0$ ise bu durumda $f(z)$ modüler formuna Γ için k–ağırlıklı cusp form denir. Bu özellikteki fonksiyonların kümesi $S_k(\Gamma)$ ile gösterilir.

Uyarı 3.1.2. $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ tam modüler grubun üreteçlerinin $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olduğu dikkate alınırsa (3.2) eşitliği Γ'nın tüm elemanları için doğru olması gerektiğinden özel olarak T ve S dönüşümleri için bu koşul

$$f(z+1) = f(z) \tag{3.3}$$

ve

$$f(-1/z) = (-z)^k f(z) \tag{3.4}$$

halini alır. Böylece $f(z)$ bir modüler form ise bu durumda $f(z)$'nin periyodik bir fonksiyon olduğu görülür. O halde $f(z)$'nin bir Fourier serisi ile temsil edilebileceği sonucuna varılır. $f(z)$ bir modüler form ise $q = e^{2\pi i z}$ ve $Im(z) > 0$ olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \tag{3.5}$$

yazılabilir.

Tanım 3.1.3. $f(z)$ modüler formunun (3.5) şeklindeki seri açılımına $f(z)$ modüler formunun Fourier açılımı ya da q −açılımı ve a_n sayılarına da $f(z)$ modüler formunun Fourier katsayıları adı verilir.

Uyarı 3.1.4.

1) (3.1) eşitliği için $\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ olduğu dikkate alınırsa $f(z)$ bir modüler fonksiyon ise $f(z) = (-1)^k f(z)$olur. k tek tamsayı ise $f(z) = -f(z)$, buradan $f(z) = 0$ olmak zorundadır. Böylece eğer k tek tamsayı ise Γ için k −ağırlıklı –özdeşliğin sıfırından farklı- bir modüler fonksiyon yoktur. Böylece bu çalışmada aksi belirtilmedikçe k' nın çift sayı olduğu kabul edilecektir.

2) $\frac{d\gamma z}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{1}{(cz+d)^2}$ olduğundan (3.1) eşitliği

$\left(\frac{d\gamma z}{dz}\right)^{k/2} f(\gamma z) = f(z)$şeklinde yazılabilir. O halde $f(z)(dz)^{k/2}$ ifadesi $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ modüler grubun elemanları altında invaryant kalır. Böylece eğer (3.1) eşitliği γ_1 ve $\gamma_2$için sağlanırsa $\gamma_1\gamma_2$ için de sağlanır. Diğer yandan $\bar{\Gamma}$, S ve T dönüşümleri tarafından üretildiğinden bu bize (3.2) ve (3.3)'ün (3.1)'i gerektirdiğini gösterir.

Teorem 3.1.5. k belli bir tamsayı olsun. Bu durumda $A_k(\Gamma)$, $M_k(\Gamma)$ ve $S_k(\Gamma)$, $\mathbb{C}$ üzerinde sonlu boyutlu birer vektör uzayıdır. Bundan başka f, k_1 −ağırlıklı modüler fonksiyon (veya modüler form) ve g, k_2 −ağırlıklı modüler fonksiyon (veya modüler form) ise bu durumda $f.g$ de $k_1 + k_2$ −ağırlıklı modüler fonksiyon (veya modüler form) olur. u, k_1 −ağırlıklı modüler fonksiyon ve v, k_2 −ağırlıklı özdeşliğin sıfırından farklı bir modüler fonksiyon ise bu durumda $\frac{u}{v}$, $k_1 - k_2$ −ağırlıklı modüler fonksiyon olur. Özel olarak sıfır ağırlıklı modüler fonksiyonların kümesi bir cisimdir (Miyake, 2006).

3.2. Boyut Formülleri

Bu bölümde daha önce birer sonlu boyutlu vektör uzayı olduğunu belirttiğimiz modüler formlar ve cusp formlar uzayları için boyut formüllerini vereceğiz.

Teorem 3.2.1. $k < 0$ için $M_k(\Gamma)$ modüler formlar uzayının boyutu 1'dir ve tam olarak $M_k(\Gamma) = \{0\}$ dır. Üstelik $M_0(\Gamma)$ sabit fonksiyonlar tarafından oluşan bir vektör uzayıdır ve tam olarak $M_0(\Gamma) \cong \mathbb{C}$ 'dir (Newton, 2014).

İspat. $k < 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Önerme 2.18, sayfa 10 gereği f fonksiyonu $\mathbb{H}$ üst yarı düzleminde ve sonsuzda analitik olamaz (Newton, 2014). Böylece f özdeşliğin sıfırı olmak zorundadır.

$f \in M_k(\Gamma)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda f'nin q −açılımındaki sabit terim a_0' da $M_0(\Gamma)$' nın elemanı olur. g fonksiyonunu $f - a_0$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $g \in S_0(\Gamma)$ olur (Newton, 2014). Önerme 2.18 gereği g özdeşliğin sıfırı olmak zorundadır. Böylece $f = a_0$ olur ki bu da ispatı bitirir.

Teorem 3.2.2. $k \geq 0$ belli bir çift sayı olsun. Bu durumda

$$dim\, S_k(\Gamma) = \begin{cases} \left[\left|\frac{k}{12}\right|\right] - 1\,, k \equiv 2\ (mod 12) \\ \left[\left|\frac{k}{12}\right|\right] \quad , diğer\ durumlarda \end{cases}$$

dır.

İspat. (Warner, 2016)'da Sayfa 4 , Teorem 1.2'den görülebilir.

Örnek 3.2.7. Magma Hesaplamalı Cebir Sistemi Programı'nda Γ ya da Γ'nın belli bir alt grubu için modüler form ya da cusp form uzaylarının boyutu aşağıdaki şekilde kolayca hesaplanabilir (Bosma, vd, 1997). Örneğin; belli bir k- ağırlığındaki $\Gamma_0(N)$ için modüler formlar uzayının boyutu Magma'da

```
>M:=ModularForms(N,k);
>Dimension(M);
```

kodlarıyla kolayca hesaplanabilir. N ve k oldukça büyük olsa bile Magma programı buna karşılık gelen modüler formlar uzayının boyutunu oldukça hızlı bir şekilde hesaplar.

Örneğin;$N = 123456789999999999$ ve $k = 6$ için $M_k(\Gamma_0(N))$ uzayının boyutu 69262929781584032 olup hesaplama süresi $Time = 0.000$ dır.

Belli bir k ve N için $S_k(\Gamma_0(N))$ cusp formlar uzayı aşağıdaki şekilde oluşturulur:

```
>M:=ModularForms(N,k);
>S:=CuspidalSubspace(M);
```

$S_k(\Gamma_0(N))$ uzayının boyutu ise yukarıdaki kodlara ilave olarak

```
>Dimension(S);
```

ile hesaplanır.

Modüler formlar ve cusp formlar uzayı $\mathbb{C}$ üzerinde birer sonlu boyutlu vektör uzayı olduğundan her bir uzay için taban elemanları Magma'da kolayca bulunabilir. Örneğin; $k = 4$ ve $N = 20$ için taban elemanları aşağıdaki kod yardımıyla kolayca bulunabilir. Dikkat edilirse $M_4(\Gamma_0(20))$ uzayının boyutu 12 olduğundan tabanda tam olarak 12 tane vektör yani modüler form vardır.

```
>M:=ModularForms(20,4);
>Dimension(M);
>M.1;
>1 + O(q^12)
>M.2;
>q + 12*q^11 + O(q^12)
>M.3;
>q^2 + O(q^12)
>M.4;
>q^3 - 2*q^11 + O(q^12)
```

```
>M.5;
>q^4 + O(q^12)
>M.6;
>q^5 + O(q^12)
>M.7;
>q^6 + O(q^12)
>M.8;
>q^7 + 4*q^11 + O(q^12)
>M.9;
>q^8 + O(q^12)
>M.10;
>q^9 + O(q^12)
>M.11;
>q^10 + O(q^12)
>M.12;
>O(q^12)
```

Magmadaki kuvvet serileri istenilen haneye kadar genişletilebilir.

Benzer şekilde cusp formlar uzayları için de taban elemanları Magma tarafından kolayca bulunur. Örneğin; $N = 47$ ve $k = 4$ için $S_4(\Gamma_0(47))$ cusp form uzayının boyutu 11 olup taban elemanları aşağıdaki kod yardımıyla bulunabilir:

```
>M:=ModularForms(47,4);
>S:=CuspidalSubspace(M);
>Dimension(S);
>S.1;
>q + 6*q^11 + O(q^12)
>S.2;
>q^2 + 12*q^11 + O(q^12)
>S.3;
>q^3 + 4*q^11 + O(q^12)
>S.4;
>q^4 + 8*q^11 + O(q^12)
>S.5;
```

```
>q^5 + 3*q^11 + O(q^12)
>S.6;
>q^6 + 4*q^11 + O(q^12)
>S.7;
>q^7 + 3*q^11 + O(q^12)
>S.8;
>q^8 + 6*q^11 + O(q^12)
>S.9;
>q^9 + 10*q^11 + O(q^12)
>S.10;
>q^10 + 8*q^11 + O(q^12)
>S.11;
>13*q^11 + O(q^12)
```

3.3. Modüler Form Örnekleri

Eisenstein serileri modüler formlar için oldukça önemli örnekler olup Fourier katsayılarının kolayca hesaplanabilmesi nedeniyle modüler formların aritmetiği adına büyük önem taşımaktadır**.**

Tanım 3.3.1. $k > 2$ bir çift tamsayı olsun. Bu durumda $k -$ ağırlıklı Eisenstein serisi $z \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$G_k(z) := \sum\nolimits'_{m,n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

olarak tanımlanır.

Burada $\sum'$ sembolü toplamın ikisi birden sıfır olmayan m ve n tamsayı çiftleri üzerinden alındığını gösterir.

Teorem 3.3.2. $k > 2$ bir çift tamsayı olsun. Bu durumda $k -$ ağırlıklı normalleştirilmiş Eisenstein serisi $E_k(z)$ ile gösterilir ve $E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)\, q^n$ olarak tanımlanır. Burada B_k , $k -$ıncı Bernoulli sayısını gösterir ve σ bölen fonksiyonu $\sigma_{k-1}(n) := \sum_{d|n} d^{k-1}$olarak tanımlanır (Koblitz, 1984).

Örnek 3.3.3. Bazı E_k normalleştirilmiş Eisenstein serileri aşağıda verilmiştir:

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n$$

$$E_6(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n$$

$$E_{14}(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{13}(n) q^n$$

Teorem 3.3.4. $k > 2$ için $E_k \in M_k(\Gamma)$'dır (Koblitz, 1984).

Uyarı 3.3.5. Teorem 4.3.2'de $k = 2$ durumu için bir şey söylenmemektedir çünkü $E_2(z)$ bir modüler form değildir. $E_2(z)$ hemen hemen modüler form adını alır. Detaylar için (Elmaağaç, 2015)'de 5. Bölüm'e bakılabilir.

Örnek 3.3.6. $\Delta(z)$ ile gösterilen diskriminant modüler form E_4 ve E_6 normalleştirilmiş Eisenstein serileri yardımıyla $\Delta(z) = \frac{(2\pi)^{12}}{1728}(E_4(z)^3 - E_6(z)^2)$ olarak tanımlanır.

Teorem 3.3.7. $\Delta(z) \in \mathrm{M}_{12}(\Gamma)$' dır.

İspat : (Miyake, 2008)'de sayfa 129'da bulunabilir.

Eisenstein seriler ile modüler formlar arasındaki güçlü ilişki aşağıdaki teoremde de verilmektedir.

Teorem 3.3.8.

1) $k = 4, 6, 8, 10$ $veya$ 14 ise bu durumda $\mathrm{M_k}(\Gamma)$ 1 boyutlu olup E_k sayısından üretilir. Başka bir deyişle k nın bu değerleri için $\mathrm{M_k}(\Gamma) \in \mathbb{C}E_k$ olur.
2) Eğer $k < 12$ veya $k = 14$ ise $\mathrm{S_k}(\Gamma) = \{0\}$ dır. $\mathrm{S}_{12}(\Gamma) = \mathbb{C}\Delta$ dır ve $k > 14$ için $\mathrm{S_k}(\Gamma) = \Delta \mathrm{M}_{\mathrm{k}-12}(\Gamma)$ dır. Başka bir deyişle k −ağırlıklı cusp formlar $(k - 12)$ − ağırlıklı modüler formlar ile $\Delta(z)$nin çarpımı ile elde edilir.

İspat. (Koblitz, 1984)'de sayfa 118'de bulunabilir.

E_4 ve E_6 normalleştirilmiş Eisenstein serilerinin modüler formlar teorisinde önemli bir rol oynadığı aşağıdaki teoremde de gösterilmektedir.

Teorem 3.3.9. Herhangi bir $f \in M_k(\Gamma)$ modüler formu

$$f(z) = \sum_{4i+6j=k} c_{i,j}\, E_4(z)^i E_6(z)^j$$

biçiminde yazılabilir. Başka bir deyişle Γ için herhangi bir modüler form E_4 ve E_6' nın polinomu şeklinde yazılabilir.

İspat. (Koblitz, 1984)'de sayfa 118'de bulunabilir.

Tanım 3.3.10. j −invaryant modüler fonksiyonu $j(z)$ ile gösterilir ve

$$j(z) = 1728 \frac{E_4(z)^4}{E_4(z)^3 - E_6(z)^2}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.3.11. $j(z) \in A_0(\Gamma)$ dır (Miyake, 2006).

Teorem 3.3.12. Γ için sıfır ağırlıklı modüler fonksiyonlar tam olarak $j(z)$ nin rasyonel fonksiyonlarıdır.

İspat. (Koblitz, 1984)'de sayfa 119'da bulunabilir.

Tanım 3.3.13. Dedekind η −fonksiyonu $\eta(z)$ ile gösterilir ve $z \in \mathbb{H}$ için

$$\eta(z) = e^{2\pi i z/24} \prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i n z}) \tag{3.6}$$

olarak tanımlanır.

Şimdi Dedekind $\eta-$ fonksiyonu yardımıyla $\Delta(z)$ fonksiyonu için bir çarpım formülü verilecektir.

Teorem 3.3.14. Karmaşık karekök fonksiyonu için logaritmanın esas dalı karmaşık karekökün negatif olmayan gerçel kısmını alacak şekilde seçilsin. Bu durumda

$$\eta\left(\frac{-1}{z}\right) = \sqrt{z/i}\,\eta(z) \tag{3.7}$$

dir.

İspat. Dedekind $\eta-$ fonksiyonu herhangi bir $z \in \mathbb{H}$ için sıfırdan farklı bir değere yakınsadığı kolayca görülebilir. Böylece (3.6) eşitliği $\mathbb{H}$ üst yarı düzlem üzerinde analitik bir fonksiyon tanımlar. Bir an için (3.7) eşitliğinin her iki yanının logaritmik türevlerinin birbirine eşit olduğunu kabul edelim. Bu durumda (3.7) eşitliğinde bir çarpımsal sabit olması gerekir. $z = i$ alınarak bu sabitin 1 olduğu görülür. Buna göre (3.7) eşitliğinin logaritmik türevi alınarak

$$\frac{\eta'(z)}{\eta(z)} = \frac{2\pi i}{24}\left(1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n e^{2\pi}}{1-e^{2\pi i n z}}\right) \tag{3.8}$$

bulunur. Bu toplamdaki her bir terimin $q = e^{2\pi i z}$ olmak üzere q^n cinsinden bir geometrik seriye açılırsa ve ardından q'nun kuvvetlerine göre düzenlenirse

$$\frac{\eta'(z)}{\eta(z)} = \frac{2\pi i}{24}\left(1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\right) = \frac{2\pi i}{24}E_2(z) \tag{3.9}$$

olur. (3.7)'deki eşitliğin logaritmik türevi alınarak (3.7)'nin doğru olduğu kabulü altında:

$$\frac{\eta'(-1/z)}{\eta(-1/z)} z^{-2} = \frac{1}{2z} + \frac{\eta'(z)}{\eta(z)} \tag{3.10}$$

olur. (3.9) eşitliği kullanılarak (3.10) eşitliği

$$E_2\left(-\frac{1}{z}\right)z^{-2} = \frac{12}{2\pi iz} + E_2(z)$$

halini alır. Bu ise (Koblitz, 1984) sayfa 113, önerme 7 gereği doğru olur. Bu ise ispatı bitirir.

Teorem 3.3.15. $q = e^{2\pi iz}$ olmak üzere

$$(2\pi)^{-12}\Delta(z) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$$

dir (Koblitz, 1984).

Uyarı 3.3.16. Teorem 3.3.14'ün ispatında $\eta(z)$ için doğru olan fonksiyonel eşitliğini elde edebilmek için $E_2(z)$ Eisenstein serisi önemli bir rol oynar ve böylece doğal olarak Teorem 3.3.15.'nin ispatı da etki eder.

Dedekind η −fonksiyonu modüler formların çalışılmasında oldukça kritik bir öneme sahiptir. Örneğin, denklik alt grupları üzerinde tanımlanan modüler formlar için Fourier katsayıları kolaylıkla hesaplanabilen örnekler oluştururlar. (Alaca, vd, 2016a) , (Alaca, vd, 2016b).

Örnek 3.3.17. $\left(\eta(z)\eta(3z)\right)^6 \in S_6\left(\Gamma_0(3)\right)$'dir (Demirkol Ozkaya, vd, 2017).

4. YARIM TAMSAYI AĞIRLIKLI MODÜLER FORMLAR

4.1. Giriş

Tanım 4.1.1. k bir pozitif tek tamsayı ve $\lambda = \frac{k-1}{2}$ olsun. Bu durumda $\frac{k}{2} = \lambda + \frac{1}{2}$ sayısına *yarım tamsayı* denir.

Uyarı 4.1.2. Dikkat edilirse yarım tamsayı aslında "buçuklu sayı"dan başka birşey değildir.

Bu bölümde $\frac{k}{2} = \lambda + \frac{1}{2}$ ağırlıklı modüler formları inceleyeceğiz. Bu modüler formların tamsayı ağırlıklı modüler form tanımındaki fonksiyonel eşitliği sağlamasını beklenir. Böylece, kabaca$f$ gibi yarım tamsayı ağırlıklı bir modüler form $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ ya da bazı $\Gamma' \subset \Gamma$ kongrüans alt grubundan alınan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisi için

$$f((az+b)/(cz+d)) = (cz+d)^{\lambda+\frac{1}{2}} f(z)$$

fonksiyonel eşitliğini sağlamalıdır. Ancak karmaşık kök fonksiyonu logaritmanın uygun bir dalının seçilmediği takdirde tek değerli olmadığı için tanımda oldukça dikkatli olmalıyız. Böylece, bu karmaşık karekök fonksiyonunu ele almak için daha derin bir tanıma ihtiyaç duyulur.

Yarım tamsayı ağırlıklı modüler formlar, tıpkı tamsayı ağırlıklı modüler formlar gibi Eliptik Eğriler Teorisi'yle yakından ilişkilidir. Bu kez bağlantı "Shimura-Shintani Yükseltmesi" yardımıyla olur. Ayrıntılı bilgi için (İnam, 2011)'e bakılabilir. Konuyla ilgili standart referans ise (Shimura, 1973)'dür.

Diğer yandan modüler formlar ile kuadratik formlar arasında önemli bir bağlantı vardır. Bu ise tam olarak modüler formların belirli bir kuadratik form tarafından bir tamsayıyı temsil sayısını bulmakta kullanılmasıdır. Bu bağlantı kuadratik formların teta serileriyle oluşturulur.

Tanım 4.1.3. n-değişkenli kuadratik form

$$f(X_1, \ldots, X_n) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, X_i^2 + \sum_{i>j} a_{ij}\, X_i X_j$$

şeklinde ifade edilir. Burada $a_{ij} \in \mathbb{Z}$'dir.

Tanım 4.1.4. f kuadratik formuna karşılık gelen teta serisi $\Theta(f)$ ile gösterilir ve

$$\Theta(f)(z) := \sum_{(X_1,\ldots,X_n)} q^{f(X_1,\ldots,X_n)}$$

olarak tanımlanır.

Uyarı 4.1.5. Tanıma dikkat edilirse f bir kuadratik form ve $\Theta(f)$ buna karşılık gelen teta serisi ise $\Theta(f)$'nin q–açılımındaki a_n katsayısı n tamsayısının f kuadratik formu ile temsil sayısını verir. Bunu aşağıdaki örnekle açıklayalım.

Örnek 4.1.6. $f = X^2 + 11Y^2$ kuadratik formunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$\Theta(X^2 + 11Y^2) = \sum_{(x,y)\in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}} q^{X^2+11Y^2}$$

$$= 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{11} + 4q^{12} + 4q^{15} + 2q^{16} + \cdots$$

olur. Burada örneğin, q^{12}'li terimdeki katsayı

$$X^2 + 11Y^2 = 12$$

denklemini sağlayan (x, y) tamsayılarının sayısı hesaplanarak elde edilir. Dikkat edilirse bu denklemi sağlayan (x, y) tamsayı ikilileri 4 tanedir.

n–değişkenli kuadratik formlar $n\times n$ tipindeki matrisler yardımıyla temsil edilebilirler.

Tanım 4.1.7. $n = 2$ durumunda $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $f = aX^2 + bXY + cY^2$ kuadratik formuna karşılık gelen matris

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır. $f = aX^2 + bXY + cY^2$ kuadratik formun diskriminantı $\det(A)$ olarak tanımlanır.

Kuadratik formların teta serileri üzerinde aşağıdaki gibi bir denklik bağıntısı tanımlanabilir.

Tanım 4.1.8. R bir halka, f ve g iki kuadratik form, A ve B sırasıyla f ve g'nin katsayı matrisleri olsun. Eğer $A = a \cdot B$ olacak biçimde $a \in SL_2(R)$ var ise f ve g kuadratik formlarına R üzerinde benzerdir denir.

Teorem 4.1.9. l, n–değişkenli kuadratik formların bir denklik sınıfı olmak üzere $\Theta(l) \in M_{\frac{n}{2}}(N, \chi_t)$' dir (Shimura, 1973).

Tanım 4.1.10. f ve g kuadratik formlar olsun. Eğer f ve g hem $\mathbb{R}$ üzerinde hem de tüm p asalları için $\mathbb{Z}_p$ üzerinde benzer ise f ve g kuadratik formlarının cinsleri aynıdır denir.

Teorem 4.1.11. l_1 ve l_2, kuadratik formların aynı cinse sahip iki denklik sınıfı ise bu durumda $\Theta(l_1) - \Theta(l_2)$ bir cusp formdur (Siegel, 1966).

4.2. Tanım ve Örnekler

Karmaşık karekök fonksiyonunun tek değerli olabilmesi adına argüman aralığı her zaman $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığından alınacaktır. Böylece $\sqrt{z}$ kompleks düzlem üzerinde negatif reel eksen ile taşınan holomorfik fonksiyondur. Dikkat edilirse bu fonksiyon pozitif reel sayıları pozitif reel sayılara, üst yarı düzlemdeki kompleks sayıları I. bölgeye ve alt yarı düzlemdeki kompleks sayıları IV. bölgeye taşır. Detaylı bilgi (Başkan, 2012)'da bulunabilir.

Tanım 4.2.1. Herhangi bir k tamsayısı için $z^{k/2}$ yi $(\sqrt{z})^k$ olarak tanımlarız.

Tanım 4.2.2. $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ve$\gamma z = (az+b)/(cz+d)$ için

$$f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z)$$

özdeşliğindeki$(cz+d)^k$ terimi *"otomorfi çarpanı"* olarak isimlendirilir.

Uyarı 4.2.3. Bu otomorfi çarpanının γ ve z'ye bağlı olduğu açıktır. Yani sıfırdan farklı bir f fonksiyonu için $J(\gamma, z)$ otomorfi çarpanı $z \in \mathbb{H}$ ve γ belli bir matris grubu elemanı olmak üzere

$$f(\gamma z) = J(\gamma, z) f(z)$$

özelliğine sahiptir. Çünkü

$$\frac{f(\alpha\beta z)}{f(z)} = \frac{f(\alpha\beta z)}{f(\beta z)} \frac{f(\beta z)}{f(z)}$$

herhangi bir otomorfik çarpan

$$J(\gamma, z), J(\alpha\beta, z) = J(\alpha, \beta z).J(\beta, z) \tag{4.1}$$

eşitliğini sağlamalıdır. Örneğin $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ için $J(\gamma, z) = (cz+d)$ (4.1)'i sağlar. Eğer $-1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matris grubunda ise, bu durumda $J(\gamma, z)$, $J(-1, z) = 1$ eşitliğini de sağlamalıdır. Otomorfi çarpanının bir diğer örneği , $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$ için

$$J(\gamma, z) = j(\gamma, z) = \left(\frac{c}{d}\right) \varepsilon_d^{-1} \sqrt{cz+d}$$

dir. Bu fonksiyon $q = e^{2\pi i z}$ olmak üzere

$$\Theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$$

fonksiyonunun bir otomorfi çarpanı olur (İnam, 2011).

k tek tamsayısı için $\frac{k}{2}-$ ağırlıklı modüler formun tanımında varsayalım ki ,

$$f(\gamma z)=(cz+d)^{k/2}f(z)$$

özdeşliğini sağlayan f fonksiyonlarını arayalım.

Teorem 4.2.4. Herhangi bir k tek tamsayısı ve herhangi bir $\Gamma' \subset \Gamma$ kongrüans alt grubu için sıfırdan farklı bir fonksiyonun otomorfik çarpanı $J(\gamma,z)=(cz+d)^{k/2}$ olamaz.

İspat. Bunu görmek için $N>2$ ve $\Gamma' \supset \Gamma(N)$ olduğunu kabul edelim.

$\alpha=\begin{pmatrix} N+1 & N \\ -N & 1-N \end{pmatrix}$ ve $\beta=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -N & 1 \end{pmatrix}$ olsun. O zaman $\alpha,\beta \in \Gamma'$ ve (4.1) gereği$\mathbb{H}$ üst yarı düzleminin üzerinde holomorfik fonksiyonun aşağıdaki eşitliğinin k-ıncı kuvvetini gerektirecek:

$$\sqrt{(N^2-2N)z+1-N}=\sqrt{-\frac{Nz}{(-Nz+1)}+1-N}.\sqrt{-Nz+1} \quad (4.2)$$

Açıkça (4.2) nin karesi bunu gösterir. Böylece eşitliğin sağ tarafındaki köklü ifadeler alt yarı düzlemde olduğundan sağ taraftaki iki karmaşık sayının çarpanı IV. bölgede ancak (N^2-2N) olduğundan sol taraf I. bölgededir. Böylece -1 in bir çarpanı ve (4.2) nin k $-$ıncı kuvveti (4.2)'yi sağlamaz. Eğer k tek tamsayı ise -1 tarafından da (4.2) sağlanmaz. Böylece $J(\gamma,z)=(cz+d)^{k/2}$olamayacağı görülür, bu da ispatı bitirir.

Bu sıkıntıyı aşmanın en kolay yolu her $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$ için otomorfi çarpanı

$$j(\gamma,z):={}^{\Theta(\gamma z)}\!\big/_{\Theta(z)}=\left(\frac{c}{d}\right)\varepsilon_d^{-1}\sqrt{cz+d} \quad (4.3)$$

ifadesinin k $-$ıncı kuvveti olarak tanımlanacaktır Yani $\Gamma' \subset \Gamma_0(4)$ kongrüans alt grubu için Γ' de herhangi bir kesirli lineer dönüşümü altında $\Theta(z)$ nin k $-$ıncı kuvveti gibi dönüştüren $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemi üzerinde holomorfik bir fonksiyon olarak tanımlamaktır. Burada aşağıda cusp noktalarında holomorfluğu açıklanacak olan $\frac{k}{2}-$ ağırlıklı modüler formu tanımlar.

$\left(\frac{c}{d}\right)$'nin Legendre sembolü olduğuna dikkat edersek kuadratik normal rezidü sembolü gibi pozitif tek bir asal d sayısı için tanımlanır, yani her pozitif tek d tamsayısı için çarpımsaldır ve son olarak negatif d tamsayısı için $c>0$ ise $\left(\frac{c}{|d|}\right)$ ve $c<0$ ise

$-\left(\frac{c}{|d|}\right)$ olarak tanımlanır. Dahası $d \equiv 1(mod4)$ ise $\varepsilon_d = 1$ ve $d \equiv -1(mod4)$ ise $\varepsilon_d = i$ olarak tanımladık. Böylece $\varepsilon_d{}^2 = \chi_{-1}(d) = (-1)^{(d-1)/2}$ olur. Dikkat edilirse$d$ pozitif sayıların yanı sıra negatif sayılar için de geçerlidir.

Böylece $\gamma \in \Gamma_0(4)$ ve k tek tamsayısı için $f(z)|[\gamma]_{\frac{k}{2}} = j(\gamma, z)^{-k} f(\gamma z)$ olarak tanımlarsak $\gamma \in \Gamma'$ için $[\gamma]_{\frac{k}{2}}$ tarafından belirlenen Γ'için $\frac{k}{2}-$ ağırlıklı modüler form elde edilebilir. Tamsayı ağırlıklı olması durumunda rasyonel girdilere sahip ve determinantı pozitif olan keyfi $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ matrisi için $[\alpha]_{k/2}$ yi tanımlamak isteyeceğiz. Ancak otomorfi çarpanı$j(\gamma, z)$ sadece $\gamma \in \Gamma_0(4)$ için tanımlandığından $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ karekök fonksiyonu için logaritmanın esas dalı keyfi şekilde seçilemez. Bu durum her bir $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$'nun iki kopyasını içeren G grubu, $GL_2^+(\mathbb{Q})$'dan daha büyük $(cz+d)$ nin kareköküyle eşleşeceği bir grup ile çalışmamızı gerektirir. Böylece$G$'yi aslında $GL_2^+(\mathbb{Q})$'nin dört yapraklı örtüsü olarak tanımlayacağız. Şimdi G grubunun net tanımını verelim.

$T \subset \mathbb{C}$ birimin dördüncü dereceden köklerinin grubu yani $T = \{\pm 1, \pm i\}$ olsun.

Tanım 4.2.5. G kümesini belli $t \in T^2 = \{\pm 1\}$ için $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ olmak üzere, $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemi üzerinde $\phi(z)$ holomorf ve

$$\phi(z)^2 = t\frac{(cz+d)}{\sqrt{det\alpha}}$$

olacak şekildeki $\left(\alpha, \phi(z)\right)$ sıralı ikililerinin kümesi olarak tanımlarız. Yani, her bir $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ ve her bir belli $t = \{\pm 1\}$ için olası iki eleman $\left(\alpha, \pm\phi(z)\right) \in G$ vardır. G nin iki elemanının bileşkesini

$$\left(\alpha, \phi(z)\right)\left(\beta, \psi(z)\right) = (\alpha\beta, \phi(\beta z)\psi(z)) \tag{4.4}$$

olarak tanımlarız.

Teorem 4.2.6. G , (4.4) eşitliğinde tanımlı ikili işlem ile bir gruptur

İspat. (Koblitz, 1984)'de sayfa 179'da bulunabilir.

$P: G \to GL_2^+(\mathbb{Q}), \left(\alpha, \phi(z)\right) \mapsto \alpha$ olarak tanımlansın. Aşikar olarak bu dönüşüm bir homomorfizmdir. Bu dönüşüm aslında izdüşümden başka birşey değildir. P'nin çekirdeği tüm $\left(1, \phi(z)\right) \in G$ lerin kümesidir. $\left(1, \phi(z)\right) \in G$ için $\phi(z)^2 = t$ olduğundan $\phi(z)$ birimin dördüncü dereceden köküne eşit sabit bir fonksiyon olmak zorundadır.

Böylece T yi G ye $t \mapsto (1, t)$ ile dönüştürürsek $1 \longrightarrow T \longrightarrow G \xrightarrow{P} GL_2^+(\mathbb{Q}) \longrightarrow 1$ tam dizisi elde edilir, diğer bir deyişle P'nin çekirdeği, T'nin $t \mapsto (1, t)$ dönüşümü altındaki görüntüsüdür.

Benzer bir şekilde belli $a \in \mathbb{Q}$ için $\alpha = a\begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ise α nın P altındaki ters görüntüsü $t \in T$ için (α, t) nin tüm çiftlerinin kümesidir, çünkü bu durumda da $\phi(z)^2$ nin ± 1olduğu bulunur.

$G^1 = P^{-1}(\Gamma)$ kümesi $\alpha \in \Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ olacak şekildeki$\big(\alpha, \phi(z)\big) \in G$ çiftlerinin kümesi olarak tanımlansın. G^1 aşikar olarak G'nin bir alt grubudur. Eğer $\xi = \big(\alpha, \phi(z)\big) \in G$ ise $z \in \mathbb{H}$ için αz gibi aynı anlama gelen ξz notasyonunu kullanacağız.

$\xi = \big(\alpha, \phi(z)\big) \in G$ ve herhangi bir k tamsayısı için $\mathbb{H}$ üst yarı düzleminde f fonksiyonu üzerinde bir $[\xi]_{k/2}$ operatörünü

$$f(z)|[\xi]_{k/2} := f(\alpha z)\phi(z)^{-k} \tag{4.5}$$

kuralıyla tanımlayalım. Bu, G grubunun böyle fonksiyon uzayları üzerinde hareketini verir, mesela (4.4) den dolayı $(f(z)|[\xi_1]_{k/2})|[\xi_2]_{k/2} = f(z)|[\xi_1\xi_2]_{k/2}$ olur.

Şimdi $\Gamma_0(4)$'ün bir alt grubu Γ' olsun. O zaman $\gamma \in \Gamma'$ elemanları için $\mathrm{j}(\gamma, \mathrm{z})$ olarak tanımlanır. $\tilde{\Gamma}' := \{\big(\gamma, j(\gamma, z)\big) | \gamma \in \Gamma'\}$ 'dir. Açıkça $\tilde{\Gamma}'$, Pizdüşüm dönüşümü altında Γ' ye izomorf olan G nin bir alt grubudur. L, $\Gamma_0(4)$'den G'ye $\tilde{\gamma} = \big(\gamma, j(\gamma, z)\big) \in G$ olarak tanımlanan dönüşümü göstersin. O zaman P ve L, $\tilde{\Gamma}_0(4)$'dan $\Gamma_0(4)$'e ters izomorfizmine karşılık gelir. L, P projektif dönüşümünün yükseltmesi olarak adlandırılır. Bu notasyonumuzda $\Gamma_0(4)$'den G'ye bu yükseltme

$$L : \gamma \mapsto \tilde{\gamma} = \big(\gamma, j(\gamma, z)\big) P : \big(\gamma, j(\gamma, z)\big) \mapsto \gamma$$

olarak verilir. $\Gamma_0(4)$'de sonlu katsayıya sahip alt grup olan Γ' , $\gamma \in \Gamma'$ için $[\tilde{\gamma}]_{k/2}$ altında invaryant olan $f(z)$, $\mathbb{H}$ üst yarı düzleminde bir meromorf fonksiyon olsun. Şimdi $f(z)$ için meromorf, analitik veya $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ bir cusp noktasında sıfır olmayı tanımlayacağız. Önce ∞'da cusp noktasını ele alacağız. $\Gamma_0(4)$'de (ve böylece Γ'da) Γ' sonlu katsayıya sahip olduğundan $\Gamma_\infty = \left\{\pm\begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}_{j \in \mathbb{Z}}$ ile arakesiti $-1 \in \Gamma'$ ise $\left\{\pm\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^j\right\}$ formunda , $-1 \notin \Gamma'$ ise ya $\left\{\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^j\right\}$ ya da $\left\{\left(-\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^j\right\}$ formunda olmak zorundadır (Her zaman $h > 0$ alırız.).

Böylece $[\widetilde{-1}]_{k/2}$ özdeşlik olduğundan ve $j\left(\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}, z\right) = 1$ olduğundan tüm durumlarda $z \mapsto z + h$ dönüşümü altında f dönüşümü invaryant kalır ve böylece $q_h = e^{2\pi iz/h}$ kuvvet serisi açılımına sahiptir. Tamsayı ağırlıklı olması durumunda q_h'nin negatif kuvvetleri ve sadece sonlu sayıda olur ise f , ∞'da meromorftur deriz, q_h'nin hiç negatif kuvveti bulunmuyorsa ∞'da analitiktir deriz ve ∞'da f analitik olduğunda da $f(\infty)$'u sabit terim olarak tanımlarız.

$s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ olduğunu kabul edelim. $s = \alpha\infty$, $\alpha \in \Gamma$ ve $\alpha :\ P(\xi) = \alpha$ izdüşüm fonksiyonu G^1'in herhangi bir elemanı $\xi = (\alpha, \phi(z))$ olsun. $\tilde{\Gamma}_s{}' \coloneqq \{\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}' | \gamma s = s\}$ ve $G^1_\infty \coloneqq \{\eta \in G^1 | \eta\infty = \infty\}$ olarak tanımlarız. $\Gamma_\infty = \left\{\pm\begin{pmatrix}1 & j\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, $\begin{pmatrix}1 & j\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ için $\phi(z)$ sabit t fonksiyonu olmak zorunda olduğundan $G^1_\infty = \left\{\left(\pm\begin{pmatrix}1 & j\\ 0 & 1\end{pmatrix}, t\right) \middle|\ j \in \mathbb{Z}, t \in T\right\}$ olur. $\xi^{-1}\tilde{\Gamma}_s{}'\xi$, G^1'de kapsandı ve ∞'da sabitledi , örneğin $\xi^{-1}\tilde{\Gamma}_s{}'\xi \subset G^1$. Dahası P , $\xi^{-1}\tilde{\Gamma}_s{}'\xi$ dan $\alpha^{-1}\Gamma_s{}'\alpha \subset \Gamma_\infty$ a bir izomorfizmi verir. Γ' , Γ da sonlu katsayıya sahip olduğundan $\alpha^{-1}\Gamma_s{}'\alpha$, $\left\{\pm\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}^j\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}^j\right\}$ ya da $\left\{-\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}^j\right\}$ formlarından biridir. Böylece bazı $t \in T$ için $\pm\xi^{-1}\tilde{\Gamma}_s{}'\xi = \left\{\left(\pm\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}, t\right)^j\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ dir.

s ve ξ , $h > 0$ verildiğinde $mod \pm 1$'de $\alpha^{-1}\Gamma_s{}'\alpha$ nın bir üreteci olan $\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}$'i içerecek şekilde tanımlansın. O zaman P , $\xi^{-1}\tilde{\Gamma}_s{}'\xi$ üzerinde 1-1 olduğundan $\pm\alpha\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}\alpha^{-1} \in \Gamma_s{}'$ ya L yükseltme dönüşümü uygulayarak t yi bulabiliriz.

Teorem 4.2.7. $\left(\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}, t\right) \in G^1_\infty$ elemanı sadece s cusp noktasında Γ' denklik sınıfına bağlıdır.

Artık Γ' nin s cusp noktasında meromorf, analitik ve sıfır olma durumlarını tanımlayabiliriz. $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}'$ için $[\tilde{\gamma}]_{k/2}$ altında f invaryant olsun. $s = \xi\infty$ ve $g = f|[\xi]_{k/2}$ olarak alınsın. O zaman herhangi bir $\pm\xi^{-1}\tilde{\gamma}'\xi \in \pm\xi^{-1}\tilde{\Gamma}'\xi$ için $g\left|[\pm\xi^{-1}\tilde{\gamma}'\xi]_{\frac{k}{2}} = f\right|[\tilde{\gamma}\xi]_{k/2} = f|[\xi]_{k/2} = g$ dir. Yani g , $\left[\left(\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}, t\right)\right]_{k/2}$ altında invaryanttır :

$$g(z) = g(z)|\left[\left(\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}, t\right)\right]_{\frac{k}{2}} = t^{-k}g(z+h)$$

$r = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ olduğunda $t^k = e^{2\pi i r}$ yazalım. O zaman $e^{-\frac{2\pi i}{h}}g(z)$, $z \mapsto z + h$ dönüşümü altında invaryant kalır , ve böylece bir $e^{-\frac{2\pi i r z}{h}}g(z) = \sum a_n q_h^n$ Fourier seri açılımını elde ederiz yani

$$g(z) = \sum_n a_n e^{2\pi i z(n+r)/h}$$

dir.

Şimdi tüm n ler için $a_n = 0$ ise f, s de meromorftur denir ancak $n < 0$ ile sınırlı olarak. f, s de analitik ise $f(s) \coloneqq \lim_{z\to i\infty} g(z)$ olur. Otomatik olarak ilk terim $a_0 e^{2\pi i z r/h}$ olması durumundan dolayı $r \neq 0$ ise $f(s) = 0$ dır. $r = 0$ ise o zaman $f(s) = a_0$ dır. Bu tanımları sadece s'nin Γ'-denklik sınıfına bağlıdır yani $\tilde{\xi} \in \tilde{\Gamma}'$ ve $\xi_1\infty = s$ olduğunda, $g = f|[\xi]_{k/2}$, $g_1 = f|[\tilde{\gamma}\xi_1]_{k/2}$ ile yer değiştirilebilir.

$f(s)$ değeri , bir modüler formun bir cusp noktasında bazı belirsizlikleri vardır. Yani $\left(\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}, t\right)\xi$ ve $t_1 \in T$ ile $\xi \in G^t$ yi değiştirirsek o zaman ${t_1}^{-k}$ ile $g = f|[\xi]_{k/2}$ çarpıma etki eder. $k/2$ yarım tamsayı ise i nin kuvveti ile yeri değişebilir ; eğer $k/2$ bir tek tamsayı ise o zaman $f(s)$ yalnızca ± 1 e farkıyla tanımlanabilir ve $k/2$ bir çift tamsayı ise o zaman $f(s)$ tüm durumlarda iyi tanımlıdır.

Γ' nın s cusp noktası ve k tamsayısı verilsin. Eğer $r \neq 0$ ise s , k- düzensizdir ve $r = 0$,yani $t^k = 1$ ise s , k- düzenlidir deriz. Böylece f cusp noktalarında analitik ise , tüm k- düzensiz cusp noktalarında otomatik olarak sıfır olur.

Dikkat edilirse Γ' nın verilen bir s cusp noktası olup olmadığı $mod 4$'e göre yalnızca k üzerinde k-düzenli ya da k-düzensiz olmasına bağlıdır. Yani $t = \pm i$ ise o zaman cusp noktası $k/2$ çift tamsayı olmazsa k- düzensizdir ; eğer $t = -1$ ise o zaman $k/2$ bir tamsayı olmazsa k- düzensizdir ve eğer $t = 1$ ise her zaman k- düzenlidir. $k/2$ bir tek tamsayı olduğu zaman, düzenli ve düzensiz cusp noktalarının tanımları çakışır.

Tanım 4.2.8. k herhangi bir tamsayı ve $\Gamma' \subset \Gamma_0(4)$ sonlu bir alt grup olsun. Tüm $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}'$ için $[\tilde{\gamma}]_{k/2}$ altında invaryant olan $f(z)$, $\mathbb{H}$ üst yarı düzlem üzerinde meromorf bir fonksiyon olsun. Γ' nın her cusp noktasında f fonksiyonu meromorf ise $f(z)$, Γ' için $k/2$- ağırlıklı bir modüler fonksiyon olur deriz. Eğer $f(z)$, $\mathbb{H}$ üst yarı düzlem üzerinde ve her cusp noktasında analitik ise $f(z)$ bir modüler formdur ve $f \in M_{k/2}(\tilde{\Gamma}')$ şeklinde gösterilir deriz ve $f \in S_{k/2}(\tilde{\Gamma}')$ dır deriz.

Şimdi N, 4'ün bir pozitif çarpanı olsun böylece $\Gamma_0(N) \subset \Gamma_0(4)$ olur. χ, $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ ın bir karakteri olsun. $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ için

$$f|[\tilde{\gamma}]_{k/2} = \chi(d)f \qquad (4.6)$$

olduğunda $M_{k/2}(\tilde{\Gamma}_0(N), \chi)$, f yi içeren $M_{k/2}\left(\tilde{\Gamma}_1(N)\right)$'nin bir alt uzayını belirtir. $S_{k/2}\left(\tilde{\Gamma}_0(N), \chi\right) = S_{q/2}\left(\tilde{\Gamma}_1(N)\right) \cap M_{k/2}(\tilde{\Gamma}_0(N), \chi)$ olarak tanımlarız. Tamsayı ağırlıklı modüler formlardaki benzer argümanlar gösterir ki, $M_{k/2}\left(\tilde{\Gamma}_1(N)\right) = \bigoplus_{\chi} M_{k/2}(\tilde{\Gamma}_0(N), \chi)$ dir.

Dahası $mod\, N$ de χ_1 ve χ_2 Dirichlet karakterleri ise tanımdan hemen $f_i \in M_{ki/2}(\tilde{\Gamma}_0(N), \chi_i)(\mathrm{i} = 1{,}2)$, $f_1 f_2 \in M_{(k_1+k_2)/2}(\tilde{\Gamma}_0(N), \chi_1\chi_2)$ olduğu görülür.

Dikkat ediniz ki herhangi bir $k \in \mathbb{Z}$ için χ, bir tek karakter ise $M_{k/2}(\tilde{\Gamma}_0(N), \chi) = 0$ dır, çünkü (4.6)'da γ için -1 i yerine koyduğumuzda görebiliriz ki: $f\left|\left[\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, 1\right)\right]_{k/2}\right. = f = \chi(-1)f$ dir. Örneğin $\chi = 1$ alışılmış karakter sadece $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ in çift karakteri olduğundan

$$M_{k/2}\left(\tilde{\Gamma}_1(4)\right) = M_{k/2}\left(\tilde{\Gamma}_0(4), 1\right) = M_{k/2}\left(\tilde{\Gamma}_0(4)\right)$$

dir.

Eğer $4|N$ ise , $n \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ için $\chi_{-1}(n) = (-1)^{(n-1)/2}$ ile tanımlanan $mod\, N$ karakteri χ_{-1}'i gösterir.

Önerme 4.2.9. $4|N$, $k/2 \in \mathbb{Z}$ olsun. O zaman $M_{k/2}(\tilde{\Gamma}_0(N), \chi) = M_{k/2}(N, \chi_{-1}^{k/2}\chi)$, $S_{k/2}(\tilde{\Gamma}_0(N), \chi) = S_{k/2}(N, \chi_{-1}^{k/2}\chi)$ dir (Koblitz, 1984).

Önerme 4.2.10. $\Theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$, n tek tamsayısı için $F(z) = \sum_{n>0} \sigma_1(n) q^n$, $q = e^{2\pi i z}$ olsun. 1/2-ağırlığı Θ ya 2-ağırlığı F ye atansın. O zaman $M_{k/2}(\tilde{\Gamma}_0(4))$, $\mathbb{C}[\Theta, F]$ de $k/2$- saf ağırlığına sahip tüm polinomların uzayıdır (Koblitz, 1984).

Sonuç 4.2.11. $Dim M_{\frac{k}{2}}\left(\tilde{\Gamma}_0(4)\right) = 1 + [k/4]$ dir (Koblitz, 1984).

KAYNAKLAR

Alaca, A., Alaca, Ş., Aygin, Z.S., "Eta quotients, Eisenstein series and Elliptic Curves", ***arXiv.org*****,** 1604.07774 (2016).

Alaca, A., Alaca, Ş., Aygin, Z.S., "Theta Products and Eta Quotients of Level 24 and Weight 2", ***arXiv.org*****,** 1607.03997 (2016).

Asar, A.O., Arıkan A. ve Arıkan A., "Cebir" , ***Gazi Kitabevi,***(2012).

Başkan, T., "Kompleks Fonksiyonlar Teorisi", ***Dora Yayıncılık***, Bursa (2012).

Bosma, W., Cannon, J. and Playoust, C., "The Magma Algebra System", ***I. User language, J. Symbolic Comput,*** 24(3-4):235-265 (1997).

Elmaağaç, K., "Eisenstein Serileri Üzerine", Yüksek Lisans Tezi, ***Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Bilecik (2015).

Gunning, R.C., "Lectures on Modular Forms", ***Princeton University,*** Press, (1962).

İnam, İ., "Modüler Formlar, Eliptik Eğriler ve Uygulamaları", Doktora Tezi, ***Uludağ Üniveristesi Fen Bilimleri Enstitüsü,*** Bursa (2011).

Demirkol, Ozkaya, Z., Avcı, U. and İnam, İ., "A Cusp Form Example As An Eta Product", ***Scholars Journal of Physics, Mathematics and Statistics***, Yayına kabul edildi., (2017).

Koblitz, N., "Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms", ***Springer***, USA(1984).

Miyake, T., "Modular Forms", ***Springer-Verlag,***New York, USA (2006).

Ogg, A.P. ,"Rational pints of finite order on elliptic curves", ***Invent. Math.,*** 9:105-111 (1971).

Schoeneberg, B., "Elliptic Modular Functions An Introduction" , ***Springer***, Berlin (1974).

Shimura, G., "On Modular Forms of Half Integral Weight", ***Math. Annalen*** ,440-481 (1973).

Siegel, C.L., "Über die analytische Theory der quadratischen Formen I.", ***Ges. Abhandleungen Bd.***, Germany, (1966).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler
Adı Soyadı : Zeynep DEMİRKOL ÖZKAYA
Doğum Yeri ve Tarihi : KDZ.EREĞLİ / 1989

Eğitim Durumu
Lisans Öğrenmi : Bülent Ecevit Üniversitesi, Matematik, 2013
Bildiği Yabancı Diller: İngilizce

İş Deneyimi
Stajlar :
Projeler :
Çalışığı Kurumlar:

İletişim
Adres : Bahçelievler Mah. Merkez,BİLECİK
Tel : 0544 975 05 67
E-Posta Adresi : zeynepdemirkolozkaya@gmail.com

Akademik Çalışmaları
1.Demirkol, Ozkaya, Z., Avcı, U. and İnam, İ., "A Cusp Form Example As An Eta Product", ***Scholars Journal of Physics, Mathematics and Statistics***, Yayına kabul edildi., (2017).

Yabancı Dil Bilgisi **:** İngilizce (Orta Seviye)