ANADOLU ÜNİVERSİTESİ **BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ**

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

3-BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA EULER PARAMETRELERİ VE DÖNMELER

Esin PERKGÜL

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı
Doç.Dr.Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK,2017
Ref No:10157623

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

3-BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA EULER PARAMETRELERİ VE DÖNMELER

Esin PERKGÜL

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı

Doç.Dr.Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK,2017

ANADOLU UNIVERSITY

BILECIK SEYH EDEBALI UNIVERSITY

Graduate School Of Sciences

Department of Mathematics

3-DIMENSIONAL LORENTZIAN SPACE EULER PARAMETERS AND ROTATIONS

Esin PERKGÜL

Master's Thesis

Thesis Advisor

Assoc. Prof. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK,2017

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS

JÜRİ ONAY FORMU

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 21/06/2017 tarih ve 32 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 13/07/2017 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Esin PERKGÜL'ün "3-Boyutlu Lorentz Uzayında Euler Parametreleri ve Dönmeler" başlıklı tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

ÜYE : Doç. Dr. İsmail GÖK

ÜYE : Yrd. Doç. Dr. Şirin AKTAY

ONAY

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun …/…/…..... tarih ve ……………/………… sayılı kararı.

İMZA/ MÜHÜR

TEŞEKKÜR

Danışmanlığımı üstlenip bilgi ve tecrübesiyle destek veren, çalışmamın her safhasında yardımını esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ'a, tez yazım sürecinde bana sürekli destek olan fedakar eşim Kıvanç PERKGÜL'e, tüm aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Esin PERKGÜL

ÖZET

Bu çalışmada, Lorentz anlamda tanımlı matris (L -matris) çarpımı kullanılarak, 3-boyutlu Lorentz uzayında, Cayley formülü ve dönme ekseni spacelike ve timelike vektör olan L - ortogonal matrisin Euler parametreleri elde edilmiştir. Cayley formülü, verilen bir eksen etrafında dönmeye karşılık gelen ortogonal matrisi bulmanın bir yöntemidir. Split kuaterniyon çarpımının L -matris formunun kullanılması bir kolaylık sağlayacağından, L -ortogonal matrisin Euler parametreleri bir split kuaterniyon içinde kullanılarak, L - dönme, split kuaterniyon denklemi ile verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Lorentz uzay; Lorentz matris çarpımı; Cayley formülü; Dönmeler; Vida hareketi; Split kuaterniyon

ABSTRACT

In this study, Lorentzian matrix (L -matrices) using the product of 3-dimensional Lorentz space, Cayley formula and the rotation axis spacelike and timelike vector L -ortogonal matrix Euler parameters were obtained. The Cayley formula is a method of finding the orthogonal matrix corresponding to a rotation about a given axis. Since the use of the split quaternion multiplication-matrix form is a convenience, L -the Euler parameters of the orthogonal matrix are used in a split quaternion, the L -version is given by the split quaternion equation.

Keywords: Lorentzian space; Lorentzian matrix multiplication; Rotation; Cayley Formula; Screw Movement; Split Quaternions.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}^3$	3-Boyutlu Reel Vektör Uzayı
ε	Dual Birim
D	Dual Sayılar Cümlesi
$\langle , \rangle$	Reel İç Çarpım
$\cdot_L$	Lorentz Matris Çarpım
$\langle . \rangle_L$	Lorentz İç Çarpım
L^3	3-Boyutlu Lorentz Uzayı
$\wedge_L$	Lorent Vektörel Çarpım
$\lVert \ \rVert$	Norm Fonksiyonu
$\lvert\lVert \ \rVert\rvert$	Norm Fonksiyonunun Mutlak Değeri
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Cümlesi
$\odot$	Split Kuaterniyonlarda Çarpma İşlemi
$\oplus$	Split Kuaterniyonlarda Toplama İşlemi
$\times$	Reel Vektörel Çarpım

GİRİŞ

Hukuk üzerinde çalışmaya başlayan Arthur Cayley, üniversitedeki statü değişikliğinden sonra Cambridge Üniversitesi'nde soyut matematik üzerine profesör olmuştur. Yüksek boyutlu uzaylar üzerinde de çalışmalar yapmıştır. Bunun üzerine birçok kişi Cayley'in çalışmalarını ele almıştır. Biz de Lorentz uzayda Cayley formülü üzerine yapılan araştırmaları bu tezde tekrardan ele almış bulunmaktayız.

Euler-Rodrigues formülü ilk olarak, 1775 yılında Leonhard Euler tarafından yayınlanan çalışmada hareketin Newton-Euler denklemleri olarak bilinen denklemlerden ele alınmıştır. Daha sonra Euler-Rodrigues formülü 1840 yılında dönme ekseninin koordinatlarına karşılık gelen Rodrigues parametreleri ile birlikte Olinde Rodrigues tarafından yeniden incelenmiştir. Formülün vektörel ifadesi Oene Bottema ve Bernard Roth tarafından düzlemsel ve uzaysal hareketlerde Rodrigues formülünün ifadesi çalışmalarında incelenmiştir ve hareket matrislerinin formları sunulmuştur. Hasan Hilmi Hacısalihoğlu, reel ve dual kuaterniyonları ve onların özellikleri vermiş, kuaterniyonlar yardımıyla dönme operatörlerini ifade etmiştir. (Hacısalihoğlu, 1983)

3-boyutlu Lorentz uzayında dönme ekseni spacelike, timelike ya da lightlike olabilir. Bu sebeple Euler-Rodrigues formülünün matrisle ifadesi eksene bağlı olarak farklılık gösterir. Inoguchi, 3-boyutlu Lorentz uzayında split kuaterniyonları tanımlamıştır (Inoguchi, 1998). (Kula, vd. 2006) 3-boyutlu dual Lorentz uzayında dual split kuaterniyonları kullanarak 3-boyutlu Lorentz uzayında sonlu vida hareketlerini elde etmişlerdir. 3-boyutlu Lorentz uzayında matris çarpımını kullanarak Cayley formülünü ve Lorentz dönme matrisinin Euler parametrelerini elde etmişlerdir(Özkaldı, 2010).

Bu alandaki çeşitli çalışmalardan sonra, Jian S. Dai, dönmenin bir eksen ve açı ile temsilinde Euler-Rodrigues formülünü ve onun çeşitlerini yeniden ele almıştır (Dai, 2015). Vektörler, kuaterniyonlar ve Lie grupları yardımıyla formülün farklı matematiksel formlarını ve onların ilişkilerini ifade etmiştir. Bu bağlamda Jian'ın çalışması Euler-Rodrigues formülü, bu formülün gösterim çeşitleri ve bu gösterim çeşitlerinin ilişkileri; formülün kinematik, dinamatik ve bilgisayar grafiklerinde kullanımı için zengin bir referans sağlar.

Bu tez çalışmasında Lorentz matris çarpımı kullanılarak, 3-boyutlu Lorentz uzayda, Cayley formülü ve dönme ekseni spacelike ve timelike vektör olan L-ortogonal matrisin Euler parametreleri elde edilmiştir. Cayley formülü, verilen bir eksen etrafında dönmeye karşılık gelen ortogonal matrisi bulmanın bir yöntemidir. Split kuaterniyon çarpımının L-matris formunun kullanılması bir kolaylık sağlayacağından, L-ortogonal matrisin Euler parametreleri bir split kuaterniyon içinde kullanılarak, L-dönme, split kuaterniyon denklemi ile verilmiştir.

1. TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Lorentz Uzayı

Tanım 1.1 V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa, $\langle , \rangle$ fonksiyonuna V vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form denir.

i. Bilineerlik Aksiyomu: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall x, y, z \in V$ için

$$\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle$$

$$\langle x, ay + bz \rangle = a \langle x, y \rangle + b \langle x, z \rangle$$

ii. Simetri Aksiyomu: $\forall x, y \in V$ için

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

(O'Neill, 1983).

Tanım. 1.2 $\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu simetrik bilineer form olsun.

i) $\forall x \in V$ ve $x \neq 0$ için $\langle x, x \rangle > 0$ ise simetrik bilineer forma pozitif tanımlı,

ii) $\forall x \in V$ ve $x \neq 0$ için $\langle x, x \rangle < 0$ ise simetrik bilineer forma negatif tanımlı,

iii) $\forall x \in V$ ve $x \neq 0$ için $\langle x, x \rangle \geq 0$ ise simetrik bilineer forma yarı-pozitif tanımlı,

iv) $\forall x \in V$ ve $x \neq 0$ için $\langle x, x \rangle \leq 0$ ise simetrik bilineer forma yarı-negatif tanımlı,

v) $\forall x \in V$ ve $x \neq 0$ için $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow y = 0$ ise simetrik bilineer forma non-dejeneredir denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.3 V bir vektör uzayı ve

$$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

bir simetrik bilineer form olsun.

$$\langle , \rangle\big|_W : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formunun **indeks**i denir v ile gösterilir. v, $\langle , \rangle$ nin indeksi olmak üzere $0 \leq v \leq boyV$ dir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.4 Bir V vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilineer forma V vektör uzayı üzerinde bir **skalar çarpım fonksiyonu** denir. V üzerindeki bir skalar çarpım $\langle , \rangle$ ise $(V, \langle , \rangle)$ ikilisine **skalar çarpım uzayı** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.5 V bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi v olmak üzere $v = 1$ ve $boyV \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir **Lorentz Uzayı** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.6 $\mathbb{R}^3$ üzerinde $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ vektörler olmak üzere

$$\langle , \rangle_L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle_L = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Lorentz iç çarpım denir. Bu iç çarpım ile birlikte $\mathbb{R}^3$ vektör uzayına **Lorentz uzayı** denir. Kısaca $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle_L)$ ikilisine 3-boyutlu Lorentz uzayı denir ve L^3 ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.7 $x = (x_1, x_2, x_3) \in L^3$ olsun. Eğer

i) $\langle x, x \rangle_L > 0$ veya $x = 0$ ise x vektörüne spacelike vektör,

ii) $\langle x, x \rangle_L < 0$ ise x vektörüne timelike vektör,

iii) $\langle x, x \rangle_L = 0$, $x \neq 0$ ise x vektörüne lightlike veya null vektör

denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.9 Bir $x \in L^3$ vektörünün normu

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle_L}$$

olarak tanımlanan karmaşık sayıdır. Burada $\|x\|$ normu, ya pozitif ya sıfır ya da pozitif imajinerdir. Eğer $\|x\|$ pozitif imajiner ise, bu durumda $\|x\|$ yerine $\big|\|x\|\big|$ notasyonu kullanılır (Ratcriffe, 1994).

Tanım 1.10 $x, y \in L^3$ olmak üzere

$$\langle x, y\rangle_L = 0$$

ise x ile y vektörleri diktir denir ve $x \perp y$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.11 L^3 de iki vektör $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ vektörleri olmak üzere ve

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. x ve y vektörlerinin **Lorentz vektörel çarpımı**

$$x \wedge_L y = J(x \wedge y)$$

olarak tanımlanır. Burada "$\wedge$" $\mathbb{R}^3$ teki vektörel çarpımdır. Bu tanım $\mathbb{R}^3$teki vektörel çarpımın ifadesine benzer olarak

$$x \wedge y = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= (x_3y_2 - x_2y_3, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

şeklinde tanımlanabilir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.12 $x, y \in L^3$ timelike vektörleri için,

$$\langle x, y\rangle_L = -\big|\|x\|\big|\,\big|\|y\|\big|\cosh\varphi \ ,$$

$$\|x \wedge_L y\| = \big|\|x\|\big|\ \big|\|y\|\big|\ \sinh\varphi$$

dir. Burada φ, x ile y vektörleri arasındaki timelike açıdır (Ratcliffe, 1994)

Tanım 1.13 $x \in L^3$ spacelike vektör ve $y \in L^3$ pozitif timelike vektörleri için,

$$|\langle x, y\rangle_L| = \| x \| \, \|\| y \|\| \sinh \varphi ,$$

$$\| x \wedge_L y \| = \| x \| \|\| y \|\| \cosh \varphi$$

dir. Burada φ, x ile y vektörleri arasındaki timelike açıdır (Ratcliffe, 1994)

Tanım 1.14 x, $y \in L^3$ space-like vektörleri için,

$$|\langle x, y\rangle_L| = \| x \| \, \|\| y \|\| \cosh \varphi ,$$

$$\| x \wedge_L y \| = \| x \| \|\| y \|\| \sinh \varphi$$

dir. Burada φ, x ile y vektörleri arasındaki timelike açıdır (Ratcliffe, 1994).

Tanım 1.15 $A = \left[a_{ij} \right] \in \mathbb{R}_n^m$ ve $B = \left[b_{jk} \right] \in \mathbb{R}_p^n$ olmak üzere **Lorentzian matris (veya kısaca $L-$matris) çarpımı** $\cdot_L$ ile gösterilir ve

$$A \cdot_L B = \left[-a_{i1} b_{1k} + \sum_{j=2}^{n} a_{ij} b_{jk} \right]$$

olarak tanımlanır. $A \cdot_L B$ bir $m \times p$ tipinden bir matristir. $\mathbb{R}_n^m$ vektör uzayı $L-$matris çarpımıyla birlikte L_n^m olarak tanımlanır (Gündoğan, 2006).

Tanım 1.16 $L-$matris çarpımına göre, $n \times n-$ tipinden $L-$**özdeşlik matrisi** I_n ile gösterilir ve

$$I_n = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

olarak tanımlanır (Gündoğan, 2006).

Tanım 1.17 $n \times n-$tipinden A ve B matrisleri

$$A \cdot_L B = B \cdot_L A = I_n$$

bağıntılarını sağlıyorsa B matrisine A matrisinin $L-$ **inversi** denir ve B matrisi A^{-1} ile gösterilir (Gündoğan, 2006).

Tanım 1.18 $A = \left[a_{ij}\right] \in L_n^m$ matrisinin **transpozu**

$$A^T = \left[a_{ji}\right] \in L_m^n$$

olarak tanımlanır ve A^T ile gösterilir (Gündoğan, 2006).

Tanım 1.19 $A \in L_n^n$ matrisi

$$A^{-1} = A^T$$

bağıntısını sağlıyorsa A matrisine $L-$ **ortogonal matris** denir (Gündoğan, 2006).

Tanım 1.20 $A=\left[a_{ij}\right] \in \mathbb{R}_n^n$ matrisinin $L-$ **determinantı** $\det A$ ile gösterilir ve

$$\det A = \sum_{\sigma \in s_n} s(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n}$$

ile tanımlanır. Burada S_n , $\{1,2,\ldots,n\}$ cümlesinin bütün permütasyonlarının cümlesi ve $s(\sigma)$ da σ permütasyonlarının işaretidir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.21 $\forall A, B \in L_n^n$ için $\det\left(A ._L B\right) = -\det A . \det B$ dir (Gündoğan, 2006).

Tanım 1.22 Determinantı sıfır olmayan, yani tersi bulunan matrislere **regüler matris** , determinantı sıfır olan matrislere de **singüler matris** denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.23 Bir split kuaterniyon, sıralı dört sayının $1, i, j, k$ gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanabilir. Burada, i, j, k birimleri

$$i^2 = -1 \qquad ij = -ji = k$$

$$j^2 = +1 \qquad jk = -kj = -i$$

$$k^2 = +1 \qquad ki = -ik = j$$

özelliklerine sahiptir. Böylece, bir **split kuaterniyon**

$$q = d + ai + bj + ck$$

olarak ifade edilebilir. Buradaki a,b,c,d reel sayılarına q **split kuaterniyonunun bileşenleri** denir (Rosenfeld, 1997).

Tanım 1.24 $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $q = d + ai + bj + ck$ split kuaterniyonunun **eşleniği** ;

$$\bar{q} = d - ai - bj - ck$$

dir (Rosenfeld, 1997).

Tanım 1.25 $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $q = d + ai + bj + ck$ split kuaterniyonunun **normu;**

$$N(q) = \sqrt{\bar{q} \cdot q} = \sqrt{q \cdot \bar{q}}$$

olarak tanımlanır. Dikkat edilirse

$$N(q) = \sqrt{d^2 + a^2 - b^2 - c^2} \text{ dir}$$

(Rosenfeld, 1997).

Tanım 1.26 $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $q = d + ai + bj + ck$ split kuaterniyonunun skalar kısmı,

$$S_q = d$$

ve vektörel kısmı,

$$V_q = ai + bj + ck$$

olarak tanımlanır. Böylece q kuaterniyonu,

$$q = S_q + V_q$$

biçiminde yazılabilir (Rosenfeld, 1997).

Tanım.1.27 q ve p split kuaterniyonlar ve H split kuaterniyonların cümlesi olmak üzere,

H üzerinde toplama işlemi ve skalarla çarpma işlemi sırasıyla,

$$\oplus : H \times H \longrightarrow H$$

$$(q, p) \longrightarrow q \oplus p = S_{q+p} + V_{q+p}$$

ve

$$\odot : \mathbb{R} \times H \longrightarrow H$$

$$(\lambda, q) \longrightarrow \lambda \odot q = \lambda S_q + \lambda V_q$$

olarak tanımlanır. Buna göre herhangi bir $q = S_q + V_q$ split kuaterniyonunun eşleniği,

$$\overline{q} = S_q - V_q$$

şeklinde tanımlanır (Rosenfeld, 1997).

Tanım 1.28 $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi olmak üzere,

$$D = \left\{ \left(a, a^*\right) : a, a^* \in \mathbb{R} \right\}$$

cümlesi üzerinde sırasıyla,

1) Toplama:

$$\oplus : D \times D \longrightarrow D$$

$$(A, B) \longrightarrow A \oplus B = \left(a, a^*\right) \oplus \left(b, b^*\right) = \left(a + b, a^* + b^*\right)$$

2) Çarpma:

$$\odot : D \times D \longrightarrow D$$

$$(A, B) \longrightarrow A \odot B = \left(a, a^*\right) \odot \left(b, b^*\right) = \left(ab, ab^* + a^* b\right)$$

3) Eşitlik: $A = \left(a, a^*\right), B = \left(b, b^*\right) \in D$ için,

$$A = B \Leftrightarrow a = b \text{ ve } a^* = b^*$$

şeklinde tanımlanan işlemlerle birlikte D cümlesine **dual sayılar sistemi** ve D cümlesinin her bir elemanına da bir **dual sayı** denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım.1.29 $(1, 0) = 1$ dual sayısına D deki reel birim ve $(0,1) = \varepsilon$ dual sayısına da D deki dual birim adı verilir.

Sonuç olarak görüldüğü üzere $\varepsilon^2 = (0,0)$ ancak $\varepsilon \neq (0,0)$ dır (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 1.1 Bir $A = \left(a, a^*\right) \in D$ dual sayısı

$$A = a + \varepsilon a^{*}$$

şeklinde yazılabilir (Hacısalihoğlu, 1983).

2. LORENTZ UZAYDA CAYLEY FORMÜLÜ

Orijin etrafında bir dönme hareketi $A \cdot_L x = X$ ile bellidir. Burada A bir 3×3 $L-$ortogonal matris ve $x \in L^3$ tür. Harekette cismin noktaları arasındaki uzaklık sabit kalacağından,

$$\langle x, x\rangle_L = \langle X, X\rangle_L$$

yazılabilir. Buradan

$$\langle X - x, X + x\rangle_L = \langle X, X\rangle_L + \langle X, x\rangle_L - \langle x, X\rangle_L + \langle x, x\rangle_L$$
$$=0$$

dır. Burada $f = X - x$ ve $g = X + x$ denirse

$$\langle f, g\rangle_L = 0$$

olur. Buna göre,

$$f = (A - I)\cdot_L x \ ,$$
$$g = (A + I)\cdot_L x$$

dır.

A, 3×3 $L-$ ortogonal matrisinin karakteristik değerlerinden birisinin -1 olma durumu yani $A \cdot_L x = -x$ durumu hariç tutulursa o zaman $(A + I)$ matrisi regülerdir ve $x = (A + I)^{-1} \cdot_L g$ dir. Buna göre

$$f = (A - I)\cdot_L (A + I)^{-1} \cdot_L g$$

dir. Burada $B = (A - I)\cdot_L (A + I)^{-1}$ denirse,

$$f = B \cdot_L g$$

yazılabilir. B matrisinin bir antisimetrik matris olduğunu gösterelim.

$$\langle f, g\rangle_L = \langle B\cdot_L g, g\rangle_L = 0$$

$$B\cdot_L g = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \cdot_L \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} b_{11}g_1+b_{12}g_2+\ldots+b_{1n}g_n \\ \vdots \\ b_{n1}g_1+b_{n2}g_2+\ldots+b_{nn}g_n \end{bmatrix}$$

$$\langle B._L\, g, g\rangle_L = (B._L\, g)^T \cdot_L g = 0$$

$$\left[b_{11}g_1+b_{12}g_2+\ldots+b_{1n}g_n \ldots b_{n1}g_1+b_{n2}g_2+\ldots+b_{nn}g_n\right] \cdot_L \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = 0$$

$$b_{11}g_1g_1+b_{12}g_2g_1+\ldots+b_{1n}g_ng_n+\ldots+b_{n1}g_1g_n+b_{n2}g_2g_n+\ldots+b_{nn}g_ng_n=0$$

$$\sum_{i\neq j}^{n}\left(b_{ij}+b_{ji}\right)g_ig_j+\sum_{i=j}^{n}b_{ij}g_ig_j=0$$

olur. Buradaki eşitlik her g için doğru olduğundan

$$i\neq j \Rightarrow b_{ij}+b_{ji}=0$$

$$i=j \Rightarrow b_{ij}=0 \Rightarrow b_{ij}=-b_{ji}, b_{ii}=0$$

olmalıdır.

Bu durumda $B^T=-B$ olduğundan B bir antisimetrik matristir.

Şimdi $B=(A-I)\cdot_L (A+I)^{-1}$ denkleminden L^3 de A matrisini elde edelim.

$$B=(A-I)._L(A+I)^{-1}$$

$$B._L(A+I)=(A-I)._L(A+I)^{-1}\cdot_L(A+I)$$

$$B._L(A+I)=(A-I)$$

$$B._L A+B=(A-I)$$

$$(I+B)=A-B._L A$$

$$(I+B)=(I-B)._L(A) \tag{2.1}$$

(2.1) eşitliğinde bulunan $(I-B)$ matrisinin bir regüler matris olduğunu gösterelim. B matrisi bir antisimetrik matris olduğundan $\det B \geq 0$ dır. Ayrıca antisimetrik olan matrislerin tüm karakteristik değerleri imajinerdir. Gerçekten,

B matrisine karşılık gelen bir antisimetrik dönüşüm belirleyelim.

$$B:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$k \longrightarrow B(k)=\lambda k$$

olsun.

$$\langle B(k),k\rangle_L = \langle \lambda k,k\rangle_L = \lambda\langle k,k\rangle_L$$

$$\langle k,B(k)\rangle_L = \langle k,\lambda k\rangle_L = \overline{\lambda}\langle k,k\rangle_L$$

dır. Burada $\overline{\lambda}$, λ nın eşleniğidir. Belirlediğimiz B antisimetrik bir dönüşüm olduğundan

$$\langle B(k),k\rangle_L = -\langle k,B(k)\rangle_L$$

dır.

$$\lambda\langle k,k\rangle_L = -\overline{\lambda}\langle k,k\rangle_L$$

$$\lambda = -\overline{\lambda}$$

olur. Buradan

$$\lambda + \overline{\lambda} = 0$$

$$2\operatorname{Re}(\lambda) = 0$$

Burada λ nın reel kısmının sıfır olduğunu görüyoruz. Öyle ise λ sadece imajinere ya da sıfıra eşittir. Özel olarak $\lambda = 1$ için $\det(\lambda I - B) \neq 0$ olacağından $(I - B)$ regülerdir. O halde (2.1) denkleminde $(I - B)$ matrisinin regüler bir matris olduğundan yararlanılırsa

$$(I+B) = (I-B)\cdot_L A$$

$$(I-B)^{-1}\cdot_L (I+B) = (I-B)^{-1}\cdot_L (I-B)\cdot_L A$$

$$A = (I-B)^{-1}\cdot_L (I+B) \ ,$$

elde ederiz. Buna denk olan bir diğer formül ise,

$$B = (A-I)\cdot_L (A+I)^{-1}$$

denkleminden yararlanılarak

$$B\cdot_L (A+I) = (A-I)\cdot_L (A+I)^{-1}\cdot_L (A+I)$$

$$B\cdot_L A + B = (A-I)$$

$$A - B\cdot_L A = (I+B)$$

$$A\cdot_L (I-B) = (I+B)$$

$$A._L\left(I-B\right)._L\left(I-B\right)^{-1}=\left(I+B\right)._L\left(I-B\right)^{-1}$$

$$A=\left(I+B\right)._L\left(I-B\right)^{-1}$$

formülü elde edilir. Bu formüle, L^3 uzayında $L-$**Cayley formülü** denir (Özkaldı, 2010).

Şimdi her B antisimetrik matrisinin, $L-$Cayley formülü yardımıyla bir $L-$ortogonal matris tanımladığını gösterelim.

$$A=(I-B)^{-1}\cdot_L(I+B)$$

olmak üzere

$$A^T=\left(I+B\right)^T\cdot_L\left(\left(I-B\right)^{-1}\right)^T$$

$$A^T=\left(I+B^T\right)._L\left(\left(I-B\right)^T\right)^{-1}$$

$$A^T=\left(I-B\right)\ \cdot_L\left(\left(I+B\right)\right)^{-1}$$

$$A^T=(I-B)\cdot_L(I+B)^{-1}$$

dır. Buna göre

$$A^T._L A=\left(I-B\right)._L\left(I+B\right)^{-1}._L\left(I-B\right)^{-1}._L\left(I+B\right)=I$$

$$A._L A^T=\left(I-B\right)^{-1}._L\left(I+B\right)._L\left(I-B\right)._L\left(I+B\right)^{-1}=I$$

$$A^T._L A=A._L A^T=I$$

olduğundan A bir $L-$ortogonal matristir.

2.1. L^3 Uzayında 3×3 Tipinden Antisimetrik Matrisler

$$B\cdot_L y=b\wedge_L y$$

eşitliğini sağlayan B matrisini belirleyelim:

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix},\ \ y=(y_1,y_2,y_3)\ ,\ b=(b_1,b_2,b_3) \qquad \text{olsun.}$$

$$B \cdot_L y = b \wedge_L y$$

eşitliğinden

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \cdot_L \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 \\ -b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3 \\ -b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_2y_3 + b_3y_2 \\ -b_1y_3 + b_3y_1 \\ b_1y_2 - b_2y_1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Matrislerde eşitlik tanımından

$$b_{11} = 0 \;, \qquad b_{12} = b_3 \,, \qquad b_{13} = -b_2$$

$$b_{21} = -b_3 \;, \qquad b_{22} = 0 \;, \qquad b_{23} = -b_1$$

$$b_{31} = b_2 \;, \qquad b_{32} = b_1 \;, \qquad b_{23} = 0 \;,$$

olur. Buna göre

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & -b_1 \\ b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi, bir antisimetrik matris olarak elde edilir. Buna göre 3×3-tipinden bir antisimetrik matris ile L^3 uzayındaki vektörler arasında 1-1 bir eşleme vardır. 3×3-tipinden matrislerin cümlesi M ile gösterilirse bu eşleme

$$f : M \longrightarrow L^3$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & -b_1 \\ b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow f(B) = (b_1, b_2, b_3)$$

ile verilebilir.

Şimdi L-Cayley formülü kullanarak, B antisimetrik matristen A, L-ortogonal matrisini elde edelim. Eğer b spacelike bir vektör ise $\|b\| = -b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \neq 1$ olarak kabul edelim.

$$A=(I-B)^{-1}\cdot_L(I+B)$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & -b_3 & b_2\\ b_3 & 1 & b_1\\ -b_2 & -b_2 & 1\end{bmatrix}^{-1}\cdot_L\begin{bmatrix}-1 & b_3 & -b_2\\ -b_3 & 1 & -b_1\\ b_2 & b_1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{b_1^2-b_2^2-b_3^2+1}$$

$$\begin{bmatrix}-(b_1^2+b_2^2+b_3^2+1) & 2(b_3-b_1b_2) & -2(b_2+b_1b_3)\\ -2(b_3+b_1b_2) & -(b_1^2+b_2^2-b_3^2-1) & -2(b_1+b_2b_3)\\ 2(b_2-b_1b_3) & 2(b_1-b_2b_3) & -(b_1^2-b_2^2+b_3^2-1)\end{bmatrix}$$

Üstelik $A._L b=b$ dir. Gerçekten,

$$A._L b=\frac{1}{b_1^2-b_2^2-b_3^2+1}$$

$$=\begin{bmatrix}-(b_1^2+b_2^2+b_3^2+1) & 2(b_3-b_1b_2) & -2(b_2+b_1b_3)\\ -2(b_3+b_1b_2) & -(b_1^2+b_2^2-b_3^2-1) & -2(b_1+b_2b_3)\\ 2(b_2-b_1b_3) & 2(b_1-b_2b_3) & -(b_1^2-b_2^2+b_3^2-1)\end{bmatrix}\cdot_L\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$$

Örnek 3.1: $b_3\neq\pm 1$ olmak üzere $B=\begin{bmatrix}0 & b_3 & 0\\ -b_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ olsun.

$L-$Cayley formülünü kullanarak B den bir $L-$ortogonal matris elde edelim:

$$A=(I-B)^{-1}\cdot_L(I+B)=\frac{1}{b_3^2-1}\begin{bmatrix}b_3^2+1 & -2b_3 & 0\\ 2b_3 & -b_3^2-1 & 0\\ 0 & 0 & b_3^2-1\end{bmatrix}$$

Burada $\mathrm{ch}\,\theta = \dfrac{-b_3^2-1}{b_3^2-1}$ denirse $\mathrm{sh}\,\theta = \dfrac{-2b_3}{b_3^2-1}$ olur. Bu durumda dönme matrisi

$$A = \begin{bmatrix} -\mathrm{ch}\,\theta & \mathrm{sh}\,\theta & 0 \\ -\mathrm{sh}\,\theta & \mathrm{ch}\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buna göre, A $L-$ortogonal matrisi, $0xyz-$koordinat sistemindeki Lorentz düzleminde z-spacelike eksen etrafındaki θ hiperbolik açılık dönmeye karşılık gelir.

3. L^3 UZAYINDA DÖNMELER

3.1. $L-$Dönmeler İçin Rodrigues Denklemi

A bir $L-$ortogonal matris olsun. $A \cdot_L x = X$ olmak üzere $L-$Cayley formülünden

$$X - x = B \cdot_L (X + x)$$

bağıntısı yazılabilir. Antisimetrik matrisler ve Lorentzian vektörel çarpım arasındaki ilişki kullanılırsa,

$$X - x = b \wedge_L (X + x)$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme, $L-$dönmeler için $L-$**Rodrigues denklemi** ve b vektörüne de $L-$**Rodrigues vektörü** denir (Özkaldı, 2010).

Teorem:3.1.1 A matrisi timelike vektörleri timelike vektörlere, spacelike vektörleri spacelike vektörlere. null vektörleri null vektörlere dönüştürür.

İspat:3.1.1 $x = (x_1, x_2, x_3) \in L^3$ olsun.

$$A._L\, x = \frac{1}{b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 + 1}$$

$$\begin{bmatrix} -(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 1) & 2(b_3 - b_1 b_2) & -2(b_2 + b_1 b_3) \\ -2(b_3 + b_1 b_2) & -(b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 - 1) & -2(b_1 + b_2 b_3) \\ 2(b_2 - b_1 b_3) & 2(b_1 - b_2 b_3) & -(b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - 1) \end{bmatrix} \cdot_L \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 + 1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 1) + 2x_2(b_3 - b_1 b_2) - 2x_3(b_2 + b_1 b_3) \\ 2x_1(b_3 + b_1 b_2) - x_2(b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 - 1) - 2x_3(b_1 + b_2 b_3) \\ 2x_1(b_2 - b_1 b_3) + 2x_2(b_1 - b_2 b_3) - x_3(b_1^2 - b_2^2 + b_3^3 - 1) \end{bmatrix}$$

ve

$$\langle A_L x, A_L x\rangle_L = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \langle x, x\rangle_L$$

Şimdi b dönme eksenin non-null yani spacelike ya da timelike olmasına göre dönme matrislerini ele alalım. İlk olarak, L-Rodrigues denkleminde b vektörünü spacelike vektör, x, vektörünü timelike vektör ve $\langle b, x\rangle = 0$ olacak şekilde alalım. Teorem 3.1.1. den X bir timelike vektördür.

$$\|X + x\|^2 = \langle X, X\rangle_L - 2\|x\|.\|X\|.ch\phi + \langle x, x\rangle_L < 0$$

olduğundan $X + x$ bir timelike vektördür ve $X + x$ vektörü de b spacelike vektörüne diktir. b ile $X + x$ vektörleri arasındaki açı ϕ_1 olsun.

$$X - x = b \wedge_L (X + x)$$

olduğundan

$$\|X - x\| = \|b \wedge_L (X + x)\| = \|b\|\|X + x\| ch\phi_1$$

dir. Böylece $sh\phi_1 = 0$, $\phi_1 = 0$ ve $ch\phi_1 = 1$ dir. Bundan dolayı

$$\|X - x\| = \|b\|.\|X + x\|$$

yazılabilir.

Diğer taraftan;

$$\|X + x\| = \sqrt{\langle X + x, X + x\rangle_L}$$

$$\|X + x\| = \sqrt{\langle X, X\rangle_L + \langle X, x\rangle_L + \langle x, X\rangle_L + \langle x, x\rangle_L}$$

$$\|X + x\| = \sqrt{\langle X, X\rangle_L + 2\langle X, x\rangle_L + \langle x, x\rangle_L}$$

$$\|X + x\| = \sqrt{\langle X, X\rangle_L^{\ 2} - 2\|X\|\|x\| \mathrm{ch}\,\phi + \langle x, x\rangle_L^{\ 2}}$$

$\langle X, X\rangle_L = \langle x, x\rangle_L = -k^2$ denirse,

$$\|X + x\| = \sqrt{-k^2 - 2k^2 \mathrm{ch}\,\phi - k^2}$$

$$\|X + x\| = \sqrt{-2k^2 - 2k^2 \mathrm{ch}\,\phi}$$

$$\|X + x\| = \sqrt{-2k^2(1 + \mathrm{ch}\,\phi)}$$

$$\|X+x\| = \sqrt{-2k^2\left(1+\left(2\,\mathrm{ch}^2\left(\frac{\phi}{2}\right)-1\right)\right)}$$

$$\|X+x\| = \sqrt{-4k^2\,\mathrm{ch}^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

$$\|X+x\| = 2k\,\mathrm{ch}\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\|X-x\| = \sqrt{\langle X,X\rangle_L - 2\langle X,x\rangle_L + \langle x,x\rangle_L}$$

$$\|X-x\| = \sqrt{-k^2+2k^2\,\mathrm{ch}\,\phi - k^2}$$

$$= 2k\,\mathrm{sh}\,\frac{\phi}{2}$$

elde edilir. Bulunan bu değerler

$$\|X-x\| = \|b\|\cdot\|X+x\|$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$2ksh\frac{\phi}{2} = \|b\|\,2kch\frac{\phi}{2}$$

$$\|b\| = \tanh\frac{\phi}{2}$$

elde edilir.

b spacelike vektörü yönündeki birim vektöre $s=(s_x,s_y,s_z)$ denirse, b spacelike vektörünün veya buna karşılık gelen B antisimetrik matrisinin bileşenleri:

$$b_1 = \left(\tanh\frac{\phi}{2}\right)s_x \ ,$$

$$b_2 = \left(\tanh\frac{\phi}{2}\right)s_y \ ,$$

$$b_3 = \left(\tanh\frac{\phi}{2}\right)s_z$$

dir. Buradaki s_x, s_y, s_z sabitlerine **spacelike Lorentz Rodrigues** veya kısaca **spacelike** $L-$**Rodrigues parametreleri** denir (Özkaldı, 2010).

3.2 Spacelike Lorentzian Euler Parametreleri

A, $L-$ortogonal matris için $L-$Cayley formülü, ϕ hiperbolik dönme açısı ve $B = \left(\tanh\frac{\phi}{2}\right)S$ ile belirli olan s birim vektörüne göre

$$A = (I-B)^{-1}.(I+B)$$

$$A = \left(\left(\mathrm{ch}\frac{\phi}{2}\right)I - \left(\mathrm{sh}\frac{\phi}{2}\right)S\right)^{-1} \cdot_L \left(\mathrm{ch}\frac{\phi}{2}\right)I + \left(\mathrm{sh}\frac{\phi}{2}\right)S \qquad (3.2.1)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$C = \left(\mathrm{ch}\frac{\phi}{2}\right)I + \left(\mathrm{sh}\frac{\phi}{2}\right)S$$

denirse, C matrisindeki

$$c_0 = \mathrm{ch}\frac{\phi}{2}$$

$$c_1 = \left(\mathrm{sh}\frac{\phi}{2}\right)s_x$$

$$c_2 = \left(\mathrm{sh}\frac{\phi}{2}\right)s_y$$

$$c_3 = \left(\mathrm{sh}\frac{\phi}{2}\right)s_z,$$

sabitlerine A nın **spacelike Lorentz Euler** veya kısaca **spacelike** $L-$**Euler parametreleri** denir (Özkaldı, 2010).

(3.2.1) eşitliğinde $X=\left(\operatorname{ch}\frac{\phi}{2}\right)I-\left(\operatorname{sh}\frac{\phi}{2}\right)S$ ve $\frac{\phi}{2}=\theta$ denirse,

$$X=\begin{bmatrix} -\operatorname{ch}\theta & -s_z\operatorname{sh}\theta & s_y\operatorname{sh}\theta \\ s_z\operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta & s_x\operatorname{sh}\theta \\ -s_y\operatorname{sh}\theta & -s_x\operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{bmatrix}$$

dir. X^{-1} matrisi X in $L-$inversi olmak üzere,

$$X^{-1}=\begin{bmatrix} -s_x^2\dfrac{sh^2\theta}{ch\theta}-ch\phi & -s_xs_y\dfrac{sh^2\theta}{ch\theta}+s_zsh\theta & -s_xs_z\dfrac{sh^2\theta}{ch\theta}-s_ysh\theta \\ -s_xs_y\dfrac{sh^2\theta}{ch\theta}-s_zsh\theta & -s_y^2\dfrac{sh^2\theta}{ch\theta}+ch\phi & -s_ys_z\dfrac{sh^2\theta}{ch\theta}-s_zsh\theta \\ -s_xs_z\dfrac{sh^2\theta}{ch\theta}+s_ysh\theta & -s_ys_z\dfrac{sh^2\theta}{ch\theta}+s_xsh\theta & -s_z^2\dfrac{sh^2\theta}{ch\theta}+ch\phi \end{bmatrix}$$

$$=ch\theta\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}+sh\theta\begin{bmatrix} 0 & s_z & -s_y \\ -s_z & 0 & -s_x \\ s_y & s_x & 0 \end{bmatrix}+\frac{sh^2\theta}{ch\theta}\begin{bmatrix} 1-s_y^2-s_z^2 & -s_xs_y & -s_xs_z \\ -s_xs_y & -1-s_x^2+s_z^2 & -s_ys_z \\ -s_xs_z & -s_ys_z & -1-s_x^2+s_y^2 \end{bmatrix}$$

$$X^{-1}=(\operatorname{ch}\theta)I+(\operatorname{sh}\theta)S+\frac{\operatorname{sh}^2\theta}{\operatorname{ch}\theta}\left(S^2-I\right)$$

elde edilir. Buna göre $A=X^{-1}\cdot_L C$

$$A=\left((\operatorname{ch}\theta)I+(\operatorname{sh}\theta)S+\frac{\operatorname{sh}^2\theta}{\operatorname{ch}\theta}\left(S^2-I\right)\right)\cdot_L (ch\theta)I+(sh\theta)S$$

$$A=I+(\operatorname{sh}2\theta)S+(-1+\operatorname{ch}2\theta)S^2+\frac{\operatorname{sh}^3\theta}{\operatorname{ch}\theta}\left(S^3-S\right)$$

elde edilir. S matrisinin karakteristik polinomu $-\lambda^3+\lambda$ olduğundan $-S^3+S=0$ dır. Buna göre $S^3=S$ eşitliği ve $\frac{\phi}{2}=\theta$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$A = I + (\text{sh}\,\phi)S + (-1 + \text{ch}\,\phi)S^2 \tag{3.1}$$

olarak bulunur.

3.3 L^3 Uzayında Spacelike Vektör ile Dönmeler

$L-$ Euler parametreleri c_0, c_1, c_2, c_3 olmak üzere, L^3 uzayında dönmeler

$$q = c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k$$

split kuaterniyonu ile ifade edilebilir. ϕ hiperbolik dönme açısı ve $s = (s_x, s_y, s_z)$ dönme eksenine göre $q = c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k$ split kuaterniyonunun yazılışı,

$$q = \cosh\frac{\phi}{2} + s_x\left(\sinh\frac{\phi}{2}\right)i + s_y\left(\sinh\frac{\phi}{2}\right)j + s_z\left(\sinh\frac{\phi}{2}\right)k$$

dır. Burada $N(q) = 1$ olduğundan q bir birim split kuaterniyondur.

L^3 uzayında verilen bir $X = (x, y, z)$ vektörünü,

$$X = xi + yj + zk$$

olarak split kuaterniyonun bir elemanıyla özdeşleştirelim. L^3 uzayında dönmeler

$$X' = qX\overline{q} \ ,$$

split kuaterniyon denklemiyle verilebilir. Burada $\overline{q}$, q nun eşleniği olup $\overline{q} = c_0 - c_1 i - c_2 j - c_3 k$ dır. Şimdi $X' = qX\overline{q}$ split kuaterniyon denklemini matris formu ile ele alalım. Bunun için bir $Z = Z_4 + Z_1 i + Z_2 j + Z_3 k$ split kuaterniyonunu $Z = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$ vektörüyle özdeşleştirelim.

$W = W_4 + W_1 i + W_2 j + W_3 k$ olmak üzere W ve Z iki split kuaterniyonunun çarpımı olan WZ vektörü,

$$WZ = W^+ \cdot_L Z$$

veya

$$WZ = Z^- \cdot_L W$$

matris çarpımıyla verilebilir. Burada W^+ ve Z^- matrisleri sırasıyla şu şekilde tanımlanmıştır: W^+ matrisinin her bir sütunu, W split kuaterniyonunun $\{-i, j, k, 1\}$ baz vektörleriyle sağdan çarpımıyla, Z^- matrisinin her bir sütunu ise Z split kuaterniyonunun $\{-i, j, k, 1\}$ baz vektörleriyle soldan çarpımıyla elde edilmiştir. Buna göre,

$$Z = Z_4 + Z_1 i + Z_2 j + Z_3 k$$

$$W = W_4 + W_1 i + W_2 j + W_3 k$$

olmak üzere

$$(W).(-i) = (W_4 + W_1 i + W_2 j + W_3 k).(-i) = -W_4 i + W_1 + W_2 k - W_3 j$$

$$(W).(j) = (W_4 + W_1 i + W_2 j + W_3 k).(j) = W_4 j + W_1 k + W_2 + W_3 i$$

$$(W).(k) = (W_4 + W_1 i + W_2 j + W_3 k).(k) = W_4 k - W_1 j - W_2 i + W_3$$

$$(W).(1) = (W_4 + W_1 i + W_2 j + W_3 k).(1) = W_4 + W_1 i + W_2 j + W_3 k$$

Buradan,

$$W^+ = \begin{bmatrix} -W_4 & W_3 & -W_2 & W_1 \\ -W_3 & W_4 & -W_1 & W_2 \\ W_2 & W_1 & W_4 & W_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 & W_4 \end{bmatrix}$$

ve

$$(-i)(Z) = (-i).(Z_4 + Z_1 i + Z_2 j + Z_3 k) = -Z_4 i + Z_1 - Z_2 k + Z_3 j$$

$$(j)(Z) = (j).(Z_4 + Z_1 i + Z_2 j + Z_3 k) = Z_4 j - Z_1 k + Z_2 - Z_3 i$$

$$(k)(Z) = (k).(Z_4 + Z_1 i + Z_2 j + Z_3 k) = Z_4 k + Z_1 j + Z_2 i + Z_3$$

$$(1)(Z) = (1).(Z_4 + Z_1 i + Z_2 j + Z_3 k) = Z_4 + Z_1 i + Z_2 j + Z_3 k$$

$$Z^- = \begin{bmatrix} -Z_4 & -Z_3 & Z_2 & Z_1 \\ Z_3 & Z_4 & Z_1 & Z_2 \\ -Z_2 & -Z_1 & Z_4 & Z_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Dolayısıyla $q=\left(s_x\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2},s_y\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2},s_z\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2},\mathrm{ch}\frac{\phi}{2}\right)$ ve $X=(x,y,z,0)$ olmak üzere,

$X'=qX\overline{q}$

denkleminin matris formu

$$X'=q^{+}\cdot_L\overline{(q^{-})}\cdot_L X$$

olarak düşünülebilir. Burada

$$q^{+}=\begin{bmatrix} -\mathrm{ch}\frac{\phi}{2} & s_z\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} & -s_y\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} & s_x\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} \\ -s_z\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} & \mathrm{ch}\frac{\phi}{2} & -s_x\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} & s_y\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} \\ s_y\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} & s_x\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} & \mathrm{ch}\frac{\phi}{2} & s_z\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} \\ s_x\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} & s_y\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} & s_z\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} & \mathrm{ch}\frac{\phi}{2} \end{bmatrix}$$

ve

$$\overline{(q^{-})}=\begin{bmatrix} -\mathrm{ch}\frac{\phi}{2} & s_z\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} & -s_y\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} & -s_x\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} \\ -s_z\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} & \mathrm{ch}\frac{\phi}{2} & -s_x\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} & -s_y\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} \\ s_y\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} & s_x\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} & \mathrm{ch}\frac{\phi}{2} & -s_z\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} \\ -s_x\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} & -s_y\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} & -s_z\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} & \mathrm{ch}\frac{\phi}{2} \end{bmatrix}$$

dir. Buna göre

$$X'=q^{+}\cdot_L\overline{(q^{-})}\cdot_L X$$

$=$

$$ch^2\frac{\theta}{2}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+sh\theta\begin{bmatrix}0 & s_z & -s_y\\ -s_z & 0 & -s_x\\ s_y & s_x & 0\end{bmatrix}+sh^2\frac{\theta}{2}\begin{bmatrix}s_x^2-s_y^2-s_z^2 & -2s_xs_y & -2s_xs_z\\ -2s_xs_y & -s_x^2-s_y^2+s_z^2 & -s_ys_z\\ -2s_xs_z & -2s_ys_z & -s_x^2+s_y^2-s_z^2\end{bmatrix}$$

$$=\left(\mathrm{ch}^2\frac{\theta}{2}\right)I+\left(\mathrm{sh}\,\theta\right)S+sh^2\frac{\theta}{2}\left(2S^2-1\right)$$

$$=I+(\mathrm{sh}\,\phi)S+(-1+\mathrm{ch}\,\phi)S^2$$

dir. Bu, ϕ dönme açısına ve s dönme eksenine göre tanımlanan ve (3.1) eşitliği ile verilen $A=I+\left(\mathrm{sh}\,\phi\right)S+\left(-1+\mathrm{ch}\,\phi\right)S^2$ dönme matrisidir. Bu durumda

$$q^+\cdot_L\overline{(q^-)}=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0^T & 1\end{bmatrix}$$

yazılabilir. Burada 0, 3-boyutlu uzayında sıfır vektörüdür.

3.4. L^3 Uzayında Timelike Vektör ile Dönmeler

$X-x=b\wedge_L(X+x)$ L-Rodrigues denkleminde, b vektörünü timelike vektör, x vektörünü L^3 uzayında herhangi bir vektör olarak alalım. x^* ve X^* vektörleri sırasıyla b vektörüne dik olan düzlemde x ve X vektörlerinin dik izdüşüm vektörleri olsun. Bu durumda $x=x^*+\lambda b$ olacak şekilde $\lambda\in\mathbb{R}$ vardır. x^* vektörü b vektörüne dik, $A._L b=b$ ve $\langle x,b\rangle_L=\langle Ax,Ab\rangle_L$, olduğundan

$$\begin{aligned}0&=\langle x^*,b\rangle_L\\ &=\langle x-\lambda b,b\rangle_L\\ &=\langle x,b\rangle_L-\lambda\langle b,b\rangle_L\\ &=\langle Ax,Ab\rangle_L-\lambda\langle b,b\rangle_L\\ &=\langle X,b\rangle_L-\lambda\langle b,b\rangle_L\\ &=\langle X-\lambda b,b\rangle_L\ .\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece aynı $\lambda \in \mathbb{R}$ değeri için $X = X^* + \lambda b$ yazabiliriz. Üstelik x^* ve X^* vektörleri spacelike altuzayda bulunan spacelike vektörlerdir. Ayrıca b vektörü $X^* - x^*$ ve $X^* + x^*$ vektörlerine de diktir. Buna göre,

$$A_L x^* = A_L(x - \lambda b)$$

$$A_L x^* = A_L x - \lambda A_L b$$

$$A_L x^* = X - \lambda b$$

$$A_L x^* = X^*$$

yazılabilir. X ve x vektörleri arasındaki ilişki, X^* ve x^* vektörleri arasında da geçerlidir.

$L-$Rodrigues denkleminden,

$$X^* - x^* = b \wedge_L (X^* + x^*)$$

yazabiliriz. Bu durumda

$$\left\|X^* - x^*\right\| = \left\|b \wedge_L \left(X^* + x^*\right)\right\| = \|b\| \left\|X^* + x^*\right\| ch\phi_1$$

Burada ϕ_1 , b timelike vektörü ile $X^* + x^*$ spacelike vektörü arasındaki timelike açıdır. $\left\langle b, X^* + x^* \right\rangle_L = 0$ olduğundan

$$\left|\left\langle b, X^* + x^* \right\rangle_L\right| = \|b\| \left\|X^* + x^*\right\| sh\phi_1$$

$$=0$$

elde edilir. Böylece $sh\phi_1 = 0,\ \phi_1 = 0$ ve $ch\phi_1 = 1$ elde edilir. Buna göre

$$\left\|X^* - x^*\right\| = \|b\| \left\|X^* + x^*\right\|$$

olarak bulunur.

Diğer taraftan;

$$\left\|X^* - x^*\right\| = \sqrt{\langle X^*, X^* \rangle_L - 2\langle X^*, x^* \rangle_L + \langle x^*, x^* \rangle_L}$$

$$= \sqrt{\langle X^*, X^* \rangle_L - 2\left\|X^*\right\| \left\|x^*\right\| \cos\phi + \langle x^*, x^* \rangle_L}$$

$\langle X^*, X^* \rangle_L = \langle x^*, x^* \rangle_L = k^2 \quad (k > 0)$ denirse,

$$\left\|X^* - x^*\right\| = \sqrt{k^2 - 2k^2 \cos\phi + k^2}$$

$$= 2k \sin\frac{\phi}{2}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\left\| X^* + x^* \right\| = 2k \cos\frac{\phi}{2}$$

dir.

$$\left\| X^* - x^* \right\| = \|b\| \cdot \left\| X^* + x^* \right\| \text{ olduğundan}$$

$$2k \sin\frac{\phi}{2} = \|b\| 2k \cos\frac{\phi}{2}$$

$$\|b\| = \tan\frac{\phi}{2}$$

olarak bulunur.

b timelike vektörü yönündeki birim vektöre $s = (s_x, s_y, s_z)$ denirse, b timelike vektörünün veya buna karşılık gelen B antisimetrik matrisinin bileşenleri:

$$b_1 = \left(\tan\frac{\phi}{2}\right) s_x \ ,$$

$$b_2 = \left(\tan\frac{\phi}{2}\right) s_y \ ,$$

$$b_3 = \left(\tan\frac{\phi}{2}\right) s_z$$

dir. Buradaki s_x, s_y, s_z sabitlerine **timelike Lorentz Rodrigues** veya kısaca **timelike** $L-$**Rodrigues parametreleri** denir (Özkaldı, 2010).

3.5 Lorentz Timelike Euler Parametreleri

A, $L-$ortogonal matris için $L-$Cayley formülü, ϕ dönme açısı ve $B=\left(\tan\frac{\phi}{2}\right)S$ ile belirli s birim timelike vektörüne göre

$$A=(I-B)^{-1}.(I+B)$$

$$A=\left(\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)I-\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)S\right)^{-1}\cdot_L\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)I+\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)S \qquad (3.2)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$C=\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)I+\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)S$$

denirse, C matrisindeki

$$c_0=\cos\frac{\phi}{2}$$

$$c_1=\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)s_x$$

$$c_2=\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)s_y$$

$$c_3=\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)s_z,$$

sabitlerine A matrisinin **timelike Lorentz Euler** veya kısaca **timelike $L-$Euler parametreleri** denir (S. Özkaldı-H. Gündoğan).

(3.2)eşitliğinden $X=\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)I-\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)S$ ve $\frac{\phi}{2}=\theta$ denirse,

$$X=\begin{bmatrix}-\cos\theta & -s_z\sin\theta & s_y\sin\theta\\ s_z\sin\theta & \cos\theta & s_x\sin\theta\\ -s_y\sin\theta & -s_x\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

dir. X^{-1} matrisi X matrisinin $L-$inversi olmak üzere,

$$X^{-1}=\begin{bmatrix} -s_x^2\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}-\cos\theta & -s_xs_y\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}+s_z\sin\theta & -s_xs_z\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}-s_y\sin\theta \\ -s_xs_y\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}-s_z\sin\theta & -s_y^2\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}+\cos\theta & -s_ys_z\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}-s_x\sin\theta \\ -s_xs_z\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}+s_y\sin\theta & -s_ys_z\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}+s_x\sin\theta & -s_z^2\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}+\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$=\cos\theta\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}+\sin\theta\begin{bmatrix} 0 & s_z & -s_y \\ -s_z & 0 & -s_x \\ s_y & s_x & 0 \end{bmatrix}+\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\begin{bmatrix} -1-s_y^2-s_z^2 & -s_xs_y & -s_xs_z \\ -s_xs_y & 1-s_x^2+s_z^2 & -s_ys_z \\ -s_xs_z & -s_ys_z & 1-s_x^2+s_y^2 \end{bmatrix}$$

$$=(\cos\theta)I+(\sin\theta)S+\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\left(I+S^2\right)$$

dir. Buna göre $A=X^{-1}\cdot_L C$ olmak üzere,

$$A=\left((\cos\theta)I+(\sin\theta)S+\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\left(1+S^2\right)\right)\cdot_L(\cos\theta)I+(\sin\theta)S$$

$$A=I+(\sin 2\theta)S+(I-\cos 2\theta)S^2+\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}\left(S^3+S\right)$$

elde edilir.

S matrisinin karakteristik polinomu $\lambda^3+\lambda$ olduğundan $S^3+S=0$ dır. Buna göre $S^3=-S$ eşitliği ve $\dfrac{\phi}{2}=\theta$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$A=I+(\sin\phi)S+(1-\cos\phi)S^2 \qquad (3.3)$$

elde edilir.

3.6 L^3 Uzayında Timelike Euler Parametreleri ile Dönmeler

$L-$ Euler parametreleri c_0,c_1,c_2,c_3 olmak üzere, L^3 uzayında dönmeler

$$q=c_0+c_1i+c_2j+c_3k$$

split kuaterniyonu ile ifade edilebilir. ϕ dönme açısı ve $s=\left(s_x,s_y,s_z\right)$ timelike dönme eksenine göre $q=c_0+c_1 i+c_2 j+c_3 k$ split kuaterniyonunun yazılışı,

$$q=\cos\frac{\phi}{2}+s_x\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)i+s_y\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)j+s_z\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)k$$

dır. Burada $N(q)=1$ olduğundan q bir birim split kuaterniyondur.

L^3 uzayındaki bir $X=(x,y,z)$ vektörü,

$$X=xi+yj+zk$$

olarak split kuaterniyonun bir elemanıyla özdeşleştirilip, L^3 uzayında dönmeler

$$X'=qX\overline{q}\ ,$$

split kuaterniyon denklemiyle verilebileceğinden $X'=qX\overline{q}$ split kuaterniyon denklemini matris formu,

$$q=\left(s_x\sin\frac{\phi}{2},s_y\sin\frac{\phi}{2},s_z\sin\frac{\phi}{2},\cos\frac{\phi}{2}\right) \text{ ve } X=(x,y,z,0) \text{ olmak üzere}$$

$$X'=q^+\cdot_L\overline{(q^-)}\cdot_L X$$

olarak düşünülebilir. Burada

$$q^+=\begin{bmatrix}-\cos\frac{\phi}{2} & s_z\sin\frac{\phi}{2} & -s_y\sin\frac{\phi}{2} & s_x\sin\frac{\phi}{2}\\ -s_z\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} & -s_x\sin\frac{\phi}{2} & s_y\sin\frac{\phi}{2}\\ s_y\sin\frac{\phi}{2} & s_x\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} & s_z\sin\frac{\phi}{2}\\ s_x\sin\frac{\phi}{2} & s_y\sin\frac{\phi}{2} & s_z\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2}\end{bmatrix}$$

ve

$$\overline{(q^-)} = \begin{bmatrix} -\cos\frac{\phi}{2} & s_z\sin\frac{\phi}{2} & -s_y\sin\frac{\phi}{2} & s_x\sin\frac{\phi}{2} \\ -s_z\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} & -s_x\sin\frac{\phi}{2} & -s_y\sin\frac{\phi}{2} \\ s_y\sin\frac{\phi}{2} & s_x\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} & -s_z\sin\frac{\phi}{2} \\ -s_x\sin\frac{\phi}{2} & -s_y\sin\frac{\phi}{2} & -s_z\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} \end{bmatrix}$$

dir. Buna göre

$$X' = q^+ \cdot_L \overline{(q^-)} \cdot_L X$$

$$= \cos^2\frac{\phi}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin\theta \begin{bmatrix} 0 & s_z & -s_y \\ -s_z & 0 & -s_x \\ s_y & s_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$+\sin^2\frac{\phi}{2}\begin{bmatrix} -s_x^2 - s_y^2 - s_z^2 & -2s_xs_y & -2s_xs_z \\ -2s_xs_y & -s_x^2 - s_y^2 + s_z^2 & -2s_ys_z \\ -2s_xs_z & -2s_ys_z & -s_x^2 + s_y^2 - s_z^2 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\cos^2\frac{\phi}{2}\right) I + \left(\sin\phi\right) S + \sin^2\frac{\phi}{2}\left(I + 2S^2\right)$$

$$= I + (\sin\phi)S + (1 - \cos\phi)S^2$$

dir. Bu, ϕ dönme açısına ve s dönme eksenine göre tanımlanan ve (3.3) eşitliği ile verilen $A = I + \left(\sin\phi\right)S + \left(1 - \cos\phi\right)S^2$ dönme matrisidir. Bu durumda

$$q^+ \cdot_L \overline{(q^-)} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Burada 0, 3-boyutlu uzayda sıfır vektörüdür.

4. KATI DÖNÜŞÜMLER

4.1 Koordinat Dönüşüm

Kinematik, noktaların hareketlerinin geometrik özelliklerini inceler. Bu hareket ardışık ötelemeler, dönmeler yardımıyla yapılır. Eğer bir cisim katı cisim ise cisimdeki iki nokta arasındaki uzaklık korunur. Matematikte cebir, geometri, … dallarına ait bazı kavramlar kinematik açıdan ele alındığında bazen değişik isimlendirmeye uğrarlar. Örneğin cebirsel olarak bir

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

dönüşümü

$$d(x, y) = d(f(x), f(y))$$

özelliğine sahip ise f ye bir izometri denir.

Kinematik açıdan bu f dönüşümü yer değiştirme olarak adlandırılır. Bu yer değiştirmeyi $D = (A, d)$ şeklinde göstereceğiz.

$\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında bir cismin yer değiştirmesinden cisimdeki bütün noktaların bir D ile belirtilen konumu anlaşılacaktır. Bu yer değiştirme gözlemenin matematiksel açıdan önemi; cisme yerleştirilen cisimle bağlantılı bir çatının hangi konuma taşındığını göstermektedir.

Bu çatıların ilk konumdakine sabit, ikinci konumdakine hareketli çatı denir.ve sırasıyla F ve M ile gösterilir. Yer değiştirme,

$$D : F \longrightarrow M$$
$$X = A._L\, x + d$$

şeklinde tanımlı uzaklığı koruyan dönüşüm olarak ele alınır. Burada x , F de ölçülen bir noktanın koordinat vektörü, X ise aynı noktanın M de ölçülen koordinat vektörüdür. Eğer hareketli cisim n-boyutlu ise o zaman A bir $n \times n$ -tipinde matris, d ise bir n-boyutlu vektördür. Bu dönüşüm katı bir dönüşüm olduğunda A $n \times n$-tipinde bir L - ortogonal matristir.

Teorem 4.1 : n-boyutlu Lorentz uzayında yer değiştirmelerin cümlesi bir cebirsel gruptur.

İspat 4.1: i) $D_1 : M_1 \longrightarrow M$

$$D_2 : F \longrightarrow M_1$$

yer değiştirmeleri için bileşke yer değiştirme $D=D_1D_2$ dir. D_1 ve D_2 sırasıyla (A_1,d_1) ve (A_2,d_2) ile verilirse, D_1 için $X=A_1\cdot_L x+d_1$, D_2 için $X=A_2\cdot_L x+d_2$ dir.

$$D_1D_2(x)=D_1\cdot_L(A_2\cdot_L x+d_2)=A_1\cdot_L(A_2\cdot_L x+d_2)+d_1$$
$$=A_1\cdot_L A_2\cdot_L x+A_1\cdot_L d_2+d_1$$

elde edilir. Böylece $D=D_1D_2:F\longrightarrow M$ bileşke yer değiştirmesi

$$D=D_1D_2=(A_1,d_1)(A_2,d_2)$$
$$=(A_1\cdot_L A_2, A_1\cdot_L d_2+d_1)$$

olarak tanımlanmıştır.

ii) $D_1=(A_1,d_1)$, $D_2=(A_2,d_2)$ ve $D_3=(A_3,d_3)$ yer değiştirme olsun.

$$D_1\left(D_2D_3\right)=\left(A_1,d_1\right)\left(\left(A_2,d_2\right)\left(A_3,d_3\right)\right)$$
$$D_1\left(D_2D_3\right)=\left(A_1,d_1\right)\left(A_2\cdot_L A_3, A_2\cdot_L d_3+d_2\right)$$
$$D_1\left(D_2D_3\right)=\left(A_1\cdot_L A_2\cdot_L A_3, A_1\cdot_L(A_2\cdot_L d_3+d_2)+d_1\right)$$
$$D_1\left(D_2D_3\right)=\left(A_1\cdot_L A_2\cdot_L A_3, A_1\cdot_L A_2\cdot_L d_3+A_1\cdot_L d_2+d_1\right)$$
$$D_1\left(D_2D_3\right)=\left(A_1\cdot_L A_2, A_1\cdot_L d_2+d_1\right)\left(A_3,d_3\right)$$
$$D_1\left(D_2D_3\right)=\left(\left(A_1,d_1\right)\left(A_2,d_2\right)\right)\left(A_3,d_3\right)$$

iii) $I=(I_n,0)$ ve $D=(A,d)$ yer değiştirmeleri verilsin. D için $X=A._L x+d$, I için $X=I_n\cdot_L x=x$ dir.

$$DI\left(x\right)=D\left(x\right)=A._L x+d \text{ dir.}$$

Aynı şekilde $DI\left(x\right)=D\left(x\right)$ olduğundan $I=(I_n,0)$ yer değiştirmesi özdeşlik yer değiştirmedir.

iv) Her bir $D=(A,d)$ yer değiştirmesi için $X=A._L x+d$ dir.

$$X=A._L x+d \quad \Leftrightarrow A._L x=X-d$$
$$\Leftrightarrow A^T\cdot_L A=A^T\cdot_L\left(X-d\right)$$
$$\Leftrightarrow I_n\cdot_L x=A^T\cdot_L X-A^T\cdot_L d$$

$$\Leftrightarrow x = A^T \cdot_L X - A^T \cdot_L d$$

elde edilir.

$$D^{-1} : M \longrightarrow F$$

$$X \longrightarrow D^{-1}\left(X\right) = x = A^T \cdot_L X - A^T \cdot_L d$$

dir. O halde;

$$D^{-1} = (A^T, -A^T \cdot_L d)$$

5. 3-BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA YER DEĞİŞTİRMELER

3-boyutlu Lorentz uzayında iki katı cismin birbirine bağlı konumu, M hareketli çatıdaki $X=(X,Y,Z)$ koordinatlarını, F sabit çatısındaki $x=(x,y,z)$ koordinatları cinsinden belirleyen bir dönüşümle tanımlanır. Dönüşüm

$$X = A._L x + d$$

ile verilmiştir. Burada A, 3×3-tipinden bir $L-$ dönme matrisidir ve $d=(d_1,d_2,d_3)$ bir öteleme vektörüdür. Bu dönüşüm, M'deki noktalar arasındaki uzaklık ölçümünü koruyan bir katı dönüşümdür. Bu dönüşüme 3-boyutlu $L-$uzayda yer değiştirme denir.

5.1 L^3 Uzayında Bir Yer Değiştirmenin Vida Ekseni

Bir Lorentzian uzaysal yer değiştirme etkisi L^3 uzayda sabit kalan, hareketli bir cisimdeki noktaları ele alacağız. Bu c noktaları, yer değiştirmenin öncesi ve sonrası aynı koordinatlara sahiptir. Buna göre bu noktalar,

$$c = A._L c + d\ ,$$

veya

$$(I-A)._L c = d$$

denklemini sağlamalıdır. Bu denklemin çözümü

$$c = -(A-I)^{-1}._L d$$

gibi görülmektedir. Ancak 3×3 -tipinden bütün dönme matrisinin karakteristik değerlerinden biri 1 olduğundan dolayı $(A-I)$ matrisi singülerdir. Sonuç olarak L^3 de sabit kalan noktaları yoktur.

L^3 de uzaysal yer değiştirmelerin sabit noktası olmadığı halde sabit bir doğrusu vardır. Bu doğru yer değiştirme öncesi ve sonrası Lorentz uzayda aynı konuma sahiptir. Sabit doğru üzerindeki her bir nokta, doğru boyunca hareket etmiştir. Bu doğru **Lorentz vida ekseni** denir.

Bu doğrunun doğrultmanı Rodrigues vektörü olarak bilinen A matrisinin dönme eksenidir. Bu doğrunun konumunu belirleyelim:

d^* , d öteleme vektörünün normali b vektörü olan düzleme dik izdüşümü olsun.

$$(I-A)._L c = d^*$$

denklemi, normali b vektörü olan düzlemde ötelenen ve b vektörü etrafında dönen düzlem yer değiştirmesinin c pol noktasını tanımlar. Aranan doğru

$$l = c + tb \quad \text{dir.}$$

Bu yer değiştirme, bu doğru etrafında bir sırf dönmeye ve doğru boyunca $ds = d - d^*$ miktarı ötelemeye indirgenir. Bu denkleme **Lorentz vida hareketi** veya kısaca L**-vida hareketi** denir (Özkaldı, 2010).

5.2 Lorentz Uzaysal Yer Değiştirme İçin Rodrigues Denklemi

Bu bölümde Lorentzian dönmeler için verilen Rodrigues denklemi, $l = c + ts$ vida ekseni kullanılarak uzaysal yer değiştirme kolayca genelleştirilebilir. Burada s, b vektörü doğrultusundaki birim vektördür. c, L-vida ekseni üzerinde bir nokta olsun.

x ve X yerine sırasıyla $x - c$ ve $X - (ds + c)$ vektörleri kullanılarak L-Rodrigues denklemi

$$X - (ds + c) - x + c = b \wedge_L (X - (ds + c) + x - c) \ ,$$

$$X - x - ds = b \wedge_L (X + x - 2c - ds) \ ,$$

$$X - x - ds = b \wedge_L \left(X + x - 2c\right) + b \wedge_L \left(-ds\right)$$

$$X - x = b \wedge_L \left(X + x - 2c\right) + ds$$

olarak elde edilir. Bu formül genel Lorentz uzaysal yer değiştirme için L-Rodrigues denklemi olarak adlandırılır (Özkaldı, 2011).

5.3 3-Boyutlu L-Vida Matrisi

Şu ana kadar L-uzayda verilen bir $D = (A, d)$ yer değiştirmesi için L-vida ekseni, bu eksen boyunca öteleme ve bu eksen etrafında L-dönmesi tanımlanmıştır.

Şimdi, verilen L-vida eksenine göre D yer değiştirmesi ve l boyunca d mesafeli, θ açılı L-vida yer değiştirmesi belirleyeceğiz.

F sabit açısında, L-vida ekseni $l = c + ts$ ile verilsin. s vektörü birim vektör ve $\langle c, s \rangle_L = 0$ olduğunu kabul edelim.

Eğer L-vida ekseni F nin orijinden geçiyorsa bu durumda $c = 0$ dır. Öteleme miktarı,

$$c = A._L c + d^*$$

$$0 = A._L 0 + d^*$$

$$d^* = 0$$

olacağından

$$ds = d - d^*$$

$ds = d$ olur. Böylece yer değiştirme

$$D' = (A, ds)$$

dir.

Eğer L -vida ekseni F nin orijinden geçmiyorsa $c \neq 0$ dır. Bu durumda bir F' sabit çatısı,

$$T : F \longrightarrow F' \ , \ T = (I, c)$$

ötelemesi ile c noktasında L -vida ekseni üzerine yerleştirilebilir.

$D' = (A, ds)$ yer değiştirmesi referans çatının değişiminden ve $T^{-1} = (I, -c)$ olmak üzere,

$$D = TD'T^{-1} = (I, c)(A, ds)(I, -c) = (A, -Ac + ds + c)$$

olur. Böylece d öteleme vektörü

$$d = ds + (I - A)._L c \ ,$$

olarak bulunur. Verilen yer değiştirme için elde edilen 4×4 -tipinde (A, d) matrisine, L **-vida matrisi** denir (Özkaldı, 2011).

6. DUAL SPLİT KUATERNİYON

$T=(A,d)$ yer değiştirmesi, $\tilde{q}=q+\varepsilon q^0$ dual split kuaterniyonu ile temsil edilir. $\tilde{q}=q+\varepsilon q^0$ dual kuaterniyonun reel kısmı olan $q=q_0+q_1i+q_2j+q_3k$, A dönmesinin L-Euler parametreleriyle tanımlanmıştı. q^0 dual kısmı ise

$$q^0=\frac{1}{2}Dq$$

ile verilmiştir. Burada $D=d_1i+d_2j+d_3k$, $d=(d_1,d_2,d_3)$ öteleme vektörlerinden elde edilen bir split kuaterniyondur.

d öteleme vektörü $d=ds+c-A._L c$ L-vida yer değiştirmesinin parametrelerine göre yazılsın. Bu vektörlerinin her birinin kuaterniyon formunda yazılışıyla,

$$D=dS+C-qC\overline{q}$$

dır. Buna göre, $\tilde{q}=q+\varepsilon q^0$ dual kuaterniyon dual kısmı olan

$$q^0=\frac{1}{2}(dS+C-qC\overline{q})q$$

$$q^0=\frac{1}{2}(dSq+Cq-qC)$$

olur. Bu ifade matris denklemi kullanılarak

$$q^0=\frac{1}{2}(q^- \cdot_L (dS+C)-q^+ \cdot_L C)$$

olarak elde edilir.

Durum 1: b spacelike vektör ise,

$$q^- \cdot_L (dS+C)=\begin{bmatrix} -ch\frac{\phi}{2} & s_z sh\frac{\phi}{2} & s_y sh\frac{\phi}{2} & s_x sh\frac{\phi}{2} \\ s_z\,\mathrm{sh}\frac{\phi}{2} & ch\frac{\phi}{2} & s_x sh\frac{\phi}{2} & s_y sh\frac{\phi}{2} \\ -s_y sh\frac{\phi}{2} & -s_x sh\frac{\phi}{2} & ch\frac{\phi}{2} & s_z sh\frac{\phi}{2} \\ s_x sh\frac{\phi}{2} & s_y sh\frac{\phi}{2} & s_z sh\frac{\phi}{2} & ch\frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \cdot_L \begin{bmatrix} -d_1s_x+d_2s_y+d_3s_z)s_x+c_1 \\ -d_1s_x+d_2s_y+d_3s_z)s_y+c_2 \\ -d_1s_x+d_2s_y+d_3s_z)s_z+c_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$q^{+} \cdot_L C = \begin{bmatrix} -ch\frac{\phi}{2} & s_z sh\frac{\phi}{2} & -s_y sh\frac{\phi}{2} & s_x sh\frac{\phi}{2} \\ -s_z sh\frac{\phi}{2} & ch\frac{\phi}{2} & -s_x sh\frac{\phi}{2} & s_y sh\frac{\phi}{2} \\ s_y sh\frac{\phi}{2} & s_x sh\frac{\phi}{2} & ch\frac{\phi}{2} & s_z sh\frac{\phi}{2} \\ s_x sh\frac{\phi}{2} & s_y sh\frac{\phi}{2} & s_z sh\frac{\phi}{2} & ch\frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \cdot_L \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 ch\frac{\phi}{2} + c_2 s_z sh\frac{\phi}{2} - c_3 s_y sh\frac{\phi}{2} \\ c_2 ch\frac{\phi}{2} + c_1 s_z sh\frac{\phi}{2} - c_3 s_x sh\frac{\phi}{2} \\ c_3 ch\frac{\phi}{2} - c_1 s_y sh\frac{\phi}{2} + c_2 s_x sh\frac{\phi}{2} \\ c_2 s_y sh\frac{\phi}{2} - c_1 s_x sh\frac{\phi}{2} + c_3 s_z sh\frac{\phi}{2} \end{bmatrix}$$

olur ve

$$q^0 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} -d_1 s_x^2 ch\frac{\phi}{2} + d_2 s_x s_y ch\frac{\phi}{2} + d_3 s_x s_z ch\frac{\phi}{2} \\ -d_1 s_x s_y ch\frac{\phi}{2} + d_2 s_y^2 ch\frac{\phi}{2} + d_3 s_y s_z ch\frac{\phi}{2} \\ -d_1 s_x s_z\, ch\frac{\phi}{2} + d_2 s_y s_z ch\frac{\phi}{2} + d_3 s_z^2 ch\frac{\phi}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2c_2 s_z sh\frac{\phi}{2} + 2c_3 s_y sh\frac{\phi}{2} \\ -2c_1 s_z sh\frac{\phi}{2} + 2c_3 s_x sh\frac{\phi}{2} \\ -2c_1 s_y sh\frac{\phi}{2} - 2c_2 s_x sh\frac{\phi}{2} \\ \left(sh\frac{\phi}{2}\right)\left(-d_1 s_x + d_2 s_y + d_3 s_z\right)\left(-s_x^2 + s_y^2 + s_z^2\right) \end{bmatrix}$$

dir. $d = \langle d, s \rangle_L = -d_1 s_x + d_2 s_y + d_3 s_z$ olduğu göz önüne alınırsa ve $s = (s_x^*, s_y^*, s_z^*) = c \wedge_L s$ denirse,

$$q^0=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} dch\frac{\phi}{2}s_x+2sh\frac{\phi}{2}s_x^* \\ dch\frac{\phi}{2}s_y+2sh\frac{\phi}{2}s_y^* \\ dch\frac{\phi}{2}s_z+2sh\frac{\phi}{2}s_z^* \\ dsh\frac{\phi}{2} \end{bmatrix},$$

$$q_1^0=\frac{d}{2}\mathrm{ch}\frac{\phi}{2}s_x+\mathrm{sh}\frac{\phi}{2}s_x^* \ ,$$

$$q_2^0=\frac{d}{2}ch\frac{\phi}{2}s_y+sh\frac{\phi}{2}s_y^* \ ,$$

$$q_3^0=\frac{d}{2}ch\frac{\phi}{2}s_z+sh\frac{\phi}{2}s_z^* \ ,$$

$$q_4^0=\frac{d}{2}sh\frac{\phi}{2}$$

olarak elde edilir.

$\tilde{s}=s+\varepsilon s^*$ dual vektörü L-vida eksenini temsil etsin ve $\tilde{\phi}=\phi+\varepsilon d$, $\tilde{s}$ boyunca öteleme ve $\tilde{s}$ ekseni etrafındaki dönmeyi tanımlayan dual hiperbolik açı olsun. O zaman,

$$\tilde{q}=ch\frac{\phi}{2}+s_x\left(sh\frac{\phi}{2}\right)i+s_y\left(sh\frac{\phi}{2}\right)j+s_z\left(sh\frac{\phi}{2}\right)k$$
$$+\varepsilon\left(\frac{d}{2}sh\frac{\phi}{2}+\left(\frac{d}{2}ch\frac{\phi}{2}s_x+sh\frac{\phi}{2}s_x^*\right)i+\left(\frac{d}{2}ch\frac{\phi}{2}s_y+sh\frac{\phi}{2}s_y^*\right)j+\left(\frac{d}{2}ch\frac{\phi}{2}s_z+sh\frac{\phi}{2}s_z^*\right)k\right)$$

$$\tilde{q}=\left(ch\frac{\phi}{2}+\varepsilon\frac{d}{2}sh\frac{\phi}{2}\right)+s_x\left(sh\frac{\phi}{2}+\varepsilon\frac{d}{2}ch\frac{\phi}{2}\right)i+\varepsilon sh\frac{\phi}{2}s_x^*i$$
$$+s_y\left(sh\frac{\phi}{2}+\varepsilon\frac{d}{2}ch\frac{\phi}{2}\right)j+\varepsilon sh\frac{\phi}{2}s_y^*j$$
$$+s_z\left(sh\frac{\phi}{2}+\varepsilon\frac{d}{2}ch\frac{\phi}{2}\right)k+\varepsilon sh\frac{\phi}{2}s_z^*k$$

$\tilde{\phi}=\frac{\phi}{2}+\varepsilon d$ olmak üzere

$$\tilde{q} = ch\frac{\tilde{\phi}}{2} + \tilde{s}_x\left(sh\frac{\tilde{\phi}}{2}\right)i + \tilde{s}_y\left(sh\frac{\tilde{\phi}}{2}\right)j + \tilde{s}_z\left(sh\frac{\tilde{\phi}}{2}\right)k$$

olarak elde ederiz. Böylece bir dual kuaterniyonun bileşenleri, uzaysal yerdeğiştirmenin dual spacelike L-Euler parametreleri olarak bilinen dual uyarlamalarıyla L-Euler parametreleri yerine konularak elde edilmiştir. Dual spacelike L-Euler parametreleri kullanılarak dual L-ortogonal matrisini, dönme matrisi olan

$$\tilde{A} = I + \left(sh\tilde{\phi}\right)\tilde{S} + \left(-1 + ch\tilde{\phi}\right)\tilde{S}^2$$

eşitliğinin bir dual uyarlamasıyla,

$$A = I + \left(sh\phi\right)S + \left(-1 + ch\phi\right)S^2$$

olarak ifade edilebilir.

Durum 2: b timelike vektör ise,

$$q^{-} \cdot_L (dS + C) = \begin{bmatrix} -\cos\frac{\phi}{2} & -s_z\sin\frac{\phi}{2} & s_y\sin\frac{\phi}{2} & s_x\sin\frac{\phi}{2} \\ s_z\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} & s_x\sin\frac{\phi}{2} & s_y\sin\frac{\phi}{2} \\ -s_y\sin\frac{\phi}{2} & -s_x\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} & s_z\sin\frac{\phi}{2} \\ s_x\sin\frac{\phi}{2} & s_y\sin\frac{\phi}{2} & s_z\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \cdot_L \begin{bmatrix} -d_1 s_x + d_2 s_y + d_3 s_z)s_x + c_1 \\ -d_1 s_x + d_2 s_y + d_3 s_z)s_y + c_2 \\ -d_1 s_x + d_2 s_y + d_3 s_z)s_z + c_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$q^{+} \cdot_L C = \begin{bmatrix} -\cos\frac{\phi}{2} & s_z\sin\frac{\phi}{2} & -s_y\sin\frac{\phi}{2} & s_x\sin\frac{\phi}{2} \\ -s_z\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} & -s_x\sin\frac{\phi}{2} & s_y\sin\frac{\phi}{2} \\ s_y\sin\frac{\phi}{2} & s_x\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} & s_z\sin\frac{\phi}{2} \\ s_x\sin\frac{\phi}{2} & s_y\sin\frac{\phi}{2} & s_z\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \cdot_L \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} c_1\cos\frac{\phi}{2}+c_2s_z\sin\frac{\phi}{2}-c_3s_y\sin\frac{\phi}{2} \\ c_1s_z\sin\frac{\phi}{2}+c_2\cos\frac{\phi}{2}-c_3s_x\sin\frac{\phi}{2} \\ -c_1s_y\sin\frac{\phi}{2}+c_2s_x\sin\frac{\phi}{2}+c_3\cos\frac{\phi}{2} \\ -c_1s_x\sin\frac{\phi}{2}+c_2s_y\sin\frac{\phi}{2}+c_3s_z\sin\frac{\phi}{2} \end{bmatrix}$$

olur ve

$$q^0=\frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} -d_1s_x^2\cos\frac{\phi}{2}+d_2s_xs_y\cos\frac{\phi}{2}+d_3s_xs_z\cos\frac{\phi}{2} \\ -d_1s_xs_y\cos\frac{\phi}{2}+d_2s_y^2\cos\frac{\phi}{2}+d_3s_ys_z\cos\frac{\phi}{2} \\ -d_1s_xs_z\cos\frac{\phi}{2}+d_2s_ys_z\cos\frac{\phi}{2}+d_3s_z^2\cos\frac{\phi}{2} \\ 0 \end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2c_2s_z\sin\frac{\phi}{2}+2c_3s_y\sin\frac{\phi}{2} \\ -2c_1s_z\sin\frac{\phi}{2}+2c_3s_x\sin\frac{\phi}{2} \\ -2c_1s_y\sin\frac{\phi}{2}-2c_2s_x\sin\frac{\phi}{2} \\ \left(\sin\frac{\phi}{2}\right)\left(d_2s_y-d_1s_x+d_3s_z\right)\left(-s_x^2+s_y^2+s_z^2\right) \end{bmatrix}$$

dir. $d=\langle d,s\rangle_L=-d_1s_x+d_2s_y+d_3s_z$ olduğu göz önüne alınırsa ve $s=(s_x^*,s_y^*,s_z^*)=c\wedge_L s$ denirse,

$$q^0=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} d\cos\frac{\phi}{2}s_x+2\sin\frac{\phi}{2}s_x^* \\ d\cos\frac{\phi}{2}s_y+2\sin\frac{\phi}{2}s_y^* \\ d\cos\frac{\phi}{2}s_z+2\sin\frac{\phi}{2}s_z^* \\ -d\sin\frac{\phi}{2} \end{bmatrix},$$

$$q^0=-\frac{d}{2}\sin\frac{\phi}{2}+\left(\frac{d}{2}\cos\frac{\phi}{2}s_x+\sin\frac{\phi}{2}s_x^*\right)i+\left(\frac{d}{2}\cos\frac{\phi}{2}s_y+\sin\frac{\phi}{2}s_y^*\right)j+\left(\frac{d}{2}\cos\frac{\phi}{2}s_z+\sin\frac{\phi}{2}s_z^*\right)k$$

olarak elde edilir.

$\tilde{s} = s + \varepsilon s^*$ dual vektörü timelike L -vida eksenini temsil etsin ve $\tilde{\phi} = \phi + \varepsilon d$, $\tilde{s}$ boyunca öteleme ve $\tilde{s}$ ekseni etrafındaki dönmeyi tanımlayan dual hiperbolik açı olsun. O zaman,

$$\tilde{q} = \cos\frac{\phi}{2} + s_x\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)i + s_y\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)j + s_z\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)k$$

$$+\varepsilon\left(-\frac{d}{2}\sin\frac{\phi}{2} + \left(\frac{d}{2}\cos\frac{\phi}{2}s_x + \sin\frac{\phi}{2}s_x^*\right)i + \left(\frac{d}{2}\cos\frac{\phi}{2}s_y + \sin\frac{\phi}{2}s_y^*\right)j + \left(\frac{d}{2}\cos\frac{\phi}{2}s_z + \sin\frac{\phi}{2}s_z^*\right)k\right)$$

$$\tilde{q} = \left(\cos\frac{\phi}{2} - \varepsilon\frac{d}{2}\sin\frac{\phi}{2}\right) + s_x\left(\sin\frac{\phi}{2} + \varepsilon\frac{d}{2}\cos\frac{\phi}{2}\right)i + \varepsilon\sin\frac{\phi}{2}s_x^* i$$

$$+s_y\left(\sin\frac{\phi}{2} + \varepsilon\frac{d}{2}\cos\frac{\phi}{2}\right)j + \varepsilon\sin\frac{\phi}{2}s_y^* j$$

$$+s_z\left(\sin\frac{\phi}{2} + \varepsilon\frac{d}{2}\cos\frac{\phi}{2}\right)k + \varepsilon\sin\frac{\phi}{2}s_z^* k$$

$\tilde{\phi} = \frac{\phi}{2} + \varepsilon d$ olmak üzere

$$\tilde{q} = \cos\frac{\tilde{\phi}}{2} + \tilde{s}_x\left(\sin\frac{\tilde{\phi}}{2}\right)i + \tilde{s}_y\left(\sin\frac{\tilde{\phi}}{2}\right)j + \tilde{s}_z\left(\sin\frac{\tilde{\phi}}{2}\right)k$$

olarak elde edilir.

Böylece bir dual kuaterniyonun bileşenleri, uzaysal yer değiştirmenin dual timelike L -Euler parametreleri olarak bilinen dual uyarlamalarıyla L-Euler parametreleri yerine konularak elde edilmiştir. Dual timelike L-Euler parametreleri kullanılarak dual L-ortogonal matrisini, dönme matrisi olan

$$\tilde{A} = I + \left(\sin\tilde{\phi}\right)\tilde{S} + \left(-1 + \cos\tilde{\phi}\right)\tilde{S}^2$$

eşitliğinin bir dual uyarlamasıyla,

$$A = I + \left(\sin\phi\right)S + \left(1 - \cos\phi\right)S^2$$

olarak ifade edilebilir.

KAYNAKLAR

Gündoğan, H., and Keçilioğlu, O., "Glasnik Matematicki,Lorentzian Matrix Multiplication and the Motions on Lorentzian Plane"**.**.41 (61): 329- 334 (2006)

Hacısalihoğlu, H.H., **"**Dönüşümler ve Geometriler" ***, Milli Eğitim Basımevi,*** 1985

Hacısalihoğlu, H.H., "Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Dimensipnal" ***Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları,*** Ankara, 1983

İlarslan, K., Nesovıc, E., "Timelike and Null Normal Curves in Minkowski Space, Indian J", ***Pure. Appl. Math***., 35(7): 881-888 2004

Keçilioğlu, O., Özkaldı, S. and Gündoğan, H., "Rotations and Screw Motion with Timelike Vektor in 3-Dimensional Lorentzian Space", ***Adv. Appl. Clifford Algebras*** 22:1081-1091 (2012)

McCarthy, J.M., "MIT Pres, An Introduction to Theoretical Kinematics", Cambridge, (1990)

O'Neill, B., "Semi-Riemannnian Geometry With Applications to Relativity", ***Academic Pres, Inc, New York***, 1983

Özkaldı, S., and Gündoğan H., "Dual Split Quaternions and Screw Motion in 3-Dimensional Lorentzian Space"***, Adv. Appl. Clifford Algebras*** 21**:** 193-201 (2011)

Özkaldı, S., and Gündoğan, H., "Cayley Formula, Euler Parameters and Rotations in 3-Dimensipnal Lorentzian Space", ***Adv. Appl. Clifford Algebras*** **19**(1): 43-50 (2009)

Ratcliffe, J.G. "Springer-Verlag Foundations of Hyperbolic Manifolds***"***, ***New York***, (1994)

Rosenfeld, B., "Geometry of Lie Groups***"..Kluwer Academic Publishers***, (1997).

Uğurlu, H.H., Çalışkan, A. "The Study Mapping for Directed SpaceLike and TimeLike Lines in Minkowski 3-space $\mathbb{R}_1^3$ Mathematical & Computational Applications***",*** 1(2): 142-148 (1996)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyad :Esin Perkgül

Doğum Yeri ve Tarihi :Bursa/İnegöl-!5.08.1991

Eğitim Durumları

Lisans Öğrenimi :Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü

Bildiği Yabancı Diller :İngilizce

Bilimsel Faaliyetler :11.Matematik Günleri Sempozyumu Poster Sunumu

İş Deneyimi

Stajlar :Eskişehir Anadolu Lisesi

Projeler :

Çalıştığı Kurumlar :Özel İnegöl Doğa Okulları

İletişim

Adres :Burhaniye Mah. Samipaşa Cad. İnegöl/Bursa

Tel :5459011094

E-Posta Adresi :esin.kaplan@ dogakoleji.com

Akademik Çalışmaları :

-11.Matematik Günleri Sempozyumu Poster Sunumu

Yabancı Dil Bilgisi : Orta