CEBİRSEL YAPILARDAN PROJEKTİF DÜZLEM ELDE EDİLMESİ ÜZERİNE

Münevver Özcan

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof.Dr. Rüstem Kaya

Şubat-1988

Münevver Özcan'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "CEBİRSEL YAPILARDAN PROJEKTİF DÜZLEM ELDE EDİLMESİ ÜZERİNE" başlıklı bu çalışma jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

15/4/1988

Üye : Prof. Dr. Rüstem Kaya

Üye : Yrd. Doç. Dr. Şükrü Olgun

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ali Gözgülü

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 18.4.1988 gün ve ....175/2....sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Rüstem KAYA

ÖZET

Projektif düzlemlerin koordinatlanması sonucu olarak, her projektif düzleme aynı zamanda bir cebirsel yapı da karşı getirildiği çok iyi bilinmektedir. Karşıt olarak bazı cebirsel yapılar da projektif düzlem tanımlamakta (inşa etmekte) kullanılabilmektedir. Bu tez çalışmasında, bugüne kadar bu konuda yapılan bütün çalışmaları gözden geçirerek derli toplu bir hale getirmek amaçlanmıştır. Çalışmada (Kaya, 1978,296-326s) esas alınmakla birlikte, orada ayrıntıya girilmeden zikredilen bir çok cebirsel yapı yeniden ele alınarak, bunlarla ilgili (cebirsel) aksiyomların sağlanması yapılmıştır.

SUMMARY

It is well known that every projective plane has also an algebraic structure obtained by coordinisation. Conversely, certain algebraic structures can be used to construct projective planes. In this thesis, we try to prepare a survey on the subject by examining all works published so far. We, basicly, have followed (Kaya,1978, pp.296-326) but we have included a lot of details of the verifications of axioms of the corresponding algebraic structures.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamı yöneten ve bu tezin hazırlanması sırasında ilgi ve yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Prof.Dr. Rüstem Kaya'ya saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

M.Özcan

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklamalar
N	Noktalar kümesi
D	Doğrular kümesi
o	Üzerinde bulunma bağıntısı
Nod	N noktası d doğrusu üzerindedir
$N\phi d$	N noktası d doğrusu üzerinde değildir
(N,D,o)	Geometrik yapı
$P=(N,D,o)$	Projektif düzlem
T	Üçlü işlem
(S,T)	Üçlü halka
$P_{(S,T)}$	(S,T) üçlü halkasının belirttiği projektif düzlem
P_2F	F cisminin belirttiği düzlem
P_2B	B bölümlü halkasının belirttiği düzlem
$\mathcal{R}$	Gerçel sayılar kümesi
$GF(p^r)$	Galois cismi
$+, \oplus, \cdot, \otimes, \circledcirc, *, o$	İkili işlemler

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (Devam)

1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın Amacı

Her projektif düzlemin, bir kümenin elemanlarıyla homogen olmayan biçimde koordinatlanabileceği (yani düzleme ait nokta, doğru ve üzerinde bulunma bağıntısının bir kümenin elemanlarıyla temsil edilebileceği) bazı temel kavramlar kısmında anlatılacaktır. Bu koordinatlama yöntemiyle elde edilen projektif düzlemin geometrik yapısının yanında birde, düzlemin özelliklerini de yansıtan, cebirsel yapısının var olduğu bilinmektedir (Kaya, 1978).

Bu çalışmada ise karşıt problem ele alınarak, cebirsel yapılar yardımıyla projektif düzlemlerin inşası üzerinde durulacak, yani projektif düzlemlerin cebirsel olarak karakterizasyonu anlatılacaktır.

Fakat çalışmamız süresince görüleceği üzere bu cebirsel yapılar soyut cebir derslerinde en çok sözü edilen grup, halka, cisim,...v.b. olmakla kalmayacak, tanımları ilgili bölümlerde verilecek olan, yarıgrup, çifte yarıgrup, kartezyen grup, yarı cisim, yaklaşık cisim, çifte grup, karşıt kartezyen grup, karşıt yarıcisim gibi cebirsel yapılar da olabilecektir.

Her bir bölümde, ilgili cebirsel yapının tanımı verilecek, yine bunlarla ilgili bilgi ve teoremler sunulduktan sonra örnekler üzerinde durulacaktır. Örneklerin olabildiğince ayrıntılı çözümleri verilecektir. Böylece literatürde bilinen fakat ayrıntısı verilmeyen (aynı zamanda cebirsel yoldan tanımlanan) bütün projektif düzlemlerin cebirsel yapılarının yeterince tanıtılması amaçlanmaktadır.

Burada verilen, projektif düzlemleri belirtmeye yarayan bu yöntem, bütün projektif düzlemler için uygulanabilir, ancak konunun gereği olarak daha çok Dezargsel olmayan projektif düzlemlerin cebirsel yapıları üzerinde durulacaktır.

1.2. Bazı Temel Kavramlar

Şimdi projektif geometrinin, bu çalışmada geçen, bazı temel kavramlarını kısaca verelim.

Tanım 1.2.1: N elemanları noktalar, D elemanları doğrular olan iki küme ve $N \cap D = \emptyset$ olsun. o, $N \times D$ kümesinde bir üzerinde bulunma bağıntısı iken $P = (N,D.o)$ geometrik yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyor ise, bu sisteme bir projektif düzlem denir:

P1) Her $A,B \in N$, $A \neq B$ için Aod ve Bod özelliğinde bir tek $d \in D$ vardır.

P2) Her $c,d \in D$, için Aoc ve Aod özelliğinde en az bir $A \in N$ vardır.

P3) Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Projektif düzlemlerde P2 aksiyomundan daha kuvvetli ve kesin bir önerme geçerlidir.

Teorem 1.2.1: Bir $P = (N,D,o)$ projektif düzleminde farklı iki doğru bir tek noktada kesişirler.

Tanım 1.2.2: ((M.e)-Dezarg Aksiyomu)

M ve e, P projektif düzleminde belli bir nokta ve belli bir doğru olsunlar. Eğer herhangi A,B,C ve A',B',C' doğrudaş olmayan nokta üçlüleri için M,A,A' , M,B,B' , M,C,C' doğrudaş iken $AB \wedge A'B'$oe ve $AC \wedge A'C'$oe ise $BC \wedge B'C'$oe dir.

Tanım 1.2.3: Bir $P = (N,D,o)$ projektif düzleminde her $X \in N$ ve $x \in D$ ikilisi için (X,x)-Dezarg aksiyomu geçerli ise, P düzlemine Dezargsel düzlemdir denir.

Tanım 1.2.4: ((e,e)-Dezarg Aksiyomu)

P bir projektif düzlem e de bu düzlemin belli bir doğrusu olsun. Her Moe noktası için düzlem (M,e)-Dezargsel ise, P düzlemine (e,e)-Dezargsel düzlem denir.

Tanım 1.2.5: P bir projektif düzlem, M ve e düzleme ait belli bir nokta ve belli bir doğru olsun. $X \neq Y$, $X,Y \neq M$, $X,Y \notin e$ ve M ile doğrudaş olan X,Y nokta çiftleri için $f(X) = Y$ olacak biçimde bir f merkezsel kolinasyonu var ise, P düzlemine (M,e)-geçişkendir denir.

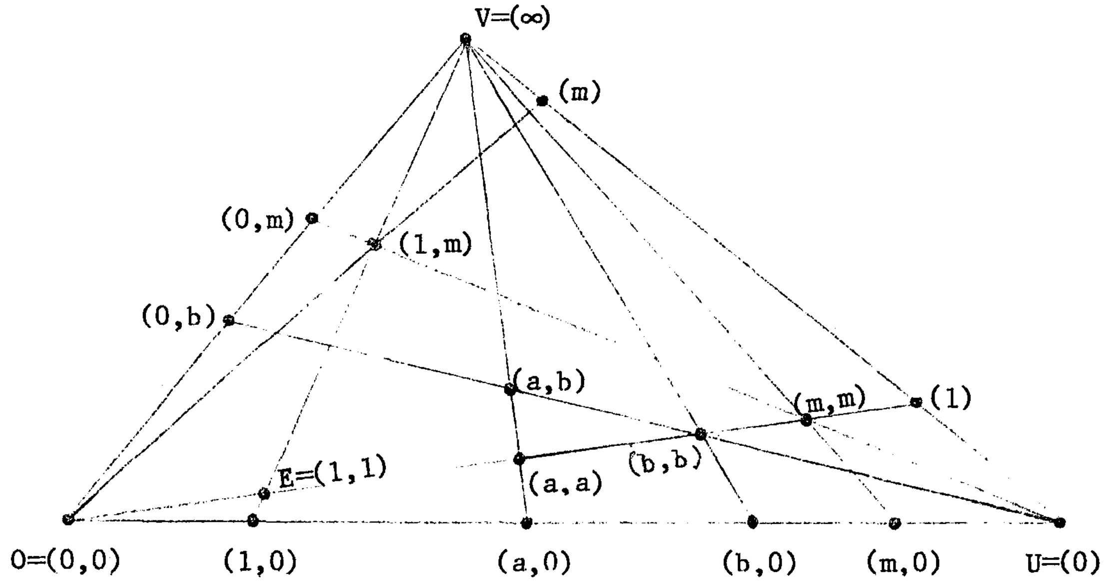
Teorem 1.2.2: M ve e, P projektif düzleminde belli bir nokta ve doğru olsun. P nin (M,e)-Dezargsel olması için gerek ve yeterli koşul (M,e)-geçişken olmasıdır (Kaya, 1978).

1.3. Projektif Düzlemlerin Koordinatlanması ve Düzlemsel Üçlü Halkalar

Her projektif düzlem uygun bir S kümesinin elemanlarıyla koordinatlanabilir.

Tanım 1.3.1: P, mertebesi n olan bir projektif düzlem, S de 0 ve 1 ile gösterilen iki özel elemanı bulunan ve kardinalitesi $n \geqslant 2$ olan bir küme olsun. P de herhangi üçü doğrudaş olmayan O,E,U,V noktalarından oluşan seçimli {O,E,U,V} koordinatlama dörtgeni ve S kümesi yardımıyla P nin noktalarını, doğrularını ve üzerinde bulunma bağıntısını belirleyelim.

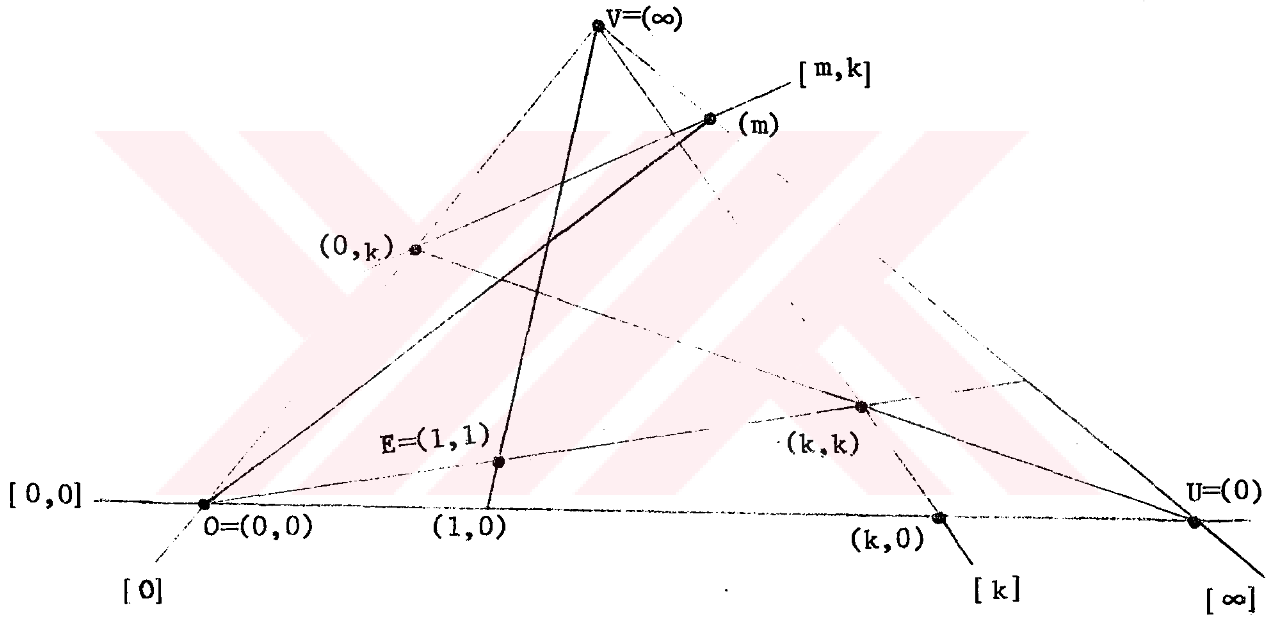
Noktaların belirlenmesi:



Şekil 1.1. Projektif düzlemin noktalarının belirlenmesi

$AoOE$ ve $A \neq OE \wedge UV$ şeklindeki her bir A noktasına S^2 nin (a,a) biçimindeki bir tek elemanını eşleyelim. Özel olarak, $O = (0,0)$, $E = (1,1)$ olsun. Her bir $N \not o UV$ noktası için $NV \wedge OE = (a,a)$ ve $NU \wedge OE = (b,b)$ ise $N = (a,b)$ diyelim. Özel olarak, $NoOU$ ise $N=(a,0)$ ve $NoOV$ ise $N = (0,b)$ olur. $MoUV$ ve $M = [(0,0)v(1,m)] \wedge UV$ ise $M = (m)$ diyelim. Buna göre $U = [(0,0)v(1,0)] \wedge UV$ olduğundan $U = (0)$ dır. $OE \wedge UV = [(0,0)v(1,1)] \wedge UV$ olup $OE \wedge UV = (1)$ dir. $\infty \notin S$ olmak üzere UV nin V noktası için $V = (\infty)$ dur (Şekil 1.1).

Doğruların koordinatlanması:



Şekil 1.2. Projektif düzlemin doğrularının belirlenmesi

$d \not o V$ doğrusu için, $d \wedge UV = (m)$ ve $d \wedge OV = (0,k)$ ise $d = [m,k]$ dır. Bu nedenle $OU \not o V$ için $OU \wedge UV = (0)$ ve $OU \wedge OV = (0,0)$ olduğundan $OU = [0,0]$ dır. doV ve $d \wedge OU = (k,0)$ ise $d = [k]$ dır. UV doğrusu, özel olarak $UV = [\infty]$ biçiminde koordinatlanır (Şekil 1.2).

Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir husus, bu koordinatlamanın seçilen {O,E,U,V} dörtgenine bağlı olmasıdır.

Üzerinde bulunma bağıntısı:

Her $m,k,x,y \in S$ için,

$(\infty)\ o\ [\infty]$, $(\infty)\ o\ [k]$, $(\infty)\ \not o\ [m,k]$

$(x)\ o\ [\infty]$, $(x)\ \not o\ [k]$, $(x)\ o\ [m,k] \Longleftrightarrow x = m$

$(x,y)\ \not o\ [\infty]$, $(x,y)\ o\ [k] \Longleftrightarrow x = k$, $(x,y)\ o\ [m,k] \Longleftrightarrow y = T(m,x,k)$

dır.

Tanım 1.3.2: S, 0 ve 1 ile gösterilen iki elemanı da içeren bir küme ve $\infty \notin S$ olsun. T, S üzerinde aşağıdaki T1–T5 koşullarını gerçekleyen bir üçlü işlem ise, (S,T) ikilisine üçlü halka denir.

T1) Her $a,b,c \in S$ için, $T(0,b,c) = T(a,0,c) = c$

T2) Her $a \in S$ için, $T(1,a,0) = T(a,1,0) = a$

T3) Verilen her $a,b,c \in S$ için $T(a,b,x) = c$ olacak biçimde bir tek $x \in S$ vardır.

T4) $a \neq c$ olmak üzere verilen $a,b,c,d \in S$ için $T(a,x,b) = T(c,x,d)$ olacak biçimde bir tek $x \in S$ vardır.

T5) $a \neq c$ olmak üzere verilen $a,b,c,d \in S$ için $T(x,a,y) = b$, $T(x,c,y) = d$ olacak biçimde bir tek $(x,y) \in S^2$ vardır.

Eğer P projektif düzlemi, S kümesi ve T üçlü işlemi yardımıyla koordinatlanabilen bir projektif düzlem ise (S,T) üçlü halkasına P nin düzlemsel üçlü halkası denir.

Her projektif düzlemin, uygun bir S kümesinin elemanlarıyla koordinatlanmasından bir (S,T) üçlü halkası elde edilebilir (Kaya,1978).

2. ÇİFTE YARIGRUPLAR ÜZERİNDE PROJEKTİF DÜZLEMLER

2.1. Çifte Yarıgrup ile Düzlemsel Üçlü Halka Arasındaki İlişki

Tanım 2.1.1: Herhangi bir L kümesi üzerinde $*$ ikili işlemi verilmiş olsun. $(L,*)$ sistemi aşağıdaki L1-L3 özelliklerini sağlarsa bu sisteme yarıgrup veya loop denir.

L1) Verilen her $a,b \in L$ için, $a * x = b$ denkleminin bir tek $x \in L$ çözümü vardır.

L2) Verilen her $a,b \in L$ için, $x * a = b$ denkleminin bir tek $x \in L$ çözümü vardır.

L3) Her $x \in L$ için $u * x = x * u = x$ olacak biçimde bir $u \in L$ (birim eleman) vardır.

Teorem 2.1.1: (S,T) bir üçlü halka ve

$$+ \;:\; x + y = T(1,x,y)$$
$$. \;:\; x.y = T(x,y,0)$$

olmak üzere $(S,+)$ ve $(S-\{0\},.)$ sistemleri birim elemanları sırasıyla 0 ve 1 olan birer yarıgruptur. Üstelik her $x \in S$ için $x.0 = 0.x = 0$ dır.

Burada, (S,T) üçlü halkasından elde edilen $(S,+)$ ve $(S-\{0\},.)$ cebirsel yapılarının yarıgrup özelliklerini sağladıkları T1,...,T5 kullanılarak kolaylıkla gösterilebilir.

Tanım 2.1.2: S, 0 ve 1 i de kapsayan bir küme olsun. $+$ ve $.$ bu küme üzerinde iki ikili işlem iken $(S,+)$ ve $(S-\{0\},.)$ birim elemanları sırasıyla 0 ve 1 olan birer yarıgrup ve her $x \in S$ için $x.0 = 0.x = 0$ ise $(S,+,.)$ sistemine çifte-yarıgrup denir.

Bu tanım ile daha önce verilen bilgileri birleştirirsek, $(S,+,.)$ sisteminin çifte yarıgrup özelliklerini sağladığını söyleyebiliriz. Eğer bir $(S,+,.)$ sistemi bir (S,T) üçlü halkasından elde edilmişse, buna karşılık bir $P_{(S,T)}$ projektif düzlemi vardır.

O halde, "Bir çifte yarıgrup hangi ek koşullar altında bir projektif düzlemin lineer üçlü halkasından elde edilebilir?" sorusunun cevabını verelim.

Tanım 2.1.3: (S,T) üçlü halkasından,

$$T(1,a,b) = a + b \quad \text{ve} \quad T(a,b,0) = ab$$

ile elde edilen $(S,+,.)$ cebirsel yapısına düzlemsel halka denir.

Aşağıdaki yardımcı teorem, her bir düzlemsel halkanın bir tek lineer üçlü halkadan elde edilebileceğini göstermektedir.

Yardımcı Teorem 2.1.2: $(S,+,.)$ sistemi bir düzlemsel halka olmak üzere T üçlü işlemi,

$$T : S^3 \rightarrow S$$

$$(a,b,c) \rightarrow T(a,b,c) = ab + c,$$

şeklinde tanımlanırsa (S,T) ikili sistemi bir lineer üçlü halkadır. Üstelik (S,T) lineer üçlü halkasından elde edilen cebirsel yapı $(S,+,.)$ dır.

İspat: Varsayalım ki $(S,+,.)$ düzlemsel halkası (S,T') lineer üçlü halkasından elde edilmiş olsun. Her $a,b,c \in S$ için $T'(a,b,c) = ab + c$ olmalıdır. T de aynı şekilde tanımlandığından $T = T'$ olmalıdır. Dolayısıyla (S,T) ikili sistemi de bir lineer üçlü halkadır ve $(S,+,.)$, (S,T) lineer üçlü halkasından elde edilen cebirsel yapıdır ■

Bir çifte yarıgrup ile düzlemsel halka arasındaki ilişkiyi belirleyen teoremi artık verebiliriz.

Teorem 2.1.3: Herhangi bir $(S,+,.)$ çifte yarıgrubunun (üçlü işlemi $T(a,b,c) = ab + c$ biçiminde tanımlı bir üçlü halkadan elde edilmiş) düzlemsel halka olması için gerek ve yeter koşullar şunlardır:

1) Verilen her $a,b,c,d \in S$, $a \neq c$ için,

$$ax + b = cx + d$$

olacak biçimde bir tek $x \in S$ vardır.

2) Verilen her $a,b,c,d \in S$, $a \neq c$ için,

$$xa + y = b$$
$$xc + y = d$$

sisteminin bir tek $(x,y) \in S^2$ çözümü vardır.

İspat: $(S,+,.)$ çifte yarıgrubu düzlemsel halka olsun. (S,T) üçlü halkasını düşünelim. T4 gereğince her $a,b,c,d \in S$ $(a \neq c)$ için $T(a,x,b) = T(c,x,d)$ olacak şekilde bir tek $x \in S$ vardır. Burada T nin tanımını kullanırsak $ax + b = cx + d$ dir ve bu eşitliğin bir tek $x \in S$ çözümü vardır dolayısıyla 1) sağlanır. T5 gereğince her $a,b,c,d \in S$ $(a \neq c)$ için $T(x,a,y) = b$ ve $T(x,c,y) = d$ olacak biçimde bir tek $(x,y) \in S^2$ vardır. Yine T nin tanımından $xa + y = b$ ve $xc + y = d$ sisteminin bir tek $(x,y) \in S^2$ çözümü vardır, böylece 2) koşulu sağlanır.

Karşıt olarak, $(S,+,.)$ sistemi 1) ve 2) koşullarını sağlasın. Bu sistem her $a,b,c \in S$ için $T'(a,b,c) = ab + c$ ile birleştirilirse S nin, (x,y) biçiminde gösterilen ikilileri bir projektif düzlemin ideal olmayan noktalarını ve $[a,b]$ biçiminde gösterilen ikilileri bu projektif düzlemin (∞) ideal noktasından geçmeyen doğrularını göstermekte kullanılabilir. $(x,y)o[a,b] \Leftrightarrow y=ax+b$ şeklinde tanımlanırsa 1) koşulu, ideal noktalardan birinde kesişmeyen iki doğrunun bir tek ortak noktasının varlığını gösterir.

$[a,b] \wedge [c,d] = (x,y)$ olsun.

$$(x,y)o[a,b] \Leftrightarrow y = ax + b$$

ve

$$(x,y)o[c,d] \Leftrightarrow y = cx + d$$

olduğundan

$$ax + b = cx + d \qquad (2.1)$$

dir. 1) den (2.1) denkleminin bir tek $x \in S$ çözümünün varlığı bilindiğine göre T' tanımından $T'(a,x,b) = T'(c,x,d)$ nin bir tek $x \in S$ çözümü vardır ve T4 özelliği sağlanır.

2) koşulu, ideal olmayan farklı iki noktayı birleştiren bir tek doğrunun varlığını gösterir.

$(x,y) \vee (x',y') = [a,b]$ olsun.

$$(x,y)\,o\,[a,b] \Leftrightarrow y = ax + b$$

$$(x',y')\,o\,[a,b] \Leftrightarrow y' = ax' + b \qquad (2.2)$$

olur. 2) den (2.2) sisteminin bir tek $(a,b) \in S^2$ çözümü olduğuna göre yine T' nün tanımından $T'(a,x,b) = y$ ve $T'(a,x',b) = y'$ olacak şekilde bir tek $(a,b) \in S^2$ vardır ve T5 özelliği sağlanır. $(S,+,.)$ nın yarıgrup özelliğinden $\alpha + x = \beta$ ifadesinin bir tek $x \in S$ çözümü olduğundan $ab + x = c$ nin dolayısıyla $T'(a,b,x) = c$ nin de bir tek $x \in S$ çözümü vardır. Bu ise T3 özelliğidir. $(S,+,.)$ çifte yarıgrup olduğundan $(S,+)$ birim elemanı 0 ve $(S-\{0\},.)$ birim elemanı 1 olan birer yarıgruptur. Dolayısıyla her $x \in S$ için $x = x.1 = 1.x$ ve $1.x + 0 = x.1 + 0 = x$ ve buradan $T'(1,x,0) = T'(x,1,0) = x$ dir bu da T2 özelliğidir. Son olarak $a,b,c \in S$ için $0.b + c = c$ ve $a.0 + c = c$ olduğu düşünülürse, $T'(0,b,c) = c = T'(a,0,c)$ olup T1 özelliği sağlanır. T1,...,T5 özellikleri sağlandığından $(S,+,.)$ çifte yarıgrubu bir düzlemsel halkadır ■

Eğer $(S,+,.)$ düzlemsel halkasının cebirsel yapısı çifte yarıgrup özelliklerinden başka standart özelliklere sahip değilse, bu düzlemsel halkaya karşılık gelen projektif düzlem hiç bir (M,e) ikilisi için (M,e)-geçişken olmaz.

Lineer olmayan herhangi (S,T) üçlü halkasından da Tanım 2.1.3 de belirtilen şekilde bir $(S,+,.)$ cebirsel yapısı elde edilebilir. Fakat bu çalışmada, sadece çifte yarıgrup örneği verilirken lineer olmayan bir üçlü halka ile çalışılacak, bunun dışında böyle yapılar incelenmeyecektir. Çünkü bu özel hal dışında lineer olmayan cebirsel yapıları projektif düzlemlerle birleştirmek anlamlı olmayabilmektedir (Yaqub,1968)

Çifte-yarıgrup üzerinde bir projektif düzlem örneği 6.3 nolu kesimde verilecektir.

3. KARTEZYEN GRUPLAR ÜZERİNDE PROJEKTİF DÜZLEMLER

3.1. Kartezyen Gruplar

Tanım 3.1.1: (S,T) bir lineer üçlü halka olsun. (S,T) lineer üçlü halkasında + işlemi asosyatif ise, (S,T) ye bir kartezyen grup denir.

Aşağıdaki teorem kartezyen grupların, çifte yarıgruplardan daha çok cebirsel özelliğe sahip düzlemsel halkalardan ilki olduğunu ifade etmektedir.

Teoerm 3.1.1: Herhangi bir (S,+,.) çifte yarıgrubunun $T(a,b,c) = ab + c$ üçlü işlemi ile birleştirilmesinden elde edilen (S,T) ikilisinin kartezyen grup olması için gerek ve yeter koşullar şunlardır:

1) (S,+,.) bir düzlemsel halkadır (Teorem 2.1.3 deki 1) ve 2) koşulları sağlanır).
2) + işlemi asssosyatiftir.

İspat: (S,T) ikilisi bir kartezyen grup olsun. $T(a,b,c)=ab+c$ olmak üzere (S,T) bir lineer üçlü halkadır. T4 ve lineerlikten her $a,b,c,d \in S$, $(a \neq c)$ için $ax + b = cx + d$ olacak biçimde bir tek $x \in S$ vardır. Benzer şekilde, T5 ve lineerlikten her $a,b,c,d \in S$, $(a \neq c)$ için $xa + y = b$, $xc + y = d$ sisteminin bir tek $(x,y) \in S^2$ çözümü vardır. Teorem 2.1.3 den, (S,+,.) bir düzlemsel halkadır. Kartezyen grup tanımından ise + işlemi assosyatiftir.

Karşıt olarak (S,+,.) bir çifte-yarıgrup iken 1) ve 2) koşulları sağlansın. (S,+,.) bir düzlemsel halka iken $T(a,b,c) = ab + c$ işlemiyle elde edilen (S,T) ikilisinin bir lineer üçlü halka olduğu Teorem 2.1.2 den bilinmektedir. + işlemi de assosyatif olduğundan (S,T) bir kartezyen gruptur ■

Dolayısıyla "+ işlemi assosyatif olan bir düzlemsel halkaya kartezyen grup denir" ifadesini de rahatlıkla kullanabiliriz.

Kartezyen grup ile ilgili buraya kadar verilen bilgileri birleştirirsek şu sonucu yazabiliriz:

Sonuç 3.1.2: Herhangi bir $(S,+,.)$ cebirsel yapısının

$$T(a,b,c) = ab + c$$

üçlü işlemiyle birleştirilmesinden elde edilen (S,T) ikilisinin kartezyen grup olması için,

1) $(S,+)$ nın, birim elemanı 0 olan, bir grup olması,
2) $(S-\{0\},.)$ nın, birim elemanı 1 olan, bir yarıgrup olması,
3) Her $x \in S$ için $0.x = x.0 = 0$ olması,
4) Verilen her $a,b,c,d \in S$, $a \neq c$ için

$$ax + b = cx + d$$

olacak biçimde bir tek $x \in S$ çözümünün bulunması,

5) Verilen her $a,b,c,d \in S$, $a \neq c$ için

$$xa + y = b$$
$$xc + y = d$$

sisteminin bir tek $(x,y) \in S^2$ çözümünün bulunması, gerek ve yeterdir.

Kartezyen gruplar $((\infty),[\infty])$-Dezargsel olan projektif düzlemler belirtirler.

3.2. Kartezyen Grup Örnekleri

Şimdi iki tane kartezyen grup örneği verelim.

Örnek 3.2.1 (Spencer, 1960): $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi ve $+$, $\mathbb{R}$ üzerinde bilinen toplama işlemi olsun. $\circledcirc$ işlemi ise her $x,y \in \mathbb{R}$ için

$$x \circledcirc y = \begin{cases} xy & , \quad xy \geq 0 \text{ iken} \\ xy^2 & , \quad x < 0 \text{ ve } y > 0 \text{ iken} \\ x^2y & , \quad x > 0 \text{ ve } y < 0 \text{ iken} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. $(\mathbb{R},+,\circledcirc)$ sisteminin bir kartezyen grup olduğunu fakat çarpmanın komutatifliği dışında birleşimi veya toplama üzerine dağılması gibi standart özelliklerden hiç birini sağlamadığını gösterelim.

$(\mathbb{R},+)$ nın, birim elemanı 0 olan bir grup olduğu aşikardır. $(\mathbb{R}-\{0\},\Theta)$ nın bir yarıgrup olduğunu gösterelim.

(i) $a,b \in \mathbb{R}-\{0\}$ için $a\Theta x = b$ (3.1)

denkleminin bir tek $x \in \mathbb{R}$ çözümünün varlığını inceleyelim.

$a > 0$ ve $b > 0$ iken $ax = b$ ise $x = a^{-1}b > 0$ tek çözümdür. $a^2x = b$ olsa idi $x = (a^2)^{-1}b > 0$ olduğundan $x < 0$ çözümü mevcut olmazdı.

$a < 0$ ve $b > 0$ ise, $ax = b$ ve buradan $x = a^{-1}b < 0$ tek çözümdür. Oysa $ax^2 = b$ iken $x^2 = a^{-1}b$ ve $x = \pm\sqrt{a^{-1}b}$ olurdu. $a^{-1}b < 0$ olduğundan böyle bir çözüm varolamaz.

$a > 0$ ve $b < 0$ ise, $ax = b$ den $x = a^{-1}b < 0$ çözüm olamaz. $a^2x = b$ ise, $x = (a^2)^{-1}b < 0$ tek çözümdür.

$a < 0$ ve $b < 0$ ise, $ax = b$ ve $x = a^{-1}b > 0$ olur. Dolayısıyla x çözüm olamaz. Fakat $ax^2 = b$ ise, $x = \pm\sqrt{a^{-1}b}$ olduğundan $x = \sqrt{a^{-1}b} > 0$ tek çözümdür. Böylece (3.1) in bir tek x çözümü vardır.

Kartezyen grup koşulları arasında olmamasına karşın bu işlem komutatiftir. Şöyleki,

$x,y \geqslant 0$ veya $x,y \leqslant 0$ iken, $xy \geqslant 0$ olduğundan $x\Theta y = xy = yx = y\Theta x$ dir. $x > 0$ ve $y < 0$ ise, $x\Theta y = x^2y = yx^2 = y\Theta x$ dir. Ve nihayet $x < 0$ ve $y > 0$ iken, $x\Theta y = xy^2 = y^2x = y\Theta x$ olduğundan her $x,y \in \mathbb{R}$ için $x\Theta y = y\Theta x$ dir.

(ii) Θ işlemi komutatif olduğundan $a\Theta x = b$ denkleminin bir tek çözümü var iken $x\Theta a = b$ nin de bir tek $x \in \mathbb{R}$ çözümü vardır.

(iii)
$$1\Theta x = \begin{cases} 1x & , \quad x \geqslant 0 \\ 1^2 x & , \quad x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x & , \quad x \geqslant 0 \\ x & , \quad x < 0 \end{cases} = x$$

olduğundan $(\mathbb{R}-\{0\},\Theta)$, birim elemanı 1 olan, bir yarıgruptur. Ayrıca her $x \in \mathbb{R}$ için $0\Theta x = 0x = 0 = x0 = x\Theta 0$ dır

Her $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $a \neq c$ için,

$$a\Theta x + b = c\Theta x + d \tag{3.2}$$

eşitliğinin bir tek $x \in \mathbb{R}$ çözümünü araştıralım.

$$a\Theta x + b = \begin{cases} ax + b & , \quad ax \geqslant 0 \text{ iken} \\ a^2 x + b & , \quad a > 0 \text{ ve } x < 0 \text{ iken} \\ ax^2 + b & , \quad a < 0 \text{ ve } x > 0 \text{ iken} \end{cases}$$

$$c\Theta x + d = \begin{cases} cx + d & , \quad cx \geqslant 0 \text{ iken} \\ c^2 x + d & , \quad c > 0 \text{ ve } x < 0 \text{ iken} \\ cx^2 + d & , \quad c < 0 \text{ ve } x > 0 \text{ iken} \end{cases}$$

ifadeleri yardımıyla çeşitli halleri inceleyelim.

$a = 0$ iken, $b = c\Theta x + d \Rightarrow c\Theta x = b-d$ ve $c = 0$ iken, $a\Theta x + b = d \Rightarrow a\Theta x = d-b$ eşitliklerinin bir tek çözümlerinin varlığını yarıgrup özelliklerinden söyleyebiliriz.

$a > 0$ ve $c > 0$ olsun.

$ax + b = cx + d$, $(x \geqslant 0)$ veya $a^2 x + b = c^2 x + d$, $(x < 0)$ eşitlikleri vardır.

Eğer $(d-b)(a-c)^{-1} \geqslant 0$ ise, birinci eşitliğin bir tek $x = (d-b)(a-c)^{-1}$ çözümü vardır. Aksi takdirde $x = (d-b)(a^2-c^2)^{-1}$ ikinci eşitliğin tek çözümüdür.

$a < 0$ ve $c > 0$ olsun. $ax + b = c^2 x + d$, $(x < 0)$ veya $ax^2 + b = cx + d$, $(x > 0)$ eşitliklerinin çözümüne bakalım. $d-b > 0$ ise birinci eşitliğin ve $d-b < 0$ ise ikinci eşitliğin bir tek çözümü

$$xa + y = b$$
$$xc + y = d \quad , \ (x > 0)$$

sisteminin bir tek çözümü vardır.

$a > 0$ ve $c < 0$ iken, $b-d < 0$ olması halinde

$$xa^2 + y = b$$
$$xc + y = d \ , \ (x < 0)$$

sisteminin bir tek çözümü varken, $b-d > 0$ ise,

$$xa + y = b$$
$$x^2c + y = d \ , \ (x > 0)$$

sisteminin bir tek çözümü vardır.

$a < 0$ ve $c > 0$ ise, $b-d > 0$ iken

$$xa + y = b$$
$$xc^2 + y = d \ , \ (x < 0)$$

sisteminin ve $b-d < 0$ iken,

$$x^2a + y = b$$
$$xc + y = d \ , \ (x > 0)$$

sisteminin birer tek çözümleri vardır.

$a < 0$ ve $c < 0$ olması halinde, $(b-d)(a-c)^{-1} < 0$ ise,

$$xa + y = b$$
$$xc + y = d$$

sisteminin bir tek çözümü vardır. Eğer $(b-d)(a-c)^{-1} > 0$ ise,

$$x^2a + y = b$$
$$x^2c + y = d$$

sisteminin bir tek (x,y) çözümü olduğundan (3.3) sisteminin, her durumda bir tek çözümü vardır. Dolayısıyla $(\mathcal{R},+,\odot)$ bir kartezyen gruptur. Bu sistemde çarpımın, birleşme ve toplama üzerine dağılma özelliklerinin sağlanmadığını birer örnek ile gösterelim.

$$(2\odot(-3))\odot(-2) = (-12)\odot(-2) = 24$$

ve

$$2\odot((-3)\odot(-2)) = 2\odot 6 = 12$$

dir.

$$2\theta(-5+3) = 2\theta(-2) = -8$$

ve

$$2\theta(-5) + 2\theta 3 = -20 + 6 = -14$$

dır.

$$(-2+1)\theta 3 = (-1)\theta 3 = -9$$

ve

$$(-2)\theta 3 + 1\theta 3 = -18 + 3 = -15$$

dır.

Örnek 3.2.2: En küçük kartezyen grup(Panella, 1965)

$F_5 = \{0,1,2,3,4\}$, 5 in kalanlarından oluşan küme olmak üzere F_5 üzerinde + ye , işlemleri sırasıyla 5 modülüne göre toplama ve çarpma işlemleri iken $(F_5,+,.)$ bir cisimdir. $S = F_5 x F_5 = \{\ (x,y)\ :\ x,y \in F_5\}$ üzerinde $\oplus$ ve θ işlemlerini aşağıdaki biçimde tanımlayalım:

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$$

$$(a,b)\theta(c,d) = \begin{cases} (a,b)*(c,d) & ,\ b = 0 \text{ veya } (bc-ad)^2-2d^2 = 0,1,4 \text{ iken} \\ -(a,b)*(c,d) & ,\ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Burada $*$ işlemi de

$$(a,b)*(c,d) = \begin{cases} (a.c, a.d) & b = 0 \text{ iken} \\ (a.c-b^{-1}.d.(a^2-2), b.c-a.d)\ , & b \neq 0 \text{ iken} \end{cases}$$

ile belirli olsun. Böyle belirlenen $(S, \oplus, \theta)$ sisteminin bir kartezyen grup olduğunu gösterelim.

$(S, \oplus)$, birim elemanı (0,0) olan, bir değişmeli gruptur.

(S,θ) nın özelliklerinin kolayca görülebilmesi için θ işlemine ilişkin çizelgeyi verelim. Bu çizelgede kısalık sağlamak için her $(x,y) \in S$ elemanı için xy gösterimi kullanılacaktır. Örneğin i. satırın başındaki (a,b) ve j.sütunun başındaki (c,d) elemanları sırasıyla ab ve cd olarak yazılacak ve eğer $(a,b)\theta(c,d) = (u,v)$ ise bu eleman çizelgede i.satır ve j. sütunda uv biçiminde gösterilecektir.

Çizelge 3.1

⊙	00	01	02	03	04	10	11	12	13	14	20	21	22	23	24	30	31	32	33	34	40	41	42	43	44
00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00
01	00	30	10	40	20	01	21	14	44	31	02	33	42	12	23	03	32	43	13	22	04	24	11	41	34
02	00	40	30	20	10	02	43	22	32	13	04	14	31	21	44	01	11	34	24	41	03	42	23	33	12
03	00	10	20	30	40	03	12	33	23	42	01	41	24	34	11	04	44	21	31	14	02	13	32	22	43
04	00	20	40	10	30	04	34	41	11	24	03	22	13	43	32	02	23	12	42	33	01	31	44	14	21
10	00	01	02	03	04	10	11	12	13	14	20	21	22	23	24	30	31	32	33	34	40	41	42	43	44
11	00	14	23	32	41	11	30	21	43	03	22	31	10	01	42	33	13	04	40	24	44	02	12	34	20
12	00	34	13	42	21	12	41	30	01	22	24	02	32	44	10	31	40	11	23	03	43	33	04	20	14
13	00	24	43	12	31	13	23	04	30	44	21	10	41	33	03	34	02	22	14	40	42	11	20	01	32
14	00	44	33	22	11	14	02	42	24	30	23	43	04	10	34	32	21	40	01	12	41	20	31	13	03
20	00	02	04	01	03	20	22	24	21	23	40	42	44	41	43	10	12	14	11	13	30	32	34	31	33
21	00	22	44	11	33	21	04	32	40	12	42	30	03	24	14	13	41	31	02	20	34	43	10	23	01
22	00	12	24	31	43	22	40	03	14	34	44	23	30	13	01	11	04	42	20	32	33	21	41	02	10
23	00	42	34	21	13	23	31	11	02	40	41	04	12	30	22	14	33	20	43	01	32	10	03	44	24
24	00	32	14	41	23	24	13	40	33	01	43	11	21	02	30	12	20	03	34	44	31	04	22	10	42
30	00	03	01	04	02	30	33	31	34	32	10	13	11	14	12	40	43	41	44	42	20	23	21	24	22
31	00	23	41	14	32	31	42	10	22	04	12	44	34	03	20	43	30	02	21	11	24	01	33	40	13
32	00	13	21	34	42	32	24	44	03	10	14	01	43	20	33	41	22	30	12	04	23	40	02	11	31
33	00	43	31	24	12	33	10	02	41	21	11	32	20	42	04	44	01	13	30	23	22	34	14	03	40
34	00	33	11	44	22	34	01	23	10	43	13	20	02	31	41	42	14	24	03	30	21	12	40	32	04
40	00	04	03	02	01	40	44	43	42	41	30	34	33	32	31	20	24	23	22	21	10	14	13	12	11
41	00	11	22	33	44	41	03	13	31	20	32	12	01	40	21	23	34	10	04	43	14	30	24	42	02
42	00	31	12	43	24	42	32	01	20	11	34	40	14	22	02	21	03	33	41	10	13	44	30	04	23
43	00	21	42	13	34	43	14	20	04	33	31	03	23	11	40	24	10	44	32	02	12	22	01	30	41
44	00	41	32	23	14	44	20	34	12	02	33	24	40	04	13	22	42	01	10	31	11	03	43	21	30

(S−{(0,0)},⊙) sisteminin bir yarıgrup olduğunu gösterelim.

$$\alpha,\beta \in S-\{(0,0)\} \quad \text{için,}$$

$$\alpha \odot x = \beta \tag{3.4}$$

denkleminin bir tek $x \in S$ çözümü vardır. Çünkü, i.satırın başında bulunan bir α elemanı ve yine aynı satırda bir kez görülen β elemanı verildiğinde eğer β, i.satır ve j.sütundaki bir eleman ise j.sütunun başındaki eleman

(3.4) denkleminin bir tek $x \in S$ çözümüdür. Örneğin, $23\theta x = 12$ denkleminin bir tek $x = 22 \equiv (2,2) \in S$ çözümü vardır.

$\alpha, \beta \in S-\{(0,0)\}$ için, $x\theta\alpha = \beta$ denkleminin bir tek $x \in S$ çözümünün olduğunu, yukarıda satır ve sutünların rollerini değiştirerek söyleyebiliriz.

Her $\alpha \in S$ için,

$$10\theta\alpha = \alpha\theta 10 = \alpha$$

olduğu çizelgeden görülmektedir. Dolayısıyla $(S-\{(0,0)\},\theta)$ bir yarıgruptur.

Her $\alpha \in S$ için,

$$00\theta\alpha = \alpha\theta 00 = 00$$

olduğu yine çizelgeden görülmektedir.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in S$ ve $\alpha \neq \beta$ için,

$$\alpha\theta x \oplus \gamma = \beta\theta x \oplus \delta \qquad (3.5)$$

denkleminin S üzerinde bir tek çözümünün olduğunu çizelgeden görebilmek için bu ifadeyi, $(S, \oplus)$ nın grup özelliklerinden,

$$(\alpha\theta x)-(\beta\theta x) = \mu$$

biçiminde yazalım. Çizelgede, α ve β nın bulunduğu satırlarda olup aynı sütunda bulunan eleman çiftlerinin farkı μ olan sütun bir tek tanedir. Çünkü bu farklar her sütun için farklı elemanlar vermektedir. Bu sütunun başında bulunan elemanda (3.5) denkleminin aranan tek çözümüdür. Bir örnek verelim:

$$12\theta x \oplus 32 = 13\theta x \oplus 41$$

denkleminin bir tek $x = 33 \equiv (3,3) \in S$ çözümü vardır.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in S$, $\alpha \neq \beta$ için,

$$x\theta\alpha \oplus y = \gamma$$

$$x\theta\beta \oplus y = \delta \qquad (3.6)$$

sisteminin bir tek $(x,y) \in S^2$ çözümünün olduğunu görebilmek için bu ifadeyi, (S, $\oplus$) nın grup olma özelliğinden,

$$(x\theta\alpha)-(x\theta\beta) = \gamma-\delta = \mu \tag{3.7}$$

ve

$$y = \gamma-(x\theta\alpha) \tag{3.8}$$

biçiminde yazalım. (3.5) denkleminin çözümünde satır ve sütunların rollerini değiştirerek (3.7) denkleminin bir tek $x \in S$ çözümünün olduğunu söyleyebiliriz. $x \in S$ bulunduktan sonra, (S, $\oplus$) nın grup olması nedeniyle, (3.8) eşitliği yardımıyla bir tek $y \in S$ hemen bulunabilir. Dolayısıyla (3.6) sisteminin bir tek $(x,y) \in S^2$ çözümü mevcuttur. Örneğin,

$$x\theta 24 \oplus y = 43$$
$$x\theta 30 \oplus y = 11$$

sisteminin bir tek $(x,y) = (31,23) \equiv ((3,1),(2,3)) \in S^2$ çözümü vardır.

Yukarıda verdiğimiz kartezyen grup örneğinde, θ işleminin değişme ve birleşme özelliklerini sağlamadığı gibi her iki dağılma özelliğinin de gerçeklenmediğini birer örnek ile gösterelim.

$$41\theta 24 = 21$$

$$24\theta 41 = 04$$

dür.

$$12\theta(30\theta 42) = 12\theta 21 = 02$$

$$(12\theta 30)\theta 42 = 31\theta 42 = 33$$

dür.

$$(31 \oplus 04)\theta 11 = 30\theta 11 = 33$$

$$(31\theta 11) \oplus (04\theta 11) = 42\oplus 34 = 21$$

dir.

$$21\theta(03 \oplus 41) = 21\theta 44 = 01$$

$$(21\theta 03) \oplus (21\theta 41) = 11 \oplus 43 = 04$$

dür. Bu örnekle tanıtılan kartezyen grup bilinen en az elemanlı kartezyen gruptur.

4. YARICİSİMLER ÜZERİNDE PROJEKTİF DÜZLEMLER

4.1. Sol Yarıcisimler Üzerinde Projektif Düzlemler

Tanım 4.1.1: Soldan dağılma özelliği bulunan herhangi bir kartezyen gruba sol yarıcisim denir.

Teorem 4.1.1: Herhangi bir $(S,+,.)$ sisteminin $T(a,b,c) = ab+c$ üçlü işlemiyle birleştirilmesinden elde edilen (S,T) ikilisinin sol yarıcisim olması için gerek ve yeter koşullar,

(i) $(S,+)$ nın, birim elemanı 0 olan, bir grup olması,

(ii) $(S-\{0\},.)$ nın, birim elemanı 1 olan, bir yarıgrup olması,

(iii) Her $x \in S$ için $0.x = 0$ olması,

(iv) Her $x,y,z \in S$ için, $x.(y+z) = x.y + x.z$ olması

(v) $a \neq b$ olmak üzere verilen her $a,b,c \in S$ için,

$-a.x + b.x = c$ denkleminin bir tek $x \in S$ çözümünün bulunmasıdır.

İspat: (S,T) ikilisi bir sol yarıcisim olsun. T1-T5 özellikleri sağlanır. Üstelik bir sol yarıcisim aynı zamanda soldan dağılma özelliği bulunan bir kartezyen grup olduğundan, (i),(ii),(iii) ve (iv) özellikleri sağlanır. T4 düşünülerek T nin tanımı uygulanırsa, $ax + b = cx + d$, dolayısıyla $-ax + cx = b-d = e$ denkleminin bir tek $x \in S$ çözümü vardır ve (v) sağlanır.

Karşıt olarak (S,T) sistemi (i)-(v) özelliklerini sağlasın. Her $x \in S$ için $1 + 0 = 1$ olduğu ve (iv) dikkate alınırsa, $x = x.1 = x.(1+0) = x.1 + x.0 = x + x.0$ ve buradan $x.0 = 0$ dır. O halde $x.0 = 0.x = 0$ olur. T1-T5 özelliklerinin sağlandığını gösterirken T nin tanımı sürekli kullanılacaktır.

Her $a,b,c \in S$ için $0.b + c = a.0 + c = c$ olduğundan, $T(0,b,c) = T(a,0,c) = c$ dir ve T1 sağlanır. Ayrıca $1.a = a.1 = a$ olduğundan $1.a + 0 = a.1 + 0 = a$ olur ve $T(1,a,0) = T(a,1,0) = a$ olup T2 geçerlidir. $(S,+)$ grup olduğundan $a.b + x = c \Rightarrow x = c-ab$ dir ve

$T(a,b,x) = c$ olacak biçimde bir tek $x \in S$ vardır, dolayısıyla T3 sağlanır. Üstelik $+$ işlemi birleşimlidir. $T(a,x,b) = T(c,x,d) \Rightarrow ax + b = cx + d$ dir. Grup özelliklerinden $-cx + ax = d-b$ elde edilir ve (v) gereğince böyle bir tek $x \in S$ vardır. Böylece T4 sağlanır. T5 özelliğini göstermeden önce $(S,+,.)$ nın bir başka basit özelliğini belirleyelim.

$0 = x.0 = x(y + (-y)) = x.y + x.(-y)$ olduğundan her $x,y \in S$ için $-(xy) = x(-y)$ dir ve genelde $-(xy)$ yerine $-xy$ yazılır.

T5 özelliği $a \neq c$, $a,b,c,d \in S$ olmak üzere $T(x,a,y) = b$ ve $T(x,c,y) = d$ olacak biçimde bir tek $(x,y) \in S^2$ nin bulunması idi. Buradan $xa + y = b$ ve $xc + y = d$ dir. Sistemin çözümünden $xc-xa = d-b$ bulunur. Soldan dağılma özelliğinden ve az önce gösterilen özellikten dolayı $x(c-a) = d-b$ dir. $c-a = r$ ve $d-b = s$ alınırsa, $xr = s$ dir. Yarıgrup özelliklerinden bir tek $x \in S$ ve böylece $y \in S$ var olduğundan $(x,y) \in S^2$ tektir. O halde (S,T) ikilisi sol yarıcisimdir ∎

Sol yarıcisimlerin bazı özellikleri de şu şekilde sıralanabilir:

(a) Verilen herhangi $a,b \in S$, $a \neq 1$ için $ax + b = x$ ve $xa+b = x$ denklemlerinin birer tek $x \in S$ çözümleri vardır.

(b) Her $x,y \in S$ için, $x + y = y + x$ dir.

Hall sistemleri diye bilinen bir sol yarıcisimler ailesi aşağıda verilmektedir.

Örnek 4.1.1 Hall Sistemleri (Hall, 1959): F herhangi bir cisim, $f(t) = t^2-rt-s$ de bu cisim üzerinde ikinci dereceden indirgenemez bir polinom olsun. (Yani, her $a \in F$ için $f(a) \neq 0$ dır).

$S = \{a + \lambda b \,:\, a,b \in F \,,\, \lambda \notin F\}$, olmak üzere,

$$(a + \lambda b) \oplus (c + \lambda d) = (a + c) + \lambda(b + d) \tag{4.1}$$

$$(a + \lambda b) \odot (c + \lambda d) = \begin{cases} ac + \lambda(ad) & , b = 0 \text{ iken} \\ ac-b^{-1}df(a) + \lambda(bc-ad + rd) & , b \neq 0 \text{ iken} \end{cases} \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlansın. $(S,\oplus,\odot)$ sisteminin bir sol yarıcisim olduğunu göstermek istiyoruz. Fakat önce şu özel haller üzerinde duralım.

Her $k \in F$, $z \in S$ için,

$$k \Theta z = z \Theta k \tag{4.3}$$

olduğunu gösterelim.

$k = 0$ ve $z = a + \lambda b$ ise, $0 \Theta z = 0 \Theta (a + \lambda b) = 0a+\lambda(0b) = 0$ ve $z\Theta 0 = (a + \lambda b)\Theta 0 = 0$ olduğundan, $0\Theta z = z\Theta 0$ dır.

$k \in F$, $k \neq 0$ ve $z = a + \lambda b$ ise, $k\Theta z = k\Theta(a + \lambda b) = ka + \lambda(kb)$ dır ve $z\Theta k = (a + \lambda b)\Theta k = ak + \lambda(bk)$ olması nedeniyle $z\Theta k = k\Theta z$ dir. Fakat örneğimizin son kısımlarında gösterileceği gibi, genelde $x,y \in S$ için, $x\Theta y \neq y\Theta x$ dir.

$k \in F$ ve $z,w \in S$ için,

$$(z\Theta w)\Theta k = z\Theta(w\Theta k) = z\Theta(k\Theta w)$$

olduğunu gösterelim. (4.3) den $z\Theta(w\Theta k) = z\Theta(k\Theta w)$ dır. O halde $(z\Theta w)\Theta k = z\Theta(k\Theta w)$ eşitliğini göstermeliyiz.

$z = a + \lambda b$, $w = c + \lambda d$ olsun.

$$(z\Theta w)\Theta k = k\Theta(z\Theta w) = k\Theta \begin{cases} ac + \lambda(ad) & , b = 0 \text{ iken} \\ ac-b^{-1}df(a) + \lambda(bc-ad + rd) & , b \neq 0 \text{ iken} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} kac + \lambda(kad) & , b=0 \text{ iken} \\ kac-kb^{-1}df(a) + \lambda(kbc-kad + krd) & , b\neq 0 \text{ iken} \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} z\Theta(k\Theta w) &= (a + \lambda b)\Theta(k\Theta(c + \lambda d)) \\ &= (a + \lambda b)\Theta(kc + \lambda(kd)) \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} akc+ \lambda(akd) & , b = 0 \text{ iken} \\ akc-b^{-1}kdf(a) + \lambda(bkc-akd + rkd) & , b \neq 0 \text{ iken} \end{cases} \tag{4.5}$$

dır. (4.4) ve (4.5) den, $b = 0$ iken

$$kac + \lambda(kad) = akc + \lambda(akd)$$

ve $b \neq 0$ iken,

$$kac -kb^{-1}df(a) + \lambda(kbc-kad + krd) = akc-b^{-1}kdf(a)+\lambda(bkc-akd+rkd)$$

dir. Şimdi $z^2 = z\Theta z$ olmak üzere, her $z \in S$, $z \notin F$ için $z^2-rz-s = 0$

olduğunu gösterelim. (4.2) uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
z^2 = z\Theta z &= (a+\lambda b)\Theta(a+\lambda b)\\
&= a^2-f(a)+\lambda(rb)\\
&= a^2-(a^2-ra-s)+\lambda(rb)\\
&= ra+\lambda(rb)+s\\
&= r(a+\lambda b)+s\\
&= rz+s
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan,

$$z^2 = rz+s \quad \text{ve} \quad z^2-rz-s=0$$

bulunur.

Artık sol yarıcisim aksiyomlarına geçebiliriz.

$(S,\oplus)$ birim elemanı $0 = 0+\lambda 0$ olan, bir değişmeli gruptur. $1+0\lambda = 1$ olmak üzere, (4.2) den her $a+\lambda b \in S$ için,

$$(a+\lambda b)\Theta(1+\lambda 0) = a+\lambda b = (1+\lambda 0)\Theta(a+\lambda b)$$

dir ve $1+\lambda 0 = 1$ çarpımsal birim elemandır.

$a+\lambda b \neq 0$ olmak üzere,

$$(a+\lambda b)\Theta(x+\lambda y) = (c+\lambda d) \tag{4.6}$$

denkleminin bir tek $x+\lambda y \in S$ çözümünün varlığını gösterelim.

$b = 0$ ve $a \neq 0$ iken,

$$(a+\lambda 0)\Theta(x+\lambda y) = (ax+\lambda(ay)) = (c+\lambda d)$$

eşitliklerinden, $ax = c$ ve $ay = d$ elde edilir. Dolayısıyla, $x+\lambda y = a^{-1}c+\lambda(a^{-1}d)$ (4.6) nın tek çözümüdür.

$b \neq 0$ iken,

$$
\begin{aligned}
(a+\lambda b)\Theta(x+\lambda y) &= ax-b^{-1}yf(a)+\lambda(bx-ay+ry)\\
&= (c+\lambda d)
\end{aligned}
$$

dir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
ax-b^{-1}yf(a) &= c\\
bx-ay+ry &= d
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

denklem sistemi elde edilir. (4.7) sisteminin bir çözümünün olabilmesi için,

$$\begin{vmatrix} a & -b^{-1}f(a) \\ b & -a+r \end{vmatrix} \neq 0$$

olması gerek ve yeterdir.

$$\begin{vmatrix} a & -b^{-1}f(a) \\ b & -a + r \end{vmatrix} = a(-a + r) + bb^{-1}f(a)$$

$$= -a^2 + ar + a^2 - ra - s$$

$$= -s$$

olduğundan $-s \neq 0$ olmalı. Oysa $s = 0$ olsa idi, $f(t) = t^2 - rt$ indirgenebilir olurdu ki bu hipotezle çelişir. Bu nedenle (4.7) sisteminin ve dolayısıyla (4.6) nın bir tek $x + \lambda y$ çözümü vardır.

Şimdi $a + \lambda b \neq 0$ için,

$$(x + \lambda y)\theta(a + \lambda b) = (c + \lambda d) \qquad (4.8)$$

denkleminin bir tek çözümüne bakalım.

$b = 0$ iken, $a \neq 0$ ve $(x + \lambda y)\theta(a + \lambda 0) = c + \lambda d$ dir. Bu denklemi $y = 0$ ve $y \neq 0$ için ayrı ayrı incelemeliyiz.

$y = 0$ ise,

$$(x + \lambda 0)\theta(a + \lambda 0) = c + \lambda d$$

$$\Rightarrow \quad xa = c \text{ ve } 0 = d$$

$$\Rightarrow \quad x = ca^{-1} \text{ ve } x + \lambda y = ca^{-1} + \lambda 0 \text{ tek çözümdür.}$$

Eğer $b = 0$, $d = 0$ iken $y \neq 0$ ise,

$$(x + \lambda y)\theta a = c \quad \Rightarrow xa - \lambda(ya) = c$$

olur. Buradan $xa = c$ ve $ya = 0$ elde edilir. Bu ise $y \neq 0$ ve $a \neq 0$ ile çeliştiğinden çözüm yoktur.

$a = 0$ iken $b \neq 0$ ve $(x + \lambda y)\theta\lambda b = c + \lambda d$ dir. Bu halde, eğer $y = 0$ ise,

$$x\theta\lambda b = c + \lambda d \quad \Rightarrow \lambda(xb) = c + \lambda d$$

olduğundan, $c = 0$ ve $xb = d$ olur. Böylece $y = 0$ iken, $c = 0$ olup $x + \lambda y = db^{-1}$ tek çözümdür.

Eğer $y \neq 0$, $a = 0$ ve $c = 0$ ise,

$$(x + \lambda y)\Theta\lambda b = \lambda d$$

$$\Rightarrow \quad -y^{-1}bf(x) + \lambda(-xb + rb) = \lambda d$$

$$\Rightarrow \quad -y^{-1}bf(x) = 0 \text{ ve } -xb + rb = d$$

olur. Oysa $y \neq 0$, $b \neq 0$ ve $f(x) \neq 0$ olduğundan. bu durumda çözüm yoktur.

$a \neq 0$, $b \neq 0$ iken $y = 0$ ise,

$$x\Theta(a + \lambda b) = c + \lambda d$$

$$\Rightarrow \quad xa + \lambda(xb) = c + \lambda d$$

$$\Rightarrow \quad x = ca^{-1} = db^{-1}$$

olur. Demek ki bu durumda bir tek çözümün olabilmesi için gerek ve yeter koşul $ca^{-1} = db^{-1}$ olmasıdır.

$y \neq 0$ ve $ca^{-1} = db^{-1}$ ise,

$$(x + \lambda y)\Theta(a + \lambda b) = c + \lambda d$$

$$\Rightarrow \quad xa-y^{-1}bf(x)+ \ \lambda(ya-xb + rb) = c + \lambda d$$

olup,

$$\begin{aligned} xa-y^{-1}bf(x) &= c \\ ya-xb + rb &= d \end{aligned} \qquad (4.9)$$

dir. (4.9) sistemindeki birinci denklem y ile, ikinci denklem x ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} -b(x^2-xr-s) + x^2b-xrb &= bs \\ &= cy-dx \end{aligned} \qquad (4.10)$$

bulunur. (4.10) ile (4.9) daki ikinci denklem birleştirilirse,

$$\begin{aligned} cy-dx &= bs \\ ay-bx &= d-rb \end{aligned} \qquad (4.11)$$

olur. $b \neq 0$ olduğundan ikinci denklemi db^{-1} ile çarpıp birinci denklemden çıkaralım,

$$y(c-db^{-1}a) = bs-d^2b^{-1} + dr$$

$$\Rightarrow \quad y(bc-da) = b^2s-d^2 + bdr = -b^2(d^2b^{-2}-b^{-1}dr-s)$$

$$\Rightarrow \quad y(bc-da) = -b^2f(db^{-1}) \qquad (4.12)$$

olur. $b \neq 0$ ve $f(t)$, F üzerinde indirgenemez polinom olduğundan, sağ taraf daima sıfırdan farklıdır. Eğer $ca^{-1} = db^{-1}$ ise, $c = db^{-1}a$ ve $cb = da$ dır. Bu durumda $y(bc-da) = 0$ olur. Dolayısıyla çözüm yoktur.

Bir tek çözümün varlığı ile ilgili, incelenmesi gereken diğer halleri şu şekilde özetleyebiliriz.

(4.11) sistemini gözönüne alalım: Eğer $b = 0$ ise $cy = dx$ ve $ay = d$ elde edilir. Bu nedenle $y = da^{-1}$ ve $x = cyd^{-1} = cda^{-1}d^{-1} = ca^{-1}$ dir. Dolayısıyla bir tek $x + \lambda y = ca^{-1} + \lambda(da^{-1})$ çözümü mevcuttur. $y = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $d = 0$ olmasıdır. Çünkü ancak bu durumda $y = 0$, $x = r$ tek çözümü bulunabilir. Eğer $y \neq 0$ iken, $a,b \neq 0$ ve $ca^{-1} \neq db^{-1}$ ise, (4.11) den $y(bc-da) = -b^2 f(db^{-1})$ elde edilir. Burada $bc-da \neq 0$, $-b^2 \neq 0$ ve $f(db^{-1}) \neq 0$ olduğundan bir tek $y = -b^2 f(db^{-1})(bc-da)^{-1}$ çözümü bulunabilir.

Ayrıntılı olarak yapılan bu incelemeye göre (4.8) denkleminin bir tek $x + \lambda y \in S$ çözümü vardır. Dolayısıyla $(S-\{0\},\odot)$, birim elemanı $1 + \lambda 0 = 1$ olan, bir yarı gruptur.

Her $a + \lambda b \in S$ için, $0 = 0 + \lambda 0$ olmak üzere,

$$(0 + \lambda 0)\odot(a + \lambda b) = 0a + \lambda(0b) = 0 + \lambda 0 = 0$$

dır.

Her $x,y,z \in S$ ve $y = a + \lambda b$, $z = c + \lambda d$ olmak üzere, $x\odot(y\oplus z)$ ifadesini gözönüne alalım. $x \in F$ ise $x = x + \lambda 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x\odot(y\oplus z) &= x\odot((a + c) + \lambda(b + d)) \\ &= x(a + c) + \lambda x(b + d) \\ &= xa + xc + \lambda(xb) + \lambda(xd) \\ &= xa + \lambda(xb) \oplus xc + \lambda(xd) \\ &= x\odot(a + \lambda b) \oplus x\odot(c + \lambda d) \\ &= (x\odot y) \oplus (x\odot z) \end{aligned}$$

dir.

Eğer $x \notin F$ ise, $q \neq 0$ olmak üzere $x = p + \lambda q$ dur. Buradan,

$$\begin{aligned} x\theta(y \oplus z) &= (p + \lambda q)\theta((a + \lambda b) \oplus (c + \lambda d)) \\ &= (p + \lambda q)\theta((a + c) + \lambda(b + d)) \\ &= p(a + c) - q^{-1}(b + d)f(p) + \lambda(q(a + c) - p(b + d) + r(b + d)) \\ &= (pa - q^{-1}bf(p) + \lambda(qa - pb + rb)) \oplus (pc - q^{-1}df(p) + \lambda(qc - pd + rd)) \\ &= ((p + \lambda q)\theta(a + \lambda b)) \oplus ((p + \lambda q)\theta(c + \lambda d)) \\ &= (x\theta y) \oplus (x\theta z) \end{aligned}$$

olur. O halde soldan dağılma özelliği sağlanır.

Son olarak, $\alpha \neq \beta$ iken,

$$-\alpha\theta z \oplus \beta \theta z = \gamma \tag{4.13}$$

denkleminin bir tek $z \in S$ çözümünün olduğunu gösterirsek $(S, \oplus, \theta)$ sisteminin bir sol yarıcisim olduğuna ilişkin ispatı tamamlamış oluruz. Bu denklemin çözülebilir olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü z ve w gibi farklı iki çözüm olsaydı,

$$-\alpha\theta z \oplus \beta\theta z = -\alpha\theta w \oplus \beta\theta w$$

$$\beta\theta(z-w) = \alpha\theta(z-w)$$

olurdu, oysa $(S-\{0\},\theta)$ yarıgrup olduğundan bu mümkün değildir.

$\alpha,\beta \in F$ ise, (4.3) den $-\alpha\theta z \oplus \beta\theta z = \gamma$ denklemi, $-z\theta\alpha \oplus z\theta\beta = \gamma$ biçiminde yazılabilir. Soldan dağılma özelliğinden $z\theta(-\alpha \oplus \beta) = \gamma$ dır.

$$(x + \lambda y)\theta(-\alpha + \beta) = c + \lambda d$$

$$\Rightarrow \quad x(-\alpha + \beta) + \lambda(y(-\alpha + \beta)) = c + \lambda d$$

olduğundan tek çözüm,

$$x + \lambda y = c(-\alpha + \beta)^{-1} + \lambda(d(-\alpha + \beta)^{-1})$$

dir.

$\beta \notin F$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde α ve γ, β cinsinden ifade edilebilir. $\alpha = k \in F$ olması halinde $\gamma_1, \gamma_2 \in F$ olmak üzere,

$\gamma = \gamma_1 + \beta\gamma_2$ ve $z = x + \beta y$ alınabilir.

$$-\alpha\Theta z \oplus \beta\Theta z = \gamma \Rightarrow -k\Theta(x+\beta y) \oplus \beta\Theta(x+\beta y) = \gamma_1 + \beta\gamma_2$$

$$\Rightarrow (-kx-\beta(ky)) \oplus (-yf(0) + \beta(x+ry)) = \gamma_1 + \beta\gamma_2$$

$$\Rightarrow (-kx-y(-s)) + \beta(-ky + x + ry) = \gamma_1 + \beta\gamma_2$$

olur. Buradan (4.13) e eşdeğer olan,

$$\begin{aligned} -kx + sy &= \gamma_1 \\ x + (r-k)\,y &= \gamma_2 \end{aligned} \tag{4.14}$$

sistemi bulunur.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -k & s \\ 1 & (r-k) \end{vmatrix} = k^2-kr-s = f(k)$$

dır. $f(t)$, F üzerinde indirgenemez polinom olduğu için, $\Delta = f(k) \neq 0$ olur ve dolayısıyla (4.14) sisteminin çözümü vardır.

$\alpha \notin F$ iken $b \neq 0$, $\alpha = a + \beta b$, $\gamma = \gamma_1 + \beta\gamma_2$ ve $z = x + \beta y$ alınırsa,

$$-\alpha\Theta z \oplus \beta\Theta z = \gamma \Rightarrow -(a+\beta b)\Theta(x+\beta y) \oplus \beta\Theta(x+\beta y) = \gamma_1 + \beta\gamma_2$$

$$\Rightarrow (-ax + b^{-1}yf(a) - \beta(bx-ay+ry)) \oplus (-yf(0) + \beta(x+ry)) = \gamma_1+\beta\gamma_2$$

$$\Rightarrow (-ax + b^{-1}y(a^2-ra-s) + ys) + \beta(-bx + ay-ry + x+ry) = \gamma_1+\beta\gamma_2$$

olur ve buradan,

$$\begin{aligned} -ax + (b^{-1}a^2-b^{-1}ra-b^{-1}s + s)y &= \gamma_1 \\ (1-b)x + ay &= \gamma_2 \end{aligned} \tag{4.15}$$

denklem sistemi elde edilir. (4.15) sisteminin çözülebilirliğini katsayılar determinantının sıfırdan farklı olduğunu göstererek belirleyebiliriz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -a & b^{-1}a^2-b^{-1}ra-b^{-1}s + s \\ (1-b) & a \end{vmatrix} = -b^{-1}[a^2-ra(1-b)-s(1-b)^2]$$

olur. Eğer $a = 0$ ve $b \neq 1$ ise $\Delta = -s(1-b)(1-b^{-1}) \neq 0$ ve eğer $a \neq 0$ ve $b = 1$ ise $\Delta = -a^2 \neq 0$ dır.

$a = 0$ ve $b = 1$ ise, $\alpha = a + \beta b \Rightarrow \alpha = 0 + \beta 1 \Rightarrow \alpha = \beta$ olur bu ise çelişkidir. Çünkü $\alpha \neq \beta$ iken $-\alpha \odot z \oplus \beta \odot z = \gamma$ denkleminin çözümü araştırılıyor. $a = 0$ ve $b = 1$ durumu ortaya çıkmaz.

Buna göre her durumda $\Delta \neq 0$ olduğundan (4.13) ün bir tek çözümü mevcuttur. Böylece $(S, \oplus, \odot)$ sistemi bir sol yarıcisimdir.

Bu örnekte,sonlu veya sonsuz elemanlı bazı sol yarı cisimlerin nasıl elde edilebileceğine ilişkin bir yöntem verildi. Bu sol yarıcisimler genelde, sağdan dağılma, çarpmanın değişme ve birleşme kurallarından hiçbirini sağlamaz. Bunları birer örnek ile gösterelim. Örneklerin tamamında $F = GF(3) = \{0,1,2\}$ olsun.

$z = 1 + \lambda$, $w = \lambda$, $u = \lambda$ şeklinde seçilsin.

$$(z \oplus w) \odot u = ((1+\lambda) \oplus \lambda) \odot \lambda = (1 + 2\lambda) \odot \lambda$$
$$= -2 + 2r + 2s + \lambda(r-1) \qquad (4.16)$$

$$(z \odot u) \oplus (w \odot u) = ((1+\lambda) \odot \lambda) \oplus (\lambda \odot \lambda)$$
$$= (-f(1) + \lambda(-1 + r)) \oplus (-f(0) + \lambda r)$$
$$= (-1 + r + 2s) + \lambda(2r-1) \qquad (4.17)$$

(4.16) ve (4.17) den,

$$(z \oplus w) \odot u = (z \odot u) \oplus (w \odot u) \Leftrightarrow \begin{cases} -2+2r+2s = -1+r+2s \\ r-1 = 2r-1 \end{cases} \qquad (4.18)$$

elde edilir. (4.18) deki birinci eşitlikten,

$$-2+2r+2s = -1+r+2s \Rightarrow r-1 = 0 \Rightarrow r = 1$$

bulunur. Bu değer ikinci eşitlikte yerine yazılarsa,

$$r-1 = 2r-1 \Rightarrow 0 = 1$$

olur. Dolayısıyla (4.18) eşitliği gerçeklenmez. Yani

$$(z \oplus w) \odot u \neq (z \odot u) \oplus (w \odot u)$$

dur ve sağdan dağılma özelliği sağlanmaz.

$z = 1 + \lambda$, $w = 2 + \lambda$ olmak üzere,

$$z \odot w = (1+\lambda) \odot (2+\lambda) = 2-f(1) + \lambda(2-1+r)$$
$$= 1+r+s + \lambda(1+r) \qquad (4.19)$$

$$w\Theta z = (2+\lambda)\Theta(1+\lambda) = 2-f(2) + \lambda(1-2+r)$$
$$= 1 + 2r + s + \lambda(2+r) \qquad (4.20)$$

(4.19) ve (4.20) den,

$$z\,\Theta w = w\Theta z \Rightarrow 1+r+s+\lambda(1+r) = 1+2r+s+\lambda(2+r)$$
$$\Rightarrow -r-\lambda = 0$$
$$\Rightarrow -r = \lambda$$

elde edilir. Oysa $r \in F$, $\lambda \notin F$ olduğundan,

$$z\Theta w \neq w\Theta z$$

dir.

Çarpıma göre birleşme özelliğinin sağlanmadığını yine bir örnek üzerinde görelim.

$z = 2\lambda$, $w = 2\lambda$ ve $u = \lambda$ alalım.

$$(z\Theta w)\Theta u = (2\lambda\Theta 2\lambda)\Theta\lambda = (-(-s) + \lambda(2r))\Theta\lambda$$
$$= -(2r)^{-1}f(s) + \lambda(r-s) \qquad (4.21)$$

$$z\Theta(w\Theta u) = 2\lambda\Theta(2\lambda\Theta\lambda) = 2\lambda\Theta(2s + \lambda r)$$
$$= -2r(-s) + \lambda(s + r^2)$$
$$= 2rs + \lambda(s + 1) \qquad (4.22)$$

(4.21) ve (4.22) den,

$$(z\Theta w)\Theta u = z\Theta(w\Theta u) \Leftrightarrow \begin{cases} -(2r)^{-1}f(s) = 2rs \\ r-s = s + 1 \end{cases} \qquad (4.23)$$

elde edilir. (4.23) eşitliklerini ayrı ayrı inceleyelim.

$$-(2r)^{-1}f(s) = 2rs \Rightarrow f(s) = -(2r)2rs$$
$$= -r^2 s$$

elde edilir. Eğer $r = 0$ ise, $f(s) = 0$ dır. $r \neq 0$ ise, $f(s) = -s$ olur. Oysa her iki durum da, f nin indirgenemez polinom olması ile çelişir. Benzer şekilde,

$$s+ 1 = r-s \Rightarrow 1-r + 2s = 0 \Rightarrow 1-r-s = 0 \Rightarrow f(1) = 0$$

sonucuna ulaşılır ki, bu yine f nin indirgenemez polinom olması ile çelişir. O halde,

$$(z\Theta w)\Theta u \neq z\Theta(w\Theta u)$$

dur.

Yukarıda verdiğimiz sol yarıcisim örneğinde, sağdan dağılma, çarpmanın değişme ve birleşme kuralları geçerli olmadığından böyle bir sistem genel olarak cisim değildir. Eğer cisim olsaydı S de olup, F altcisiminde olmayan en çok iki eleman bulunabilirdi. Çünkü F de bulunmayan tüm elemanlar (yani $a + \lambda b$, $b \neq 0$ tipindeki elemanlar) $f(t) = t^2-rt-s$ denklemini sağlarlar ve bu denklemin herhangi bir cisim içinde en fazla iki çözümü vardır. Dolayısıyla $F = GF(2)$ ve $S = \{0,1,\lambda,\lambda + 1\}$ dir. Karşıt olarak $F = GF(2)$ ise, S nin eleman sayısı 4 dür. Böylece S den elde edilen P_2S projektif düzleminin mertebesi de 4 dür ve bu düzlem tektir. Bu nedenle, mertebesi 4 olan düzlemsel halka cisim olacağından $(S, \oplus, \Theta)$ sistemi de cisim olmalıdır. F cisminin eleman sayısı $n > 3$ olduğundan bu cisimden elde edilen Hall sisteminin çarpımsal birleşme özelliğini sağlamadığı Teorem 6.1.2 de gösterilecektir.

Sol yarıcisimler $([\infty], [\infty])$-Dezargsel düzlemleri belirtirler.

4.2. Sağ Yarıcisimler Üzerinde Projektif Düzlemler

Tanım 4.2.1: Sağdan dağılma özelliği bulunan herhangi bir kartezyen gruba sağ yarıcisim denir.

Teorem 4.2.1: Herhangi bir $(S,+,.)$ sisteminin $T(a,b,c) = ab+c$ üçlü işlemiyle birleştirilmesinden elde edilen (S,T) ikilisinin bir sağ yarıcisim olması için gerek ve yeter koşullar,

(i) $(S,+)$ nın, birim elemanı 0 olan, bir grup olması,

(ii) $(S-\{0\},.)$ nın, birim elemanı 1 olan, bir yarıgrup olması,

(iii) Her $x \in S$ için, $x.0 = 0$ olması,

(iv) Her $x,y,z \in S$ için, $(x + y).z = x.z + y.z$ olması,

(v) $a \neq b$ olmak üzere, verilen her $a,b,c,d \in S$ için, $xa-xb = c$ denkleminin bir tek $x \in S$ çözümünün bulunmasıdır.

İspat: (S,T) bir sağ yarıcisim olsun. Böylece T1-T5 özellikleri sağlanır. Bir sağ yarıcisim, sağdan dağılma özelliği bulunan bir kartezyen grup olduğundan (i),(ii),(iii) ve (iv) özellikleri sağlanır.

T5 gereğince $a \neq b$ olmak üzere verilen $a,b,c,d \in S$ için, $T(x,a,y) = c$, $T(x,b,y) = d$ olacak şekilde bir tek $(x,y) \in S^2$ vardır. T nin tanımından,

$$xa + y = c \ , \quad xb + y = d$$

dir. Birinci denklem (-1) ile çarpılıp ikinci denklem ile toplanırsa,

$$-xa + xb = -c + d$$

olur. $-c + d = e$ denilirse, $-xa + xb = e$ denkleminin bir tek $x \in S$ çözümü vardır ve (v) özelliği sağlanır.

Karşıt olarak, (S,T) sistemi (i)-(v) özelliklerinin hepsini sağlasın. $1 + 0 = 1$ ve (iv) gözönüne alınırsa, her $x \in S$ için,

$$x = 1.x = (1+0).x = 1.x + 0.x = x + 0.x \quad \Rightarrow 0.x = 0$$

dır. Dolayısıyla her $x \in S$ için,

$$x.0 = 0.x = 0$$

dır.

Her $a,b,c \in S$ için, $0.b + c = a.0 + c = c$ dir. T nin tanımından, $T(0,b,c) = T(a,0,c) = c$ dir ve T1 sağlanır.

Her $a \in S$ için, $1.a = a.1 = a$ olduğundan, $1.a+0 = a.1+0 = a$ dır. Buradan $T(1,a,0) = T(a,1,0) = a$ ve dolayısıyla T2 sağlanır.

Her $a,b,c \in S$ için, (S,+) grup olduğundan, $ab + x = c$ ve buradan $x = -ab + c$ biçiminde bir tek $x \in S$ vardır. Bu nedenle $T(a,b,x) = c$ olacak biçimde bir tek $x \in S$ vardır ve T3 sağlanır.

(iv) gereğince sağdan dağılma özelliği sağlandığına göre (S,T) nin sağ yarıcisim olduğunu göstermek için T4 ve T5 özelliklerinin sağlandığı gösterilmelidir.

$a \neq c$ olmak üzere $a,b,c,d \in S$ için,

$$ax + b = cx + d \Rightarrow -cx + ax = d-b \Rightarrow (-c + a)x = d-b$$

dir.

$c \neq a$ olduğundan, $-c + a \neq 0$ dır ve $x = (-c + a)^{-1}(d-b) \in S$ tektir ve T4 sağlanır.

T5 özelliği, $a,b,c,d \in S$, $a \neq b$ için,

$$xa + y = c$$
$$xb + y = d$$

sisteminin bir tek $(x,y) \in S^2$ çözümünün bulunmasıydı. Burada $y = -xa + c$ ve $y = -xb + d$ olup $-xa + c = -xb + d$ ve $xa-xb = c-d$ olur. (v) gereğince bu denklemin bir tek $x \in S$ çözümü vardır. Dolayısıyla T5 sağlanır. O halde (S,T) ikilisi bir sağ yarıcisimdir∎

Aslında sağ yarıcisimler, sol yarıcisimlerden duallik ilkesi yardımıyla elde edilebilir. Daha genel bir durum, aşağıdaki tanım ve teoremle açıklanmaktadır.

Tanım 4.2.2: $(S,+,.)$ düzlemsel halkası üzerinde $*$ işlemi her $x,y \in S$ için, $x*y = y.x$ şeklinde tanımlansın. Bu şekilde elde edilen $(S,+,*)$ sistemine $(S,+,.)$ nın dual sistemi denir.

Teorem 4.2.2: Eğer $(S,+,.)$ sistemi bir sol (sağ) yarıcisim belirterse $(S,+,*)$ sistemi de bir sağ (sol) yarıcisim belirtir. Üstelik $(S,+,*)$ sisteminin duali yine $(S,+,.)$ sistemidir.

İspat: $(S,+,.)$ bir sol yarıcisim olsun. Her sol yarıcisim, düzlemsel halka olduğundan, Teorem 4.2.1 deki (i),(ii),(iii) ve (iv) koşullarının sağlandığı gösterilmelidir. (i),(ii) ve (iii) koşullarının geçerliliği Teorem 4.1.1 in ispatında görülmüştü. Sağdan dağılma özelliğinin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned}(x + y)*z &= z.(x + y)\\ &= z.x + z.y\\ &= x*z + y*z\end{aligned}$$

olduğundan (iv) sağlanır.

Son olarak $a \neq b$ olmak üzere, $x*a-x*b = c$ denkleminin bir tek $x \in S$ çözümünün varlığını araştıralım.

$*$ işleminin tanımından, $x*a-x*b = c$ ise, $a.x-b.x = c$ dir. $(S,+,.)$ sol yarıcisim olduğundan Teorem 4.1.1 in (v) koşulu gereğince bu denklemin bir tek $x \in S$ çözümü vardır. Dolayısıyla $(S,+,*)$ bir sağ yarıcisimdir.

$(S,+,.)$ bir sol yarıcisim iken S üzerinde $*$ işlemi, her $x,y \in S$ için $x*y = y.x$ şeklinde tanımlanarak $(S,+,*)$ sağ yarıcismi elde edilir. S üzerinde $*'$ işlemi, her $x,y \in S$ için $x*'y = y*x = x.y$ şeklinde tanımlanırsa, $(S,+,*)$ sağ yarıcisminin duali olan $(S,+,*')$ sol yarıcismi elde edilir. $*'$ ve . çarpma işlemlerine dikkat edilirse,

$$(S,+,*') = (S,+,.)$$

dır.

Sağ yarıcisimler $((\infty),(\infty))$-geçişken düzlemleri belirtirler.

Sağ yarıcisim örnekleri aşağıda verilmektedir. Bu sistemler A,B,C,D ile gösterilmekte ve bu sistemlerin genel özellikleri örneklerin sonunda belirtilmektedir. Burada sadece, A sisteminin bir sağ yarıcisim olduğunu göstermekle yetineceğiz. Diğer sistemler benzer biçimde gösterilebilir.

Örnek 4.2.1 (Hall,1943):

$$S = \{0,1,2,\lambda,\lambda+1,\lambda+2,2\lambda,2\lambda+1,2\lambda+2\}$$

olsun. S üzerinde $\oplus$ ise $F = GF(9)$ cisminin toplama işlemi olsun.

(Yani $a\lambda + b \oplus c\lambda + d = (a + c)\lambda + (b + d)$ olsun. Buna göre, $\lambda + \lambda = 2\lambda$, $1 \oplus 2 = \lambda \oplus 2\lambda = 0, \ldots$ v.s. olur)

S üzerinde $\oplus$ işlemi çizelge 4.1 ile verilmektedir.

Çizelge 4.1. S üzerinde ⊕ işlemi.

⊕	0	1	2	λ	λ+ 1	λ+2	2λ	2λ+1	2λ+2
0	0	1	2	λ	λ+ 1	λ+2	2λ	2λ+1	2λ+2
1	1	2	0	λ+1	λ+ 2	λ	2λ+1	2λ+2	2λ
2	2	0	1	λ+2	λ	λ+1	2λ+2	2λ	2λ+1
λ	λ	λ+1	λ+2	2λ	2λ+1	2λ+2	0	1	2
λ+ 1	λ+1	λ+2	λ	2λ+1	2λ+2	2λ	1	2	0
λ+ 2	λ+2	λ	λ+1	2λ+2	2λ	2λ+1	2	0	1
2λ	2λ	2λ+1	2λ+ 2	0	1	2	λ	λ+1	λ +2
2λ+ 1	2λ+1	2λ+2	2λ	1	2	0	λ+ 1	λ + 2	λ
2λ+ 2	2λ+2	2λ	1	2	0	1	λ+ 2	λ	λ+ 1

S üzerinde ⊗ işlemi ise aşağıdaki, Çizelge 4.2 ile tanımlanmış olsun.

Çizelge 4.2. İndirgenemez polinomu $f(t) = t^2-t-1$ olan A-sistemi:

⊗	0	1	2	λ	λ+1	λ+2	2λ	2λ+1	2λ+2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	λ	λ+1	λ+2	2λ	2λ+1	2λ+2
2	0	2	1	2λ	2λ+2	2λ+1	λ	λ+2	λ +1
λ	0	λ	2λ	λ+1	1	2λ+ 2	λ+2	2	2λ+ 1
λ+1	0	λ+1	2λ+2	2λ+1	λ+2	1	2	2λ	λ
λ+2	0	λ+2	2λ+1	1	2λ	λ	2λ+2	λ+1	2
2λ	0	2λ	λ	2λ+2	2	λ+1	2λ+1	1	λ+2
2λ+1	0	2λ+1	λ+2	2	λ	2λ	λ+1	2λ+2	1
2λ+2	0	2λ+2	λ+1	λ+2	2λ+1	2	1	λ	2λ

$(S, \oplus, \otimes)$ sisteminin bir sağ yarıcisim olduğunu göstermeye çalışalım.

(1) $(S, \oplus)$ nın, birim elemanı 0 olan, bir değişmeli grup olduğu aşikardır.

(2) $(S-\{0\}, \otimes)$ nın, birim elemanı 1 olan, bir yarıgrup olduğunu gösterelim.

Çizelge 4.2 incelendiğinde her bir satırda ve her bir sütunda S nin elemanlarının sadece bir kez bulunduğu görülecektir. Dolayısıyla,

(i) Her $m,n \in S-\{0\}$ için, $m \otimes x = n$ olacak biçimde bir tek $x \in S-\{0\}$ vardır,

(ii) Her $m,n \in S-\{0\}$ için $x \otimes m = n$ olacak biçimde bir tek $x \in S-\{0\}$ vardır,

özelliklerinin sağlandığını hemen söyleyebiliriz. Yine aynı çizelgeden

(iii) Her $x \in S$ için $x \otimes 1 = 1 \otimes x = x$

olduğu görülmektedir.

Bu özellikleri birer örnek ile gösterelim.

$\lambda + 1, 2\lambda \in S-\{0\}$ için, $x \otimes \lambda+1 = 2\lambda$ olacak biçimde bir tek $\lambda+2 \in S-\{0\}$ vardır. Benzer şekilde $\lambda+1 \otimes x = 2\lambda$ denkleminin bir tek $2\lambda+1 \in S-\{0\}$ çözümü vardır.

(i),(ii) ve (iii) den $(S-\{0\}, \otimes)$, birim elemanı 1 olan, bir yarıgruptur.

(3) Yine çizelge 4.2 ye göre her $x \in S$ için,

$$x \otimes 0 = 0 \otimes x = 0$$

dır.

(4) Her $x,y,z \in S$ için,

$$(x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$$

özelliğinin sağlandığını göstermek için, x,y,z nin S de alabileceği değerler düşünülürse, $9.9.9 = 729$ hali ayrı ayrı hesaplayıp kontrol etmek gerekir. Ancak $\oplus$ işleminin komutatif olması nedeniyle $x \oplus y$ 45 farklı şekilde, z ise 9 farklı şekilde seçilebileceğinden, $45.9 = 405$ hali incelemek yeterli olacaktır. Hesaplamalar yapılarak bunlar gösterilebilir:

Örneğin,

$$(\lambda \oplus \lambda+1) \otimes 2\lambda = 2\lambda + 1 \otimes 2\lambda = \lambda + 1$$

ve

$$(\lambda \otimes 2\lambda) \oplus (\lambda + 1 \otimes 2\lambda) = \lambda + 2 \oplus 2 = \lambda + 1$$

olduğundan,

$$(\lambda \oplus \lambda+1) \otimes 2\lambda = (\lambda \otimes 2\lambda) \oplus (\lambda + 1 \otimes 2\lambda)$$

dır.

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}(\lambda + 2 \oplus 2\lambda) \otimes \lambda + 1 &= 2 \otimes \lambda+1 \\ &= 2\lambda + 2\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(\lambda + 2 \otimes \lambda + 1) \oplus (2\lambda \otimes \lambda+1) &= 2\lambda \oplus 2 \\ &= 2\lambda + 2\end{aligned}$$

olduğundan,

$$(\lambda+2 \oplus 2\lambda) \otimes \lambda+1 = (\lambda+2 \otimes \lambda+1) \oplus (2\lambda \otimes \lambda+1)$$

dir.

(5) $a \neq b$ olmak üzere verilen $a,b,c \in S$ için,

$$(x \otimes a) - (x \otimes b) = c \qquad (4.24)$$

denklemini gözönüne alalım. $(S, \oplus)$ değişmeli grup olduğundan,

$$(x \otimes a) - (x \otimes b) = c \Rightarrow x \otimes a = (x \otimes b) \oplus c$$

dir.

Çizelge 4.2 de dikkate alınan her bir sütun ikilisi için aynı satırda bulunan eleman ikililerine bakılacak olursa, biri diğerinin mutlaka $t \in S$ fazlası kadardır. Üstelik bu değer her bir satır için değişmektedir. Dolayısıyla verilen her $a,b,c \in S$, $a \neq b$ için, $x \otimes a = x \otimes b \oplus c$ özelliğinde bir tek $x \in S$ vardır. Böylece (4.24) eşitliğinin bir tek $x \in S$ çözümü vardır.

Bu özelliğide bir örnek ile gösterelim:

λ, 2λ, $\lambda + 1 \in S$ için,

$$x \otimes \lambda - x \otimes 2\lambda = \lambda + 1$$

eşitliğini sağlayan $x \in S$ değerini bulalım.

$$x \otimes \lambda = x \otimes 2\lambda \oplus \lambda + 1$$

olduğundan çizelge 4.2 den görüldüğü gibi, $x = 2\lambda + 2$ bulunur.

$(S, \oplus, \otimes)$ sağ yarıcismi standart özelliklerinden daha fazlasını sağlamaz. Soldan dağılma özelliğinin ,çarpmanın değişme ve birleşme özelliklerinin sağlanmadığını birer örnekle gösterelim.

$$\lambda + 1 \otimes (2 \oplus \lambda) = \lambda+1 \otimes \lambda+2 = 1$$

olduğu halde

$$(\lambda+1 \otimes 2) \oplus (\lambda+1 \otimes \lambda) = 2\lambda+2 \oplus 2\lambda+1 = \lambda$$

dır.

$$2\lambda+1 \otimes \lambda+2 = 2\lambda \quad \text{ve} \quad \lambda+2 \otimes 2\lambda+1 = \lambda+1$$

olduğuna dikkat edilirse, çarpmanın değişme özelliği yoktur.

$$(\lambda \otimes 2\lambda) \otimes \lambda+2 = \lambda+2 \otimes \lambda+2 = \lambda$$

ve

$$\lambda \otimes (2\lambda \otimes \lambda+2) = \lambda \otimes \lambda +1 = 1$$

olduğundan $\otimes$ işlemi birleşme özelliğini sağlamaz.

Aynı S kümesi üzerinde $\oplus$ işlemi yine çizelge 4.1 deki gibi tanımlansın. Çarpma işlemleri aşağıdaki çizelgelerde verilmiş olan her bir $(S, \oplus, \otimes)$ sistemi de bir sağ yarıcisimdir.

Çizelge 4.3. İndirgenemez polinomu $f(t) = t^2 - 2$ olan B-sistemi.

$\otimes$	0	1	2	λ	$\lambda+1$	$\lambda+2$	2λ	$2\lambda+1$	$2\lambda+2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	λ	$\lambda+1$	$\lambda+2$	2λ	$2\lambda+1$	$2\lambda+2$
2	0	2	1	2λ	$2\lambda+2$	$2\lambda+1$	λ	$\lambda+2$	$\lambda+1$
λ	0	λ	2λ	2	$2\lambda+1$	$\lambda+1$	1	$2\lambda+2$	$\lambda+2$
$\lambda+1$	0	$\lambda+1$	$2\lambda+2$	$\lambda+2$	2	2λ	$2\lambda+1$	λ	1
$\lambda+2$	0	$\lambda+2$	$2\lambda+1$	$2\lambda+2$	λ	2	$\lambda+1$	1	2λ
2λ	0	2λ	λ	1	$\lambda+2$	$2\lambda+2$	2	$\lambda+1$	$2\lambda+1$
$2\lambda+1$	0	$2\lambda+1$	$\lambda+2$	$\lambda+1$	2λ	1	$2\lambda+2$	2	λ
$2\lambda+2$	0	$2\lambda+2$	$\lambda+1$	$2\lambda+1$	1	λ	$\lambda+2$	2λ	2

Çizelge 4.4. İndirgenemez polinomu $f(t) = t^2-t-2$ olan C-sistemi.

$\otimes$	0	1	2	λ	$\lambda+1$	$\lambda+2$	2λ	$2\lambda+1$	$2\lambda+2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	λ	$\lambda+1$	$\lambda+2$	2λ	$2\lambda+1$	$2\lambda+2$
2	0	2	1	2λ	$2\lambda+2$	$2\lambda+1$	λ	$\lambda+2$	$\lambda+1$
λ	0	λ	$2\lambda+1$	$\lambda+2$	1	2λ	$\lambda+1$	$2\lambda+2$	2
$\lambda+1$	0	$\lambda+1$	2λ	$2\lambda+2$	$\lambda+2$	2	1	λ	$2\lambda+1$
$\lambda+2$	0	$\lambda+2$	$2\lambda+2$	2	2λ	$\lambda+1$	$2\lambda+1$	1	λ
2λ	0	2λ	$\lambda+2$	$2\lambda+1$	2	λ	$2\lambda+2$	$\lambda+1$	1
$2\lambda+1$	0	$2\lambda+1$	$\lambda+1$	1	λ	$2\lambda+2$	$\lambda+2$	2	2λ
$2\lambda+2$	0	$2\lambda+2$	λ	$\lambda+1$	$2\lambda+1$	1	2	2λ	$\lambda+2$

Çizelge 4.5. İndirgenemez polinomu $f(t) = t^2-2t-1$ olan D-sistemi.

⊗	0	1	2	λ	λ+1	λ+2	2λ	2λ+1	2λ+2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	λ	λ+1	λ+2	2λ	2λ+1	2λ+2
2	0	2	1	2λ	2λ+2	2λ+1	λ	λ+2	λ+1
λ	0	λ	2λ	2λ+1	λ+2	1	2λ+2	λ+1	2
λ+1	0	λ+1	2λ+2	1	2λ	λ	λ+2	2	2λ+1
λ+2	0	λ+2	2λ+1	λ+1	1	2λ+2	2	2λ	λ
2λ	0	2λ	λ	λ+2	2λ+1	2	λ+1	2λ+2	1
2λ+1	0	2λ+1	λ+2	2λ+2	2	λ+1	1	λ	2λ
2λ+2	0	2λ+2	λ+1	2	λ	2λ	2λ+1	1	λ+ 2

Bu sistemlere Veblen-Wedderburn (VW) sistemleri de denilmektedir. Dokuz elemanlı VW sistemlerinden sonlu cisim yanında, çizelge 4.2, 4.3, 4.4 ve 4.5 ile verilen ve izomorf olmayan dört tanesi mevcuttur. Her bir sistemde toplamsal grup, mertebesi 9 olan elemanter abelyen gruptur. $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$ genelde doğru olmamakla birlikte özel olarak $x = 2$ için geçerli olduğundan bu eleman soldan birleşme özelliğini sağlar fakat C-sisteminde merkezin elemanı değildir.

A,B ve D-sistemlerinde 0,1,2 merkezin elemanlarıdır fakat C-sisteminin merkezi sadece 0,1 elemanlarından ibarettir. A,B,C,D sistemleri cebirsel olarak izomorf olmadıkları halde aynı (izomorf) düzlemleri koordinatlamada kullanılabilmektedir (Hall, 1943).

Örnek 4.2.2: Örnek 4.1.1 deki sol yarıcisim elde etme yöntemi ile oluşturulan $(S,+,\theta)$ sistemi, Teorem 4.2.2 uygulanarak dualleştirilir ve $F = GF(5)$ olmak üzere,

$$f(t) = t^2-2$$

alınırsa elde edilen $(S,+,*)$ sistemi bir sağ Hall sistemi olur. Şöyleki,

$$x + \lambda y,\ u + \lambda v \in S$$

olmak üzere,

$$(x + \lambda y)*(u + \lambda v) = (u + \lambda v)\theta(x + \lambda y)$$

$$= \begin{cases} ux + \lambda(uy) & , v = 0 \text{ iken} \\ ux-v^{-1}y(u^2-2) + \lambda(xv-yu) & , v \neq 0 \text{ iken} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $(S,+,*)$ sistemi bir sağ yarıcisimdir.

4.3. Yarıcisimler Üzerinde Projektif Düzlemler

Tanım 4.3.1: Hem sağdan ve hemde soldan dağılma özelliği bulunan herhangi bir kartezyen gruba yarıcisim (quasifield, bazen de semifield) denir.

Teorem 4.3.1: Herhangi bir $(S,+,.)$ sisteminin $T(a,b,c) = a.b+c$ üçlü işlemiyle birleştirilmesinden elde edilen (S,T) ikilisinin bir yarı cisim olması için gerek ve yeter koşullar,

i) (S,+) nın, birim elemanı 0 olan, bir grup olması,

ii) (S-{0},.) nın, birim elemanı 1 olan, bir yarıgrup olması,

iii) Her $x \in S$ için $x.0 = 0$ (veya $0.x = 0$) olması,

iv) Her $x,y,z \in S$ için,

$$x.(y + z) = x.y + x.z \quad \text{ve} \quad (x + y).z = x.z + y.z$$

olmasıdır.

İspat: Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.2.1 in birleştirilmesiyle hemen görülür. Şöyleki: (S,T) ikilisi bir yarıcisim ise, aynı zamanda sağdan ve soldan dağılma özelliği bulunan bir kartezyen gruptur. Dolayısıyla (i),(ii),(iii) ve (iv) özellikleri sağlanır.

Karşıt olarak (i),(ii),(iii) ve (iv) özellikleri sağlanıyor ise, bu koşullar yardımıyla T1-T5 in gerçeklendiği daha önce gösterilmişti (Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.2.1). (iv) den sağdan ve soldan dağılma özelliği sağlandığına göre (S,T) ikilisi bir yarıcisimdir■

Bir $P_{(S,T)}$ projektif düzleminin, (S,T) üçlü halkasının (S,+,.) cebirsel yapısının yarıcisim olması ile bu projektif düzlemin $([\infty],[\infty])$-geçişken ve $((\infty),(\infty))$-geçişken olması eşdeğerdir.

Biri sonlu, diğeri sonlu olmayan iki tane yarıcisim örneği aşağıda verilmektedir. Bu örneklerde kullanılacak olan bazı tanım , teorem ve özellikler, örneklerden önce verilmektedir.

Cardan Formülleri:

$x^3 + px + q = 0$ şeklindeki bir denklemin kökleri aşağıdaki biçimde bulunabilir.

$$M = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad , \quad N = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

olmak üzere, $\delta = 4p^3 + 27q^2$ iken, x_1, x_2, x_3 kökleri aşağıdaki çizelgede verilmektedir (Süray, 1962).

Çizelge 4.6. $x^3 + px + q = 0$ tipindeki denklemin kökleri.

	$\delta > 0$ veya $\delta < 0$	$\delta = 0$
x_1	$\sqrt[3]{M} + \sqrt[3]{N}$	$2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$
x_2	$-\frac{\sqrt[3]{M}+\sqrt[3]{N}}{2} + i\,\frac{\sqrt[3]{M}-\sqrt[3]{N}}{2}\sqrt{3}$	$\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$
x_3	$-\frac{\sqrt[3]{M}+\sqrt[3]{N}}{2} - i\,\frac{\sqrt[3]{M}-\sqrt[3]{N}}{2}\sqrt{3}$	$\sqrt[3]{\frac{q}{2}} = x_2$

Örnek 4.3.1: Q, rasyonel sayılar cismi olmak üzere, $(S, \oplus, \odot)$ sistemi aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$S = \{(x,y,z) : x,y,z \in Q\}$$

$$(x,y,z) \oplus (u,v,w) = (x+u, y+v, z+w)$$

$$(x,y,z)\odot(u,v,w) = (xu+2yw+2zv, xv-yu-16zw, xw+zu+yv)$$

$(S, \oplus, \odot)$ sisteminin bir yarıcisim olduğunu gösterelim.

(1) $(S, \oplus)$ nın, birim elemanı $(0,0,0)$ olan, bir değişmeli grup olduğu açıktır.

(2) $(S-\{(0,0,0)\}, \odot)$ nın bir yarıgrup olduğunu gösterelim.

(i) Her $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ için,

$$(a,b,c)\odot(x,y,z) = (p,q,r) \tag{4.25}$$

denkleminin bir tek $(x,y,z) \in S$ çözümünün olduğunu gösterelim. (4.25) denkleminden,

$$(ax + 2bz + 2cy, ay+bx-16cz, az+cx+by) = (p,q,r)$$

yazılabilir. Bu denklemin bir tek çözümünün bulunması,

$$\begin{aligned} ax+2cy+2bz &= p \\ bx+ay-16cz &= q \\ cx+by + az &= r \end{aligned} \tag{4.26}$$

sisteminin Q da bir çözüm takımının bulunması demektir.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & -16c \\ c & b & a \end{vmatrix} = a^3 + 2b^3 - 32c^3 + 12abc \qquad (4.27)$$

katsayılar matrisinin determinantında, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ olduğundan, değişik durumlar incelenerek $\Delta \neq 0$ olduğu aşağıda gösterilmektedir.

a,b,c den herhangi ikisi 0 olsun;

$$a,b = 0,\ c \neq 0 \quad \Rightarrow \Delta = -36c^3 \neq 0$$

$$a,c = 0,\ b \neq 0 \quad \Rightarrow \Delta = 2b^3 \neq 0$$

$$b,c = 0,\ a \neq 0 \quad \Rightarrow \Delta = a^3 \neq 0$$

olduğundan, bu durumda (4.26) sisteminin çözümü vardır.

a,b,c lerden yalnızca biri 0 iken,

$$a = 0 \Rightarrow 2b^3 - 32c^3 = 0 \Rightarrow b^3 = 16c^3 \Rightarrow b = \sqrt[3]{16}c = 2\sqrt{2}.c \notin Q.$$

$$b = 0 \Rightarrow a^3 - 32c^3 = 0 \Rightarrow a^3 = 32c^3 \Rightarrow a = 2\sqrt[3]{4}\ c \notin Q$$

$$c = 0 \Rightarrow a^3 + 2b^3 = 0 \Rightarrow a^3 = -2b^3 \Rightarrow a = -\sqrt[3]{2} \notin Q$$

olur. Böylece (4.26) sisteminin bir çözüm takımı ve dolayısıyla (4.25) denkleminin bir tek çözümü vardır.

a,b,c lerden herbirinin 0 dan farklı olması halinde bunlardan herhangi ikisinin rasyonel sayı olduğu kabul edilirse, üçüncünün rasyonel olamayacağı $\Delta = 0$ denkleminin kökleri yardımıyla gösterilmektedir.

$$\Delta = a^3 + 2b^3 - 32c^3 + 12abc$$

denkleminde $b = 2$, $c = 1$ olsun. Bu takdirde,

$$a^3 + 24a - 16 = 0$$

elde edilir. Bu denkleme Cardan Formüllerini uygulayarak, çizelge 4.6 yardımıyla a_1, a_2, a_3 köklerini bulalım.

$p = 24$, $q = -16$ olduğundan,

$$\delta = 4p^3 + 27q^2 = 4.13824 + 27.256 = 62208 > 0$$

dır.

$$M = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \Rightarrow M = \frac{16}{2} + \sqrt{\frac{256}{4} + \frac{13824}{27}}$$

$$= 8 + \sqrt{576}$$

$$= 32$$

$$N = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \Rightarrow N = \frac{16}{2} - \sqrt{\frac{256}{4} + \frac{13824}{27}}$$

$$= 8 - \sqrt{576}$$

$$= -16$$

olup, hesaplanan bu değerler yardımıyla,

$$a_1 = \sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{-16} = 2\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2}$$

$$a_2 = \frac{-\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{-16}}{2} + i\,\frac{\sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{-16}}{2}\cdot\sqrt{3}$$

$$= (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}) + i(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})\cdot\sqrt{3}$$

$$a_3 = -(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}) - i(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}).\sqrt{3}$$

$$= (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}) - i(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}).\sqrt{3}$$

elde edilir. $a_1, a_2, a_3 \notin Q$ olduğundan, Q da $\Delta = 0$ olamaz. Dolayısıyla b ve c rasyonel sayılar iken, a rasyonel sayı olmadığından $\Delta \neq 0$ dır ve (4.25) denkleminin bir tek $(x,y,z) \in S$ çözümü vardır.

(ii) Her $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ için,

$$(a,b,c)\theta(x,y,z) = (ax + 2bz + 2cy,\ ay + bx - 16cz, az + cx + by)$$

ile

$$(x,y,z)\theta(a,b,c) = (xa + 2yc + 2zb, xb + ya - 16zc, xc + za + yb)$$

eşitlikleri karşılaştırılırsa, θ işleminin komutatif olduğu kolayca görülür. Bu nedenle (4.25) denkleminin bir tek $(x,y,z) \in S$ çözümü varken $(x,y,z)\Theta(a,b,c) = (p,q,r)$ denkleminin de bir tek çözümü vardır.

(iii) $(S-\{(0,0,0)\},\Theta)$ sisteminin birim elemanını araştıralım.

Her $(a,b,c) \in S$ için,

$$(a,b,c)\Theta(x,y,z) = (x,y,z)\Theta(a,b,c) = (a,b,c)$$

olmalıdır.

$$(a,b,c)\Theta(x,y,z) = (a,b,c)$$

den,

$$(ax+2bz+2cy, ay+bx-16cz, az+cx+by) = (a,b,c)$$

ve buradan da,

$$\begin{aligned} ax + 2cy + 2bz &= a \\ bx + \ ay - 16cz &= b \\ cx + \ by \ + az &= c \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemini çözerek, (x,y,z) yi bulalım. Bunun için sırasıyla Δ, Δx, Δy ve Δz değerlerini hesaplayalım.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & -16c \\ c & b & a \end{vmatrix} = a^3 + 2b^2 - 32c^3 + 12abc \neq 0$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & -16c \\ c & b & a \end{vmatrix} = a^3 + 2b^2 - 32c^3 + 12abc \neq 0$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a & a & 2b \\ b & b & -16c \\ c & c & a \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} a & 2c & a \\ b & a & b \\ c & b & c \end{vmatrix} = 0$$

bulunur. Buradan,

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = 1 \ , \ y = \frac{\Delta y}{\Delta} = 0 \ , \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = 0$$

olduğundan çarpımsal birim eleman $(x,y,z) = (1,0,0)$ dır.

Böylece $(S-\{(0,0,0)\},\Theta)$ sisteminin, birim elemanı $(1,0,0)$ olan, bir yarıgrup olduğu gösterilmiş olur.

(3) Her $(x,y,z) \in S$ için,

$$(x,y,z)\Theta(0,0,0) = (0,0,0)\Theta(x,y,z) = (0,0,0)$$

dır.

(4) (x,y,z), (u,v,w), $(p,q,r) \in S$ için,

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\Theta((u,v,w) \oplus (p,q,r)) &= (x,y,z)\Theta(u+p,v+q,w+r) \\
&= (x(u+p)+2y(w+r)+2z(v+q), \\
&\quad x(v+q)+y(u+p)-16z(w+r) , \\
&\quad x(w+r) + z(u+p) + y(v+q)) \\
&= (xu+xp+2yw+2yr+2zv+2zq, \\
&\quad xv+xq+yu+yp-16zw-16zr, \\
&\quad xw+xr+zu+zp+yv+yq) \\
&= (xu+2yw+2zv, xv+yu-16zw, xw+zu+yv) \\
&\quad \oplus (xp+2yr+2zq, xq+yp-16zr, xr+zp+yq) \\
&= ((x,y,z)\Theta(u,v,w)) \oplus ((x,y,z)\Theta(p,q,r))
\end{aligned}$$

olduğundan, soldan dağılma özelliği sağlanır. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
((x,y,z) \oplus (u,v,w))\Theta(p,q,r) &= (x+u,y+v,z+w)\Theta(p,q,r) \\
&= ((x+u)p+2(y+v)r+2(z+w)q, \\
&\quad (x+u)q+(y+v)p-16(z+w)r, \\
&\quad (x+u)r+(z+w)p+(y+v)q) \\
&= (xp+up+2yr+2vr+2zq+2wq, \\
&\quad xq+uq+yp+vp-16zr-16wr, \\
&\quad xr+ur+zp+wp+yq+vq)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$((x,y,z) \oplus (u,v,w))\Theta(p,q,r) = (xp+2yr+2zq, xq+yp-16zr, xr+zp+yq)$$
$$\oplus (up+2vr+2wq, uq+vp-16wr, ur+wp+vq)$$
$$= ((x,y,z)\Theta(p,q,r)) \oplus ((u,v,w)\Theta(p,q,r))$$

olduğundan, sağdan dağılma özelliği sağlanır. (1),(2),(3) ve (4) özelliklerine göre $(S, \oplus, \Theta)$ sistemi bir yarıcisimdir.

Verilen bu yarıcisim örneğinde de Θ işleminin birleşme özelliği yoktur. Bunu yine basit bir örnekle hemen görebiliriz. Şöyleki;

$$(0,0,1)\Theta((1,0,1)\Theta(0,1,0)) = (2,0,2)$$

iken,

$$((0,0,1)\Theta(1,0,1))\Theta(0,1,0) = (2,0,-16)$$

dır.

Tanım 4.3.2: F bir cisim olsun. Bu cisim üzerinde,

$$\phi : F \to F$$

bire-bir ve örten fonksiyonu her $x,y \in F$ için,

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$$

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

koşullarını da sağlıyorsa, ϕ ye F nin bir otomorfizmi denir.

Teorem 4.3.2: S sonlu bir küme olmak üzere, $(S,+,.)$ sisteminin bir yarıcisim olması için, gerek ve yeter koşullar;

(a) $(S,+)$ nın, birim elemanı 0 olan, bir grup olması,

(b) Her $x \in S$ için, $1.x = x.1 = x$ olacak şekilde $1 \in S$ nin mevcut olması,

(c) $x.y = 0$ ise, $x = 0$ veya $y = 0$ olması,

(d) Her $x,y,z \in S$ için,

$$x.(y + z) = x.y + x.z$$
$$(x + y).z = x.z + y.z$$

bağıntılarının gerçeklenmesidir.

Bu teoremin (a),(b),(c) ve (d) koşullarının, Teorem 4.3.1 in (i),(ii),(iii) ve (iv) koşullarını gerktirdiği ve tersine Teorem 4.3.1 deki (i),(ii),(iii) ve (iv) özelliklerinin Teorem 4.3.2 deki (a),(b), (c) ve (d) yi gerektirdiği gösterilebilirse, teoremin isbatı verilmiş olacaktır. Çünkü bu durumda, Teorem 4.3.1 ve Teoerm 4.3.2 nin eşdeğer olduğu gözönüne alınırsa, bir sistemin yarıcisim olduğunu göstermek için bu iki teoremden herhangi biri kullanılabilir. Bu açıklamalardan sonra teoremin isbatını verebiliriz.

İspat: Teorem 4.3.1 deki (i),(ii),(iii) ve (iv) koşulları sağlansın.

$$(i),(iv) \Leftrightarrow (a),(d) \quad \text{ve} \quad (ii) \Rightarrow (b)$$

dir.

$x.y = 0$ ve $x \neq 0$ olsun. (iii) den $x.y = x.0$ olur ve $x^{-1}.xy = x^{-1}.x0$ olduğundan $y = 0$ dır. Benzer şekilde, $x.y = 0$ ve $y \neq 0$ olsun. Yine (iii) den $x.y = 0.y$ ve $xyy^{-1} = 0yy^{-1}$ olur, dolayısıyla $x = 0$ dır. Böylece $x.y = 0$ ise, $x = 0$ veya $y = 0$ dır ve (c) özelliği sağlanır.

Karşıt olarak, Teorem 4.3.2 deki (a),(b),(c) ve (d) koşullarının sağlandığını kabul edelim.

$$(a),(d) \Leftrightarrow (i),(ii)$$

dir. Eğer $x.y = 0$ ise, (c) den $x = 0$ veya $y = 0$ olduğundan, her $x \in S$ için, $x.0 = 0.x = 0$ dır. Bu ise (iii) nin sağlanması demektir.

$x.a = b$, $(b \neq 0)$ olsun. (c) den $x \neq 0$ ve $a \neq 0$ olur ve $x = ba^{-1} \in S$ tektir. Aynı nedenle $ax = b$ denkleminin de bir tek $x = a^{-1}.b \in S$ çözümü vardır. Üstelik (b) gereği çarpımsal birimin varlığı bilindiğine göre,(ii) sağlanır ∎

Şimdi vereceğimiz sonlu yarıcisim örneği, "birleşimli olmayan bölümlü cebir" adıyla, Albert tarafından verilmiştir.

Örnek 4.3.2 (Albert, 1952): $p \neq 2$, herhangi bir asal sayı ve r de $r > 1$ özelliğinde bir tek tamsayı olmak üzere, $GF(p^r)$ cismini düşünelim. $GF(p^r)$ üzerinde, + işlemini aynen tutup yeni bir θ işlemini,

$$x\theta\, y = \frac{1}{2}(xy^p + x^p y)$$

biçiminde tanımlayalım.

$$\phi : GF(p^r) \to GF(p^r)$$

$$\phi(x) = x^p$$

eşlemesinin $GF(p^r)$ üzerinde bir otomorfizm olduğu kolaylıkla görülebilir (Kaya, 1978). Bu nedenle soldan ve sağdan dağılma özellikleri sağlanır. Çünkü,

$$\begin{aligned} x\theta(y+z) &= \frac{1}{2}(x(y+z)^p + x^p(y+z)) \\ &= \frac{1}{2}(x(y^p + z^p) + x^p y + x^p z) \\ &= \frac{1}{2}(xy^p + x^p y) + \frac{1}{2}(xz^p + x^p z) \\ &= x\theta y + x\theta z \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (x+y)\theta z &= \frac{1}{2}((x+y)z^p + (x+y)^p z) \\ &= \frac{1}{2}(xz^p + yz^p + (x^p + y^p)z) \\ &= \frac{1}{2}(xz^p + x^p z) + \frac{1}{2}(yz^p + y^p z) \\ &= x\theta z + y\theta z \end{aligned}$$

dir.

$(GF(p^r),+,\theta)$ sisteminin sıfır böleni yoktur. Çünkü sıfır bölen olsa idi $x \neq 0$, $y \neq 0$ iken, $x\Theta y = 0$ olurdu. Buradan

$$\frac{1}{2}(xy^p + x^p y) = 0$$

yani

$$xy^p + x^p y = 0$$

olur. Buradan,

$$y^p y^{-1} = -x^p x^{-1} \Rightarrow y^{p-1} = -x^{p-1}$$

elde edilir.

$(p^r-1)/(p-1) = m$ yazılırsa, p ve r tek olduğundan, p^r tek sayıdır ve

$$(p^r-1)/(p-1) = \sum_{i=1}^{r} p^{r-i}$$

dır.

$m = \sum_{i=1}^{r} p^{r-i}$ toplamında r (tek) adet terim vardır ve p asal sayı olduğundan, her bir p^{r-i} değeri tektir. İki tek sayının toplamı çift, ve bir tek sayı ile bir çift sayının toplamı da tek olduğundan, m tek sayıdır. Dolayısıyla,

$$y^{p-1} = -x^{p-1}$$

$$\Rightarrow \quad y^{(p^r-1)/m} = -x^{(p^r-1)/m}$$

$$\Rightarrow \quad (y^{(p^r-1)/m})^m = ((-1)x^{(p^r-1)/m})^m$$

$$\Rightarrow \quad y^{p^r-1} = (-1)^m x^{p^r-1}$$

dir.

$GF(p^r)$, p^r elemandan oluşan sonlu bir cisim ve karakteristiği p olduğundan, $GF(p^r)$ nin çarpımsal grubu p^r-1 elemandan oluşur. Bu nedenle $GF(p^r)$ nin sıfırdan farklı her elemanı için,

$$x^{p^r-1} = 1$$

eşitliği geçerlidir (Cohn, 1974). Buradan,

$$1 = (-1)^m$$

elde edilir. Oysa m tek sayı olduğundan bu mümkün değildir ve $(GF(p^r),+,\theta)$ nın sıfır böleni mevcut olmaz. Dolayısıyla da her $x \in F$, $x \neq 0$ için,

$$x = u\theta 1 = \frac{1}{2}(u + u^p)$$

olacak biçimde bir tek $u \neq 0$ vardır.

$GF(p^r)$ üzerinde, $x = u\theta 1 = \frac{1}{2}(u + u^p)$ olmak üzere, $\alpha(x) = u$ bire-bir eşlemesini ve bunun yardımıyla;

$$x * y = \alpha(x)\theta\alpha(y)$$

bağıntısıyla verilen $D = (GF(p^r),+,*)$ sistemini oluşturalım. Bu şekildi oluşturduğumuz D-sisteminin bir yarıcisim olduğunu Teorem 4.3.2 yardımıyla gösterelim.

$(GF(p^r),+)$, birim elemanı 0 olan, bir değişmeli gruptur.

$x \in GF(p^r)$ için, $x = u\theta 1 = \frac{1}{2}(u + u^p)$ ve $1 = 1\theta 1 = \frac{1}{2}(1 + 1)$ olduğundan,

$$x*1 = \alpha(x)\theta\alpha(1) = u\theta 1 = \frac{1}{2}(u + u^p) = x$$

dir. Benzer şekilde,

$$1*x = \alpha(1)\theta\alpha(x) = 1\theta u = \frac{1}{2}(u^p + u) = x$$

olduğundan, çarpımsal birim eleman 1 dir.

D sisteminin sıfır böleni yoktur. Şöyleki,

$x \neq 0$ ve $y \neq 0$ iken $x*y = 0$ olduğunu varsayalım.

$$x = u\theta 1 = \frac{1}{2}(u + u^p) \Rightarrow \alpha(x) = u \text{ ve } y = v\theta 1 = \frac{1}{2}(v+v^p) \Rightarrow \alpha(y) = v$$

dir.

$x*y = 0 \Rightarrow \alpha(x)\theta\alpha(y) = 0 \Rightarrow u\theta v = 0 \Rightarrow u = 0$ veya $v = 0$ dır.

Eğer $u = 0$ ise, $x = u\theta 1 = 0\theta 1 = 0$ olur. Eğer $v=0$ ise, $y=v\theta 1=0\theta 1=0$

olur. Bu ise hipotezle çelişir. Dolayısıyla, $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ iken $x * y \neq 0$ dır.

Dağılma özelliklerinin sağlandığını gösterelim.

$x,y,z \in GF(p^r)$; $x = u\theta 1$, $y = v\theta 1$, $z = w\theta 1$ için,

$$x + y = u\theta 1 + v\theta 1 = (u + v)\theta 1$$

dir. Ayrıca, $\alpha(x + y) = u + v = \alpha(x) + \alpha(y)$ oluduğundan,

$$\begin{aligned}(x + y)*z &= \alpha(x + y)\theta\alpha(z) \\ &= (\alpha(x) + \alpha(y))\theta\alpha(z) \\ &= (\alpha(x)\theta\alpha(z)) + (\alpha(y)\theta\alpha(z)) \\ &= x*z + y*z\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde

$$x*(y + z) = x*y + x*z$$

olduğu hemen görülebilir.

5. ALTERNE YARICİSİMLER ÜZERİNDE PROJEKTİF DÜZLEMLER

5.1. Alterne Yarıcisimler

Tanım 5.1.1: Sağ ve sol alterne kurallarını gerçekleyen, yani her $x,y \in S$ için,

$$(xy)y = x(yy) \quad \text{ve} \quad (xx)y = x(xy)$$

özelliklerine sahip, herhangi $(S,+,.)$ yarıcismine alterne yarıcisim denir. (Literatürde bunun için alterne bölümlü halka, alterne halka, alterne cisim,...v.b. isimler de kullanılmaktadır.)

Tanım 5.1.2: Herhangi bir (S,T) yarıcisminin $(S-\{0\},.)$ çarpımsal yarıgrubu sağ ters birleşimli ise (yani her $x,y \in S-\{0\}$ için $(y.x).x^{-1} = y$ olacak şekilde bir $x^{-1} \in S-\{0\}$ varsa) (S,T) ye sağ ters birleşimli yarıcisim, çarpımsal yarıgrubu sol ters birleşimli ise (yani xer $x,y \in S-\{0\}$ için $x^{-1}.(x.y) = y$ olacak şekilde bir $x^{-1} \in S-\{0\}$ varsa) (S,T) ye sol ters birleşimli yarıcisim denir. Hem sağ, hem de sol ters birleşimli yarıcisme yalnızca ters birleşimli yarıcisim denir.

Şimdi vereceğimiz teoremlerde (Kaya, 1978) esas alınmıştır.

Teorem 5.1.1: Herhangi bir (S,T) yarıcisminin sağ ters birleşimli olması için gerek ve yeter koşul $P_{(S,T)}$ nin $(\infty)ox$ özelliğindeki her x doğrusu için (x,x)-geçişken olmasıdır.

Teorem 5.1.2: Herhangi bir P projektif düzleminin Moufang (Küçük Dezargsel) olması için gerek ve yeter koşul d ve e gibi farklı iki doğru için (d,d)-geçişken ve (e,e)-geçişken olmasıdır.

Bu iki teoremden, herhangi bir (S,T) yarıcismi sağ ters birleşimli ise $P_{(S,T)}$ projektif düzleminin Moufang düzlemi olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 5.1.3 (Skornyakov-San Soucie Teoremi): Her sağ ters birleşimli yarıcisim aynı zamanda alterne yarıcisimdir.

Teorem 5.1.4: Her alterne yarıcisim sağ ve sol ters birleşme özelliklerini de sağlar.

Teorem 5.1.5 (Artin-Zorn Teoremi): Her sonlu alterne yarıcisim aynı zamanda cisimdir.

Dikkat edilirse, alterne yarıcisimler ile sağ ters birleşimli yarıcisimlerin aynı cebirsel yapılar olduğu söylenebilir. Dolayısıyla bir alterne yarıcisim tarafından belirlenen (üçlü halkaları alterne yarıcisim olan) projektif düzlemler Moufang düzlemleridir. Teorem 5.1.5den, sonlu Moufang düzlemlerinin hepsi cisim düzlemleri olmaktadır.

5.2. Alterne Yarıcisim Örneği

Örneği vermeden önce, kuaterniyonlar halkasını hatırlatarak kuaterniyon çarpımının bazı özelliklerini verelim.

Tanım 5.2.1 (Kuaterniyonlar Halkası): $(\mathbb{R},+,.)$ gerçel sayılar cismi olmak üzere,

$$Q = \{(a_0,a_1,a_2,a_3) \ : \ a_i \in \mathbb{R} \ , \ i = 0,1,2,3\}$$

kümesi verilsin. Bu kümenin elemanları kuaterniyonlar olarak isimlendirilir.

$a_i,b_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere Q üzerinde $\oplus$ ikili işlemi, $\mathbb{R}$ nin + işlemi yardımıyla,

$$(a_0,a_1,a_2,a_3) \oplus (b_0,b_1,b_2,b_3) = (a_0 + b_0,a_1 + b_1,a_2 + b_2,a_3+ b_3)$$

şeklinde tanımlansın. $\odot$ ikili işlemi de

$$\begin{aligned}(a_0,a_1,a_2,a_3)\odot(b_0,b_1,b_2,b_3) = (&a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3,\\ &a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3-a_3b_2,\\ &a_0b_2-a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1,\\ &a_0b_3 + a_1b_2-a_2b_1 + a_3b_0)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $(Q,\oplus,\odot)$ sistemine kuaterniyonların bölümlü halkası veya kısaca kuaterniyonlar halkası denir.

Kuaterniyonların çarpımlarının bazı özelliklerini şöyle verebiliriz.

(1) $x \in Q$, $x = (x_0,x_1,x_2,x_3)$ ve $\bar{x} = (x_0,-x_1,-x_2,-x_3)$ ise,

$$\bar{\bar{x}} = (x_0,x_1,x_2,x_3)$$

dır.

(2) $$x\odot\bar{y} = (x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, -x_0y_1 + x_1y_0 - x_2y_3 + x_3y_2, -x_0y_2 + x_1y_3 + x_2y_0 - x_3y_1, -x_0y_3 - x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_0)$$

(3) $$\bar{x}\odot y = (x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, x_0y_1 - x_1y_0 - x_2y_3 + x_3y_2, x_0y_2 + x_1y_3 - x_2y_0 + x_3y_1, x_0y_3 - x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_0)$$

(2) ve (3) den,

$$x\odot\bar{y} \neq \bar{x}\odot y$$

dır.

(4) $$\bar{x}\odot\bar{y} = (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3, -x_0y_1 - x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2, -x_0y_2 - x_1y_3 - x_2y_0 + x_3y_1, -x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 - x_3y_0)$$

(5) $$\overline{x\odot y} = (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3, -x_0y_1 - x_1y_0 - x_2y_3 + x_3y_2, -x_0y_2 + x_1y_3 - x_2y_0 - x_3y_1, -x_0y_3 - x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_0)$$

(4) ve (5) den,

$$\overline{x\odot y} \neq \bar{x}\odot\bar{y}$$

dır.

(6) $a \in \mathbb{R}$, $x \in Q$ olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} a\odot x &= (a,0,0,0)\odot(x_0,x_1,x_2,x_3) \\ &= (ax_0,ax_1,ax_2,ax_3) \\ &= (x_0a,x_1a,x_2a,x_3a) \\ &= (x_0,x_1,x_2,x_3)\odot(a,0,0,0) \\ &= x\odot a \end{aligned}$$

dır.

(7) $\overline{x\theta x} = (x_0x_0-x_1x_1-x_2x_2-x_3x_3, -x_0x_1-x_1x_0-x_2x_3 + x_3x_2,$

$-x_0x_2 + x_1x_3-x_2x_0-x_3x_1, -x_0x_3-x_1x_2 + x_2x_1-x_3x_0)$

$= (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 , -2x_0x_1, -2x_0x_2 , -2x_0x_3)$

(8) $\bar{x}\theta\bar{x} = (x_0x_0-x_1x_1-x_2x_2-x_3x_3, -x_0x_1-x_1x_0 + x_2x_3-x_3x_2,$

$-x_0x_2-x_1x_3-x_2x_0 + x_3x_1, -x_0x_3 + x_1x_2-x_2x_1-x_3x_0)$

$= (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, -2x_0x_1 , -2x_0x_2 , -2x_0x_3)$

(7) ve (8) den,

$$\overline{x\theta x} = \bar{x}\theta\bar{x}$$

dir.

(9) $\overline{\bar{x}\theta y} = (x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, -x_0y_1+x_1y_0+x_2y_3-x_3y_2,$

$-x_0y_2-x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1, -x_0y_3+x_1y_2-x_2y_1+x_3y_0)$

(10) $\bar{y}\theta x = (y_0x_0 + y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3, y_0x_1-y_1x_0-y_2x_3+y_3x_2,$

$y_0x_2 +y_1x_3-y_2x_0-y_3x_1, y_0x_3-y_1x_2 + y_2x_1-y_0x_3)$

(9) ve (10) dan,

$$\overline{\bar{x}\theta y} = \bar{y}\theta x$$

dir.

(11) $\overline{x\theta\bar{y}} = (x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, x_0y_1-x_1y_0+x_2y_3-x_3y_2,$

$x_0y_2-x_1y_3-x_2y_0 + x_3y_1, x_0y_3 + x_1y_2-x_2y_1-x_3y_0)$

(12) $y\theta\bar{x} = (y_0x_0 + y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3, -y_0x_1+y_1x_0-y_2x_3+y_3x_2,$

$-y_0x_2 + y_1x_3 + y_2x_0-y_3x_1, -y_0x_3-y_1x_2+y_2x_1+y_3x_0)$

(11) ve (12) den,

$$\overline{x\theta\bar{y}} = y\theta\bar{x}$$

dir.

(13) $\bar{x}\theta x = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, x_0x_1-x_1x_0-x_2x_3 + x_3x_2,$

$x_0x_2 + x_1x_3-x_2x_0-x_3x_1, x_0x_3-x_1x_2 + x_2x_1-x_3x_0)$

$= (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, 0, 0, 0)$

$= x\theta\bar{x}$

(6) ve (13) den,

$$x\theta\bar{x}\theta y = \bar{x}\theta x\theta y = y\theta\bar{x}\theta x = y\theta x\theta\bar{x}$$

dir.

Örnek 5.2.1 (Cayley Dickson Cebiri): Q kuaterniyonlar halkası ve

$$S = \{x + \lambda y : x,y \in Q \ , \ \lambda \notin Q\}$$

olsun. S üzerinde $\oplus$ işlemi, Q nun toplama işlemi cinsinden,

$$(x + \lambda y) \oplus (u + \lambda v) = (x + u) + \lambda(y + v)$$

şeklinde tanımlansın. S üzerinde $*$ işlemi de,

$x \in Q$, $x = (x_0,x_1,x_2,x_3)$ için,

$$\psi : Q \to Q$$

$$\psi(x) = (x_0,-x_1,-x_2,-x_3) = \bar{x}$$

dönüşümü yardımıyla ve Q daki çarpma işlemi cinsinden,

$$(x + \lambda y)*(u + \lambda v) = (xu-v\psi(y)) + \lambda(uy + \psi(x)v)$$

şeklinde tanımlansın. Böyle elde edilen (S, $\oplus$,$*$) sistemi bir alterne yarıcisimdir. Fakat çarpımın birleşme özelliğini sağlamaz.

(S, $\oplus$) , birim elemanı, $0 = 0 + \lambda 0$ olan, bir değişmeli grup-tur.

(S-{0},$*$) sisteminin, birim elemanını belirleyerek, yarıgrup aksiyomlarını sağladığını gösterelim. Bunlar gösterilirken, yeri geldiğince kuaterniyonların (1),(2),...,(13) özellikleri kullanılacaktır.

(i) $a + \lambda b \neq 0 + \lambda 0$ için,

$$(a + \lambda b)*(x + \lambda y) = c + \lambda d \tag{5.1}$$

nin bir tek $x + \lambda y$ çözümünü araştıralım.

$a \neq 0$, $b = 0$ ise,

$$(a + \lambda 0)*(x + \lambda y) = c + \lambda d \Rightarrow ax + \lambda(\bar{a}y) = c + \lambda d$$

$\Rightarrow$ $ax = c$ ve $\bar{a}y = d$ $\Rightarrow x = a^{-1}c$ ve $y = \bar{a}^{-1}d$

$\Rightarrow$ $x + \lambda y = a^{-1}c + \lambda(\bar{a}^{-1}d) \in S$ tektir.

$a = 0$, $b \neq 0$ ise,

$\lambda b * (x + \lambda y) = c + \lambda d \Rightarrow (-y\bar{b}) + \lambda(xb) = c + \lambda d \Rightarrow -y\bar{b} = c$ ve $xb = d \Rightarrow y = -c\bar{b}^{-1}$ ve $x = db^{-1} \Rightarrow x+\lambda y = db^{-1} + \lambda(-c\bar{b}^{-1}) \in S$ tektir.

$a \neq 0$, $b \neq 0$ ise,

$(a + \lambda b) * (x + \lambda y) = c + \lambda d \Rightarrow (ax-y\bar{b}) + \lambda(xb + \bar{a}y) = c + \lambda d$

$\Rightarrow ax-y\bar{b} = c$ ve $xb + \bar{a}y = d$ elde edilir. Buradan,

$ax-y\bar{b} = c \Rightarrow ax = c + y\bar{b} \Rightarrow x = a^{-1}(c + y\bar{b})$ ve

$xb + \bar{a}y = d \Rightarrow a^{-1}(c + y\bar{b})b + \bar{a}y = d \Rightarrow a^{-1}cb + a^{-1}y\bar{b}b + \bar{a}y = d$

$\Rightarrow a^{-1}y\bar{b}b + \bar{a}y = d-a^{-1}cb \Rightarrow a^{-1}\bar{b}by + \bar{a}y = d-a^{-1}cb$

$\Rightarrow (a^{-1}\bar{b}b + \bar{a})y = d-a^{-1}cb \Rightarrow y = (a^{-1}\bar{b}b + \bar{a})^{-1}(d-a^{-1}cb)$

ve dolayısıyla,

$$x = a^{-1}[c + (a^{-1}\bar{b}b + \bar{a})^{-1}(d-a^{-1}cb)\bar{b}]$$

dir. Yani

$$x + \lambda y = a^{-1}[c + (a^{-1}\bar{b}b + \bar{a})^{-1}(d-a^{-1}cb)\bar{b}] + \lambda[(a^{-1}\bar{b}b+\bar{a})^{-1}(d-a^{-1}cb)] \in S$$

tektir.

(ii) $a + \lambda b \neq 0 + \lambda 0$ için,

$$(x + \lambda y) * (a + \lambda b) = c + \lambda d \qquad (5.2)$$

olacak biçimde bir tek $x + \lambda y \in S$ nin varolduğunu gösterelim.

$a \neq 0$, $b = 0$ ise,

$(x + \lambda y) * (a + \lambda 0) = c + \lambda d \Rightarrow xa + \lambda(ay) = c + \lambda d$

$\Rightarrow x = ca^{-1}$ ve $y = a^{-1}d \Rightarrow x + \lambda y = ca^{-1} + \lambda(a^{-1}d) \in S$ tektir.

$a = 0$, $b \neq 0$ ise,

$(x + \lambda y) * (\lambda b) = c + \lambda d \Rightarrow -b\bar{y} + \lambda(\bar{x}b) = c + \lambda d$

$\Rightarrow \bar{y} = -b^{-1}c$ ve $\bar{x} = db^{-1} \Rightarrow y = \overline{-b^{-1}c}$ ve $x = \overline{db^{-1}}$

$\Rightarrow x + \lambda y = \overline{db^{-1}} + \lambda(\overline{-b^{-1}c}) \in S$ tektir.

$a \neq 0$, $b \neq 0$ ise,

$(x + \lambda y) * (a + \lambda b) = c + \lambda d \Rightarrow (xa-b\bar{y}) + \lambda(ay + \bar{x}b) = c + \lambda d$

$\Rightarrow xa-b\bar{y} = c$ ve $ay + \bar{x}b = d$ dir. Buradan,

$xa-b\bar{y} = c \Rightarrow b\bar{y} = xa-c \Rightarrow \bar{y} = b^{-1}(xa-c) \Rightarrow y = \overline{b^{-1}(xa-c)}$

elde edilir. y nin değeri diğer denklemde yerine yazılırsa, $ay+\bar{x}b= d$

$\Rightarrow a\overline{b^{-1}(xa-c)} + \bar{x}b = d \Rightarrow \overline{a\overline{b^{-1}(xa-c)} + \bar{x}b} = \bar{d}$

$\Rightarrow \overline{a\overline{b^{-1}(xa-c)}} + \overline{\bar{x}b} = \bar{d} \Rightarrow b^{-1}(xa-c)\bar{a} + \bar{b}x = \bar{d}$

$\Rightarrow b^{-1}xa\bar{a}-b^{-1}c\bar{a} + \bar{b}x = \bar{d} \Rightarrow b^{-1}a\bar{a}x + \bar{b}x = \bar{d} + b^{-1}c\bar{a}$

$\Rightarrow (b^{-1}a\bar{a} + \bar{b})x = \bar{d} + b^{-1}c\bar{a} \Rightarrow x = (b^{-1}a\bar{a} + \bar{b})^{-1}(\bar{d} + b^{-1}c\bar{a})$

elde edilir. Dolayısıyla,

$x + \lambda y = (b^{-1}a\bar{a}+\bar{b})^{-1}(\bar{d}+b^{-1}c\bar{a}) + \lambda b^{-1}[(b^{-1}a\bar{a}+\bar{b})^{-1}(\bar{d}+b^{-1}c\bar{a})a-c] \in S$

tektir.

(iii) Her $(x + \lambda y) \in S$ için,

$(x + \lambda y) * (1 + \lambda 0) = (x + 0\bar{y}) + \lambda(1y + \bar{x}0) = x + \lambda y$

$(1 + \lambda 0) * (x + \lambda y) = (1x + y\bar{0}) + \lambda(x0 + \bar{1}y) = x + \lambda y$ (5.3)

olduğundan, $1 = 1 + \lambda 0$ S nin çarpımsal birimidir. Böylece (5.1),(5.2) ve (5.3) den $(S-\{0\},*)$, birim elemanı $1 = 1 + \lambda 0$ olan, bir yarı gruptur.

Her $x + \lambda y \in S$ için,

$$(x + \lambda y) * (0 + \lambda 0) = (0 + \lambda 0) * (x + \lambda y) = (0 + \lambda 0)$$

dır.

Dağılma kurallarının her ikisi de sağlanır. Şöyleki,

$(x+\lambda y) * [(u+\lambda v) \oplus (m+\lambda n)] = (x+\lambda y) * [(u + m) + \lambda(v + n)]$

$= (x(u + m)-(v+n)\bar{y}) + \lambda((u + m)y + \bar{x}(v + n))$

$= (xu + xm-v\bar{y}-n\bar{y}) + \lambda(uy + my + \bar{x}v + \bar{x}n)$

$= ((xu-v\bar{y}) + \lambda(uy + \bar{x}v)) \oplus ((xm-n\bar{y}) + \lambda(my + \bar{x}n))$

$= ((x + \lambda y) * (u + \lambda v)) \oplus ((x +\lambda y) * (m + \lambda n))$

$$[(x+\lambda y) \oplus (u+\lambda v)] \ast (m+\lambda n) = [(x+u) + \lambda(y+v)] \ast (m + \lambda n)$$
$$= ((x+u)m-n\overline{(y+v)}) + \lambda(m(y+v) + \overline{(x+u)}n)$$
$$= (xm+um-n\bar{y}-n\bar{v}) + \lambda(my+mv+\bar{x}n + \bar{u}n)$$
$$= ((xm-n\bar{y}) + \lambda(my+\bar{x}n)) \oplus ((um-n\bar{v})+\lambda(mv+\bar{u}n))$$
$$= ((x+\lambda y)\ast(m+\lambda n)) \oplus ((u+\lambda v)\ast(m+\lambda n))$$

dır. Böylece $(S, \oplus, \ast)$ bir yarıcisimdir. Bu yarıcismin alterne kurallarını da gerçeklediğini gösterelim.

$$((x + \lambda y)\ast(u + \lambda v))\ast(u + \lambda v) = (x + \lambda y)\ast((u + \lambda v)\ast(u + \lambda v)) \quad (5.4)$$

olduğu gösterilmeli.

$$((x+\lambda y)\ast(u+\lambda v))\ast(u+\lambda v) = ((xu-v\bar{y}) + \lambda(uy + \bar{x}v))\ast(u + \lambda v)$$
$$= (xu-v\bar{y})u-v\overline{(uy + \bar{x}v)} + \lambda(u(uy+\bar{x}v)+\overline{(xu-v\bar{y})}v)$$
$$= xuu-v\bar{y}u-v(\overline{uy} + \overline{\bar{x}v}) + \lambda(uuy+u\bar{x}v+(\overline{xu}-\overline{v\bar{y}})v)$$
$$= xuu-v\bar{y}u-v(\overline{uy}+\bar{v}x) + \lambda(uuy+u\bar{x}v + (\overline{xu}-y\bar{v})v)$$
$$= xuu-v\bar{y}u-v\overline{uy}-v\bar{v}x + \lambda(uuy + u\bar{x}v + \overline{xu}v-y\bar{v}v) \quad (5.5)$$

Diğer taraftan,

$$(x+\lambda y)\ast((u+\lambda v)\ast(u+\lambda v)) = (x + \lambda y)\ast((uu-v\bar{v}) + \lambda(uv + \bar{u}v))$$
$$= x(uu-v\bar{v})-(uv+\bar{u}v)\bar{y} + \lambda((uu-v\bar{v})y + \bar{x}(uv + \bar{u}v))$$
$$= xuu-xv\bar{v}-uv\bar{y}-\bar{u}v\bar{y}+\lambda(uuy-v\bar{v}y+\bar{x}uv+\bar{x}\bar{u}v) \quad (5.6)$$

dir. (5.5) ve (5.6) nın eşitliğinden,

$$xuu-v\bar{y}u-v\overline{uy} - v\bar{v}x = xuu-xv\bar{v}-uv\bar{y}-\bar{u}v\bar{y} \quad (5.7)$$

ve

$$uuy + u\bar{x}v + \overline{xu}v - y\bar{v}v = uuy-v\bar{v}y + \bar{x}uv + \bar{x}\bar{u}v \quad (5.8)$$

elde edilir. (5.7) den,

$$xuu-v\bar{y}u- v\overline{uy} -v\bar{v}x-xuu + xv\bar{v} + uv\bar{y} + \bar{u}v\bar{y} = 0$$

olmalıdır.

$$(u+\bar{u})v\bar{y}-v(\bar{y}u + \overline{uy}) = ((u_0,u_1,u_2,u_3)+(u_0,-u_1,-u_2,-u_3))(v_0,v_1,v_2,v_3)$$
$$(y_0,-y_1,-y_2,-y_3)-(v_0,v_1,v_2,v_3)((y_0,-y_1,-y_2,-y_3)$$
$$(u_0,u_1,u_2,u_3) + \overline{(u_0,u_1,u_2,u_3)(y_0,y_1,y_2,y_3)})$$

$$(u+\bar{u})v\bar{y}-v(\bar{y}u+\overline{uy}) = (2u_0,0,0,0)(v_0y_0+v_1y_1+v_2y_2+v_3y_3, -v_0y_1+v_1y_0-v_2y_3+v_3y_2, -v_0y_2+v_1y_3+v_2y_0-v_3y_1, -v_0y_3-v_1y_2+v_2y_1+v_3y_0)-(v_0,v_1,v_2,v_3)(2v_0y_0,-2u_0y_1,-2u_0y_2,-2u_0y_3)$$

$$= (2u_0,0,0,0)(v_0y_0+v_1y_1+v_2y_2+v_3y_3, -v_0y_1+v_1y_0-v_2y_3+v_3y_2, -v_0y_2+v_1y_3+v_2y_0-v_3y_1, -v_0y_3-v_1y_2+v_2y_1+v_3y_0)-(2u_0,0,0,0)(v_0y_0+v_1y_1+v_2y_2+v_3y_3, -v_0y_1+v_1y_0-v_2y_3+v_3y_2, -v_0y_2+v_1y_3+v_2y_0-v_3y_1, -v_0y_3-v_1y_2+v_2y_1+v_3y_0)$$

$$= 0$$

dır. Benzer şekilde (5.8) den,

$$uuy + u\bar{x}v + xu\,v-y\bar{v}v-uuy + v\bar{v}y-\bar{x}uv-\bar{x}\bar{u}v = 0$$

olmalıdır.

$$(u\bar{x}+\overline{xu})v-\bar{x}(u+\bar{u})v$$

$$= ((u_0,u_1,u_2,u_3)\overline{(x_0,x_1,x_2,x_3)}+\overline{(x_0,x_1,x_2,x_3)(u_0,u_1,u_2,u_3)})(v_0,v_1,v_2,v_3) - (x_0,-x_1,-x_2,-x_3)((u_0,u_1,u_2,u_3)+(u_0,-u_1,-u_2,-u_3))(v_0,v_1,v_2,v_3)$$

$$= (2u_0x_0,-2u_0x_1,-2u_0x_2,-2u_0x_3)(v_0,v_1,v_2,v_3) -(x_0,-x_1,-x_2,-x_3)(2u_0v_0,2u_0v_1,2u_0v_2,2u_0v_3)$$

$$= (2u_0,0,0,0)(x_0,-x_1,-x_2,-x_3)(v_0,v_1,v_2,v_3) -(x_0,-x_1,-x_2,-x_3)(2u_0,0,0,0)(v_0,v_1,v_2,v_3)$$

$$= 0$$

dır. Dolayısıyla (5.4) eşitliği (sağ alterne kuralı) geçerlidir.

Benzer işlemler ile sol alterne kuralının geçerliliği yani,

$$(x+\lambda y)\ast((x+\lambda y)\ast(u+\lambda v)) = ((x+\lambda y)\ast(x+\lambda y))\ast(u+\lambda v)$$

olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla $(S, \oplus, \ast)$ sistemi bir alterne yarıcisimdir. Bu alterne yarıcismin birleşme kuralını sağlamadığını bir örnek ile gösterelim.

$$[((1,0,0,0)+\lambda(0,1,0,0))*((0,1,0,0)+\lambda(1,0,0,0))]*((0,0,1,0)+\lambda(0,0,0,1))$$
$$=[(1,0,0,0)(0,1,0,0)-(1,0,0,0)(0,-1,0,0)+\lambda((0,1,0,0)(0,1,0,0)$$
$$+(1,0,0,0)(1,0,0,0))]*((0,0,1,0)+\lambda(0,0,0,1))$$
$$=((0,2,0,0)+\lambda(0,0,0,0))*((0,0,1,0)+\lambda(0,0,0,1))$$
$$=(0,2,0,0)(0,0,1,0)+\lambda((0,-2,0,0)(0,0,0,1))$$
$$=(0,0,0,2)+\lambda(0,0,2,0) \tag{5.9}$$

$$((1,0,0,0)+\lambda(0,1,0,0))*[((0,1,0,0)+\lambda(1,0,0,0))*((0,0,1,0)+\lambda(0,0,0,1))]$$
$$=((1,0,0,0)+\lambda(0,1,0,0))*[(0,1,0,0)(0,0,1,0)-(0,0,0,1)(1,0,0,0)$$
$$+\lambda((0,0,1,0)(1,0,0,0)+(0,-1,0,0)(0,0,0,1))]$$
$$=((1,0,0,0)+\lambda(0,1,0,0))*((0,0,0,0)+\lambda(0,0,2,0))$$
$$=-(0,0,2,0)(0,-1,0,0)+\lambda((1,0,0,0)(0,0,2,0))$$
$$=-(0,0,0,2)+\lambda(0,0,2,0)$$
$$=(0,0,0,-2)+\lambda(0,0,2,0) \tag{5.10}$$

(5.9) ve (5.10) dan,

$$[(a+\lambda b)*(c+\lambda d)]*(e+\lambda f) \neq (a+\lambda b)*[(c+\lambda d)*(e+\lambda f)]$$

dir.

Yukarıda ele alınan Cayley-Dickson Cebri örneği (Uçan, 1987) de daha geniş kapsamlı olarak incelenmiş ve bazı özelliklerin sağlandığı ayrıntılara değinilerek gösterilmiştir.

6. YAKLAŞIK CİSİMLER ÜZERİNDE PROJEKTİF DÜZLEMLER

6.1. Sol Yaklaşık Cisimler Üzerinde Projektif Düzlemler

Tanım 6.1.1: Çarpma işlemi birleşmeli olan, sol yarıcisme sol yaklaşık cisim denir.

Teorem 6.1.1: Herhangi bir $(S,+,.)$ sisteminin $T(a,b,c) = ab+c$ üçlü işlemiyle birlikte bir sol yaklaşık cisim olması için gerek ve yeter koşul $(S,+,.)$ sisteminin aşağıdaki özellikleri sağlamasıdır.

(i) $(S,+)$ bir değişmeli gruptur.

(ii) $(S-\{0\},.)$ bir gruptur.

(iii) Her $x \in S$ için, $0.x = 0$ dır.

(iv) Her $x,y,z \in S$ için $x.(y+z) = x.y + x.z$ dir.

(v) $a \neq b$ olmak üzere verilen her $a,b,c \in S$ için,

$-ax + bx = c$ denkleminin bir tek $x \in S$ çözümü vardır.

İspat: Teorem 4.1.1 in ispatına benzetilerek kolaylıkla gösterilebilir ■

Genel olarak bu teoremdeki (v) koşulu diğerlerinin bir sonucu değildir. Yani (i),(ii).(iii) ve (iv) koşullarını sağlayan herhangi bir $(S,+,.)$ cebirsel yapısı bir projektif düzlem belirtmeyebilir. Sol yaklaşık cisimlerin belirttiği düzlemler $([\infty], [\infty])$-, $((\infty),(0))$- ve $((0),(\infty))$-Dezargseldir. Sonlu bir sol yaklaşık cisim örneği çözümsüz olarak aşağıda verilmektedir.

Örnek 6.1.1 (Zassenhaus, 1936): p bir asal sayı, h bir pozitif tamsayı ve $q = p^h$ olsun. n de bütün asal çarpanları $q-1$ sayısını bölen bir pozitif tamsayı olsun. Üstelik $q \equiv 3 \bmod 4$ olduğu zaman $n \not\equiv 0 \bmod 4$ koşulunun sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $r = hn$ olmak üzere $GF(p^r)$ sonlu cisminden bir sol yaklaşık cisim şöyle elde edilir: S nin elemanları $GF(p^r)$ nin elemanlarıyla aynı olsun. Ayrıca S deki $+$ işlemi $GF(p^r)$ deki $+$ işlemi olsun. c, $GF(p^r)$ nin belli bir primitif kökü (yani $c^{q^r-1}=1$, ve her $k < q^r-1$ için $c^k \neq 1$) olsun. Eğer $y = c^{kn+j}$ ise, $q^i \equiv 1 + j(q-1)[\bmod n(q-1)]$ olacak biçimde bir tek $i(\bmod n)$ sayısı vardır. Buna göre S deki Θ çarpımı

$$x\Theta y = x \cdot y^{q^i}$$

biçiminde tanımlansın. Böyle elde edilen $(S,+,\Theta)$ sistemi bir sol yaklaşık cisimdir.

Örnek 6.1.2 (Pickert, 1975): S, Z tamsayılar halkasından sıralı bir F cismine aşağıdaki biçimde tanımlanan σ dönüşümlerinin kümesi olsun.

Her bir σ dönüşümü için öyle bir n_σ tamsayısı vardır ki $\sigma(n_\sigma) \neq 0$ dır ve $i < n_\sigma$ tamsayıları için $\sigma(i) = 0$ dır. Ayrıca her $i \in Z$ için $o(i) = 0 \in F$ biçiminde tanımlanan o dönüşümü de S ye aittir. Böylece;

$$S = \{\sigma : \sigma : Z \to F\} \cup \{o\}$$

olmaktadır. S deki + işlemi, $\alpha, \beta \in S$ ve $i \in Z$ için,

$$(\alpha + \beta)(i) = \alpha(i) + \beta(i)$$

şeklinde tanımlanmaktadır ve $(S,+)$ nın birim elemanı o olan bir grup olduğu hemen gösterilebilir. Şöyleki;

Her $i \in Z$ için $o(i) = 0$ olduğundan, her $\alpha \in S$ için

$(\alpha + o)(i) = \alpha(i) + o(i) = \alpha(i) \Rightarrow \alpha + o = \alpha \Rightarrow o \in S$ toplamsal birim elemandır.

$\alpha \in S$ için $\alpha + \beta = o \Rightarrow i \in Z$ için, $(\alpha + \beta)(i) = o(i) = 0$ $\Rightarrow \alpha(i) + \beta(i) = o(i) = 0 \Rightarrow \beta(i) = -\alpha(i) \Rightarrow \beta = -\alpha \Rightarrow \alpha + (-\alpha) = o$ dır.

$\alpha, \beta, \gamma \in S$ ve $i \in Z$ için, $((\alpha + \beta) + \gamma)(i) = (\alpha + \beta)(i) + \gamma(i)$ $= (\alpha(i) + \beta(i)) + \gamma(i) = \alpha(i) + (\beta(i) + \gamma(i)) = \alpha(i) + (\beta + \gamma)(i)$ $= (\alpha + (\beta + \gamma))(i) \Rightarrow (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ dır.

Θ işlemi ise, $\alpha \Theta o = o \Theta \alpha = o$ olmak üzere, $\alpha, \beta \in S$ ve $i \in Z$ için,

$$(\alpha O \beta)(i) = \sum_{j+k=i} \alpha(j)\beta(k)\psi(n_\alpha,k) \qquad , \ (\alpha,\beta \neq o)$$

ile tanımlanmaktadır. Buradaki ψ,

$$\psi : Z \times Z \rightarrow \{a : a \in F \ , \ a > 0\}$$

özelliğinde bir dönüşümdür. Ayrıca ψ dönüşümü,

$$\psi(x,y).\psi(x + x',y') = \psi(x,y + y').\psi(x',y') \quad \text{ve} \quad \psi(0,0) = 1$$

koşullarını sağlar ve $\psi(p,r) \neq \psi(q,r)$ olacak şekilde p,q,r tamsayıları vardır. ψ dönüşümü yerine, $c > 0$ ve $c \in F-\{1\}$ olmak üzere $(x,y) \rightarrow c^{xy}$ dönüşümü de alınabilir. Çünkü, $c \in F-\{1\}$, $c > 0$ ve $x,y \in Z$ olmak üzere $c^{xy} > 0$ dır. Bunun yanında,

$$\begin{aligned}
\psi(x,y).\psi(x + x',y') &= c^{xy}.c^{(x+x')y'} \\
&= c^{xy + xy' + x'y'} \\
&= c^{x(y + y') + x'y'} \\
&= c^{x(y + y')}.c^{x'y'} \\
&= \psi(x,y + y').\psi(x',y')
\end{aligned}$$

dür ve

$$\psi(p,r) = c^{pr} \neq c^{qr} = \psi(q,r)$$

olacak biçimde $p,q,r \in Z$ vardır.

Şimdi, $i < n_\alpha + n_\beta$ ise,

$$(\alpha O \beta)(i) = 0$$

olduğunu gösterelim.

$\alpha \in S \Rightarrow \alpha(n_\alpha) \neq 0$ ve $j < n_\alpha$ için $\alpha(j) = 0$ özelliğinde $n_\alpha \in Z$ vardır.

$\beta \in S \Rightarrow \beta(n_\beta) \neq 0$ ve $k < n_\beta$ için $\beta(k) = 0$ özelliğinde $n_\beta \in Z$ vardır. Buradan,

$$i = j + k < n_\alpha + n_\beta \Rightarrow (\alpha O \beta)(i) = \sum_{j+k=i} \alpha(j)\beta(k)\psi(n_\alpha,k) = 0$$

dır. Oysa sıfırdan farklı elemanlar $j \geqslant n_\alpha$, $k \geqslant n_\beta$ dolayısıyla $i = j + k \geqslant n_\alpha + n_\beta$ olması durumunda ortaya çıkmaktadır. j nin alabileceği değerler n_α, $n_\alpha + 1, n_\alpha + 2, \ldots, i-n_\beta$ dır. Yani j nin alabileceği en büyük değer $i-n_\beta$ dır. Çünkü j, $i-n_\beta + 1$ değerini alabilseydi, k nın alabileceği en küçük değer n_β olduğundan, $j + k = i-n_\beta + 1 + n_\beta = i + 1$ olurdu bu ise $j + k = i$ olması ile çelişir. O halde j nin alabileceği değerlerin sayısı ve dolayısıyla toplam işareti altında sıfırdan farklı terimlerin sayısı, $((i-n_\beta)-n_\alpha) + 1 = i-(n_\alpha + n_\beta) + 1$ dir. Bu nedenle bahsi geçen toplam sadece görünüşte bir sonsuz toplamdır.

Şimdi,

$$n_\alpha + n_\beta = n_{\alpha o \beta}$$

olduğunu gösterelim.

$\alpha o \beta \in S \Rightarrow n_{\alpha o \beta} \in Z$ vardır, $(\alpha o \beta)(n_{\alpha o \beta}) \neq 0$ ve $i < n_{\alpha o \beta}$ için $(\alpha o \beta)(i) = 0$ dır. Oysa $i < n_\alpha + n_\beta$ için $(\alpha o \beta)(i) = 0$ olduğu yukarıda açıklandı. Ayrıca,

$$(\alpha o \beta)(n_\alpha + n_\beta) = \sum_{j+k = n_\alpha + n_\beta} \alpha(j)\beta(k)\psi(n_\alpha, k)$$

$$= \alpha(n_\alpha)\beta(n_\beta)\psi(n_\alpha, n_\beta) \neq 0$$

dır. Çünkü $j = n_\alpha$, $k = n_\beta$ olmak zorundadır. Eğer $j = n_\alpha + 1$ ise, $j + k = n_\alpha + n_\beta$ olduğundan $k = n_\alpha + n_\beta - (n_\alpha + 1) = n_\beta - 1$ olur ve $\beta(n_\beta - 1) = 0$ dır. Bunu toplamı açık yazarak tekrar görelim.

$$\sum_{j+k = n_\alpha + n_\beta} \alpha(j)\beta(k)\psi(n_\alpha, k) = \ldots \alpha(n_\alpha - 2)\beta(n_\beta + 2)\psi(n_\alpha, n_\beta + 2)$$

$$+ \alpha(n_\alpha - 1)\beta(n_\beta + 1)\psi(n_\alpha, n_\beta + 1) + \alpha(n_\alpha)\beta(n_\beta)\psi(n_\alpha, n_\beta)$$

$$+ \alpha(n_\alpha + 1)\beta(n_\beta - 1)\psi(n_\alpha, n_\beta - 1)$$

$$+ \alpha(n_\alpha + 2)\beta(n_\beta - 2)\psi(n_\alpha, n_\beta - 2) + \ldots$$

$$= \alpha(n_\alpha)\beta(n_\beta)\psi(n_\alpha, n_\beta)$$

$$\neq 0$$

$(\alpha(n_\alpha) \neq 0, \beta(n_\beta) \neq 0, \psi(n_\alpha, n_\beta) \neq 0)$

$n_{\alpha o \beta}$, $n_\alpha + n_\beta \in Z$ olduğundan, $n_{\alpha o \beta} < n_\alpha + n_\beta$ veya $n_\alpha + n_\beta < n_{\alpha o \beta}$

olabilir. Oysa $n_{\alpha O\beta} < n_\alpha + n_\beta \Rightarrow (\alpha O\beta)(n_{\alpha O\beta}) = 0$ ve benzer şekilde $n_\alpha + n_\beta < n_{\alpha O\beta} \Rightarrow (\alpha O\beta)(n_\alpha + n_\beta) = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $n_{\alpha O\beta} = n_\alpha + n_\beta$ dır.

ψ için koyulan şartlardan dolayı $\psi(x,0) = 1 = \psi(0,y)$ dir. Bu nedenle 0 tamsayısını F nin 1 elemanına (çarpımsal birim eleman), diğer bütün tamsayıları F nin 0 elemanına dönüştüren dönüşüm çarpımın birim elemanıdır.

$$\nu(i) = \begin{cases} 1 & , \quad i = 0 \text{ iken} \\ 0 & , \quad i \neq 0 \text{ iken} \end{cases}$$

olmak üzere $(\alpha O\nu)(i) = \alpha(i)$ olduğunu göstermeliyiz.

$(\alpha O\nu)(i) = \sum_{j+k=i} \alpha(j)\nu(k)\psi(n_\alpha,k)$ olduğundan $k = 0$ ve $k \neq 0$ durumlarını inceleyelim.

$k = 0$ ise,

$$\begin{aligned} (\alpha O\nu)(i) &= \sum_{j=i} \alpha(j)\nu(0)\psi(n_\alpha,0) \\ &= \sum_{j=i} \alpha(j).1.1 \\ &= \alpha(i) \end{aligned} \tag{6.1}$$

$k \neq 0$ ise,

$$\begin{aligned} (\alpha O\nu)(i) &= \sum_{j+k=i} \alpha(j)\nu(k)\psi(n_\alpha,k) \\ &= \sum_{j+k=i} \alpha(j).0.\psi(n_\alpha,k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $k \neq 0$ iken $\alpha(i) = 0$ olmalıdır.

$\alpha \in S \Rightarrow \alpha(n_\alpha) \neq 0$ ve $i < n_\alpha$ için $\alpha(i) = 0$ özelliğinde $n_\alpha \in Z$ vardır.

$\nu \in S \Rightarrow \nu(n_\nu) \neq 0$ ve $k \neq n_\nu (n_\nu = 0)$ için $\nu(k) = 0$ özelliğinde $n_\nu = 0 \in Z$ vardır.

$(\alpha o \nu) \in S \Rightarrow (\alpha o \nu)(n_{\alpha o \nu}) \neq 0$ ve $i < n_{\alpha o \nu}$ için $(\alpha o \nu)(i) = 0$ özelliğinde $n_{\alpha o \nu} \in Z$ vardır.

$$(\alpha o \nu)(i) = 0 \Rightarrow i < n_{\alpha o \nu} = n_\alpha + n_\nu = n_\alpha + 0 = n_\alpha$$
$$\Rightarrow i < n_\alpha \text{ için } \alpha(i) = 0$$

dır. Böylece

$$(\alpha o \nu)(i) = 0 = \alpha(i) \tag{6.2}$$

bulunur.

(6.1) ve (6.2) den ν birim elemandır.

$$\nu(i) = \begin{cases} 1 & , i = 0 \text{ iken} \\ 0 & , i \neq 0 \text{ iken} \end{cases}$$

olmak üzere $\alpha, \nu \in S$ verildiğinde, $\alpha o \beta = \nu$ olacak biçimde $\beta \in S$ nin varlığını gösterelim

$\nu \in S \Rightarrow \nu(n_\nu) \neq 0$ ve $i \neq n_\nu = 0$ için $\nu(i) = 0$ özelliğinde $n_\nu = 0 \in Z$ dir.

$\alpha o \beta \in S \Rightarrow (\alpha o \beta)(n_\alpha + n_\beta) \neq 0$ ve $i < n_\alpha + n_\beta$ için $(\alpha o \beta)(i) = 0$ özelliğinde $n_\alpha + n_\beta \in Z$ vardır. $0 = n_\nu = n_\alpha + n_\beta$ olduğundan, $n_\beta = -n_\alpha$ dır, yani $\beta \in S$ için n_β bellidir.

$\beta(i)$ yi belirleyen eşitlikler,

$$\alpha(n_\alpha)\beta(-n_\alpha)\psi(n_\alpha, -n_\alpha) = 1$$

$$\alpha(n_\alpha)\beta(-n_\alpha + i)\psi(n_\alpha, -n_\alpha + i) + \sum_{j=1}^{i} \alpha(n_\alpha + j)\beta(-n_\alpha + i - j)\psi(n_\alpha, -n_\alpha + i - j)$$

$$= 0 \qquad (i > n_\alpha \text{ için})$$

biçiminde elde edilir. $\alpha(n_\alpha)\psi(n_\alpha, -n_\alpha + i) \neq 0 \quad (i \geqslant 0)$ ve

$-n_\alpha + i-j < -n_\alpha + i$ olduğundan, bu denklem sisteminden $\beta(-n_\alpha + i)$ $(i \geqslant 0)$ değerleri aşağıdaki biçimde hesaplanabilir.

$i = 0$ için $(\alpha o\beta)(0) = \nu(0) = 1$ dir. Buradan,

$$\alpha(n_\alpha)\beta(-n_\alpha)\psi(n_\alpha,-n_\alpha) = 1 \Rightarrow \beta(-n_\alpha) = (\alpha(n_\alpha))^{-1}(\psi(n_\alpha,-n_\alpha))^{-1}$$

elde edilir.

$i = 1$ için $(\alpha o\beta)(1) = \nu(1) = 0$ dır. Buradan,

$$\alpha(n_\alpha)\beta(-n_\alpha+1)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+1) + \sum_{j=1} \alpha(n_\alpha+j)\beta(-n_\alpha+1-j)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+1-j) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(n_\alpha)\beta(-n_\alpha+1)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+1) + \alpha(n_\alpha+1)\beta(-n_\alpha)\psi(n_\alpha,-n_\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(n_\alpha)\beta(-n_\alpha+1)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+1) + \alpha(n_\alpha+1)(\alpha(n_\alpha))^{-1}(\psi(n_\alpha,-n_\alpha))^{-1}\psi(n_\alpha,-n_\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \beta(-n_\alpha+1) = -\alpha(n_\alpha+1)(\alpha(n_\alpha))^{-2}(\psi(n_\alpha,-n_\alpha+1))^{-1}$$

olur.

$i = 2$ için $(\alpha o\beta)(2) = \nu(2) = 0$ dır. Buradan,

$$\alpha(n_\alpha)\beta(-n_\alpha+2)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+2) + \sum_{j=1}^{2} \alpha(n_\alpha+j)\beta(-n_\alpha+2-j)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+2-j) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(n_\alpha)\beta(-n_\alpha+2)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+2) + \alpha(n_\alpha+1)\beta(-n_\alpha+1)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+1)$$
$$+ \alpha(n_\alpha+2)\beta(-n_\alpha)\psi(n_\alpha,-n_\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(n_\alpha)\beta(-n_\alpha+2)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+2) - (\alpha(n_\alpha+1))^2(\alpha(n_\alpha))^{-2} + \alpha(n_\alpha+2)(\alpha(n_\alpha))^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \beta(-n_\alpha+2) = [(\alpha(n_\alpha+1))^2(\alpha(n_\alpha))^{-2} + \alpha(n_\alpha+2)(\alpha(n_\alpha))^{-1}](\alpha(n_\alpha))^{-1}$$
$$.(\psi(n_\alpha,-n_\alpha+2))^{-1}$$

$$\Rightarrow \beta(-n_\alpha+2) = [(\alpha(n_\alpha+1))^2(\alpha(n_\alpha))^{-1} + \alpha(n_\alpha+2)](\alpha(n_\alpha))^{-2}(\psi(n_\alpha,-n_\alpha+2))^{-1}$$

elde edilir.

$i = 3$ için $(\alpha o \beta)(3) = \nu(3) = 0$ dır. Böylece,

$$\alpha(n_\alpha)\beta(-n_\alpha+3)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+3)+\sum_{j=1}^{3}\alpha(n_\alpha+j)\beta(-n_\alpha+3-j)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+3-j)=0$$

$$\Rightarrow \alpha(n_\alpha)\beta(-n_\alpha+3)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+3)+\alpha(n_\alpha+1)\beta(-n_\alpha+2)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+2)$$

$$+\alpha(n_\alpha+2)\beta(-n_\alpha+1)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+1)+\alpha(n_\alpha+3)\beta(-n_\alpha)\psi(n_\alpha,-n_\alpha)=0$$

$$\Rightarrow \alpha(n_\alpha)\beta(-n_\alpha+3)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+3)+[(\alpha(n_\alpha+1))^2(\alpha(n_\alpha))^{-1}-\alpha(n_\alpha+2)]$$

$$.\alpha(n_\alpha+1)(\alpha(n_\alpha))^{-2}-\alpha(n_\alpha+2)\alpha(n_\alpha+1)(\alpha(n_\alpha))^{-2}$$

$$+\alpha(n_\alpha+3)(\alpha(n_\alpha))^{-1}=0$$

$$\Rightarrow \alpha(n_\alpha)\beta(-n_\alpha+3)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+3)+(\alpha(n_\alpha+1))^3(\alpha(n_\alpha))^{-3}$$

$$-\alpha(n_\alpha+2)\alpha(n_\alpha+1)(\alpha(n_\alpha))^{-2}-\alpha(n_\alpha+2)\alpha(n_\alpha+1)(\alpha(n_\alpha))^{-2}$$

$$+\alpha(n_\alpha+3)(\alpha(n_\alpha))^{-1}=0$$

$$\Rightarrow \beta(-n_\alpha+3)=[-(\alpha(n_\alpha+1))^3(\alpha(n_\alpha))^{-2}+2\alpha(n_\alpha+2)\alpha(n_\alpha+1)(\alpha(n_\alpha))^{-1}$$

$$-\alpha(n_\alpha+3)]\ (\alpha(n_\alpha))^{-2}(\psi(n_\alpha,-n_\alpha+3))^{-1}$$

olur.

$i = 4$ için $(\alpha o \beta)(4) = \nu(4) = 0$ dır. Buradan,

$$\alpha(n_\alpha)\beta(-n_\alpha+4)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+4)+\sum_{j=1}^{4}\alpha(n_\alpha+j)\beta(-n_\alpha+4-j)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+4-j)=0$$

$$\Rightarrow \alpha(n_\alpha)\beta(-n_\alpha+4)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+4)+\alpha(n_\alpha+1)\beta(-n_\alpha+3)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+3)$$

$$+\alpha(n_\alpha+2)\beta(-n_\alpha+2)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+2)+\alpha(n_\alpha+3)\beta(-n_\alpha+1)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+1)$$

$$+\alpha(n_\alpha+4)\beta(-n_\alpha)\psi(n_\alpha,-n_\alpha)=0$$

$$\Rightarrow \alpha(n_\alpha)\beta(-n_\alpha+4)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+4)=[(\alpha(n_\alpha+1))^4(\alpha(n_\alpha))^{-2}-2\alpha(n_\alpha+2)\alpha(n_\alpha+1)^2$$

$$\cdot(\alpha(n_\alpha))^{-1}+\alpha(n_\alpha+3)\alpha(n_\alpha+1)](\alpha(n_\alpha))^{-2}+[-\alpha(n_\alpha+2)(\alpha(n_\alpha+1))^2$$

$$\cdot(\alpha(n_\alpha))^{-1}+(\alpha(n_\alpha+2))^2](\alpha(n_\alpha))^{-2}+\alpha(n_\alpha+3)\alpha(n_\alpha+1)(\alpha(n_\alpha))^{-2}$$

$$-\alpha(n_\alpha+4)(\alpha(n_\alpha))^{-1}$$

olur. Buradan,

$$\alpha(n_\alpha)\beta(-n_\alpha+4)\psi(n_\alpha,-n_\alpha+4) = [(\alpha(n_\alpha+1))^4(\alpha(n_\alpha))^{-3}-3\alpha(n_\alpha+2)$$
$$.(\alpha(n_\alpha+1))^2(\alpha(n_\alpha))^{-2}+2\alpha(n_\alpha+3)\alpha(n_\alpha+1)(\alpha(n_\alpha))^{-1}$$
$$+(\alpha(n_\alpha+2))^2(\alpha(n_\alpha))^{-1}-\alpha(n_\alpha+4)](\alpha(n_\alpha))^{-1}$$

$$\Rightarrow \beta(-n_\alpha+4) = [(\alpha(n_\alpha+1))^4(\alpha(n_\alpha))^{-3}-3\alpha(n_\alpha+2)(\alpha(n_\alpha+1))^2 \quad (\alpha(n_\alpha))^{-2}$$
$$+2\alpha(n_\alpha+3)\alpha(n_\alpha+1)(\alpha(n_\alpha))^{-1}+(\alpha(n_\alpha+2))^2(\alpha(n_\alpha))^{-1}+\alpha(n_\alpha+4)]$$
$$.(\alpha(n_\alpha))^{-2}(\psi(n_\alpha,-n_\alpha+4))^{-1}$$

elde edilir. Böylece, verilen her $i\in Z^+\cup\{0\}$ için $\beta(-n_\alpha+i)$ belirlenebildiğinden, $\beta\in S$ de bellidir. Dolayısıyla $\alpha\in S$ nin o işlemine göre tersi α^{-1} ile gösterilirse, $\alpha o\beta = \nu$ olacak biçimde $\beta = \alpha^{-1}\in S$ vardır.

$\alpha,\beta,\delta\in S$ için,

$$(\alpha o\beta)o\delta = \alpha o(\beta o\delta)$$

olduğunu gösterelim.

$\alpha\in S \Rightarrow \alpha(n_\alpha)\neq 0$ ve $j<n_\alpha$ için $\alpha(j)=0$ özelliğinde $n_\alpha\in Z$ vardır.

$\beta\in S \Rightarrow \beta(n_\beta)\neq 0$ ve $k<n_\beta$ için $\beta(k)=0$ özelliğinde $n_\beta\in Z$ vardır.

$\delta\in S \Rightarrow \delta(n_\delta)\neq 0$ ve $\ell<n_\delta$ için $\delta(\ell)=0$ özelliğinde $n_\delta\in Z$ vardır.

$(\alpha o\beta)\in S \Rightarrow (\alpha o\beta)(n_{\alpha o\beta})\neq 0$ ve $m<n_{\alpha o\beta}$ için $(\alpha o\beta)(m)=0$ özelliğinde $n_{\alpha o\beta}\in Z$ vardır.

$$j<n_\alpha \text{ ve } k<n_\beta \Rightarrow m=j+k<n_\alpha+n_\beta=n_{\alpha o\beta}$$

dır.

$(\beta o\delta)\in S \Rightarrow (\beta o\delta)(n_{\beta o\delta})\neq 0$ ve $p<n_{\beta o\delta}$ için $(\beta o\delta)(p)=0$ özelliğinde $n_{\beta o\delta}\in Z$ vardır.

$$k<n_\beta \text{ ve } \ell<n_\alpha \Rightarrow p=k+\ell<n_\beta+n_\delta=n_{\beta o\delta}$$

dır.

$$(\alpha o(\beta o\delta))(i) = \sum_{j+p=i}\alpha(j)(\beta o\delta)(p)\psi(n_\alpha,p)$$

$$(\alpha o(\beta o\delta))(i) = \sum_{j+p=i} \alpha(j) \sum_{k+\ell=p} \beta(k)\delta(\ell)\psi(n_\beta,\ell)\psi(n_\alpha,p)$$

$$= \sum_{j+p=i}\sum_{k+\ell=p} \alpha(j)\beta(k)\delta(\ell)\psi(n_\beta,\ell)\psi(n_\alpha,p)$$

$$= \sum_{j+k+\ell=i} \alpha(j)\beta(k)\delta(\ell)\psi(n_\beta,\ell)\psi(n_\alpha,k+\ell)$$

dır.

ψ nin,

$$\psi(n_\beta,\ell)\psi(n_\alpha,k+\ell) = \psi(n_\alpha,k)\psi(n_\alpha + n_\beta,\ell)$$
$$= \psi(n_\alpha,k)\psi(n_{\alpha o\beta},\ell)$$

bu özelliğinden,

$$(\alpha o(\beta o\delta))(i) = \sum_{j+k+\ell=i} \alpha(j)\beta(k)\delta(\ell)\psi(n_\alpha,k)\psi(n_{\alpha o\beta},\ell)$$

$$= \sum_{m+\ell=i}\sum_{j+k=m} \alpha(j)\beta(k)\delta(\ell)\psi(n_\alpha,k)\psi(n_{\alpha o\beta},\ell)$$

$$= \sum_{m+\ell=i}\sum_{j+k=m} \alpha(j)\beta(k)\psi(n_\alpha,k)\delta(\ell)\psi(n_{\alpha o\beta},\ell)$$

$$= \sum_{m+\ell=i} (\alpha o\beta)(m)\delta(\ell)\psi(n_{\alpha o\beta},\ell)$$

$$= ((\alpha o\beta)o\delta)(i)$$

elde edilir. Böylece,

$$\alpha o(\beta o\delta) = (\alpha o\beta)o\delta$$

bulunur ve $(S-\{0\},o)$ birim elemanı ν olan bir gruptur.

Aşağıda görüldüğü gibi, bu sistemde soldan dağılma özelliği sağlanır, fakat sağdan dağılma özelliği sağlanmaz.

$\alpha,\beta,\gamma \in S$ için

$$\alpha o(\beta+\gamma) = (\alpha o\beta)+(\alpha o\gamma) \iff \text{her } i\in Z \text{ için}$$
$$(\alpha o(\beta+\gamma))(i) = ((\alpha o\beta)+(\alpha o\gamma))(i)$$

dir.

$$(\alpha o(\beta+\gamma))(i) = \sum_{j+k=i} \alpha(i)(\beta+\gamma)(k)\,\psi(n_\alpha,k)$$

$$= \sum_{j+k=i} \alpha(j)(\beta(k)+\gamma(k))\,\psi(n_\alpha,k)$$

$$= \sum_{j+k=i} \alpha(j)\,\beta(k)\,\psi(n_\alpha,k) + \alpha(j)\,\gamma(k)\,\psi(n_\alpha,k)$$

$$= \sum_{j+k=i} \alpha(j)\,\beta(k)\,\psi(n_\alpha,k) + \sum_{j+k=i} \alpha(j)\,\gamma(k)\,\psi(n_\alpha,k)$$

$$= (\alpha o\beta)(i) + (\alpha o\gamma)(i)$$

$$= ((\alpha o\beta) + (\alpha o\gamma))(i)$$

dir.

Sağdan dağılma özelliğini incelemeye başlamadan önce kısa bir açıklama yapalım.

$$\psi(n_\alpha + n_\beta,k) = c^{(n_\alpha+n_\beta)k} = c^{n_\alpha k + n_\beta k} = c^{n_\alpha k}\, c^{n_\beta k}$$

$$= \psi(n_\alpha,k)\,.\,\psi(n_\beta,k)$$

dır.

$$((\alpha+\beta)o\gamma)(i) = \sum_{j+k=i} (\alpha+\beta)(j)\,\gamma(k)\,\psi(n_\alpha+n_\beta,k)$$

$$= \sum_{j+k=i} (\alpha(j)+\beta(j))\gamma(k)\psi(n_\alpha,k)\psi(n_\beta,k)$$

$$= \sum_{j+k=i} \alpha(j)\gamma(k)\psi(n_\alpha,k)\psi(n_\beta,k)+\beta(j)\gamma(k)\psi(n_\alpha,k)\,.\,\psi(n_\beta,k) \qquad (6.3)$$

olur.

$$((\alpha o\gamma) + (\beta o\gamma))(i) = (\alpha o\gamma)(i) + (\beta o\gamma)(i)$$

$$= \sum_{j+k=i} \alpha(j)\gamma(k)\psi(n_\alpha,k) + \sum_{j+k=i} \beta(j)\gamma(k)\psi(n_\beta,k)$$

$$= \sum_{j+k=i} \alpha(j)\gamma(k)\psi(n_\alpha,k) + \beta(j)\gamma(k)\psi(n_\beta,k) \,, \qquad (6.4)$$

dır.

(6.3) ve (6.4) den,

$$(\alpha+\beta)o\gamma \neq (\alpha o\gamma)+(\beta o\gamma)$$

elde edilir.

$\alpha \neq \beta$ olmak üzere $\alpha,\beta,\gamma \in S$ verildiğinde,

$$-\alpha ox + \beta ox = \gamma$$

nın bir tek $x \in S$ çözümünün olduğunu gösterelim. Çarpımın grup özelliğinden $\alpha \neq 0$ olduğundan $\alpha^{-1} \in S$ vardır. Ayrıca + işleminin değişme özelliğini de kullanarak, $-\alpha ox + \beta ox = \gamma$ eşitliğini α^{-1} ile soldan çarpalım. Bu takdirde,

$$\alpha^{-1}o(-\alpha ox) + \alpha^{-1}o(\beta ox) = \alpha^{-1}o\gamma$$

olup, buradan

$$(\alpha^{-1}o\beta)ox - x = \alpha^{-1}o\gamma$$

elde edilir. $\alpha^{-1}o\beta$ yı μ ve $\alpha^{-1}o\gamma$ yı λ ile gösterirsek,

$$\mu ox - x = \lambda \qquad (\mu \neq \nu\ , n_\mu \geqslant 0)$$

olur ve

$$\lambda(i) = \sum_{j=0}^{i-n_x} \mu(j)x(i-j)\psi(n_\mu, i-j) - x(i) \tag{6.5}$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$i < n_x \Rightarrow \lambda(i) = 0$, yani (6.5) toplamı sıfır olur ve böylece $\lambda(n_\lambda) \neq 0$ olduğundan,

$$n_x \leqslant n_\lambda$$

olur. Şimdi $x \in S$ nin varlığını değişik durumlarda inceleyelim.

1.Durum: $\mu(0) \neq 1$ olsun.

Bu durumda $n_x = n_\lambda$ olmak zorundadır. Çünkü $n_x < n_\lambda$ olsa idi, (6.5) eşitliğinden, $i = n_x$ için,

$$(\mu(0)\psi(n_\mu,n_x)-1)x(n_x) = 0$$

olurdu. Oysa $\mu(0) \neq 0$ ve dolayısıyla $n_\mu = 0$ olduğundan,

$$\psi(n_\mu,n_x) = \psi(0,n_x) = 1$$

ve

$$\mu(0)\,\psi(n_\mu,n_x)-1 \neq 0$$

olur. Ayrıca $x(n_x) \neq 0$ dır. Bu nedenlerden dolayı $n_x < n_\lambda$ olamaz.

$i \geqslant n_\lambda$ ise (6.5) eşitliğinden,

$$\lambda(n_\lambda) = (\mu(0)\,\psi(n_\mu,n_\lambda)-1)\,x(n_\lambda) \qquad (i = n_\lambda \text{ için})$$

$$\lambda(i) = (\mu(0)\,\psi(n_\mu,i)-1)\,x(i) + \sum_{j=1}^{i-n_x} \mu(j)\,x(i-j)\,\psi(n_\mu,i-j) \qquad (i > n_\lambda \text{ için})$$

denklem sistemi elde edilir. $\mu(0) \neq 0$ ve $\psi(n_\mu,i) = 1$ olması nedeniyle, $i \geqslant n_\lambda$ için,

$$\mu(0)\,\psi(n_\mu,i)-1 \neq 0$$

olur ve bu denklem sisteminden, $i \geqslant n_\lambda$ için $x(i)$ ler belirlenebilir. Şöyleki;

$i = n_\lambda$ için,

$$\lambda(n_\lambda) = (\mu(0)\psi(n_\mu,n_\lambda)-1)\,x(n_\lambda)$$

olup,

$$x(n_\lambda) = \lambda(n_\lambda)\,(\mu(0)\,\psi(n_\mu,n_\lambda)-1)^{-1}$$

elde edilir.

$i = n_\lambda + 1$ için,

$$\lambda(n_\lambda+1) = (\mu(0)\psi(n_\mu,n_\lambda+1)-1)\,x(n_\lambda+1) + \sum_{j=1} \mu(j)\,x(n_\lambda+1-j)\,\psi(n_\mu,n_\lambda+1-j)$$

$$= (\mu(0)\psi(n_\mu,n_\lambda+1)-1)\,x(n_\lambda+1) + \mu(1)\,x(n_\lambda)\,\psi(n_\mu,n_\lambda)$$

$$= (\mu(0)\psi(n_\mu,n_\lambda+1)-1)\,x(n_\lambda+1)$$

$$+ \mu(1)\,\lambda(n_\lambda)\,(\mu(0)\psi(n_\mu,n_\lambda)-1)^{-1}\psi(n_\mu,n_\lambda)$$

olur. Buradan,

$$x(n_\lambda+1) = [\lambda(n_\lambda+1)-\mu(1)\lambda(n_\lambda)(\mu(0)\psi(n_\mu,n_\lambda)-1)^{-1}\psi(n_\mu,n_\lambda)]$$

$$.(\mu(0)\psi(n_\mu,n_\lambda+1)-1)^{-1}$$

elde edilir. Böylece verilen her $i \geqslant n_\lambda$ tamsayısı için $x(i)$ belirlenebildiğinden, bu durumda $x \in S$ bellidir.

2.Durum: $\mu(0) = 1$ olsun.

Bu durumda $n_\mu = 0$ olduğundan $\psi(n_\mu,k) = 1$ dir. $\mu \neq \nu$ olduğundan, $1 \leqslant i \leqslant k-1$ için $\mu(i) \neq 0$ ve $\mu(k) \neq 0$ özelliğinde $k > 1$ vardır. Böylece (6.5) eşitliği,

$$\lambda(i) = \sum_{j=k}^{i-n_x} \mu(j)x(i-j) \tag{6.6}$$

biçimini alır. Buradan,

$i < n_x + k \Rightarrow \lambda(i) = 0$, yani (6.6) toplamı sıfırdır ve böylece, $\lambda(n_\lambda) \neq 0$ olduğundan,

$$n_x + k \leqslant n_\lambda$$

elde edilir.

$$i = n_x + k$$

olması halinde (6.6) eşitliği,

$$\lambda(n_x + k) = \mu(k)x(n_x) \neq 0$$

olur. Buradan $x(n_x)$ belirlenir ve üstelik $n_x + k = n_\lambda$ dır.

$$i > n_\lambda = n_x + k$$

olması halinde ise (6.6) eşitliği,

$$\lambda(i) = \mu(k)x(i-k) + \sum_{j=k+1}^{i-n_x} \mu(j)x(i-j)$$

biçimini alır. Buradan $i-k > n_\lambda - k = n_x$ olmak üzere $x(i-k)$ değerleri belirlenir. Birkaç k değeri için, $x(i-k)$ değerlerini belirleyelim.

$k = 2$ için $i = 1$, $n_x = i-k = -1$ ve $n_\lambda = n_x + k = 1$ dir. Buradan,

$$\lambda(1) = \mu(2)x(-1) \Rightarrow x(-1) = \lambda(1)(\mu(2))^{-1}$$

dir ve $i > n_\lambda$ olamaz.

$k = 3$ için $i = 1,2$; $n_x = -2$ ve $n_\lambda = 1$ dir. Böylece,

$$\lambda(1) = \mu(3)x(-2)$$

$$\Rightarrow \quad x(-2) = \lambda(1)(\mu(3))^{-1}$$

ve $i = 2$ için,

$$\lambda(2) = \mu(3)x(-1) + \sum_{j=4} \mu(j)x(2-j)$$

$$= \mu(3)x(-1) + \mu(4)x(-2)$$

$$\Rightarrow \quad x(-1) = [\lambda(2) - \mu(4)\lambda(1)(\mu(3))^{-1}](\mu(3))^{-1}$$

elde edilir.

$k = 4$ için $i = 1,2,3$; $n_x = -3$ ve $n_\lambda = 1$ dir. Buradan,

$$\lambda(1) = \mu(4)x(-3)$$

$$\Rightarrow \quad x(-3) = \lambda(1)(\mu(4))^{-1}$$

ve $i > n_x + k = 1$ için $i = 2$ ve $i = 3$ olduğundan,

$$\lambda(2) = \mu(4)x(-2) + \sum_{j=5} \mu(j)x(2-j)$$

$$= \mu(4)x(-2) + \mu(5)x(-3)$$

$$\Rightarrow \quad x(-2) = [\lambda(2) - \mu(5)\lambda(1)(\mu(4))^{-1}](\mu(4))^{-1}$$

ve

$$\lambda(3) = \mu(4)x(-1) + \sum_{j=5}^{6} \mu(j)x(3-j)$$

$$= \mu(4)x(-1) + \mu(5)x(-2) + \mu(6)x(-3)$$

olur. Buradan,

$$x(-1) = [\lambda(3)-\mu(5)\lambda(2)(\mu(4))^{-1} + (\mu(5))^{2}\lambda(1)(\mu(4))^{-2}$$

$$-\mu(6)\lambda(1)(\mu(4))^{-1}].(\mu(4))^{-1}$$

elde edilir. Bu nedenle, verilen her $k \in Z$, $k > 1$ için $x(i-k)$ değerleri belirlenebildiğinden $x \in S$ bellidir. Böylece $(S,+,0)$ sistemi bir sol yaklaşık cisimdir.

Sol yaklaşık cisimler içinde, daha çok geçişkenliklere sahip olan bir tanesi bilinmektedir. Aşağıdaki teorem bu projektif düzlemi ortaya koyacaktır. Ayrıca bu teorem, hem Hall sistemi olarak elde edilen sol yarıcisimler içinde bir tek tane sol yaklaşık cisim olduğunu göstermekte hem de bu sol yaklaşık cismi belirtmektedir.

Teorem 6.1.2: Herhangi bir F cisminden elde edilen sol Hall sisteminin, çarpma işleminin birleşimli olması (yani yaklaşık cisim olması) için gerek ve yeter koşul ya $F = GF(2)$ ya da $F = GF(3)$ ve $f(t) = t^2 + 1$ olmasıdır.

İspat: $(S,+,.)$ sistemi, bir $f(t)$ ikinci derece indirgenemez polinomuyla belirtilen bir sol Hall sistemi olsun. Herhangi bir $x \in F$, $x \neq 0$ için, Hall sistemindeki çarpma kuralı uygulanırsa,

$$\lambda.(x.\lambda) = \lambda.(\lambda x) = -xf(0) + \lambda xr = -x(-s) + \lambda xr = sx + \lambda xr$$

ve

$$(\lambda.x).\lambda = (\lambda x).\lambda = -x^{-1}f(0) + \lambda r = -x^{-1}(-s) + \lambda r = sx^{-1} + \lambda r$$

bulunur.

Eğer . işlemi birleşimli ise, özel olarak her $x \in F$ için $\lambda.(x.\lambda) = (\lambda.x).\lambda$ olacağından $x \neq 0$ iken $sx^{-1} + \lambda r = sx + \lambda xr$ yani $xr = r$ ve $sx = sx^{-1}$ olur. Eğer $x \neq 1$ ise, $xr = r$ den $r = 0$ olacağından $s \neq 0$ dır. Çünkü $s = 0$ olsa $f(t)$ indirgenebilir olur. Dolayısıyla $sx^{-1} = sx$ gereğince her $x \in F$, $x \neq 0$ için $x^2 = 1$ olması gerekir. GF(2) cismi için 0 ve 1 den farklı hiçbir x bulunmadığı için $xr = x$ ve $sx^{-1} = sx$ den bir sonuç elde edilemez. Ama F nin GF(2) ye eşit olabileceği bellidir. Buna karşın $0 \neq x \neq 1$ olacak biçimde bir $x \in F$ elemanı varsa, $r = 0$ ve $x^2 + 1 = 0$ olmalıdır. Bu koşullara sahip bir tek GF(3) cismi vardır. GF(3) cismi üzerinde $r = 0$ özelliğinde ikinci dereceden indirgenemez tek polinom $f(t) = t^2+1$ dir.

Karşıt olarak, eğer $F = GF(2)$ ise,

$$S = \{a + \lambda b : a,b \in F , \lambda \notin F\}$$
$$= \{0,1,\lambda,1+\lambda\}$$

kümesinin eleman sayısı ve dolayısıyla P_2S projektif düzleminin mertebesi 4 olmalıdır. Oysa mertebesi 4 olan bir tek projektif düzlem vardır. Mertebesi 4 olan bütün düzlemsel halkalar cisim oldukları için $(S, \oplus, .)$ sistemi de cisim olmalıdır. Dolayısıyla birleşme özelliği sağlanır.

Eğer $F = GF(3)$ ve $f(t) = t^2 + 1$ ise,

. işlemi,

$$(a + \lambda b).(c + \lambda d) = \begin{cases} ca + \lambda (da) & , \ b = 0 \ \text{iken} \\ ca - db(a^2 + 1) + \lambda (cb - da) & , \ b \neq 0 \ \text{iken} \end{cases}$$

biçimindedir. Çünkü,

$a \in F$, $a \neq 0$ için,

$$a^{-1} = a$$

ve

$$f(a) = a^2 + 1$$

dir.

Şimdi,

$$S = \{0,1,2,\lambda,1+\lambda ,2+\lambda ,2\lambda,1+2\lambda , 2+2\lambda\}$$

kümesinin ikinci işleme göre çizelgesini verelim.

Çizelge 6.1: İndirgenemez polinomu $f(t) = t^2 + 1$ olan $(S,+,.)$ sistemi-nin . işlemi.

.	0	1	2	λ	1+λ	2+λ	2λ	1+2λ	2 + 2λ
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	λ	1+λ	2+λ	2λ	1+2λ	2 + 2λ
2	0	2	1	2λ	2+2λ	1 +2λ	λ	2+λ	1+λ
λ	0	λ	2λ	2	2+λ	2 +2λ	1	1+λ	1 +2λ
1+λ	0	1+λ	2+2λ	1 +2λ	2	λ	2+λ	2λ	1
2+λ	0	2+λ	1+2λ	1 +λ	2λ	2	2 +2λ	1	λ
2λ	0	2λ	λ	1	1+2λ	1 +λ	2	2 +2λ	2+λ
1+2λ	0	1+2λ	2+λ	2+2λ	λ	1	1+λ	2	2λ
2+2λ	0	2+2λ	1+λ	2 +λ	1	2λ	1+2λ	λ	2

Birleşme kuralının sağlandığı çizelge 6.1 yardımıyla kolaylıkla görülebilir.

Örneğin,

$$(2 + \lambda).((1 + 2\lambda).(1 + \lambda)) = (2 + \lambda).\ (\lambda)$$
$$= 1 + \lambda$$

ve

$$((2 + \lambda).(1 + 2\lambda)).(1 + \lambda) = 1.(1 + \lambda)$$
$$= 1 + \lambda$$

dır ∎

Örnek 6.1.3 (Andre, 1955) Seçkin sol yaklaşık cisim: $F = GF(3)$ ve $f(t) = t^2 + 1$ olmak üzere, elde edilen Hall sisteminin aynı zamanda bir sol yaklaşık cisim olduğu Teorem 6.1.2 de gösterildi. Bu sol yaklaşık cisim diğer bütün sol yaklaşık cisimlerden farklıdır. Bu farklılığın en ilginci $(S-\{0\},.)$ çarpım grubunun iç yapısında ortaya çıkmaktadır. Şöyleki, her $x \in S$, $x \neq 0,1,-1$ için $x^2 = -1$ dir, yani $-1 = 2$ olduğundan $\lambda^2 = 2$, $(1+\lambda)^2 = 2$, $(2+\lambda)^2 = 2$, $(2\lambda)^2 = 2$, $(1+2\lambda)^2 = 2$, $(2+2\lambda)^2 = 2$ dir. Bu sol yaklaşık cisimden başka hiç bir sol yaklaşık cisim, $x^{-1} = -x$ biçiminde de ifade edilebilen, bu özelliği sağlamaz. Bu özellik bazı geometrik sonuçlar doğurmaktadır. Bu yaklaşık cismin belirttiği düzlemde, $\varepsilon(x,y) = (y,x)$, $x,y \in S$ biçiminde tanımlı dönüşüm, düzlemin $y = ax + b$ doğrusunu $y = a^{-1}x - a^{-1}b$ doğrusuna ve $x = 0$ (veya $y = 0$) doğrusunu $y = 0$ (veya $x = 0$) doğrusuna dönüştürür. $y = x$ doğrusu üzerindeki her (x,x) noktası için $\varepsilon(x,x) = (x,x)$ olduğundan $y = x$ perspektiflik eksenidir. Bundan başka ε dönüşümü $[\infty]$ ve $y = -x$ doğrularını değişmez bırakır, fakat bu doğruların, $y = x$ doğrusu ile arakesit noktaları hariç, hiç bir noktasını değişmez bırakmaz. Oysa bu doğruların her ikisi de $y = -x$ doğrusu üzerindeki P ideal noktasından geçerler, bu nedenle P noktası perspektiflik merkezidir. Buradan ε nun, merkezi P ve ekseni $y = x$ doğrusu olan bir perspektiflik olduğu söylenebilir. Üstelik, her (x,y) için $\varepsilon^2(x,y) = \varepsilon(\varepsilon(x,y)) = \varepsilon(y,x) = (x,y)$ olduğundan ε bir involusyondur.

6.2. Sağ Yaklaşık Cisimler Üzerinde Projektif Düzlemler

Sağ yaklaşık cisim tanımı, sol yaklaşık cisim tanımına oldukça benzerdir. Şöyleki, çarpma işlemi birleşimli olan bir sağ yarıcisme sağ yaklaşık cisim denir. Dikkat edilirse, hem sağ ve hem de sol yaklaşık cisim olan bir sistem, bir bölümlü halkadır.

Teorem 6.2.1: Herhangi bir $(S,+,.)$ sisteminin $T(a,b,c) = ab + c$ üçlü işlemiyle birleştirilmesinden elde edilen (S,T) ikilisinin bir sağ yaklaşık cisim olması için gerek ve yeter koşullar,

(i) $(S,+)$ nın, birim elemanı 0 olan, bir grup olması,

(ii) $(S-\{0\},.)$ nın, birim elemanı 1 olan, bir grup olması,

(iii) Her $x \in S$ için, $x.0 = 0$ olması,

(iv) Her $x,y,z \in S$ için $(x+y).z = x.z + y.z$ olması,

(v) $a \neq b$ olmak üzere, verilen her $a,b,c \in S$ için,

$xa-xb = c$ denkleminin bir tek $x \in S$ çözümünün bulunmasıdır.

İspat: (S,T) ikilisi bir sağ yaklaşık cisim olsun. Bu takdirde (S,T), çarpma işlemi birleşimli olan bir sağ yarıcisimdir. Bir sağ yarıcisim (i),(iii),(iv) ve (v) koşullarını sağlar ve $(S-\{0\},.)$ bir yarıgruptur. Oysa çarpma işlemi birleşimli olduğundan $(S-\{0\},.)$ bir gruptur dolayısıyla (ii) koşulu da sağlanır.

Karşıt olarak (S,T) sistemi (i)-(v) özelliklerini sağlasın. $(S-\{0\},.)$ nın yarıgrup olması halinde (S,T) bir yarıcisimdir. (ii) den $(S-\{0\},.)$ grup olduğundan (S,T), . işlemi birleşimli olan bir sağ yarıcisim, dolayısıyla bir sağ yaklaşık cisimdir ∎

Bir sol yarıcisimden sağ yarıcisim elde etme yöntemine benzer olarak yaklaşık cisimler için de aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6.2.2: $(S,+,.)$ bir sol yaklaşık cisim olmak üzere, $x*y = y.x$ biçiminde tanımlanan $(S,+,*)$ dual sistemi bir sağ yaklaşık cisimdir. Üstelik $(S,+,*)$ sisteminin duali $(S,+,.)$ olur.

İspat: $(S,+,.)$ bir sol yaklaşık cisim, yani . işlemi birleşimli olan bir sol yarıcisim olsun. Teorem 4.2.2 gereğince $(S,+,*)$ bir sağ yarıcisimdir. O halde $*$ işleminin birleşimli olduğunu göstermek yeterlidir.

$$(x*y)*z = (y.x)*z = z.(y.x) = (z.y).x = x*(z.y) = x*(y*z)$$

olduğundan, (S,+,$\ast$) bir sağ yaklaşık cisimdir ■

Örnek 6.2.1: Örnek 6.1.1 de belirlenen (S,+,θ) sol yaklaşık cisimlerin dualleri alınarak, sağ yaklaşık cisimler bulunabilir. Orada $x\theta y = xy^{q^i}$ biçiminde tanımlandığı için (S,+,$\ast$) sağ yaklaşık cisminde, $\ast$ işlemi,

$$x\ast y = yx^{q^i}$$

şeklindedir.

6.3. Sağ Yaklaşık Cisimler Yardımıyla Tanımlanan Bir Çifte Yarıgrup Örneği

Çifte yarıgruplar üzerinde projektif düzlemler konusunun sonunda sözü edilen örnek, bir yaklaşık cisim üzerinde tanımlı olması nedeniyle burada verilmektedir.

Örnek 6.3.1 (Dembowski, 1968): S mertebesi q^2 olan bir (sağ) yaklaşık cisim olsun.

$$K = \{k \in S:\ k(x+y) = kx + ky \ ,\ \text{her } x,y \in S \text{ için}\}$$

kümesi S nin merkezi ile çakışan ve mertebesi q olan çekirdeğidir.

S^+ ile (S,+) toplamsal grubu gösterilmek üzere, $V = S^+ \oplus S^+ \oplus S^+$ toplamsal grubunu gözönüne alalım. V üzerinde sağdan skalerle çarpım,

$x = (x_1,x_2,x_3) \in V$ ve $a \in S$ için,

$$\begin{aligned} xa &= (x_1,x_2,x_3)a \\ &= (x_1a,x_2a,x_3a) \end{aligned} \tag{6.7}$$

şeklinde tanımlansın.

$x \in V$, $x \neq (0,0,0)$ olmak üzere,

$$xS = \{xa :\ a \in S\}$$

altgrupları noktalar olarak tanımlanmaktadır.

A tekil olmayan bir matris ve $a_{ij} \in K$, $i,j = 1,2,3$ olmak üzere ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

matrislerinin kümesi G olsun ve her $A \in G$ için,

$$(x_1,x_2,x_3) \rightarrow xA = (x_1,x_2,x_3) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{3} x_i a_{i1} \,,\ \sum_{i=1}^{3} x_i a_{i2} \,,\ \sum_{i=1}^{3} x_i a_{i3} \right) \qquad (6.8)$$

dönüşümü V nin, noktaları yine noktalara dönüştüren bir otomorfizmidir. $t \in S$ için,

$$x_1 + tx_2 + x_3 = 0 \qquad (6.9)$$

denklemini sağlayan $(x_1,x_2,x_3) \in V$ elemanların tümünden oluşan nokta kümesi $L(t)$ ile gösterilmek üzere doğruların, noktalar kümesi cinsinden ifadesi, $t = 1$ veya $t \notin K$ ve $A \in G$ olmak üzere,

$$L(t)A = \{(xA)S \ :\ xS \subset L(t)\} \qquad (6.10)$$

biçimindedir. Üzerinde bulunma bağıntısı ise kümeler teorisi kapsamında bilinen üzerinde bulunma bağıntısıdır. S üzerinde, bu şekilde oluşturulan düzlem Hughes düzlemi olarak bilinmekte olup $H = H(S)$ ile gösterilir. H nın $\{0,E,U,V\}$ koordinatlama dörtgenine göre üçlü halkası (S,T) olsun. (6.9) ve (6.10) dan H nın herhangi bir doğrusu, $a_i, b_i \in K$ hepsi birlikte sıfır olmayan elemanlar ve $s \notin K$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{3} a_i x_i + s \sum_{i=1}^{3} b_i x_i = 0 \qquad (6.11)$$

denklemi ile verilebilir.

S üzerinde bir üçlü işlem,

$$x.s\circledcirc t = \begin{cases} sx + t & , s \in K \\ s(x+k)+k' & , s \in S-K \text{ ve } t = ks+k' \quad ; k,k' \in K \end{cases}$$

olarak veriliyor. Burada her $x,y \in S$ için $x.1\circledcirc y = x + y$ ve $x.y\circledcirc 0 = yx$ dir fakat genel olarak $x.s\circledcirc t \neq sx + t$ veya $xs + t$ dir. Bu nedenle (S,T) üçlü halkası lineer değildir. Dolayısıyla bu üçlü halkadan yukarıdaki yolla elde edilen $(S,\circledcirc,.)$ çifte yarıgrubu da lineer değildir. Literatürde lineer olan bir çifte yarıgrup örneğine (dolayısıyla cebirsel yapısı lineer çifte yarıgrup olan bir projektif düzlemine) rastlanmamıştır.

7. ÇİFTE GRUPLAR ÜZERİNDE PROJEKTİF DÜZLEMLER

Tanım 7.1: $(S,+,.)$ sistemi verilsin. $(S,+)$ ikilisi, birim elemanı 0 olan bir grup iken eğer $(S-\{0\},.)$ ikilisi de bir grup ise, $(S,+,.)$ sistemine bir çifte grup denir. Bu cebirsel yapı dağılma kurallarından hiçbirini sağlamaz.

Teorem 7.1: $(S,+,.)$ çifte grubunun, her $a,b,c \in S$ için, $T(a,b,c) = a.b + c$ biçiminde tanımlı üçlü işlemiyle birlikte bir düzlemsel halka olması için gerek ve yeter koşullar,

(i) Her $x \in S$ için $x.0 = 0.x = 0$ olması,

(ii) $a \neq b$ olmak üzere, $-ax + bx = c$ denkleminin bir tek $x \in S$ çözümünün bulunması,

(iii) $a \neq b$ olmak üzere, $x.a - x.b = c$ denkleminin bir tek $x \in S$ çözümünün bulunmasıdır.

İspat: Teorem 2.1.3 deki (1) ve (2) koşulları gözönüne alınırsa, $a,b,c,d \in S$, $a \neq c$ için $ax + b = cx + d$ olacak şekilde bir tek $x \in S$ vardır. Buradan $-ax + cx = b-d$ olacak şekilde bir tek $x \in S$ vardır. Yine $a \neq c$ için $xa + y = b$, $xc + y = d$ sisteminin bir tek $(x,y) \in S^2$ çözümü var olduğundan taraf tarafa çıkarma işlemiyle, $xa-xc = b-d$ elde edilir ve bu denklemin bir tek $x \in S$ çözümü vardır. O halde (ii) ve (iii) Teorem 2.1.3 deki (1) ve (2) koşullarının daha sadeleştirilmişleridir. Bu nedenle oradaki ispat aynen tekrarlanabilir ∎

Herhangi bir (S,T) üçlü halkası lineer ve $+$ işlemi birleşimli (dolayısıyla $(S,+)$ grup) ise, $P = P_{(S,T)}$ projektif düzlemi $((\infty),[\infty])$ geçişkendir. Ayrıca (S,T) üçlü halkası lineer ve . işlemi birleşimli (dolayısıyla $(S-\{0\},.)$ grup) ise $P_{(S,T)}$ projektif düzlemi $((0),[0])$-geçişkendir. Bu nedenle cebirsel yapısı çifte grup olan ve Teorem 7.1 deki (i),(ii),(iii) koşullarını gerçekleyen bir $(S,+,.)$ sistemine karşılık gelen $P_{(S,T)}$ projektif düzlemi hem $((\infty),[\infty])$-geçişken hem de $((0),[0])$-geçişkendir. Böyle bir düzlem başka bir (M,e) ikilisi için (M,e)-geçişken olabilir veya olmayabilir.

Örnek 7.1 (Stevenson, 1972): $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi olmak üzere $M = (\mathbb{R},+,\otimes)$ sistemini tanımlayalım. Burada + gerçel sayıların bilinen toplama işlemi ve $\otimes$ ise,

$$x \otimes y = \begin{cases} xy & , \ x \geq 0 \text{ veya } y \geq 0 \text{ iken} \\ \frac{1}{2}xy & , \ x < 0 \text{ ve } y < 0 \text{ iken} \end{cases}$$

biçiminde tanımlıdır. M sisteminin $\otimes$ işlemi birleşimli olan bir kartezyen grup olduğunu ve dağılma kuralının sağlanmadığını dolayısıyla M nin bir çifte grup olduğunu gösterelim.

$(\mathbb{R},+)$ nın birim elemanı 0 olan bir grup olduğu aşikardır.

$(\mathbb{R}-\{0\}, \otimes)$ nın birleşimli bir yarıgrup olduğunu gösterelim.

$$a \otimes x = b \Leftrightarrow \begin{cases} ax = b & , \ a \geq 0 \text{ veya } x \geq 0 \text{ iken} \\ \frac{1}{2}ax = b & , \ a < 0 \text{ ve } x < 0 \text{ iken} \end{cases}$$

eşitliğinin a ve b nin dört farklı hali için bir tek $x \in \mathbb{R}$ çözümünün olduğunu gösterelim.

(i) $a > 0$, $b > 0$ ise $ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a} > 0$ tek çözümdür.

(ii) $a > 0$, $b < 0$ ise $ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a} < 0$ tek çözümdür.

(iii) $a < 0$, $b < 0$ ise $ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a} > 0$ tek çözümdür.

$$\frac{1}{2}ax = b \Rightarrow x = \frac{2b}{a} > 0 \text{ çözüm değildir.}$$

(iv) $a < 0$, $b > 0$ ise $ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a} < 0$ çözüm değildir.

$$\frac{1}{2}ax = b \Rightarrow x = \frac{2b}{a} < 0 \text{ tek çözümdür.}$$

$x \geq 0$ veya $y \geq 0$ iken $x \otimes y = xy = yx = y \otimes x$

ve

$$x < 0 \text{ ve } y < 0 \text{ iken } \quad x \otimes y = \frac{1}{2} xy = \frac{1}{2} yx = y \otimes x$$

olduğundan $\otimes$ işlemi komutatiftir. Böylece $x \otimes a = b$ denkleminin bir tek $x \in \mathcal{R}-\{0\}$ çözümünün olduğu hemen söylenebilir.

Her $x \in \mathcal{R}$ için $x \otimes 1 = x.1 = x = 1.x = 1 \otimes x$ dir ve 1 çarpımsal birim elemandır. $1 > 0$ olduğundan $x \otimes 1 = \frac{1}{2} x$ durumu sözkonusu olamaz.

$$(x \otimes y) \otimes z = \begin{cases} xyz & , x \geqslant 0 \text{ ve } yz \leqslant 0 \text{ iken} \\ xyz & , y,z \geqslant 0 \text{ iken} \\ \frac{1}{2} xyz & , x < 0 \text{ ve } yz \leqslant 0 \text{ iken} \\ \frac{1}{2} xyz & , y,z < 0 \text{ iken} \end{cases} \qquad (7.1)$$

$$x \otimes (y \otimes z) = \begin{cases} xyz & , x \geqslant 0 \text{ ve } yz \leqslant 0 \text{ iken} \\ xyz & , y,z \geqslant 0 \text{ iken} \\ \frac{1}{2} xyz & , x < 0 \text{ ve } yz \leqslant 0 \text{ iken} \\ \frac{1}{2} xyz & , y,z < 0 \text{ iken} \end{cases} \qquad (7.2)$$

(7.1) ve (7.2) den her $x,y,z \in \mathcal{R}$ için,

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$$

dir. Üstelik her $x \in \mathcal{R}$ için, $x \otimes 0 = x.0 = 0 = 0.x = 0 \otimes x$ dir.

Her $a,b,c,d \in \mathcal{R}$, $a \neq c$ için,

$$a \otimes x + b = c \otimes x + d \qquad (7.3)$$

eşitliğini,

$$\left.\begin{array}{l} a \geqslant 0 \text{ veya } x \geqslant 0 \text{ iken, } ax+b \\ a < 0 \text{ ve } \quad x < 0 \text{ iken, } \frac{1}{2}ax+b \end{array}\right\} = \begin{cases} cx+d \ , \ c \geqslant 0 \text{ veya } x \geqslant 0 \text{ iken} \\ \frac{1}{2}cx+d \ , \ c < 0 \text{ ve } \quad x < 0 \text{ iken} \end{cases} \qquad (7.4)$$

biçiminde ifade edebiliriz. (7.3) denkleminin a ve c nin değişik durumlarına göre bir tek $x \in \mathcal{R}$ çözümünün olduğunu gösterelim.

(i) $a \geqslant 0$ ve $c \geqslant 0$ olsun.

(7.4) den $ax + b = cx + d$ elde edilir. Buradan $(a-c)x = d-b$ olur ve $x = (d-b)(a-c)^{-1}$ (7.3) denkleminin tek çözümüdür. Bu durumda (7.4) deki diğer eşitlikler söz konusu olamaz.

(ii) $a \geqslant 0$ ve $c < 0$ olsun.

$ax + b = cx + d$ eşitliğini çözersek $x = (d-b)(a-c)^{-1}$ buluruz ve $x \geqslant 0$ olmalıdır. $ax + b = \frac{1}{2} cx + d$ eşitliğinden ise $x = (d-b)(a-\frac{1}{2}c)^{-1}$ çözümünü elde edebiliriz ve $x < 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $d \geqslant b$ ise, (7.3) ün tek çözümü $x = (d-b)(a-c)^{-1}$ dir. Eğer $d < b$ ise, $x = (d-b)(a-\frac{1}{2}c)^{-1}$ tek çözümdür.

(iii) $a < 0$ ve $c \geqslant 0$ olsun.

$ax + b = cx + d$ ve $\frac{1}{2} ax + b = cx + d$ denklemlerini göz önüne alalım. Buradan eğer $d \leqslant b$ ise, $x = (d-b)(a-c)^{-1}$ in (7.3) denkleminin tek çözümü olduğunu aksi takdirde yani $d > b$ ise tek çözümün $x = (d-b)(\frac{1}{2} a-c)^{-1}$ olduğunu söyleyebiliriz.

(iv) $a,c < 0$ ve $a < c$ olsun.

Bu durumda $d \leqslant b$ ise, $x = (d-b)(a-c)^{-1}$ tek çözümdür. Eğer $d > b$ ise, bu takdirde $x = 2(d-b)(a-c)^{-1}$ çözümü tektir.

(v) $a,c < 0$ ve $a > c$ olsun.

Eğer $d \geqslant b$ ise, $x = (d-b)(a-c)^{-1}$ tek çözüm iken, $d < b$ ise $x = 2(d-b)(a-c)^{-1}$ çözümü tektir.

Her $a,b,c,d \in \mathcal{R}$, $a \neq c$ için

$$
\begin{aligned}
x \otimes a + y &= b \\
x \otimes c + y &= d
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

denklem sistemini,

$$x \otimes a + y = b \Leftrightarrow \begin{cases} xa + y = b & , x \geqslant 0 \text{ veya } a \geqslant 0 \text{ iken} \\ \frac{1}{2} xa + y = b & , x < 0 \text{ ve } a < 0 \text{ iken} \end{cases}$$

$$x \otimes c + y = d \Leftrightarrow \begin{cases} xc + y = d & , x \geqslant 0 \text{ veya } c \geqslant 0 \text{ iken} \\ \frac{1}{2} xc + y = d & , x < 0 \text{ ve } c < 0 \text{ iken} \end{cases}$$

biçiminde ifade edebiliriz. (7.5) sisteminin bir tek $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ çözümünün varlığı da (7.3) denkleminde olduğu gibi a ve c nin beş değişik durumu için gösterilebilir.

(i) $a \geqslant 0$ ve $c \geqslant 0$ olsun.

$$xa + y = b$$
$$xc + y = d$$

sisteminin çözümünden, $(x,y) = ((b-d)(a-c)^{-1}, b-(b-d)(a-c)^{-1}a)$ (7.5) in tek çözümüdür.

(ii) $a \geqslant 0$ ve $c < 0$ olsun.

$$xa + y = b$$

$$xc + y = d$$

sisteminin çözümünden $x = (b-d)(a-c)^{-1}$, $y = b-(b-d)(a-c)^{-1}a$ elde edilir.

$$xa + y = b$$
$$\frac{1}{2} xc + y = d$$

sisteminin çözümü de $x = (b-d)(a- \frac{1}{2} c)^{-1}$ ve $y = b-(b-d)(a- \frac{1}{2} c)^{-1}a$ dır. Dolayısıyla $b \geqslant d$ iken (7.5) sisteminin tek çözümü, $(x,y) = ((b-d)(a-c)^{-1}, b-(b-d)(a-c)^{-1}a)$ dır. Eğer $b < d$ ise, $(x,y) = ((b-d)(a- \frac{1}{2} c)^{-1}, b-(b-d)(a- \frac{1}{2} c)^{-1}a)$ tek çözümdür.

Benzer düşünce ile diğer durumlarda sadece (x,y) çözümlerini yazalım.

(iii) $a < 0$ ve $c \geqslant 0$ olsun.

Eğer $b \leqslant d$ ise sistemin tek çözümü,

$$(x,y) = ((b-d)(a-c)^{-1}, d-(b-d)(a-c)^{-1}c)$$

dir ve $b > d$ ise,

$$(x,y) = ((b-d)(\tfrac{1}{2}a-c)^{-1}, d-(b-d)(\tfrac{1}{2}a-c)^{-1}c)$$

tek çözümdür.

(iv) $a,c < 0$ ve $a < c$ olsun.

Eğer $b \leqslant d$ ise, $(x,y) = ((b-d)(a-c)^{-1}, b-(b-d)(a-c)^{-1}a)$ sistemin tek çözümüdür, $b > d$ olması halinde ise, tek çözüm $(x,y) = (2(b-d)(a-c)^{-1}, b-(b-d)(a-c)^{-1}a)$ dır.

(v) $a,c < 0$ ve $a > c$ olsun.

$b \geqslant d$ olması halinde sistemin tek çözümü,

$$(x,y) = ((b-d)(a-c)^{-1}, b-(b-d)(a-c)^{-1}a)$$

dır ve $b < d$ ise,

$$(x,y) = (2(b-d)(a-c)^{-1}, b-(b-d)(a-c)^{-1}a)$$

tek çözümdür.

Böylece $(\mathbb{R},+,\otimes)$ sistemi bir çifte gruptur. Üstelik bu sistem dağılma kurallarını sağlamaz. Çünkü,

$$(-5)\otimes(-2+4) = (-5)\otimes 2 = -10$$
$$(-5)\otimes(-2) + (-5)\otimes 4 = \frac{10}{2} - 20 = 5-20 = -15$$

ve

$$(-1+3)\otimes(-2) = 2\otimes(-2) = -4$$

$$(-1)\otimes(-2) + 3\otimes(-2) = \frac{2}{2} - 6 = -5$$

dir.

Örnek 7.2 (Pickert, 1975): $(S,+,.)$ herhangi bir sıralı bölümlü halka olsun. $k \neq 1$ de S nin pozitif bir elemanı olsun. S üzerinde $+$ işlemini aynen tutarak, yeni bir çarpa işlemini her $x,y \in S$

için,

$$x o y = \begin{cases} xky, & x < 0 \text{ ve } y < 0 \text{ iken} \\ xy, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım ve $(S,+,o)$ sistemini düşünelim. Hipotezden $(S,+)$ grup yapısına sahiptir. Tanım gereğince $x o 0 = 0 o x = 0$ dır. Teorem 7.1 deki (ii) ve (iii) koşullarının gerçeklendiğini gösterelim.

$a \neq b$ olmak üzere,

$$-a o x + b o x = c \tag{7.6}$$

denkleminin bir tek $x \in S$ çözümünün var olduğunu gösterelim.

$$a o x = \begin{cases} akx, & a < 0 \text{ ve } x < 0 \text{ iken} \\ ax, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$b o x = \begin{cases} bkx, & b < 0 \text{ ve } x < 0 \text{ iken} \\ bx, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

eşitlikleri yardımıyla (7.6) denkleminin tek çözümünün olduğunu değişik hallerde inceleyelim.

(i) $a,b,x < 0$ olsun.

$-a o x + b o x = c \Rightarrow -akx + bkx = c \Rightarrow (-ak + bk)x = c$

$\Rightarrow x = (-ak + bk)^{-1}c \Rightarrow x \in S$ tektir.

(ii) $a < 0$, $b \geqslant 0$, $x < 0$ olsun.

$-a o x + b o x = c \Rightarrow -akx + bx = c \Rightarrow (-ak + b)x = c$

$\Rightarrow x = (-ak + b)^{-1}c \Rightarrow x \in S$ tektir.

(iii) $a \geqslant 0$, $b < 0$, $x < 0$ olsun.

$-a o x + b o x = c \Rightarrow -ax + bkx = c \Rightarrow (-a + bk)x = c$

$\Rightarrow x = (-a + bk)^{-1}c \Rightarrow x \in S$ tektir.

(iv) $x \geq 0$ olsun.

$-aox + box = c \Rightarrow -ax + bx = c \Rightarrow (-a+b)x = c$

$\Rightarrow x = (-a+b)^{-1}c \Rightarrow x \in S$ tektir. Yani,

$$-aox + box = \begin{cases} (b-a)kx & , a < 0 , b < 0 , x < 0 \text{ iken} \\ (b-ak)x & , a < 0 , b \geq 0 , x < 0 \text{ iken} \\ (bk-a)x & , a \geq 0 , b < 0 , x < 0 \text{ iken} \\ (b-a)x & , x \geq 0 \text{ iken} \end{cases}$$

olup, $-aox + box = c$ denkleminin bir tek $x \in S$ çözümü vardır.

$a \neq b$ olmak üzere $xoa - xob = c$ denkleminin bir tek $x \in S$ çözümü olduğunu gösterelim.

$$xoa = \begin{cases} xka & , x < 0 \text{ ve } a < 0 \text{ iken} \\ xa & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$xob = \begin{cases} xkb & , x < 0 \text{ ve } b < 0 \text{ iken} \\ xb & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bir tek çözümün varlığını yine değişik durumlarda inceleyelim.

(i) $a < 0$, $b < 0$, $x < 0$ olsun.

$xoa - xob = c \Rightarrow xka - xkb = c \Rightarrow x(ka-kb) = c$

$x = c(ka-kb)^{-1} \Rightarrow x \in S$ tektir.

(ii) $a < 0$, $b \geq 0$, $x < 0$ olsun.

$xoa - xob = c \Rightarrow xka - xb = c \Rightarrow x(ka-b) = c$

$x = c(ka-b)^{-1} \Rightarrow x \in S$ tektir.

(iii) $a \geq 0$, $b < 0$, $x < 0$ olsun.

$xoa - xob = c \Rightarrow xa - xkb = c \Rightarrow x(a-kb) = c$

$\Rightarrow x = c(a-kb)^{-1} \Rightarrow x \in S$ tektir.

(iv) $x \geqslant 0$ olsun.

$xoa - xob = c \Rightarrow xa - xb = c \Rightarrow x(a-b) = c$

$x = c(a-b)^{-1} \Rightarrow x \in S$ tektir.

Buradan,

$$xoa - xob = \begin{cases} xk(a-b) & , a < 0 , b < 0 , x < 0 \text{ iken} \\ x(ka-b) & , a < 0 , b \geqslant 0 , x < 0 \text{ iken} \\ x(a-kb) & , a \geqslant 0 , b < 0 , x < 0 \text{ iken} \\ x(a-b) & , x \geqslant 0 \text{ iken} \end{cases}$$

olup $xoa - xob = c$ olacak şekilde bir tek $x \in S$ vardır. Dolayısıyla $(S,+,o)$ sistemi bir kartezyen gruptur. Bu sistemin çarpımının birleşme kuralını gerçeklemesi için gerek ve yeter koşulun, k nın S nin merkezinde bulunması olduğunu gösterelim.

$x,y,z \in S$ için,

$$xo(yoz) = xo\begin{cases} ykz & , y,z < 0 \text{ iken} \\ yz & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} = \begin{cases} x(ykz) & , y,z < 0 \text{ iken} \\ xk(yz) & , x < 0, yz < 0 \text{ iken} \\ x(yz) & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x(ykz) & , x,y,z < 0 \text{ iken} \\ x(ykz) & , x \geqslant 0 , y,z < 0 \text{ iken} \\ xk(yz) & , x,y < 0 , z \geqslant 0 \text{ iken} \\ xk(yz) & , x < 0 , y \geqslant 0 , z < 0 \text{ iken} \\ x(yz) & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$(xoy)oz = \left.\begin{cases} xky & , x,y < 0 \text{ iken} \\ xy & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}\right\} oz = \begin{cases} (xky)z & , x,y < 0 \text{ iken} \\ (xy)kz & , xy < 0, z<0 \text{ iken} \\ (xy)z & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$(xoy)oz = \begin{cases} (xky)z & , \ x,y,z < 0 \text{ iken} \\ (xky)z & , \ x,y < 0 \ , \ z \geqslant 0 \text{ iken} \\ (xy)kz & , \ x < 0 \ , \ y \geqslant 0 \ , \ z < 0 \text{ iken} \\ (xy)kz & , \ x \geqslant 0, \ y,z < 0 \text{ iken} \\ (xy)z & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir .Buradan, birleşme kuralının geçerli olduğu kabul edilirse,

$$xo(yoz) = (xoy)oz \Longleftrightarrow \begin{cases} x(ykz) = (xky)z & , \ x,y,z < 0 \text{ iken} \\ x(ykz) = (xy)kz & , \ x \geqslant 0 \ , \ y,z < 0 \text{ iken} \\ xk(yz) = (xky)z & , \ x,y < 0, \ z \geqslant 0 \text{ iken} \\ xk(yz) = (xy)kz & , \ x < 0 \ , \ y \geqslant 0, \ z < 0 \text{ iken} \\ x(yz) = (xy)z & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olur. (S,+,.) bölümlü halkasının çarpımsal grubunun birleşme özelliğinden , $x(ykz) = (xy)kz$, $xk(yz) = (xky)z$ ve $x(yz) = (xy)z$ dir. Yine birleşme özelliği ile birlikte düşünecek olursak, $x(ykz) = (xky)z$ ve $xk(yz) = (xy)kz$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul $ky = yk$ yani k nın S nin merkezinde olmasıdır. Üstelik dağılma kurallarından hiçbirinin sağlanmadığını iki örnek üzerinde görelim.

$$(-1)o(1-1) = (-1)o0 = -1.0 = 0$$

$$(-1)o1-(-1)o(-1) = -1.1-(-1)k(-1) = -1-k$$

ve

$$(1-1)o(-1) = 0o(-1) = 0(-1) = 0$$

$$1o(-1)-(-1)o(-1) = 1.(-1)-(-1)k(-1) = -1-k$$

dır. Dolayısıyla k, bir merkez elemanı olmak koşuluyla (S,+,o) bir çifte grup belirtir.

8. BÖLÜMLÜ HALKALAR VE CİSİMLER ÜZERİNDE PROJEKTİF DÜZLEMLER

Tanım 8.1: B bir küme, + ve . B üzerinde iki ikili işlem olsun. Aşağıdaki koşulları gerçekleyen (B,+,.) sistemine bölümlü halka denir.

B1. (B,+) değişmeli bir gruptur.

B2. (B-{0},.) bir gruptur.

B3. Sağdan ve soldan dağılma özellikleri sağlanır.

Tanım 8.2: . ikili işlemi değişmeli olan (B,+,.) bölümlü halkasına cisim denir.

Dolayısıyla bölümlü halkaya değişmeli-olmayan cisin (non-commutative field) veya aykırı cisim (skew field) de denilmektedir. Tanım 5.2.1 ile verilen Kuaterniyonlar Halkası bir bölümlü halka örneğidir.

$(S, \oplus, \odot)$ sisteminin bölümlü halka veya cisim olması durumunda homogen koordinatlar yardımıyla projektif düzlemler elde edilebilir. Bunları kısaca açıklayalım: B bir bölümlü halka iken,

$$N = \{ (x_1,x_2,x_3) : (x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,0),\ (x_1,x_2,x_3) \equiv (x_1,x_2,x_3)\lambda ;\ x_i,\lambda \in B,\ \lambda \neq 0 \}$$

$$D = \{ [a_1,a_2,a_3] : [a_1,a_2,a_3] \neq [0,0,0],\ [a_1,a_2,a_3] \equiv \mu[a_1,a_2,a_3] ;\ a_i, \mu \in B,\ \mu \neq 0 \}$$

$$o : (x_1,x_2,x_3)o[a_1,a_2,a_3] \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

biçiminde tanımlanan $P_2B = (N,D,o)$ bir projektif düzlemdir.

Benzer olarak F bir cisim iken,

$$N = \{ (x_1,x_2,x_3) : (x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,0),\ (x_1,x_2,x_3) \equiv \lambda(x_1,x_2,x_3);\ x_i, \lambda \in F,\ \lambda \neq 0 \}$$

$$D = \{ [a_1,a_2,a_3] : [a_1,a_2,a_3] \neq [0,0,0],\ [a_1,a_2,a_3] \equiv \mu [a_1,a_2,a_3];\ a_i, \mu \in F,\ \mu \neq 0 \}$$

$o : (x_1,x_2,x_3) o [a_1,a_2,a_3] \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$

olmak üzere $P_2F = (N,D,o)$ bir projektif düzlemdir. Bu projektif düzleme cisim düzlemi denir.

Homogen olmayan koordinatlarla da projektif düzlemler elde edilebilmektedir.

Teorem 8.1: Herhangi bir (S,T) lineer üçlü halkasından elde edilen (S,+,.) sistemi bir bölümlü halka ise $P_{(S,T)}$ projektif düzlemi her X noktası ve her x doğrusu için (X,x)-geçişkendir, yani Dezargseldir.

İspat: (S,T) lineer üçlü halkasından elde edilen (S,+,.) sistemi bölümlü halka olsun. . işlemi birleşimli olduğundan $P_{(S,T)}$ ((0),[0])-geçişken bir düzlemdir ve (S,T) üçlü halkası bir sağ ters birleşimli yarıcisimdir. Teorem 5.1.1 ve Teorem 5.1.2 den $P_{(S,T)}$ bir Moufang düzlemidir. Oysa bu Moufang düzlemi, $(0) \not o [0]$ iken ((0),[0])-geçişken olduğundan Dezargsel bir düzlemdir ■

Teorem 8.2: Herhangi bir (S,T) üçlü halkasından elde edilen (S,+,.) sistemi bir cisim ise, $P_{(S,T)}$ projektif düzlemi Pappusseldir.

$P_{(S,T)}$ projektif düzlemi ile P_2F cisim düzlemi arasında;

$f : P_{(S,T)} \to P_2F$

$$\begin{array}{lllcllll} f : & (x,y) & \to & (x,y,1) & & f : & [m,k] & \to & [m,-1,k] \\ & (m) & \to & (1,m,0) & \text{ve} & & [k] & \to & [1,0,-k] \\ & (\infty) & \to & (0,1,0) & & & [\infty] & \to & [0,0,1] \end{array}$$

biçiminde tanımlanan f eşlemesi bir izomorfizmdir. Dolayısıyla $P_{(S,T)}$ ile P_2F düzlemleri izomorftur. Ayrıca bu izomorfizm ile homogen olmayan koordinatlarla homogen koordinatlar arasındaki geçiş belirlenmektedir.

Not: Cebirsel yapısı bölümlü halka (veya cisim) olan projektif düzlemler literatürde oldukça iyi incelenmiş olduğundan bunlarla ilgili olarak daha fazla ayrıntıya girilmemiştir.

9. ÇARPIMSAL YAPISI GRUP OLAN DÜZLEMSEL HALKALARIN BELİRTTİĞİ PROJEKTİF DÜZLEMLER

Bu bölümde vereceğimiz düzlemsel halka örneklerinde toplama işlemi birleşimli değil fakat çarpma işlemi birleşimlidir. Bu nedenle, elde edilen projektif düzlemlerin lineer üçlü halkasının cebirsel yapısında $(S-\{0\},.)$ sistemi bir gruptur. Burada önce, başka hiç bir standart özellik sağlamayan böyle bir düzlemsel halka üzerinde durulacaktır. Bu tür sistemlere, benzetme yoluyla, karşıt kartezyen grup demek yerinde olacaktır. İkinci ve üçüncü örneklerde ise dağılma özelliklerinin her ikisi de sağlandığından bu sistemler karşıt yarıcisim olarak bilinmektedir. Son olarak çarpımsal yapısı grup olan ve dağılma kurallarından yalnızca bir tanesi (soldan) gerçekleyen bir düzlemsel halka sunulacaktır. Bu cebirsel yapıda karşıt sol yarıcisim olarak isimlendirilmektedir.

Örnek 9.1 (Spencer, 1960): $\mathbb{R}$ gerçel sayılar cismi, . da bilinen çarpma işlemi olsun. $\mathbb{R}$ üzerinde $\oplus$ işlemi,

$$a \oplus b = \begin{cases} a + b & , \quad ab \geq 0 \quad \text{iken} \\ a + (\text{Sign}b)b^2 & , \quad ab < 0 \quad \text{ve } |a| > b^2 \quad \text{iken} \\ \text{Sign}a\sqrt{|a|} + b & , \quad ab < 0 \quad \text{ve } |a| \leq b^2 \quad \text{iken} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. $(\mathbb{R}, \oplus ,.)$ sisteminin bir karşıt kartezyen grup olduğunu gösterelim.

Her $a \in \mathbb{R}$ için $a.0 = 0.a = 0$ olduğundan, $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$ dır.

Her $a,b \in \mathbb{R}$ için $a \oplus x = b$ eşitliğinin bir tek $x \in \mathbb{R}$ çözümünün var olduğunu yine değişik durumları inceleyerek göstermeliyiz.

$a = 0$ ise $ax = 0$ dır, dolayısıyla $a \oplus x = b \Rightarrow 0 \oplus x = b \Rightarrow 0 + x = b$ olup, $x = b$ tek çözümdür.

$b = 0$ ve $a > 0$ ise,

$$a \oplus x = 0 \iff \begin{cases} a + x = 0 & , \quad x \geqslant 0 \text{ iken} \\ a - x^2 = 0 & , \quad x < 0 \text{ ve } a > x^2 \text{ iken} \\ \sqrt{|a|} + x = 0 & , \quad x < 0 \text{ ve } a \leqslant x^2 \text{ iken} \end{cases} \qquad (9.1)$$

elde edilir. $a + x = 0 \Rightarrow x = -a < 0$ ve $a - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = a$ olup, $a > x^2$ olması gerektiğinden, her iki durumda da x çözümü yoktur. $\sqrt{a} + x = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{a}$ ve $x < 0 \Rightarrow x^2 = a$ ve $a \leqslant a$ olduğundan (9.1) eşitliğinin tek çözümü $x = -\sqrt{a}$ dır.

$b = 0$ ve $a < 0$ ise,

$$a \oplus x = 0 \iff \begin{cases} a + x = 0 & , \quad x \leqslant 0 \text{ iken} \\ a + x^2 = 0 & , \quad x > 0 \text{ ve } |a| > x^2 \text{ iken} \\ -\sqrt{|a|} + x = 0 & , \quad x > 0 \text{ ve } |a| \leqslant x^2 \text{ iken} \end{cases} \qquad (9.2)$$

incelenmeli. $a + x = 0 \Rightarrow x = -a > 0$ ve $a + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -a$ elde edilir. Halbuki $|a| > x^2$ olmalıydı. Bu durumlarda x çözümü yoktur. $-\sqrt{|a|} + x = 0 \Rightarrow x = \sqrt{|a|}$ ve $x > 0$ dır. Buradan $x^2 = |a|$ olur ve böylece $x = \sqrt{|a|}$ (9.2) eşitliğinin tek çözümüdür.

$a > 0$ ve $b > 0$ ise,

$$a \oplus x = b \iff \begin{cases} a + x = b & , \quad x \geqslant 0 \text{ iken} \\ a - x^2 = b & , \quad x < 0 \text{ ve } a > x^2 \text{ iken} \\ \sqrt{a} + x = b & , \quad x < 0 \text{ ve } a \leqslant x^2 \text{ iken} \end{cases} \qquad (9.3)$$

olur.

$a > b$ olsun, $a + x = b \Rightarrow x = b - a < 0$ dır ve x çözümü yoktur. $\sqrt{a} + x = b \Rightarrow x = b - \sqrt{a}$ dır. Eğer $b \geqslant \sqrt{a}$ ise $x \geqslant 0$ dır ve çözüm değildir. O halde $x < 0$ yani $b < \sqrt{a}$ olmalı. Fakat bu durumda da $x = b - \sqrt{a} \Rightarrow x^2 = b^2 - 2b\sqrt{a} + a \Rightarrow a \leqslant b^2 - 2b\sqrt{a} + a \Rightarrow$ $0 \leqslant b^2 - 2b\sqrt{a} < b^2 - 2b^2 \Rightarrow 0 < -b^2$ çelişkisi olduğundan çözüm yoktur. $a - x^2 = b \Rightarrow x^2 = a - b$ ve $a > a - b$ olduğundan $x = -\sqrt{a-b}$ (9.3) denkleminin tek çözümüdür.

$a < b$ olsun, $a-x^2 = b$ ise $x^2 = a-b < 0$ olduğundan bir çelişki söz konusudur. $\sqrt{a} + x = b$ iken $x = b - \sqrt{a} > 0$ olduğundan x çözümü yoktur. $a + x = b$ ise $x = b-a > 0$ olur ve (9.3) ün tek çözümü $x = b-a$ dır.

$a = b$ olsun, $a-x^2 = b$ iken $x^2 = a-b = 0$ dır oysa $x < 0$ olmalıydı. $\sqrt{a} + x = b$ ise, $x = b - \sqrt{a} = b - \sqrt{b} > 0$ olması $x < 0$ ile çelişir ve x çözümü yoktur. $a + x = b$ iken $x = b-a$ dır ve $x = b-b = 0$ (9.3) eşitliğinin tek çözümüdür.

$a < 0$ ve $b < 0$ ise

$$a \oplus x = b \Leftrightarrow \begin{cases} a + x = b &, \ x \leqslant 0 \text{ iken} \\ a + x^2 = b &, \ x > 0 \text{ ve } |a| > x^2 \text{ iken} \\ -\sqrt{|a|} + x = b &, \ x > 0 \text{ ve } |a| \leqslant x^2 \text{ iken} \end{cases} \tag{9.4}$$

dir.

$a > b$ olsun, $a + x^2 = b$ iken $x^2 = b-a < 0$ dır ve $-\sqrt{|a|} + x = b$ iken $x = b + \sqrt{|a|} < 0$ dır bu nedenle her iki durumda x çözümü yoktur. $a + x = b$ ise $x = b-a < 0$ olduğundan (9.4) eşitliğinin tek çözümüdür.

$a < b$ olsun, $a + x = b$ ise $x = b-a > 0$ dır ve x çözüm olamaz. $-\sqrt{|a|} + x = b$ ise $x = b + \sqrt{|a|}$ dır. Eğer $\sqrt{|a|} \leqslant |b|$ ise $x \leqslant 0$ olacağından çözüm yoktur. $x > 0$ olabilmesi için $\sqrt{|a|} > |b|$ olmalı. Oysa bu durumda $x = b + \sqrt{|a|} \Rightarrow x^2 = b^2 + 2b\sqrt{|a|} + |a|$ ise,
$|a| \leqslant b^2 + 2b\sqrt{|a|} + |a|$ ise $0 \leqslant b^2 + 2b\sqrt{|a|} \leqslant b^2 + 2b|b|$ dir ve $0 \leqslant b^2 - 2b^2 = -b^2$ çelişkisi elde edilir. $a + x^2 = b$ iken $x^2 = b-a$ ve $|a| > x^2$ olduğundan $x = \sqrt{b-a}$ (9.4) ün tek çözümüdür.

$a = b$ ise bir tek $x = 0$ çözümünün olduğu aşikardır.

$a < 0$ ve $b > 0$ iken $a \oplus x = b$ aynen (9.4) deki gibi tanımlıdır. Benzer işlemler yapılarak bir tek $x = b + \sqrt{|a|}$ çözümü bulunur.

$a > 0$ ve $b < 0$ iken $a \oplus x = b$ denklemi (9.3) deki gibidir ve $x = b - \sqrt{a}$ tek çözümdür.

Her $a,b \in \mathbb{R}$ için $y \oplus a = b$ eşitliğinin bir tek $y \in \mathbb{R}$ çözümünün olduğunu göstermek için benzer işlemler yapılabilir. Değişik durumlarda bir tek $y \in \mathbb{R}$ çözümleri aşağıdaki şekildedir.

$a = 0$ ise $y = b$ ve $a = b$ ise $y = 0$ dır. $a > b \geqslant 0$ iken $y = -(a-b)^2$ ve $b > a > 0$ iken $y = b-a$ dır. $a < b \leqslant 0$ ise $y = (b-a)^2$ ve $b < a < 0$ ise $y = b-a$ dır. $a < 0$ ve $b > 0$ iken $y = b + a^2$ dir ve eğer $a > 0$, $b < 0$ ise $y = b-a^2$ dir.

$a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $a \neq c$ için $ax \oplus b = cx \oplus d$ denkleminin bir tek çözümünün varlığını yine değişik durumlar için inceleyelim.

$a,b,c,d > 0$ ise,

$$\left.\begin{array}{ll} x \geqslant 0 \text{ iken} & , ax + b \\ x < -\frac{b^2}{a} \text{ iken} & , ax + b^2 \\ -\frac{b^2}{a} \leqslant x < 0 \text{ iken} & ,-\sqrt{|ax|} + b \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} cx + d & , x \geqslant 0 \text{ iken} \\ cx + d^2 & , x < -\frac{d^2}{c} \text{ iken} \\ -\sqrt{|cx|} + d, & -\frac{d^2}{c} \leqslant x < 0 \text{ iken} \end{array}\right. \qquad (9.5)$$

eşitliği elde edilir. $a < c$ ve $d < b$, $c < a$ ve $b < d$ iken tek çözüm $x = \frac{d-b}{a-c}$ dir. $a < c$ ve $b < d$, $c < a$ ve $d < b$ olması hallerinde, eğer $ad < bc$ ise $x = \frac{d^2-b^2}{a-c}$ ve eğer $bc \leqslant ad$ ise $x = -\left(\frac{b-d}{\sqrt{a}-\sqrt{c}}\right)^2$ (9.5) eşitliğinin tek çözümüdür.

$a,c > 0$ ve $b,d < 0$ ise,

$$\left.\begin{array}{ll} x \leqslant 0 \text{ iken} & , ax + b \\ x > \frac{b^2}{a} \text{ iken} & , ax-b^2 \\ 0 < x \leqslant \frac{b^2}{a} \text{ iken} & ,\sqrt{|ax|} + b \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} cx + d & , x \leqslant 0 \text{ iken} \\ cx-d^2 & , x > \frac{d^2}{c} \text{ iken} \\ \sqrt{|cx|} + d, & 0 < x \leqslant \frac{d^2}{c} \text{ iken} \end{array}\right. \qquad (9.6)$$

denkleminin, $a < c$ ve $b < d$, $c < a$ ve $d < b$ iken tek çözümü $x = \frac{d-b}{a-c}$ dir. $a < c$ ve $d < b$, $c < a$ ve $b < d$ ise $ad < bc$ iken, $x = \frac{b^2-d^2}{a-c}$, $bc \leqslant ad$ iken $x = (\frac{d-b}{\sqrt{a}-\sqrt{c}})^2$ (9.6) eşitliğinin tek çözümüdür.

$a,c < 0$ ve $b,d > 0$ ise,

$$\left.\begin{array}{ll} x \leqslant 0 \text{ iken} & , \ ax + b \\ x > \frac{b^2}{|a|} \text{ iken} & , \ ax + b^2 \\ 0 < x \leqslant \frac{b^2}{|a|} \text{ iken} & , \ -\sqrt{|ax|} + b \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} cx + d & , \ x \leqslant 0 \text{ iken} \\ cx + d^2 & , \ x > \frac{d^2}{|c|} \text{ iken} \\ -\sqrt{|cx|} + d & , 0 < x \leqslant \frac{d^2}{|c|} \text{ iken} \end{array}\right. \quad (9.7)$$

olur. $a < c$ ve $b < d$, $c < a$ ve $d < b$ iken $x = \frac{d-b}{a-c}$ tek çözümdür.

$a < c$ ve $d < b$, $c < a$ ve $b < d$ hallerinde $b^2c < ad^2$ iken $x = \frac{d^2-b^2}{a-c}$, $ad^2 \leqslant b^2c$ iken ise $x = (\frac{d-b}{\sqrt{|c|}-\sqrt{|a|}})^2$ (9.7) denkleminin tek çözümüdür.

$a,b,c,d < 0$ ise, denklem

$$\left.\begin{array}{ll} x \geqslant 0 \text{ iken} & , \ ax + b \\ x < \frac{b^2}{a} \text{ iken} & , \ ax - b^2 \\ \frac{b^2}{a} \leqslant x < 0 \text{ iken}, & , \ \sqrt{|ax|} + b \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} cx + d & , \ x \geqslant 0 \text{ iken} \\ cx - d^2 & , \ x < \frac{d^2}{c} \text{ iken} \\ \sqrt{|cx|} + d & , \ \frac{d^2}{c} \leqslant x < 0 \text{ iken} \end{array}\right. \quad (9.8)$$

biçimindedir. $a < c$ ve $d < b$, $c < a$ ve $b < d$ ise tek çözüm $x = \frac{d-b}{a-c}$ dir. $a < c$ ve $b < d$, $c < a$ ve $d < b$ ise (9.8) eşitliğinin tek çözümü, $b^2c < ad^2$ iken $x = \frac{b^2-d^2}{a-c}$ olup, $ad^2 \leqslant b^2c$ halinde ise $x = -(\frac{d-b}{\sqrt{|a|}-\sqrt{|c|}})^2$ dir.

Diğer halleri kısaca özetleyelim. $a,b > 0$ ve $c,d < 0$, $a,d > 0$ ve $b,c < 0$ olması durumlarında $ax \oplus b = cx \oplus d$ eşitliği sırasıyla,

$$\left.\begin{array}{lll} x \geqslant 0 \text{ iken} & , & ax + b \\ x < -\frac{b^2}{a} \text{ iken} & , & ax + b^2 \\ -\frac{b^2}{a} \leqslant x < 0 \text{ iken} & , & -\sqrt{|ax|} + b \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ll} cx + d & , x \geqslant 0 \text{ iken} \\ cx - d^2 & , x < \frac{d^2}{c} \text{ iken} \\ \sqrt{|cx|} + d & , \frac{d^2}{c} \leqslant x < 0 \text{ iken} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{lll} x \leqslant 0 \text{ iken} & , & ax + b \\ x > \frac{b^2}{a} \text{ iken} & , & ax - b^2 \\ 0 < x \leqslant \frac{b^2}{a} \text{ iken} & , & \sqrt{|ax|} + b \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ll} cx + d & , x \leqslant 0 \text{ iken} \\ cx + d^2 & , x > -\frac{d^2}{c} \text{ iken} \\ -\sqrt{|cx|} + d & , 0 < x \leqslant -\frac{d^2}{c} \text{ iken} \end{array}\right.$$

biçimlerini alır ve her bir durumda x çözümünün tekliği benzer işlemlerle gösterilebilir.

$a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $a \neq c$ iken,

$$\begin{aligned} xa \oplus y &= b \\ xc \oplus y &= d \end{aligned} \tag{9.9}$$

sisteminin bir tek $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ çözümünün varolduğu yine değişik hallerde incelenerek uzun işlemler sonucu bulunabilir. Burada sadece bir durum için çözüm verilmektedir.

$$xa \oplus y = b \iff \begin{cases} xa + y = b & , \ xay \geqslant 0 \text{ iken} \\ xa + (\mathrm{Sign}\, y)y^2 = b & , \ xay < 0 \text{ ve } |x| > \frac{y^2}{|a|} \text{ iken} \\ (\mathrm{Sign}\, xa)\sqrt{|xa|} + y = b & , \ xay < 0 \text{ ve } |x| \leqslant \frac{y^2}{|a|} \text{ iken} \end{cases}$$

$$xc \oplus y = d \iff \begin{cases} xc + y = d & , \ xcy \geqslant 0 \text{ iken} \\ xc + (\mathrm{Sign}\, y)y^2 = d & , \ xcy < 0 \text{ ve } |x| > \frac{y^2}{|c|} \text{ iken} \\ (\mathrm{Sign}\, xc)\sqrt{|xc|} + y = d & , \ xcy < 0 \text{ ve } |x| \leqslant \frac{y^2}{|c|} \text{ iken} \end{cases}$$

$a,b,c,d > 0$ ise,

$$xa \oplus y = b \Longleftrightarrow \begin{cases} xa + y = b & , \quad xy \geqslant 0 \quad \text{iken} \\ xa + y^2 = b & , \quad x < 0 \text{ ve } y > 0 \text{ ve } |x| > \frac{y^2}{a} \text{ iken} \\ xa - y^2 = b & , \quad x > 0 \text{ ve } y < 0 \text{ ve } x > \frac{y^2}{a} \text{ iken} \\ -\sqrt{|xa|} + y = b & , \quad x < 0 \text{ ve } y > 0 \text{ ve } |x| \leqslant \frac{y^2}{a} \text{ iken} \\ \sqrt{|xa|} + y = b & , \quad x > 0 \text{ ve } y < 0 \text{ ve } x \leqslant \frac{y^2}{a} \text{ iken} \end{cases}$$

$$xc \oplus y = d \Longleftrightarrow \begin{cases} xc + y = d & , \quad xy \geqslant 0 \quad \text{iken} \\ xc + y^2 = d & , \quad x < 0 \text{ ve } y > 0 \text{ ve } |x| > \frac{y^2}{c} \text{ iken} \\ xc - y^2 = d & , \quad x > 0 \text{ ve } y < 0 \text{ ve } x > \frac{y^2}{c} \text{ iken} \\ -\sqrt{|xc|} + y = d & , \quad x < 0 \text{ ve } y > 0 \text{ ve } |x| \leqslant \frac{y^2}{c} \text{ iken} \\ \sqrt{|xc|} + y = d & , \quad x > 0 \text{ ve } y < 0 \text{ ve } x \leqslant \frac{y^2}{c} \text{ iken} \end{cases}$$

eşitlikleri elde edilir. $a > c$ ve $b > d$ iken bir tek $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ çözümünün olduğunu gösterelim.

$xa + y = b$ ve $xc + y = d \Rightarrow x(a-c) = b-d \Rightarrow x = \frac{b-d}{a-c} > 0$ dır ve $y = \frac{ad-bc}{a-c}$ dir. Dolayısıyla $ad-bc \geqslant 0$ iken (9.9) sisteminin tek çözümü $(x,y) = \left(\frac{b-d}{a-c}, \frac{ad-bc}{a-c}\right)$ dir.

$xa + y^2 = b$ ve $xc + y^2 = d \Rightarrow x = \frac{b-d}{a-c} > 0$ olduğundan çözüm yoktur.

$xa-y^2 = b$ ve $xc-y^2 = d \Rightarrow x = \frac{b-d}{a-c} > 0$ ve $y = -\sqrt{\frac{bc-da}{a-c}}$ olduğundan ve aynı zamanda $x > \frac{y^2}{a}$ ve $x > \frac{y^2}{c}$ koşulları sağlandığından $ad-bc < 0$ iken tek çözüm $(x,y) = \left(\frac{b-d}{a-c}, -\sqrt{\frac{bc-da}{a-c}}\right)$ dir.

$-\sqrt{|xa|}+y=b$ ve $-\sqrt{|xc|}+y=d \Rightarrow \sqrt{|x|}\,(\sqrt{|c|}-\sqrt{|a|})=b-d$

$\Rightarrow \quad \sqrt{|x|}=\dfrac{b-d}{\sqrt{|c|}-\sqrt{|a|}} \Rightarrow$ Sign $\dfrac{b-d}{\sqrt{|c|}-\sqrt{|a|}} \to (-)$ olduğundan çözüm yoktur.

$\sqrt{|xa|}+y=b$ ve $\sqrt{|xc|}+y=d \Rightarrow ad-bc<0$ iken $(x,y)\doteq\left(\left(\dfrac{b-d}{\sqrt{a}-\sqrt{c}}\right)^2, \dfrac{d\sqrt{a}-b\sqrt{c}}{\sqrt{a}-\sqrt{c}}\right)$ olmakla birlikte $x\leqslant\dfrac{y^2}{a}$ ve $x\leqslant\dfrac{y^2}{c}$ koşulları sağlanmadığından çözüm yoktur. $xa+y^2=b$ ve $-\sqrt{|xc|}+y=d$, $xa-y^2=b$ ve $\sqrt{|xc|}+y=d$, $-\sqrt{|xa|}+y=b$ ve $xc+y^2=d$, $\sqrt{|xa|}+y=b$ ve $xc-y^2=d$ sistemlerinin (x,y) çözümlerinin bulunmadığı gösterilebilir. $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ sayılarının diğer durumları için (9.9) sisteminin yine bir tek $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ çözümü vardır.

$\oplus$ işleminin birleşimli olmadığını ve dağılma kurallarını gerçeklemediğini birer örnek ile gösterelim.

$$\left.\begin{array}{l}(5\oplus 4)\oplus(-3)=9\oplus(-3)=\sqrt{9}-3=3-3=0\\[2ex] 5\oplus(4\oplus(-3))=5\oplus(\sqrt{4}-3)=5\oplus(-1)=5-1=4\end{array}\right\}\Rightarrow \quad 0\neq 4 \quad \text{dür.}$$

$$\left.\begin{array}{l}4.(4\oplus(-1))=4(\sqrt{4}-1)=4.1=4\\[2ex] 4.4\oplus 4(-1)=16\oplus(-4)=\sqrt{16}-4=4-4=0\end{array}\right\}\Rightarrow \quad 0\neq 4 \quad \text{dür.}$$

$$\left.\begin{array}{l}(-4\oplus 1).4=(-4+1).4=-3.4=-12\\[2ex] -4.4\oplus 1.4=-16\oplus 4=-\sqrt{|-16|}+4=-4+4=0\end{array}\right\}\Rightarrow \quad 0\neq -12 \quad \text{dir.}$$

Tanım 9.1: S, 0 ve 1 gibi en az iki elemanı kapsayan ve üzerinde $\odot$ ve $\oplus$ gibi ikili işlemler tanımlı olan bir küme olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan $(S,\oplus,\odot)$ sistemine bir (DNR) division neo-ring denir.

(i) $(S,\oplus)$, birim elemanı 0 olan, bir yarıgruptur.

(ii) $(S-\{0\},\odot)$, birim elemanı 1 olan, bir yarıgruptur.

(iii) Her $x \in S$ için $x\Theta 0 = 0\Theta x = 0$ dır.

(iv) Her $a,b,c \in S$ için,

$$a\Theta(b \oplus c) = (a\Theta b) \oplus (a\Theta c)$$

ve

$$(a \oplus b)\Theta c = (a\Theta c) \oplus (b\Theta c)$$

dir.

Paige, birleşimli division neo-ring'ler üzerinde neo-fields adı altında çalıştı ve genelde bir DNR nin düzlemsel üçlü halka olmadığını gösterdi (Paige, 1949). $T(a,b,c) = a\Theta b \oplus c$ üçlü işlemi ile birleştirilen bir DNR $(S, \oplus, \Theta)$ sisteminin bir lineer düzlemsel halka olması için gerek ve yeter koşullar şunlardır:

(v) Her $a,b,c,d \in S$, $a \neq c$ için,

$$a\Theta x \oplus b = c\Theta x \oplus d$$

eşitliğinin bir tek x çözümü vardır.

(vi) Her $a,b,c,d \in S$, $a \neq c$ için,

$$x\Theta a \oplus y = b$$
$$x\Theta c \oplus y = d$$

sisteminin bir tek $(x,y) \in S^2$ çözümü vardır.

(v) ve (vi) koşullarını sağlayan bir DNR ye (PDNR) planar division neo-ring denir. Çarpma işlemi birleşimli olan bir PDNR ye karşıt yarıcisim demek uygun olmaktadır. Karşıt yarıcisimler üzerine kurulan düzlemler $((0),[0])$, $((\infty),[0,0])$ ve $((0,0),[\infty])$-geçişkendir. Şimdi bazı karşıt yarıcisimleri ve bunlara bağlı olarak elde edilebilen bazı karşıt kartezyen grup örnekleri verelim.

Örnek 9.2 (Kaya, 1974): $\mathbb{R}$ gerçel sayılar cismi olmak üzere $\mathbb{R}$ de bilinen . işlemi aynen alınıp yeni bir $\oplus$ işlemi,

$$u \oplus v = \begin{cases} (\operatorname{Sign} v)\sqrt{v^2 - u^2} & , \quad u \in \langle 0, -v \rangle \\ u + v & , \quad u \notin \langle 0, -v \rangle \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. $(\mathbb{R}, \oplus, .)$ sisteminin bir karşıt yarıcisim olduğunu gösterelim.

Her $x \in \mathbb{R}$ için $0 \oplus x = x \oplus 0 = x$ olup 0 , $(\mathbb{R}, \oplus)$ sisteminin birim elemanıdır.

$$a \oplus x = b \Leftrightarrow \begin{cases} (\mathrm{Signx})\sqrt{x^2-a^2} = b & , \ a \in <0,-x> \\ a + x = b & , \ a \notin <0,-x> \end{cases} \qquad (9.10)$$

eşitliğinin bir tek $x \in \mathbb{R}$ çözümünün olduğunu göstermeden önce $<0,-x>$ in anlamını belirleyelim. Eğer $x < 0$ ise $<0,-x> = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y < -x\}$ ve $x > 0$ ise $<0,-x> = \{y \in \mathbb{R} : -x < y < 0\}$ dır.

$a = 0$ olsun, $0 \oplus x = b \Rightarrow 0 + x = b \Rightarrow x = b$ tek çözümdür. $b = 0$ iken $a < 0$ olması halinde $a \in <0,-x>$ ise $-a < x$ ve $\sqrt{x^2-a^2} = 0 \Rightarrow x = a$ olduğundan çözüm yoktur. $a > 0$ iken $a \in <0,-x>$ ise $x < -a$ dır ve $-\sqrt{x^2-a^2} = 0 \Rightarrow x = -a$ elde edildiğinden çözüm yoktur. $a \notin <0,-x>$ iken ise a nın işaretine göre $x \leqslant -a$ veya $x \geqslant -a$ olacağından $a + x = 0 \Rightarrow x = -a$ (9.10) eşitliğinin tek çözümüdür.

$a > 0$ ve $b > 0$ olsun, $a \in <0,-x>$ iken $0 < a < -x$ dir. $-\sqrt{x^2-a^2} = b$ ve $b > 0$ olduğundan bu mümkün değildir. $a \notin <0,-x>$ iken $-a \leqslant x$ dir. $-a = x$ iken $b = 0$ olduğu gösterildi. $-a < x$ iken ise $a + x = b \Rightarrow x = b-a \Rightarrow -a < b-a \Rightarrow b > 0$ dır ve $x = b-a$ (9.10) un tek çözümüdür. Benzer işlemler yapılarak $a < 0$ ve $b < 0$ olması halinde $x = b-a$, $a > 0$ ve $b < 0$ iken $x = -\sqrt{a^2+b^2}$, $a < 0$ ve $b > 0$ ise $x = \sqrt{a^2+b^2}$ değerlerinin (9.10) denkleminin tek x çözümü olduğu görülür.

$$x \oplus a = b \Leftrightarrow \begin{cases} (\mathrm{Signa})\sqrt{a^2-x^2} = b & , \ x \in <0,-a> \\ x + a = b & , \ x \notin <0,-a> \end{cases} \qquad (9.11)$$

eşitliğinin bir tek x çözümünün var olduğu yine değişik durumlar için belirlenmelidir.

$a = 0$ ise $<0,0> = \emptyset$ olduğunda $x \oplus 0 = b \Leftrightarrow x + 0 = b$ olur ve bu tek çözümdür. $b = 0$ iken $x = -a$ tek çözümdür. $a < 0$, $b > 0$ veya $a > 0$, $b < 0$ hallerinde $x = b-a$ çözümü tektir. Eğer $a > 0$ ve $b > 0$ ise $a > b$ iken $x = -\sqrt{a^2-b^2}$ ve $a < b$ iken $x = b-a$ (9.11) in tek çözümüdür. Son olarak $a < 0$, $b < 0$ ve üstelik $a > b$ ise, $x = b-a$ ve $a < b$ ise $x = \sqrt{a^2-b^2}$ tek çözümdür.

Netice olarak $(\mathcal{R}, \oplus)$ bir yarıgruptur. Ayrıca $a \oplus x = 0$ ve $x \oplus a = 0$ eşitliklerinin çözümünün tekliği araştırılırken görüldüğü gibi $(\mathcal{R}, \oplus)$ ya ait her bir x elemanının toplamsal tersi $(\mathcal{R},+)$ daki toplamsal tersi ile aynıdır. Çarpma işlemi $\mathcal{R}$ de bilinen çarpma işlemi olduğundan $(\mathcal{R}-\{0\},.)$ birim elemanı 1 olan bir gruptur. Her $x \in \mathcal{R}$ için $x.0 = 0.x = 0$ dır. Sağdan ve soldan dağılma özelliklerinin sağlandığını gösterelim.

$$u(v \oplus w) = \begin{cases} u(\mathrm{Sign}w)\sqrt{w^2-v^2} & , \quad v \in \langle 0,-w \rangle \\ u(v+w) & , \quad v \notin \langle 0,-w \rangle \end{cases} \tag{9.12}$$

$$uv \oplus uw = \begin{cases} (\mathrm{Sign}uw)\sqrt{u^2w^2-u^2v^2} & , \quad uv \in \langle 0,-uw \rangle \\ uv + uw & , \quad uv \notin \langle 0,-uw \rangle \end{cases} \tag{9.13}$$

$v \in \langle 0,-w \rangle \iff uv \in \langle 0,-uw \rangle$ olduğundan (9.12) ve (9.13) eşitliklerinden

$$u(v \oplus w) = u(\mathrm{Sign}w)\sqrt{w^2-v^2} = (\mathrm{Sign}uw)\sqrt{u^2(w^2-v^2)} = uv \oplus uw \tag{9.14}$$

elde edilir. $v \notin \langle 0,-w \rangle \iff uv \notin \langle 0,-uw \rangle$ dır, bu nedenle

$$u(v \oplus w) = u(v+w) = uv + uw = uv \oplus uw \tag{9.15}$$

olur. (9.14) ve (9.15) den soldan dağılma özelliği sağlanır. Sağdan dağılma özelliğinin de sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir. Böylece $(\mathcal{R}, \oplus, .)$ çarpma işlemi birleşimli olan bir DNR dir. $(\mathcal{R}, \oplus, .)$ nın bir karşıt yarıcisim olduğunu göstermek için Tanım 9.1 deki (v) ve (vi) koşullarının geometrik anlamından faydalanacağız (Kaya, 1972).

Her $a,b,c,d \in \mathcal{R}$, $a \neq c$ için,

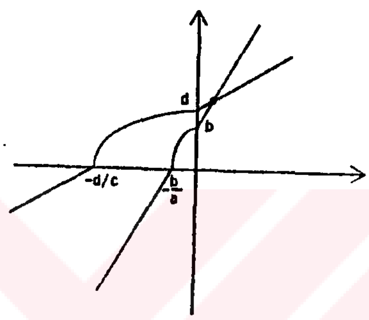
$$ax \oplus b = cx \oplus d \tag{9.16}$$

eşitliğinin bir tek $x \in \mathbb{R}$ çözümünün olduğunu göstermek istiyoruz. Bu $[a,b]$, $[c,d]$ gibi farklı iki doğrunun bir tek (x,y) noktasında kesişmesi demektir.

$a,b,c,d > 0$ ve $a > c$, $b < d$ olsun.

$x \in <0,-b/a>$ ve $x \in <0,-d/c>$ ise, $x = -\sqrt{\dfrac{b^2-d^2}{a^2-c^2}}$ ve $\dfrac{b^2-d^2}{a^2-c^2} < 0$

olması nedeniyle $x \notin \mathbb{R}$ dir. $x \notin <0,-b/a>$ ve $x \notin <0,-d/c>$ ise, $x = \dfrac{d-b}{a-c} > 0$ ve $y = \dfrac{ad-bc}{a-c} > 0$ olup x tek çözümdür (Şekil 9.1).

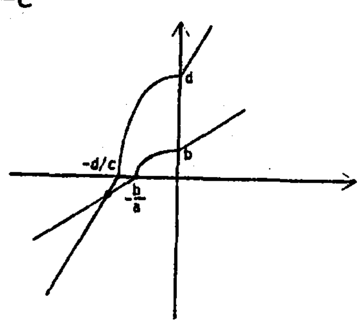


Şekil 9.1

$a,b,c,d > 0$ ve $a < c$, $b < d$ olsun.

$\dfrac{d}{c} > \dfrac{b}{a}$ iken durumu inceleyelim. $x \in <0,-b/a>$ ve $x \in <0,-d/c>$ ise $\sqrt{b^2-a^2x^2} = \sqrt{d^2-c^2x^2} = y$ olacaktır. Oysa Şekil 9.2 ye bakıldığında $y < 0$ olduğu görülmekte. Dolayısıyla çözüm yoktur.

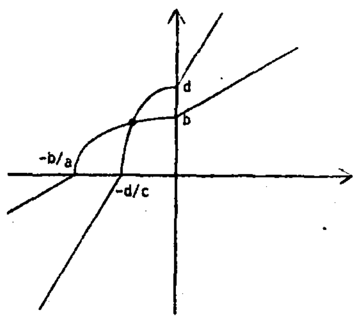
$x \notin <0,-b/a>$ ve $x \notin <0,-d/c>$ ise $ax + b = cx + d \Rightarrow$ $x = \dfrac{d-b}{a-c} < 0$ ve $y = \dfrac{ad-bc}{a-c} < 0$ olduğundan x tek çözümdür (Şekil 9.2).



Şekil 9.2

Eğer $\dfrac{d}{c} < \dfrac{b}{a}$ ise $x \in <0,-b/a>$ ve $x \in <0,-d/c>$ ise,

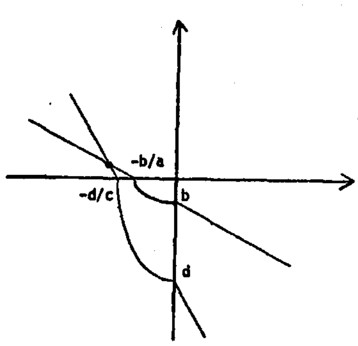
$x = -\sqrt{\frac{b^2-d^2}{a^2-c^2}}$ ve $y = \sqrt{\frac{a^2d^2-b^2c^2}{a^2-c^2}}$ olup x tek çözümdür. $x \notin <0,-b/a>$ ve $x \notin <0,-d/c>$ olması halinde $x = \frac{d-b}{a-c} < 0$ ve $y = \frac{ad-bc}{a-c}$ bulunur. Eğer $ad-bc < 0$ ise ortak nokta II.bölgede ve $ad-bc > 0$ ise III.bölgede olacağından bu mümkün değildir (Şekil 9.3).



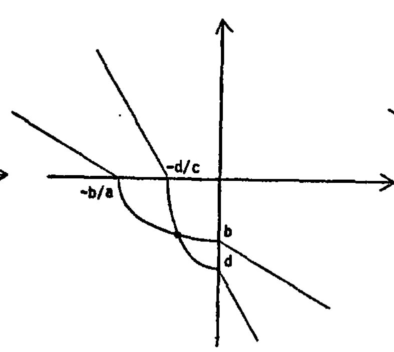
Şekil 9.3

$a,b,c,d \in \mathbb{R}$ lerin diğer hallerinde de $x \in \mathbb{R}$ çözümü tektir. Burada sadece x çözümleri ve geometrik anlamlarını gösteren grafikleri verilmektedir.

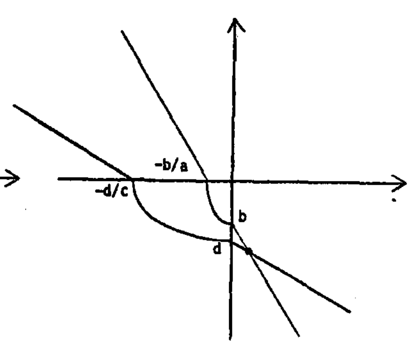
$a,b,c,d < 0$ olsun. $a > c$, $b > d$ ve $\frac{d}{c} > \frac{b}{a}$ ise $x = \frac{d-b}{a-c}$ tek çözümdür (Şekil 9.4). Eğer $\frac{d}{c} < \frac{b}{a}$ ise $x = -\sqrt{\frac{b^2-d^2}{a^2-c^2}}$ tek çözümdür (Şekil 9.5). $a < c$, $b > d$ olması halinde ise $x = \frac{d-b}{a-c}$ çözümü tektir (Şekil 9.6).



Şekil 9.4



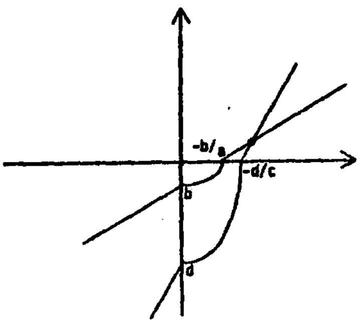
Şekil 9.5



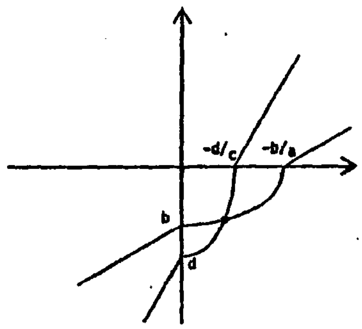
Şekil 9.6

$a,c > 0$ ve $b,d < 0$ olsun. $a < c$, $b > d$ ve $\frac{d}{c} < \frac{b}{a}$ ise tek çözüm $x = \frac{d-b}{a-c}$ dir (Şekil 9.7). Aynı koşullarda $\frac{d}{c} > \frac{b}{a}$ ise

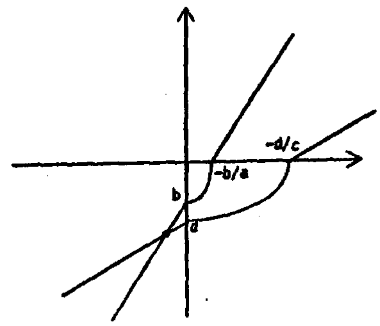
$x = \sqrt{\dfrac{b^2-d^2}{a^2-c^2}}$ çözümü tektir (Şekil 9.8). $a > c$ ve $b > d$ ise $x = \dfrac{d-b}{a-c}$ tek çözümdür (Şekil 9.9).



Şekil 9.7

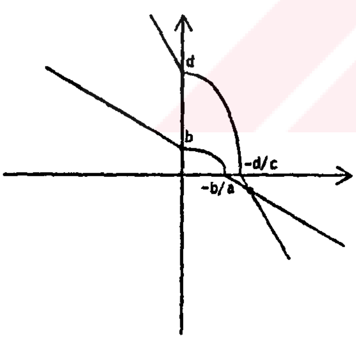


Şekil 9.8

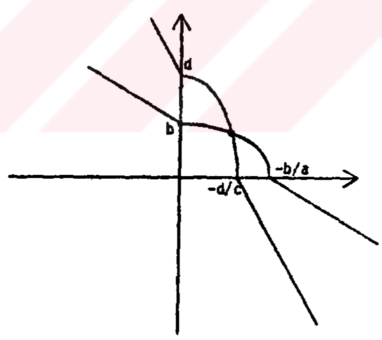


Şekil 9.9

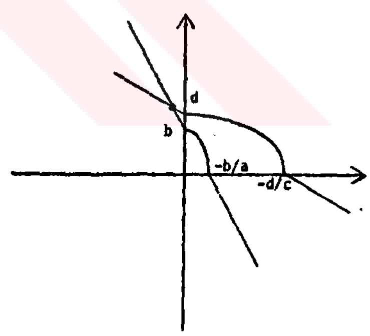
$a,c < 0$ ve $b,d > 0$ olsun. $a > c$, $b < d$ ve $\dfrac{d}{c} < \dfrac{b}{a}$ iken $x = \dfrac{d-b}{a-c}$ tek çözümdür (Şekil 9.10). $\dfrac{d}{c} > \dfrac{b}{a}$ ise tek çözüm $x = \sqrt{\dfrac{b^2-d^2}{a^2-c^2}}$ dir (Şekil 9.11). Eğer $a < c$ ve $b < d$ ise $x = \dfrac{d-b}{a-c}$ çözümü tektir (Şekil 9.12).



Şekil 9.10



Şekil 9.11

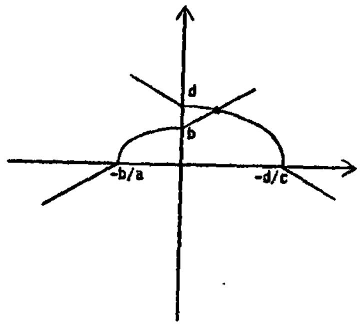


Şekil 9.12

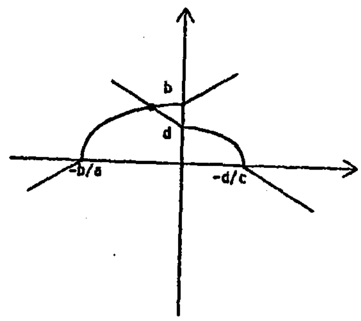
$a > 0$, $c < 0$ ve $b,d > 0$ ve $b < d$ olsun.

$x = \dfrac{-ab + \sqrt{a^2d^2 + c^2d^2-c^2b^2}}{a^2 + c^2}$ tek çözümdür (Şekil 9.13). $a > 0$, $c < 0$ ve $b,d > 0$ ve $b > d$ olsun, tek çözüm $x = \dfrac{-cd- \sqrt{a^2b^2+c^2b^2-a^2d^2}}{a^2 + c^2}$ dir (Şekil 9.14). $a,b < 0$ ve $c,d > 0$ ve $d > |b|$ iken bir tek

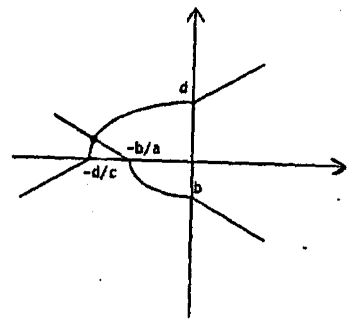
$$x = \frac{-ab - \sqrt{a^2d^2 + c^2d^2 - a^2b^2}}{a^2 + c^2}$$ çözümü vardır (Şekil 9.15).



Şekil 9.13



Şekil 9.14



Şekil 9.15

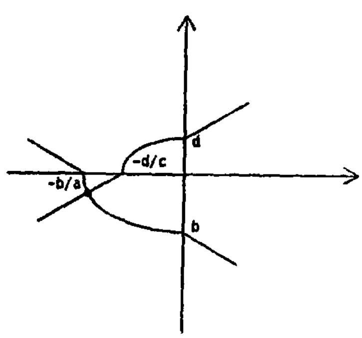
$a,b < 0$ ve $c,d > 0$ ve $d < |b|$ iken tek çözüm

$$x = \frac{-cd - \sqrt{a^2b^2 + c^2b^2 - a^2d^2}}{a^2 + c^2}$$ dir (Şekil 9.16). $a,b,d < 0$ ve $c > 0$

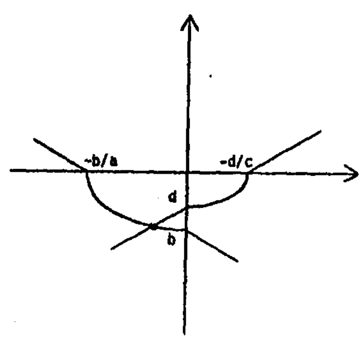
ve $b < d$ olduğunda $x = \dfrac{-cd - \sqrt{a^2b^2 + c^2b^2 - a^2d^2}}{a^2 + c^2}$ tek çözümdür

(Şekil 9.17). $a,b,d < 0$ ve $c > 0$ ve $b > d$ iken bir tek

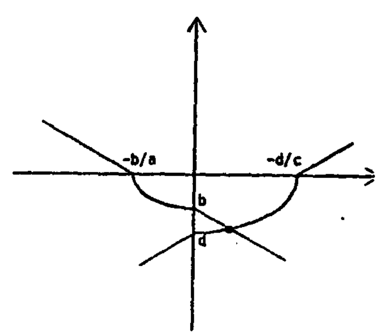
$$x = \frac{-ab + \sqrt{a^2d^2 + c^2d^2 - c^2b^2}}{a^2 + c^2}$$ çözümü vardır (Şekil 9.18).



Şekil 9.16



Şekil 9.17



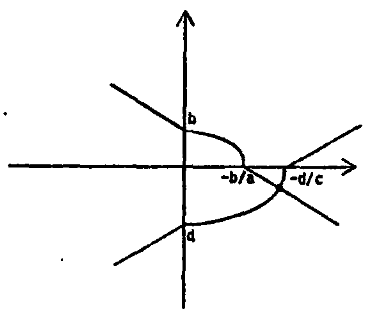
Şekil 9.18

$a,d < 0$ ve $b,c > 0$ ve $b < |d|$ olması halinde bir tek

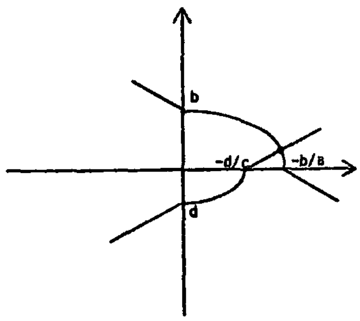
$$x = \frac{-ab + \sqrt{a^2d^2 + c^2d^2 - c^2b^2}}{a^2 + c^2}$$ çözümü vardır (Şekil 9.19).

$a,d < 0$ ve $b,c > 0$ ve $b > |d|$ iken $x = \dfrac{-cd + \sqrt{a^2b^2 + c^2b^2 - a^2d^2}}{a^2 + c^2}$

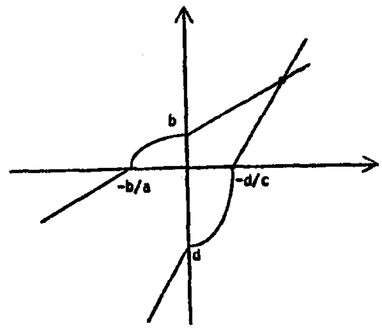
çözümü tektir (Şekil 9.20). $a,b,c > 0$ ve $d < 0$ ve $a < c$ ise tek çözüm $x = \dfrac{d-b}{a-c}$ dir (Şekil 9.21).



Şekil 9.19

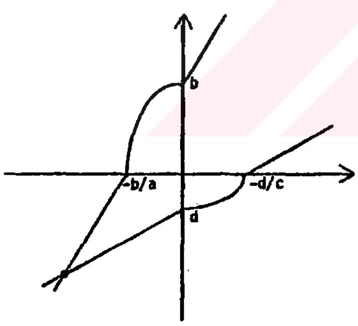


Şekil 9.20

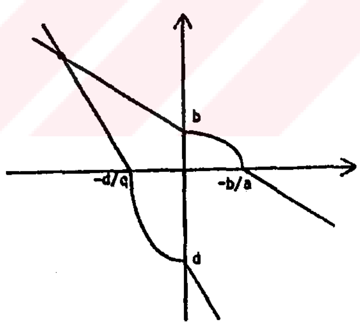


Şekil 9.21

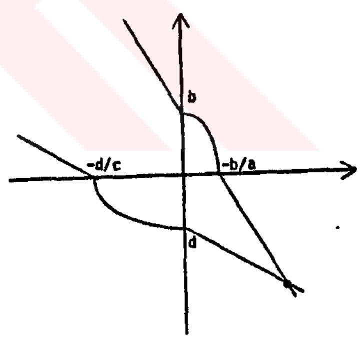
$a,b,c > 0$ ve $d < 0$ ve $a > c$ iken bir tek $x = \dfrac{d-b}{a-c}$ çözümü vardır (Şekil 9.22). $a,c,d < 0$ ve $b > 0$ ve $a > c$ ise bir tek $x = \dfrac{d-b}{a-c}$ çözümü vardır (Şekil 9.23). $a,c,d < 0$ ve $b > 0$ ve $a < c$ olması durumunda $x = \dfrac{d-b}{a-c}$ çözümü tektir (Şekil 9.24).



Şekil 9.22



Şekil 9.23



Şekil 9.24

Böylece (9.16) eşitliğinin her durumda bir tek $x \in \mathbb{R}$ çözümünün var olduğu gösterildi.

Her $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $a \neq c$ için,

$$\begin{aligned} xa \oplus b &= y \\ xc \oplus d &= y \end{aligned} \tag{9.17}$$

sisteminin bir tek $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ çözümünün bulunması demek, geometrik olarak $(a,b) \neq (c,d)$ noktalarının bir tek $[x,y]$ doğrusu belirtmesi anlamındadır. Burada (9.17) sisteminin bir tek (x,y) çözümünü araştırırken yine geometrik yorumundan faydalanacağız.

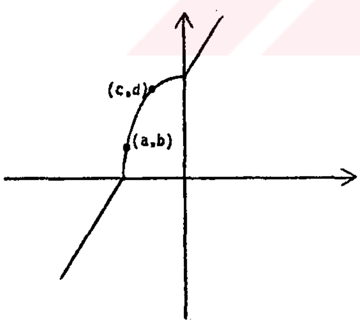
$a,c < 0$ ve $b,d > 0$ ve $a < c$, $b < d$ olsun. $a \in \langle 0,-y/x \rangle$ ve $c \in \langle 0,-y/x \rangle$ olduğundan $\sqrt{y^2-x^2a^2} = b$ ve $\sqrt{y^2-x^2c^2} = d$ olur. Buradan $y^2-x^2a^2 = b^2$ ve $y^2-x^2c^2 = d^2$ olduğundan $x = \sqrt{\dfrac{b^2-d^2}{c^2-a^2}}$ ve $y = \sqrt{\dfrac{b^2c^2-a^2d^2}{c^2-a^2}}$ bulunur (Şekil 9.25). $a,b,c < 0$ ve $d > 0$ ve $a < c$ iken $\sqrt{y^2-x^2c^2} = d$ ve $xa + y = b$ den bir tek (x,y) çözümü olarak

$$(x,y) = \left(\frac{ab + \sqrt{a^2d^2 + b^2c^2-c^2d^2}}{a^2-c^2} , \frac{-bc^2-a\sqrt{a^2d^2 + b^2c^2-c^2d^2}}{a^2-c^2} \right)$$

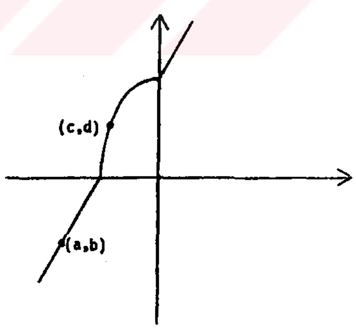
bulunur (Şekil 9.26). $a < 0$ ve $b,c,d > 0$ ve $b < d$ olması halinde tek çözüm

$$(x,y) = \left(\frac{cd-\sqrt{a^2d^2 + b^2c^2-a^2b^2}}{c^2-a^2} , \frac{-a^2d + c\sqrt{a^2d^2 + b^2c^2-a^2b^2}}{c^2-a^2} \right)$$

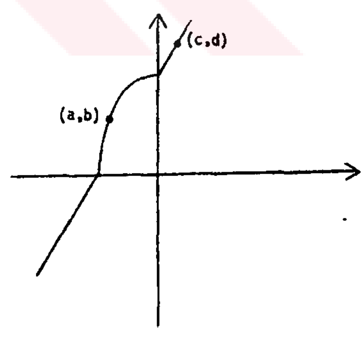
dir (Şekil 9.27).



Şekil 9.25



Şekil 9.26



Şekil 9.27

$a,b,c,d < 0$ ve $a < c$, $b > d$ olması halinde tek çözüm,

$$(x,y) = \left(-\sqrt{\frac{b^2-d^2}{c^2-a^2}} , -\sqrt{\frac{b^2c^2-a^2d^2}{c^2-a^2}} \right)$$

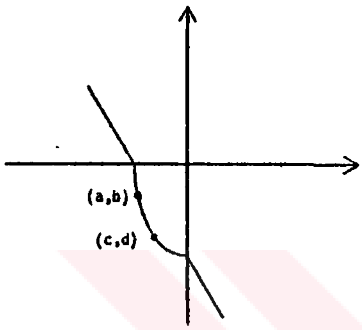
dir (Şekil 9.28). $a,b,c < 0$ ve $d > 0$ ve $c < a$ iken,

$$(x,y) = \left(\frac{dc-\sqrt{a^2d^2+b^2c^2-a^2b^2}}{c^2-a^2} \ ; \ \frac{-a^2d+c\sqrt{a^2d^2+b^2c^2-a^2b^2}}{c^2-a^2} \right)$$

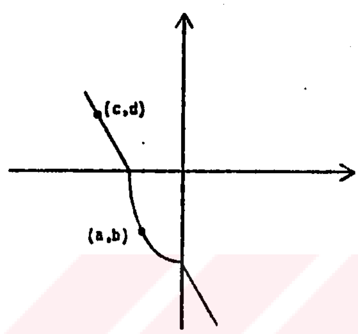
tek çözümdür (Şekil 9.29). $a > 0$ ve $b,c,d < 0$ ve $b < d$ iken,

$$(x,y) = \left(\frac{ab+\sqrt{a^2d^2+b^2c^2-c^2d^2}}{a^2-c^2} \ , \ \frac{-bc^2-a\sqrt{a^2d^2+b^2c^2-c^2d^2}}{a^2-c^2} \right)$$

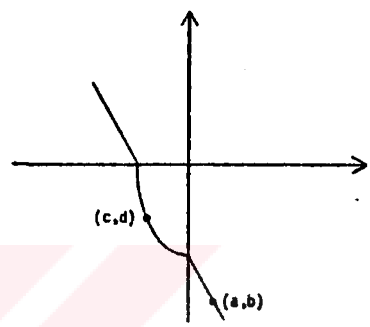
çözümü tektir (Şekil 9.30).



Şekil 9.28



Şekil 9.29



Şekil 9.30

$a,c > 0$ ve $b,d < 0$ ve $a < c$, $b < d$ ise bir tek

$$(x,y) = \left(\sqrt{\frac{b^2-d^2}{c^2-a^2}} \ , \ -\sqrt{\frac{b^2c^2-a^2d^2}{c^2-a^2}} \right)$$ çözümü vardır (Şekil 9.31).

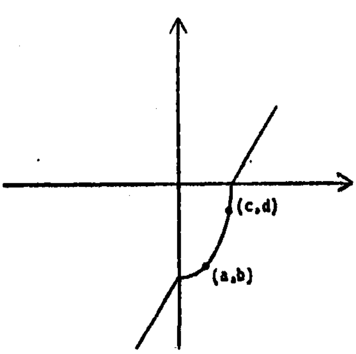
$a,b,d < 0$ ve $c > 0$ ve $b < d$ olması halinde tek çözüm

$$(x,y) = \left(\frac{ab-\sqrt{a^2d^2+b^2c^2-c^2d^2}}{a^2-c^2} \ , \ \frac{-bc^2+a\sqrt{a^2d^2+b^2c^2-c^2d^2}}{a^2-c^2} \right)$$

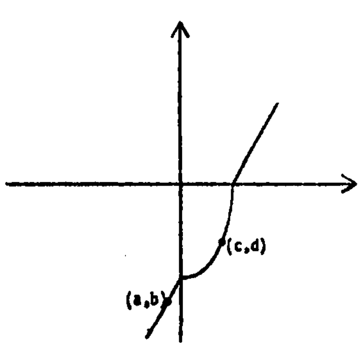
dir (Şekil 9.32). $a,c,d > 0$ ve $b < 0$ ve $a < c$ iken tek çözüm

$$(x,y) = \left(\frac{cd-\sqrt{a^2d^2+b^2c^2-a^2b^2}}{c^2-a^2} \ , \ \frac{-a^2d-c\sqrt{a^2d^2+b^2c^2-a^2b^2}}{c^2-a^2} \right)$$

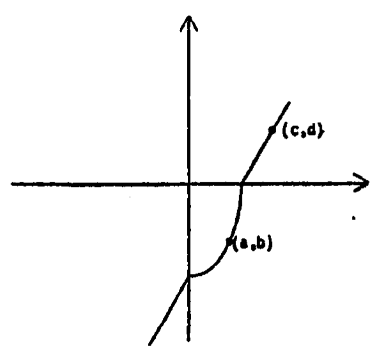
dir (Sekil 9.33).



Şekil 9.31



Şekil 9.32



Şekil 9.33

$a,b,c,d > 0$ ve $a < c$, $b > d$ ise

$$(x,y) = \left(-\sqrt{\frac{b^2-d^2}{c^2-a^2}} , \sqrt{\frac{b^2c^2-a^2d^2}{c^2-a^2}} \right)$$ tek çözümdür (Şekil 9.34).

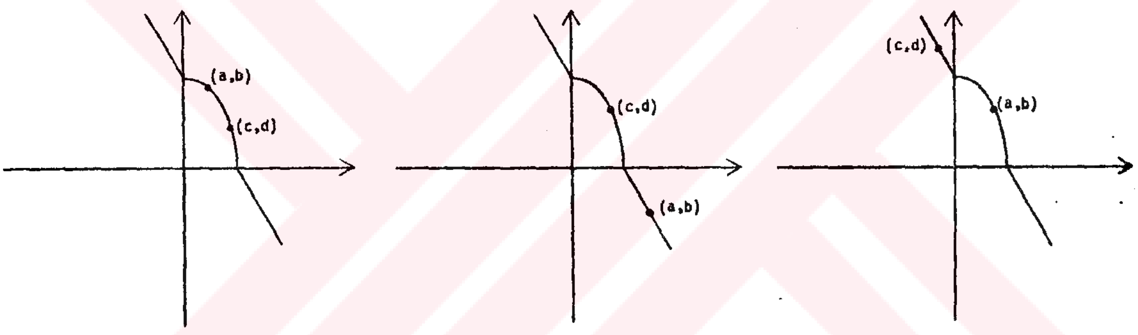
$a,c,d > 0$ ve $b < 0$ ve $c < a$ iken

$$(x,y) = \left(\frac{ab-\sqrt{a^2d^2+b^2c^2-c^2d^2}}{a^2-c^2} , \frac{-bc^2+a\sqrt{a^2d^2+b^2c^2-c^2d^2}}{a^2-c^2} \right)$$

çözümü tektir (Şekil 9.35). $a,b,d > 0$ ve $c < 0$ ve $d > b$ ise

$$(x,y) = \left(\frac{cd+\sqrt{a^2d^2+b^2c^2-a^2b^2}}{c^2-a^2} , \frac{-a^2d+c\sqrt{a^2d^2+b^2c^2-a^2b^2}}{c^2-a^2} \right)$$

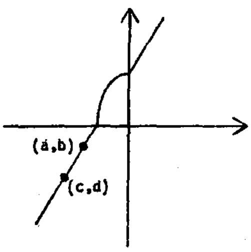
çözümü tektir (Şekil 9.36).



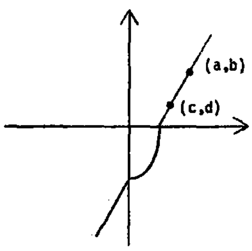
Şekil 9.34 Şekil 9.35 Şekil 9.36

Şimdi inceleyeceğimiz durumların her birinde (9.17) sisteminin bir tek $(x,y) = \left(\frac{b-d}{a-c} , \frac{ad-bc}{a-c} \right)$ çözümü vardır. Fakat ad-bc nin işaretine göre, noktaların belirledikleri doğru farklı bir konumdadır.

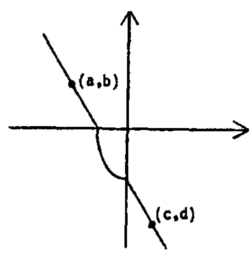
$a,b,c,d < 0$ ve $a > c$, $b > d$ olması halinde $ad-bc > 0$ iken Şekil 9.37 deki doğru elde edilir. $a,b,c,d > 0$ ve $a > c$, $b > d$ iken $ad-bc < 0$ ise doğru Şekil 9.38 deki gibidir. $a,d < 0$ ve $b,c > 0$ iken $ad-bc > 0$ ise Şekil 9.39 daki doğru elde edilir. $a,c > 0$ ve $b,d < 0$ iken $a < c$, $b > d$ olması halinde $ad-bc < 0$ ise doğru Şekil 9.40 daki gibidir. a,b,c,d nin diğer bütün durumlarında ad-bc nin işaretine bağlı olarak yine bu doğrulara benzer birer tek doğru vardır.



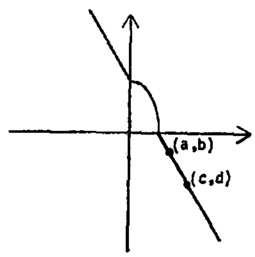
Şekil 9.37



Şekil 9.38



Şekil 9.39



Şekil 9.40

Böylece, bu örnekte elde edilen cebirsel yapının bir karşıt yarıcisim olduğu gösterildi. Gerçekten,

$$-1 \oplus (-2 \oplus 3) = -1 \oplus \sqrt{9-4} = -1 \oplus \sqrt{5} = \sqrt{5-1} = 2$$

iken

$$(-1 \oplus (-2)) \oplus 3 = -3 \oplus 3 = -3 + 3 = 0$$

ve

$$-1 \oplus 2 = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

iken

$$2 \oplus (-1) = 2-1 = 1$$

olduğundan $\oplus$ işlemi birleşme ve değişme özelliklerini sağlamaz.

NOT: Yukarıda ele alınan karşıt yarıcismin toplama işleminde bazı değişiklikler yaparak başka karşıt yarıcisimler ve karşıt kartezyen gruplar (dolayısıyla farklı projektif düzlemler) elde edilebilir. Şimdi buna ilişkin dört ayrı durum üzerinde kısaca duralım:

(i) $u, v \in \mathbb{R}$ için $\oplus$ işlemini,

$$u \oplus v = \begin{cases} \sqrt{v^2-u^2} & , \ -v < u < 0 \quad \text{iken} \\ u + v & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde değiştirelim. Bu takdirde,

$$(x,y)\, o\, [m,b] \iff y = T(m,x,b) = mx \oplus b = \begin{cases} \sqrt{b^2-m^2x^2} & , \ -b < mx < 0 \ \text{iken} \\ mx + b & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

almak kaydıyla, $(\mathbb{R}, \oplus, \cdot)$ sisteminin bir karşıt kartezyen grup olduğu (Örnek 9.2 deki kısıtlamalar gözönüne alınarak) kolaylıkla gösterilebilir.

Bu cebirsel yapıya karşılık gelen projektif düzlem,gerçel analitik projektif düzlemin üst yarı kısmında Örnek 9.2 deki deformasyonların yapılması ile elde edilen projektif düzlemdir. Gerçel analitik projektif düzlemin ardışık herhangi iki kadranında söz konusu deformasyonun yapılması ile elde edilen ve bu düzleme izomorf olan üç adet projektif düzlem vardır. (Bu düzlemler,(Kaya,1974) de Π_2 ile gösterilmektedir.)

(ii) $u,v \in \mathbb{R}$ için $\oplus$ işlemi,

$$u \oplus v = \begin{cases} \sqrt{v^2-u^2} & , \ -v < u < 0 \ \text{ iken} \\ u+v & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$(x,y)o[m,b] \Leftrightarrow T(m,x,b) = mx \oplus b = \begin{cases} \sqrt{b^2-m^2x^2} & , m>0 \text{ ve } -b < mx < 0 \text{ iken} \\ mx+b & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

almak kaydıyla $(\mathbb{R}, \oplus, .)$ sisteminin de bir karşıt kartezyen grup olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu karşıt kartezyen gruba karşılık gelen projektif düzlem, gerçel analitik projektif düzlemin yalnızca II.kadranında Örnek 9.2 deki deformasyonların yapılması ile elde edilen projektif düzlemdir. (Bu düzlem,(Kaya,1974) de Π_1 ile gösterilmektedir.) Gerçel analitik projektif düzlemin herhangi bir kadranında söz konusu deformasyonun yapılması ile de bu düzleme izomorf üç adet projektif düzlem daha elde edilebilir.

(iii) $u,v \in \mathbb{R}$ için $\oplus$ işlemini,

$$u \oplus v = \begin{cases} \sqrt{v^2-u^2} & , \ -v < u < 0 \ \text{ iken} \\ -\sqrt{v^2-u^2} & , \ 0 < u < -v \ \text{ iken} \\ u+v & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde değiştirelim. Bu takdirde,

$$(x,y)o[m,b] \Leftrightarrow T(m,x,b) = mx \oplus b = \begin{cases} \sqrt{b^2-m^2x^2} & , \ m>0 \text{ ve } -b < mx < 0 \text{ iken} \\ -\sqrt{b^2-m^2x^2} & , \ m>0 \text{ ve } 0 < mx < -b \text{ iken} \\ mx+b & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

almak kaydıyla $(\mathbb{R}, \oplus, .)$ sisteminin bir karşıt yarıcisim olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu karşıt yarıcisme karşılık gelen projektif düzlem, gerçel analitik projektif düzlemin II. ve IV. kadranlarında deformasyon yapılması ile elde edilebilir. (Bu düzlem (Kaya,1974) de Π_3 ile gösterilmektedir.) Gerçel analitik projektif düzlemin I. ve III. kadranlarında deformasyon yapmak suretiyle bu düzleme izomorf olan bir düzlem daha elde edilebilir.

(iv) $u,v \in \mathbb{R}$ için,

$$u \oplus v = \begin{cases} \sqrt{v^2-u^2} & , -v < u < 0 \text{ iken} \\ -\sqrt{v^2-u^2} & , 0 < u < -v \text{ iken} \\ u+v & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$(x,y)\,o[m,b] \Longleftrightarrow T(m,x,b) = mx \oplus b = \begin{cases} \sqrt{b^2-m^2x^2} & , m > 0 \text{ ve } -b < mx < 0 \text{ iken} \\ -\sqrt{b^2-m^2x^2} & , 0 < mx < -b \text{ iken} \\ mx+b & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

almak kaydıyla $(\mathbb{R}, \oplus, .)$ sisteminin de bir karşıt yarıcisim olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Örneğin, dağılma özelliklerinin sağlandığını gösterelim.

$$wu \oplus wv = \begin{cases} \sqrt{w^2v^2-w^2u^2} & , -wv < wu < 0 \text{ iken} \\ -\sqrt{w^2v^2-w^2u^2} & , 0 < wu < -wv \text{ iken} \\ wu+wv & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{w^2(v^2-u^2)} & , -wv < wu < 0 \text{ iken} \\ -\sqrt{w^2(v^2-u^2)} & , 0 < wu < -wv \text{ iken} \\ w(u+v) & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} w\sqrt{v^2-u^2} & , -v < u < 0 \text{ iken} \\ -w\sqrt{v^2-u^2} & , 0 < u < -v \text{ iken} \\ w(u+v) & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$= w(u \oplus v)$$

elde edilir. Çarpma işlemi değişme özelliğini sağladığından sağdan dağılma kuralı da geçerlidir. Bu cebirsel yapıya karşılık gelen projektif düzlem, gerçel analitik projektif düzlemin II., III. ve IV. kadranlarında deformasyon yapılması ile elde edilebilir. Gerçel analitik projektif düzlemin herhangi üç kadranında söz konusu deformasyonun yapılması ile elde edilen ve bu düzleme izomorf olan üç adet düzlem vardır.

Örnek 9.3 (Naumann, 1954): $(B, +, .)$ herhangi bir sıralı bölümlü halka olsun. $k \in B$, $1 \neq k > 0$ olmak üzere yeni bir $\oplus$ işlemi,

$$u \oplus v = \begin{cases} u + v & , \ uv \geqslant 0 \text{ iken} \\ ku + v & , \ uv < 0 \text{ ve } |ku| \leqslant |v| \text{ iken} \\ u + k^{-1}v & , \ uv < 0 \text{ ve } |ku| > |v| \text{ iken} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Böyle elde edilen $(B, \oplus, .)$ sistemi bir karşıt yarıcisimdir ve başka özellik sağlamaz. (Örneğin, $(B, +, .)$ sıralı bölümlü halkası yerine $(\mathbb{R}, +, .)$ sıralı gerçel sayılar cismini alarak $(\mathbb{R}, \oplus, .)$ karşıt yarıcismi elde edilir. $(B, \oplus, .)$ sisteminde $(B-\{0\}, .)$ bir grup iken $(\mathbb{R}, \oplus, .)$ sisteminde $(\mathbb{R}-\{0\}, .)$ bir değişmeli gruptur. Buradaki özelliklerin sağlanması, daha sonra vereceğimiz karşıt sol yarıcisim örneğinde daha genel olarak yapılacağı için -tekrarlamaktan kurtulmak için-verilmemiştir.)

Son olarak, çarpımsal yapısı grup olan ve bir tek dağılma (örneğin soldan dağılma) kuralını gerçekleyen bir düzlemsel halkadan söz edeceğiz. Böyle cebirsel yapılar, karşıt sol yarıcisim olarak isimlendirilir. Örnek 9.3 de, $(B, +, .)$ sıralı bölümlü halkası yerine $(S, +, .)$ sıralı sol yaklaşık cismi almak ve k yı merkez elemanı seçmek, bir karşıt sol yarıcisim oluşturmak için yeterlidir. Örneği vermeden önce karşıt kartezyen grubun bir başka tanımını ve bildiğimiz karşıt kartezyen grup aksiyomlarının bu tanımdaki aksiyomlara eşdeğer olduğunu gösteren teoremi verelim.

Tanım 9.2: S, üzerinde toplama ve çarpma işlemleri tanımlı olan bir küme olmak üzere, aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyor ise S bir karşıt kartezyen gruptur.

(i) S, toplama işlemine göre birim elemanı 0 olan bir yarıgruptur.

(ii) Her $a \in S$ için $a0 = 0a = 0$ dır.

(iii) S nin sıfırdan farklı elemanları çarpma işlemine göre, birim elemanı 1 olan, bir grup oluştururlar.

(iv) $r, s, t \in S$ ve $r \neq s$, $t \neq 1$ için

$$(r + x)^{-1}(s + x) = t \ , \ (y + r)(y + s)^{-1} = t$$

denklemlerinin birer tek $x,y \in S$ çözümleri vardır.

Teorem 9.1: Tanım 9.2 deki gibi belirlenen bir karşıt kartezyen grup,

$$\begin{cases} T(m,x,c) = m(x + m^{-1}c) & (m \neq 0) \\ T(0,x,c) = c \end{cases}$$

üçlü işlemine göre bir üçlü halkadır. Karşıt olarak, her m,x,c için $T(m,x,mc) = m(x + c)$ koşulunu ve çarpımın birleşme kuralını gerçekleyen her üçlü halka bir karşıt kartezyen gruptur.

İspat: S bir karşıt kartezyen grup olsun. S nin üçlü halka olduğunu göstermek için Tanım 1.3.2 deki (T1)...(T5)aksiyomlarının sağlandığı gösterilmelidir. T nin tanımından ve Tanım 9.2 deki (i) ve (iii) den $T(0,x,c) = c$ ve $T(m,0,c) = m(0 + m^{-1}c) = m(m^{-1}c) = (mm^{-1})c = c$ dir dolayısıyla (T1) sağlanır. Yine T nin tanımından ve Tanım 9.2 deki (i),(ii) ve (iii) den $T(1,x,0) = 1(x + 1^{-1}0) = 1.x = x$ ve $T(m,1,0) = m(1 + m^{-1}0) = m.1 = m$ olduğundan (T2) sağlanır. (T3) ün sağlandığını göstermek için $T(a,b,x) = c$ eşitliğinin bir tek x çözümünün olduğunu göstermeliyiz. $a = 0$ ise $T(0,b,x) = c$ olduğundan $x = c$ dir. Eğer $a \neq 0$ ise $T(a,b,x) = a(b + a^{-1}x) = c$ yani $b+a^{-1}x=a^{-1}c$ dir ve S toplama işlemine göre yarıgrup olduğundan, bu denklemin bir tek $a^{-1}x$ çözümü vardır, ayrıca S çarpma işlemine göre grup ve $a \neq 0$ olduğundan x çözümü de tektir. $m_1 \neq m_2$ iken $T(m_1,x,c_1) = T(m_2,x,c_2)$ eşitliğinin bir tek x çözümünün olduğunu göstermeliyiz. $m_1 = 0$ ise $m_2 \neq 0$ dır ve $T(0,x,c_1) = T(m_2,x,c_2)$ eşitliği $c_1 = m_2(x + m_2^{-1}c_2)$ biçimini alır, buradan $m_2^{-1}c_1 = x + m_2^{-1}c_2$ elde edilir ve S toplama işlemine göre bir yarıgrup olduğundan bu eşitliğin bir tek x çözümü vardır. $m_2 = 0$ ise $m_1 \neq 0$ dır ve $m_1^{-1}c_2 = x + m_1^{-1}c_1$ eşitliğinin bir tek x çözümü vardır. $m_1,m_2 \neq 0$ ise $m_1(x + m_1^{-1}c_1) = m_2(x + m_2^{-1}c_2)$ denklemini çözmeliyiz. $m_1^{-1}c_1 = m_2^{-1}c_2$ ise $m_1 \neq m_2$ olduğundan $x + m_1^{-1}c_1 = 0$ eşitliği ile bir tek x çözümü belirlidir. $m_1^{-1}c_1 \neq m_2^{-1}c_2$ ise denklem $m_1m_2^{-1} = (x + m_2^{-1}c_2)(x + m_1^{-1}c_1)^{-1}$ biçimini alır. $m_1m_2^{-1} \neq 1$ ve $m_1^{-1}c_1 \neq m_2^{-1}c_2$ olduğundan bu denklem, Tanım 9.2 (iv) deki ikinci denklem ile aynı biçimdedir ve bu nedenle bir tek x çözümü vardır, dolayısıyla (T4) sağlanır. İspatı tamamlamak için (T5) in sağlandığını göstermeliyiz. $a \neq c$ için $T(x,a,y) = b$, $T(x,c,y) = d$ olacak biçimde bir tek $(x,y) \in S^2$ nin varolduğunu gösterelim. $b = d$ ise $x = 0$ olacağından bu durumu ayrıntılı olarak incelemeye gerek yoktur. Bu nedenle,

$$x(a + x^{-1}y) = b$$
$$x(c + x^{-1}y) = d \qquad (9.18)$$

sistemi elde edilir. Burada $b = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $a + x^{-1}y = 0$ olmasıdır. Şöyleki $x(a + x^{-1}y) = b = 0 \Leftrightarrow a + x^{-1}y = 0$ dır. Bu durumda $d \neq 0$ ve $c + x^{-1}y \neq 0$ dır dolayısıyla $x^{-1}y = -a$ dır ve (9.18) sistemindeki ikinci denklemden x ve böylece y çözülebilir. Benzer yorum $d = 0$ için yapılabilir. Eğer $b,d \neq 0$ ise, $a + x^{-1}y \neq 0$, $c + x^{-1}y \neq 0$ olduğundan $b(a + x^{-1}y)^{-1} = x = d(c + x^{-1}y)^{-1}$ yazılabilir ve buradan $d^{-1}b = (c + x^{-1}y)^{-1}(a + x^{-1}y)$ elde edilir. $d^{-1}b \neq 1$ ve $a \neq c$ olduğundan bu denklem Tanım 9.2 (iv) aksiyomundaki birinci denklem ile aynı biçimdedir ve dolayısıyla $x^{-1}y$ tek çözüm olarak bellidir. Bu nedenle $b(a + x^{-1}y)^{-1} = x = d(c + x^{-1}y)^{-1}$ denkleminden x ve neticede y de birer tek olarak bulunabilirler.

Karşıt olarak, $T(m,x,mc) = m(x + c)$ koşulunu ve çarpımın birleşme kuralını gerçekleyen her üçlü halka için, $T(m,x,c) = m(x + m^{-1}c)$ $m \neq 0$ ve $T(0,x,c) = c$ yazılabilir. (S,T) bir üçlü halka olmak üzere (S,+) ve (S−{0},.) sistemlerinin, birim elemanları sırasıyla 0 ve 1 olan, birer yarıgrup oldukları ve her $x \in S$ için $x0 = 0x = 0$ olduğu Teorem 2.1.1 den bilinmektedir. Ayrıca, hipotezden çarpma işlemi birleşimli olduğundan (S−{0},.) bir gruptur. İspatı tamamlamak için son olarak $r,s,t \in S$ ve $r \neq s$, $t \neq 1$ iken $(r + x)^{-1}(s + x) = t$, $(y + r)(y + s)^{-1} = t$ denklemlerinin birer tek $x,y \in S$ çözümlerinin olduğunu göstermeliyiz. (T4) den, $m_1 \neq m_2$ iken $T(m_1,x,c_1) = T(m_2,x,c_2)$ olacak biçimde bir tek $x \in S$ vardır. $m_1,m_2 \neq 0$ ve $m_1^{-1}c_1 \neq m_2^{-1}c_2$ iken T nin tanımından $m_1(x + m_1^{-1}c_1) = m_2(x + m_2^{-1}c_2)$ ve buradan $m_1m_2^{-1} = (x + m_2^{-1}c_2)(x + m_1^{-1}c_1)^{-1}$ elde edilir dolayısıyla bu denklemin bir tek $x \in S$ çözümü vardır. $m_1m_2^{-1} \neq 1$ ve $m_1^{-1}c_1 \neq m_2^{-1}c_2$ olduğundan bu $(y + r)(y + s)^{-1} = t$ denklemi ile aynı biçimdedir ve bu denklemin bir tek $y \in S$ çözümü vardır. (T5) den $a \neq c$ iken $T(x,a,y) = b$,

$T(x,c,y) = d$ olacak biçimde bir tek $(x,y) \in S^2$ vardır. T nin tanımından $x(a + x^{-1}y) = b$, $x(c + x^{-1}y) = d$ elde edilir. $b,d \neq 0$ ve $b \neq d$ iken $b(a + x^{-1}y)^{-1} = x = d(c + x^{-1}y)^{-1}$ ve buradan

$bd^{-1} = (c + x^{-1}y)^{-1}(a + x^{-1}y)$ elde edilir. $bd^{-1} \neq 1$ ve $a \neq c$ olduğundan bu $(r + x)^{-1}(s + x) = t$ ile aynı biçimdedir ayrıca $(x,y) \in S^2$ bir tek olarak varolduğundan $xy^{-1} \in S$ de bir tek olarak vardır. Böylece S, Tanım 9.2 deki aksiyomları sağlayan bir karşıt kartezyen gruptur.

Dikkat edilirse yukarıdaki ispatta, $a \neq c$ için

$$ax + b = cx + d$$

denkleminin bir tek x çözümünün varlığı ve aynı şekilde, $a \neq c$ için

$$xa + y = b$$
$$xc + y = d$$

denklem sisteminin bir tek (x,y) çözümünün varlığı da dolaylı olarak gösterilmiş oldu. Yani, Tanım 9.2 de verilen karşıt kartezyen grup koşulları daha önceki karşıt kartezyen grup tanımımızdaki koşullara eşdeğerdir.

Teorem 9.2 (Yaqub, 1961): S, seçimli bir $\{O,E,U,V\}$ dörtgenine göre (V,OU)-geçişken olan bir sıralı π düzleminde, bir karşıt kartezyen grup olsun. Her $z \neq -r$ için, $f(z) = (r + z)^{-1}(s + z)$ ve her $z \neq -s$ için $g(z) = (z + r)(z + s)^{-1}$ dönüşümleri tanımlansın. Bu takdirde,

(i) $r > s$ ise $z \to f(z)$ dönüşümü $\{z: z < -r\}, \{z: z > -r\}$ bölgelerinin her birinde monoton artandır ve $z < -r$ için $f(z) > 1$, $z > -r$ için $f(z) < 1$ dir. $r < s$ ise $z \to f(z)$ dönüşümü $\{z: z < -r\}, \{z: z > -r\}$ bölgelerinde monoton azalandır ve $z < -r$ için $f(z) < 1$, $z > -r$ için $f(z) > 1$ dir.

(ii) $r < s$ ise $z \to g(z)$ dönüşümü $\{z: z < -s\}$, $\{z: z > -s\}$ bölgelerinde monoton artan ve $z < -s$ için $g(z) > 1$, $z > -s$ için $g(z) < 1$ dir. $r > s$ ise $z \to g(z)$ dönüşümü $\{z: z < -s\}$, $\{z: z > -s\}$ bölgelerinde monoton azalandır ve $z < -s$ için $g(z) < 1$ ve $z > -s$ için $g(z) > 1$ dir.

c, sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere çarpımın özelliklerinin cf ve cg fonksiyonları için aynen geçerli olması ve Teorem 9.2 ile Tanım 9.2 (iv) ün bir sonucu olarak, f ve g fonksiyonları her bir altbölgede sınır değerleri arasındaki bütün değerleri alırlar. (Eğer altbölge fonksiyonun süreksiz olduğu noktayı içeriyor ise, $S \cup \{\infty\}$ da ayrı bir yorum yapılmaktadır. Şöyleki, bu süreksizlik noktası ∞'a dönüşmektedir).

Örnek 9.4 (Yaqub, 1961): $(S, +, .)$ bir sıralı sol yaklaşık cisim olsun. $1 \neq k > 0$ S nin merkezinin bir elemanı olmak üzere yeni bir $\oplus$ işlemi,

$$a \oplus b = \begin{cases} a + b & , \ ab \geqslant 0 \ \text{ iken} \\ ka + b & , \ ab < 0 \text{ ve } |ka| \leqslant |b| \ \text{ iken} \\ a + k^{-1}b & , \ ab < 0 \text{ ve } |ka| > |b| \ \text{ iken} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanarak elde edilen $(S, \oplus, .)$ sisteminin bir karşıt sol yarıcisim (yani soldan dağılma özelliği olan bir karşıt kartezyen grup) olduğunu gösterelim.

Önce $(S, \oplus)$ sisteminin bir yarıgrup olduğunu göstermeliyiz. Her $a \in S$ için $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$ dır. Böylece $0 \in S$, $\oplus$ işlemine göre birim elemandır. $a,b \in S$ için $x \oplus a = b$ ve $a \oplus y = b$ eşitliklerinin birer tek $x,y \in S$ çözümlerinin varlığını inceleyelim. Eğer $b = 0$ ise $x = -k^{-1}a$ ve $y = -ka$ dır. Eğer $b < a < 0$ veya $b > a > 0$ ise $x = y = b-a$ dır. $b > 0 > a$ veya $b < 0 < a$ olması halinde $x = b-k^{-1}a$ ve $y = b-ka$ dır. Eğer $a > b > 0$ veya $a < b < 0$ ise $x = k^{-1}(b-a)$ ve $y = k(b-a)$ dır. Bu nedenle $(S, \oplus)$, birim elemanı 0 olan, bir yarıgruptur. $\oplus$ işleminin birleşimli olmadığını bir örnek üzerinde gösterelim. $a \neq 0$ olmak üzere $a, -k^{-1}a, -ka \in S$ için,

$$(-k^{-1}a \oplus a) \oplus (-ka) = 0 \oplus (-ka) = -ka$$

ve

$$-k^{-1}a \oplus (a \oplus (-ka)) = (-k^{-1}a) \oplus 0 = -k^{-1}a$$

olur. Oysa $k \neq 1$ olduğundan,

$$(-k^{-1}a \oplus a) \oplus (-ka) \neq -ka^{-1} \oplus (a \oplus (-ka))$$

dır.

$(S, +, .)$ bir sol yaklaşık cisim olduğundan $(S-\{0\}, .)$, birim elemanı 1 olan, bir gruptur ve her $x \in S$ için $x0 = 0x = 0$ dır. $(S, \oplus, .)$ sisteminde soldan dağılma özelliği sağlanır. Şöyleki,

$$ab \oplus ac = \begin{cases} ab + ac & , a^2bc \geq 0 \quad \text{iken} \\ kab + ac & , a^2bc < 0 \text{ ve } |kab| \leq |ac| \quad \text{iken} \\ ab + k^{-1}ac & , a^2bc < 0 \text{ ve } |kab| > |ac| \quad \text{iken} \end{cases}$$

eşitliğinde $a^2 \geq 0$ ve $|kab| \leq |ac|$ ise $|kb| \leq |c|$ olduğundan,

$$ab \oplus ac = \begin{cases} ab + ac & , bc \geq 0 \quad \text{iken} \\ kab + ac & , bc < 0 \text{ ve } |kb| \leq |c| \quad \text{iken} \\ ab + k^{-1}ac & , bc < 0 \text{ ve } |kb| > |c| \quad \text{iken} \end{cases}$$

eşitliği elde edilir. k merkez elemanı olduğundan ve $(S, +, .)$ sisteminde soldan dağılma kuralı sağlandığından,

$$ab \oplus ac = \begin{cases} a(b + c) & , bc \geq 0 \quad \text{iken} \\ a(kb + c) & , bc < 0 \text{ ve } |kb| \leq |c| \quad \text{iken} \\ a(b + k^{-1}c) & , bc < 0 \text{ ve } |kb| > |c| \quad \text{iken} \end{cases}$$

olur. $\oplus$ işleminin tanımından,

$$ab \oplus ac = a(b \oplus c)$$

dir.

Bir karşıt sol yarıcisim, aynı zamanda soldan dağılma özelliği bulunan bir karşıt kartezyen grup olduğundan, bu örneğin çözümünü tamamlamak için Tanım 9.2 deki (iv) koşulunun sağlandığını yani $r, s, t \in S$, $r \neq s$, $t \neq 1$ için, $(r \oplus x)^{-1}(s \oplus x) = t$ ve $(y \oplus r)(y \oplus s)^{-1} = t$ denklemlerinin birer tek $x, y \in S$ çözümlerinin olduğunu göstermeliyiz. $F(x) = (r \oplus x)^{-1}(s \oplus x)$, $x \neq -kr$ olsun. Eğer $r > s > 0$ ise,

$$F(x) = \begin{cases} (kr + x)^{-1}(ks + x) & , \quad x < -kr \text{ iken} \\ (r + k^{-1}x)^{-1}(ks + x) & , \quad -kr < x \leq -ks \quad \text{iken} \\ (r + k^{-1}x)^{-1}(s + k^{-1}x), & \quad -ks < x < 0 \text{ iken} \\ (r + x)^{-1}(s + x) & , \quad 0 \leq x \quad \text{iken} \end{cases}$$

olur. k, çarpma işlemine göre S nin bütün elemanlarıyla değişme özelliğine sahip olduğundan,

$$F(x) = \begin{cases} (kr + x)^{-1}(ks + x) & , \quad x < -kr \quad \text{iken} \\ k(kr + x)^{-1}(ks + x) & , \quad -kr < x \leqslant -ks \quad \text{iken} \\ (kr + x)^{-1}(ks + x) & , \quad -ks < x < 0 \quad \text{iken} \\ (r + x)^{-1}(s + x) & , \quad 0 \leqslant x \quad \text{iken} \end{cases}$$

dir. $r > s$ ve $kr > ks$ olduğundan, Teorem 9.2 den, $F(x)$ sınırlar dahilinde monoton artandır. Bu nedenle, Teorem 9.2 nin sonunda belirtildiği gibi, $F(x)$ her bir bölge için sınır değerleri arasındaki bütün değerleri alır. Üstelik, yine Teorem 9.2 ye göre, $x < -kr$ için $1 < F(x) < \infty$, $-kr < x \leqslant -ks$ için $\infty < F(x) \leqslant 0$, $-ks < x < 0$ için $0 < F(x) < r^{-1}s$ ve $x \geqslant 0$ için $r^{-1}s \leqslant F(x) < 1$ dir. Böylece $F(x)$, 1 hariç bütün değerleri alır ve bu nedenle $r > s > 0$ iken $F(x) = t$ denklemini sadece $t \neq 1$ için çözebiliriz.

r ve s nin zıt işaretli olması halinde ortaya çıkan diğer durumlarda benzer bir düşünce ile x in tekliği söylenebilir. Her bir bölgede $F(x)$, $i = 0,1$ veya -1 ve $p = r$ veya kr, $q = s$ veya ks olmak üzere

$$F(x) = k^{i}(p + x)^{-1}(q + x)$$

biçimindedir. r ve s zıt işaretli iseler $ks \neq r$ ve $kr \neq s$ olduğu aşikârdır. r ve s nin işaretleri aynı ise $r \oplus x$ in k yı içermesi için gerek ve yeter koşul $s \oplus x$ in k yı içermesidir. Böylece p ve q her zaman farklıdırlar ve $p \lesseqgtr q$ olması için gerek ve yeter koşul $r \gtreqless s$ olmasıdır. Bu nedenle r ve s nin bütün farklı değerleri için $F(x)$ her bir bölgede aynı anlamda monotondur ve her bir bölgede sınır değerleri arasındaki bütün değerleri alır. Bundan başka, her bir durumda $x = -kr$ tek sürüksizlik noktasıdır. $x = -ks$ için $F(x) = 0$ ve $x = 0$ için $r \oplus x$, $s \oplus x$ fonksiyonlarının her biri süreklidir. (r,s den biri sıfır ise, dikkate alınması (incelenmesi) gereken daha az bölge vardır ve toplamda sorun yoktur.) Bu nedenle $F(x) = t$ denkleminin $t \neq 1$, $r \neq s$ iken bir tek x çözümü vardır. Aynı yöntemle $y \neq -k^{-1}s$ için $G(y) = (y \oplus r)(y \oplus s)^{-1}$ biçiminde tanımlanan $G(y)$ fonksiyonunun monoton olduğu ve her bir farklı r,s çifti için 1 den farklı bütün değerleri aldığı, dolayısıyla $G(y) = t$ denkleminin bir tek y çözümünün varolduğu gösterilebilir. Böylece $(S, \oplus, .)$ sisteminin, soldan dağılma özelliğine sahip bir karşıt kartezyen grup, yani karşıt sol yarıcisim, olduğu gösterildi.

Yukarıdaki örnekte geçen (genel) sıralı sol yaklaşık cisim yerine özel olarak Örnek 6.1.2 de verilen sol yaklaşık cisim kullanılabilir. Böylece özel bir karşıt sol yarıcisim elde edilir. Buradaki sıralama $\alpha, \beta \in S$ ve $n_{\beta-\alpha} \in Z$ için $\alpha < \beta \Longleftrightarrow 0 < (\beta-\alpha)(n_{\beta-\alpha})$ biçimindedir (Pickert, 1975).

KAYNAKLAR DİZİNİ

Albert,A.A.,1952, On nonassaciative division algebras,Trans. Amer.Math.Soc.,72,296-309.

Andre,J., 1955, Projective Ebenen Über Fastkörper, Math. Zeitschr., 62, 137-160.

Cohn,P.M., 1976, Algebra, Volume 2, Bedford College, University of London, 483p.

Dembowski,P., 1968, Finite Geometries, Springer-Verlag New York Inc. 375 p.

Hall,M., 1943, Projective Planes, Trans.Amer.Math.Soc., 54, 229-277.

Hall,M., 1959, Theoryof Groups, The Macmillan Company, New York, 421 p.

Kaya,R., 1972, Construction of a Real Non-Desarguesian Plane, Comm.Fac.Sci.Univ.Ankara, Ser. A, 21(2),13-21.

Kaya,R., 1974, On some Planes of Lenz-Barlotti Class I, Comm.Fac.Sci.Univ.Ankara, Ser. A, 23(6), 55-63.

Kaya,R., 1978, Projektif Geometri, Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, Matematik: 1, 371 s.

Naumann,H., 1954, Stufen der Begründung der ebenen affinen Geometrie, Math. Zeitschr.,60, 120-141.

Paige,L.J., 1949, Neofields, Duke Math.J.,16, 39-60.

Panella,G., 1965, Una classe di sistemi cartesiani. Atti Accod.Naz.Lincei Rendic.,38, 480-485.

Pickert,G., 1975, Projektive Ebenen, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 371 s.

Spencer,J., 1960, On the Lenz-Barlotti Classification of Projective planes, Quart.J.Math.Oxford (2),11, 241-257.

Stevenson,F.W., 1972, Projective Planes, W.H.Freeman and Company, San Francisco, 416 p.

Süray,S., 1962, Umumi Matematik, Cilt I. Analiz,Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

Uçan,S., 1987, Moufang Düzlemlerinde Kolinasyonların Cebirsel İncelenmesi, Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, 78 s.

Yaqub,J.C.D.S., 1961, The Existence of Projective Planes of Class I.3.Arch.Math.,12, 374-381.

Yaqub,J.C.D.S., 1968, The Lenz-Barlotti Classification, Proceedings of the Projective Geometry Conference, 129-162.

Zassenhaus,H., 1936, Über endliche Fastkörper, Abh.Math. Sem. Hamburg, 11, 187-220.