KAOS KOŞULLARININ İRDELENMESİ

Nedim DEĞİRMENCİ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Ocak-1992

KAOS KOŞULLARININ İRDELENMESİ

Nedim DEĞİRMENCİ

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalı

Topoloji Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Dr. Şahin KOÇAK

Ocak-1992

Nedim Değirmenci'nin YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "KAOS KOŞULLARININ İRDELENMESİ" başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

10 / 2 / 1992

Üye Pr.Dr.Turgut.ÖNDER

Üye: Pr.Dr.Şahin.KOÇAK

Üye: Yr.Doç.Dr.Hüseyin AZCAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 12 ŞUBAT 1992 gün ve 304-7 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Rüstem KAYA

ÖZET

Bu çalışmada, kaos koşulları çeşitli bakımlardan irdelenmeye çalışılmıştır. İnşa edilen altı örnek yardımıyla kaosun başlangıç şartlarına hassas bağımlılık, topolojik geçişgenlik ve periyodik noktaların yoğunluğu şeklinde genel kabul gören üç temel koşulun bağımsızlığı gösterilmiştir.

Bunun dışında kaosun, fonksiyonların denkliği altında invaryant olmadığı gösterilmiş, ancak invaryantlık için yeter bir koşul verilmiştir. Diğer yandan kaosun ikinci koşuluna alternatif olarak alınan yoğun bir orbitin varlığı ile topolojik geçişgenlik arasındaki gerektirme ilişkileri üzerine iki teorem verilmiş ve nihayet başlangıç şartlarına hassas bağımlılık ve periyodik noktaların yoğunluğu koşullarının iki fonksiyonun çarpımına taşındığı ispatlanmış, topolojik geçişgenliğin taşınmadığı ise bir karşı örnek yardımıyla gösterilmiştir.

SUMMARY

In this work, we tried to analize the conditions of chaos from various points of view. By the help of six examples, constructed in the thesis, we showed the independence of generally accepted three conditions of chaos which are: sensitive dependence on initial conditions, topological transitivity and density of periodic points.

In addition, it is shown that the chaos is not invariant under the topological equivalence of functions, however; we have given a sufficient condition for the invariance. On the other hand we proved two theorems on the implication relations between topological transitivity and the existence of dense orbits which is an alternative condition to the second condition of chaos. At the end it is proved that the condition of sensitive dependence on initial conditions and the density of periodic points behaves well under the multiplication of functions, but the topological transitivity does not, as shown by an example.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

1. Temel Tanımlar

Aksi belirtilmedikçe, (X,d) ikilisi bu çalışmada bir metrik uzayı gösterecektir.

Tanım 1.1 : $f:X \to X$ fonksiyonu verilsin, f nin kendisiyle n defa bileşkesi

f^n ile gösterilir, yani $f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \ldots f}_{n \text{ defa}}$ dir.

Tanım 1.2 : $x \in X$ noktasının yörüngesi

$x_1\ f(x)\ ,\ f^2\ (x)\ ,\ \ldots\ ,\ f^n\ (x),\ \ldots$

şeklinde verilir.

Tanım 1.3 : f altında hareket etmeyen yani $f(x) = x$ şeklindeki bir $x \in X$ noktasına f nin sabit noktası denir.

Tanım 1.4: f altında belli bir süre sonra kendine dönen bir noktaya periyodik bir nokta denir:$f^p\ (x) = x$ $(p>0)$ (p ye periyot bu özellikteki en küçük pozitif p ye asal periyot denir).

Tanım 1.5: Boş olmayan herhangi iki $U,V \subset X$ açık kümesi için,$f^k\ (U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $k>0$ sayısı bulunabiliyorsa, f ye X üzerinde topolojik geçişgen bir fonksiyon denir.

Eğer bir f fonksiyonu topolojik geçişgen ise, keyfi iki açık küme verildiğinde, iterasyon altında bu açıkların birinden diğerine giden noktalar vardır.

Tanım 1.6: f nin başlangıç şartlarına hassas bağımlı olması demek, öyle bir $\varepsilon > 0$ sayısının mevcut olması demektir ki her $x \in X$ noktasının her N komşuluğu için $d\ (f^k(x),\ f^k(y)) > \varepsilon$ olacak şekilde bir $y \in N$ elemanı ve $k>0$ sayısı bulunabilsin.

Başlangıç şartlarına hassas bağımlı bir dönüşümün tanım kümesinden alacağımız bir x noktasına istenildiği kadar yakın öyle noktalar vardır ki bu noktaların yörüngesi x in yörüngesinden en az ε kadar ayrılır. Burada x in komşuluğundaki bütün noktaların yörüngesi x in yörüngesinden ayrılmak zorunda değildir, fakat x in her komşuluğunda böyle noktalar vardır.

Şimdi verilen bu tanımlara bağlı olarak esas tanımımızı verelim (bkz.[1]).

Tanım 1.7: f: X $\rightarrow$ X fonksiyonu verilsin, f fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa f ye X üzerinde kaotik bir fonksiyon denir.

1. f başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır.
2. f topolojik geçişgendir.
3. f nin periyodik noktaları X de yoğundur.

Sezgisel olarak kaotik bir fonksiyon üç temel unsura sahiptir. Bunlar: önceden öngörülememe, parçalara ayrılmama ve belli bir düzen içinde olmadır. Kaotik bir sistem önceden öngörülemez çünkü başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır.Parçalara ayrılıp iki ayrı alt sistem oluşturamaz, çünkü topolojik geçişgendir. Bütün bu rastgele davranışların yanında bir düzene de sahiptir, çünkü periyodik noktaların kümesi X de yoğundur.

Acaba verilen bu üç koşul birbirinden bağımsız mıdır?

Sözkonusu üç koşulun birbirinden tamamen bağımsız olmasından herhangi birinden diğerlerini ya da herhangi ikisinden üçüncüsünü genel bir gerektirme olarak elde edilememesini anlıyoruz. Bunu göstermek için aşağıdaki tabloya göre altı örnek inşa ettik.

	Örnek 1	Örnek 2	Örnek 3	Örnek 4	Örnek 5	Örnek 6
Başlangıç şartlarına hassas bağımlılık	+	-	-	+	+	-
Topolojik geçişgenlik	-	+	-	+	-	+
Periyodik noktaların yoğunluğu	-	-	+	-	+	+

(+ işareti, sözkonusu özelliğin ilgili örnek için doğru olduğunu, - işareti de yanlış olduğunu göstermektedir).

Bu örneklere geçmeden önce her üç koşulun da sağlandığı bir örnekle (yani kaotik bir fonksiyon örneğiyle) (bkz.[1]), her üç koşulun da sağlanmadığı bir örneği veriyoruz.

Örnek 1.1 : (Kaotik bir fonksiyon örneği)

S^1 kompleks düzlemdeki birim çemberi göstersin ve S^1 in noktalarını θ argümanıyla belirleyelim ($0 \le \theta < 2\pi$).

$g : S^1 \to S^1$, $g(\theta) = 2\theta \mod 2\pi$ fonksiyonunu gözönüne alalım.

S^1 deki farklı iki nokta arasındaki argüman farkı g ile iterasyon altında katlanır. Bu yüzden g başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır.

S^1 deki herhangi bir U açığını aldığımızda $k>0$ sayısı $g^k(U)$ kümesi S^1 in tamamını örtecek şekilde bulunabilir, böylece S^1 deki diğer açık altkümeler örtülmüş olur, buradan g nin topolojik geçişgen olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi g nin periyodik noktalarını araştıralım.

$g^n(\theta) = 2^n \theta \Rightarrow 2^n . \theta = \theta + 2k\pi$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{2^n - 1} , \quad 0 \le k \le 2^n - 1 , \quad k \text{ tamsayı}$$

Buradan g nin periyodik noktalarının

$$\theta = \frac{2k\pi}{2^n - 1} , \quad 0 \le k \le 2^n - 1 , \quad n \in \mathbf{N} , \quad k \text{ tamsayı}$$

formunda olduğunu söyleyebiliriz. Acaba bu şekildeki noktaların kümesi S^1 in yoğun bir altkümesi midir?

Bunu görmek için önce aşağıdaki önermeyi gözönüne alalım (bkz.[4])

Önerme 1.1.:

$$D = \left\{ \frac{k}{2^n - 1} : n \in \mathbf{N} \, , \, 0 \le k \le 2^n - 1 \right\}$$

kümesi [0,1] in yoğun bir altkümesidir.

İSPAT: [0,1] aralığındaki her (a,b) açık aralığının D'ye ait enaz bir eleman içerdiğini göstermeliyiz.

$$n \to \infty \quad \text{iken} \quad \frac{1}{2^n - 1} \to 0 \quad \text{olduğundan}$$

$n \ge N$ iken $\dfrac{1}{2^n - 1} < b - a$ olacak şekilde N Doğal sayısı vardır. Diğer taraftan

$$\left[\frac{k-1}{2^n - 1} \, , \, \frac{k}{2^n - 1} \right] \, , \quad k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$$

aralıkları [0,1] in bir örtüsüdür. Bu yüzden bu aralıklardan birisi a yı içerir, yani:

$$\frac{m-1}{2^n - 1} \le a < \frac{m}{2^n - 1}$$

olacak şekilde m doğal sayısı vardır.

$$\frac{1}{2^n - 1} < b - a \quad \text{ve} \quad \frac{m-1}{2^n - 1} \le a$$

eşitsizliklerini kullanarak

$$\frac{1}{2^n - 1} + a < b \Rightarrow \frac{1}{2^n - 1} + \frac{m-1}{2^n - 1} < b$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2^n - 1} < b$$

olur, buradan da;

$$a < \frac{m}{2^n - 1} < b$$

ifadesi elde edilir.

Şimdi $f : [0,1] \to [0, 2\pi]$, $f(x) = 2\pi x$

şeklinde tanımlanan f homeomorfizmini gözönüne alalım. f(D) kümesi $[0, 2\pi]$ aralığının yoğun bir altkümesi olur. Eğer $U \subset [0, 2\pi]$ keyfi bir açık altkümesi ise, o zaman $f^{-1}(U)$, [0,1] in açık altkümesidir. D [0,1] de yoğun olduğundan enaz bir $\frac{k}{2^n - 1} \in f^{-1}(U)$ vardır. Buradan da $f\left(\frac{k}{2^n - 1}\right) = \frac{2k\pi}{2^n - 1}$ U nun bir elemanı olur. Burada U keyfi olduğundan f(D) kümesi $[0,2\pi]$ nin yoğun bir altkümesidir.

Sonuç olarak:

$$\theta = \frac{2k\pi}{2^n - 1}, \quad 0 \le k \le 2^n - 1, \quad n \in \mathbf{N}$$

şeklindeki noktaların kümesi S^1 de yoğundur.

Şimdi de hiç bir koşulun sağlanmadığı bir örnek verelim.

Örnek 1.2:

f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonu $f(x) = \frac{1}{2} x$ şeklinde verilsin.

f fonksiyonu başlangıç şartlarına hassas bağımlı değildir. Biran için f nin başlangıç şartlarına hassas bağımlı olduğunu varsayalım. Bu durumda bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır ki her $x \in \mathbf{R}$ ve x in her N komşuluğu için $| f^k(x) - f^k(y) | > \varepsilon$ olacak şekilde $y \in N$ ve $k>0$ sayısı mevcuttur. Burada özel olarak x=0 noktasını ve yine özel olarak $N=(-\varepsilon, \varepsilon)$ komşuluğunu gözönüne alırsak her $y \in N$ için $f(y) \in N$ ve dolayısıyla her $k>0$ için $f^k(y) \in N$ olup $| f^k(0) - f^k(y) | > \varepsilon$ olacak şekilde $k>0$ bulmak mümkün değildir. Bu ise varsayımımızla çelişir. O halde varsayımımız yanlıştır, f başlangıç şartlarına hassas bağımlı değildir.

f topolojik geçişgen değildir. Özel olarak U=(0,1) ve V=(-2, -1) açık altkümelerini gözönüne aldığımızda, her $x \in U$ ve her $k>0$ için $f^k(x) > 0$ olduğundan $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde $k>0$ sayısı mevcut değildir.

$x=0$ f nin sabit noktasıdır ve başka periyodik noktası yoktur. Bu yüzden f nin periyodik noktalarının kümesi **R** nin yoğun bir altkümesi değildir.

2. Kaos Koşullarının Bağımsızlığı

Şimdi, 1. bölümdeki tabloda belirtilen sıra dahilinde örnekleri veriyoruz.

Örnek 2.1: (Başlangıç şartlarına hassas bağımlı, topolojik geçişgen değil, periyodik noktaları yoğun değil)

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonu $f(x)= 2x$ şeklinde verilsin.

f fonksiyonu başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır.

$x \in \mathbf{R}$ ve x in keyfi bir komşuluğu U olsun. U komşuluğundan herhangi bir $x \neq y$ noktasını gözönüne alalım. x ile y arasındaki uzaklık $|x-y|$ iken, bunların görüntüleri arasındaki uzaklık

$$|f(x) - f(y)| = |2x - 2y| = 2|x - y|$$

olup, daha ilk adımda uzaklık 2 katına çıkıyor n. adımda ise

$$|f^n(x) - f^n(y)| = |2^n x - 2^n y| = 2^n |x - y|$$

olduğundan dolayı, n yeterince büyük seçildiğinde herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısı için

$$|f^n(x) - f^n(y)| > \varepsilon$$

eşitsizliği gerçeklenir. Buradan f nin başlangıç şartlarına hassas bağımlı olduğunu söyleyebiliriz.

f topolojik geçişgen değildir. Özel olarak **R** nin U=(0,1) ve V=(-1,0) açık altkümelerini aldığımızda $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $k>0$ bulmak mümkün değildir.

$x=0$ noktası dışında f nin periyodik noktası yoktur, bu yüzden f nin periyodik noktalarının kümesi **R** nin yoğun bir altkümesi değildir.

Örnek 2.2:(Başlangıç şartlarına hassas bağımlı değil, topolojik geçişgen, periyodik noktaları yoğun değil).

$\lambda \in \mathbf{R}$ irrasyonel olmak üzere, $T_\lambda : S^1 \to S^1$, $T_\lambda\ (\theta) = \theta + 2\pi\lambda$ mod 2π

fonksiyonu verilsin.

T_λ başlangıç şartlarına hassas bağımlı değildir.

$\theta \in S^1$ ve N de θ nın bir komşuluğu olsun, her bir $\theta' \in N$ için

$$|T_\lambda(\theta) - T_\lambda(\theta')| = |\theta + 2\lambda\pi - \theta' - 2\lambda\pi| = |\theta - \theta'|$$

olup, T_λ S^1 deki noktalar arasındaki uzaklığı korur, bu yüzden T_λ nın başlangıç şartlarına hassas bağımlı olmadığını söyleyebiliriz.

Diğer iki koşulun incelenmesinde aşağıdaki özelliği kullanacağız (bkz.[1]).

Önerme (Jakobi)

$T_\lambda : S^1 \to S^1$, $T_\lambda\ (\theta) = \theta + 2\pi\lambda$ mod 2π (λ irrasyonel)

şeklinde tanımlı T_λ fonksiyonu altında her noktanın yörüngesi S^1 de yoğundur.

Buna göre, T_λ topolojik geçişgendir. $U, V \subset S^1$ herhangi iki açık altküme olsun $(U,V \neq \emptyset)$ $\theta \in U$ nun yörüngesi Jakobi Teoreminden dolayı S^1 de yoğun olup $k>0$ sayısı $T_\lambda{}^k(\theta) \in V$ olacak şekilde vardır. Sonuç olarak $T_\lambda^k(U) \cap V \neq \emptyset$ tur.

T_λ nın hiç periyodik noktası yoktur.

Jakobi Teoreminden dolayı herbir $\theta \in S^1$ in yörüngesinin S^1 de yoğun olduğunu biliyoruz. Eğer θ nın yörüngesi belli bir adımdan sonra kapansaydı, yani θ periyodik olsaydı sonlu sayıda nokta kümesi S^1 de yoğun olurdu. Fakat bu mümkün değildir.

Örnek 2.3: (Başlangıç şartlarına hassas bağımlı değil, topolojik geçişgen değil, periyodik noktaları yoğun).

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = -x$ fonksiyonu verilsin.

f başlangıç şartlarına hassas bağımlı değildir. $x \in \mathbf{R}$ herhangi bir nokta ve U da x i içeren herhangi bir açık olsun. Bu durumda her $y \in U$ için x ile y arasındaki uzaklık, $|x-y|$ dir. Bu noktaların görüntüleri arasındaki uzaklık ise

$$|f(x) - f(y)| = |-x - (-y)| = |x - y|$$

olup f uzaklığı koruyan bir fonksiyondur. f nin başlangıç şartlarına hassas bağımlı olduğunu varsayalım. Bu taktirde öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki x in her N komşuluğu için $| f^k(x) - f^k(y) | > \varepsilon$ olacak şekilde $y \in N$ elemanı ve $k>0$ sayısı bulunabilir, burada x noktasının $N = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ komşuluğunu seçtiğimizde uygun bir $y \in N$ elemanı ve bir $k>0$ sayısı için $| f^k(x) - f^k(y) | > \varepsilon$ olur ki, $| f^k(x) - f^k(y) | = | x - y | < \varepsilon$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde f başlangıç şartlarına hassas bağımlı değildir.

f fonksiyonu topolojik geçişgen değildir. Özel olarak **R** nin $U=(0,1)$ ve $V=(3,4)$ açık altkümelerini aldığımızda

$$f(U) = (-1,0),\ f^2(U) = U,\ f^3(U) = (-1,0),\ \dots,\ f^{2n}(U) = U,\ f^{2n+1}(U) = (-1,0)\dots$$

olup, $f^k(U) \cap V \neq \varnothing$ olacak şekilde bir $k>0$ sayısı bulmak mümkün değildir.

Her $x \in \mathbf{R}$ için

$f(x) = -x$ ve $f^2(x) = x$

olup bütün reel sayılar f nin peryodu 2 olan periyodik noktalarıdır, dolayısıyla f nin periyodik noktalarının kümesi **R** de yoğundur.

Örnek 2.4: (Başlangıç şartlarına hassas bağımlı, topolojik geçişgen, periyodik noktaları yoğun değil).

$f: S^1 \longrightarrow S^1 \quad f(x) = x+1 \mod 2\pi$

$g: S^1 \longrightarrow S^1 \quad g(x)=2x \quad \mod 2\pi$

fonksiyonları yardımıyla $T^2 = S^1 x S^1$ üzerinde

$$F: T^2 \longrightarrow T^2$$
$$(x,y) \longmapsto F(x,y) = (f(x), g(y))$$

şeklinde tanımlanan F fonksiyonunu gözönüne alalım.

F, T^2 üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır. $p = (x,y) \in T^2$ herhangi bir nokta ve p nin bir komşuluğu N olsun, bu durumda $U,V \subset S^1$ açık altkümeleri $p \in UxV \subset N$ olacak şekilde vardır.

g, S^1 üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlı olduğundan, $\varepsilon>0$ uygun seçilmek üzere, $y \in V$ için,

$$| g^k(y) - g^k(y') | > \varepsilon$$

olacak şekilde bir $y' \in V$ elemanı ve $k>0$ sayısı vardır. $p' = (x,y')$ diyecek olursak $p' \in N$ dir ve

$$d(F^k(p), F^k(p')) \geq | g^k(y) - g^k(y') | > \varepsilon$$

olur.

F, T^2 üzerinde topolojik geçişgendir.

$U,V \subset T^2$ herhangi iki açık altküme olsun $(U,V \neq \emptyset)$. Bu durumda

$U_1 x U_2 \subset U$ ve $V_1 x V_2 \subset V$ olacak şekilde $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset S^1$ açık altkümeleri vardır.

F yi tanımlamakta kullandığımız g fonksiyonu S^1 üzerinde topolojik geçişgendir. Üstelik k>0 sayısı $g^k(U_2)$ S^1 in tamamını örtecek şekilde bulunabilir ve her $n \geq k$ için $g^n(U_2)$ S^1 in tamamını örter. Diğer taraftan her bir $x \in U_1$ in f altındaki yörüngesi S^1de yoğun olduğundan $f^{l_1}(x) \in V_1$, olacak şekilde bir en küçük $l_1 > 0$ sayısı vardır. Eğer $l_1 \geq k$ ise, $g^{l_1}(U_2)$ S^1 i örttüğünden $g^{l_1}(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$ olup enaz bir $y \in U_2$ elemanı için $g^{l_1}(y) \in V_2$dir. Bu durumda

$(x,y) \in U_1 x U_2 \subset U$ ve $F^{l_1}(x,y) \in V_1 x V_2 \subset V$ olup F topolojik geçişgen olur. Aksi halde yani $l_1<k$ ise x noktası f altında l_1. iterasyonda V_1 e girer. Bundan sonraki iterasyonlarda x noktası V_1 de kalırsa, gene uygun bir $y \in U_2$ için $F^k(x,y) \in V_1 x V_2 \subset V$ olur. Aksi halde x noktası sonlu adım sonra V_1 den ayrılır. Bu sonlu adıma s_1 diyecek olursak

$$f^{l_1}(x), f^{l_1+1}(x), \ldots, f^{l_1+s_1}(x) \in V_1 \quad \text{ve} \quad f^{l_1+s_1+1}(x) \notin V_1 \quad \text{olur.}$$

Eğer $l_1+s_1 \geq k$ ise yine biraz önceki nedenle F topolojik geçişgen olur. Aksi halde $V_{11} \subset V_1$ açık altkümesi $f^{l_1+i}(x)$ $(1 \leq i \leq s_1)$ lerden hiçbirini içermeyecek şekilde bulunabilir. x in yörüngesinin S^1 de yoğun olmasından dolayı sayısıda $f^{l_2}(x) \in V_{11}$ olacak şekilde bir $l_2>l_1$ sayısı vardır, yani x l_2. adımda V_{11} dolayısıyla V_1 e girer. Eğer $l_2 \geq k$ ise F topolojik geçişgen olur. Aksi halde yine x'in yörüngesi sonlu adım V_1'de kalır ve sonra V_1'den ayrılır. Bu sonlu adıma s_2 diyelim. $l_2 + s_2 \geq k$ ise yine biraz önceki nedenle F topolojik geçişgen olur. $l_2 + s_2 < k$ olması durumunda $V_{12} \subset V_1$ açık altkümesi $i \leq l_2 + s_2$ iken $f^i(x) \notin V_{12}$ olacak şekilde bulunabilir. Benzer yolla devam edilerek

$l_1 < l_2 < l_3 < \ldots$

şeklinde bir $l_1, l_2, l_3, \ldots$ tamsayı dizisi elde edilir. Burada uygun bir i_0 için

$l_{i_0} \geq k$ dır. Bu durumda $f^{l_{i_0}}(x) \in V_1$ ve $g^{l_{i_0}}(U_2) \supset V_2$ olacağından uygun bir

$y \in U_2$ için $F^{l_{i_0}}(x,y) \in V_1 \times V_2$ olduğu görülür.

Sonuç olarak F, T^2 üzerinde topolojik geçişgendir.

F'nin hiç periyodik noktası yoktur.

Bir an için $p = (x, y)$ noktasının F'nın n periyotlu periyodik noktası olduğunu kabul edelim. O zaman;

$F(p) = F(x, y) = (f(x), g(y)) = (x+1, 2y)$

$p = (x, y)$ n peryotlu olduğundan

$$\begin{aligned} F^n(p) = p &\Rightarrow F^n(x,y) = (x, y) \\ &\Rightarrow (f^n(x), g^n(y)) = (x,y) \\ &\Rightarrow f^n(x) = x \\ &\quad\;\; g^n(y) = y \end{aligned}$$

Fakat Jakabi Teoreminden dolayı $f^k(x) = x$ olacak şekilde $k > 0$ bulmak mümkün değildir. Bu nedenledirki F T^2 de hiç periyodik noktaya sahip değildir. Dolayısıyla F'nin periyodik noktalarının kümesi T^2nin yoğun bir altkümesi değildir.

Örnek 2.5: (Başlangıç şartlarına hassas bağımlı, topolojik geçişgen değil, periyodik noktaları yoğun).

$f_1 : [-1,1] \to [-1,1]$, $f_1(x) = 2x^2 - 1$ ve

$f_2 : [-1,1] \to [-1,1]$, $f_2(x) = x$

fonksiyonları yardımıyla, $X = [-1,1] \times [-1,1]$ üzerinde

$F : X \to X$

$(x, y) \mapsto F(x,y) = (f_1(x), f_2(y))$

şeklinde tanımlanan F fonksiyonunu gözönüne alalım. F fonksiyonunun X üzerindeki özelliklerini inceleyebilmek için önce f_1 in $[-1,1]$ üzerindeki özelliklerine bakalım (bkz.[1]).

f_1 $[-1,1]$ üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlı ve topolojik geçişgendir, ayrıca periyodik noktalarının kümeside $[-1,1]$ in yoğun bir altkümesidir. (Yani f_1 $[-1,1]$ üzerinde kaotiktir.) f_1 in bu koşulları sağladığını göstermeye çalışalım. Bunun için örnek 1.1'den ve aşağıdaki diyagramdan yararlanacağız. Burada $g(\theta) = 2\theta \mod 2\pi$ ve $h(\theta) = \cos\theta$ dır.

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & S^1 \arrow[d, "h"] \\ {[-1,1]} \arrow[r, "f_1"'] & {[-1,1]} \end{tikzcd}$$

$(f_1 \circ h)(\theta) = f_1(h(\theta)) = 2\,\mathrm{Cos}^2\theta - 1$ ve

$(h \circ g)(\theta) = h(g(\theta)) = \mathrm{Cos}\,2\theta = 2\,\mathrm{Cos}^2\theta - 1$ olduğundan

$f_1 \circ h = h \circ g$ olup yukarıdaki diyagram kamutatiftir.

$x \in [-1,1]$ olsun ve x i içeren keyfi bir N açık aralığını alalım. Bu durumda S^1 de bir $\widehat{N}$ yayı $h(\widehat{N})=N$ olacak şekilde vardır. Uygun bir $k>0$ için $g^k(\widehat{N})$ S^1 in tamamını örttüğünden, $f_1^k(N)$ de $[-1,1]$ i örter. Böylece x den en az örneğin $\varepsilon=1/2$ kadar uzaklaşan noktalar vardır. Bu nedenle f $[-1,1]$ üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlı olur.

f_1 topolojik geçişgendir. Çünkü; $[-1,1]$ de herhangi U,V açık aralıklarını aldığımızda S^1 de $\widehat{U}$ ve $\widehat{V}$ yayları $h(\widehat{U})=U$ ve $h(\widehat{V})=V$ olacak şekilde vardır, $k>0$ sayısıda $g^k(\widehat{U})\cap\widehat{V}\neq\varnothing$ olacak şekilde bulunabildiğinden, $f^k(U)\cap V\neq\varnothing$ olur.

$x\in[-1,1]$ olsun ve x i içeren keyfi bir U açık aralığını alalım. S^1 de bir $\widehat{U}$ yayı $h(\widehat{U})=U$ olacakşekilde vardır. g nin periyodik noktalarının kümesi S^1 in yoğun bir altkümesi olduğundan $p\in\widehat{U}$ periyodik noktası vardır. p nin peryoduna n diyecek olursak, $g^n(p)=p$ dir. Bu durumda $h(p)\in U$ olur, üstelik $f_1^n(h(p))=h(p)$ olur, buradan f_1'in periyodik noktalarının kümesi $[-1,1]$'de yoğundur diyebiliriz.

f_2, fonksiyonu $[-1,1]$ üzerinde başlangıç şartlarına bağımlı değildir ayrıca topolojik geçişgen de değildir, fakat her $x\in[-1,1]$ için $f_2(x)=x$ olup bütün noktalar periyodik noktalardır.

Şimdi asıl F fonksiyonumuza dönecek olursak; F başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır. Bunu göstermek için $p=(x,y)\in X$ herhangi bir nokta ve N de p nin herhangi bir komşuluğu olsun. Bu durumda $[-1,1]$'de x in bir U komşuluğu ve y'nin bir V komşuluğu $U\mathrm{x}V\subset N$ olacak şekilde seçilebilir. f_1, $[-1,1]$ üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlı olduğundan, $|f_1^k(x)-f_1^k(x')|>1/2$ olacak şekilde $x'\in U$ ve $k>0$ sayısı vardır. O halde $p'=(x',y)$ diyecek olursak; $p'\in U\mathrm{x}V$ dir. Üstelik,

$$d(F^k(p), F^k(p')) = d((f_1^k(x), f_2^k(y)), (f_1^k(x'), f_2^k(y)))$$

$$= [(f_1^k(x) - f_1^k(x'))^2 + (f_2^k(y) - f_2^k(y))^2]^{1/2}$$

$$= |f_1^k(x) - f_1^k(x')| > 1/2$$

elde edilir.

F, X üzerinde topolojik geçişgen değildir. Özel olarak $U = (-1,1) \times (-1, -1/2)$ ve $V = (-1,1) \times (1/2,1)$ açık altkümelerini alalım, $p = (x,y) \in U$ herhangi bir nokta olsun,

$F(x,y) = (f_1(x), f_2(y)) = (f_1(x), y)$, $F^2(x,y) = (f_1^2(x), y), \ldots, F^k(x,y) = (f^k(x), y), \ldots$ dır.

Her $k \in N$ için $f_1^k(x) \in [-1,1]$ ve $f_2^k(y) \in (-1, -1/2)$ olduğundan

$$F^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

olacak şekilde $k>0$ sayısı bulmak mümkün değildir.

F nin periyodik noktalarının kümesi X de yoğundur. $N \subset X$ $(N \neq \emptyset)$ herhangi bir açık olsun, $U \times V \subset N$ olacak şekilde $U, V \subset [-1,1]$ açık altkümeleri vardır. f_1 in periyodik noktaları $[-1,1]$ de yoğun olduğundan $f_1^n(x)=x$ olacak şekilde bir $x \in U$ noktası vardır. Herhangi bir $y \in V$ için $f_2^n(y)=y$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda $p = (x,y) \in N$ için $F^n(p)=p$ olup N ye ait F nın periyodik noktası vardır.

Örnek 2.6: (Başlangıç şartlarına hassas bağımlı değil, topolojik geçişgen, periyodik noktaları yoğun).

$X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ $1 \le i, j \le n$, $i \neq j$ iken $x_i \neq x_j$

kümesi üzerine diskre metrik kondurulmuş olsun. X üzerinde

$$f: X \longrightarrow X \qquad f(x_i) = x_{i+1}, \; 1 \le i < n-1$$

$$f(x_n) = x_1$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonu gözönüne alalım.

f başlangıç şartlarına hassas bağımlı değildir. Çünkü her bir $x \in X$ noktasının $N = \{x\}$ komşuluğunda yörüngesi x'in yörüngesinden ayrılan başka bir y elemanı yoktur.

$U, V \subset X$ keyfi açık altkümelerini alalım. $(U,V \neq \emptyset)$

$U \neq \emptyset$ olduğundan enaz bir $x_i \in U$ dur, benzer şekilde $V \neq \emptyset$ olduğundan enaz bir $x_j \in V$ dır. f'nin tanımından dolayı bir $k \geq 0$ vardır ki $f^k(x_i) = x_j$ olur. Buradan $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ olup f, X üzerinde topolojik geçişgendir.

X'in herbir noktası f'nin n peryotlu periyodik noktasıdır. Bu yüzden de f'nin periyodik noktalarının kümesi X'in yoğun bir altkümesidir.

Şimdi bu son örneğe bir karşı durum ve koşullar arası ilişkiye bir örnek olarak aşağıdaki örneği ispatlayacağız.

Önerme 2.1:

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ fonksiyonunun periyodik noktalarının kümesi **R** nin yoğun bir altkümesi ve f **R** üzerinde topolojik geçişgen olsun. O zaman f **R** üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlı olur.

İSPAT:

$a \in \mathbf{R}$ herhangi bir nokta olsun ve a 'nın δ - çevresini $(U(a,\delta))$ gözönüne alalım. Hipotezden dolayı $f^n(x) = x$ olacak şekilde $x \in U(a,\delta)$ elemanı ve n>0 sayısı vardır. x noktasının yörüngesi

$$x,\ x_1 = f(x),\ x_2 = f(x_1),\ \dots,\ x_{n-1} = f(x_{n-2}),\ x_n = f(x_{n-1}) = x$$

olur. Burada

$$l = \max\{x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$$

diyelim. $V = (l+1\ ,\ l+2)$ açık altkümesini gözönüne alacak olursak, f 'nin topolojik geçişgenliğinden dolayı $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde k>0 sayısı vardır. O zaman $f^k(y) \in V$ olacak şekilde bir $y \in U$ mevcut olur. k. adımda $f^k(x)$ $\{x_i\}$, $1 \leq i \leq n$ lerden birine eşit olacağından

$$d(f^k(x), f^k(y)) > 1$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Aşağıdaki Lemma'ya göre f başlangıç şartlarına hassas bağımlı olur.

Lemma: (X, d) bir metrik uzay ve $f: X \to X$ fonksiyonu verilsin. Öyle bir $\varepsilon>0$ sayısı mevcut olsun ki, her $a \in X$ in her δ- çevresi için bu çevrede x ve y gibi iterasyon altında ε kadar ayrışan noktalar bulunabilsin. Bu takdirde f fonksiyonu X üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır.

İSPAT: $a \in X$ herhangi bir nokta olsun ve a nın δ- çevresini $(U(a,\delta))$ gözönüne alalım. Hipotezden dolayı

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$$

olacak şekilde $x, y \in U(a,\delta)$elemanları ve $n>0$ sayısı vardır. Bu durumda ya $d(f^n(a), f^n(x)) > \frac{\varepsilon}{2}$ olur, ya da $d(f^n(a), f^n(y)) > \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Burada birinci eşitsizliğin doğru olduğunu kabul edersek, $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ olmak üzere

$$d(f^n(a), f^n(x)) > \varepsilon_1$$

elde edilir.

3. Topolojik Denklik ve Kaos Üzerine

Tanım 3.1:

X ve Y metrik uzayları ve $f: X \longrightarrow X$, $g: Y \longrightarrow Y$ fonksiyonları verilsin. Her $x \in X$ için $(hof)(x) = (goh)(x)$ olacak şekilde (Yani aşağıdaki diyagramı kamutatif yapacak şekilde)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

$h: X \longrightarrow Y$ homeomorfizmi varsa f ve g fonksiyonlarına topolojik denk fonksiyonlar denir.

Bu durumda f, X üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlı iken g, Y üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlı olmak zorunda değildir. Bunu şimdi bir örnekle göstereceğiz. Kaos'un diğer iki koşulu ise, aşağıda vereceğimizin önermenin ispatında görüleceği üzere, f için doğru ise g için de doğru olur.

Örnek 3.1:

$X = (0, \infty)$, $Y = \mathbf{R}$ uzaylarını ve

$f: X \longrightarrow X$, $f(x) = e.x$

$g: Y \longrightarrow Y$, $g(x) = x+1$

$h: X \longrightarrow Y$, $h(x) = \ln x$

fonksiyonlarını gözönüne alalım.

$$\begin{tikzcd}
(0,\infty) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & (0,\infty) \arrow[d, "h"] \\
\mathbf{R} \arrow[r, "g"'] & \mathbf{R}
\end{tikzcd}$$

$h: X \longrightarrow Y$ bir homeomorfizmdir üstelik;

$(hof)(x) = h(f(x)) = \ln x + 1$

$(goh)(x) = g(h(x)) = \ln x + 1$

olduğundan hof=goh dir. Burada f(x)=e.x fonksiyonu X üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlı olmasına rağmen, g(x) = x+1 fonksiyonu Y üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlı değildir.

Önerme 3.1: (X,d) ve (Y,d') metrik uzayları ile $f: X \longrightarrow X$, $g: Y \longrightarrow Y$ fonksiyonları verilsin. f ve g fonksiyonları, $h: X \longrightarrow Y$ homeomorfizmi aracılığıyla topolojik denk olsunlar. Ayrıca, her $x_1, x_2 \in X$ için

$$d'(h(x_1), h(x_2)) \geq \alpha . d(x_1, x_2)$$

olacak şekilde bir $\alpha > 0$ sayısı mevcut olsun.

Bu taktirde f kaotik ise, g de kaotiktir.

Not:

Aşağıdaki ispattan da görüleceği üzere, bu önerme $hof = goh$ koşulunu sağlayan sürekli ve örten bir h fonksiyonu için de doğrudur.

İspat:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

İspatı birkaç adımda yapmaya çalışalım.

Her $x \in X$ için $h(f^n(x) = g^n(h(x))$ dir. Yani, x in f altındaki n. iterasyonunun h altındaki görüntüsü, x in h altındaki görüntüsünün g altındaki n. iterasyonudur.

$$g^n(h(x)) = g^{n-1}(g \circ h)(x) = g^{n-1}(h \circ f)(x)$$
$$= g^{n-1}(h(f(x))) = g^{n-2}(g \circ h)(f(x)) = g^{n-2}(h \circ f)(f(x)) = g^{n-2}(h(f^2(x)))$$
$$= \ldots$$
$$= g^2(h(f^{n-2}(x))) = g^1(g \circ h)(f^{n-2}(x)) = g(h \circ f)(f^{n-2}(x))$$
$$= g(h(f^{n-1}(x))) = (g \circ h)(f^{n-1}(x)) = (h \circ f)(f^{n-1}(x))$$
$$= h \circ f^n(x)$$

Sonuç olarak

$$h(f^n(x)) = g^n(h(x)) \qquad (*)$$

eşitliği elde edilir.

Eğer $x \in X$ f nin sabit noktası ise, bu son eşitliğe göre $h(x)$ g nin sabit noktası olur.Benzer şekilde x f nin n peryotlu periyodik noktası ise, h(x) g nin n periyotlu peryodik noktasıdır. (Burada n x in asal peryodu olsa bile h(x) noktasının asal peryodu n olmak zorunda değildir.)

Şimdi $g: Y \to Y$ fonksiyonunun kaos koşullarını gerçeklediğini göstermeye çalışalım.

İlk olarak acaba $g: Y \to Y$ fonksiyonunun periyodik noktalarının kümesi Y nin yoğun bir altkümesi midir?

$V \subset Y$ herhangi bir açık altküme olsun, V ye ait enaz bir periyodik nokta olduğunu göstermeliyiz. V açık ve h sürekli olduğundan $h^{-1}(V)$ X in açık altkümesidir. f nin periyodik noktaları X de yoğun olduğundan bir $x \in h^{-1}(V)$ elemanı ve $k>0$ sayısı $f^k(x) = x$ olacak şekilde vardır. Bu durumda $h(x) \in V$ dir. Üstelik (*) eşitliğinden $g^k(h(x)) = h(x)$ olup, V ye ait g nin periyodik noktası vardır. O halde g nin periyodik noktalarının kümesi Y nin yoğun bir altkümesidir.

Şimdi de $g: Y \to Y$ fonksiyonunun topolojik geçişgen olduğunu göstermeye çalışalım. U, $V \subset Y$ keyfi açık altkümeler olsunlar. h sürekli olduğundan dolayı $U' = h^{-1}(U)$, $V' = h^{-1}(V) \subset X$ açık altkümelerdir. f X üzerinde topolojik geçişgen olduğundan uygun bir $k>0$ için $f^k(U')\cap V'\neq\emptyset$ tur. Yani enaz bir $x_1\in U'$ için $f^k(x_1)=x_2\in V'$ dür. $x_1\in U'$ olduğundan $h(x_1)=y_1\in U$ ve $h(x_2)=h(f^k(x_1))=y_2\in V$ dir. Üstelik (*)eşitliğinden $h(f^k(x_1))=g^k(h(x_1))$ dir, buradan $y_1\in U$ için $g^k(y_1)\in V$ dir. Dolayısıyla $g^k(U)\cap V\neq\emptyset$ olup, g Y üzerinde topolojik geçişgendir.

Son olarak g nin Y üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlı olduğunu göstermeye çalışalım.

$y_1\in Y$ herhangi bir nokta ve N de y_1 in herhangi bir komşuluğu olsun. $h(x_1)=y_1$ olacak şekilde bir $x_1\in X$ noktası seçelim.Bu durumda $h^{-1}(N)$ x_1 in bir komşuluğu olur. f X üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlı olduğundan öyle bir $\delta>0$ sayısı vardır ki,

$$d(f^k(x_1),\ f^k(x_2))>\delta$$

olacak şekilde bir $x_2\in h^{-1}(N)$ elemanı ve $k>0$ sayısı bulunabilir. $h(x_2)=y_2$ dersek $y_2\in N$ dir.

$g\circ h=h\circ f$ nedeniyle $g^k\circ h=h\circ f^k$ olduğundan

$$d'(g^k(y_1),g^k(y_2))=d'(g^k(h(x_1)),g^k(h(x_2))=d'(h(f^k(x_1)),h(f^k(x_2)))$$

yazılabilir. Buradan da hipotezimize göre

$$d'(h(f^k(x_1)),h(f^k(x_2)))\geq\alpha\,.\,d\ (f^k(x_1),f^k(x_2))>\alpha\,.\,\delta$$

dolayısıyla

$d'(g^k(y_1),g^k(y_2))>\alpha.\delta$ olur. Demek ki, $\varepsilon=\alpha\,.\,\delta$ alınacak olursa, g fonksiyonunun da başlangıç şartlarına hassas bağımlı olduğu görülür.

Örnek 3.2: $F_4:[0,1]\to[0,1]$, $F_4(x)=4x(1-x)$ fonksiyonu [0,1] üzerinde kaotik bir fonksiyondur.

F_4 fonksiyonunun kaos koşullarını sağladığını göstermek için Örnek 6 daki [-1,1] üzerinde kaotik olan $f_1(x)=2x^2-1$ fonksiyonundan ve

$h : [-1,1] \to [0,1]$, $h(x) = \frac{1}{2}(1-x)$ şeklinde tanımlı sürekli h fonksiyonundan yararlanacağız.

Her $x \in [-1,1]$ için

$$(F_4 \circ h)(x) = F_4(h(x)) = 1 - x^2$$

$$(h \circ f_1)(x) = h(f_1(x)) = 1 - x^2$$

olup

$F_4 \circ h = h \circ f_1$ dir. Ayrıca $x, y \in [-1,1]$ için

$$d(h(x), h(y)) = |\left(\frac{1}{2}(1-x) - \frac{1}{2}(1-y)\right| = \frac{1}{2}|x-y| = \frac{1}{2} d(x,y)$$

olur. Teorem gereğince F_4 fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde kaotik bir fonksiyondur.

4. Topolojik Geçişgenlik ve Yoğun Yörünge İlişkileri

$f : X \to X$ fonksiyonu X üzerinde yoğun bir yörüngeye sahip olsun, acaba bu durumda f, X üzerinde topolojik geçişgen olur mu? Bunun her zaman doğru olamayacağını bir örnekle görmeye çalışalım.

Örnek 4.1:

$X = \{a,b\}$ kümesi ve bu küme üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$ topolojisi (ayrık topoloji) verilsin. X üzerinde

$$\begin{aligned} f : X &\to X \\ a &\mapsto a \\ b &\mapsto a \end{aligned}$$

şeklinde verilen f fonksiyonunu gözönüne alalım. $b \in X$ noktasının yörüngesi b, $f(b) = a$ olup X in bütün noktalarını tarar ve bu yüzden X in yoğun bir altkümesidir. Fakat $U = \{a\}$ $V = \{b\}$ açık altkümelerini gözönüne aldığımızda $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde $k > 0$ sayısı bulmak mümkün değildir. Bu yüzden f fonksiyonu X üzerinde topolojik geçişgen değildir.

Önerme 4.1: X bir topolojik uzay olsun ve boş olmayan hiçbir $U \subset X$ açık kümesinin sonlu ve yoğun bir altkümesi olmasın.

Bu takdirde, $f: X \to X$ fonksiyonunun yoğun bir yörüngesi varsa f X üzerinde topolojik geçişgendir.

İSPAT: $x \in X$ noktasının yörüngesi X de yoğun olsun, $U, V \subset X$ keyfi $(U, V \neq \emptyset)$ açık altkümelerini alalım.

x in yörüngesi X de yoğun olduğundan dolayı, x belli bir adım sonra U ya ve belli bir adım sonra V ye girer. U ya m. adımda V ye de n. adımda girdiğini kabul edelim. Burada $m<n$ ve $m>n$ ve $m=n$ gibi üç durum karşımıza çıkar.

$m<n$ olması durumunda $f^m(x) = y \in U$ ve $f^n(x) \in V$ olup $k=n-m$ dersek, $y \in U$ noktası için $f^k(y) \in V$ olur. Buradan da $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ ifadesi elde edilir. U ve V keyfi seçildiğinden her U,V çifti için sağlanır.

$m>n$ olması durumunda, yani x in yörüngesi önce V ye sonra U ya giriyorsa $f^n(x) \in V$ ve $f^m(x) \in U$ dur.

$f^m(x) = y \in U$ oluncaya kadar x in yörüngesi V ye k kere girmiş olsun. Yani $n \leq l_i < m$ ve $1 \leq i \leq k$ olmak üzere

$f^{l_1}(x), f^{l_2}(x), \ldots, f^{l_k}(x)$

noktalarının oluşturduğu küme V nin bir altkümesidir. Bu altküme V de yoğun olmadığından dolayı bir $V' \subset V$ açık alt kümesi bu noktalardan hiçbirini içermeyecek şekilde bulunabilir. x in yörüngesi X de yoğun olduğundan dolayı $p>0$ sayısı $f^p(x) \in V$ olacak şekilde vardır. Üstelik $p>m$ ve $f^p(x) \in V$ olur. Burada $t=p-m$ olmak üzere $y \in U$ iken $f^t(y) \in V$ olur, buradan da $f^t(U) \cap V \neq \emptyset$ tur. U,V açık altkümeleri keyfi seçildiğinden bu her U,V çifti için sağlanır. $m=n$ olması durumunda bu düşünce $f^m(x)$ noktasını içermeyen bir

$V' \subset V$ ve açık kümesine uygulanabilir. Dolayısıyla, f topolojik geçişgendir.

Şimdi diğer istikamette (yani topolojik geçişgenliğin yoğun yörüngeyi gerektirmesi şeklinde) bir teorem veriyoruz. Bu teorem, Birkhoff'un [3] de verilen bir teoreminin biraz zayıflatılmış bir şeklidir (Biz homeomorfizm yerine sadece sürekliliği varsaydık).

Önerme 4.2: X bir tam metrik uzay ve X in topolojisinin sayılabilir bir tabanı mevcut olsun. Ayrıca $f: X \to X$ fonksiyonu sürekli ve topolojik geçişgen olsun. Bu takdirde öyle bir $x \in X$ noktası vardır ki bu noktanın yörüngesi X de yoğundur. Hatta, yörüngesi X de yoğun noktalarının kümesi de X de yoğundur.

İSPAT: $(V_i)_{i \in I}$ X in topolojisinin sayılabilir bir tabanı olsun. $i \in I$ olmak üzere, f sürekli olduğu için

$\bigcup_{n \le 0} f^n(V_i)$ kümesi X de açıktır. Bu küme aynı zamanda yoğundur.

Bunu görmek için bir $U \subset X$ açık kümesi verilsin. f nin topolojik geçişgen olmasından dolayı uygun bir $k>0$ için $V_i \cap f^k(U) \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla

$f^{-k}(V_i) \cap U \neq \emptyset$ olur. Buradan da $\bigcup_{n \le 0} f^n(V_i) \cap U \neq \emptyset$ elde edilir.Yani $\bigcup_{n \le 0} f^n(V_i)$ kümesi yoğundur. Baire Kategori Teoreminden (bkz.[2]) dolayı

$$B = \bigcap_{i \in I} \left[\bigcup_{n \le 0} f^n(V_i) \right]$$

kümesi X de yoğundur. Herhangi bir $x \in B$ noktasının yörüngesi X de yoğundur. Çünkü; $U \subset X$ herhangi bir açık ise enaz bir $i \in I$ için $V_i \subset U$ dur, x in seçiminden dolayı enaz bir $k \in \mathbf{N}^+$ için $x \in f^{-k}(V_i)$ dir. Buradan

$f^k(x) \in V_i$ ve $V_i \subset U$ olduğundan $f^k(x) \in U$ olur. Yani X in her açığında x in yörüngesine ait noktalar vardır. Demek ki x in yörüngesi X de yoğundur.

5. Kaos Koşullarının Çarpım Fonksiyonlarına Taşınması

Önerme 5.1 : (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzaylar ve $f: X \to X$ fonksiyonu X üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlı bir fonksiyon ve $g: Y \to Y$ herhangi bir fonksiyon olsun. Bu durumda f ve g yardımıyla

$$F: X \times Y \to X \times Y$$
$$(x, y) \to F(x,y) = (f(x), g(y))$$

şeklinde tanımlanan F fonksiyonu XxY üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır. (Burada XxY üzerindeki metrik $(x,y), (x', y') \in X \times Y$ için

$$d((x,y), (x', y')) = \sqrt{[d_1(x, x')]^2 + [d_2(y, y')]^2}$$

şeklinde tanımlanmıştır).

İSPAT: $p = (x,y) \in X \times Y$ herhangi bir nokta olsun ve N de p nin herhangi bir komşuluğu olsun. O zaman $U \times V \subset N$ olacak şekilde $x \in X$ in bir U komşuluğu ve $y \in Y$ nin V komşuluğu vardır. f X üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlı olduğundan öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki, $x \in X$ noktasının U komşuluğu için

$$d_1(f^k(x), f^k(x')) > \varepsilon$$

olacak şekilde $x' \in U$ elemanı ve $k > 0$ sayısı bulunabilir. $y' \in V$ herhangi bir nokta iken $p' = (x', y') \in N$ olur, üstelik

$$d(F^k(p), F^k(p')) \geq d_1(f^k(x), f^k(x')) > \varepsilon$$

olup, F XxY üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır.

Önerme 5.2: $f : X \to X$ ve $g : Y \to Y$ fonksiyonları verilsin. f nin periyodik noktalarının kümesi X in ve g nin periyodik noktalarının kümesi de Y nin yoğun bir altkümesi olsun. O zaman

$$F : X \times Y \to X \times Y$$
$$(x,y) \mapsto (f(x), g(y))$$

şeklinde tanımlanan F fonksiyonunun periyodik noktalarının kümesi XxY nin yoğun bir altkümesidir.

İSPAT $U \subset X \times Y$ herhangi bir açık altküme olsun. Bu durumda $U_1 \times U_2 \subset U$ olacak şekilde $U_1 \subset X$ ve $U_2 \subset Y$ açık altkümeleri vardır. f nin periyodik noktalarının kümesi X de yoğun olduğundan $f^n(x) = x$ olacak şekilde en az bir $x \in U_1$ elemanı ve $n>0$ sayısı vardır, benzer şekilde g nin periyodik noktalarının kümesi Y de yoğun olduğundan $f^m(y) = y$ olacak şekilde en az bir $y \in U_2$ elemanı ve $m>0$ sayısı vardır. $p=(x,y) \in U$ noktası ve $k=m.n$ için

$$F^k(p) = F^k(x,y) = (f^k(x), g^k(y)) = (x,y) = p$$

olup p F nin periyodik noktasıdır. Sonuç olarak F nin periyodik noktalarının kümesi XxY nin yoğun bir altkümesidir.

Lemma 5.3.: R^2 deki $y=ax+b$ doğrusunun $T^2=(R \bmod 2\pi)x(R \bmod 2\pi)$ toru üzerinde kapanması için gerek ve yeter koşul a nın rasyonel olmasıdır.

İSPAT:

$(x_0, y_0) \in T^2$ noktası $y=ax+b$ doğrusu üzerinde olsun yani, $y_0 = a x_0 + b$ olsun. Bu doğrunun tekrar (x_0, y_0) dan geçmesi demek (x_0, y_0) a denk olan bir (x', y') noktasından geçmesi demektir. Burada

$$(x_0, y_0) \sim (x', y') \text{ olması demek } \left\{ \begin{array}{l} x' = x_0 + M\,2\pi \\ y' = y_0 + N\,2\pi \end{array} \right.$$

olacak şekilde M ve N tamsayılarının bulunabilmesi demektir.

$y' = ax' + b$ olsun. O zaman

$y_0 = ax_0 + b$ ve $y' = ax' + b$ eşitliklerinden

$$y' - y_0 = a.(x' - x_0) \Rightarrow N.2\pi = a.M.2\pi \Rightarrow a = \frac{N}{M}$$

olur. Yani bu durumda a rasyonel olur.

Tersine a rasyonel olsun. $a = \frac{p}{q}$ olacak şekilde p ve q tamsayıları vardır. Yani $y = \frac{p}{q}x + b$ olur. Bu doğru $(x_0, y_0) \in R^2$ noktasından geçsin. İddiamız bu doğrunun T^2 de (x_0, y_0) a denk olan bir başka $(x', y') \in \mathbf{R}^2$ noktasından geçeceğidir. $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ doğru üzerinde olduğundan

$y_0 = \frac{p}{q}x_0 + b$ dir.

$$\Rightarrow y_0 + p.2\pi = \frac{p}{q}x_0 + p.2\pi + b \text{ (eşitliğin her iki tarafına } p2\pi \text{ ekliyoruz)}$$

$$\Rightarrow y_0 + p\,2\pi = \frac{p}{q}(x_0 + q\,2\pi) + b$$

Bu durumda,

$x' = x_0 + q.2\pi$ ve $y' = y_0 + p.2\pi$ şeklindeki (x', y') noktası için

$y' = \frac{p}{q}x' + b$ ve $(x, y) \sim (x', y')$ olur.

Önerme 5.4:

$f: X \to X$ ve $g: Y \to Y$ fonksiyonları verilsin. F, X üzerinde topolojik geçişgen ve g Y üzerinde topolojik geçişgen olsunlar. Bu takdirde

$$F: X \times Y \to X \times Y$$
$$(x,y) \mapsto F(x,y) = (f(x), g(y))$$

fonksiyonu XxY üzerinde topolojik geçişgen olmak zorunda değildir.

Buna örnek olarak $T_\lambda : S^1 \to S^1$ $T_\lambda(\theta) = q + 2\pi\lambda \mod 2\pi$ (λ irrasyonel) fonksiyonu yardımıyla tanımlanan

$$F_\lambda : \quad T^2 \to T^2$$
$$(x\,,y) \to F_\lambda\,(x\,,y) = (T_\lambda\,(x)\,,T_\lambda\,(y)) \qquad (\lambda \quad \text{irrasyonel})$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. T_λ nın S^1 de topolojik geçişgen olduğunu biliyoruz. Acaba F_λ fonksiyonu tor yüzeyi üzerinde topolojik geçişgen midir?

Herhangi bir $(x\,,y) \in T^2$ noktasının yörüngesi

$$(x,y)\,,\ F(x,y) = (x + 2\pi\lambda\,,\ y+2\pi\lambda) = (x,y) + 2\pi\lambda\ (1,1),\ \ldots$$
$$F^n\ (x,y) = (x + 2n\lambda\pi,\ \ y + 2n\lambda\pi) = (x,y) + 2n\lambda\pi\ (1,1),\ \ldots$$

olup, (x,y) nin yörüngesindeki noktalar (x,y) noktasından geçen ve doğrultusu (1,1) olan doğru üzerindedir. Bu doğru $y=x+b$ şeklinde bir doğru olup bu doğrunun eğimi rasyonel olduğundan tor üzerinde kapanır. Dolayısıyla bu doğru üzerindeki noktalar kümesi T^2 nin yoğun bir altkümesi değildir. Sonuç olarak F_λ topolojik geçişgen değildir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Devaney, R.L., An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Benjamin-Cummings, 1986.

[2] Dixmier, J., General Topology, Springer Verlag 1984.

[3] Guckenheimer, J., Moser J., Newhouse, S.E. Dynamical Systems, Birkhäuser 1980.

[4] Karaçay, T. Genel Topoloji, K.T.Ü. 1982