

58/96

**İKİ EKLEMLİ ESNEK BİR ROBOT
KOLUNUN MODELLENMESİ
VE KONTROLÜ**

Atakan DOĞAN

**Yüksek Lisans Tezi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği
Anabilim Dalı
Kasım 1997**

58/96

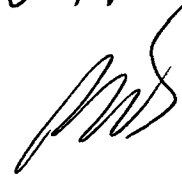
**İ.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
İKTİSADİ VE İŞLERİ MERKEZİ**

Atakan DOĞAN'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "İki Eklemlili Esnek Bir Robot Kolunun Modellenmesi ve Kontrolü" başlıklı tez 27. /11. /1997 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Lisansüstü Öğretim Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye (Tez Danışmanı) : Prof. Dr. Altuğ İFTAR



Üye : Prof. Dr. Atila BARKANA



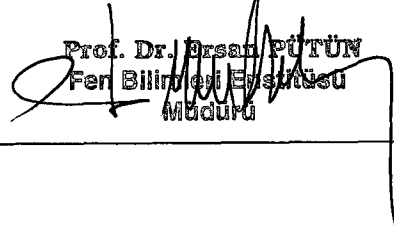
Üye : Yrd. Doç. Dr. Osman PARLAKTUNA



Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 28.11.1997 tarih ve 22/6 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. İrsan PÜTÜN
Fen Bilimleri Enstitüsü
Müdürü



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİ EKLEMLİ ESNEK BİR ROBOT KOLUNUN MODELLENMESİ VE KONTROLÜ

ATAKAN DOĞAN

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Altuğ İFTAR
1997

Bu tezde ilk parçası katı, ikincisi ise esnek bir yapı olan ve uç kısmında kütlesi bilinmeyen ancak belirli bir aralık içerisinde değiştiği varsayılan bir yüke sahip iki parçalı bir robot kolunun modellenmesi ve kontrolü ele alınmıştır. Sistemin dinamik denklemleri Hamilton prensibi kullanılarak türetilmiş ve sistemin dinamiği diferansiyel özdeğer problemi yaklaşımı kullanılarak sonsuz boyutlu bir modelle gösterilmiştir. Robot kolunun katı ve esnek hal dinamiğini ifade eden doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemler, MATLAB dilinde hazırlanan bir benzetim programı yardımıyla çözümlenerek sistemin tepkisi bulunmuştur. Robot kolunun eklem açılarının, herbir eklem için seçilen sabit bir referans sinyali veya bir yörüngeyi takip etmesi ve esnek parçanın uç sapmasının sönümlenmesi için PD kontrolörler ve tekil perturbasyon metodunu temel alan iki zaman ölçekli bir kontrolör tasarlanmıştır. Tasarlanan kontrolörler için sistemin benzetimi yapılarak elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Esnek Robot Kolları, PD Kontrol, Tekil Perturbasyon Metodu,
İki Zaman Ölçekli Kontrolör

ABSTRACT

Master of Science Thesis

MODELING AND CONTROL OF A TWO-LINK FLEXIBLE ROBOT MANIPULATOR

ATAKAN DOĞAN

Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Electrical and Electronics Engineering Program

Supervisor: Prof. Altuğ İFTAR
1997

In this thesis, modeling and control of a 2-link robot manipulator whose first link is rigid and the second one is flexible is considered. The mass of the payload at the tip of the flexible link is unknown but varies in a specific range. The system is modelled using the Hamilton's principle and the dynamics of the system is represented as an infinite dimensional model using the differential eigenvalue problem approach. For a specific number of modes, nonlinear ordinary differential equations which describe the flexible and rigid body dynamics of the robot arm are solved by a simulation program developed in MATLAB in order to find the response of the system. PD controllers and a two time scale controller are designed for the robot arm to achieve tracking of a reference signal or a trajectory and to suppress the tip deviation of the flexible link. Designing the two time scale controller is based on the singular perturbations method. Simulation results for the designed controllers are presented.

Keywords: Flexible Robot Arms, PD Control, Singular Perturbation Method, Two Time Scale Controller

Teşekkür

Çalışmalarında beni yönlendiren ve benden yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Altuğ İFTAR'a teşekkür ederim. Ayrıca çalışmalarında beni destekleyen aileme, Gülşah ÖZTÜRK'e ve Nuray AT'a teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
1. GİRİŞ	1
1.1 Bugüne Kadar Yapılan Çalışmalara Genel Bakış	2
1.2 Tezde Yapılan Çalışmalar	4
2. ROBOT KOLUNUN MODELLENMESİ	5
2.1 Özdeğer Probleminin Çözümü	11
3. YÖRÜNGE PLANLAMA	15
3.1 Eklem Değişkeni Uzayında Yörünge Planlama	16
3.1.1 4-3-4 yörüngesinin hesaplanması	17
4. TEKİL PERTURBASYON METODU	24
4.1 Tekil Perturbasyon Metodunun Esnek Robot Kollarına Uygulanması	26
4.1.1 Yavaş alt sistem	27
4.1.2 Hızlı alt sistem	28

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
5. KONTROLÖR TASARIMI	30
5.1 PD Kontrolör Tasarımı	30
5.2 Doğrusal Olmayan PD-Benzeri Kontrolör Tasarımı	30
5.3 İki Zaman Ölçekli Kontrolör Tasarımı	31
5.3.1 Yavaş alt sistemin kontrolü	32
5.3.2 Hızlı alt sistemin kontrolü	33
5.3.3 Kompozit kontrol	35
6. BENZETİM ÇALIŞMALARI	36
6.1 Geliştirilen Benzetim Programları	36
6.1.1 Runge-Kutta formülleri kullanılarak sistemin benzetimi	36
6.1.2 Isim komutu kullanılarak sistemin benzetimi	38
6.2 Benzetim Sonuçları	39
6.2.1 PD kontrolör ile sistemin benzetimi	40
6.2.2 Doğrusal olmayan PD benzeri kontrolör ile sistemin benzetimi	49
6.2.3 PD kontrolör ile bir yörünge sinyalinin takibi	54
6.2.4 Kompozit kontrolör ile sistemin benzetimi	60
7. SONUÇ	68
KAYNAKLAR	72
EKLER	74

1. GİRİŞ

Bir çok robotik uygulamada geniş bir çalışma alanı içinde, mümkün olduğunca az enerji kullanarak sistemin hızlı bir tepki vermesi beklenir. Ancak katı robot kollarının yapısı, katı robot kolları kullanılarak bu gereksinimlerin karşılanmasını güçleştirmektedir. Çünkü katı robot kollarında titreşimi engellemek için:

- i. Yüksek yapısal katılığa sahip parçalar kullanılmaktadır. Robot kolunun parçalarında katılığı yüksek malzeme kullanılması, kolun kütlesini ve eylemsizlik momentini artırmaktadır. Dolayısıyla robot kolunu belirli bir hızda hareket ettirebilmek için daha büyük kapasiteli motorlara ihtiyaç duyulacak ve bu yüzden sistemin enerji tüketimi artacaktır [1].
- ii. Robot kolunun taşıyabileceği yükün kütlesinin robot kolunun kütlesine oranı küçük tutulmaktadır [1].
- iii. Genellikle robot kolunun maksimum açısal hızı, kolun ilk esnek modunun frekansının yarısı olarak seçilmektedir [2].

Katı robot kollarının yapısından kaynaklanan bu dezavantajları ortadan kaldırmak için robot kolunun parçaları daha hafif ve uzun yapılmaktadır. Parçaların hafif ve uzun olması ise parçaların esnekliğini artırır. Ayrıca günümüzde robot kolları, robot kolunun taşıyabileceği yükün kütlesinin robot kolunun kütlesine oranı mümkün olduğunca büyük olacak şekilde tasarlanmaktadır. Hafif ve uzun robot kolları kullanılarak büyük yüklerin taşınması ayrıca sistemin esnekliğini artırmaktadır. Özellikle ağır yüklerin hafif ve uzun parçalar ile yüksek hızlarda taşındığı robot kollarında, parçaların doğasından kaynaklanan bozulmalar göz ardı edilemeyecek boyutlara ulaşabilmektedir. Dolayısıyla bu tip robot kollarında katı yapı analizi yetersiz kalmaktadır. Katı yapı analizi yerine, katı hal durumlarıyla birlikte parçaların esnekliğinden kaynaklanan esnek hal durumlarını da içeren gerçeğe daha yakın bir model kullanılmalıdır.

Esnek yapıların dinamiği ancak kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilebilmektedir. Kısmi diferansiyel denklemler ise çeşitli yaklaşımlar kullanılarak sonsuz boyutlu bir modelle gösterilmektedir. Esnek yapıların ancak çok büyük boyutlu modellerle gösterilebilmesi ise sistem içerisinde belirsizliklere (bilinmeyen sistem parametreleri: esnek yapının kütlesi ve eylemsizlik momenti; modellenemeyen di-

namik: esnek yapının yüksek frekanslı modları) neden olabilmektedir [3]. Bunların yanısıra, esnek yapıların dinamiğini ifade eden dinamik denklemlerin elde edilmesi ve genellikle karmaşık ve doğrusal olmayan bu denklemlerin çözümü oldukça zordur.

Esnek robot kollarının kullanılmasıyla birlikte esnek robot kollarının kontrolü de önemli bir problem haline gelmiştir. Esnek bir robot kolunun kontrolörü, kolun eklem açıları istenilen bir referans sinyali veya bir yörüngeyi takip ederken mümkün olan en kısa süre içerisinde de esnek parçanın uç sapmalarını sönümlemelidir. Esnek robot kolunun karmaşık dinamiği, sistem içerisindeki belirsizlikler ve esnek hal durumlarının direk olarak girdiler tarafından kontrol edilebilir olmaması, esnek robot kollarının kontrolü için katı robot kollarına göre daha karmaşık kontrol stratejilerinin uygulanmasını gerektirmektedir [4].

1.1 Bugüne Kadar Yapılan Çalışmalara Genel Bakış

Esnek robot kollarına duyulan gereksinim bu konuya olan ilgiyi de artırmış ve son yıllarda, esnek robot kollarının modellenmesi ve kontrolü konusunda pek çok çalışma yapılmıştır.

Book [5], sadece döner eklem içeren çok parçalı esnek robot kolları için programlamaya uygun bir modelleme yaklaşımı geliştirmiştir. Eklem hareketi ve parça deformasyonu kinematiğini 4×4 'lük dönüşüm matrisleriyle göstermiş ve Lagrangian formulasyonunu kullanarak esnek robot kolunun katı ve esnek hal dinamiğini veren dinamik denklemleri elde etmiştir. Daha sonra elde etmiş olduğu bu denklemleri düzenleyerek programlamaya uygun bir formda yeniden ifade etmiştir.

Low [6], döner veya doğrusal eklemler ve katı veya esnek parçalar içeren çok parçalı robot kolları için sistematik bir modelleme metodu geliştirmiştir. Eklem hareketi kinematiğini 3×3 'lük dönme matrisleriyle göstermiş ve Hamilton prensibini kullanarak robot kolunun dinamik denklemlerini bağımsız genel koordinatlar cinsinden ifade etmiştir. Low ve Vidyasagar [7] ise, robot kolunun dinamiğini veren ve [6]'da elde edilmiş olan dinamik matrislerinin çeşitli özelliklerini saptamışlar, ve bu özellikleri kullanarak [6]'da Low'un önermiş olduğu metoddan daha az bir hesaplama yükü getiren yeni bir modelleme metodu geliştirmişlerdir.

Çok parçalı esnek robot kollarının modellenmesi konusunda yapılan diğer bazı çalışmalar ise: Cetinkunt ve Book [8], çok parçalı esnek robot kollarının dinamik denklemlerini türetebilmek için sistematik ve programlamaya uygun yeni bir metod önermiştir. Usoro vd. [9], iki eklemler içeren esnek bir robot kolunun modellenmesini sonlu eleman metodu ve Lagrangian formulasyonunu kullanarak yapmıştır.

Tek parçalı esnek robot kollarının belirli bazı kabullenmeler altında doğrusal ve zaman içinde değişmez bir modelle gösterilebilmesi, tek parçalı esnek robot kollarının kontrolü üzerine çok sayıda teorik ve deneysel çalışma yapılmasına neden olmuştur. Cannon ve Schmitz [10], sistemin katı ve esnek hal durumlarını bir gözlemleyici yardımıyla eklem açısı hızı ve esnek kolun uç sapması ölçümlerini kullanarak tahmin ettikten sonra bir LQG (Linear Quadratic Gaussian) kompanzator kullanarak sistemi kontrol etmişlerdir.

Sakawa vd. [11], gerilme ölçerler, enkoder ve takometre kullanarak [10]'da yapılan çalışmaya benzer bir çalışma yapmışlardır.

Rovner ve Cannon [12], tek eklemli esnek bir robot kolunu kontrol edebilmek için *self-tuning regulator* yaklaşımını temel alan adaptif bir kontrol yaklaşımı önermişlerdir. Önerilen yaklaşım tanıma ve kontrol olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. Tanıma algoritması RLS (Recursive Least-Squares) algoritmasının filtrelenmiş bir versiyonudur. Sistemin RLS algoritması ile elde edilmiş parametre değerlerini kullanarak robot kolunun kontrolünü bir LQG kompanzator kullanarak gerçekleştirmişlerdir.

Yurkovich ve Tzes [13], [12]'de yapılan çalışmaya benzer bir çalışma yapmışlardır. Zaman ve frekans düzleminde çeşitli tanıma metodları önermişler ve adaptif bir PID kontrolör kullanarak sistemi kontrol etmişlerdir. PID kontrolörün kazanç değerlerini ise bir performans indisinin kazanç değerleri üzerinden minimizasyonunu yaparak seçmişlerdir.

İftar ve Özgüner [14], belirli şartlar altında sonlu boyutlu bir parametre vektörünün fonksiyonu olan ikinci dereceden bir transfer fonksiyonu ile esnek yapıların doğasından kaynaklanan belirsiz dinamiği modellemişlerdir. İftar [3], [14]'te geliştirilen yaklaşımı esas alarak tek parçalı esnek robot kolu için gerçek ve nominal sistemi kararlı kılan gürbüz bir kontrolör tasarımı gerçekleştirmiştir.

Çok parçalı esnek robot kollarının dinamiği oldukça karmaşık ve doğrusal olmayan denklemlerle gösterilebildiği için, çok parçalı esnek robot kolları genelde adaptif veya doğrusal olmayan kontrolörler kullanılarak kontrol edilmeye çalışılmaktadır. Çetinkunt ve Book [15], sadece eklem değişkenleri geri beslenerek kontrol edilen bir robot kolunun performans limitleri üzerine bir çalışma yapmışlardır. Robot kolunun taşıdığı yükün kütledeki ve diğer çalışma şartlarındaki değişimlere rağmen istenilen performansı sağlayan gürbüz bir adaptif kontrolörü AMFC (Adaptive Model Following Control) yaklaşımını kullanarak gerçekleştirmişlerdir.

Khorrani vd. [16], iki parçalı katı bir robot kolunun kontrolü için tasarlanan doğrusal olmayan bir kontrolörü ve girdi biçimlendirme metodunu kullanarak iki parçalı esnek bir robot kolunun kontrolünü gerçekleştirmişlerdir. Doğrusal olmayan

kontrolörle Coriolis ve merkezci ivmeden kaynaklanan bazı terimler kompanse edilirken, aynı zamanda robot kolunun geometrik değişimlerinden kaynaklanan esnek yapının frekanslarındaki değişimler de azaltılmıştır. Doğrusal olmayan kontrolör altında eklem açıları istenilen yörüngeyi takip ederken girdi biçimlendirmesi metodu kullanılarak da esnek robot kolunun uç sapmaları sönümlenmiştir.

Özel [17], ilk parçası katı ve ikinci parçası ise esnek bir yapı olan iki eklemlili bir robot kolunun modellenmesi ve kontrolünü gerçekleştirmiştir. Özel, PD kontrolörlerle sabit referans sinyalleri takip ederek robot kolunu kontrol etmiştir. Bu çalışmada ise PD kontrolörle sabit bir referans sinyalin takibine ek olarak doğrusal olmayan PD benzeri kontrolörlerle sabit bir referans sinyalin takibi, PD kontrolörlerle bir yörünge sinyalinin takibi ve iki zaman ölçekli kontrol yaklaşımları esnek robot kolunun kontrolü için denenmiş ve elde edilen sonuçlar, tezin sonuç bölümünde Özel'in elde etmiş olduğu sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

1.2 Tezde Yapılan Çalışmalar

Bu çalışmada ilk parçası katı, ikinci parçası ise esnek bir yapı olan iki eklemlili bir robot kolu sisteminin modellenmesi ve kontrolü ele alınmıştır.

Tezin 2. bölümünde sistemin matematiksel modellenmesi yapılmıştır. Esnek parça için Euler-Bernoulli modeli esas alınmış ve sistemin dinamik denklemleri Hamilton prensibi kullanılarak türetilmiştir. Sistemin dinamiği diferansiyel özdeğer problemi yaklaşımı kullanılarak sonsuz boyutlu bir modelle gösterilmiştir.

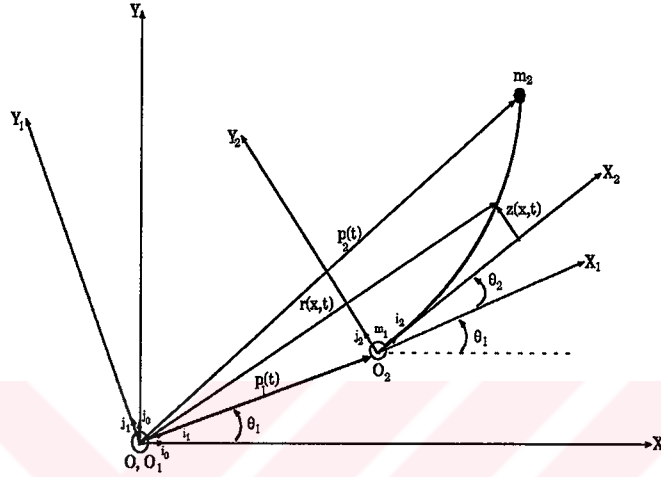
Genellikle robot kollarının eklem açılarının sabit bir referans sinyali veya bir yörüngeyi takip etmesi istenir. Bir robot kolunun eklem açıları için yörünge planlamasının nasıl yapılabileceği ve 4-3-4 yörüngesi polinom fonksiyonlarının katsayılarının hesaplanması 3. bölümde anlatılmıştır.

Tekil perturbasyon metodu ve tekil perturbasyon metodunun esnek robot kollarına nasıl uygulanabileceği 4. bölümde ele alınmıştır. Tekil perturbasyon metodu kullanılarak esnek robot kolunun tüm dinamiği yavaş ve hızlı alt sistem olmak üzere iki alt sisteme ayrılmış ve herbir alt sistemin dinamik denklemleri türetilmiştir.

Tezin 2. bölümünde matematiksel modellenmesi yapılan iki eklemlili katı- esnek robot kolunu kontrol edebilmek için PD kontrol ve iki zaman ölçekli kontrol yaklaşımları 5. bölümde ele alınmıştır.

Tezin 6. bölümünde ise önerilen kontrolörler altında sistemin benzetimi yapılarak elde edilen sonuçlar gösterilmiştir.

2. ROBOT KOLUNUN MODELLENMESİ



Şekil 2.1 İki eklemli esnek robot kolu sistemi

Yatay düzlemde Şekil 2.1'de gösterilen ilk parçası katı ve ikinci parçası esnek bir yapı olan iki eklemli bir robot kolu sistemi ele alınmıştır. L_i , i . parçanın uzunluğu; ρ_i , i . parçanın çizgisel kütle yoğunluğudur ($M_i = \rho_i L_i$, $i = 1, 2$). Katı parça birinci motorun rotoruna ve esnek parça ise ikinci motorun rotoruna bağlanmıştır. I_{h_1} , birinci motorun roturunun dönme eksenini etrafındaki eylemsizlik momenti ile ikinci motorun statorunun eylemsizlik momentinin toplamı ve I_{h_2} ise ikinci motorun roturunun dönme eksenini etrafındaki eylemsizlik momenti ile esnek parçanın uç noktasında yer alan kütle eylemsizlik momentinin toplamıdır. i . parça, yağlı sürtünme katsayısı β_i olan i . eklemeye uygulanan τ_i torku ile hareket ettirilmektedir ($i = 1, 2$). E , esnek parçanın Young esneklik modülü ve I_a ise yüzey atalet momentidir. Her iki parçanın düzgün kütle yoğunluğuna ve kesite sahip olduğu kabul edilmiştir. Katı parçanın sonundaki ikinci eklem kütle m_1 olarak alınmıştır. Esnek parçanın ucunda ise değeri bilinmeyen ancak belirli bir aralık içerisinde değiştiği varsayılan bir m_2 kütlesi vardır. m_2 kütlelerinin değerinin belirsizliğinden dolayı, I_{h_2} eylemsizlik momentinin değeri de belirsizdir. $z(x, t)$, esnek parçanın herhangi bir t anında ve x noktasındaki katı hal pozisyonundan olan dik sapmasını göstermektedir. Sistemin matematiksel modeli oluşturulurken aşağıdaki kabullenmeler yapılmıştır:

Kabullenme 2.1: Esnek parçanın katı hal pozisyonundan olan dik sapmaları parçanın boyuna oranla küçüktür. Bu kabullenmeden dolayı esnek parçanın hare-

ketini tanımlayan kısmi diferansiyel denklem sadece katı hal pozisyonundan olan dik sapmaların doğrusal terimlerini içermektedir.

Kabullenme 2.2: Esnek parçanın esnemesinden kaynaklanan dönme hareketi ihmal edilmiştir. Dolayısıyla esnek parçanın esnemesi sonucu oluşan dönme hareketinden kaynaklanan kinetik enerji ihmal edilmiştir.

Kabullenme 2.3: Sistemin sadece yatay düzlemde olan hareketleri ele alındığı için, yerçekimine karşı yapılan iş dikkate alınmamıştır. Dolayısıyla sistemin potansiyel enerjisinin sadece esnek parçanın deformasyonundan kaynaklandığı kabul edilmiştir.

θ_i , i . eklemin dönme açısı olsun. (i_1, j_1) ve (i_2, j_2) ortogonal birim vektörlerini (Bkz. Şekil 2.1) referans koordinat sisteminin birim vektörleri (i_0, j_0) cinsinden aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$i_1 = \cos\theta_1 i_0 + \sin\theta_1 j_0, \quad j_1 = -\sin\theta_1 i_0 + \cos\theta_1 j_0$$

$$i_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) i_0 + \sin(\theta_1 + \theta_2) j_0, \quad j_2 = -\sin(\theta_1 + \theta_2) i_0 + \cos(\theta_1 + \theta_2) j_0$$

$p_i(t)$, i . parçanın uç noktasını veren pozisyon vektörü ve $r(x, t)$, herhangi bir t anındaki esnek parça üzerindeki x noktasının pozisyon vektörü olsun. $p_i(t)$ ve $r(x, t)$ ile $\dot{p}_i(t)$ ve $\dot{r}(x, t)$ 'nin zamana göre türevleri:

$$p_1(t) = L_1 i_1,$$

$$p_2(t) = p_1 + L_2 i_2 + z(L_2, t) j_2,$$

$$r(x, t) = p_1 + x i_2 + z(x, t) j_2,$$

$$\dot{p}_1(t) = L_1 \dot{\theta}_1 j_1,$$

$$\dot{p}_2(t) = \dot{p}_1 + (L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + z_t(L_2, t)) j_2 - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) z(L_2, t) i_2,$$

$$\dot{r}(x, t) = \dot{p}_1 + (x(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + z_t(x, t)) j_2 - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) z(x, t) i_2,$$

Her iki eklemdaki motorların rotorlarının dönme eksenleri etrafındaki eylemsizliklerinden, ikinci eklemdaki motorun statorunun ve m_2 kütlelerinin eylemsizliğinden kaynaklanan toplam kinetik enerji T_h :

$$T_h = \frac{1}{2} I_{h_1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{h_2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \quad (2.1)$$

Katı parçanın doğrusal ve dönme hareketinden kaynaklanan kinetik enerjisi T_{b_1} :

$$T_{b_1} = \frac{1}{2} M_1 \dot{p}_{c_1}(t) \cdot \dot{p}_{c_1}(t) + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_1^2$$

$$T_{b_1} = \frac{1}{6} M_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (2.2)$$

Burada $p_{c_1}(t) = p_1(t)/2$, katı parçanın ağırlık merkezinin pozisyon vektörü ve $I_0 = \frac{1}{12} M_1 L_1^2$, katı parçanın ağırlık merkezine göre eylemsizlik momenti olarak tanımlanmıştır. Esnek parçanın esnemesinden ve katı hal pozisyonunun hareketinden kaynaklanan kinetik enerjisi T_{b_2} :

$$T_{b_2} = \int_0^{L_2} \frac{1}{2} \rho_2 \dot{r}(x, t) \cdot \dot{r}(x, t) dx \quad (2.3)$$

Burada kabullenme 2.2'den dolayı, esnek parçanın esnemesi sonucu oluşan dönmelerden kaynaklanan kinetik enerjisi ihmal edilmiştir. i . eklemin sonundaki m_i kütesinin yapmış olduğu doğrusal hareketten kaynaklanan kinetik enerjisi T_{m_i} :

$$T_{m_i} = \frac{1}{2} m_i \dot{p}_i(t) \cdot \dot{p}_i(t), \quad i = 1, 2 \quad (2.4)$$

Kabullenme 2.2'den dolayı m_2 kütesinin esnek parçanın esnemesinden dolayı kendi eksenini etrafındaki dönmesinden kaynaklanan kinetik enerjisi ihmal edilmiştir. Sistemin toplam kinetik enerjisi T ,

$$T = \frac{1}{2} I_{h_1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{h_2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{6} M_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \int_0^{L_2} \frac{1}{2} \rho_2 \dot{r}(x, t) \cdot \dot{r}(x, t) dx + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} m_i \dot{p}_i(t) \cdot \dot{p}_i(t) \quad (2.5)$$

şeklinde ifade edilmiştir.

Kabullenme 2.3'ten dolayı robot kolundaki parçaların ve kütlelerin yerçekiminden kaynaklanan potansiyel enerjileri ihmal edilmiştir. Dolayısıyla sistemin toplam potansiyel enerjisi sadece esnek parçanın esnemesinden kaynaklanmaktadır. Sistemin toplam potansiyel enerjisi V ,

$$V = \int_0^{L_2} \frac{1}{2} E I_{\alpha} z_{xx}^2(x, t) dx \quad (2.6)$$

şeklinde ifade edilmiştir.

Eklemlere dışarıdan uygulanan torklar ve eklemlerdeki yağlı sürtünmeden dolayı i . ekleminde yapılan görünen iş δW_i :

$$\delta W_i = (\tau_i - \beta_i \dot{\theta}_i) \delta \theta_i, \quad i = 1, 2$$

Dolayısıyla korunmayan kuvvetler tarafından yapılan toplam görünen iş δW ,

$$\delta W = \sum_{i=1}^2 (\tau_i - \beta_i \dot{\theta}_i) \delta \theta_i \quad (2.7)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Hamilton prensibi [18] herhangi bir t_1 ve $t_2 > t_1$ için,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W) dt = 0 \quad (2.8)$$

olmasını gerektirir. Burada $\delta(\cdot)$, (\cdot) 'nin değişimini göstermektedir. Denklem (2.5), (2.6) ve (2.7) denklem (2.8)'de kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^{L_2} \left\{ (\rho_2 + m_2 \delta_0(x - L_2)) \left[(L_1^2 \dot{\theta}_1 + L_1 \cos(\theta_2))(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)x + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)x^2 \right. \right. \right. \\ & - L_1 \sin(\theta_2)(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)z(x, t) + xz_t(x, t) + L_1 \cos(\theta_2)z_t(x, t) \left. \right\} \delta \dot{\theta}_1 + (L_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2)x \\ & + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)x^2 - L_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2)z(x, t) + xz_t(x, t)) \delta \dot{\theta}_2 + (L_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)x \\ & + z_t(x, t)) \delta z_t(x, t) - (L_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)x + L_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)z(x, t) \\ & + L_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2)z_t(x, t)) \delta \theta_2 - L_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\delta z(x, t) \left. \right\} - EI_\alpha z_{xxx}(x, t)\delta z_{xxx} \left. \right\} dx \\ & + \left((I_{h_1} + I_{h_2})\dot{\theta}_1 + I_{h_2}\dot{\theta}_2 + \frac{1}{3}M_1L_1^2\dot{\theta}_1 + m_1L_1^2\dot{\theta}_1 \right) \delta \dot{\theta}_1 + I_{h_2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\delta \dot{\theta}_2 \\ & + (\tau_1 - \beta_1\dot{\theta}_1)\delta \theta_1 + (\tau_2 - \beta_2\dot{\theta}_2)\delta \theta_2 \left. \right] dt = 0 \quad (2.9) \end{aligned}$$

Burada δ_0 , Dirac delta operatörüdür. Bu operatör $f(x)$, $x \in [0, L_2]$ için sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $\int_0^{L_2} f(x)\delta_0(x - c)dx = \begin{cases} 0, & c \notin [0, L_2] \\ f(c), & c \in [0, L_2] \end{cases}$ şeklinde tanımlanmıştır. Denklem (2.9) ile verilen ifadedeki kısmi integraller alınırrsa,

$$\begin{aligned} & - \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\int_0^{L_2} (\rho_2 + m_2 \delta_0(x - L_2)) \frac{\partial}{\partial t} [L_1^2 \dot{\theta}_1 + L_1 \cos(\theta_2)(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)x + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)x^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - L_1 \sin(\theta_2)(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)z(x, t) + xz_t(x, t) + L_1 \cos(\theta_2)z_t(x, t) \right] dx \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial t} \left((I_{h_1} + I_{h_2})\dot{\theta}_1 + I_{h_2}\dot{\theta}_2 + \frac{1}{3}M_1L_1^2\dot{\theta}_1 + m_1L_1^2\dot{\theta}_1 \right) - (\tau_1 - \beta_1\dot{\theta}_1) \right) \delta \theta_1 \\ & + \left(\int_0^{L_2} (\rho_2 + m_2 \delta_0(x - L_2)) \left[\frac{\partial}{\partial t} (L_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2)x + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)x^2 - L_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2)z(x, t) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + xz_t(x, t)) + L_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)x + L_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)z(x, t) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + L_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2)z_t(x, t) \right] dx + \frac{\partial}{\partial t} (I_{h_2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)) - (\tau_2 - \beta_2\dot{\theta}_2) \right) \delta \theta_2 \\ & + \left(\int_0^{L_2} [\rho_2 \frac{\partial}{\partial t} (L_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)x + z_t(x, t)) + L_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial x^2} EI_\alpha z_{xxx}] dx \right) \delta z(x, t) + \left(m_2 \frac{\partial}{\partial t} (L_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)L_2 + z_t(L_2, t)) \right. \\ & \left. + L_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right) \delta z(L_2, t) - EI_\alpha z_{xxx}(L_2, t)\delta z(L_2, t) + EI_\alpha z_{xxx}(0, t)\delta z(0, t) \\ & \quad \left. + EI_\alpha z_{xx}(L_2, t)\delta z_x(L_2, t) - EI_\alpha z_{xx}(0, t)\delta z_x(0, t) \right] dt = 0 \quad (2.10) \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. θ_1 , θ_2 , $z(x, t)$, $z(L_2, t)$ ve $z_x(L_2, t)$ 'nin değişimleri birbirinden bağımsız ve serbesttir. Esnek parçanın ikinci ekleme tutturulduğu kabul edildiğinden, $z(0, t)$ ve $z_x(0, t)$ 'nin değişimleri sıfırdır. Dolayısıyla denklem (2.10)'da verilen ifadenin sol tarafının sıfır olabilmesi için $\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$, $\delta z(x, t)$, $\delta z(L_2, t)$ ve $\delta z_x(L_2, t)$ 'ye çarpan olarak gelen terimler sıfır olmalıdır.

$\delta z(x, t)$ 'nin çarpanının sıfır olabilmesi için,

$$\begin{aligned} & \rho_2 \left(\frac{\partial}{\partial t} (L_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)x + z_t(x, t)) \right. \\ & \left. + L_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} EI_a z_{xxx}(x, t) = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

olmalıdır. Denklem (2.11)'i kullanarak esnek parçanın dinamiğini tanımlayan kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$z_{tt}(x, t) + \frac{EI_a}{\rho_2} z_{xxxx}(x, t) = -x(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - L_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) - L_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2) \quad (2.12)$$

Esnek parça ikinci ekleme tutturulmuştur (fixed). İkinci eklemin fiziksel yapısı göz önüne alınırsa, kısmi diferansiyel denklemin ilk iki sınır koşulunu aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$z(0, t) = z_x(0, t) = 0 \quad (2.13)$$

Denklem (2.13) ile verilen sınır koşulu gereğince, tutturulmuş ekleme esneme ve esneme hareketinden kaynaklanan dönme sıfırdır. Öte yandan, esnek parçanın diğer ucu serbesttir. Dolayısıyla yukarıda belirtildiği gibi $z_x(L_2, t)$ 'nin değişimi serbesttir ve $\delta z_x(L_2, t)$ 'nin çarpanının sıfır olması gerekir. Bunun için,

$$EI_a z_{xxx}(L_2, t) = 0 \quad (2.14a)$$

olmalıdır. E ve I_a pozitif sabit parametre değerleri olduğundan, denklem (2.14a) nın sağlanabilmesi için,

$$z_{xxx}(L_2, t) = 0 \quad (2.14b)$$

olmalıdır. Denklem (2.14b), esnek parçanın üçüncü sınır koşuludur. Benzer şekilde $z(L_2, t)$ 'nin değişimi de serbesttir ve $\delta z(L_2, t)$ 'nin çarpanının sıfır olması gerekir. Bunun için,

$$\begin{aligned} & -EI_a z_{xxx}(L_2, t) + m_2 \left(\frac{\partial}{\partial t} (L_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)L_2 + z_t(L_2, t)) \right. \\ & \left. + L_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.15a)$$

olmalıdır. Denklem (2.12)'den z_{tt} çekilerek $x = L_2$ için denklem (2.15a)'da yerine yazılırsa, kısmi diferansiyel denklemin dördüncü sınır koşulu aşağıdaki gibi bulunur.

$$z_{xxx}(L_2, t) = -\frac{m_2}{\rho_2} z_{xxxx}(L_2, t) \quad (2.15b)$$

$\delta\theta_1$ 'in çarpanının sıfır olabilmesi için,

$$\begin{aligned} & \int_0^{L_2} (\rho_2 + m_2\delta_0(x - L_2)) \frac{\partial}{\partial t} [L_1^2\dot{\theta}_1 + L_1\cos(\theta_2)(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)x + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)x^2 \\ & - L_1\sin(\theta_2)(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)z(x, t) + xz_t(x, t) + L_1\cos(\theta_2)z_t(x, t)] dx + \frac{\partial}{\partial t} ((I_{h_1} + I_{h_2})\dot{\theta}_1 \\ & + I_{h_2}\dot{\theta}_2 + \frac{1}{3}M_1L_1^2\dot{\theta}_1 + m_1L_1^2\dot{\theta}_1) - (\tau_1 - \beta_1\dot{\theta}_1) = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

olmalıdır. Denklem (2.16)'daki türev ve integraller alındıktan sonra, birinci eklem açısının dinamiği aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} & [I_{h_1} + I_{h_2} + \frac{1}{3}M_1L_1^2 + m_1L_1^2 + M_2(L_1^2 + \frac{L_2^2}{3} + L_1L_2\cos(\theta_2)) + m_2(L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2\cos(\theta_2))] \\ & - 2L_1\sin(\theta_2)(\rho_2 \int_0^{L_2} z(x, t) dx + m_2z(L_2, t)) \ddot{\theta}_1 + [I_{h_2} + \frac{1}{3}M_2L_2^2 + m_2L_2^2 \\ & + (\frac{M_2}{2} + m_2)L_1L_2\cos(\theta_2) - L_1\sin(\theta_2)(\rho_2 \int_0^{L_2} z(x, t) dx + m_2z(L_2, t))] \ddot{\theta}_2 \\ & + L_1\cos(\theta_2)(\rho_2 \int_0^{L_2} z_{tt}(x, t) dx + m_2z_{tt}(L_2, t)) + (\rho_2 \int_0^{L_2} xz_{tt}(x, t) dx + m_2L_2z_{tt}(L_2, t)) \\ & + \beta_1\dot{\theta}_1 - (M_2 + 2m_2)L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_2) - (\frac{M_2}{2} + m_2)L_1L_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2) \\ & - L_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2)(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)(\rho_2 \int_0^{L_2} z(x, t) dx + m_2z(L_2, t)) \\ & - 2L_1\sin(\theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)(\rho_2 \int_0^{L_2} z_t(x, t) dx + m_2z_t(L_2, t)) = \tau_1 \end{aligned} \quad (2.17)$$

$\delta\theta_2$ 'nin çarpanının sıfır olabilmesi için,

$$\begin{aligned} & \int_0^{L_2} (\rho_2 + m_2\delta_0(x - L_2)) [\frac{\partial}{\partial t} (L_1\dot{\theta}_1\cos(\theta_2)x + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)x^2 - L_1\dot{\theta}_1\sin(\theta_2)z(x, t) \\ & + xz_t(x, t)) + L_1\dot{\theta}_1\sin(\theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)x + L_1\dot{\theta}_1\cos(\theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)z(x, t) \\ & + L_1\dot{\theta}_1\sin(\theta_2)z_t(x, t)] dx + \frac{d}{dt} (I_{h_2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)) - (\tau_2 - \beta_2\dot{\theta}_2) = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

olmalıdır. Denklem (2.18)'deki türev ve integraller alındıktan sonra, ikinci eklem açısının dinamiği aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
& [I_{h_2} + \frac{1}{3}M_2L_2^2 + m_2L_2^2 + (\frac{M_2}{2} + m_2)L_1L_2\cos(\theta_2) - L_1\sin(\theta_2)(\rho_2 \int_0^{L_2} z(x,t)dx \\
& + m_2z(L_2,t))] \ddot{\theta}_1 + [I_{h_2} + \frac{1}{3}M_2L_2^2 + m_2L_2^2] \ddot{\theta}_2 + \rho_2 \int_0^{L_2} xz_{tt}(x,t)dx + m_2L_2z_{tt}(L_2,t) + \beta_2\dot{\theta}_2 \\
& (\frac{M_2}{2} + m_2)L_1L_2\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2) + L_1\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2)(\rho_2 \int_0^{L_2} z(x,t)dx + m_2z(L_2,t)) = \tau_2 \quad (2.19)
\end{aligned}$$

2.1 Özdeğer Probleminin Çözümü

Esnek bir parçanın tepkisini bulabilmek için esnek parçanın dinamiğini tanımlayan kısmi diferansiyel denklemi, diferansiyel özdeğer problemi yaklaşımını kullanarak sonsuz boyutlu adi bir diferansiyel denklemle göstereceğiz. Bu yaklaşım esas alınarak, (2.12)'deki kısmi diferansiyel denklemin çözümünün $(0 \leq x \leq L_2)$ aralığında x 'e ve t 'ye bağlı fonksiyonların çarpımlarının sonsuz toplamları olarak bulunabileceğini kabul edelim.

$$z(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x)\eta_i(t) \quad (2.20)$$

burada $\phi_i(x)$, esnek kolun mod şekilleri; $\eta_i(t)$, deformasyon koordinatlarıdır [18]. \mathcal{L} operatörünün domeynini ve \mathcal{L} operatörünü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathcal{L}) &= \{z : z_{xxxx}(x,t) \in \mathcal{H}, z(0,t) = z_x(0,t) = z_{xx}(L_2,t) = 0, \\
& z_{xxx}(L_2,t) + \frac{m_2}{\rho_2}z_{xxxx}(L_2,t) = 0, \forall t \in \mathcal{R}\}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}z(x,t) = \frac{EI_\alpha}{\rho_2}z_{xxxx}(x,t)$$

\mathcal{D} , \mathcal{L} operatörünün domeynini; \mathcal{H} , $(0, L_2)$ aralığında karesinin integrali alınabilir fonksiyonların oluşturduğu uzayı; \mathcal{R} , reel sayılar kümesini göstermektedir. λ_i 'ler \mathcal{L} operatörünün özdeğerleri ve $\phi_i(x)$ 'ler bu özdeğerlere karşılık gelen \mathcal{L} operatörünün özfonksiyonları ise, diferansiyel özdeğer problemi,

$$\mathcal{L}\phi_i(x) = \lambda_i\phi_i(x) \quad (2.21)$$

eşitliğini sağlayan λ_i özdeğerlerinin ve bu özdeğerlere karşılık gelen sıfırdan farklı $\phi_i(x)$ özfonksiyonlarının bulunmasıdır. Diferansiyel özdeğer problemini $k_i^4 = \lambda_i \frac{\rho_2}{EI_\alpha}$ olmak üzere,

$$\phi_i''''(x) = k_i^4\phi_i(x) \quad (2.22)$$

dördüncü dereceden adi bir diferansiyel denklem şeklinde yazmak mümkündür. Diferansiyel özdeğer problemi yaklaşımının bir sonucu olarak, (2.22)'deki 4. dereceden adi diferansiyel denklemin çözümü olan $\phi_i(x)$ ' ler, denklem (2.13) ve (2.14b)'de verilen esnek parçanın sınır koşullarını sağlayacak şekilde aşağıdaki gibi seçilmiştir.

$$\phi_i(x) = \cosh(k_i x) - \cos(k_i x) - h_i[\sinh(k_i x) - \sin(k_i x)] \quad (2.23)$$

$h_i \triangleq \frac{\cos(k_i L_2) + \cosh(k_i L_2)}{\sin(k_i L_2) + \sinh(k_i L_2)}$. Denklem (2.20), esnek parçanın (2.15b)'de verilen dördüncü sınır koşulunda kullanıldığı zaman elde edilen eşitliğin sağlanabilmesi için,

$$\phi_i'''(x) = -\frac{m_2}{\rho_2} \phi_i''''(x) \quad (2.24)$$

olmalıdır. Denklem (2.23)'ten $\phi_i(x)$ 'in x 'e göre üçüncü ve dördüncü türevleri bulunup denklem (2.24)'te kullanılarak esnek parçanın frekans denklemi,

$$1 + \cos(k_i L_2) \cosh(k_i L_2) + \frac{m_2}{\rho_2} k_i [\sinh(k_i L_2) \cos(k_i L_2) - \cosh(k_i L_2) \sin(k_i L_2)] = 0 \quad (2.25)$$

şeklinde elde edilmiştir. k_i 'ler denklem (2.25)'te verilen frekans denkleminin çözümleridir. Esnek parçanın modları ise, $\lambda_i \triangleq \frac{EI_a}{\rho_2} k_i^4$ şeklinde tanımlanmıştır. \mathcal{H} uzayı üzerinde aşağıdaki gibi bir iç çarpım tanımlayalım.

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^{L_2} f(x)g(x)dx \quad (2.26)$$

Denklem (2.20)'yi esnek kolun dinamiğini tanımlayan denklem (2.12)'de yerine yazıp, belirli bir j için $\phi_j(x)$ fonksiyonu ile iç çarpımını alacak olursak,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_0^{L_2} \phi_j(x) \phi_i(x) dx \right) \ddot{\eta}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_0^{L_2} \phi_j(x) \phi_i(x) dx \right) \lambda_i \eta_i(t) \\ & = -(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \left(\int_0^{L_2} x \phi_j(x) dx \right) - (L_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) + L_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2)) \left(\int_0^{L_2} \phi_j(x) dx \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

ifadesini elde ederiz. Denklem (2.27) vektör-matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$a \ddot{\eta}(t) + a \Lambda \eta(t) + (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \gamma^a + (L_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) + L_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2)) \gamma^b = 0 \quad (2.28)$$

Burada,

$$\eta \triangleq (\eta_1, \eta_2, \dots)^T, \quad \Lambda \triangleq \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$$

$$a \triangleq \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & & \\ \vdots & & \end{bmatrix}, \quad a_{ji} = \int_0^{L_2} \phi_j(x)\phi_i(x)dx$$

$$a_{ji} = \begin{cases} L_2 + \frac{h_i^2-1}{k_i} \cos(k_i L_2) \sinh(k_i L_2) - \frac{h_i^2+1}{k_i} \sin(k_i L_2) \cosh(k_i L_2) \\ + \frac{h_i^2+1}{4k_i} \sinh(2k_i L_2) - \frac{h_i^2-1}{4k_i} \sin(2k_i L_2) + \frac{2h_i}{k_i} \sin(k_i L_2) \sinh(2k_i L_2) \\ - \frac{h_i}{2k_i} \cosh(2k_i L_2) + \frac{h_i}{2k_i} \cos(2k_i L_2), & i = j \\ -\frac{m_2}{\rho_2} \phi_j(L_2)\phi_i(L_2), & i \neq j \end{cases}$$

$$\gamma^a \triangleq (\gamma_1^a, \gamma_2^a, \dots)^T, \quad \gamma_j^a = \int_0^{L_2} x \phi_j(x) dx$$

$$\gamma_j^a = \frac{2}{k_j^2} - \frac{2k_j L_2 (1 + \cosh(k_j L_2) \cos(k_j L_2))}{k_j^2 (\sinh(k_j L_2) + \sin(k_j L_2))}$$

$$\gamma^b \triangleq (\gamma_1^b, \gamma_2^b, \dots)^T, \quad \gamma_j^b = \int_0^{L_2} \phi_j(x) dx$$

$$\gamma_j^b = \frac{2(\cosh(k_j L_2) + \cos(k_j L_2)) - \cosh(k_j L_2) \cos(k_j L_2) - 1}{k_j (\sinh(k_j L_2) + \sin(k_j L_2))}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Diferansiyel özdeğer probleminin çözümünün sonucunda elde edilen esnek parçanın dinamiğini tanımlayan (2.28) denklemi, sonsuz boyutlu zamana göre ikinci dereceden doğrusal olmayan adi bir diferansiyel denklemdir. Λ matrisi sabit, ancak m_2 değerinin belirsizliğinden dolayı belirsiz sonsuz boyutlu bir matris; γ^a ve γ^b belirsiz sonsuz boyutlu vektörler ve I_{h_2} ise belirsiz bir parametre değeridir.

Sistemin katı hal dinamiğini tanımlayan (2.17) ve (2.19) adi diferansiyel denklemlerinde (2.20) denklemi yerine yazılırsa, sistemin katı hal dinamiğini vektör-matris formunda aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned} & [I_{h_1} + I_{h_2} + \frac{1}{3} M_1 L_1^2 + m_1 L_1^2 + M_2 (L_1^2 + \frac{L_2^2}{3} + L_1 L_2 \cos(\theta_2)) + m_2 (L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos(\theta_2))] \\ & - 2L_1 \sin(\theta_2) \alpha^b \eta] \ddot{\theta}_1 + [I_{h_2} + \frac{1}{3} M_2 L_2^2 + m_2 L_2^2 + (\frac{M_2}{2} + m_2) L_1 L_2 \cos(\theta_2) - L_1 \sin(\theta_2) \alpha^b \eta] \ddot{\theta}_2 \\ & + (\alpha^a + L_1 \cos(\theta_2) \alpha^b) \ddot{\eta} + \beta_1 \dot{\theta}_1 \\ & - (M_2 + 2m_2) L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) - (\frac{M_2}{2} + m_2) L_1 L_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2) \\ & - L_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \alpha^b \eta - 2L_1 \sin(\theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \alpha^b \dot{\eta} = \tau_1 \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned}
& [I_{h_2} + \frac{1}{3}M_2L_2^2 + m_2L_2^2 + (\frac{M_2}{2} + m_2)L_1L_2\cos(\theta_2) - L_1\sin(\theta_2)\alpha^b\eta]\ddot{\theta}_1 \\
& + [I_{h_2} + \frac{1}{3}M_2L_2^2 + m_2L_2^2]\ddot{\theta}_2 + \alpha^a\ddot{\eta} + \beta_2\dot{\theta}_2 \\
& + (\frac{M_2}{2} + m_2)L_1L_2\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2) + L_1\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2)\alpha^b\eta = \tau_2
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Burada,

$$\begin{aligned}
\alpha^a & \triangleq (\alpha_1^a, \alpha_2^a, \dots), \quad \alpha_i^a = \rho_2\gamma_j^a + m_2L_2\phi_i(L_2) \\
\alpha^b & \triangleq (\alpha_1^b, \alpha_2^b, \dots), \quad \alpha_i^b = \rho_2\gamma_j^b + m_2\phi_i(L_2)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Denklem (2.28), (2.29) ve (2.30)'u aşağıdaki formda yazabiliriz.

$$M(\theta, \eta) \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\theta, \dot{\theta}) \\ f_2(\theta, \dot{\theta}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(\theta, \dot{\theta}, \eta, \dot{\eta}) \\ 0 \end{bmatrix} + EI_a \begin{bmatrix} 0 \\ K\eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

Burada,

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}, \quad \theta = (\theta_1, \theta_2)^T, \quad u = (\tau_1, \tau_2)^T$$

$$\begin{aligned}
m_{11} & = I_{h_1} + I_{h_2} + \frac{1}{3}M_1L_1^2 + m_1L_1^2 + M_2(L_1^2 + \frac{L_2^2}{3} + L_1L_2\cos(\theta_2)) + m_2(L_1^2 + L_2^2 \\
& + 2L_1L_2\cos(\theta_2)) - 2L_1\sin(\theta_2)\alpha^b\eta
\end{aligned}$$

$$m_{12} = m_{21} = I_{h_2} + \frac{1}{3}M_2L_2^2 + m_2L_2^2 + (\frac{M_2}{2} + m_2)L_1L_2\cos(\theta_2) - L_1\sin(\theta_2)\alpha^b\eta$$

$$m_{13} = \alpha^a + L_1\cos(\theta_2)\alpha^b$$

$$m_{22} = I_{h_2} + \frac{1}{3}M_2L_2^2 + m_2L_2^2, \quad m_{23} = \alpha^a$$

$$m_{31} = \gamma^a + L_1\cos(\theta_2)\gamma^b, \quad m_{32} = \gamma^a, \quad m_{33} = a$$

$$f_1 = \begin{bmatrix} -\beta_1\dot{\theta}_1 + (\frac{M_2}{2} + m_2)L_1L_2(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2)\sin(\theta_2) \\ -\beta_2\dot{\theta}_2 - (\frac{M_2}{2} + m_2)L_1L_2\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2) \end{bmatrix}$$

$$f_2 = -L_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2)\gamma^b$$

$$g_1 = \begin{bmatrix} L_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2)(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\alpha^b\eta + 2L_1\sin(\theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\alpha^b\dot{\eta} \\ -L_1\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2)\alpha^b\eta \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{-1}{EI_a}a\Lambda$$

şeklinde tanımlanmıştır.

3. YÖRÜNGE PLANLAMA

Bölüm 2'de iki parçalı esnek bir robot kolunun modellenmesi yapılmıştır. Esnek bir robot kolunun kontrolü probleminde, robot kolunun eklem açıları sabit bir referans sinyali veya bir yörüngeyi takip ederken esnek kolun uç sapmasının da sönümlenmesi istenir. Robot kolunun eklem açılarının önceden belirlenmiş olan bir yörüngeyi takip etmesi, sabit bir referans sinyali takip etmesine göre bazı avantajlar sağlamaktadır: (1) Eklemlerin pozisyonunun, hızının ve ivmesinin planlanması, robot kolu parçalarının hareketlerinin daha iyi kontrol edilmesine imkan tanımaktadır [19]. (2) Yörünge planlaması esnasında robot kolu parçalarının, motorlarının ve diğer ekipmanlarının fiziksel özellikleri göz önünde bulundurularak, pratikte ortaya çıkabilecek bazı fiziksel zorlamalar engellenebilir [19].

Bu bölümde, bir robot kolunun eklem açılarının takip etmesi istenilen yörüngeyi, polinom fonksiyonları kullanarak nasıl elde edebileceğimiz incelenmiştir. İki yaygın yaklaşım robot kollarının yörünge planlamasında kullanılmaktadır [19]:

- i. Eklem-değişkeni uzayında yörünge planlaması
- ii. Kartezyen uzayda yörünge planlaması

İlk yaklaşımda, robot kolunun yapması istenilen hareketi tanımlayabilmek için tüm eklem değişkenleri ve bu değişkenlerin birinci ve ikinci türevleri planlanmalıdır. Bunu yapabilmek için, robot kolunun izleyeceği yörünge boyunca çeşitli kontrol noktaları seçildikten sonra bu noktalardaki pozisyon, hız ve ivme üzerindeki sınırlamalar eklem kordinatlarında belirlenir. Daha sonra ise kontrol noktalarında verilen sınırlamaları sağlayan bir polinom fonksiyonla robot kolunun eklem açılarının izleyeceği yörünge eklem kordinatlarında ifade edilir. Eklem değişkeni uzayında yörünge planlaması yapmanın üç avantajı vardır: (1) Yörünge, hareket esnasında kontrol edilen değişkenlerin terimleri cinsinden direk olarak planlanabilir. (2) Yörünge planlaması gerçek zamana yakın olarak yapılabilir. (3) Eklem yörüngelerini planlamak kolaydır. Eklem değişkeni uzayında yörünge planlaması yapmanın bir dezavantajı: Yörünge planlaması esnasında robot kolunun uç noktası üzerine herhangi bir sınırlama getirilmediği için, robot kolunun uç noktası çalışma bölgesinin dışına çıkabilir.

İkinci yaklaşımda ise, robot kolunun yapması istenilen hareketi tanımlayabilmek için robot kolunun uç noktasının pozisyonu, hızı ve ivmesi planlandıktan

sonra buna karşılık gelen eklem pozisyonları, hızları ve ivmeleri türetilir. Bunu yapabilmek için, robot kolunun uç noktasının izleyeceği yörünge üzerinde çeşitli kontrol noktaları veya interpolasyon noktaları seçildikten sonra bu noktalardaki sınırlamalar kartezyen kordinatlarda belirlenir. Daha sonra ise bazı kriterler çerçevesinde seçilen noktalar uygun polinom fonksiyonlarla birleştirilir. Kriterlerin seçimi ise, kartezyen uzayda veya eklem değişkeni uzayında belirli bazı yöntemler kullanılarak yapılmaktadır.

3.1 Eklem Değişkeni Uzayında Yörünge Planlama

Eklem değişkeni uzayında eklem yörüngesini polinom fonksiyonlar kullanarak türetebiliriz. Eklem yörüngesinin polinom fonksiyonlarla ifade edilmesi ise bazı avantajlar sağlamaktadır [19]: (1) İzlenen yörünge üzerindeki noktalar kolaylıkla hesaplanabilir. (2) Ara noktalar belirlenerek parçaların yörünge hareketleri daha iyi kontrol edilebilir. (3) Eklem pozisyonunun, hızının ve ivmesinin sürekli olması sağlanarak düzgün bir eklem yörüngesi planlanabilir. (4) Gereksiz hareketler azaltılabilir.

İ. eklem yörüngesinin başlangıç ve son pozisyonundaki sınır koşullarını (eklem pozisyonu, hızı ve ivmesi) sağlayabilmek için beşinci dereceden bir polinom fonksiyon kullanabiliriz. Ancak genellikle izlenecek olan yörünge için iki tane de ara kontrol noktası kullanılmaktadır. Başlangıç pozisyonundan ayrılma için başlangıç pozisyonuna yakın bir nokta ve son pozisyona varış içinse son pozisyona yakın bir nokta kullanılarak robot kolunun parçalarının hareketleri daha iyi kontrol edilebilir. İki ara pozisyon içeren böyle bir yörünge hareketini 7. dereceden bir polinom fonksiyonla aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$q_i(t) = a_7t^7 + a_6t^6 + a_5t^5 + a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$$

Polinom katsayıları a_j 'leri sınır koşullarını ve süreklilik şartlarını kullanarak bulabiliriz. Ancak bu şekilde yüksek dereceden polinomlarının kullanılması eklemlerin gereksiz hareketler yapmasına neden olabilmektedir. Alternatif bir yaklaşım ise eklem yörüngesini bölümlere ayırdıktan sonra, her bir yörünge bölümü için düşük dereceli polinomlar kullanarak izlenecek olan eklem yörüngesini belirlemektir. En yaygın kullanılan metodlar ise: 4-3-4 yörüngesi, 3-5-3 yörüngesi ve 5-küçük yörünge metodlarıdır.

3.1.1 4-3-4 yörüngesinin hesaplanması

N eklemli bir robot kolu için 4-3-4 yörünge planlaması yaparken, robot kolunun herbir eklemının izleyeceği yörüngeyi üç yörünge bölümüne ayırmaktayız [19]: Birinci bölüm başlangıç pozisyonundan ayrılma pozisyonuna kadar olan yörüngeyi belirleyen dördüncü dereceden bir polinomdur. İkinci bölüm ayrılma pozisyonundan yaklaşma pozisyonuna kadar olan yörüngeyi belirleyen üçüncü dereceden bir polinomdur. Üçüncü bölüm yaklaşma pozisyonundan son pozisyona kadar olan yörüngeyi belirleyen dördüncü dereceden bir polinomdur.

Yukarıda belirtildiği gibi 4-3-4 yörünge planlaması yaparken, robot kolunun herbir eklemının izleyeceği yörüngeyi, üç yörünge bölümüne ayırmaktayız. Robot kolunun yörünge planlaması yapılırken herbir eklem için 3 tane olmak üzere toplam $N \times 3$ tane polinom fonksiyon belirlememiz gerekmektedir. Polinom fonksiyon katsayıları herbir yörünge bölümü için belirlenmiş olan sınır koşulları kullanılarak hesaplanmaktadır. Gerçek zaman değişkeni yerine normalize edilmiş bir zaman değişkeni $t \in [0, 1]$ kullanmak, bu hesaplamaları oldukça kolaylaştırmaktadır [19]. $t = 0$, tüm yörünge bölümleri için başlangıç zamanını ve $t = 1$ ise tüm yörünge bölümleri için son zamanı göstermektedir ve

t : normalize edilmiş zaman değişkeni, $t \in [0, 1]$

τ : saniye cinsinden gerçek zaman

τ_i : i . yörünge bölümünün sonundaki gerçek zaman

$t_i = \tau_i - \tau_{i-1}$: i . yörünge bölümünü katetmek için gereken zaman

$t = \frac{\tau - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}}$; $\tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$; $t \in [0, 1]$

şeklinde tanımlanmıştır. Eklem yörüngesini polinom fonksiyon dizileri $h_i(t)$ 'ler oluşturmaktadır. Herbir yörünge bölümü için normalize edilmiş zaman değişkeni t cinsinden polinom fonksiyonları aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$h_1(t) = a_{14}t^4 + a_{13}t^3 + a_{12}t^2 + a_{11}t + a_{10}, \quad (1. \text{ bölüm})$$

$$h_2(t) = a_{23}t^3 + a_{22}t^2 + a_{21}t + a_{20}, \quad (2. \text{ bölüm})$$

$$h_3(t) = a_{34}t^4 + a_{33}t^3 + a_{32}t^2 + a_{31}t + a_{30}, \quad (3. \text{ bölüm})$$

Polinom fonksiyonların gerçek zaman değişkeni τ 'a göre birinci ve ikinci türevleri:

$$v_i(t) = \frac{dh_i(t)}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dh_i(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_i - \tau_{i-1}} \frac{dh_i(t)}{dt} \quad (3.1a)$$

$$= \frac{1}{t_i} \dot{h}_i(t), \quad i = 1, 2, 3$$

$$a_i(t) = \frac{d^2 h_i(t)}{d\tau^2} = \frac{1}{(\tau_i - \tau_{i-1})^2} \frac{d^2 h_i(t)}{dt^2}$$

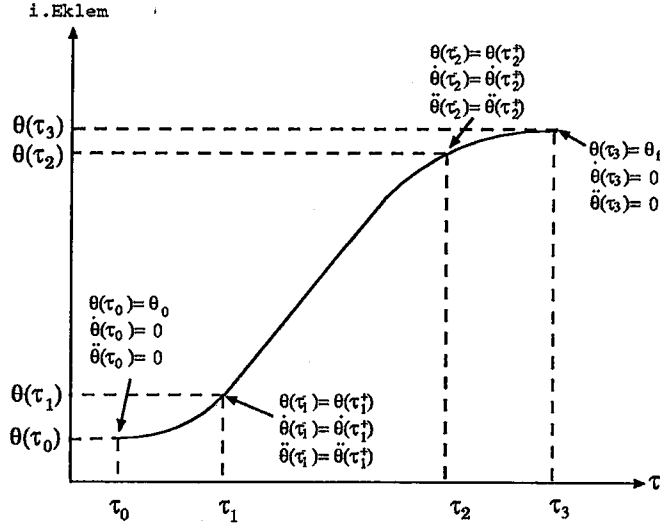
$$= \frac{1}{t_i^2} \ddot{h}_i(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.1b)$$

Yukarıda verilen eklem yörünge bölümü polinomları ise aşağıdaki sınır koşullarını sağlamalıdır. (Bkz. Şekil 3.1)

1. $\theta_0 = \theta(\tau_0)$, başlangıç pozisyonu
2. v_0 , başlangıç hızının büyüklüğü (normalde sıfırdır)
3. a_0 , başlangıç ivmesinin büyüklüğü (normalde sıfırdır)
4. $\theta_1 = \theta(\tau_1)$, ayrılma pozisyonu
5. $\theta(\tau_1^-) = \theta(\tau_1^+)$, τ_1 anında pozisyondaki süreklilik
6. $v(\tau_1^-) = v(\tau_1^+)$, τ_1 anında hızdaki süreklilik
7. $a(\tau_1^-) = a(\tau_1^+)$, τ_1 anında ivmedeki süreklilik
8. $\theta_2 = \theta(\tau_2)$, yaklaşma pozisyonu
9. $\theta(\tau_2^-) = \theta(\tau_2^+)$, τ_2 anında pozisyondaki süreklilik
10. $v(\tau_2^-) = v(\tau_2^+)$, τ_2 anında hızdaki süreklilik
11. $a(\tau_2^-) = a(\tau_2^+)$, τ_2 anında ivmedeki süreklilik
12. $\theta_f = \theta(\tau_3)$, son pozisyon
13. v_f , son hızın büyüklüğü (normalde sıfırdır)
14. a_f , son ivmenin büyüklüğü (normalde sıfırdır)

Birinci yörünge bölümünü dördüncü dereceden bir polinom fonksiyon ile göstermekteyiz.

$$h_1(t) = a_{14}t^4 + a_{13}t^3 + a_{12}t^2 + a_{11}t + a_{10}, \quad t \in [0, 1] \quad (3.2)$$



Şekil 3.1 4-3-4 eklem yörüngesi için sınır koşulları

Birinci yörünge bölümü polinomunun zamana göre birinci ve ikinci dereceden türevlerini denklem (3.1)'i kullanarak bulabiliriz.

$$v_1(t) = \frac{\dot{h}_1(t)}{t_1} = \frac{4a_{14}t^3 + 3a_{13}t^2 + 2a_{12}t + a_{11}}{t_1}$$

$$a_0(t) = \frac{\ddot{h}_1(t)}{t_1^2} = \frac{12a_{14}t^2 + 6a_{13}t + 2a_{12}}{t_1^2}$$

i. Bu yörünge bölümünün başlangıç pozisyonu $t = 0$ için:

$$h_1(0) = a_{10} = \theta_0$$

$$v_0 = \frac{\dot{h}_1(0)}{t_1} = \frac{a_{11}}{t_1}, \quad a_{11} = v_0 t_1$$

$$a_0 = \frac{\ddot{h}_1(0)}{t_1^2} = \frac{2a_{12}}{t_1^2}, \quad a_{12} = \frac{a_0 t_1^2}{2}$$

Dolayısıyla denklem (3.2) aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$h_1(t) = a_{14}t^4 + a_{13}t^3 + \left(\frac{a_0 t_1^2}{2}\right)t^2 + (v_0 t_1)t + \theta_0, \quad t \in [0, 1] \quad (3.3)$$

ii. Bu yörünge bölümünün son pozisyonu $t = 1$ için: $t = 1$ anındaki eklem pozisyonu, hızı ve ivmesi bir sonraki yörünge bölümünün başlangıç noktasındaki eklem pozisyonu, hızı ve ivmesi ile sürekli olmalıdır. Bu noktadaki pozisyon, hız ve ivme:

$$h_1(1) = a_{14} + a_{13} + \left(\frac{a_0 t_1^2}{2}\right) + (v_0 t_1) + \theta_0$$

$$v_1(1) \triangleq v_1 = \frac{\dot{h}_1(1)}{t_1} = \frac{4a_{14} + 3a_{13} + a_0 t_1^2 + v_0 t_1}{t_1}$$

$$a_1(1) \triangleq a_1 = \frac{\ddot{h}_1(1)}{t_1^2} = \frac{12a_{14} + 6a_{13} + a_0 t_1^2}{t_1^2}$$

İkinci yörünge bölümünü üçüncü dereceden bir polinom fonksiyon ile göstermekteyiz.

$$h_2(t) = a_{23}t^3 + a_{22}t^2 + a_{21}t + a_{20}, \quad t \in [0, 1] \quad (3.4)$$

İkinci yörünge bölümü polinomunun gerçek zamana göre birinci ve ikinci dereceden türevlerini denklem (3.1)'i kullanarak bulabiliriz.

$$v_2(t) = \frac{\dot{h}_2(t)}{t_2} = \frac{3a_{23}t^2 + 2a_{22}t + a_{21}}{t_2}$$

$$a_2(t) = \frac{\ddot{h}_2(t)}{t_2^2} = \frac{6a_{23}t + 2a_{22}}{t_2^2}$$

i. Bu yörünge bölümünün başlangıç pozisyonu $t = 0$ için:

$$h_2(0) = a_{20} = \theta_1$$

$$v_1 = \frac{\dot{h}_2(0)}{t_2} = \frac{a_{21}}{t_2}, \quad a_{21} = v_1 t_2$$

$$a_1 = \frac{\ddot{h}_2(0)}{t_2^2} = \frac{2a_{22}}{t_2^2}, \quad a_{22} = \frac{a_1 t_2^2}{2}$$

Bu noktadaki eklem pozisyonu, hızı ve ivmesi bir önceki yörünge bölümünün son noktasındaki eklem pozisyonu, hızı ve ivmesi ile sürekli olmalıdır. Dolayısıyla,

$$h_2(0) = h_1(1), \quad \frac{\dot{h}_2(0)}{t_2} = \frac{\dot{h}_1(1)}{t_1}, \quad \frac{\ddot{h}_2(0)}{t_2^2} = \frac{\ddot{h}_1(1)}{t_1^2} \quad (3.5)$$

şartları sağlanmalıdır. Denklem (3.5) ile verilen koşulların sağlanabilmesi için,

$$-\theta_1 + a_{14} + a_{13} + \frac{a_0 t_1^2}{2} + v_0 t_1 + \theta_0 = 0$$

$$\frac{-a_{21}}{t_2} + \frac{4a_{14}}{t_1} + \frac{3a_{13}}{t_1} + \frac{a_0 t_1^2}{t_1} + \frac{v_0 t_1}{t_1} = 0$$

$$\frac{-2a_{22}}{t_2^2} + \frac{12a_{14}}{t_1^2} + \frac{6a_{13}}{t_1^2} + \frac{a_0 t_1^2}{t_1^2} = 0 \quad (3.6)$$

olmalıdır. Ayrıca denklem (3.6)'da verilen ilk koşul birinci yörünge bölümü polinomu için $h_1(1) = \theta_1$ olmasını sağlamaktadır.

ii. Bu yörünge bölümünün son pozisyonu $t = 1$ için: $t = 1$ anındaki eklem pozisyonu, hızı ve ivmesi bir sonraki yörünge bölümünün başlangıcındaki eklem pozisyonu, hızı ve ivmesi ile sürekli olmalıdır. Bu noktadaki pozisyon, hız ve ivme:

$$\begin{aligned} h_2(1) &= a_{23} + a_{22} + a_{21} + \theta_1 \\ v_2(1) &= \frac{\dot{h}_2(1)}{t_2} = \frac{3a_{23} + 2a_{22} + a_{21}}{t_2} \\ a_2(1) &= \frac{\ddot{h}_2(1)}{t_2^2} = \frac{6a_{23} + 2a_{22}}{t_2^2} \end{aligned}$$

İkinci yörünge bölümü polinom fonksiyonunun $h_2(1) = \theta_2$ koşulunu sağlayabilmesi için,

$$h_2(1) = a_{23} + a_{22} + a_{21} + \theta_1 = \theta_2 \quad (3.7)$$

olmalıdır.

Üçüncü yörünge bölümünü dördüncü dereceden bir polinom fonksiyon ile göstermekteyiz.

$$h_3(t) = a_{34}t^4 + a_{33}t^3 + a_{32}t^2 + a_{31}t + a_{30}, \quad t \in [0, 1] \quad (3.8)$$

Eğer denklem (3.8)'de t yerine $\bar{t} = t - 1$ yazacak olursak, normalize edilmiş zamanı $t, t \in [0, 1]$ 'den $\bar{t} \in [-1, 0]$ 'a taşımış oluruz. Denklem (3.8)'i \bar{t} cinsinden aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$h_3(\bar{t}) = a_{34}\bar{t}^4 + a_{33}\bar{t}^3 + a_{32}\bar{t}^2 + a_{31}\bar{t} + a_{30}, \quad \bar{t} \in [-1, 0] \quad (3.9)$$

Denklem (3.9)'un zamana göre birinci ve ikinci dereceden türevlerini denklem (3.1)'i kullanarak bulabiliriz.

$$\begin{aligned} v_3(\bar{t}) &= \frac{\dot{h}_3(\bar{t})}{t_3} = \frac{4a_{34}\bar{t}^3 + 3a_{33}\bar{t}^2 + 2a_{32}\bar{t} + a_{31}}{t_3} \\ a_3(\bar{t}) &= \frac{\ddot{h}_3(\bar{t})}{t_3^2} = \frac{12a_{34}\bar{t}^2 + 6a_{33}\bar{t} + 2a_{32}}{t_3^2} \end{aligned}$$

i. $\bar{t} = 0$ (Bu yörünge bölümünün son pozisyonuna karşılık gelmektedir) için:

$$\begin{aligned} h_3(0) &= a_{30} = \theta_f \\ v_f &= \frac{\dot{h}_3(0)}{t_3} = \frac{a_{31}}{t_3}, \quad a_{31} = v_f t_3 \end{aligned}$$

$$a_f = \frac{\ddot{h}_3(0)}{t_3^2} = \frac{2a_{32}}{t_3^2}, \quad a_{32} = \frac{a_f t_3^2}{2}$$

Dolayısıyla denklem (3.9) aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$h_3(\bar{t}) = a_{34}\bar{t}^4 + a_{33}\bar{t}^3 + \left(\frac{a_f t_3^2}{2}\right)\bar{t}^2 + (v_f t_3)\bar{t} + \theta_f, \quad \bar{t} \in [-1, 0] \quad (3.10)$$

ii. $\bar{t} = -1$ (Bu yörünge bölümünün başlangıç pozisyonuna karşılık gelmektedir) için:

$$\begin{aligned} h_3(-1) &= a_{34} - a_{33} + \frac{a_f t_3^2}{2} - v_f t_3 + \theta_f \\ \frac{\dot{h}_3(-1)}{t_3} &= \frac{-4a_{34} + 3a_{33} - a_f t_3^2 + v_f t_3}{t_3} \\ \frac{\ddot{h}_3(-1)}{t_3^2} &= \frac{12a_{34} - 6a_{33} + a_f t_3^2}{t_3^2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Bu noktada eklem pozisyonu, hızı ve ivmesi bir önceki yörünge bölümünün son noktasındaki eklem pozisyonu, hızı ve ivmesi ile sürekli olmalıdır. Dolayısıyla,

$$h_3(-1) = h_2(1), \quad \frac{\dot{h}_3(-1)}{t_3} = \frac{\dot{h}_2(1)}{t_2}, \quad \frac{\ddot{h}_3(-1)}{t_3^2} = \frac{\ddot{h}_2(1)}{t_2^2} \quad (3.12)$$

koşulları sağlanmalıdır. Denklem (3.12) ile verilen koşulların sağlanabilmesi için,

$$\begin{aligned} -\theta_2 + a_{34} - a_{33} + \frac{a_f t_3^2}{2} - v_f t_3 + \theta_f &= 0 \\ \frac{4a_{34} - 3a_{33} + a_f t_3^2 - v_f t_3}{t_3} + \frac{3a_{23}}{t_2} + \frac{2a_{22}}{t_2} + \frac{a_{21}}{t_2} &= 0 \\ \frac{-12a_{34} + 6a_{33} - a_f t_3^2}{t_3^2} + \frac{6a_{23}}{t_2^2} + \frac{2a_{22}}{t_2^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

olmalıdır. Denklem (3.6), (3.7) ve (3.13)'ü vektör-matris formunda aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$y = Cx \quad (3.14)$$

Burada,

$$y = \left[\theta_1 - \theta_0 - \frac{a_0 t_1^2}{2} - v_0 t_1, -a_0 t_1 - v_0, -a_0, \theta_2 - \theta_1, \right. \\ \left. -a_f t_3 + v_f, a_f, \theta_3 - \theta_2 + \frac{a_f t_3^2}{2} - v_f t_3 \right]^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/t_1 & 4/t_1 & -1/t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6/t_1^2 & 12/t_1^2 & 0 & -2/t_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/t_2 & 2/t_2 & 3/t_2 & -3/t_3 & 4/t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/t_2^2 & 6/t_2^2 & 6/t_3^2 & -12/t_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x = [a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{33}, a_{34}]^T$$

şeklinde tanımlanmıştır. Denklem (3.14)'ün çözümünden herbir yörünge bölümü polinomuna ait bilinmeyen katsayıları bulmak mümkündür.

$$x = C^{-1}y \quad (3.15)$$

Üçüncü yörünge bölümü polinomunun katsayılarını hesaplayabilmek için normalize edilmiş zaman değişkeni $[0, 1]$ den $[-1, 0]$ değiştirilmiştir. a_{ni} katsayılarını hesapladıktan sonra yeniden normalize edilmiş zamana $[0, 1]$ dönerek, normalize edilmiş zamanda son yörünge bölümü polinomunun hesaplanması gerekmektedir. Bunu denklem (3.9)'da \bar{t} yerine $t = \bar{t} + 1$ koyarak yapabiliriz. Bu işlem sonucunda üçüncü yörünge bölümü polinom fonksiyonu,

$$h_3(t) = a_{34}t^4 + (-4a_{34} + a_{33})t^3 + (6a_{34} - 3a_{33} + a_{32})t^2 + (-4a_{34} + 3a_{33} - 2a_{32} + a_{31})t + (a_{34} - a_{33} + a_{32} - a_{31} + a_{30}), \quad t \in [0, 1] \quad (3.16)$$

şeklinde elde edilebilir.

Böylelikle üç yörünge bölümü polinom fonksiyonlarına ait bütün katsayılar denklem (3.15)'ten belirlenerek, herbir bölüm için ilgili polinom fonksiyonları denklem (3.2), (3.4) ve (3.16)'dan elde etmek mümkündür. Elde etmiş olduğumuz yörünge bölümü polinomlarını kullanarak herbir eklem izleyeceği yörüngeyi oluşturabiliriz.

4. TEKİL PERTURBASYON METODU

Pek çok endüstriyel kontrol sisteminde belirli bazı dinamik ilişkiler, sistem analizinde veya tasarımında hesaplama yükünü azaltmak amacıyla ihmal edilir. Sistemin tüm dinamiği içinde yer alan ve sistemin modelinin boyutunu artıran belirli bazı parametreleri (küçük zaman sabitleri, kondansatörler ve benzer pratik parametreler) daha düşük dereceli yaklaşık bir sistem dinamiği elde etmek için ihmal etmek perturbasyon metodlarının temelini oluşturmaktadır. Büyük boyutlu sistemlerde düzgün (regüler) veya tekil (singular) perturbasyon metodları kullanılarak sistemin tüm dinamiği daha küçük boyutlu alt sistemlere indirgenebilir. Düzgün perturbasyon metodu daha çok durum değişkenleri arasında zayıf bağlar bulunan modellerde kullanılmaktadır. Düzgün perturbasyon metodu sonucunda bu zayıf bağlantılar ihmal edilerek tüm sistem dinamiği alt sistemlere ayrılır. Eğer sistemin durum değişkenleri farklı zaman sabitlerine sahipse ve birbirlerine kuvvetli bağlarla bağlanmışlarsa, bu tür sistemler ancak tekil perturbasyon modeli formunda gösterilebilmektedir.

Sonlu boyutlu bir dinamik sistemin standart tekil perturbasyon modelini aşağıdaki gibi yazabiliriz [20].

$$\dot{x} = f(x, z, u, \epsilon, t), \quad x \in R^n \quad (4.1a)$$

$$\epsilon \dot{z} = g(x, z, u, \epsilon, t), \quad z \in R^m \quad (4.1b)$$

Burada u , kontrol girdisi ve ϵ ise ihmal edilebilecek kadar küçük bir skalar olarak tanımlanmıştır. f ve g 'nin, argümanları x , z , u , ϵ ve t 'ye göre yeterince çok kez sürekli olarak türetilbildiğini kabul edelim.

Denklem (4.1) ile verilen standart tekil perturbasyon modelini kullanarak sistemin tüm dinamiğini daha küçük mertebeden bir modelle gösterebiliriz. Merite indirgenmesi ise *tekil* olarak isimlendirilen bir parametre perturbasyonuna dönüşmektedir. Eğer $\epsilon = 0$ alınırsa, sistemin durum uzayının boyutu $n + m$ 'den n 'e düşecektir. Çünkü denklem (4.1b)'deki diferansiyel denklem, $\epsilon = 0$ için cebirsel bir denkleme dönüşür.

$$g(\bar{x}, \bar{z}, \bar{u}, 0, t) = 0 \quad (4.2)$$

Burada $(\bar{\cdot})$, $\epsilon = 0$ için elde edilen sistemin değişkenlerini göstermek için kullanılmıştır.

Kabullenme 4.1: Denklem (4.2), \bar{z} için çözülebiliridir.

$$\bar{z} = h(\bar{x}, \bar{u}, t) \quad (4.3)$$

Denklem (4.3)'ü, $\epsilon = 0$ için denklem (4.1a)'da yerine yazacak olursak,

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, h(\bar{x}, \bar{u}, t), \bar{u}, 0, t) \quad (4.4a)$$

ifadesini elde ederiz. Denklem (4.4a) daha kompakt bir formda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t) \quad (4.4b)$$

Eğer ϵ yeterince küçükse z , \bar{z} 'a, z 'nin sözde yatışkın durum (quasi-steady-state) formu, yakınsayacaktır. Bu yüzden denklem (4.4b) sistemin bir sözde yatışkın durum modelidir.

Çok zaman ölçekli dinamik bir sistemi standart tekil perturbasyon modeli formunda gösterebilmekteyiz. Çok zaman ölçekli bir sistemin, sisteme uygulanan bir girdiye olan tepkisinde ise bazı durumlar yavaş ve bazı durumlar da hızlı bir şekilde değişecektir. Sistemin yavaş durumlarının değişimini denklem (4.4b) ile yaklaşık olarak gösterebiliriz. Dolayısıyla x sistemin yavaş durum değişkeni ve \bar{x} ise x 'in yavaş kısmıdır. Sistemin hızlı durumlarının değişimi ise kabaca sistemin tüm dinamik modeli (4.1) ile indirgenmiş model (4.4b) arasındaki farktır. Ancak indirgenmiş modelde (4.4b), z yerine \bar{z} kullanılmaktadır ve \bar{z} 'in başlangıç değeri,

$$\bar{z}(t_0) = h(\bar{x}(t_0), \bar{u}(t_0), t_0) \quad (4.5)$$

ile z 'nin başlangıç değeri $z(t_0) = z_0$ arasında büyük bir fark olabilir. Bu yüzden \bar{z} , z 'nin uniform bir yaklaşımı olamaz. Ancak yaklaşım,

$$z = \bar{z}(t) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.6)$$

t_0 'ı kapsamayan $t \in [t_1, T]$ aralığı içinde sağlanabilir ($t_1 > t_0$). Burada $\mathcal{O}(\epsilon)$, $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{O}(\epsilon)}{\epsilon} = 0$ şartını sağlayan herhangi bir fonksiyonu ve T ise sonlu veya sonsuz bir zaman değerini göstermektedir. Denklem (4.6) ile verilen yaklaşım gereğince, $[t_0, t_1]$ aralığında z , \bar{z} 'a yaklaşır ve daha sonra $[t_1, T]$ aralığında ise \bar{z} 'a yakın kalır.

\bar{x} 'i, $x(t_0) = x_0$ başlangıç değerinden başlayacak şekilde sınırlayabiliriz. Dolayısıyla \bar{x} , x 'in uniform bir yaklaşımı olabilir ve yaklaşım,

$$x = \bar{x}(t) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.7)$$

$\bar{x}(t)$ 'nin var olduğu $t \in [t_0, T]$ aralığında sağlanabilir.

z çok hızlı bir şekilde değişebilir, $\dot{z} = g/\epsilon$. Hatta denklem (4.1b)'de $\epsilon = 0$ yapılarak, $g \neq 0$ için z 'nin geçişi ani olarak yapılabilir. Bu geçiş sırasında z sonsuza gidebilir veya sözde yatışkın durum değerine \bar{z} yakınsayabilir. Denklem (4.2b)'yi kullanarak z 'nin nasıl davranacağı sorusunu cevaplayabiliriz.

$$\epsilon \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{ds}, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\epsilon}$$

$t = t_0$ 'daki başlangıç değeri $s = 0$ olsun. Yeni zaman değişkeni,

$$s = \frac{t - t_0}{\epsilon}$$

ϵ sıfıra giderken t , t_0 'dan çok az bile büyük olsa s sonsuza gidecektir. z ve s ani olarak değişirken, x ise başlangıç değerine x_0 yakın kalacaktır. s 'in fonksiyonu olarak z 'nin dinamiğini gösterebilmek için sınır katmanı sistemini (boundary layer system) kullanabiliriz.

$$\frac{d\bar{z}}{ds} = g(x_0, \bar{z}(\tau), u, 0, t_0) \quad (4.8)$$

$\bar{z}(\tau)$ için başlangıç değeri z_0 'dır. x_0 ve t_0 ise sabit parametre değerleridir. Denklem (4.8) ile verilen başlangıç değeri probleminin çözümü $\bar{z}(\tau)$, z 'nin uniform bir yaklaşımını oluşturabilmek için denklem (4.6)'da kullanabiliriz.

$$z = \bar{z}(t) + \bar{z}(\tau) - \bar{z}(t_0) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.9)$$

Dolayısıyla z sistemin hızlı durum değişkenidir. z 'nin yavaş kısmı $\bar{z}(t)$, hızlı kısmı ise $\bar{z}(\tau) - \bar{z}(t_0)$ 'dır.

Teorem 4.1: Eğer sınır katmanı sistemi kararlı ise, denklem (4.7) ve (4.9) tüm $t \in [t_0, T]$ ve denklem (4.6) tüm $t \in [t_1, T]$ için sağlanacaktır. Sınır katmanının kalınlığı (thickness of the boundary layer) $t_1 - t_0$, ϵ yeterince küçük seçilerek istenildiği kadar küçük yapılabilir [20].

4.1 Tekil Perturbasyon Metodunun Esnek Robot Kollarına Uygulanması

[4]'te önerilen tekil perturbasyon metodunu kullanarak tüm sistemin dinamiğini tanımlayan (2.31) denkleminde, yavaş ve hızlı alt sistemlerin dinamik denklemlerini türetebiliriz. M , pozitif kesin bir matristir ve tersi alınabilir.

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}^{-1} = H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

Burada M_{11} , 2×2 ; M_{12} , $2 \times n$; M_{21} , $n \times 2$ ve M_{22} ise $n \times n$ 'lik matrislerdir. Esnek parçanın deformasyonlarını n tane mod şekli ile gösterebileceğimiz kabul edilmiştir. Aşağıdaki gibi yeni bir değişken tanımlayalım.

$$\zeta = \frac{1}{\mu} K \eta$$

Burada $\mu = \frac{1}{E I_a}$ ve (2.31) denklemi,

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & H_{11}(\theta, \mu K^{-1} \zeta) f_1(\theta, \dot{\theta}) + H_{12}(\theta, \mu K^{-1} \zeta) f_2(\theta, \dot{\theta}) \\ & + H_{11}(\theta, \mu K^{-1} \zeta) g_1(\theta, \dot{\theta}, \mu K^{-1} \zeta, \mu K^{-1} \dot{\zeta}) \\ & + H_{12}(\theta, \mu K^{-1} \zeta) \zeta + H_{11}(\theta, \mu K^{-1} \zeta) u \end{aligned} \quad (4.10a)$$

$$\begin{aligned} \mu K^{-1} \ddot{\zeta} = & H_{21}(\theta, \mu K^{-1} \zeta) f_1(\theta, \dot{\theta}) + H_{22}(\theta, \mu K^{-1} \zeta) f_2(\theta, \dot{\theta}) \\ & + H_{21}(\theta, \mu K^{-1} \zeta) g_1(\theta, \dot{\theta}, \mu K^{-1} \zeta, \mu K^{-1} \dot{\zeta}) \\ & + H_{22}(\theta, \mu K^{-1} \zeta) \zeta + H_{21}(\theta, \mu K^{-1} \zeta) u \end{aligned} \quad (4.10b)$$

sistemin bir tekil perturbasyon modeli olarak yukarıdaki gibi yazılabilir [21].

4.1.1 Yavaş alt sistem

$\mu = 0$ için ζ 'yi (4.10b) denkleminde çözelim.

$$\begin{aligned} \bar{\zeta} = & -H_{22}^{-1}(\bar{\theta}, 0) \left[H_{21}(\bar{\theta}, 0) f_1(\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}) + H_{21}(\bar{\theta}, 0) g_1(\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}, 0, 0) \right. \\ & \left. + H_{21}(\bar{\theta}, 0) \bar{u} \right] - f_2(\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}) \end{aligned} \quad (4.11a)$$

Burada $g_1(\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}, 0, 0) = 0$ ve (4.11a) denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\bar{\zeta} = -H_{22}^{-1}(\bar{\theta}, 0) H_{21}(\bar{\theta}, 0) (f_1(\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}) + \bar{u}) - f_2(\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}) \quad (4.11b)$$

burada üzeri çizgi $\mu = 0$ iken ele alınan sistemi göstermektedir. Durum değişkeni $\bar{\zeta}$, yavaş zaman ölçeği için statik elastik deformasyona karşılık gelmektedir. Denklem (4.11b), $\mu = 0$ için denklem (4.10a)'da yerine yazılırsa yavaş alt sistemin dinamiğini elde etmiş oluruz.

$$M_{11}(\bar{\theta}) \ddot{\bar{\theta}} = f_1(\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}) + \bar{u} \quad (4.12)$$

Burada $M_{11}(\bar{\theta}) = [H_{11}(\bar{\theta}) - H_{12}(\bar{\theta}) H_{22}^{-1}(\bar{\theta}) H_{21}(\bar{\theta})]^{-1}$, 2×2 'lik pozitif kesin bir matristir. Denklem (4.12) ile verilen yavaş alt sistem, iki eklemli katı bir robot kolunun dinamiğini göstermektedir.

4.1.2 Hızlı alt sistem

Sistemin tekil perturbasyon modelini durum uzayı formunda gösterebilmek için, durum değişkenlerini $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ ve $z_1 = K^{-1}\zeta$, $z_2 = \epsilon K^{-1}\dot{\zeta}$ şeklinde tanımlayalım. Burada, $\epsilon = \sqrt{\mu}$. Denklem (4.10) ile verilen sistemin tekil perturbasyon modelini durum uzayı formunda aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= H_{11}(x_1, \epsilon^2 z_1)f_1(x_1, x_2) + H_{12}(x_1, \epsilon^2 z_1)f_2(x_1, x_2) \\ &\quad + H_{11}(x_1, \epsilon^2 z_1)g_1(x_1, x_2, \epsilon^2 z_1, \epsilon z_2) \\ &\quad + H_{12}(x_1, \epsilon^2 z_1)Kz_1 + H_{11}(x_1, \epsilon^2 z_1)u\end{aligned}\quad (4.13a)$$

$$\begin{aligned}\epsilon \dot{z}_1 &= z_2 \\ \epsilon \dot{z}_2 &= H_{21}(x_1, \epsilon^2 z_1)f_1(x_1, x_2) + H_{22}(x_1, \epsilon^2 z_1)f_2(x_1, x_2) \\ &\quad + H_{21}(x_1, \epsilon^2 z_1)g_1(x_1, x_2, \epsilon^2 z_1, \epsilon z_2) \\ &\quad + H_{22}(x_1, \epsilon^2 z_1)Kz_1 + H_{21}(x_1, \epsilon^2 z_1)u\end{aligned}\quad (4.13b)$$

Hızlı alt sistem için, hızlı zaman ölçeği $s = t/\epsilon$. Denklem (4.13) hızlı zaman ölçeğinde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{ds} &= \epsilon x_2 \\ \frac{dx_2}{ds} &= \epsilon \left[H_{11}(x_1, \epsilon^2(\delta_1 + K^{-1}\bar{\zeta}))f_1(x_1, x_2) + H_{12}(x_1, \epsilon^2(\delta_1 + K^{-1}\bar{\zeta}))f_2(x_1, x_2) \right. \\ &\quad + H_{11}(x_1, \epsilon^2(\delta_1 + K^{-1}\bar{\zeta}))g_1(x_1, x_2, \epsilon^2(\delta_1 + K^{-1}\bar{\zeta}), \epsilon\delta_2) \\ &\quad + H_{12}(x_1, \epsilon^2(\delta_1 + K^{-1}\bar{\zeta}))K(\delta_1 + K^{-1}\bar{\zeta}) \\ &\quad \left. + H_{11}(x_1, \epsilon^2(\delta_1 + K^{-1}\bar{\zeta}))u \right]\end{aligned}\quad (4.14a)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\delta_1}{d\tau} &= \delta_2 \\ \frac{d\delta_2}{d\tau} &= H_{21}(x_1, \epsilon^2(\delta_1 + K^{-1}\bar{\zeta}))f_1(x_1, x_2) + H_{22}(x_1, \epsilon^2(\delta_1 + K^{-1}\bar{\zeta}))f_2(x_1, x_2) \\ &\quad + H_{21}(x_1, \epsilon^2(\delta_1 + K^{-1}\bar{\zeta}))g_1(x_1, x_2, \epsilon^2(\delta_1 + K^{-1}\bar{\zeta}), \epsilon\delta_2) \\ &\quad + H_{22}(x_1, \epsilon^2(\delta_1 + K^{-1}\bar{\zeta}))K(\delta_1 + K^{-1}\bar{\zeta}) \\ &\quad + H_{21}(x_1, \epsilon^2(\delta_1 + K^{-1}\bar{\zeta}))u\end{aligned}\quad (4.14b)$$

Burada yeni hızlı değişkenler δ_1 ve δ_2 ,

$$\delta_1 = z_1 - \bar{z}_1, \quad \delta_2 = z_2 - \bar{z}_2 = z_2 \quad (4.15)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Denklem (4.14a)'da $\epsilon = 0$ için, $dx_1/ds = dx_2/ds = 0$; x_1 ve x_2 sınır katmanında sabittir. Ayrıca $g(x_1, x_2, 0, 0) = 0$. Dolayısıyla $\epsilon = 0$ için denklem (4.11b) denklem (4.14b)'de kullanılarak hızlı alt sistemin dinamiği aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_1}{ds} &= \delta_2 \\ \frac{d\delta_2}{ds} &= H_{22}(\bar{x}_1, 0)K\delta_1 + H_{21}(\bar{x}_1, 0)(u - \bar{u}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Denklem (4.16) x_1 yavaş değişkeninin fonksiyonu olan doğrusal bir sistemdir. Dolayısıyla hızlı alt sistemin dinamiğini durum uzayı formunda aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\frac{d\delta}{ds} = A(\bar{x}_1)\delta + B(\bar{x}_1)\tilde{u} \quad (4.17)$$

Burada ,

$$\begin{aligned} \delta &= [\delta_1^T, \delta_2^T]^T, \quad \tilde{u} = u - \bar{u} \\ A(\bar{x}_1) &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ H_{22}(\bar{x}_1, 0)K & 0 \end{bmatrix}, \quad B(\bar{x}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ H_{21}(\bar{x}_1, 0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Sonuç olarak, tekil perturbasyon metodunu esnek robot kollarına uyguladığımız zaman, sistemin tüm dinamiği yavaş alt sistem ve hızlı alt sistem olmak üzere iki alt sisteme ayrılmaktadır. Yavaş alt sistem iki eklemlilikli bir robot kolunun dinamiğini göstermektedir. Hızlı alt sistem ise yavaş durum değişkenlerinin fonksiyonu olan doğrusal bir sistemdir.

5. KONTROLÖR TASARIMI

Bu bölümde 2. bölümde modellenmesi yapılan ilk parçası katı ve ikinci parçası ise esnek bir yapı olan robot kolu için, robotun eklem açıları sabit bir referans sinyali veya bir yörüngeyi takip ederken esnek parçanın uç sapmasını da mümkün olan en kısa süre içerisinde sönmüleyebilecek iki kontrol yaklaşımı önerilmiştir.

5.1 PD Kontrolör Tasarımı

Esnek robot kolu ilk olarak PD kontrolörler kullanılarak kontrol edilmeye çalışılmıştır. Sürekli zaman bir PD kontrolör [2],

$$\tau_i(t) = K_p^i e_i(t) + K_v^i \dot{e}_i(t), \quad i = 1, 2 \quad (5.1)$$

formunda yazılabilir. Burada K_p^i ve K_v^i sırasıyla oransal ve türevsel kazanç değerleri; $e_i(t) = \hat{\theta}_i(t) - \theta_i(t)$, i . eklem takip etmesi gereken sabit bir referans sinyal veya bir yörünge sinyali $\hat{\theta}_i$ ile bu eklem açısı θ_i arasındaki farktır. Eğer eklem açıları sabit bir referans sinyali izliyorsa,

$$\dot{\hat{\theta}}_i(t) = 0, \quad \dot{e}_i(t) = -\dot{\theta}_i(t), \quad i = 1, 2$$

olacaktır. K_p^i ve K_v^i ($i = 1, 2$) geri besleme kazanç değerleri deneme yanılma metodu ile benzetim çalışmaları yapılarak, eklem açılarının hareketi ve esnek parçanın uç sapmalarının sönmülenmesi açısından istenilen performansı sağlayacak şekilde seçilebilir.

5.2 Doğrusal Olmayan PD-Benzeri Kontrolör Tasarımı

Tasarımı yapılan doğrusal olmayan PD benzeri kontrolörü,

$$\tau_i(t) = (K_{p1}^i - K_{p2}^i s(e_i(t)))e_i(t) - (K_{v1}^i + K_{v2}^i s(e_i(t)))\dot{\theta}_i(t), \quad i = 1, 2 \quad (5.2)$$

formunda yazabiliriz. Burada,

$$s(e_i(t)) = \begin{cases} |e_i(t)|, & |e_i(t)| \leq a \\ a, & |e_i(t)| > a \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. $|\cdot|$, (\cdot) 'nin mutlak değerini göstermektedir. $K_{p_1}^i$, $K_{p_2}^i$, $K_{v_1}^i$ ve $K_{v_2}^i$ ($i = 1, 2$) geri besleme kazanç değerleri deneme yanılma metodu ile benzetim çalışmaları yapılarak, eklem açılarının hareketi ve esnek parçanın uç sapmalarının sönümlenmesi açısından istenilen performansı sağlayacak şekilde seçilebilir. a , $K_{p_1}^i > K_{p_2}^i s(e_i(t))$ şartını sağlayacak şekilde seçilen bir parametre değeridir.

Kontrolörün kazanç değerleri hata teriminin mutlak değeri ile orantılı olarak değiştirilmektedir. Hata teriminin mutlak değeri başlangıç anında en büyüktür. Eğer hata sinyali yüksek bir kazanç değeri ile geri beslenirse, motorun kalkınma anında robot kolunun parçalarına uygulayacağı tork ve dolayısıyla harcayacağı enerji büyük olacaktır. Esnek bir parçanın yüksek bir ivme ile harekete başlaması ise esnek parçanın başlangıç anındaki uç sapmasının maksimum değerini de büyütecektir. Bu yüzden başlangıç anında parçalara çok büyük bir tork uygulamamak için e_i hata terimi daha küçük bir kazanç değeri ile geri beslenirken, yüksek bir hızla hatanın sönümlenebilmesi için $\dot{\theta}_i$ terimi daha yüksek bir kazanç değeri ile geri beslenmektedir. Başlangıç anından sonra hata terimi küçüldükçe referans sinyale daha çabuk yaklaşabilmek için e_i hata terimi daha yüksek bir kazanç değeri ile geri beslenerek parçalara uygulanan tork artırılırken, sıçramayı (overshoot) engelleyebilmek içinse $\dot{\theta}_i$ teriminin kazanç değeri küçültülmektedir.

5.3 İki Zaman Ölçekli Kontrolör Tasarımı

Esnek robot kolları da katı robot kolları gibi genellikle sadece eklemlere uygulanan torklar τ_i ile kontrol edilmektedir. Esnek bir robot kolunun tüm dinamiği içinde hem katı hem de esnek hal durumları yer almaktadır. Denklem (2.31)'den görülebileceği gibi robot kolunun katı hal durumlarını robot kolunun eklemlerine uygulanan torklar τ_i ile direkt olarak kontrol edebilmemize rağmen, esnek hal durumlarını direkt olarak kontrol etmemiz mümkün değildir. Esnek robot kolunun sadece katı hal durumları kullanılarak tasarlanan kontrolörler ise yeterince iyi bir performans gösteremeyebilir.

Tekil perturbasyon metodunun esnek robot kollarına uygulanması bölüm 4.1 de anlatılmıştır. Burada bir esnek robot kolu sisteminin tüm dinamiğinin yavaş alt sistem ve hızlı alt sistem olarak isimlendirilen iki alt sisteme ayrılabilirdiği gösterilmiştir. Yavaş alt sistem iki eklemlilik katı bir robot kolunun dinamiğine karşılık gelmektedir. Hızlı alt sistem ise yavaş durum değişkenlerinin fonksiyonu olan doğrusal bir sistemdir. Hızlı alt sistemin durum değişkenleri elastik kuvvetler ve elastik kuvvetlerin türevleridir. Dolayısıyla tekil perturbasyon metodu, yavaş kontrol girdisini ve hızlı kontrol girdisini kullanarak sistemin hem katı hem de esnek hal durumlarını kontrol etmemize imkan sağlamaktadır.

5.3.1 Yavaş alt sistemin kontrolü

Bölüm 4.1.1'de yavaş alt sistemin dinamiğinin iki eklemlilikli katı bir robot kolu ile aynı olduğu gösterilmiştir. Dolayısıyla katı robot kolları için geliştirilen pek çok kontrol tekniğini yavaş alt sistemin kontrolü için kullanabiliriz. Bu çalışmada yavaş alt sistemi kontrol edebilmek için tork hesaplaması kontrol (computed torque control) yaklaşımı kullanılmıştır.

Yavaş alt sistemin dinamiği bölüm 4.1.1'de aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$M_{11}(\bar{\theta})\ddot{\bar{\theta}} = f_1(\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}) + \bar{u} \quad (5.3)$$

Yavaş alt sistemin kontrolü için, tork hesaplaması kontrol yaklaşımı [2] temel alınarak geliştirilen kontrolör,

$$\bar{u} = -f_1(\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}) + M_{11}(\bar{\theta}) \left[\ddot{\hat{\theta}} + K_v(\dot{\hat{\theta}} - \dot{\bar{\theta}}) + K_p(\hat{\theta} - \bar{\theta}) \right] \quad (5.4)$$

formundadır. Denklem (5.4) ile tanımlanan kontrolör ileri besleme ve geri besleme bileşenleri içermektedir. Kontrolörün ileri besleme bileşeni ile doğrusal olmayan terimler için bir kompanzasyon sağlanırken, geri besleme bileşeni ile eklem açılarının takip etmesi istenilen bir referans sinyal veya yörüngeden olan sapmalar kompanze edilmektedir. Denklem (5.3) ile tanımlanan yavaş alt sisteme denklem (5.4) ile tanımlanan kontrol uygulanırsa, kapalı döngü sistemin dinamiği,

$$M_{11}(\bar{\theta}) [\ddot{e}(t) + K_v\dot{e}(t) + K_p e(t)] = 0 \quad (5.5)$$

şeklini alır ve burada $e_i(t) = \hat{\theta}_i(t) - \theta_i(t)$. M_{11} her zaman için pozitif kesin bir matristir. Dolayısıyla kapalı döngü sistemin karakteristik polinomunu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$\Delta_c(s) = \det(s^2 I + K_v s + K_p) \quad (5.6)$$

$\Delta_c(s)$ polinomunun kökleri sol yarı düzlemde olacak şekilde K_p ve K_v kazanç matrisleri seçilirse, $e(t)$ asimtotik olarak sifıra yaklaşacaktır. Dolayısıyla, uygulanan sabit bir referans sinyali veya yörüngeyi robot kolunun eklem açıları takip edecektir.

K_p ve K_v kazanç matrisleri N eklemlilikli katı bir robot kolu için, $N \times N$ 'lik diagonal matrisler olarak seçilmektedir.

$$K_v = \text{diag}\{k_{v_i}\}, \quad K_p = \text{diag}\{k_{p_i}\} \quad (5.7)$$

Dolayısıyla kapalı döngü sistemin karakteristik polinomunu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$\Delta_c(s) = \prod_{i=1}^N (s^2 + k_{v_i} s + k_{p_i}) \quad (5.8)$$

İkinci dereceden bir sistemin karakteristik polinomunu ise standart formda aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$p(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (5.9)$$

Burada ζ , sönümlenme oranı ve ω_n ise doğal frekans olarak tanımlanmıştır. Dolayısıyla herbir eklem için istenilen hata dinamiği, PD kontrolörün kazanç değerleri aşağıdaki gibi seçilerek sağlanabilir.

$$k_{p_i} = \omega_n^2, \quad k_{v_i} = 2\zeta\omega_n \quad (5.10)$$

Burada ζ ve ω_n , i . eklem için sırasıyla istenilen sönümlenme oranı ve doğal frekans olarak seçilmelidir. PD kontrolörün kazanç değerleri, genellikle sistemin hata dinamiği kritik sönümlü $\zeta = 1$ olacak şekilde seçilerek sıçramadan kaçınılmaktadır. Bu durumda PD kontrolörün kazanç değerleri,

$$k_{v_i} = 2\sqrt{k_{p_i}}, \quad k_{p_i} = k_{v_i}^2/4 \quad (5.11)$$

şeklinde seçilebilir. Doğal frekans ω_n herbir eklem için, eklem tepki hızını belirlemektedir. Hızlı bir tepki için istenilen performans kriterleri de göz önüne alınarak ω_n mümkün olduğunca büyük seçilmelidir. Örneğin katı bir robot kolu için ω_n değeri, sistemin esnek modlarını harekete geçirmemek için, katı robot kolunun ilk esnek modunun frekansının yarısından daha küçük seçilmektedir.

5.3.2 Hızlı alt sistemin kontrolü

Hızlı alt sistem yavaş durum değişkenlerinin fonksiyonu olan doğrusal bir sistemdir. Hızlı alt sistemin dinamiği durum uzayı formunda bölüm 4.1.2'de aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$\frac{d\delta}{ds} = A(\bar{x}_1)\delta + B(\bar{x}_1)\tilde{u} \quad (5.12)$$

Denklem (5.12) ile tanımlanan doğrusal sistemin özdeğerleri sanal eksen üzerindedir. Dolayısıyla hızlı alt sistem kararsızdır. Hızlı alt sistemi kararlı kılabilmek içinse çeşitli klasik ve modern kontrol yöntemlerini kullanabiliriz. Bu çalışmada durum geri beslemesi ile kutup ataması yapılarak hızlı alt sistem kararlı yapılmıştır.

$$\tilde{u} = -K_f\delta \quad (5.13)$$

Burada K_f durum geri beslemesi kazanç matrisidir. Denklem (5.13)'ü denklem (4.15)'i kullanarak aşağıdaki gibi yeniden yazabiliriz.

$$\tilde{u} = -K_f[(\eta/\mu - K^{-1}\bar{\zeta})^T, (\dot{\eta}/\epsilon)^T]^T \quad (5.14)$$

Dolayısıyla hızlı kontrol girdisini elde edebilmemiz için esnek parçanın mod genliklerini η ve bu mod genliklerinin türevlerini $\dot{\eta}$ ölçebilmeliyiz.

Katı-esnek robot kolunu ancak sonsuz boyutlu bir dinamik modelle gösterebilmekteyiz. Kontrolör tasarımı ve simulasyon çalışmalarında ise sonsuz boyutlu bir modeli kullanmamız mümkün değildir. Dolayısıyla esnek parçanın herhangi bir t anındaki ve x noktasındaki deformasyonunu, sonlu sayıda mod şekli ve mod genliklerinin çarpımlarının sonlu toplamı şeklinde göstermemiz gerekmektedir. Bu çalışmada esnek parçanın deformasyonlarını iki mod şekli ile gösterebileceğimiz kabul edilerek, kontrolör tasarımı için esnek parçanın en düşük frekanslı ilk iki modu kullanılmıştır.

Esnek parçanın en düşük frekanslı ilk iki mod genliği, esnek parça üzerindeki farklı iki noktadan alınan pozisyon ve hız ölçümleri kullanılarak elde edilebilir. Bu çalışmada esnek parçanın orta noktasının ve uç noktasının pozisyonunun ve hızının ölçülebildiği kabul edilmiştir.

$$\begin{aligned} y_1 &= z\left(\frac{L_2}{2}, t\right) = \sum_{i=1}^2 \phi_i\left(\frac{L_2}{2}\right)\eta_i(t), & y_1 &= \Phi^a \eta \\ y_2 &= z(L_2, t) = \sum_{i=1}^2 \phi_i(L_2)\eta_i(t), & y_2 &= \Phi^b \eta \\ y_3 &= z_t\left(\frac{L_2}{2}, t\right) = \sum_{i=1}^2 \phi_i\left(\frac{L_2}{2}\right)\dot{\eta}_i(t), & y_3 &= \Phi^a \dot{\eta} \\ y_4 &= z_t(L_2, t) = \sum_{i=1}^2 \phi_i(L_2)\dot{\eta}_i(t), & y_4 &= \Phi^b \dot{\eta} \end{aligned}$$

Burada y_1, y_2, y_3 ve y_4 ölçülen değerleri göstermektedir ve,

$$\Phi^a = \left(\phi_1\left(\frac{L_2}{2}\right), \phi_2\left(\frac{L_2}{2}\right)\right), \quad \Phi^b = \left(\phi_1(L_2), \phi_2(L_2)\right)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Ölçümleri kullanarak en düşük frekanslı ilk iki mod genliğini aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \Phi^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{bmatrix} = \Phi^{-1} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Burada $\Phi = \begin{bmatrix} \Phi^a \\ \Phi^b \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlanmıştır.

5.3.3 Kompozit kontrol

Tüm sistemin kontrolü için kompozit kontrol stratejisi kullanılmıştır. Kompozit kontrol yaklaşımı yavaş ve hızlı alt sistemleri kontrol etmek için tasarlanan geri besleme kontrolörlerinin üretmiş olduğu kontrol girdilerinin toplamını gerektirmektedir.

Denklem (5.4)'ten yavaş kontrol girdisi ile denklem (5.14)'ten hızlı kontrol girdisini topladığımız zaman, tüm sistemin kontrolü için eklemlere uygulanması gereken tork ifadesini elde etmiş oluruz.

$$u = \bar{u} + \tilde{u} \quad (5.16)$$

Tikhonov teoremi [21] tüm sistemin durum vektörünün,

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{x}_1 + O(\epsilon), & x_2 &= \bar{x}_2 + O(\epsilon) \\ z_1 &= K^{-1}\bar{\zeta} + \delta_1 + O(\epsilon), & z_2 &= \delta_2 + O(\epsilon) \end{aligned} \quad (5.17)$$

şeklinde olmasını garanti etmektedir.

6. BENZETİM ÇALIŞMALARI

İkinci bölümde modellenmesi yapılan iki parçalı esnek bir robot kolunun kontrolü için beşinci bölümde önerilen kontrol yaklaşımları kullanılarak yapılan benzetim çalışmaları bu bölümde ele alınmıştır.

6.1 Geliştirilen Benzetim Programları

Sistemin matematiksel modelini oluşturan (2.28), (2.29) ve (2.30) adi diferansiyel denklemleri doğrusal denklemler olmadıkları için, analitik yöntemler kullanılarak bu denklemlerin çözümünü bulmak oldukça zordur. Dolayısıyla sistemin matematiksel modelini oluşturan adi diferansiyel denklemlerin çözümünü ancak nümerik hesap algoritmaları kullanarak bulabiliriz. Benzetim çalışmaları için iki farklı benzetim programı geliştirilmiştir.

6.1.1 Runge-Kutta formülleri kullanılarak sistemin benzetimi

Sistemin modelini tanımlayan (2.28), (2.29) ve (2.30) adi diferansiyel denklemleri nümerik olarak çözümlenerek sistemin tepkisi bulunabilir. Elimizdeki nümerik hesap algoritmalarını kullanarak bir diferansiyel denklemi çözebilmek için, diferansiyel denklem,

$$\dot{x} = f(x) \quad (6.1)$$

formunda olmalıdır. $x = (\theta_1, \theta_2, \eta^T, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\eta}^T)^T$ şeklinde tanımlanmıştır. Dolayısıyla $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ ve $\dot{\eta}$ değişkenlerinin x 'in elemanları cinsinden ifade edilmesi gerekmektedir. Denklem (2.28)'den $\ddot{\eta}$ çekilerek denklem (2.30)'da yerine yazılırsa,

$$\ddot{\theta}_2 = \left[\tau_2 - F_2(x) + m_{23}(\Lambda\eta + L_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2)c_2) - (m_{21} - m_{23}(c_1 + L_1 \cos(\theta_2)c_2))\ddot{\theta}_1 \right] / (m_{22} - m_{23}c_1) \quad (6.2)$$

ifadesi elde edilir. Denklem (2.29)'da, denklem (2.28) ve denklem (6.2) kullanılarak $\ddot{\theta}_1$, x 'in elemanları cinsinden aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\ddot{\theta}_1 = \left[\tau_1 - F_1(x) - k_1(\tau_2 - F_2(x)) + (m_{13} - k_1 m_{23})(\Lambda\eta + L_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2)c_2) \right] / m_{11} \quad (6.3)$$

$\ddot{\theta}_2$ 'ni x 'in elemanları cinsinden ifade edebilmek için, denklem (6.2)'de $\ddot{\theta}_1$ yerine denklem (6.3) yazılır. Denklem (6.3) ve x 'in elemanları cinsinden ifade edilmiş olan $\ddot{\theta}_2$ denklem (2.28)'de kullanılarak $\ddot{\eta}$, x 'in elemanları cinsinden elde edilir. Burada,

$$\begin{bmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{bmatrix} = -f_1(\theta, \dot{\theta}) - g_1(\theta, \dot{\theta}, \eta, \dot{\eta})$$

$$m_{tt} = m_{11} - m_{13}(c_1 + L_1 \cos(\theta_2)c_2) - k_1(m_{21} - m_{23}(c_1 + L_1 \cos(\theta_2)c_2))$$

$$k_1 = \frac{m_{12} - m_{13}c_1}{m_{22} - m_{23}c_1}, \quad c_1 = a^{-1}\gamma^a, \quad c_2 = a^{-1}\gamma^b$$

şeklinde tanımlanmıştır. Ek-1'de verilen ve MATLAB dilinde hazırlanan benzetim programı sistemin dinamiğini tanımlayan adi diferansiyel denklemleri esnek parçanın istenilen mod sayısı için çözerek sistemin tepkisini bulmaktadır. Programın akışı aşağıdaki gibidir.

- . Sistemin parametre değerleri ($E, I_a, \rho_1, \rho_2, L_1, L_2, I_{h_1}, I_{h_2}, m_1, m_2, \beta_1, \beta_2$) ana program içinde tanımlanmıştır. Program çalıştırıldığında esnek parça için seçilen mod sayısı n ve benzetim süresi T programa girilir.
- . Newton-Raphson algoritması kullanılarak frekans denkleminin çözümü olan k_i 'ler bulunur.
- . Sistemin dinamiği ile ilgili vektör ($\lambda, h_i, \phi_i(L_2), \gamma^a, \gamma^b, \alpha^a, \alpha^b$) ve matrisler (a, Λ) hesaplanır.
- . Sistemin parametre değerleri ve hesaplanan vektör ve matrisler *aode23.m* isimli fonksiyona gönderilir. *aode23.m* fonksiyonu, 2. ve 3. mertebeden Runge-Kutta formüllerini kullanarak (6.1) formundaki bir adi diferansiyel denklem sisteminin çözümünü bulabilmektedir. Bunu yapabilmek için her bir benzetim anında *rig_flex.m* fonksiyonunu çağırarak \dot{x} vektörünü hesaplar. Daha sonra \dot{x} vektörünü ve Runge-Kutta formüllerini kullanarak her bir benzetim anı için adi diferansiyel denklem sisteminin çözümü olan x vektörünü bulur. *rig_flex.m* fonksiyonu *aode23.m*'in hesapladığı x vektörünü (başlangıç zamanı hariç) ve sırasıyla (6.3), (6.2) ve (2.28) denklemlerini kullanarak \dot{x} vektörünü hesaplamaktadır.
- . Benzetim süresinin sonucunda benzetim anları ve her bir benzetim anına karşılık gelen adi diferansiyel denklem sisteminin çözümü *aode23.m* fonksiyonundan ana programa döner. Bu değerler kullanılarak robot kolunun eklem açıları ve esnek parçanın uç sapması zamana karşı çizilir.

aode23.m fonksiyonu, MATLAB'te hali hazırda bulunan *ode23.m* fonksiyonu üzerinde belirli bazı değişiklikler yapılarak oluşturulmuştur. *ode23.m* fonksiyonu sistemin parametre değerlerini ve ana programda hesaplanan sistemin dinamiğiyle ilgili vektör ve matrisleri alıp, bu değerleri ve *rig_flex.m* fonksiyonu tarafından hesaplanan \dot{x} vektörünü kullanarak x vektörünü hesaplayacak şekilde değiştirilerek *aode23.m* fonksiyonu oluşturulmuştur.

6.1.2 Isim komutu kullanılarak sistemin benzetimi

Sistemin modelini tanımlayan (2.28), (2.29) ve (2.30) adi diferansiyel denklemlerini aşağıdaki formda yazabiliriz.

$$\dot{x}(t) = A(x)x(t) + B(x)u(t) \quad (6.4)$$

Burada,

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ M^{-1}F & M^{-1}G \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}H \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2)(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\alpha^2 \\ 0 & 0 & -L_1\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2)\alpha^2 \\ 0 & 0 & EI_aK \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -\beta_1 + (M_2 + 2m_2) & (\frac{M_2}{2} + m_2) & 2L_1\sin(\theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\alpha^2 \\ L_1L_2\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2 & L_1L_2\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2 & \\ -(\frac{M_2}{2} + m_2)L_1L_2\sin(\theta_2)\dot{\theta}_1 & -\beta_2 & 0 \\ -L_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_2)\gamma^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Ek-2'de verilen ve MATLAB dilinde hazırlanan benzetim programı herbir benzetim anında sistemin dinamiğini tanımlayan (6.4) denklemini esnek parçanın istenilen mod sayısı için çözerek sistemin tepkisini bulmaktadır. Programın akışı aşağıdaki gibidir.

- . Sistemin parametre değerleri ($E, I_a, \rho_1, \rho_2, L_1, L_2, I_{h_1}, I_{h_2}, m_1, m_2, \beta_1, \beta_2$) ana program içinde tanımlanmıştır. Program çalıştırıldığında esnek parça için seçilen mod sayısı n ve benzetim süresi T programa girilir.
- . Newton-Raphson algoritması kullanılarak frekans denkleminin çözümü olan k_i 'ler bulunur.
- . Sistemin dinamiği ile ilgili vektör ($\lambda, h_i, \phi_i(L_2), \gamma^a, \gamma^b, \alpha^a, \alpha^b$) ve matrisler (a, Λ, K) hesaplanır.

- . A ve B matrislerinin değeri herbir benzetim aralığının başında x değerleri kullanılarak hesaplanmakta ve o aralık boyunca bu değerlerin sabit kaldığı kabul edilmektedir. Denklem (6.4)'ün çözümü olan x 'ler, bir önceki adımda hesaplanmış olan x değeri sistemin başlangıç koşulu olarak kullanılarak (ilk adımda sistemin başlangıç koşulları kullanılmıştır) 1 ms aralıklarla *lsim* komutu yardımıyla hesaplanır.
- . Benzetim süresinin sonucunda hesaplanan x değerleri kullanılarak robot kolunun eklem açıları ve esnek parçanın uç sapması zamana karşı çizilir.

Birinci yöntemde adımın büyüklüğü tahmin edilen hataya göre ayarlanırken, ikinci yöntemde ise sabit adımlarla ($t_s = 1ms$) sistemin tepkisi bulunmaktadır. Genellikle birinci yöntemle çok daha fazla adımda sistemin tepkisi elde edilirken, daha hassas bir çözüm elde edilmektedir. Ancak daha çok sayıda adım sayısına paralel olarak benzetim süresinin uzaması ise birinci metodun bir dezavantajdır. İkinci metod için 1 ms'lik sabit adım kullanılarak yapılan çeşitli benzetim çalışmalarında elde edilen sonuçların, birinci metod kullanılarak yapılan benzetim çalışmalarında elde edilen sonuçlarla arasında gözle görülebilir bir fark olmadığı gözlemlenmiştir.

6.2 Benzetim Sonuçları

Benzetimi yapılan sistemin parametre değerleri aşağıda verilmiştir.

$$E = 7.00 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad I_a = 2.14 \times 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$\rho_1 = 1.00 \text{ kg/m}, \quad \rho_2 = 0.500 \text{ kg/m}, \quad L_1 = 0.600 \text{ m}, \quad L_2 = 0.800 \text{ m}$$

$$m_1 = 0.250 \text{ kg}, \quad 0 \leq m_2 \leq 0.750 \text{ kg}$$

$$\beta_1 = 1.00 \times 10^{-2} \text{ Nms/rad}, \quad \beta_2 = 5.00 \times 10^{-3} \text{ Nms/rad}$$

İkinci bölümde belirtildiği gibi I_{h_1} , birinci motorun roturunun dönme eksenine etrafındaki eylemsizlik momenti $I_{h_{1r}}$ ile ikinci motorun statorunun eylemsizlik momentinin $I_{h_{2s}}$ toplamı ve I_{h_2} ise ikinci motorun roturunun dönme eksenine etrafındaki eylemsizlik momenti $I_{h_{2r}}$ ile esnek parçanın uç noktasında yer alan kütle eylemsizlik momentinin toplamıdır. İkinci motorun statorunun m_{1s} kütle sine sahip içi boş bir silindir ve esnek parçanın uç noktasında yer alan m_2 kütle sine sahip yükün ise küp şeklinde olduğu kabul edilmiştir. Buna göre:

$$I_{h_1} = I_{h_{1r}} + I_{h_{2s}} = I_{h_{1r}} + m_{1s}(r_1^2 + r_2^2)/2$$

$$I_{h_2} = I_{h_{2r}} + m_2 l^2 / 6$$

Burada r_1 ve r_2 sırasıyla silindirin iç ve dış yarıçapı ve $l = (m_2/\rho_d)^{1/3}$ demirden yapılmış olan küpün bir kenar uzunluğudur. $I_{h_{1r}} = 1.00 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^2$, $m_{1s} = 0.150 \text{ kg}$, $r_1 = 5.00 \times 10^{-2} \text{ m}$, $r_2 = 3.50 \times 10^{-2} \text{ m}$, $I_{h_{2r}} = 5.40 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^2$ ve $\rho_d = 7.68 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ olarak alınmıştır.

Yapılan tüm benzetim çalışmalarında kontrolör tasarımı için esnek parçanın en küçük frekanslı ilk iki modu, benzetim içinse ilk dört modu kullanılmıştır. Dolayısıyla benzetim amacıyla kullanılan modelin gerçek sistemi daha iyi tanımladığı söylenebilir.

Modellemesini yapmış olduğumuz robot kolunun esnekliğini gösterebilmek için, uç noktası kütesinin dört ayrı değeri ve esnek parçanın en düşük frekanslı ilk dört modu kullanılarak açık döngü sistemin benzetimi yapılmıştır. Herbir ekleme uygulanan girdi,

$$\tau_i(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

formundadır. Yapılan benzetimler Şekil 6.1, 6.2, 6.3 ve 6.4'te gösterilmiştir. Benzetimler Ek-1'de verilen program kullanılarak yapılmıştır. Şekillerden de görülebileceği gibi, ikinci parçanın esnekliğinden dolayı robot kolunun her iki ekleminin hareketi esnasında ve uç noktasında salınımlar oluşmaktadır. Robot kolunun uç noktasındaki salınımlar yüksek frekanslı olup, hem uç noktasında ve hem de eklem hareketleri esnasında görülen salınımların frekansı robot kolunun taşımış olduğu yükün değeri arttıkça düşmektedir.

6.2.1 PD kontrolör ile sistemin benzetimi

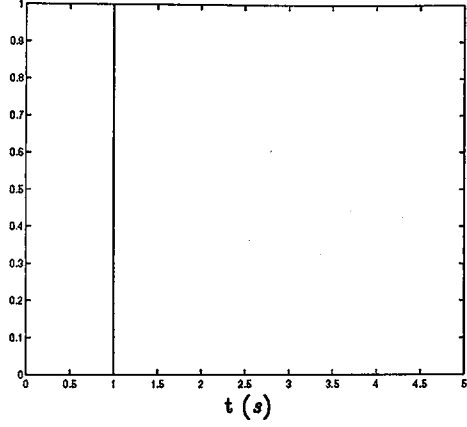
İlk olarak denklem (5.1) ile verilen formda PD kontrolörler kullanılarak sisteme uygulanan sabit referans sinyaller takip edilmeye çalışılmıştır. Tasarlanan PD kontrolör,

$$\tau_1 = 10e_1 - 9\dot{\theta}_1, \quad \tau_2 = 12e_2 - 8\dot{\theta}_2 \quad (6.5)$$

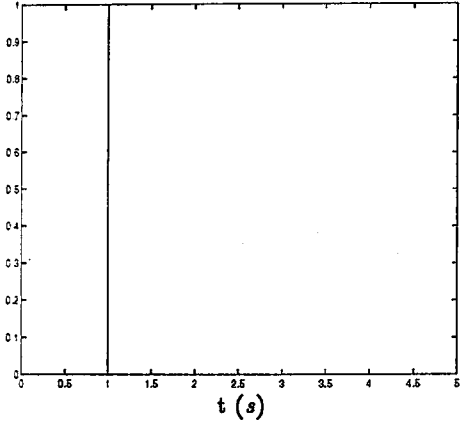
formundadır. PD kontrolörün geri besleme kazanç değerleri iki modlu sistem için deneme yanılma metodu ile benzetim çalışmaları yapılarak elde edilmiştir. Benzetim çalışmaları $\hat{\theta}_1 = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$ ve $\hat{\theta}_2 = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$ alınarak dört ayrı uç noktası kütesi için yapılmıştır. Yapılan benzetimler Şekil 6.5, 6.6, 6.7 ve 6.8'de gösterilmiştir. Benzetimler Ek-1'de verilen program kullanılarak yapılmıştır.

Şekillerden de görülebileceği gibi eklem açıları 3-4 saniye içerisinde sisteme uygulanan referans sinyali yakalarken, yine aynı süre içerisinde esnek parçanın uç

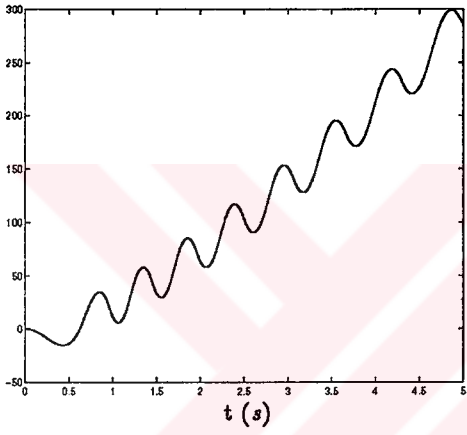
τ_1 (N/m)



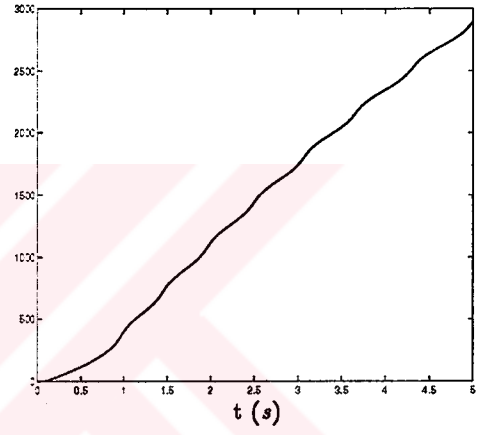
τ_2 (N/m)



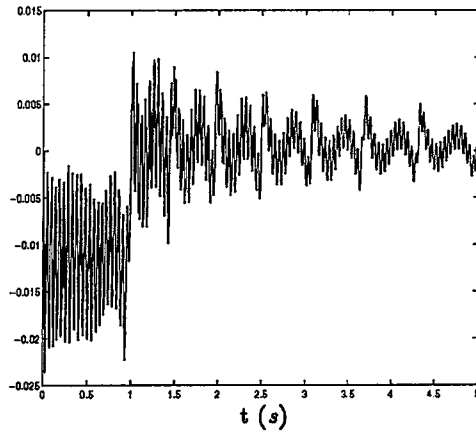
θ_1 (derece)



θ_2 (derece)

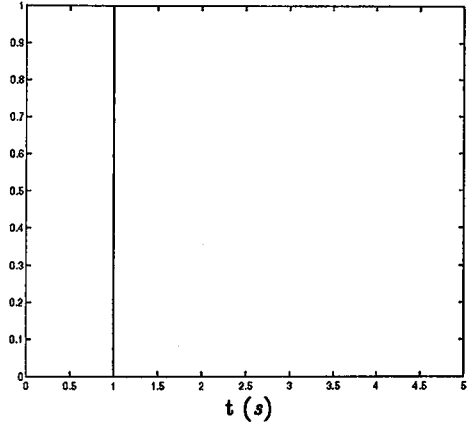


Uç sapması (metre)

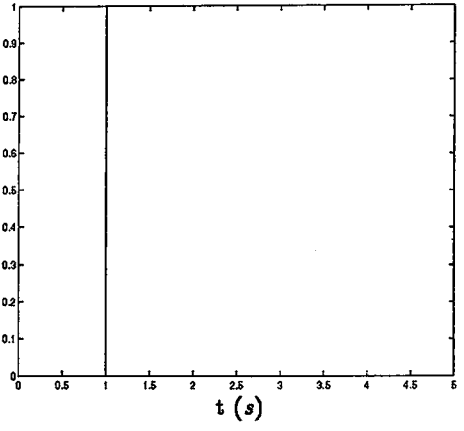


Şekil 6.1 $m_2 = 0$ için
açık döngü sistemin benzetimi

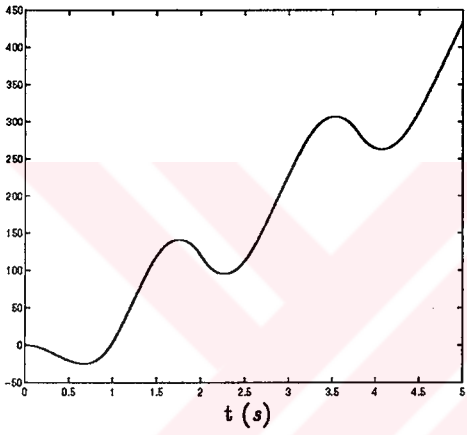
τ_1 (N/m)



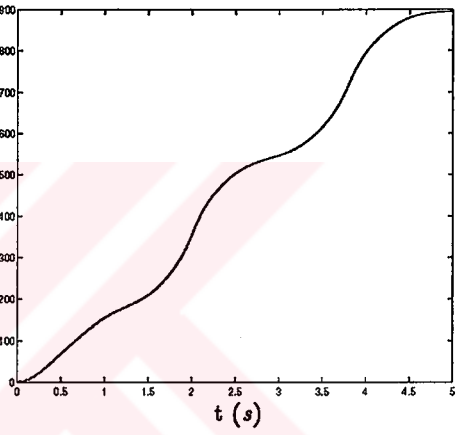
τ_2 (N/m)



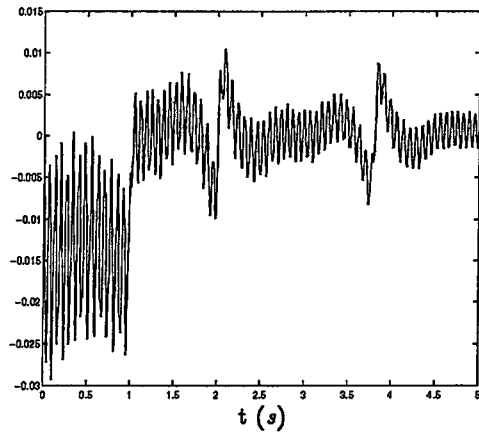
θ_1 (derece)



θ_2 (derece)

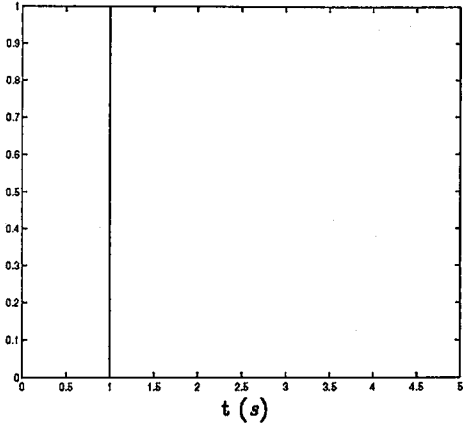


Uç sapması (metre)

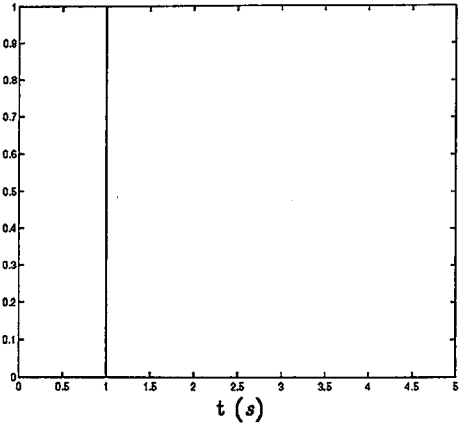


Şekil 6.2 $m_2 = 0.250$ kg için
açık döngü sistemin benzetimi

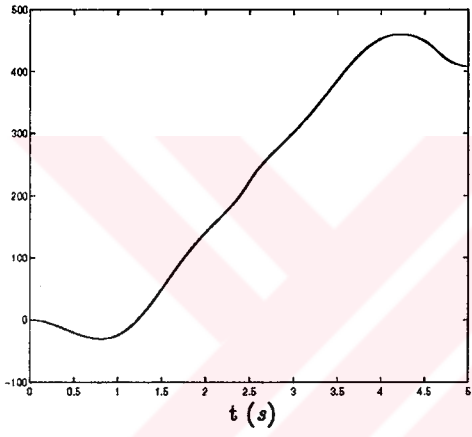
τ_1 (N/m)



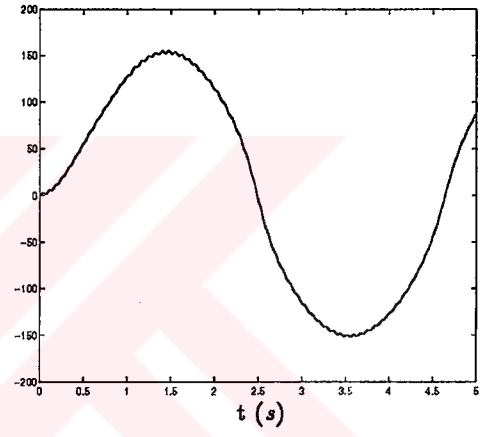
τ_2 (N/m)



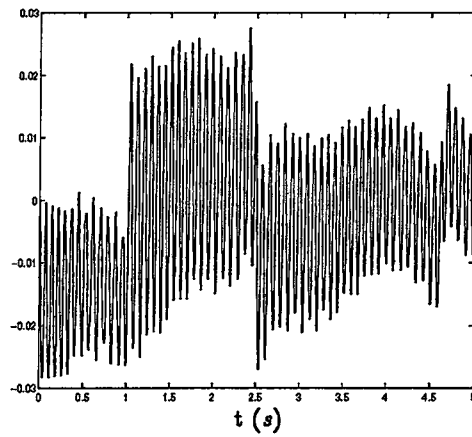
θ_1 (derece)



θ_2 (derece)

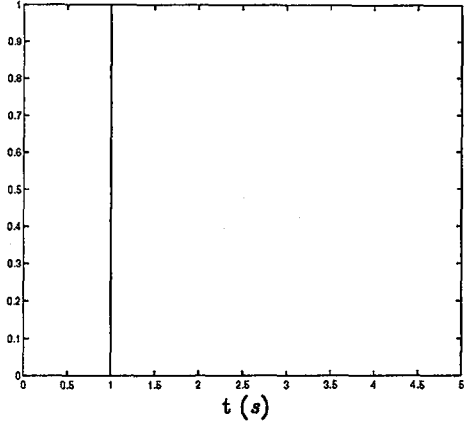


Uç sapması (metre)

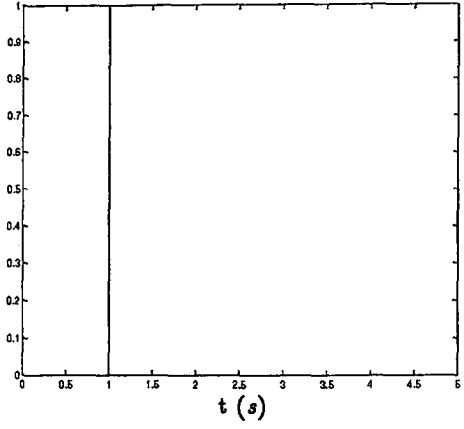


Şekil 6.3 $m_2 = 0.500$ kg için
açık döngü sistemin benzetimi

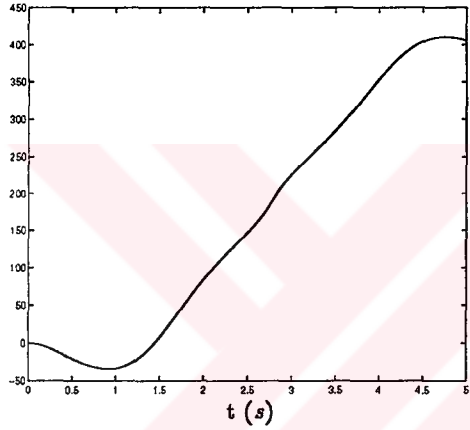
τ_1 (N/m)



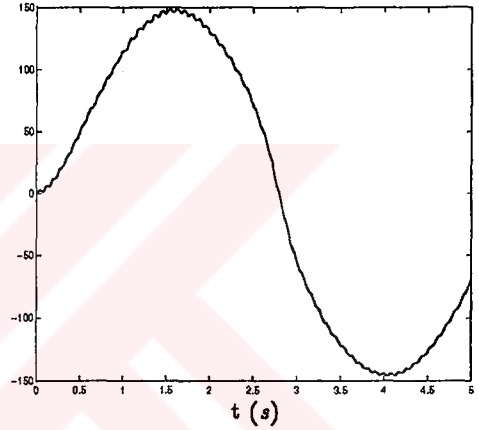
τ_2 (N/m)



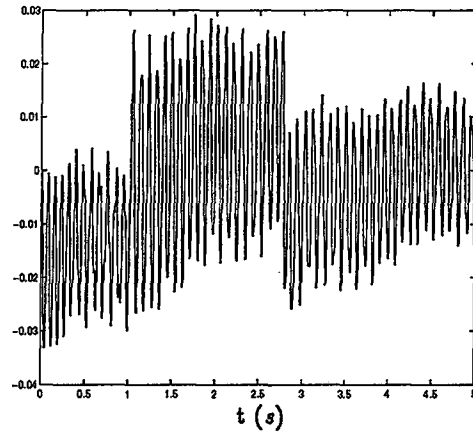
θ_1 (derece)



θ_2 (derece)

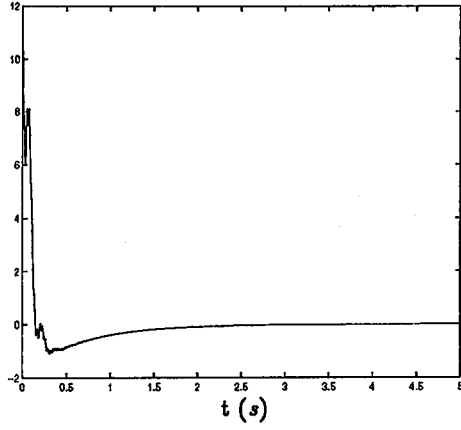


Uç sapması (metre)

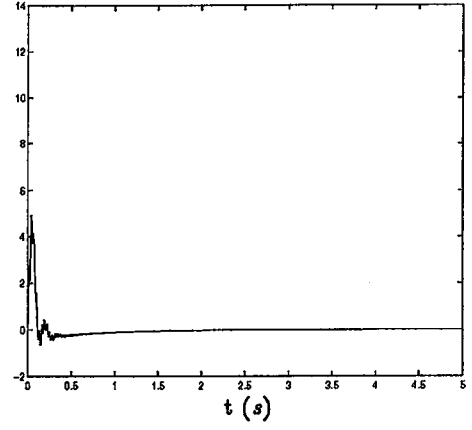


Şekil 6.4 $m_2 = 0.750$ kg için
açık döngü sistemin benzetimi

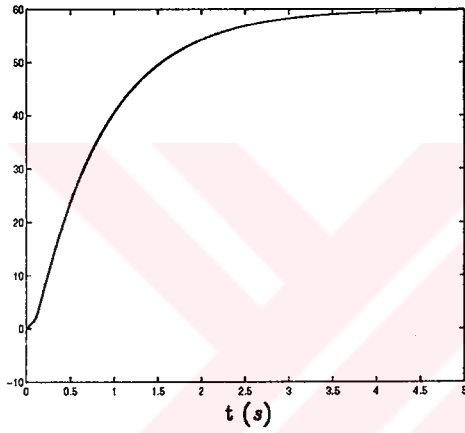
τ_1 (N/m)



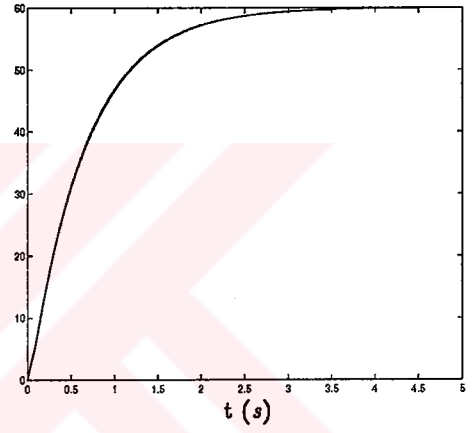
τ_2 (N/m)



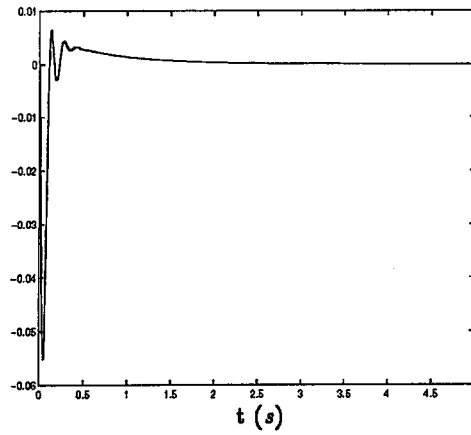
θ_1 (derece)



θ_2 (derece)

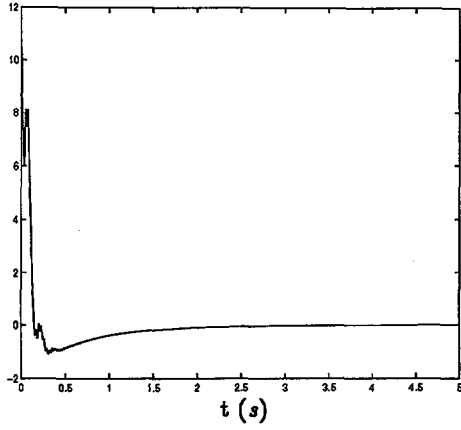


Uç sapması (metre)

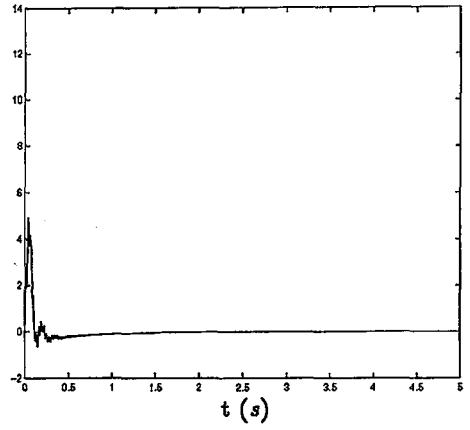


Şekil 6.5 $m_2 = 0$ için denklem (6.5) ile verilen kontrolör kullanılarak yapılan benzetim

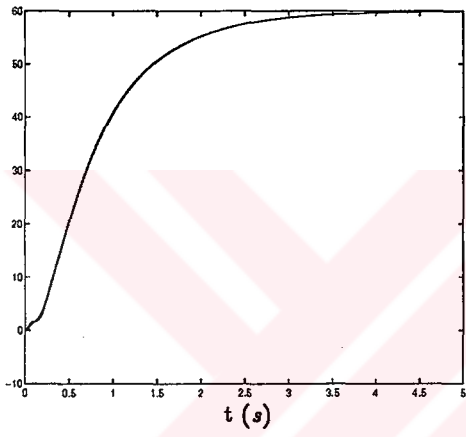
τ_1 (N/m)



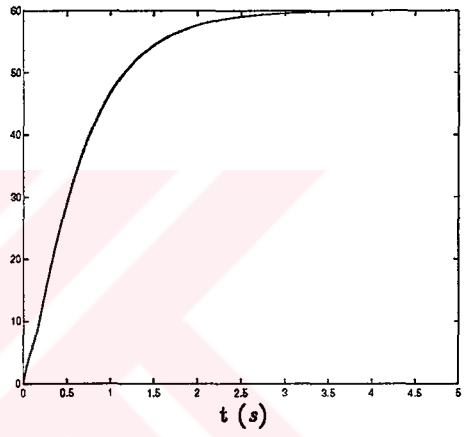
τ_2 (N/m)



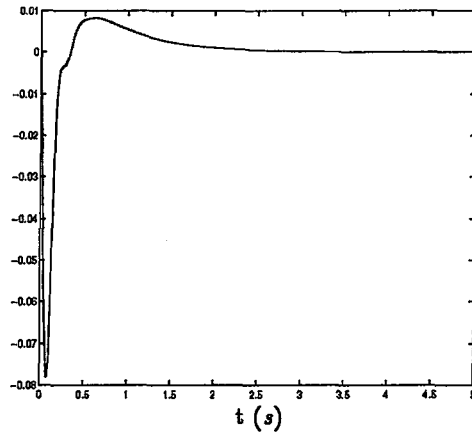
θ_1 (derece)



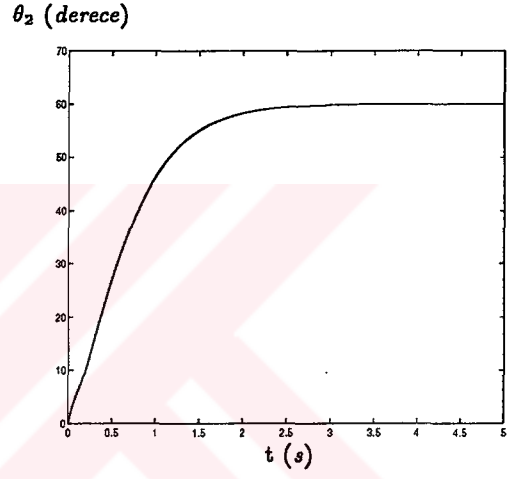
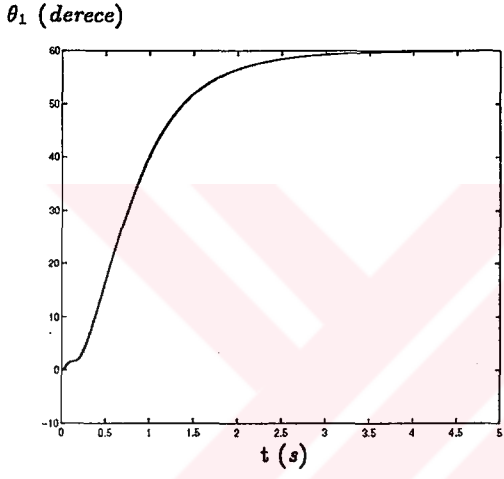
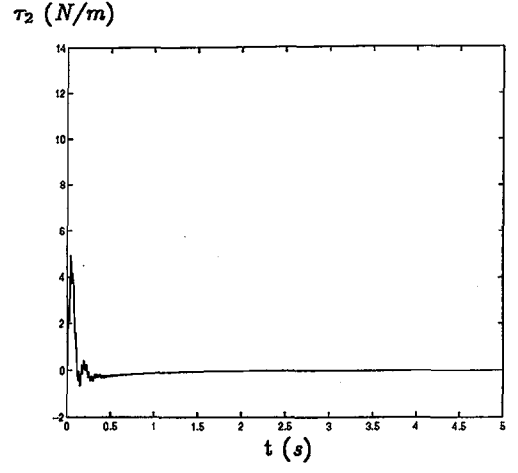
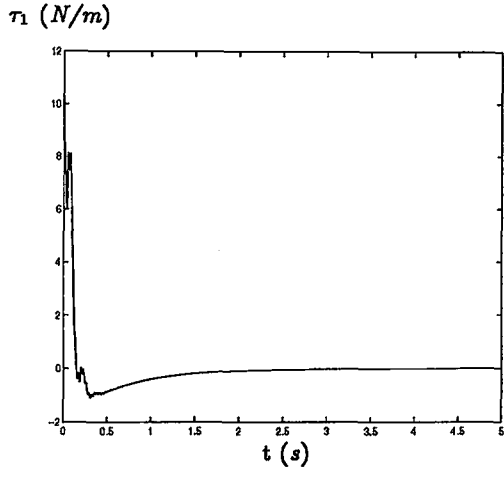
θ_2 (derece)



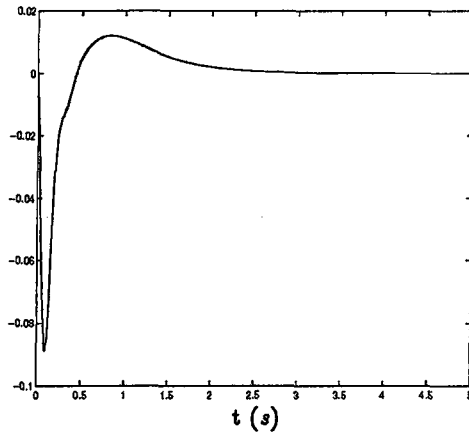
Uç sapması (metre)



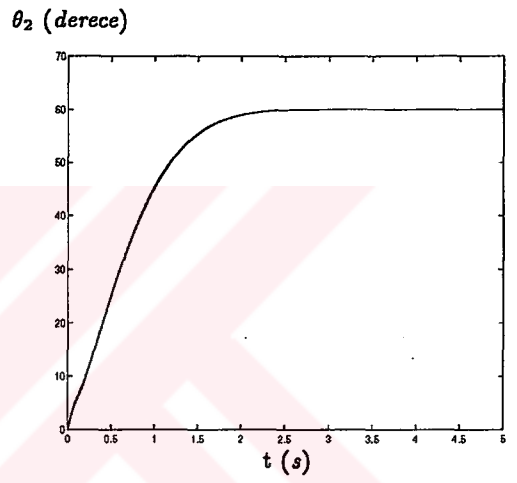
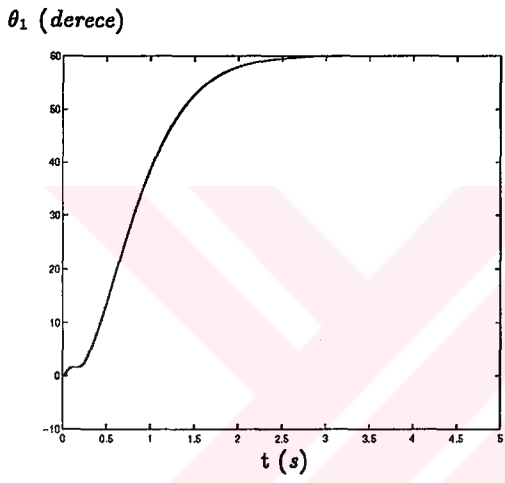
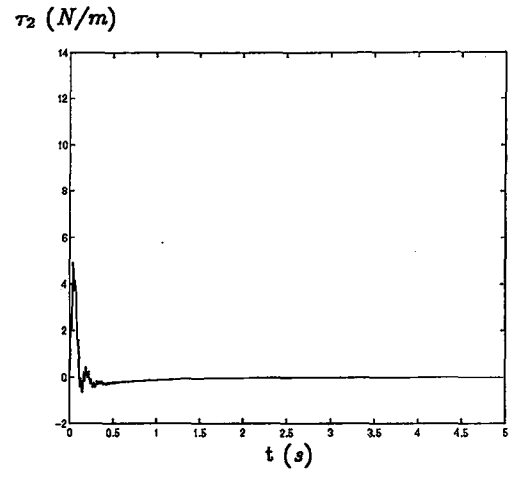
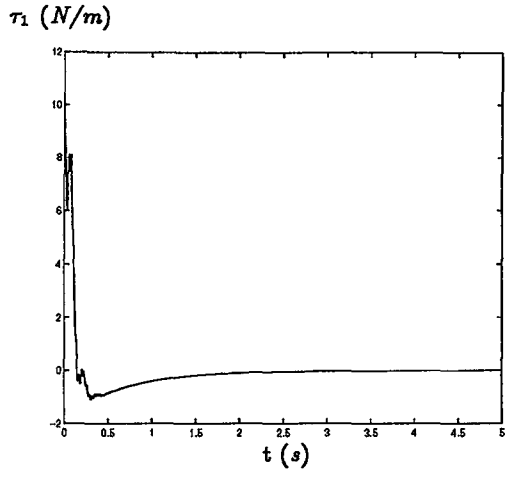
Şekil 6.6 $m_2 = 0.250$ kg için denklem (6.5) ile verilen kontrolör kullanılarak yapılan benzetim



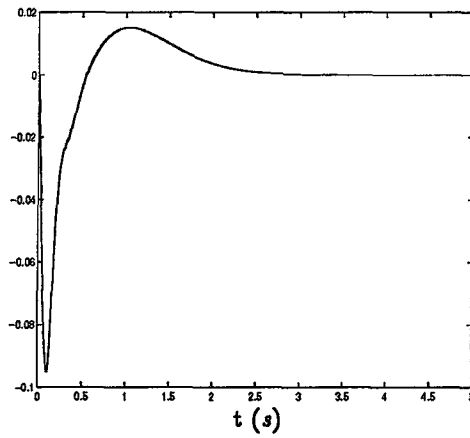
Uç sapması (metre)



Şekil 6.6 $m_2 = 0.500$ kg için denklem (6.5) ile verilen kontrolör kullanılarak yapılan benzetim



Uç sapması (metre)



Şekil 6.6 $m_2 = 0.750$ kg için denklem (6.5) ile verilen kontrolör kullanılarak yapılan benzetim

sapmaları sönümlenmektedir. $m_2 = 0.750 \text{ kg}$ iken oluşan maksimum uç sapması değeri 9.5 cm 'dir.

Yapılan benzetim çalışmalarında esnek parça belirli bir katılığa sahipken PD kontrolörlerin iyi sonuçlar verdiği görülmüştür. Esnek parçanın katılığı azaldıkça ise geniş bir çalışma alanı içinde gerek sisteme uygulanan sabit referans sinyallerin takibi açısından gerekse de esnek parçanın uç sapmasının sönümlenmesi açısından PD kontrolörlerin performansı yetersiz kalmaktadır.

6.2.2 Doğrusal olmayan PD benzeri kontrolör ile sistemin benzetimi

Denklem (5.2) ile verilen formda doğrusal olmayan PD benzeri kontrolörler kullanılarak sisteme uygulanan sabit referans sinyaller takip edilmeye çalışılmıştır. Tasarlanan doğrusal olmayan PD benzeri kontrolör,

$$\tau_i(t) = (12 - 4.5s(e_i))e_i - (8 + 6s(e_i))\dot{\theta}_i, \quad i = 1, 2 \quad (6.6)$$

formundadır. Burada,

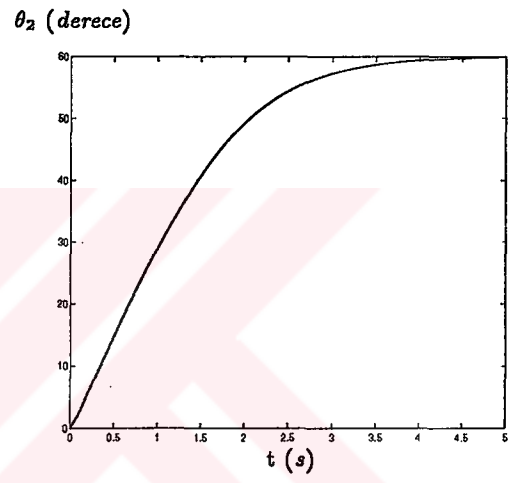
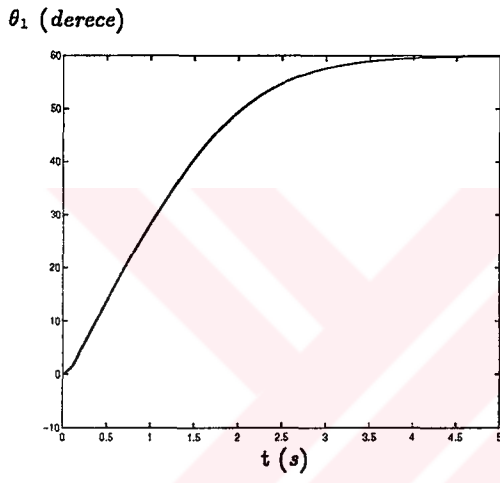
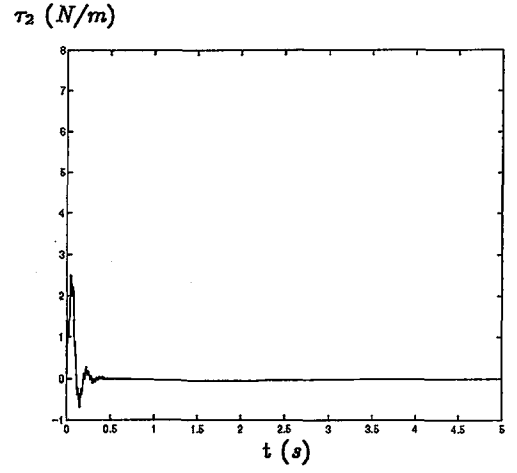
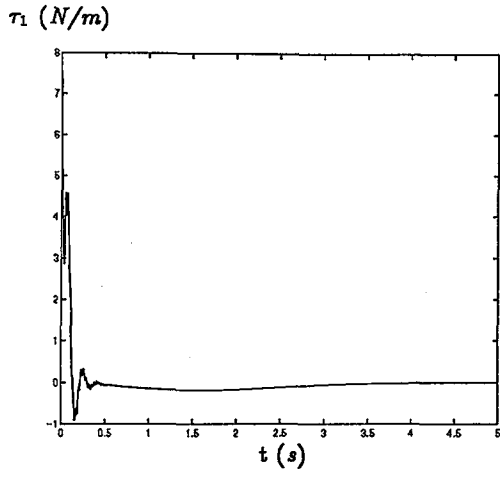
$$s(e_i) = \begin{cases} |e_i|, & |e_i| \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & |e_i| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

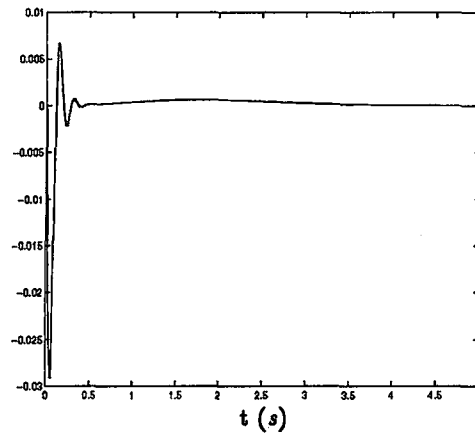
Doğrusal olmayan PD benzeri kontrolörün geri besleme kazanç değerleri iki modlu sistem için deneme yanılma metodu ile benzetim çalışmaları yapılarak elde edilmiştir. Benzetim çalışmaları $\hat{\theta}_1 = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$ ve $\hat{\theta}_2 = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$ alınarak dört ayrı uç noktası kütlesi için yapılmıştır. Yapılan benzetimler Şekil 6.9, 6.10, 6.11 ve 6.12'de gösterilmiştir. Benzetimler Ek-1'de verilen program kullanılarak yapılmıştır.

Şekillerden de görülebileceği gibi eklem açıları 3.5-4.5 saniye içerisinde sisteme uygulanan referans sinyali yakalarken, yine aynı süre içerisinde esnek parçanın uç sapmaları sönümlenmektedir. $m_2 = 0.750 \text{ kg}$ iken oluşan maksimum uç sapması değeri yaklaşık 5.2 cm 'dir.

Doğrusal olmayan PD benzeri kontrolör altındaki robot kolu parçalarının kalkınma anında yavaş hareket etmesi, doğrusal olmayan PD benzeri kontrolörlerin PD kontrolörlere göre esnek parçanın uç sapmasının sönümlenmesi açısından daha iyi bir performans göstermesine neden olmuştur. Ayrıca aynı nedenden dolayı doğrusal olmayan PD benzeri kontrolörler, PD kontrolörlere göre sabit bir referans sinyalin takip edilmesi açısından yavaş kalmaktadır. Bir başka deyişle robot kolunun eklem açılarının uygulanan sabit bir referans sinyali yakalama süresi uzamaktadır.

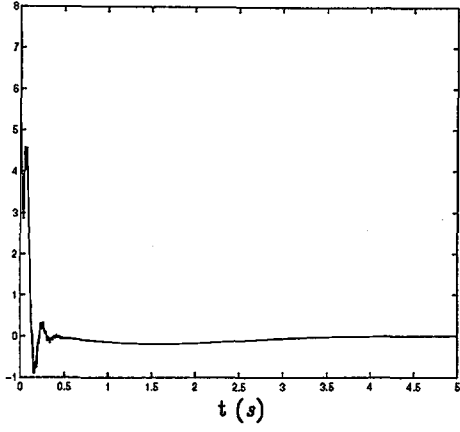


Uç sapması (metre)

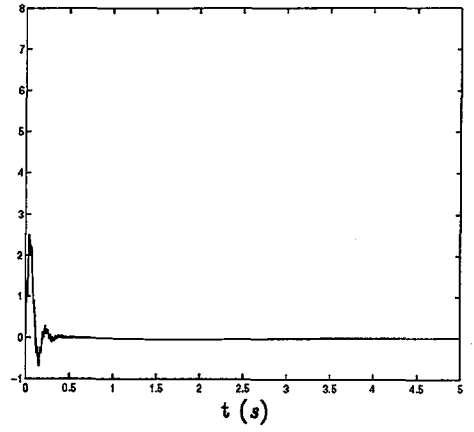


Şekil 6.9 $m_2 = 0$ için denklem (6.6) ile verilen kontrolör kullanılarak yapılan benzetim

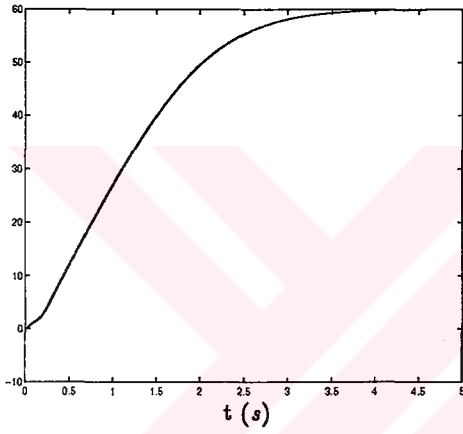
τ_1 (N/m)



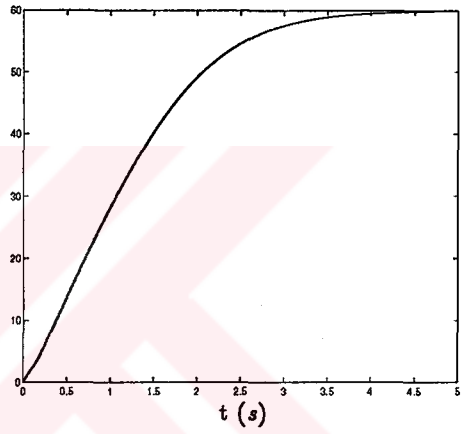
τ_2 (N/m)



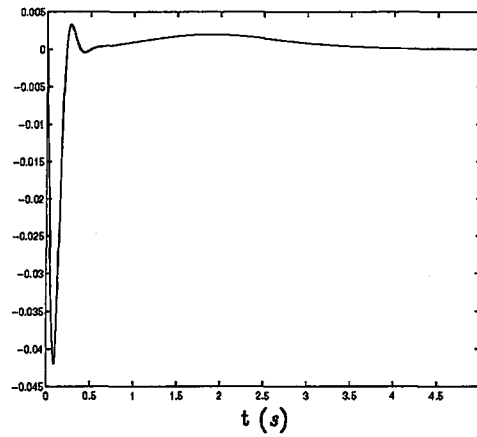
θ_1 (derece)



θ_2 (derece)

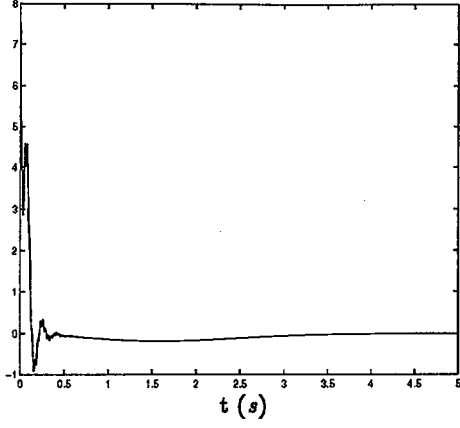


Uç sapması (metre)

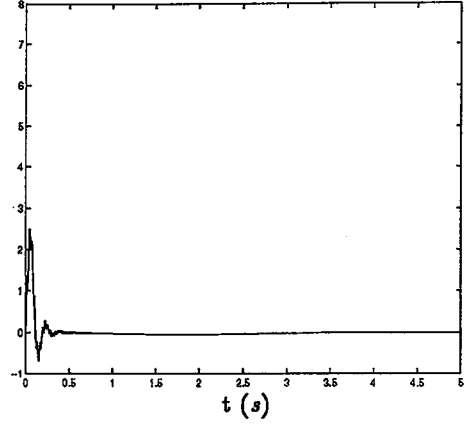


Şekil 6.10 $m_2 = 0.250$ kg için denklem (6.6) ile verilen kontrolör kullanılarak yapılan benzetim

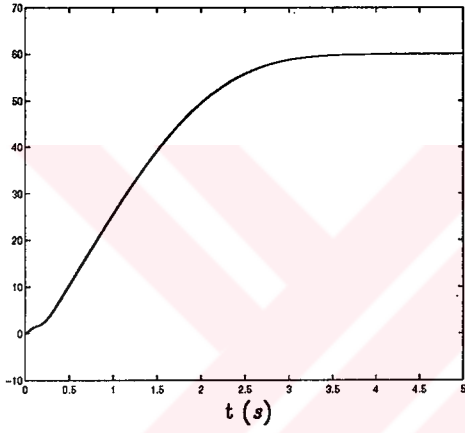
τ_1 (N/m)



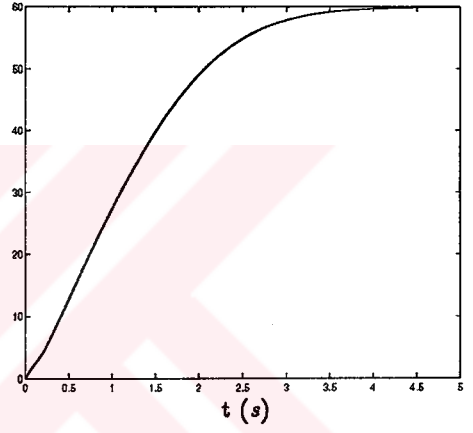
τ_2 (N/m)



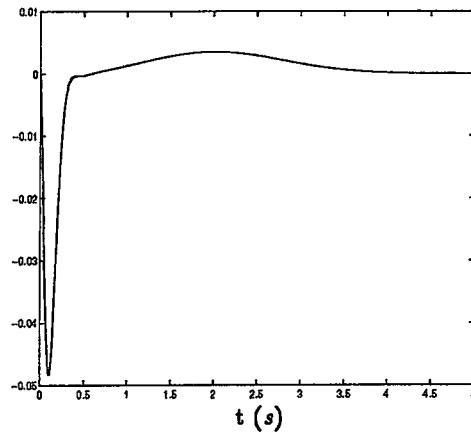
θ_1 (derece)



θ_2 (derece)

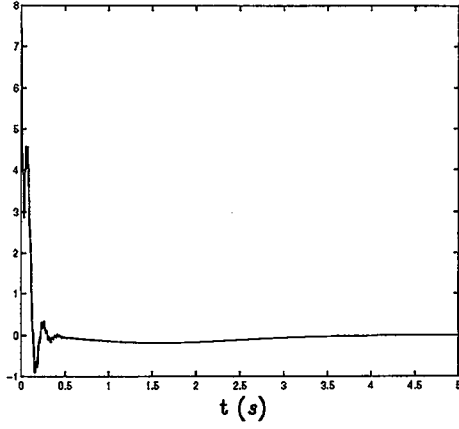


Uç sapması (metre)

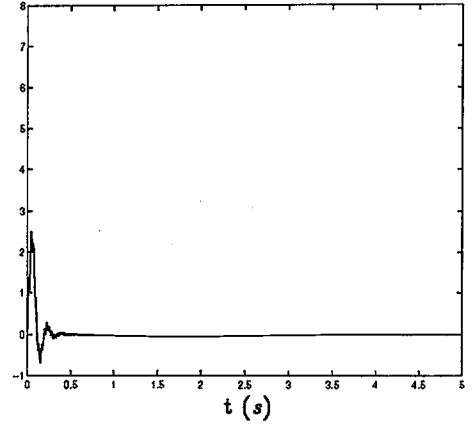


Şekil 6.11 $m_2 = 0.500$ kg için denklem (6.6) ile verilen kontrolör kullanılarak yapılan benzetim

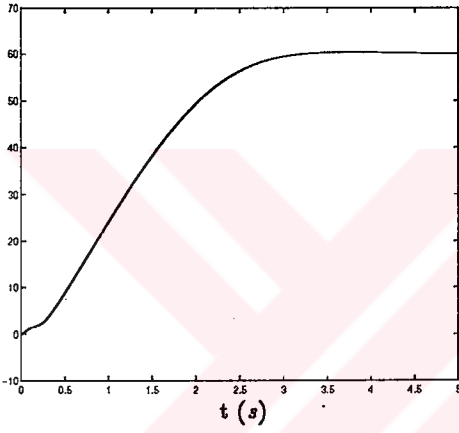
τ_1 (N/m)



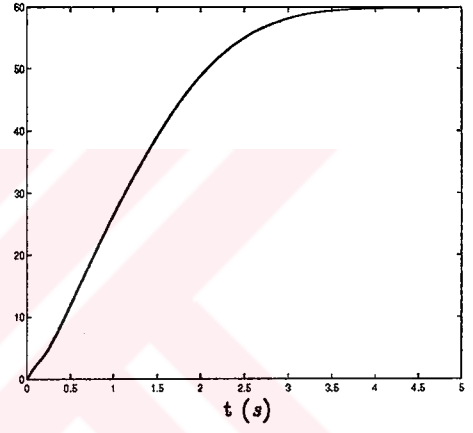
τ_2 (N/m)



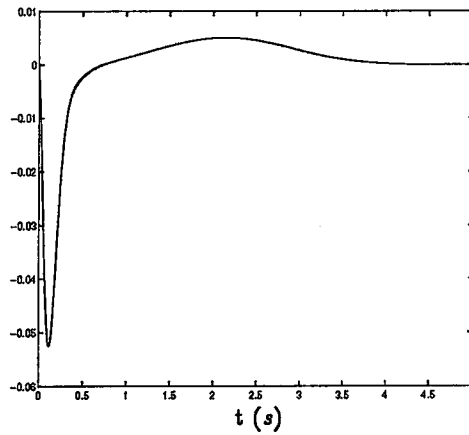
θ_1 (derece)



θ_2 (derece)



Uç sapması (metre)



Şekil 6.12 $m_2 = 0.750$ kg için denklem (6.6) ile verilen kontrolör kullanılarak yapılan benzetim

6.2.3 PD kontrolör ile bir yörünge sinyalinin takibi

PD kontrolörün performansını daha da iyileştirebilmek için, PD kontrolör sabit referans sinyaller yerine belirli yörüngeleri takip edecek şekilde tasarlanmıştır. Tasarlanan PD kontrolör,

$$\tau_1(t) = 0.025e_1(t) + 5\dot{e}_1(t), \quad \tau_2(t) = 0.8e_2(t) + 4.35\dot{e}_2(t) \quad (6.7)$$

formundadır.

PD kontrolörün geri besleme kazanç değerleri iki modlu sistem için deneme yanılma metodu ile benzetim çalışmaları yapılarak elde edilmiştir. Benzetim çalışmalarında herbir eklem için bir yörünge atanmış ve robot kolunun eklem açılarının takip etmesi istenilen yörünge, 3. bölümde anlatıldığı gibi 4-3-4 yörüngesi yaklaşımı kullanılarak oluşturulmuştur. Benzetim çalışmalarında 4-3-4 yörüngesi polinom fonksiyon katsayılarını hesaplamak için aşağıdaki sınır koşulları kullanılmıştır.

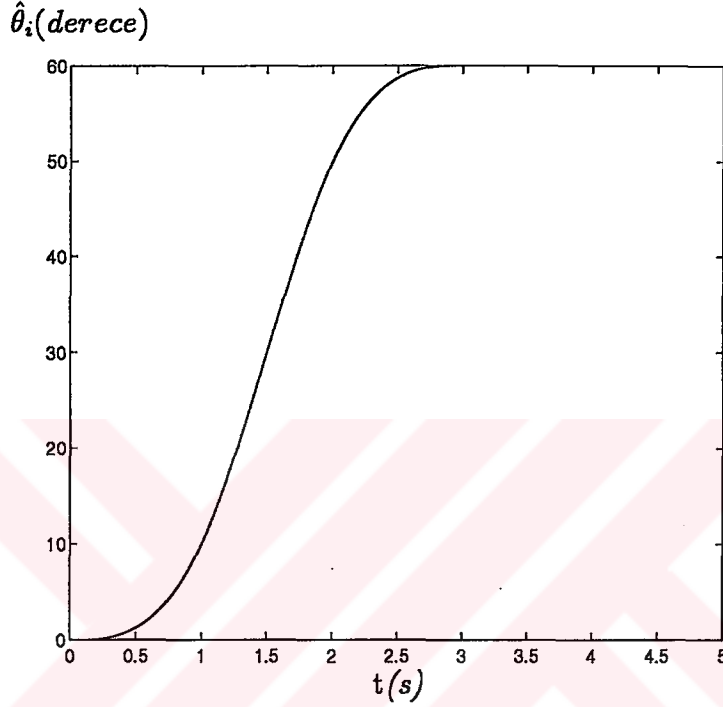
- i. Başlangıç noktasında, eklem başlangıç pozisyonu, hızı ve ivmesi sıfırdır.
- ii. Ayrılma noktası 10° ve yaklaşma noktası ise 50° olarak seçilmiştir. Ayrılma noktasının pozisyonu, hızı ve ivmesi bir önceki yörünge bölgesi ile sürekli, yaklaşma noktasının pozisyonu, hızı ve ivmesi ise bir sonraki yörünge bölgesi ile süreklidir.
- iii. Son noktasının pozisyonu 60° , hızı ve ivmesi ise sıfırdır.

Yukarıda verilen sınır koşulları altında, eklem açılarının takip etmesi istenilen yörüngeye ait 4-3-4 yörüngesi polinom fonksiyonları herbir bölge için aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\hat{\theta}_i(\tau) = \begin{cases} 0.1745\tau^3, & 0 \leq \tau \leq 1 \\ -0.3491(\tau - 1)^3 + 0.5236(\tau - 1)^2 \\ \quad + 0.5236(\tau - 1) + 0.1745, & 1 < \tau \leq 2 \\ 0.1745(\tau - 2)^3 - 0.5235(\tau - 2)^2 \\ \quad + 0.5235(\tau - 2) + 0.8727, & 2 < \tau \leq 3 \end{cases}$$

Burada τ gerçek zaman değişkenini göstermektedir. Başlangıç-ayrılma bölgesi yörüngesi, $0 \leq \tau \leq 1$; ayrılma-yaklaşma bölgesi yörüngesi, $1 < \tau \leq 2$ ve yaklaşma-son bölgesi yörüngesi, $2 < \tau \leq 3$ saniye aralıkları için yukarıda verilen polinom fonksiyonlarla tanımlanmıştır. Yörünge sinyali, eklemler hareketlerini 3 saniye

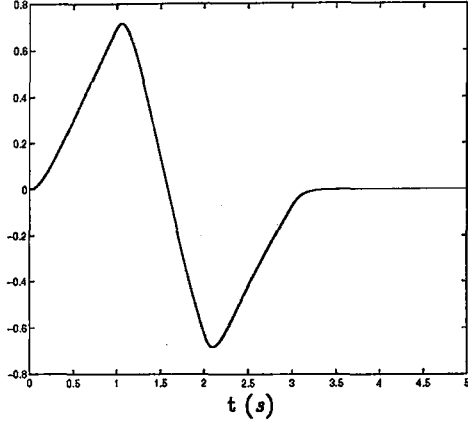
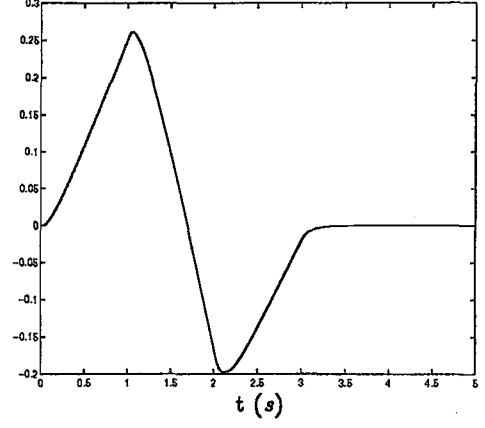
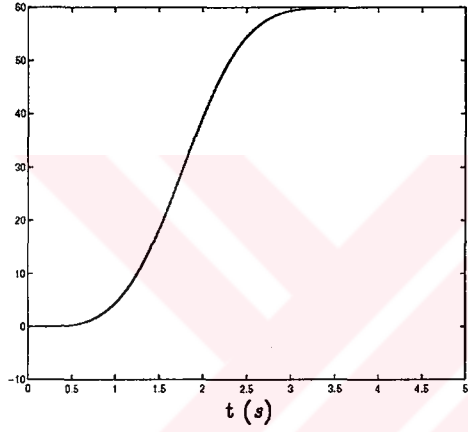
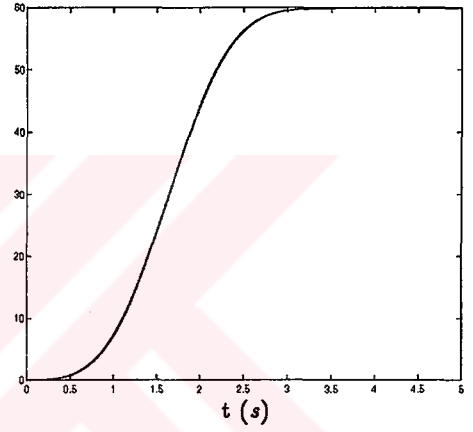
içerisinde tamamlayacak şekilde seçilmiş ve 1 sn'lik yörünge bölgeleri tanımlanmıştır. Her iki eklem için seçilen yörünge Şekil 6.13'de gösterilmiştir.



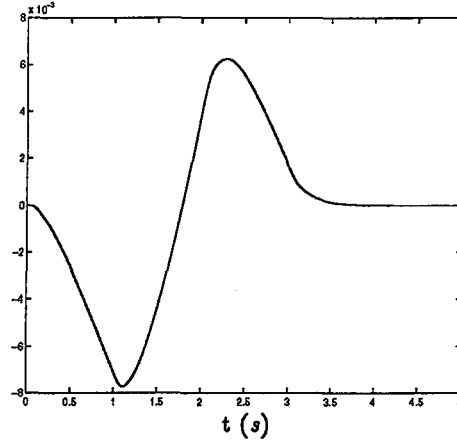
Şekil 6.13 Yörünge sinyali

Her iki eklem açısı için de Şekil 6.13'de gösterilen yörünge sinyali kullanılarak dört ayrı uç noktası kütlesi için benzetim yapılmıştır. Yapılan benzetimler Şekil 6.14, 6.15, 6.16 ve 6.17'de gösterilmiştir.

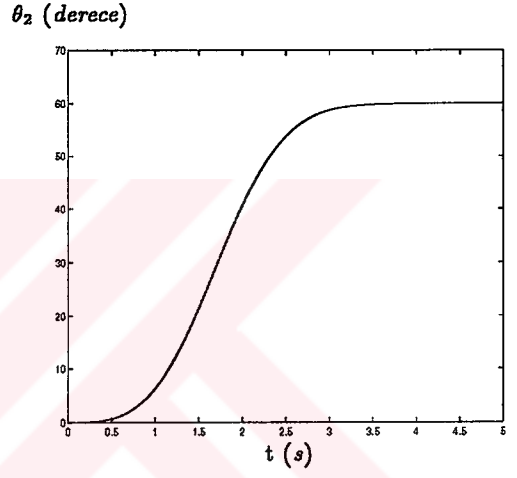
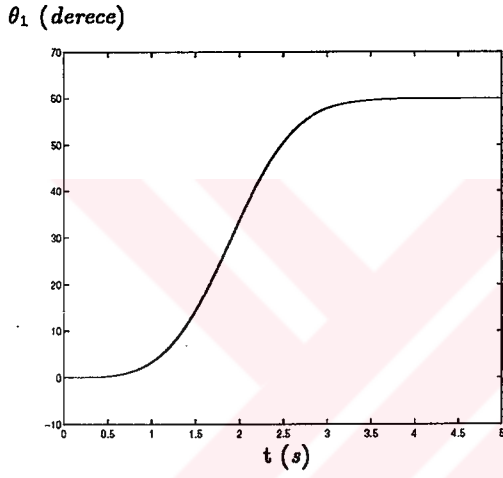
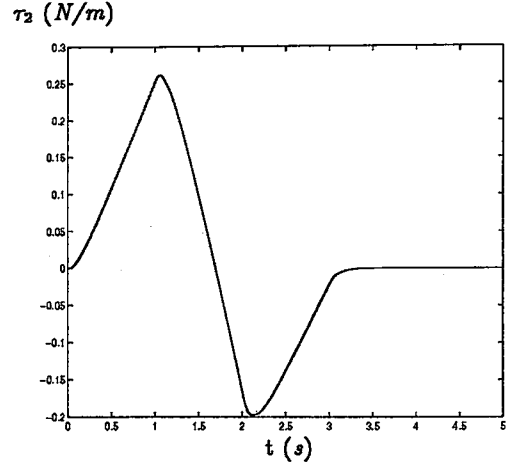
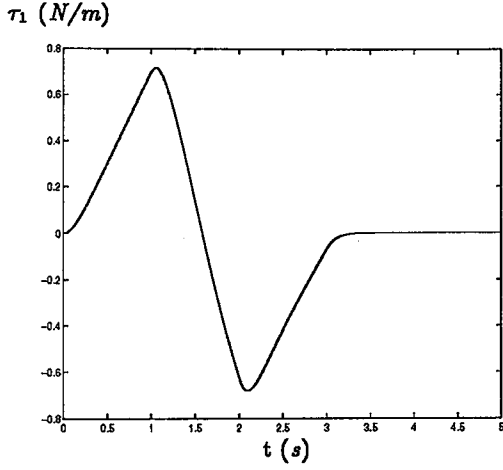
Benzetimler Ek-3'te verilen program kullanılarak yapılmıştır. Ek-3'te verilen program, Ek-2'de verilen programa polinom fonksiyon katsayılarını ve robot kolunun izleyeceği yörünge sinyalinin o anki değerini hesaplayan ek iki fonksiyon eklenerek elde edilmiştir. Eklenen fonksiyonlar ise *coeffs.m* ve *trjt.m* fonksiyonlarıdır. *coeffs.m* fonksiyonu, 4-3-4 yörüngesi polinom fonksiyonlarının katsayılarını denklem (3.15)'i kullanarak hesaplamaktadır. Herbir eklem için belirlenen yörüngeye ait polinom fonksiyon katsayıları *coeffs.m* fonksiyonunda hesaplanarak ana programa döner. *trjt.m* fonksiyonu ise herbir benzetim anı için eklem pozisyonunun, hızının ve ivmesinin ne olması gerektiğini denklem (3.2), denklem (3.4) ve denklem (3.8) ile bu denklemlerin zamana göre birinci ve ikinci türevlerini kullanarak hesaplamaktadır.

τ_1 (N/m) τ_2 (N/m) θ_1 (derece) θ_2 (derece)

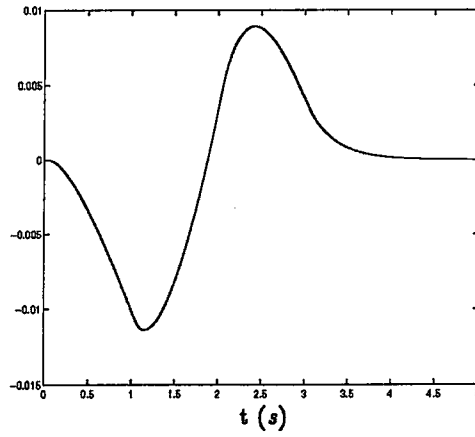
Uç sapması (metre)



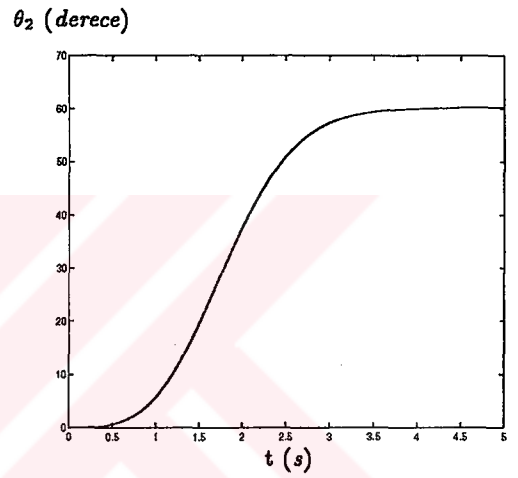
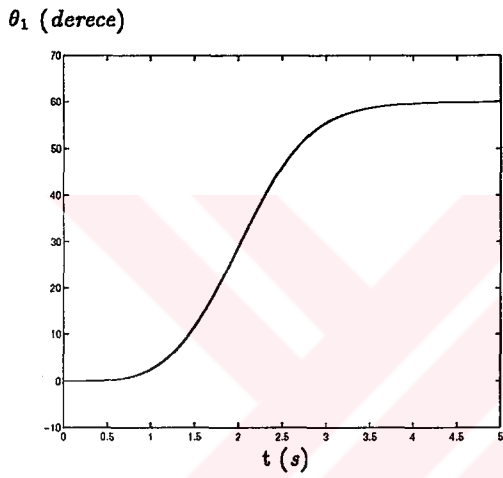
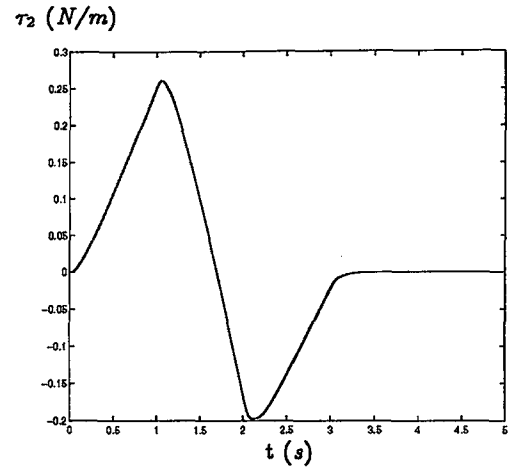
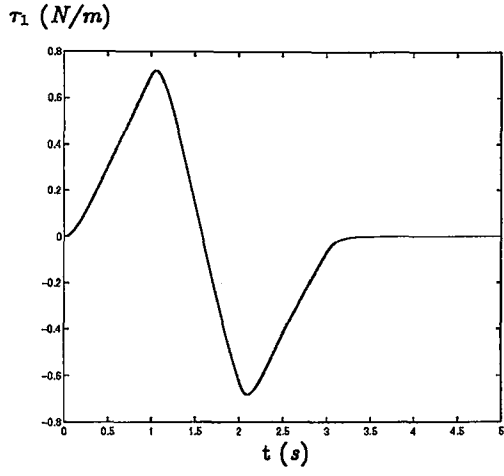
Şekil 6.15 $m_2 = 0.250$ kg için denklem (6.7) ile verilen kontrolör kullanılarak yapılan benzetim



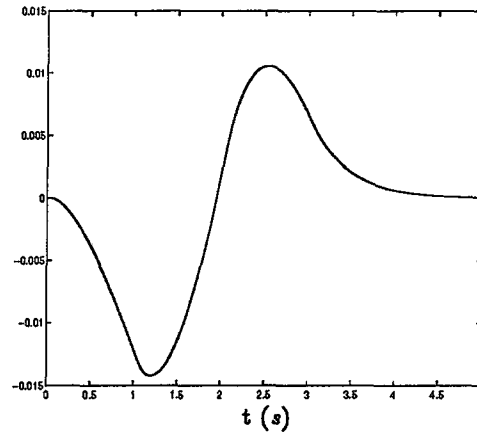
Uç sapması (metre)



Şekil 6.16 $m_2 = 0.500$ kg için denklem (6.7) ile verilen kontrolör kullanılarak yapılan benzetim



Uç sapması (metre)



Şekil 6.17 $m_2 = 0.750$ kg için denklem (6.7) ile verilen kontrolör kullanılarak yapılan benzetim

Şekil 6.14, 6.15, 6.16 ve 6.17'den de görülebileceği gibi esnek robot kolunun eklemlerinin hareketi ve esnek parçanın uç sapmasının sönümlenmesi açısından, PD kontrolörlerle yörünge takibi yapılması iyi sonuçlar vermektedir. Eklem açılarının takip edilmesi istenilen yörünge sinyalini izlemede yapmış olduğu hata, yaklaşık olarak $\% \mp 5$ arasındadır. Takip hatasının değeri esnek parçanın uç noktasında bulunan m_2 kütesinin değeri arttıkça büyümektedir. Esnek parçanın uç sapmaları ise 3.5-4.5 sn içinde sönümlenmektedir. $m_2 = 0.750 \text{ kg}$ iken oluşan maksimum uç sapması değeri yaklaşık 1.4 cm 'dir.

Robot kolunun eklemlerine uygulanacak olan kontrol girdisinin üretimi açısından, PD kontrolörlerle yapılan yörünge sinyallerinin takibi, PD ve doğrusal olmayan PD benzeri kontrolörlerle yapılan referans sinyallerin takibine göre bazı avantajlar sağlamaktadır. Denklem (6.7) ile verilen kontrolör altında birinci ekleme uygulanması gereken maksimum tork yaklaşık 0.75 N/m ve ikinci ekleme uygulanması gereken maksimum tork ise yaklaşık 0.27 N/m iken, denklem (6.5) ile verilen kontrolör altında sırasıyla yaklaşık 10.5 N/m ve 12.5 N/m , ve denklem (6.6) ile verilen kontrolör altında ise sırasıyla yaklaşık 7.6 N/m ve 7.6 N/m 'dir. Dolayısıyla denklem (6.7) ile verilen kontrolörü kullanarak, diğer iki kontrolöre göre çok daha küçük motorlarla istenilen performansı sağlayacak şekilde robot kolu parçalarını hareket ettirmek mümkündür.

PD kontrolörler kullanılarak yapılan yörünge takibinin, PD ve doğrusal olmayan PD benzeri kontrolörlerle sabit bir referans sinyali takip etmeye göre daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

6.2.4 Kompozit kontrolör ile sistemin benzetimi

Esnek bir robot kolunun tüm dinamiği içinde hem katı hal ve hem de esnek hal durumları yer almaktadır. Tasarlanan PD ve doğrusal olmayan PD benzeri kontrolörlerle sistemin sadece katı hal durumları geri beslenerek esnek robot kolu kontrol edilmeye çalışılmıştır. Beşinci bölümde belirtildiği gibi sistemin esnek hal durumlarını robot kolunun eklemlerine uygulanan torklar ile direk olarak kontrol etmemiz mümkün değildir. Tekil perturbasyon metodunu kullanarak sistemin tüm dinamiğini yavaş ve hızlı alt sistem olmak üzere iki alt sisteme ayırdıktan sonra, sistemin hem katı hem de esnek hal durumlarını Bölüm 5'te anlatıldığı gibi kontrol etmemiz mümkündür. Dolayısıyla esnek ve katı hal durumlarının fonksiyonu olan kompozit kontrol girdisi ile gerek robot kolunun eklem hareketleri ve gerekse esnek parçanın uç sapmasının sönümlenmesi açısından PD kontrolörlere göre daha iyi bir performans elde edebiliriz.

Kompozit kontrol stratejisi yavaş alt sistem ve hızlı alt sistem için ayrı ayrı kontrolör tasarımını gerektirmektedir. Yavaş alt sistemin kontrolü Bölüm 5.3.1'de anlatıldığı gibi tork hesaplaması kontrol yaklaşımı kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Tasarlanan kontrolör aşağıdaki formdadır.

$$\bar{u} = -f_1(\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}) + M_{11}(\bar{\theta}) \left[\ddot{\bar{\theta}} + K_v(\dot{\bar{\theta}} - \dot{\bar{\theta}}) + K_p(\bar{\theta} - \bar{\theta}) \right] \quad (6.8)$$

Kontrolördeki PD kontrolörün geri besleme kazanç değerleri iki modlu sistem kullanılarak deneme yanılma metodu ile benzetim çalışmaları yapılarak elde edilmiştir.

$$K_v = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}, \quad K_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}$$

Burada yavaş durum değişkeni θ 'nın hızlı kısmı olmadığı için, $\bar{\theta} = \theta$ ve $\dot{\bar{\theta}} = \dot{\theta}$ dir. Benzetim çalışmalarında her bir eklem için bir yörünge atanmış ve robot kolunun eklem açılarının takip etmesi istenilen yörünge, 4-3-4 yörüngesi yaklaşımı kullanılarak oluşturulmuştur. Yapılan benzetimlerde her iki eklem için de Şekil 6.13'te gösterilen yörünge sinyali kullanılmıştır.

Hızlı alt sistem yavaş durum değişkenlerinin fonksiyonu olan doğrusal bir sistemdir. Hızlı alt sistemi kararlı kılabilmek içinse durum geri beslemesi ile kutup ataması yapılmıştır.

$$\bar{u} = -K_f[(\eta/\mu - K^{-1}\bar{\zeta})^T, (\dot{\eta}/\epsilon)^T]^T \quad (6.9)$$

Burada durum geri beslemesi kazanç matrisi K_f , her bir benzetim anında denklem (5.12) ile verilen hızlı alt sistemi kararlı kılacak şekilde *place.m* fonksiyonu tarafından hesaplanmaktadır. *place.m* fonksiyonu hali hazırda MATLAB paketinde bulunmaktadır.

Sistemin katı ve esnek hal modları arasındaki zaman ölçeği ayırımı, yavaş ve hızlı alt sistemler için kontrolör tasarlanırken de korunmalıdır. Dolayısıyla K_p , K_v ve K_f kazanç matrisleri zaman ölçeği ayırımını koruyacak şekilde seçilmelidir. Açık döngü sistem göz önüne alındığında, sistemin sıfırda iki tane özdeğeri (katı hal modları) ve sanal eksen üzerinde ise sonsuz sayıda özdeğeri (esnek hal modları) vardır. Dolayısıyla kapalı döngü yavaş alt sistemin özdeğerleri negatif gerçek eksen üzerinde ve kapalı döngü hızlı alt sistemin özdeğerleri ise sol yarı düzlemde kompleks eşlenik çiftler olacak şekilde K_p , K_v ve K_f kazanç matrisleri seçilmelidir. Daha önce belirtildiği gibi kontrolör tasarımında esnek parçanın en küçük frekanslı ilk iki modu kullanılmıştır. Açık döngü hızlı alt sistemin sanal eksen üzerinde bulunan kutupları, denklem (6.9) ile verilen kontrol altında aşağıda verilen değerlere atanmaktadır.

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_{n_1} \pm i\omega_1, \quad s_{3,4} = -\zeta\omega_{n_2} \pm i\omega_2 \quad (6.10)$$

Burada ω_i , hızlı alt sistemin sanal eksen üzerindeki i . kutbunun frekansı ve ζ ise kapalı döngü hızlı alt sistemin kompleks eşlenik kutupları için istenilen sönümlenme oranıdır. $\omega_{n_i} = \omega_i / \sqrt{(1 - \zeta^2)}$ 'den hesaplanmaktadır. Benzetim çalışmalarında $\zeta = 0.15$ olarak alınmıştır.

Esnek parçanın en küçük frekanslı ilk iki mod genliği, esnek parça üzerindeki farklı iki noktadan alınan pozisyon ve hız ölçümleri kullanılarak elde edilmiştir (bölüm 5.3.2'de anlatılmıştır).

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \Phi^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{bmatrix} = \Phi^{-1} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Esnek parça üzerindeki farklı iki noktanın hız değerleri, bu noktaların pozisyon ölçümleri kullanılarak her bir benzetim anı için aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$y_3(k) = \frac{y_1(k) - y_1(k-1)}{t_s}, \quad y_4(k) = \frac{y_2(k) - y_2(k-1)}{t_s} \quad (6.12)$$

Burada t_s örnekleme zamanını göstermektedir. Esnek parçanın en küçük frekanslı ilk iki mod genliğinin hızı, hız ölçümleri veya denklem (6.12) kullanılarak bulunabilir. Hız ölçümleri kullanılarak yapılan benzetim sonuçları ile denklem (6.12) kullanılarak yapılan benzetim sonuçları arasında gözle görülebilir bir fark olmadığı gözlenmiştir.

Esnek robot kolunun eklemlerine uygulanacak tork,

$$u = \bar{u} + \tilde{u} \quad (6.13)$$

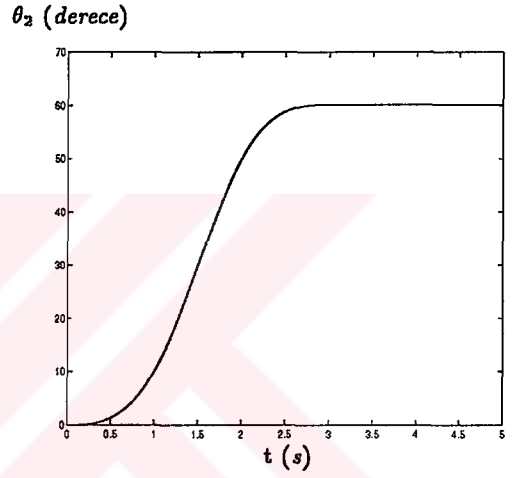
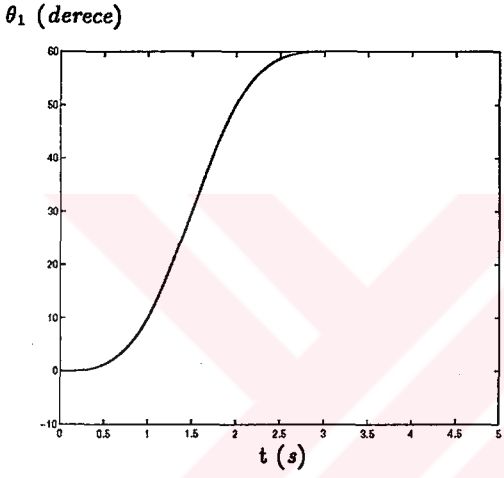
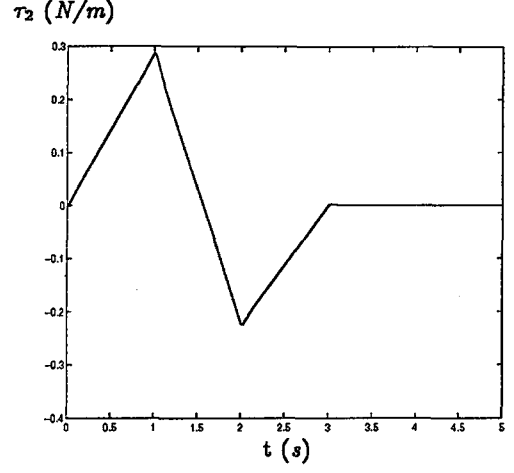
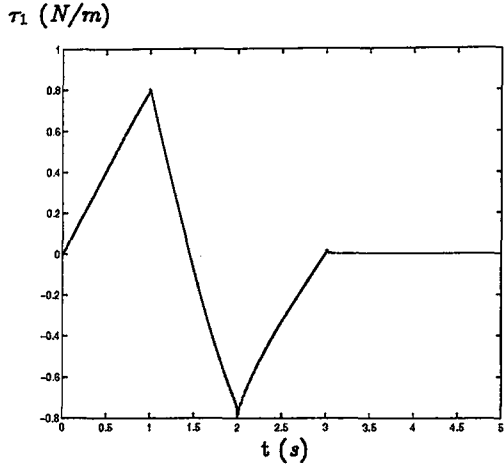
Denklem (6.13) kompozit kontrol girdisini göstermektedir. Kompozit kontrolör altında dört ayrı uç noktası kütlesi için sistemin benzetimi yapılmış ve yapılan benzetimler Şekil 6.18, 6.19, 6.20 ve 6.21'de gösterilmiştir.

Benzetimler Ek-4'te verilen program kullanılarak yapılmıştır. Ek-4'te verilen program, Ek-2'de verilen programa polinom fonksiyon katsayılarını, robot kolunun izleyeceği yörünge sinyalinin o anki değerini ve ζ ve K_f değerlerini hesaplayan sırasıyla, coeffs.m, trjt.m ve fast_c.m fonksiyonları ile yavaş, hızlı ve kompozit kontrol girdilerini hesaplayan yeni komut satırları eklenerek elde edilmiştir. trjt.m fonksiyonu kullanılarak her bir benzetim anı için eklemlerin sahip olması gereken pozisyon, hız ve ivme değeri hesaplanmaktadır. Daha sonra ise denklem (6.8) kullanılarak yavaş kontrol girdisinin değeri hesaplanmaktadır. Kontrolör tasarımında

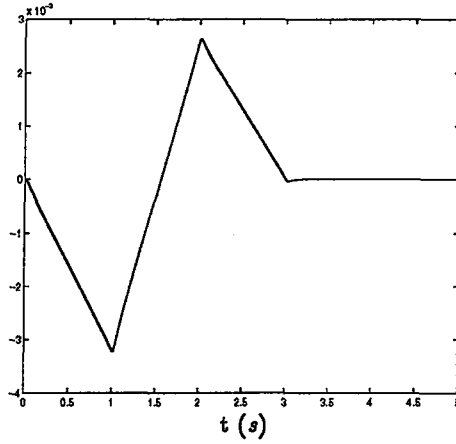
esnek parçanın en küçük frekanslı ilk iki modu ($n_c = 2$) kullanılmıştır. Tasarım ve benzetim çalışmalarında ζ ve K_f değerleri iki modlu sistem için fast_c.m fonksiyonu tarafından hesaplanmaktadır. Ölçüm değerleri kullanılarak esnek parçanın ilk iki mod genliği ve bu mod genliklerinin hızları elde edilip, denklem (6.9) kullanılarak hızlı kontrol girdisinin değeri hesaplanmaktadır. Daha sonra ise denklem (6.13) ile verilen kompozit kontrolör altında sistemin benzetimi yapılmaktadır.

Şekillerden de görülebileceği gibi esnek robot kolunun eklemlerinin hareketi ve esnek parçanın uç sapmasının sönümlenmesi açısından kompozit kontrolör iyi sonuçlar vermektedir. Ancak kompozit kontrolör altında esnek parçanın uç noktasında bulunan m_2 kütesinin değerindeki artış eklem açılarının yatışkın durum değerinde bir hataya neden olduğu görülmüştür. $m_2 = 0.750 \text{ kg}$ için, birinci eklem açısının yatışkın durum değeriyle eklem açısının olması istenilen son pozisyon değeri arasında yaklaşık 0.5° 'lik bir hata oluşmaktadır. İkinci eklem açısı içinse bu hata değeri çok küçüktür.

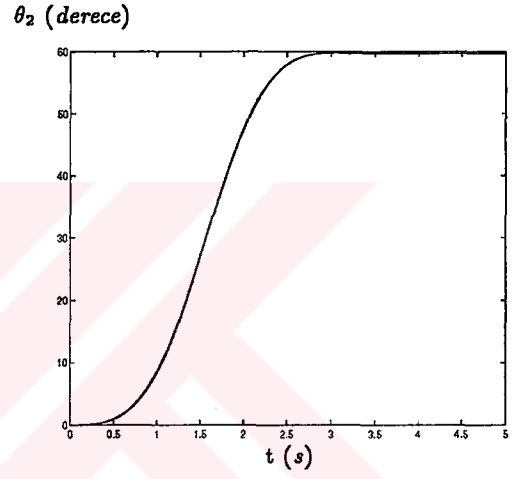
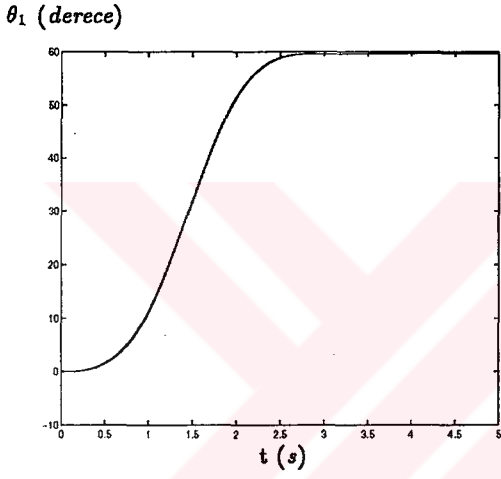
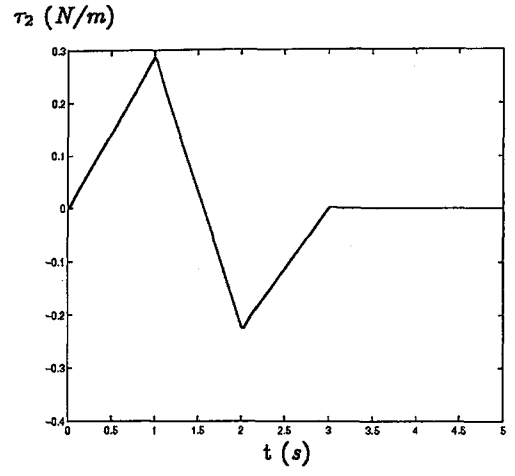
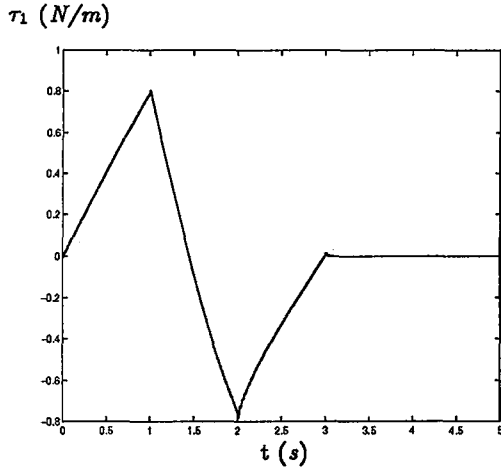
Kompozit kontrolör altında esnek parçanın uç sapmaları 3.2-4.2 saniye içerisinde sönümlenmektedir. $m_2 = 0.750 \text{ kg}$ iken oluşan maksimum uç sapması değeri yaklaşık 2.25 cm 'dir. Yapılan benzetim çalışmalarında, PD kontrolörlerle yörünge takibi yapılırken ölçülen maksimum uç sapması değerlerinin ($m_2 = 0.750 \text{ kg}$ için 1.4 cm), kompozit kontrolör altında ölçülen maksimum uç sapması değerlerinden daha küçük olduğu şekillerden görülmektedir. Ancak PD kontrolörle yörünge takibi yapılırken esnek parçanın uç sapmalarının sönümlenmesi daha çok zaman almaktadır ($m_2 = 0 \text{ kg}$ için 3.5 sn ve $m_2 = 0.750 \text{ kg}$ için 4.5 sn).



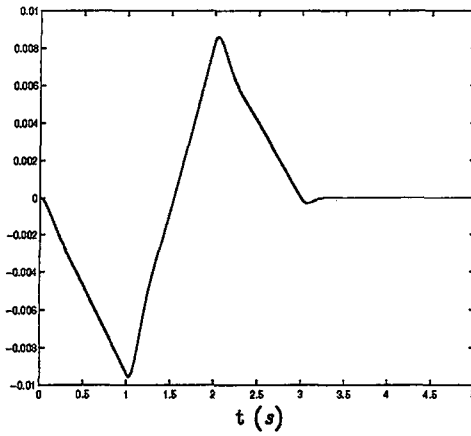
Uç sapması (metre)



Şekil 6.18 $m_2 = 0$ için denklem (6.13) ile verilen kontrolör kullanılarak yapılan benzetim

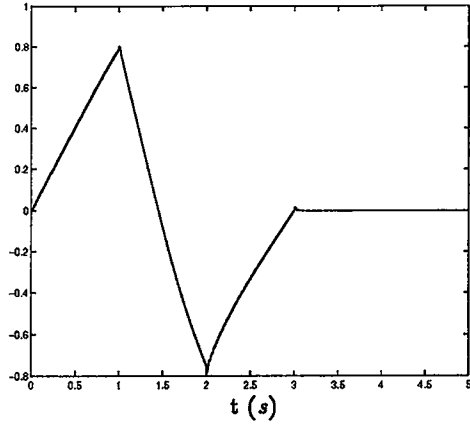


Uç sapması (metre)

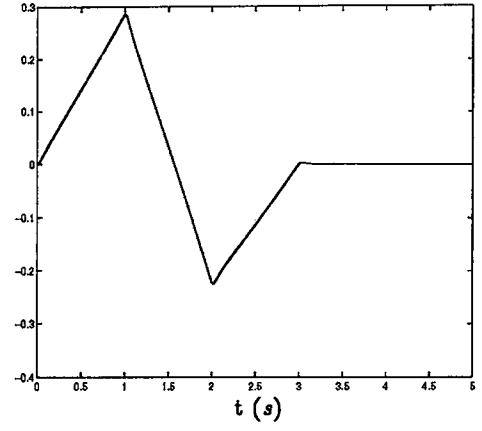


Şekil 6.19 $m_2 = 0.250$ kg için denklem (6.13) ile verilen kontrolör kullanılarak yapılan benzetim

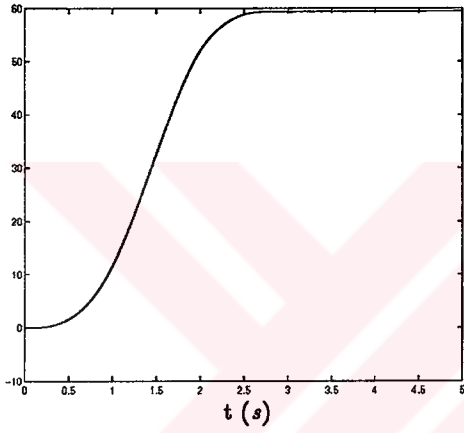
τ_1 (N/m)



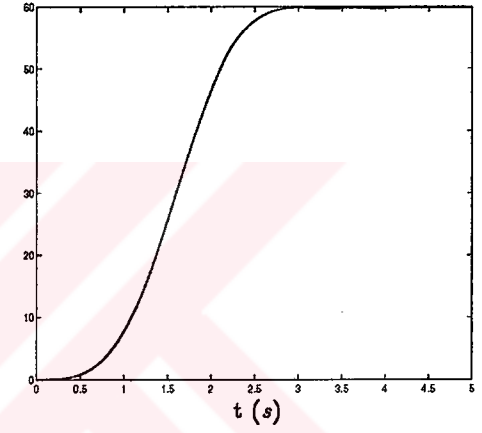
τ_2 (N/m)



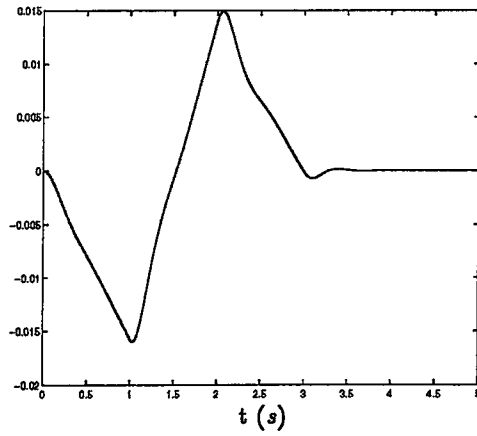
θ_1 (derece)



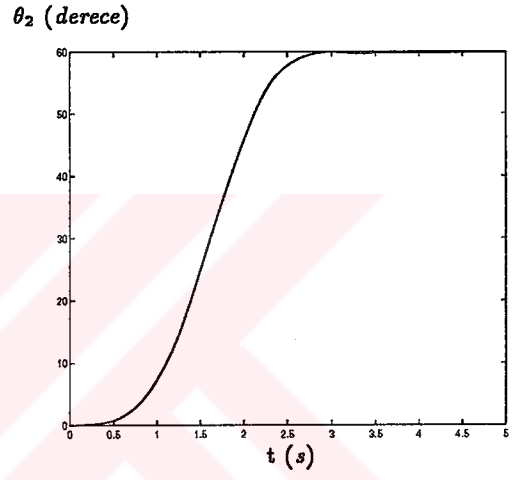
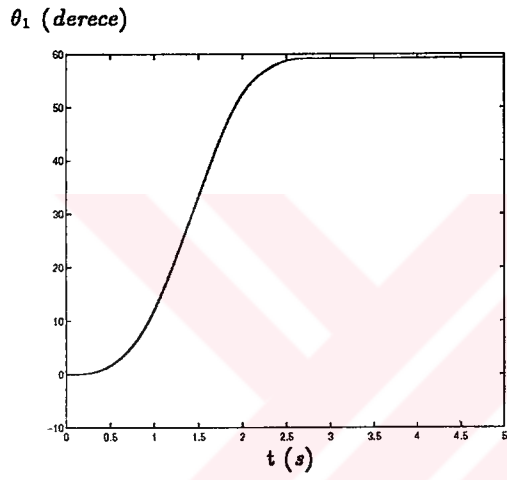
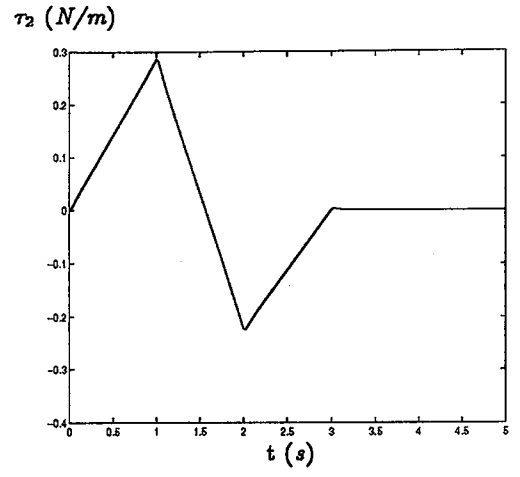
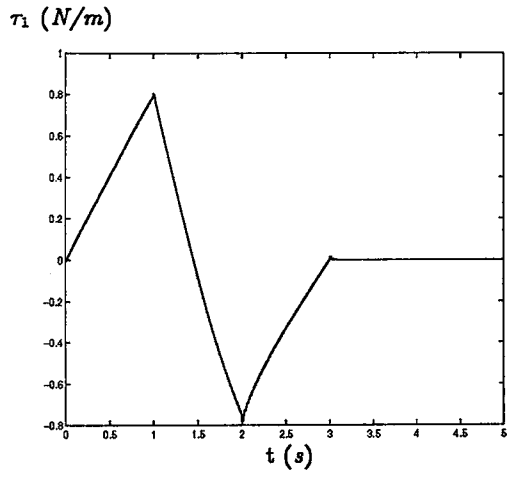
θ_2 (derece)



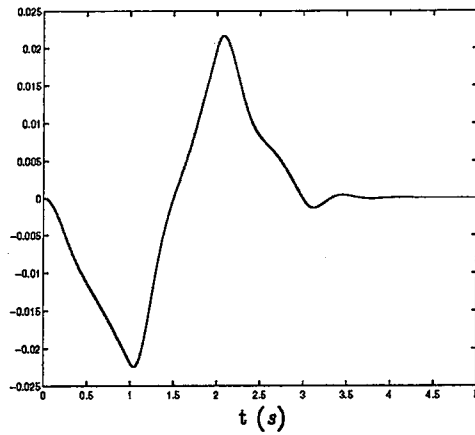
Uç sapması (metre)



Şekil 6.20 $m_2 = 0.500$ kg için denklem (6.13) ile verilen kontrolör kullanılarak yapılan benzetim



Uç sapması (metre)



Şekil 6.21 $m_2 = 0.750$ kg için denklem (6.13) ile verilen kontrolör kullanılarak yapılan benzetim

7. SONUÇ

Birden fazla ekleme sahip esnek robot kollarının matematiksel modeli belirli bazı kabullenmeler altında doğrusal olmayan sonsuz boyutlu adi diferansiyel denklemlerle gösterilebilmekte ve bu denklemlerin elde edilmesi oldukça uzun ve karmaşık matematiksel işlemleri gerektirmektedir. Ayrıca esnek yapıların doğası gereği, elde edilen sonsuz boyutlu matematiksel model bazı belirsizliklere maruz kalabilmektedir. Oldukça karmaşık ve doğrusal olmayan denklemlerle gösterilebilen esnek robot kollarını kontrol edebilmek için karmaşık kontrol yaklaşımlarının uygulanması gerekmektedir. Esnek robot kolunun eklemelerine uygulanan torklar ile sistemin sonsuz boyutlu esnek hal durumlarının direk olarak kontrol edilememesi, çok eklemli esnek robot kollarının kontrolü problemini ayrıca güçleştirmektedir. Çok eklemli esnek robot kollarının modellenmesi ve kontrolü probleminin çözümüne taban oluşturması açısından, bu çalışmada ilk parçası katı ve ikinci parçası ise esnek bir yapı olan bir robot kolu modellenerek, robot kolunun kontrolü için üç farklı kontrol yaklaşımı denenmiştir.

Sistemin matematiksel modellemesi yapılırken esnek parça için Euler-Bernoulli modeli esas alınmış ve sistemin dinamik denklemleri Hamilton prensibi kullanılarak türetilmiştir. Sistemin esnek hal dinamiğini tanımlayan kısmi bir diferansiyel denklemlerle bu denkleme ait dört tane sınır koşulu ve sistemin katı hal dinamiğini tanımlayan iki tane zamana göre ikinci dereceden adi diferansiyel denklemler elde edilmiştir. Sistemin tepkisini bulabilmek içinse sistemin dinamik denklemleri diferansiyel özdeğer problemi yaklaşımı kullanılarak sonsuz boyutlu bir modelle gösterilerek sistemin matematiksel modellemesi tamamlanmıştır.

Modellemesi yapılan iki eklemli esnek robot kolunun kontrolü için PD, PD benzeri ve iki zaman ölçekli kontrol yaklaşımları kullanılmıştır. Kontrolörler tasarlanırken robot kolunun eklem açıları sabit bir referans sinyali veya bir yörüngeyi takip ederken, esnek parçanın uç sapmalarının da mümkün olan en kısa süre içerisinde sönümlenmesi amaçlanmıştır. Eklem açılarının takip edeceği yörünge sinyali ise 4-3-4 yörüngesi polinom fonksiyonları kullanılarak hesaplanmıştır.

Robot kolunun esnekliğini gösterebilmek için açık döngü sistemin benzetimi yapılmıştır. Robot kolunun ikinci parçasının esnekliğinin, robot kolunun eklemelerinin hareketlerinde ve uç noktasında salınımlara neden olduğu ve bu salınımların frekansının robot kolunun taşıdığı yükün kütle değeri arttıkça azaldığı görülmüştür.

İlk olarak robot kolunun eklem açıları sabit referans sinyalleri takip edecek şekilde PD kontrolörler tasarlanmıştır. Tasarlanan PD kontrolörler belirli bir performansı sağlamalarına rağmen geniş bir çalışma alanı içinde yetersiz kalmaktadır. Yine eklem açıları sabit referans sinyalleri takip edecek şekilde doğrusal olmayan PD benzeri kontrolörler tasarlanarak geniş bir çalışma alanı içinde daha iyi bir performans elde edilmeye çalışılmıştır. Doğrusal olmayan PD benzeri kontrolör, PD kontrolöre göre esnek parçanın uç sapmasının sönümlenmesi açısından belirli bir iyileşme sağlamasına rağmen, eklem açılarının sabit referans sinyalleri takip etmesi açısından biraz yavaş kalmaktadır. Yavaş kalmasının nedeni ise, doğrusal olmayan PD kontrolör ile kontrol edilen robot kolu parçalarının kalkınma anında düşük bir ivme ile harekete başlamalarıdır. Robot kolunun eklem açıları sabit referans sinyalleri takip edecek şekilde geliştirilen PD kontrolörlerle geniş bir çalışma alanı içinde çok iyi sonuçlar elde edilememiştir.

Bu sonuçtan hareketle robot kolunun eklem açıları belirli yörünge sinyallerini takip edecek şekilde PD kontrolörler tasarlanmıştır. Tasarlanan PD kontrolörlerin gerek robot kolunun eklem hareketleri açısından gerekse esnek parçanın uç sapmasının sönümlenmesi açısından ilk iki tasarıma göre daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür.

PD kontrolörler sistemin sadece katı hal durum değişkenlerini kullanarak robot kolunun eklemlerine uygulanacak olan torku hesaplamaktadır. Sistemin hem katı hem de esnek hal durumları kullanılarak tasarlanan bir kontrolörün PD kontrolörlere göre daha iyi sonuçlar verebileceği beklenebilir. Ancak esnek robot kolunun matematiksel modeli, eklemlere uygulanan torklar ile sistemin esnek hal durumlarını direk olarak kontrol etme imkanını bize sağlamamaktadır. Tekil perturbasyon metodu, sistemin hem katı hem de esnek hal durumlarını kontrol edebilmemiz için bir çözüm getirmektedir.

Tekil perturbasyon metodunu esnek robot kollarına uyguladığımız zaman sistemin tüm dinamiği, yavaş ve hızlı alt sistem olmak üzere iki alt sisteme ayrılmıştır. Yavaş alt sistemin dinamiği, iki eklemlilik katı bir robot kolunun dinamiğini göstermektedir. Hızlı alt sistem ise, yavaş durum değişkenlerinin fonksiyonu olan doğrusal bir sistemdir. Kompozit kontrol yaklaşımı gereğince, herbir alt sistem için ayrı ayrı kontrolörler tasarlanmıştır. Yavaş alt sistem tork hesaplaması kontrol yaklaşımı kullanılarak kontrol edilmiştir. Hızlı alt sistem durum geri beslemesi ile kutup atama yöntemi kullanılarak kontrol edilmiştir. Robot kolunun eklemlerine uygulanacak tork ise yavaş ve hızlı kontrol girdilerinin toplamıdır. Kompozit kontrol altında esnek robot kolunun benzetimi yapıldığı zaman, gerek robot kolunun eklem hareketleri ve gerekse esnek parçanın uç sapmasının sönümlenmesi açısından PD kontrolörlere göre daha iyi sonuçlar elde edilmiştir.

Yapılan benzetim çalışmaları sonucunda, tasarlanan kontrolörlerin performanslarını etkileyen en önemli iki faktörün robot kolunun taşıdığı yükün (m_2) kütlesi ve esnek parçanın katılığı (EI_a) olduğu gözlemlenmiştir.

Katı veya esnek bir robot kolunu kontrol etmek için tasarlanmış bir kontrolörün performansı değerlendirilirken göz önünde bulundurulacak önemli kriterlerden birisi, robot kolunun taşıdığı yükteki değişimlerin kontrolörün performansına olan etkisidir. Bu çalışmada robot kolunun taşıdığı yükün kütlesinin değerinin bilinmediği ancak belirli bir aralık içerisinde değiştiği kabul edilmiş ve m_2 kütlesinin belirsizliğinden dolayı robot kolu belirsiz bir matematiksel modelle gösterilebilmiştir. m_2 kütlesinin değerindeki değişimler, robot kolunun eklem hareketleri ve esnek parçanın uç sapmalarının sönümlenmesi açısından iki zaman ölçekli kontrolörün performansını çok fazla etkilememesine rağmen, PD kontrolörlerin bu değişimlere karşı daha hassas olduğu gözlemlenmiştir. Özel [17]'de yapmış olduğu çalışmada, ilk parçası katı ikinci parçası ise esnek bir yapı olan iki eklemlili bir robot kolunun kontrolünü PD kontrolörlerle sabit referans sinyalleri takip ederek gerçekleştirmeye çalışmıştır. PD kontrolörün kazanç değerlerini esnek parçanın en küçük frekanslı ilk üç modu için deneme yanılma metodu ile benzetim çalışmaları yaparak belirlemiştir. Yapmış olduğu benzetim çalışmaları sonucunda elde etmiş olduğu en iyi sonuç: $m_2 = 0.250 \text{ kg}$ için robot kolunun eklem açıları sabit referans sinyalleri 3 sn içerisinde yakalarken, esnek parçanın uç sapmaları da 4 sn içerisinde sönümlenmektedir. Aynı kontrolör altında $m_2 = 0.500 \text{ kg}$ için yapmış olduğu benzetim sonucu: Eklem açıları sabit referans sinyalleri 10 sn içerisinde yakalayamazken, aynı süre içerisinde de esnek parçanın uç sapmaları henüz sönümlenememiştir. Bu iki sonuçtan da görülebileceği gibi m_2 kütlesinin değişimi PD kontrolörün performansını önemli ölçüde etkilemektedir.

Esnek parçanın katılığı küçüldükçe, PD ve PD benzeri kontrolörlerin performansları önemli ölçüde etkilenmektedir. Özellikle esnek parçanın katılığı küçükken ($EI_a < 5$), PD ve PD benzeri kontrolörlerle sabit bir referans sinyalin takibi, gerek robot kolunun eklem hareketleri ve gerekse esnek parçanın uç sapmalarının sönümlenmesi açısından iyi sonuçlar vermemektedir. Esnek parçanın katılığı küçüldükçe sistemin tepkisinin PD ve PD benzeri kontrolörlerin kazanç değerlerindeki değişimlere olan hassasiyeti artmakta ve dolayısıyla uygun kazanç değerlerinin seçimi zorlaşmaktadır. Özel'in çalışmasında esnek parçanın katılığı oldukça küçüktür ($EI_a \simeq 0.35$). Özel'in yapmış olduğu benzetim çalışmaları da bu sonuçları desteklemektedir.

Ayrıca tezde sunulmamasına rağmen, robot kolunun parametre değerlerindeki belirli oranlardaki değişimlerin tasarlanan kontrolörlerin performanslarına olan etkileri benzetim çalışmaları yapılarak gözlemlenmeye çalışılmıştır. PD kontrolörlerin

performansının, sistemin parametre değerlerindeki değişimlerden kolaylıkla etkilenmediği ve iki zaman ölçekli kontrolörün ise sistemin parametre değerlerindeki belirli oranlardaki değişimlere karşı oldukça gürbüz olduğu görölmüştür.

Genelde ise, yapılan benzetim çalışmalarına dayanarak PD ve doğrusal olmayan PD benzeri kontrolörlerle sabit bir referans sinyalin takibi ile gerçekleştirilen kontrolün, esnek robot kollarının kontrolü için uygun bir yaklaşım olmadığı; PD kontrolörlerle yörünge takibi ile gerçekleştirilen kontrolün ve iki zaman ölçekli kontrolörün esnek bir robot kolunun kontrolü için kullanılabileceği sonucu ortaya çıkmaktadır.

Özellikle çok eklemlili esnek robot kollarının modellenmesi oldukça zor ve karmaşık işlemleri gerektirmekte ve bu işlemleri yapmak ise uzun zaman almaktadır. Günümüzde hali hazırda Mathematica gibi çeşitli paket programlarla sembolik işlemler yapılabilmektedir. Geçmişte çok eklemlili esnek robot kollarının modellenmesi için programlamaya uygun metodlar önerilmiştir. Bu çalışmalara dayanılarak çok eklemlili esnek bir robot kolunun dinamik denklemlerini bulan bir program geliştirilebilir.

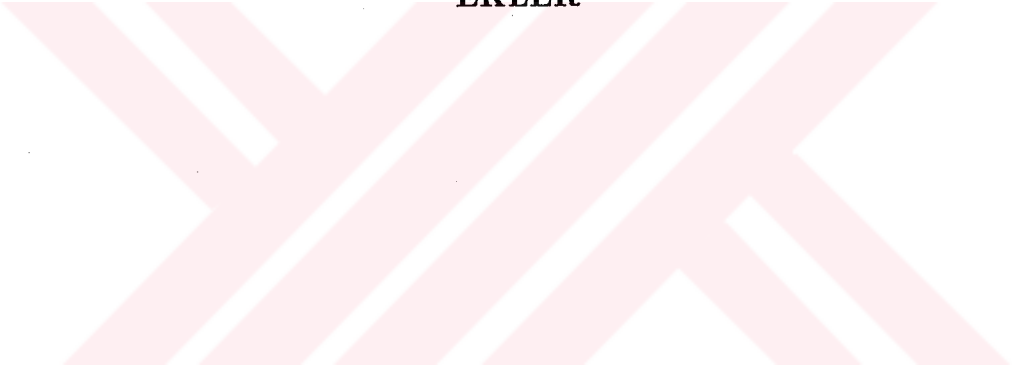
AMFC (Adaptive Model Following Control) yaklaşımı katı robot kollarının kontrolünde oldukça sık kullanılmaktadır. Dolayısıyla *AMFC* yaklaşımını yavaş alt sistemin kontrolü için de kullanabiliriz. Böylelikle yavaş alt sistemin kontrolünü, robot kolunun parametre değerlerinden bağımsız olarak gerçekleştirebilmek mümkündür. Hızlı alt sistemin kontrolü içinse optimal çıktı geri beslemesi kontrol yaklaşımı kullanılabilir.

KAYNAKLAR

1. J. H. Yang, F. L. Lian ve L. C. Fu, "Nonlinear Adaptive Control for Flexible-Link Manipulators," *IEEE Trans. Robotics and Automation*, vol. 13, no. 1, pp. 140-148, 1997.
2. F. L. Lewis, C. T. Abdallah ve D. M. Dawson, *Control of Robot Manipulators*, Macmillian Publishing Company, New York, 1993.
3. A. İftar, "A Robust Controller Design Approach for Flexible Robot Manipulators with Actuators Dynamics," *Proceedings of the Bilkent International Conference on New Trends in Communication, Control, and Signal Processing*, pp. 932-938, Ankara, Türkiye, 1990.
4. B. Siciliano, W. J. Book, "A Singular Perturbation Approach to Control of Lightweight Flexible Manipulators," *Int. J. Robot. Res.*, vol. 7, no.4, pp. 79-90, 1988.
5. W. J. Book, "Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms," *Int. J. Robot. Res.*, vol. 3, no. 3, pp. 339-354, 1984.
6. K. H. Low, "A Systematic Formulation of Dynamic Equation for Robot Manipulators with Elastic Links," *J. Robotic Syst.*, vol. 4, pp. 435- 456, 1987.
7. K. H. Low ve M. Vidyasagar, "A Lagrangian Formulation of the Dynamic Model for Flexible Manipulator Systems," *Trans. ASME J. Dyn. Syst., Meas., Contr.*, vol. 110, pp. 175- 181, 1988.
8. S. Çetinkunt ve W. J. Book, "Symbolic Modeling of Flexible Manipulators," *Proc. 1987 IEEE Int. Conf. Robotics, Automation*, pp. 2074-2080, 1987.
9. P. B. Usoro, R. Nadira ve S. S. Mahil, "A Finite Element/Lagrange Approach to Modeling Lightweight Flexible Manipulators," *Trans. ASME J. Dyn. Syst., Meas., Contr.*, vol. 108, no. 3, pp. 198-205, 1986.
10. R. H. Cannon ve E. Schmitz, "Initial Experiments on the End-Point Control of a Flexible One-Link Robot," *Int. J. Robot. Res.*, vol. 3, no. 3, pp. 325-338, 1984.
11. Y. Sakawa, F. Matsuno ve S. Fukushima, "Modeling and Feedback Control of a Flexible Arm," *J. Robotic Syst.*, vol. 2, no. 4, pp. 453-472, 1985.

12. D. M. Rovner ve R. H. Cannon, "Experiments Toward On-Line Identification and Control of a Very Flexible One-Link Manipulator," *Int. J. Robot. Res.*, vol. 6, no. 4, pp. 3-19, 1987.
13. S. Yurkovich ve A. P. Tzes, "Experiments in Identification and Control of Flexible-Link Manipulators," *IEEE Contr. Mag.*, vol. 10, no. 3, pp. 41-47, 1990.
14. A. İftar ve Ü. Özgüner, "Modeling of Uncertain Dynamics for Robust Controller Design in State Space," *Automatica*, vol. 27, pp. 141-146, 1991.
15. S. Çetinkunt ve W. J. Book, "Performance Limitations of Joint Variable-Feedback Controllers Due to Manipulators Structural Flexibility," *IEEE Trans. Robotics and Automation*, vol. 6, no. 2, pp. 219-231, 1990.
16. F. Khorrami, S. Jain ve A. Tzes, "Experiments on Rigid-Body-Based Controllers with Input Preshaping for a Two-Link Flexible Manipulator," *IEEE Trans. Robotics and Automation*, vol. 10, no. 1, pp. 55-65, 1994.
17. K. Özel, *Esnek Robot Kollarının Modellenmesi ve Kontrolü*, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 1997.
18. L. Meirovitch, *Dynamics and Control of Structures*, Wiley, New York, 1990.
19. K. S. Fu, R. C. Gonzalez ve C. S. G. Lee, *Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence*, McGraw-Hill, New York, 1987.
20. P. Kokotovic, "Applications of Singular Perturbation Techniques to Control Problems," *SIAM Review*, vol. 26, no. 4, pp. 501-550, 1984.
21. F. Matsuno and K. Yamamoto, "Dynamic Hybrid Position/Force Control of a Two Degree-of-Freedom Flexible Manipulator," *J. Robotic Syst.*, vol. 11, no. 5, pp. 355-366, 1994.

EKLER



EK-1 Runge-Kutta formüllerini kullanarak katı-esnek robot kolunun benzetimini yapan program

```

%*****
%***** Kati-Esnek Robot Kolu Benzetim Programi *****
%*****

%E:      Esnek parcanin Young esneklik modulu, (N/m^2)
%Ia:     Esnek parcanin yuzey atalet momenti, (m^4)
%rho1:   Kati parcanin birim uzunluk basina kutlesi, (kg/m)
%rho2:   Esnek parcanin birim uzunluk basina kutlesi, (kg/m)
%L1:     Kati parcanin uzunlugu, (m)
%L2:     Esnek parcanin uzunlugu, (m)
%Ih1:    1. eklem eylemsizlik momenti, (kg/m^2)
%Ih2:    2. eklem eylemsizlik momenti, (kg/m^2)
%m1:     2. eklemdeki kutle degeri, (kg)
%m2:     Esnek parcanin ucundaki kutle degeri, (kg)
%beta1:  1. eklem yagli surtunme katsayisi, (Nms/rad)
%beta2:  2. eklem yagli surtunme katsayisi, (Nms/rad)

format long e
clear all
clc

n= input('Mod sayisini giriniz...? ');
T= input('Simulasyon suresini giriniz...? ');

%**** Kati parcanin ve birinci eklem parametre degerleri

rho1= 1; L1= 0.6; M1=rho1*L1; m1= 0.25; mls= 0.15;
beta1= 0.01;
r2= 0.035; r1= 0.05; % Motorun statorunun ic ve dis yariçapları
Ih1= 1e-3+ mls*(r1^2+ r2^2)/2;

%**** Esnek parcanin ve ikinci eklem parametre degerleri

E= 7e+10; Ia= 2.14e-10; EIa= E*Ia;
rho2= 0.5; L2=0.8; M2=rho2*L2; m2= 0;
beta2= 0.005;
l= (m2/7.68e+3)^(1/3); % Demirden yapilmis olan kupun kenar uzunlugu
Ih2= 5.4e-4+ m2*l^2/6;

%*****
%***** NEWTON_RAPHSON yontemi ile frekans denkleminin cozumu *****
%*****

f0= zeros(n,1); k= zeros(n,1);
f0(1)= 1.87504; f0(2)= 4.6940911;
for i=3:n
    f0(i)= f0(i-1)+ pi;
end

x0= f0(1:n);
for i=1:n,
    xx=x0(i);
    frq=1+cosh(xx)*cos(xx)+(m2/M2)*xx*(sinh(xx)*cos(xx)- ...
        cosh(xx)*sin(xx));
    dfrq=(1+m2/M2)*(sinh(xx)*cos(xx)-cosh(xx)*sin(xx))- ...
        2*(m2/M2)*xx*sinh(xx)*sin(xx);

```

```

vx=xx-frq/dfrq;
while abs(vx-xx)>=1e-12,
    xx= vx;
    frq= 1+cosh(xx)*cos(xx)+(m2/M2)*xx*(sinh(xx)*cos(xx)- ...
        cosh(xx)*sin(xx));
    dfrq=(1+m2/M2)*(sinh(xx)*cos(xx)-cosh(xx)*sin(xx))- ...
        2*(m2/M2)*xx*sinh(xx)*sin(xx);
    vx=xx-frq/dfrq;
end
k(i)=vx;
end
k=k/L2;

%*****
%***** Dinamik modelin bulunmasi *****
%*****

lmd=zeros(n,1); hi=lmd; qi=hi; qj=qi;
gama1=qj; gama2=gama1; alfa1=gama2'; alfa2= alfa1; a=zeros(n);
for i=1:n;
    xx=k(i)*L2;
    lmd(i)=(E*Ia/rho2)*k(i)^4;
    hi(i)=(cosh(xx)+cos(xx))/(sinh(xx)+sin(xx));
    qi(i)=2*(cosh(xx)*sin(xx)-sinh(xx)*cos(xx))/(sinh(xx)+sin(xx));
    gama1(i)= (2/k(i)^2)-(2*xx*(1+cosh(xx)*cos(xx)))/ ...
        (k(i)^2*(sinh(xx)+sin(xx)));
    gama2(i)= 2*(cosh(xx)+cos(xx)-cosh(xx)*cos(xx)-1)/ ...
        (k(i)*(sinh(xx)+sin(xx)));
    alfa1(i)= rho2*gama1(i)+ m2*L2*qi(i);
    alfa2(i)= rho2*gama2(i)+ m2*qi(i);
end
for j=1:n;
    if i==j,
        a(i,j)= L2+(1/k(i))*(2*hi(i)*sin(xx)*sinh(xx)- ...
            (hi(i)^2+1)*sin(xx)*cosh(xx)+(hi(i)^2-1)*cos(xx)*sinh(xx)+ ...
            (hi(i)^2+1)*sinh(2*xx)/4+ ...
            (1-hi(i)^2)*sin(2*xx)/4+hi(i)*cos(2*xx)/2-hi(i)*cosh(2*xx)/2);
    else
        yy=k(j)*L2;
        qj(j)=2*(cosh(yy)*sin(yy)- ...
            sinh(yy)*cos(yy))/(sinh(yy)+sin(yy));
        a(i,j)= -m2*qi(i)*qj(j)/rho2;
    end
end
end

Lamda= diag(lmd);
c1= inv(a)*gama1;
c2= inv(a)*gama2;

```

```

%*****
%***** Sistemini Benzetimi *****
%*****

t0=0;
x0 = zeros(1,2*n+4); % sistemin baslangic kosullari

[t,x,u]=aode23(t0,T,x0,Ih1,Ih2,beta1,beta2,rho2,E,Ia,m1,m2,M1,M2,L1, ...
              L2,qi,a,n,Lamda,gama1,gama2,alfa1,alfa2,c1,c2);

figure(1), plot(t,x(:,1)) % 1. eklem acisini ciz
print /home/atakan/Rig-Flex/SIM/Tt1.ps
figure(2), plot(t,x(:,2)) % 2. eklem acisini ciz
print /home/atakan/Rig-Flex/SIM/Fil1.ps
tipd=0;
for i=1:n;
    tipd=tipd+ qi(i,1)*x(:,2+i);
end
figure(3),plot(t,tipd) % Uc sapmasini ciz
print /home/atakan/Rig-Flex/SIM/Td1.ps
figure(4),plot(t,u(:,1)) % Birinci ekleme uygulanacak olan torqu ciz
print /home/atakan/Rig-Flex/SIM/U11.ps
figure(5),plot(t,u(:,2)) % İkinci ekleme uygulanacak olan torqu ciz
print /home/atakan/Rig-Flex/SIM/U12.ps

```

aode23.m fonksiyonu

```
function [tout,yout,uout]=aode23(t0,tfinal,y0,Ih1,Ih2,beta1,beta2, ...
    rho2,E,Ia, m1,m2,M1,M2,L1,L2,qi,a,n,Lamda, ...
    gama1,gama2,alfa1,alfa2,c1,c2)

%**** Initialization

pow = 1/3;
tol = 1.e-6;

t = t0;
hmax = (tfinal - t)/16;
h = hmax/8;
y = y0(:);
chunk = 128;
tout = zeros(chunk,1);
yout = zeros(chunk,length(y));
uout = zeros(chunk,2);
kk = 1;
tout(kk) = t;
yout(kk,:) = y.';

%**** The main loop,

while (t < tfinal) & (t + h > t)
    if t + h > tfinal,
        h = tfinal - t;
    end

%**** Compute the slopes

[s1,inp]=rig_flex(t,y,Ih1,Ih2,beta1,beta2,rho2,E,Ia,m1,m2,M1,M2, ...
    L1,L2,qi,a,n,Lamda,gama1,gama2,alfa1,alfa2,c1,c2);
s1 = s1(:);

[s2,u]= rig_flex(t+h,y+h*s1,Ih1,Ih2,beta1,beta2,rho2,E,Ia,m1,m2, ...
    M1,M2,L1,L2,qi,a,n,Lamda,gama1,gama2,alfa1,alfa2,c1,c2);
s2 = s2(:);

[s3,u]= rig_flex(t+h/2,y+h*(s1+s2)/4,Ih1,Ih2,beta1,beta2,rho2,E, ...
    Ia,m1,m2,M1,M2,L1,L2,qi,a,n,Lamda,gama1, ...
    gama2,alfa1,alfa2,c1,c2);
s3 = s3(:);

%**** Estimate the error and the acceptable error

delta = norm(h*(s1 - 2*s3 + s2)/3,'inf');
tau = tol*max(norm(y,'inf'),1.0);
```

```
%**** Update the solution only if the error is acceptable
```

```
    if delta <= tau,  
        t = t + h;  
        y = y + h*(s1 + 4*s3 + s2)/6;  
        kk = kk+1;  
  
        if kk > length(tout),  
  
            tout = [tout; zeros(chunk,1)];  
            yout = [yout; zeros(chunk,length(y))];  
            uout = [uout; zeros(chunk,2)];  
        end  
  
        tout(kk) = t;  
        yout(kk,:) = y.';  
        uout(kk,:) = inp.';
```

```
    end
```

```
%**** Update the step size
```

```
    if delta ~= 0.0  
        h = min(hmax, 0.9*h*(tau/delta)^pow);  
    end  
end  
  
if (t < tfinal)  
    disp('Singularity likely.')  
    t  
end  
  
tout= tout(1:kk);  
yout= yout(1:kk,:);  
uout= uout(1:kk,:);
```

rig_flex.m fonksiyonu

```
function [xdot,u]= rig_flex(t,x,Ih1,Ih2,beta1,beta2,rho2,E,Ia,m1,m2, ...
    M1,M2,L1,L2,qi,a,n,Lamda,gama1,gama2,alfal,alfa2,c1,c2)

%**** x= (teta,fi,eta,tetd,fid,etd)^T,

    teta= x(1);    fi= x(2);    eta= x(3:2+n);
    tetd= x(3+n); fid=x(4+n);  etad= x(5+n:2*n+4);

%**** Referans sinyaller,

    tetar= pi/3; fir= pi/3;
    tvd=0;    fvd=0;

%**** Acik dongu sistemin benzetimi icin uretilen kontrol girdisi,

    if (t<=1),
        u1= 1; u2= 1;
    else
        u1= 0; u2= 0;
    end

%**** Kontrolor1,

    %u1= 10*(tetar-teta)- 9*(tetd-tvd);
    %u2= 12*(fir-fi)- 8*(fid-fvd);    % PD kontrolor

%**** Kontrolor2,

    %z1dot=tetar-teta;
    %z2dot=fir-fi;
    %if (z1dot<=pi/2),
    %    z1dot= abs(z1dot);
    %else z1dot= pi/2;
    %end

    %if (z2dot<=pi/2),
    %    z2dot= abs(z2dot);
    %else z2dot= pi/2;
    %end

    %u1= (12- 4.5*z1dot)*(tetar-teta)- (8+ 6*z1dot)*(tetd-tvd);
    %u2= (12- 4.5*z2dot)*(fir-fi)- (8+ 6*z2dot)*(fid-fvd); % Dogrusal
    % olmayan PD benzeri kontrolor

    u= [u1; u2];
```

```

%**** Sistem dinamik denklemlerinin cozumu,

m11= Ih1+ Ih2+ M1*L1^2/3+ m1*L1^2+ M2*(L1^2+ L2^2/3+ ...
      L1*L2*cos(fi))+ m2*(L1^2+ L2^2+ 2*L1*L2*cos(fi))- ...
      2*L1*sin(fi)*alfa2*eta;
m12= Ih2+ M2*L2^2/3+m2*L2^2+(M2/2+m2)*L1*L2*cos(fi)- ...
      L1*sin(fi)*alfa2*eta;
m13= alfa1+ L1*cos(fi)*alfa2;
m21= m12;
m22= Ih2+ M2*L2^2/3+m2*L2^2;
m23= alfa1;
m31= gama1+ L1*cos(fi)*gama2;

k1= (m12- m13*c1)/(m22- m23*c1);
mtt= m11- m13*(c1+ L1*cos(fi)*c2)- k1*(m21- m23*(c1+ ...
      L1*cos(fi)*c2));
F1= beta1*tetd- (M2/2+ m2)*L1*L2*(2*tetd*fid+ fid^2)*sin(fi)- ...
      L1*fid*cos(fi)*(2*tetd+ fid)*alfa2*eta- ...
      2*L1*sin(fi)*(tetd+fid)*alfa2*etad;
F2= beta2*fid+ (M2/2+ m2)*L1*L2*tetd^2*sin(fi)+ ...
      L1*tetd^2*cos(fi)*alfa2*eta;

%**** \ddot{\theta}_1,

ttdd= (u1- F1- k1*(u2- F2)+ ...
      (m13- k1*m23)*(Lamda*eta+ L1*tetd^2*sin(fi)*c2))/mtt;

%**** \ddot{\theta}_2,

fidd= (u2- F2+ m23*(Lamda*eta+ L1*tetd^2*sin(fi)*c2)- ...
      (m21- m23*(c1+ L1*cos(fi)*c2))*ttdd)/(m22-m23*c1);

%**** \ddot{\eta}

etadd= -Lamda*eta- c1*(ttdd+ fidd)- c2*(L1*cos(fi)*ttdd+ ...
      L1*tetd^2*sin(fi));

%**** xdot= [tetd;fid;etad;ttdd;fidd;etadd]

xdot= [tetd;fid;etad;ttdd;fidd;etadd];

```

EK-2 İsim komutunu kullanarak katı-esnek robot kolunun benzetimini yapan program

```

%*****
%***** Kati-Esnek Robot Kolu Benzetim Programi *****
%*****

%E:      Esnek parcanin Young esneklik modulu, (N/m^2)
%Ia:     Esnek parcanin yuzey atalet momenti, (m^4)
%rho1:   Kati parcanin birim uzunluk basina kutlesi, (kg/m)
%rho2:   Esnek parcanin birim uzunluk basina kutlesi, (kg/m)
%L1:     Kati parcanin uzunlugu, (m)
%L2:     Esnek parcanin uzunlugu, (m)
%Ih1:    1. eklemin eylemsizlik momenti, (kg/m^2)
%Ih2:    2. eklemin eylemsizlik momenti, (kg/m^2)
%m1:     2. eklemdaki kutle degeri, (kg)
%m2:     Esnek parcanin ucundaki kutle degeri, (kg)
%beta1:  1. eklemin yagli surtunme katsayisi, (Nms/rad)
%beta2:  2. eklemin yagli surtunme katsayisi, (Nms/rad)

format long e
clear all
clc

n= input('Mod sayisini giriniz...? ');
T= input('Simulasyon suresini giriniz...? ');
ts= 0.001;

%**** Kati parcanin ve birinci eklemin parametre degerleri

rho1= 1; L1= 0.6; M1=rho1*L1; m1= 0.25; m1s= 0.15;
beta1= 0.01;
r2= 0.035; r1= 0.05; % Motorun statorunun ic ve dis yaricaplari
Ih1= 1e-3+ m1s*(r1^2+ r2^2)/2;

%**** Esnek parcanin ve ikinci eklemin parametre degerleri

E= 7e+10; Ia= 2.14e-10; EIa= E*Ia;
rho2= 0.5; L2=0.8; M2=rho2*L2; m2= 0;
beta2= 0.005;
l= (m2/7.68e+3)^(1/3); % Demirden yapilmis olan kupun kenar uzunlugu
Ih2= 5.4e-4+ m2*l^2/6;

%*****
%***** NEWTON_RAPHSON yontemi ile frekans denkleminin cozumu *****
%*****

f0= zeros(n,1); k= zeros(n,1);
f0(1)= 1.87504; f0(2)= 4.6940911;
for i=3:n
    f0(i)= f0(i-1)+ pi;
end
x0= f0(1:n);
for i=1:n,
    xx=x0(i);
    frq=1+cosh(xx)*cos(xx)+(m2/M2)*xx*(sinh(xx)*cos(xx)- ...
        cosh(xx)*sin(xx));
    dfrq=(1+m2/M2)*(sinh(xx)*cos(xx)-cosh(xx)*sin(xx))- ...
        2*(m2/M2)*xx*sinh(xx)*sin(xx);

```



```

vx=xx-frq/dfrq;
while abs(vx-xx)>=1e-12,
    xx= vx;
    frq= 1+cosh(xx)*cos(xx)+(m2/M2)*xx*(sinh(xx)*cos(xx)- ...
        cosh(xx)*sin(xx));
    dfrq=(1+m2/M2)*(sinh(xx)*cos(xx)-cosh(xx)*sin(xx))- ...
        2*(m2/M2)*xx*sinh(xx)*sin(xx);
    vx=xx-frq/dfrq;
end
k(i)=vx;
end
k=k/L2;

%*****
%***** Dinamik modelin bulunmasi *****
%*****

lmd=zeros(n,1); hi=lmd; qi=hi; qj=qj;
gama1=qj; gama2=gama1; alfa1=gama2'; alfa2= alfa1; a=zeros(n);

for i=1:n;
    xx=k(i)*L2;
    lmd(i)=(E*Ia/rho2)*k(i)^4;
    hi(i)=(cosh(xx)+cos(xx))/(sinh(xx)+sin(xx));
    qi(i)=2*(cosh(xx)*sin(xx)-sinh(xx)*cos(xx))/(sinh(xx)+sin(xx));
    gama1(i)= (2/k(i)^2)-(2*xx*(1+cosh(xx)*cos(xx)))/ ...
        (k(i)^2*(sinh(xx)+sin(xx)));
    gama2(i)= 2*(cosh(xx)+cos(xx)-cosh(xx)*cos(xx)-1)/ ...
        (k(i)*(sinh(xx)+sin(xx)));
    alfa1(i)= rho2*gama1(i)+ m2*L2*qi(i);
    alfa2(i)= rho2*gama2(i)+ m2*qi(i);

for j=1:n;
    if i==j,
        a(i,j)= L2+(1/k(i))*(2*hi(i)*sin(xx)*sinh(xx)- ...
            (hi(i)^2+1)*sin(xx)*cosh(xx)+(hi(i)^2-1)*cos(xx)*sinh(xx)+ ...
            (hi(i)^2+1)*sinh(2*xx)/4+ ...
            (1-hi(i)^2)*sin(2*xx)/4+hi(i)*cos(2*xx)/2-hi(i)*cosh(2*xx)/2);
    else
        yy=k(j)*L2;
        qj(j)=2*(cosh(yy)*sin(yy)- ...
            sinh(yy)*cos(yy))/(sinh(yy)+sin(yy));
        a(i,j)= -m2*qi(i)*qj(j)/rho2;
    end
end
end

Lamda= diag(lmd);
K= -a*Lamda/EIa;

```

```

%*****
%***** Sistemin Benzetimi *****
%*****

%**** Referans sinyaller,

    tetar= pi/3; fir= pi/3;
    tvd=0;      fvd=0;

i=1; t=0;
X=[0;0;zeros(n,1);0;0;zeros(n,1)]; % Sistemin baslangic kosullari
Y(i,:)= [X(1) X(2) 0];
while(t<=T+ts),

    teta= X(1);   fi= X(2);   eta= X(3:2+n);
    tetd= X(3+n); fid=X(4+n); etad= X(5+n:2*n+4);

%**** Acik dongu sistemin benzetimi icin uretilen kontrol girdisi,

    if (t<=1),
        u1= 1; u2= 1;
    else
        u1= 0; u2= 0;
    end

%**** Kontrolör 1 (PD kontrolör),

    %u1= 10*(tetar-teta)- 9*(tetd-tvd);
    %u2= 12*(fir-fi)- 8*(fid-fvd); %

%**** Kontrolör 2 (PD benzeri dogrusal olmayan kontrolör),

    %z1dot=tetar-teta;
    %z2dot=fir-fi;
    %if (z1dot<=pi/2),
    %     z1dot= abs(z1dot);
    %else z1dot= pi/2;
    %end

    %if (z2dot<=pi/2),
    %     z2dot= abs(z2dot);
    %else z2dot= pi/2;
    %end

    %u1= (12- 4.5*z1dot)*(tetar-teta)- (8+ 6*z1dot)*(tetd-tvd);
    %u2= (12- 4.5*z2dot)*(fir-fi)- (8+ 6*z2dot)*(fid-fvd);

    u(i,:)= [u1 u2];

m11= Ih1+ Ih2+ M1*L1^2/3+ m1*L1^2+ M2*(L1^2+ L2^2/3+ L1*L2*cos(fi))+ ...
    m2*(L1^2+ L2^2+ 2*L1*L2*cos(fi))- 2*L1*sin(fi)*alfa2*eta;
m12= Ih2+ M2*L2^2/3+m2*L2^2+(M2/2+m2)*L1*L2*cos(fi)- ...
    L1*sin(fi)*alfa2*eta;
m13= alfa1+ L1*cos(fi)*alfa2;

```

```

m21= m12;
m22= Ih2+ M2*L2^2/3+m2*L2^2;
m23= alfa1;

m31= gama1+ L1*cos(fi)*gama2;
m32= gama1;
m33= a;
M= [m11 m12 m13; m21 m22 m23; m31 m32 m33];

F= [ 0 0 L1*fid*cos(fi)*(2*tetd+ fid)*alfa2;
     0 0 -L1*tetd^2*cos(fi)*alfa2;
     zeros(n,1) zeros(n,1) EIA*K];

G= [- beta1+(M2+ 2*m2)*L1*L2*sin(fi)*fid ...
     (M2/2+ m2)*L1*L2*sin(fi)*fid 2*L1*sin(fi)*(tetd+ fid)*alfa2;
     -(M2/2+ m2)*L1*L2*sin(fi)*tetd -beta2 zeros(1,n);
     - L1*tetd*sin(fi)*gama2 zeros(n,1) zeros(n,n) ];

J= [eye(2); zeros(n,2)];

A= [zeros(n+2) eye(n+2); inv(M)*F inv(M)*G];
B= [zeros(n+2,2); inv(M)*J];
C= [1 zeros(1,2*n+3); 0 1 zeros(1,2*n+2); 0 0 qi' zeros(1,n+2)];
D= zeros(3,2);

tt= 0:ts:ts;
U= (u(i,:))'*ones(1,length(tt))';
[y,x]= lsim(A,B,C,D,U,tt,X);
X= x(2,:);
i=i+1;
Y(i,:)= y(2,:);

t= t+ts;
end

t=0:ts:T;
l=length(t);
figure(1), plot(t,Y(1:l,1)*180/pi) % 1. eklem acisini ciz
print /home/atakan/Rig-Flex/SIM/Tt1.ps
figure(2), plot(t,Y(1:l,2)*180/pi) % 2. eklem acisini ciz
print /home/atakan/Rig-Flex/SIM/Fil.ps
figure(3), plot(t,Y(1:l,3)) % Uc sapmasini ciz
print /home/atakan/Rig-Flex/SIM/Tdl.ps
figure(4), plot(t,u(:,1)) % Birinci ekleme uygulanacak olan torqu ciz
print /home/atakan/Rig-Flex/SIM/U11.ps
figure(5), plot(t,u(:,2)) % İkinci ekleme uygulanacak olan torqu ciz
print /home/atakan/Rig-Flex/SIM/U21.ps

```

EK-3 Katı-Esnek Robot Kolu Benzetim Programı (PD kontrolörlerle bir yörünge sinyalinin takip edilmesi)

```

%*****
%***** Kati-Esnek Robot Kolu Benzetim Programı *****
%*****

%E:      Esnek parcanin Young esneklik modulu, (N/m^2)
%Ia:     Esnek parcanin yuzey atalet momenti, (m^4)
%rho1:   Kati parcanin birim uzunluk basina kutlesi, (kg/m)
%rho2:   Esnek parcanin birim uzunluk basina kutlesi, (kg/m)
%L1:     Kati parcanin uzunlugu, (m)
%L2:     Esnek parcanin uzunlugu, (m)
%Ih1:    1. eklem in eylemsizlik moment i, (kg/m^2)
%Ih2:    2. eklem in eylemsizlik moment i, (kg/m^2)
%m1:     2. eklemdeki kutle degeri, (kg)
%m2:     Esnek parcanin ucundaki kutle degeri, (kg)
%beta1:  1. eklem in yagli surtunme katsayisi, (Nms/rad)
%beta2:  2. eklem in yagli surtunme katsayisi, (Nms/rad)

format long e
clear all
clc

n= input('Mod sayisini giriniz...? ');
T= input('Simulasyon suresini giriniz...? ');
ts= 0.001;

%**** Kati parcanin ve birinci eklem in parametre degerleri

rho1= 1; L1= 0.6; M1=rho1*L1; m1= 0.25; m1s= 0.15;
beta1= 0.01;
r2= 0.035; r1= 0.05; % Motorun statorunun ic ve dis yaricaplari
Ih1= 1e-3+ m1s*(r1^2+ r2^2)/2;

%**** Esnek parcanin ve ikinci eklem in parametre degerleri

E= 7e+10; Ia= 2.14e-10; EIa= E*Ia;
rho2= 0.5; L2=0.8; M2=rho2*L2; m2= 0;
beta2= 0.005;
l= (m2/7.68e+3)^(1/3); % Demirden yapilmis olan kupun kenar uzunlugu
Ih2= 5.4e-4+ m2*l^2/6;

%*****
%***** NEWTON RAPHSON yontemi ile frekans denkleminin cozumu *****
%*****

f0= zeros(n,1); k= zeros(n,1);
f0(1)= 1.87504; f0(2)= 4.6940911;
for i=3:n
    f0(i)= f0(i-1)+ pi;
end
x0= f0(1:n);
for i=1:n,
    xx=x0(i);
    frq=1+cosh(xx)*cos(xx)+(m2/M2)*xx*(sinh(xx)*cos(xx)- ...
        cosh(xx)*sin(xx));
    dfrq=(1+m2/M2)*(sinh(xx)*cos(xx)-cosh(xx)*sin(xx))- ...
        2*(m2/M2)*xx*sinh(xx)*sin(xx);

```

```

vx=xx-frq/dfrq;
while abs(vx-xx)>=1e-12,

    xx= vx;
    frq= 1+cosh(xx)*cos(xx)+(m2/M2)*xx*(sinh(xx)*cos(xx)- ...
        cosh(xx)*sin(xx));
    dfrq=(1+m2/M2)*(sinh(xx)*cos(xx)-cosh(xx)*sin(xx))- ...
        2*(m2/M2)*xx*sinh(xx)*sin(xx);
    vx=xx-frq/dfrq;

end
k(i)=vx;
end
k=k/L2;

§*****
§***** Dinamik modelin bulunmasi *****
§*****

lmd=zeros(n,1); hi=lmd; qi=hi; qj=qi;
gama1=qj; gama2=gama1; alfa1=gama2'; alfa2= alfa1; a=zeros(n);

for i=1:n;

    xx=k(i)*L2;
    lmd(i)=(E*Ia/rho2)*k(i)^4;
    hi(i)=(cosh(xx)+cos(xx))/(sinh(xx)+sin(xx));
    qi(i)=2*(cosh(xx)*sin(xx)-sinh(xx)*cos(xx))/(sinh(xx)+sin(xx));
    gama1(i)=(2/k(i)^2)-(2*xx*(1+cosh(xx)*cos(xx)))/ ...
        (k(i)^2*(sinh(xx)+sin(xx)));
    gama2(i)= 2*(cosh(xx)+cos(xx)-cosh(xx)*cos(xx)-1)/ ...
        (k(i)*(sinh(xx)+sin(xx)));
    alfa1(i)= rho2*gama1(i)+ m2*L2*qi(i);
    alfa2(i)= rho2*gama2(i)+ m2*qi(i);

for j=1:n;

    if i==j,

        a(i,j)= L2+(1/k(i))*(2*hi(i)*sin(xx)*sinh(xx)- ...
            (hi(i)^2+1)*sin(xx)*cosh(xx)+(hi(i)^2-1)*cos(xx)*sinh(xx)+ ...
            (hi(i)^2+1)*sinh(2*xx)/4+ ...
            (1-hi(i)^2)*sin(2*xx)/4+hi(i)*cos(2*xx)/2-hi(i)*cosh(2*xx)/2);

    else

        yy=k(j)*L2;
        qj(j)=2*(cosh(yy)*sin(yy)- ...
            sinh(yy)*cos(yy))/(sinh(yy)+sin(yy));
        a(i,j)= -m2*qi(i)*qj(j)/rho2;

    end
end
end

Lamda= diag(lmd);
K= -a*Lamda/EIa;

```

```

%*****
%***** Sistemin Benzetimi *****
%*****

```

```

%**** 4-3-4 yorungesi polinom fonksiyon katsayilerinin hesaplanmasi

```

```

t11= 1; t12= 1; t1n= 1;
Teta0= 0; Tetaf= pi/3;
Tetal= Tetaf/6; Teta2= Tetaf- Tetal;
X1= coeffs(t11,t12,t1n,Teta0,Tetaf,Tetal,Teta2); % 1. eklem icin

t21= 1; t22= 1; t2n= 1;
Fi0= 0; Fif= pi/3;
Fil= Fif/6; Fi2= Fif- Fil;
X2= coeffs(t21,t22,t2n,Fi0,Fif,Fil,Fi2); % 2. eklem icin

```

```

rr=1; t=0;
X=[0;0;zeros(n,1);0;0;zeros(n,1)]; % tum sistemin baslangic kosulu
Y(i,:)= [X(1) X(2) 0];
while(t<=T+ts),

```

```

    teta= X(1); fi= X(2); eta= X(3:2+n);
    tetd= X(3+n); fid=X(4+n); etad= X(5+n:2*n+4);

```

```

%**** Yorunge sinyalinin hesaplanmasi

```

```

yrng= trjt(X1,X2,t,t11,t12,t1n,t21,t22,t2n, ...
    Teta0,Fi0,Tetal,Fil,Tetaf,Fif);
tetr= yrng(1); fir= yrng(2);
tetrd= yrng(3); fird= yrng(4);

```

```

% Kontrolor,

```

```

err= [tetr; fir]- [teta; fi];
errd= [tetrd; fird]- [tetd; fid];

```

```

u(rr,:)= [ [0.025 0; 0 0.8]*err+ [5 0; 0 4.35]*errd ]';

```

```

m11= Ih1+ Ih2+ M1*L1^2/3+ m1*L1^2+ M2*(L1^2+ L2^2/3+ L1*L2*cos(fi))+ ...
    m2*(L1^2+ L2^2+ 2*L1*L2*cos(fi))- 2*L1*sin(fi)*alfa2*eta;
m12= Ih2+ M2*L2^2/3+m2*L2^2+(M2/2+m2)*L1*L2*cos(fi)- ...
    L1*sin(fi)*alfa2*eta;
m13= alfa1+ L1*cos(fi)*alfa2;
m21= m12;
m22= Ih2+ M2*L2^2/3+m2*L2^2;
m23= alfa1;
m31= gama1+ L1*cos(fi)*gama2;
m32= gama1;
m33= a;
M= [m11 m12 m13; m21 m22 m23; m31 m32 m33];

```

```

F= [ 0 0 L1*fid*cos(fi)*(2*tetd+ fid)*alfa2;
    0 0 -L1*tetd^2*cos(fi)*alfa2;
    zeros(n,1) zeros(n,1) EIa*K];

G= [- beta1+(M2+ 2*m2)*L1*L2*sin(fi)*fid ...
     (M2/2+ m2)*L1*L2*sin(fi)*fid 2*L1*sin(fi)*(tetd+ fid)*alfa2;
     -(M2/2+ m2)*L1*L2*sin(fi)*tetd -beta2 zeros(1,n);
     - L1*tetd*sin(fi)*gama2 zeros(n,1) zeros(n,n) ];

J= [eye(2); zeros(n,2)];

A= [zeros(n+2) eye(n+2); inv(M)*F inv(M)*G];
B= [zeros(n+2,2); inv(M)*J];
C= [1 zeros(1,2*n+3); 0 1 zeros(1,2*n+2); 0 0 qi' zeros(1,n+2)];
D= zeros(3,2);

tt= 0:ts:ts;
U= (u(rr,:)'*ones(1,length(tt)))';
[y,x]= lsim(A,B,C,D,U,tt,X);
X= x(2,:)';
rr=rr+1;
Y(rr,:)= y(2,:);

t= t+ts;
end

t=0:ts:T;
l=length(t);
figure(1), plot(t,Y(1:l,1)*180/pi) % 1. eklem acisini ciz
print /home/atakan/Rig-Flex/PDT/Tt1.ps
figure(2), plot(t,Y(1:l,2)*180/pi) % 2. eklem acisini ciz
print /home/atakan/Rig-Flex/PDT/Fil.ps
figure(3), plot(t,Y(1:l,3)) % Uc sapmasini ciz
print /home/atakan/Rig-Flex/PDT/Td1.ps
figure(4), plot(t,u(:,1)) % Birinci ekleme uygulanacak olan torku ciz
print /home/atakan/Rig-Flex/PDT/U11.ps
figure(5), plot(t,u(:,2)) % İkinci ekleme uygulanacak olan torku ciz
print /home/atakan/Rig-Flex/PDT/U21.ps

```

coeffs.m fonksiyonu

```
function coef= coeffs(t1,t2,tn,T0,TF,T1,T2)

% T0      % baslangic pozisyonu
% TF      % son pozisyon
% T1      % ayrilma pozisyonu
% T2= TF- T1; % yaklasma pozisyonu

Sigma0= T1- T0;
Sigma2= T2- T1;
Sigman= TF- T2;

Y= [Sigma0;0;0;Sigma2;0;0;Sigman];

C= [1 1 0 0 0 0 0;
    3/t1 4/t1 -1/t2 0 0 0 0;
    6/t1^2 12/t1^2 0 -2/t2^2 0 0 0;
    0 0 1 1 1 0 0;
    0 0 1/t2 2/t2 3/t2 -3/tn 4/tn;
    0 0 0 2/t2^2 6/t2^2 6/tn^2 -12/tn^2;
    0 0 0 0 0 1 -1];

X= inv(C)*Y;
an0= TF; an1=0; an2=0;

coef= [X; an0; an1; an2];
```


trjt.m fonksiyonu

```
function yrng= trjt(X1,X2,t,t11,t12,t1n,t21,t22,t2n,Teta0,Fi0, ...  
                  Tetal,Fil,Tetaf,Fif)
```

```
a13= X1(1); a14= X1(2);  
a21= X1(3); a22= X1(4); a23= X1(5);  
an3= X1(6); an4= X1(7);  
an0= X1(8); an1= X1(9); an2= X1(10);
```

```
aa13= X2(1); aa14= X2(2);  
aa21= X2(3); aa22= X2(4); aa23= X2(5);  
aan3= X2(6); aan4= X2(7);  
aan0= X2(8); aan1= X2(9); aan2= X2(10);
```

```
if t<=t11,  
    tt= t/t11;  
    tetr= a14*tt^4+ a13*tt^3+ Teta0;  
    tetrd= 4*a14*tt^3+ 3*a13*tt^2;  
    tetrdd= 12*a14*tt^2+ 6*a13*tt;  
end
```

```
if t<=t21,  
    tt= t/t21;  
    fir= aa14*tt^4+ aa13*tt^3+ Fi0;  
    firdd= 4*aa14*tt^3+ 3*aa13*tt^2;  
    firddd= 12*aa14*tt^2+ 6*aa13*tt;  
end
```

```
if (t>t11 & t<= (t11+t12)),  
    tt= (t- t11)/t12;  
    tetr= a23*tt^3+ a22*tt^2+ a21*tt+ Tetal;  
    tetrd= 3*a23*tt^2+ 2*a22*tt+ a21;  
    tetrdd= 6*a23*tt+ 2*a22;  
end
```

```
if (t>t21 & t<= (t21+t22)),  
    tt= (t- t21)/t22;  
    fir= aa23*tt^3+ aa22*tt^2+ aa21*tt+ Fil;  
    firdd= 3*aa23*tt^2+ 2*aa22*tt+ aa21;  
    firddd= 6*aa23*tt+ 2*aa22;  
end
```

```
if (t> (t11+t12) & t<= (t11+t12+t1n)),  
    tt= (t- (t11+t12))/t1n;  
    tetr= an4*tt^4+ (-4*an4+ an3)*tt^3+ (6*an4- 3*an3+ an2)*tt^2+ ...  
          (-4*an4+ 3*an3- 2*an2+ an1)*tt+ (an4- an3+ an2- an1+ an0);  
    tetrd= 4*an4*tt^3+ 3*(-4*an4+ an3)*tt^2+ ...  
          2*(6*an4- 3*an3+ an2)*tt+ (-4*an4+ 3*an3- 2*an2+ an1);  
    tetrdd= 12*an4*tt^2+ 6*(-4*an4+ an3)*tt+ 2*(6*an4- 3*an3+ an2);  
end
```

```
if (t> (t21+t22) & t<= (t21+t22+t2n)),  
    tt= (t- (t21+t22))/t2n;  
    fir= aan4*tt^4+ (-4*aan4+ aan3)*tt^3+ ...  
          (6*aan4- 3*aan3+ aan2)*tt^2+ ...  
          (-4*aan4+ 3*aan3- 2*aan2+ aan1)*tt+ ...  
          (aan4- aan3+ aan2- aan1+ aan0);  
    firdd= 4*aan4*tt^3+ 3*(-4*aan4+ aan3)*tt^2+ ...  
          2*(6*aan4- 3*aan3+ aan2)*tt+ (-4*aan4+ 3*aan3- 2*aan2+ aan1);  
    firddd= 12*aan4*tt^2+ 6*(-4*aan4+ aan3)*tt+ ...  
          2*(6*aan4- 3*aan3+ aan2);  
end
```

```
end

if t> (t11+t12+t1n),
    tetr= Tetaf;
    tetrdd=0;
end
if t> (t21+t22+t2n),
    fir= Fif;
    firdd=0;
end

yrng= [tetr; fir; tetrdd; firdd];
```



EK-4 Kati-Esnek Robot Kolu Benzetim Programı (Tekil perturbasyon metodunun esnek robot kollarına uygulanması)

```

%*****
%***** Kati-Esnek Robot Kolu Benzetim Programi *****
%*****

%E:      Esnek parcanin Young esneklik modulu, (N/m^2)
%Ia:     Esnek parcanin yuzey atalet momenti, (m^4)
%rho1:   Kati parcanin birim uzunluk basina kutlesi, (kg/m)
%rho2:   Esnek parcanin birim uzunluk basina kutlesi, (kg/m)
%L1:     Kati parcanin uzunlugu, (m)
%L2:     Esnek parcanin uzunlugu, (m)
%Ih1:    1. eklemin eylemsizlik momentini, (kg/m^2)
%Ih2:    2. eklemin eylemsizlik momentini, (kg/m^2)
%m1:     2. eklemdaki kutle degeri, (kg)
%m2:     Esnek parcanin ucundaki kutle degeri, (kg)
%beta1:  1. eklemin yagli surtunme katsayisi, (Nms/rad)
%beta2:  2. eklemin yagli surtunme katsayisi, (Nms/rad)

format long e
clear all
clc
n= input('Mod sayisini giriniz...? ');
T= input('Simulasyon suresini giriniz...? ');
nc= 2; % Kontrolor tasarimi icin 2 modlu sistem kullanilmistir
ts= 0.001;

%**** Kati parcanin ve birinci eklemin parametre degerleri

rho1= 1; L1= 0.6; M1=rho1*L1; m1= 0.25; mls= 0.15;
beta1= 0.01;
r2= 0.035; r1= 0.05; % Motorun statorunun ic ve dis yaricaplari
Ih1= 1e-3+ mls*(r1^2+ r2^2)/2;

%**** Esnek parcanin ve ikinci eklemin parametre degerleri

E= 7e+10; Ia= 2.14e-10; EIa= E*Ia;
rho2= 0.5; L2=0.8; M2=rho2*L2; m2= 0;
beta2= 0.005;
l= (m2/7.68e+3)^(1/3); % Demirden yapilmis olan kupun kenar uzunlugu
Ih2= 5.4e-4+ m2*l^2/6;

%*****
%***** NEWTON_RAPHSON yontemi ile frekans denkleminin cozumu *****
%*****

f0= zeros(n,1); k= zeros(n,1);
f0(1)= 1.87504; f0(2)= 4.6940911;
for i=3:n
    f0(i)= f0(i-1)+ pi;
end
x0= f0(1:n);
for i=1:n,
    xx=x0(i);
    frq=1+cosh(xx)*cos(xx)+(m2/M2)*xx*(sinh(xx)*cos(xx)- ...
        cosh(xx)*sin(xx));
    dfrq=(1+m2/M2)*(sinh(xx)*cos(xx)-cosh(xx)*sin(xx))- ...
        2*(m2/M2)*xx*sinh(xx)*sin(xx);

```

```

    vx=xx-frq/dfrq;
while abs(vx-xx)>=1e-12,

    xx= vx;
    frq= 1+cosh(xx)*cos(xx)+(m2/M2)*xx*(sinh(xx)*cos(xx)- ...
        cosh(xx)*sin(xx));
    dfrq=(1+m2/M2)*(sinh(xx)*cos(xx)-cosh(xx)*sin(xx))- ...
        2*(m2/M2)*xx*sinh(xx)*sin(xx);
    vx=xx-frq/dfrq;

end
    k(i)=vx;
end
    k=k/L2;

%*****
%***** Dinamik modelin bulunmasi *****
%*****

lmd=zeros(n,1); hi=lmd; qi=hi; qj=qi; qm= qj;
gamal=qj; gama2=gamal; alfa1=gama2'; alfa2= alfa1; a=zeros(n);
for i=1:n;

    xx=k(i)*L2;
    lmd(i)=(E*Ia/rho2)*k(i)^4;
    hi(i)=(cosh(xx)+cos(xx))/(sinh(xx)+sin(xx));
    qi(i)=2*(cosh(xx)*sin(xx)-sinh(xx)*cos(xx))/(sinh(xx)+sin(xx));
    qm(i)=2*(cosh(xx/2)*sin(xx/2)- ...
        sinh(xx/2)*cos(xx/2))/(sinh(xx/2)+sin(xx/2));
    gamal(i)= (2/k(i)^2)-(2*xx*(1+cosh(xx)*cos(xx)))/ ...
        (k(i)^2*(sinh(xx)+sin(xx)));
    gama2(i)= 2*(cosh(xx)+cos(xx)-cosh(xx)*cos(xx)-1)/ ...
        (k(i)*(sinh(xx)+sin(xx)));
    alfa1(i)= rho2*gamal(i)+ m2*L2*qi(i);
    alfa2(i)= rho2*gama2(i)+ m2*qi(i);

for j=1:n;

    if i==j,

        a(i,j)= L2+(1/k(i))*(2*hi(i)*sin(xx)*sinh(xx)- ...
            (hi(i)^2+1)*sin(xx)*cosh(xx)+(hi(i)^2-1)*cos(xx)*sinh(xx)+ ...
            (hi(i)^2+1)*sinh(2*xx)/4+ ...
            (1-hi(i)^2)*sin(2*xx)/4+hi(i)*cos(2*xx)/2-hi(i)*cosh(2*xx)/2);

    else

        yy=k(j)*L2;
        qj(j)=2*(cosh(yy)*sin(yy)- ...
            sinh(yy)*cos(yy))/(sinh(yy)+sin(yy));
        a(i,j)= -m2*qi(i)*qj(j)/rho2;
    end
end
end

Lamda= diag(lmd);
K= -a*Lamda/(E*Ia);
Kc= K(1:nc,1:nc);
mu= 1/(E*Ia);

```

```

Eps= sqrt(mu);
iphi= inv([qm(1:nc)'; qi(1:nc)']);
%*****
%***** Sistemin Benzetimi *****
%*****

%**** 4-3-4 yorungesi polinom fonksiyon katsayilerinin hesaplanmasi

t11= 1; t12= 1; t1n= 1;
Teta0= 0; Tetaf= pi/3;
Tetal= Tetaf/6; Teta2= Tetaf- Tetal;
X1= coeffs(t11,t12,t1n,Teta0,Tetaf,Tetal,Teta2); % 1. eklem icin

t21= 1; t22= 1; t2n= 1;
Fi0= 0; Fif= pi/3;
Fil= Fif/6; Fi2= Fif- Fil;
X2= coeffs(t21,t22,t2n,Fi0,Fif,Fil,Fi2); % 2. eklem icin

%**** Yavas alt sistem

Kp= [1 0; 0 0.05];
Kv= [10 0; 0 12]; % Yavas alt sistemin geribesleme kazanc matrisleri

%**** Yavas alt sistemin dinamik matrisleri,
%**** As= [zeros(2) eye(2); zeros(2) zeros(2)];
%**** Bs= [zeros(2); eye(2)];

rr=1; t=0;
mpd=0; mpv=0; % Kolun orta noktasinin yer degistirme ve hiz olcumleri
tipd=0; tipv=0; % Uc pozisyonunun yer degistirme ve hiz olcumleri
meta0= [0; 0];
X= [0;0;zeros(n,1);0;0;zeros(n,1)]; % tum sistemin baslangic kosulu
Y(rr,:)= [X(1) X(2) zeros(1,4)];
while(t<=T+ts),

teta= X(1); fi= X(2); eta= X(3:2+n);
tetd= X(3+n); fid= X(4+n); etad= X(5+n:2*n+4);

%**** Yorunge sinyalinin hesaplanmasi

yrng= trjt(X1,X2,t,t11,t12,t1n,t21,t22,t2n, ...
Teta0,Fi0,Tetal,Fil,Tetaf,Fif);
tetr= yrng(1); fir= yrng(2);
tetrdd= yrng(3); firdd= yrng(4);
tetrddd= yrng(5); firddd= yrng(6);

%**** Yavas kontrol girdisinin bulunmasi,

m11= Ih1+ Ih2+ M1*L1^2/3+ m1*L1^2+ M2*(L1^2+ L2^2/3+ L1*L2*cos(fi))+ ...
m2*(L1^2+ L2^2+ 2*L1*L2*cos(fi));
m12= Ih2+ M2*L2^2/3+ m2*L2^2+(M2/2+ m2)*L1*L2*cos(fi);
m21= m12;
m22= Ih2+ M2*L2^2/3+m2*L2^2;
Ms= [m11 m12; m21 m22];

```

```

F=[ -beta1*tetd+ (M2/2+ m2)*L1*L2*(2*tetd*fid+ fid^2)*sin(fi);
    -beta2*fid- (M2/2+ m2)*L1*L2*sin(fi)*tetd^2];

us= -F+ Ms*( [tetrdd; firdd]+ Kv*([tetrd; fird]- [tetd; fid])+ ...
    Kp*([tetr; fir]- [teta; fi]) ); % Yavas kontrol girdisi

xs= [teta; fi; tetd; fid];

%**** Hizli kontrol girdisinin bulunmasi,

[zetab,Kf]= fast_c(Ih1,Ih2,beta1,beta2,rho2,m1,m2,M1,M2,L1,L2,qi, ...
    a,nc,EIa,gama1,gama2,alfal,alfa2,Kc,Eps,us,xs);

meta= iphi*[mpd; tipd];
metd= iphi*[mpv; tipv]; % Pozisyon ve hiz olcumlerinden esnek hal
                        % durumlarinin belirlenmesi

%metd= (meta- meta0)/ts;
%meta0= meta;

Uf= -Kf*[meta/Eps^2- inv(Kc)*zetab; metd/Eps]; % Hizli kontrol
                                                % girdisi

u(rr,:)= [us+ Uf]'; % Kompozit kontrol girdisi

%*** Sistemin benzetimi,

m11= Ih1+ Ih2+ M1*L1^2/3+ m1*L1^2+ M2*(L1^2+ L2^2/3+ L1*L2*cos(fi))+ ...
    m2*(L1^2+ L2^2+ 2*L1*L2*cos(fi))- 2*L1*sin(fi)*alfa2*eta;
m12= Ih2+ M2*L2^2/3+m2*L2^2+(M2/2+m2)*L1*L2*cos(fi)- ...
    L1*sin(fi)*alfa2*eta;
m13= alfa1+ L1*cos(fi)*alfa2;
m21= m12;
m22= Ih2+ M2*L2^2/3+m2*L2^2;
m23= alfa1;
m31= gama1+ L1*cos(fi)*gama2;
m32= gama1;
m33= a;
M= [m11 m12 m13; m21 m22 m23; m31 m32 m33];

F= [ 0 0 L1*fid*cos(fi)*(2*tetd+ fid)*alfa2;
    0 0 -L1*tetd^2*cos(fi)*alfa2;
    zeros(n,1) zeros(n,1) EIa*K];

G= [- beta1+(M2+ 2*m2)*L1*L2*sin(fi)*fid ...
    (M2/2+ m2)*L1*L2*sin(fi)*fid 2*L1*sin(fi)*(tetd+ fid)*alfa2;
    -(M2/2+ m2)*L1*L2*sin(fi)*tetd -beta2 zeros(1,n);
    - L1*tetd*sin(fi)*gama2 zeros(n,1) zeros(n,n) ];

J= [eye(2); zeros(n,2)];

A= [zeros(n+2) eye(n+2); inv(M)*F inv(M)*G];
B= [zeros(n+2,2); inv(M)*J];
C= [1 zeros(1,2*n+3); 0 1 zeros(1,2*n+2); 0 0 qm' 0 0 zeros(1,n);
    0 0 qi' 0 0 zeros(1,n); 0 0 zeros(1,n) 0 0 qm';
    0 0 zeros(1,n) 0 0 qi' ];

```

```

D= zeros(6,2);

    tt=0:ts:ts;
    U=(u(rr,:)'*ones(1,length(tt)))';
    [y,x]= lsim(A,B,C,D,U,tt,X);
    X= x(2,:)';
    rr=rr+1;
    Y(rr,:)= y(2,:);
    mpd= y(2,3);
    tipd= y(2,4);
    mpv= y(2,5);
    tipv= y(2,6);

t= t+ts;
end

t=0:ts:T;
l=length(t);
figure(1), plot(t,Y(1:l,1)*180/pi) % 1. eklem acisini ciz
print /home/atakan/Rig-Flex/SPRT/Tt1.ps
figure(2), plot(t,Y(1:l,2)*180/pi) % 2. eklem acisini ciz
print /home/atakan/Rig-Flex/SPRT/Fil.ps
figure(3), plot(t,Y(1:l,4)) % Uc sapmasini ciz
print /home/atakan/Rig-Flex/SPRT/Td1.ps
figure(4), plot(t,u(:,1)) % Birinci ekleme uygulanacak olan torqu ciz
print /home/atakan/Rig-Flex/SPRT/U11.ps
figure(5), plot(t,u(:,2)) % İkinci ekleme uygulanacak olan torqu ciz
print /home/atakan/Rig-Flex/SPRT/U21.ps

```

fast_c.m fonksiyonu

```
function [zetab,Kf]= fast_c(Ih1,Ih2,beta1,beta2,rho2,m1,m2,M1,M2, ...
    L1,L2,qi,a,nc,EIa,gama1,gama2,alfal,alfa2,Kc,Eps,us,xs)

teta= xs(1); fi= xs(2);
teta= xs(3); fid= xs(4);

m11= Ih1+ Ih2+ M1*L1^2/3+ m1*L1^2+ M2*(L1^2+ L2^2/3+ L1*L2*cos(fi))+ ...
    m2*(L1^2+ L2^2+ 2*L1*L2*cos(fi));
m12= Ih2+ M2*L2^2/3+ m2*L2^2+(M2/2+ m2)*L1*L2*cos(fi);
m13= alfa1(1:nc)+ L1*cos(fi)*alfa2(1:nc);
m21= m12;
m22= Ih2+ M2*L2^2/3+m2*L2^2;
m23= alfa1(1:nc);
m31= gama1(1:nc)+ L1*cos(fi)*gama2(1:nc);
m32= gama1(1:nc);
m33= a(1:nc,1:nc);

Mf= [m11 m12 m13; m21 m22 m23; m31 m32 m33];

H= inv(Mf);
H11= H(1:2,1:2);
H12= H(1:2,3:nc+2);
H21= H(3:nc+2,1:2);
H22= H(3:nc+2,3:nc+2);

f1=[-beta1*teta+ (M2/2+ m2)*L1*L2*(2*teta*fid+ fid^2)*sin(fi);
    -beta2*fid- (M2/2+ m2)*L1*L2*sin(fi)*teta^2];

f2= - L1*teta^2*sin(fi)*gama2(1:nc);

zetab= -inv(H22)*H21*(us+ f1)- f2;

Af= [zeros(nc) eye(nc); H22*Kc zeros(nc)];
Bf= [zeros(nc,2); H21];

% Durum geri besleme kazanc matrisinin bulunmasi,

ozd= sort(eig(Af));
w1= imag(ozd(2)); w2= imag(ozd(4));
zeta= 0.15;
wn1= w1/sqrt(1- zeta^2); wn2= w2/sqrt(1- zeta^2);

P= [-zeta*wn1+ w1*(1i); -zeta*wn1- w1*(1i); ...
    -zeta*wn2+ w2*(1i); -zeta*wn2- w2*(1i)];

Kf= place(Af,Bf,P)/10; % Durum geri beslemesi kazanc matrisi,
```