

**GÜÇ SİSTEMLERİNİN DALGACIK TANIM
KÜMESİNDE DİFERANSİYEL
DENKLEMLER KULLANILARAK
MODELLENMESİ**

Şener AĞALAR
Doktora tezi

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı
Ocak – 2010

ÖZET

Doktora Tezi

GÜÇ SİSTEMLERİNİN DALGACIK TANIM KÜMESİNDE DİFERANSİYEL DENKLEMLER KULLANILARAK MODELLENMESİ

Şener AĞALAR

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Doğan Gökhan ECE

2010, 76 Sayfa

Bu tezde, elektrik/elektronik devreleri benzetiminde iki farklı dalgacık yaklaşımı kullanılmıştır. Dönüşüm matrisi ve bağlantı katsayıları yöntemleri kullanılarak bu devrelerin çözümlenmesi ortaya konulmuştur. Güç sistemlerinde kullanılan elemanlar devrenin yapısına göre modellendiğinde R, L, C, akım kaynağı ve gerilim kaynağı elemanlarından oluşmaktadır. Bu elemanlardan oluşan devrenin ve içerdiği adi diferansiyel denklemlerin dalgacık eşdeğeri oluşturulup geçici durum çözümlenmeleri yapılmıştır. Çözümlenmelerde Haar, Daubechies2, Daubechies3, Symlet1, Symlet2 ve Symlet3 dalgacık türleri kullanılarak ele alınan devrelere farklı seviyelerde dalgacık çözümlenme uygulanmış ve sonuçlar MATLAB programı yardımıyla grafiksel olarak elde edilmiştir. İki farklı yöntemden elde edilen sonuçlar PSPICE ile yapılan benzetimlerle karşılaştırıldığında çok yakın benzerlik gösterdiği gözlemlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dalgacıklar, Adi Diferansiyel Denklemler, Güç Sistemleri

ABSTRACT

PhD Dissertation

POWER SYSTEM MODELLING WITH USING DIFFERENTIAL EQUATIONS AT WAVELET DOMAIN

Şener AĞALAR

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Electrical and Electronics Engineering Program

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Doğan Gökhan ECE

2010, 76 pages

In this thesis, the wavelet approach in electrical and electronic circuit simulation by using the transformation matrix and the connection coefficients is considered in circuit analysis. When the circuit elements used in power systems are modelled according to the circuit structure, this circuit is composed of R, L, C elements, voltage sources and current sources. The wavelet equivalent of the ordinary differential equations that are included in this circuit are developed and the transient solutions are obtained. Haar, Daubechies2, Daubechies3, Symlet1, Symlet2 and Symlet3 wavelets are used in circuit simulations. Different levels of wavelet analysis are performed in simulations and the results are verified graphically with the help of MATLAB program. Very close similarities are observed in comparison to PSPICE simulations

Keywords: Wavelets, Ordinary Differential Equations, Power Systems

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada kendisiyle birlikte çalıőmaktan büyük onur duyduğum, beni bu alanda araőtırma yapmaya sevkeden ve çalıőmalarım esnasında beni yönlendirerek destek olan saygı değer hocam Doç. Dr. Doğan Gökhan ECE'ye teőekkürü bir borç bilirim. Ayrıca değerli hocam Prof. Dr. Ömer Nezih GEREK'e de bilgi ve birikimleriyle bana yol göstermesinden dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ	1
2. GÜÇ SİSTEMLERİ	3
3. DALGACIKLARA GENEL BAKIŞ	7
3.1. Fourier Dönüşümü ile Dalgacık Dönüşümlerinin Karşılaştırılması.....	8
3.1.1. Fourier ve Dalgacık Dönüşümleri Arasındaki Benzerlikler.....	8
3.1.2. Fourier ve Dalgacık Dönüşümleri Arasındaki Farklılıklar.....	9
3.2. Çoklu-Çözünürlü Ayrıştırma (Multi-Resolution Analysis (MRA)).....	11
3.2.1. Temel Ölçek Fonksiyonu ve Dalgacık.....	16
3.2.2. Dalgacık Algoritmaları.....	19
4. DALGACIK DÖNÜŞÜMÜ KULLANILARAK GÜÇ SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLENMESİ	23
4.1. Dönüşüm Matrisi Yaklaşımı.....	23
4.2. Bağlantı Katsayıları Yaklaşımı.....	52
5. TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER	70
KAYNAKLAR.....	73

ŞEKİLLER DİZİNİ

2.1. Kısa hat modeli.....	3
2.2. Orta hat modeli.....	4
2.3. Uzun hat modeli.....	4
2.4. Transformatör yaklaşık devre modeli.....	5
2.5. Asenkron motor eşdeğer devresi.....	5
3.1. Fourier taban fonksiyonlarının zaman-frekans düzlemini kaplaması.....	9
3.2. Daubechies ailesi ölçek ve dalgacık fonksiyonları.....	10
3.3. Daubechies dalgacık taban fonksiyonunun zaman-frekans düzlemini kaplaması.....	11
3.4. İşaretin alçak ve yüksek frekanslarının filtreler yardımıyla ayrıştırılması... 13	
3.5. Dalgacık ayrıştırma düzeni.....	14
3.6. Bir sinyalin yaklaşık ve detay katsayılarına ayrıştırılması.....	15
4.1. Haar Dalgacığı.....	23
4.2. DC kaynaklı RLC devresi.....	27
4.3. “Haar (Db1)” dalgacık katsayıları ile elde edilen sonuçlar.....	34
4.4. “Db2” dalgacık katsayıları ile elde edilen sonuçlar.....	34
4.5. “Db3” dalgacık katsayıları ile elde edilen sonuçlar.....	35
4.6. “Sym2” dalgacık katsayıları ile elde edilen sonuçlar.....	35
4.7. “Sym3” dalgacık katsayıları ile elde edilen sonuçlar.....	36
4.8. PSPICE programından elde edilen sonuçlar.....	36
4.9. 2. derece türev operatörü ile elde edilen sonuçlar.....	38
4.10. AC kaynaklı RLC devresi.....	38
4.11. Kaynak akımı ve kondansatör üzerindeki gerilim (PSPICE sonuçları).....	39
4.12. Kaynak akımı ve kondansatör üzerindeki gerilim (Dalgacık çözümü).....	39
4.13. Kısa İletim hattı modeli.....	40
4.14. Sending-end ve Receiving-end gerilimleri (PSPICE sonuçları).....	41
4.15. Sending-end ve Receiving-end gerilimleri (Dalgacık çözümü).....	41
4.16. Orta İletim hattı modeli.....	42
4.17. Sending-end ve Receiving-end gerilimleri (PSPICE sonuçları).....	42
4.18. Sending-end ve Receiving-end gerilimleri (Dalgacık çözümü).....	43

4.19. Örnek benzetim devresi 1. adım.....	44
4.20. Örnek benzetim devresi 2. adım.....	45
4.21. Örnek RLC devresi.....	46
4.22. Çözümlemesi yapılan DC kısıyıcı devresi.....	48
4.23. DC kısıyıcı devresi 5. seviye çözümleme.....	51
4.24. DC kısıyıcı devresi 6. seviye çözümleme.....	51
4.25. DC kısıyıcı devresi 7. seviye çözümleme.....	52
4.26. Uygulama 10'dan elde edilen sonuçlar.....	63
4.27. Uygulama 11'den elde edilen sonuçlar.....	65
4.28. RC devresi.....	65
4.29. Uygulama 12'den elde edilen sonuçlar.....	66
4.30. RL devresi.....	67
4.31. Uygulama 13'den elde edilen sonuçlar.....	68
4.32. Uygulama 14'den elde edilen sonuçlar.....	69

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

R	Direnç
L	Endüktör, Bobin
C	Kondansatör
FFT	Hızlı Fourier Dönüşümü
DWT	Ayrık Dalgacık Dönüşümü
WFT	Pencerelemiş Fourier Dönüşümü
MRA	Çoklu Çözünürlü Ayrıştırma
j	Ölçek parametresi
k	Kayma parametresi
$\phi_{J_0,k}$	Ölçek fonksiyonu
$\psi_{j,k}$	Dalgacık fonksiyonu
$c_{J_0,k}$	Ölçek katsayıları
$d_{j,k}$	Dalgacık katsayıları
V_j	Ölçek fonksiyonunun gerdiği uzay
W_j	Dalgacık fonksiyonunun gerdiği uzay
a	Alçak geçiren filtre katsayıları
b	Yüksek geçiren filtre katsayıları
M_k^p	$\phi(x-k)$ fonksiyonunun p 'inci momentidir
D	Dönüşüm matrisi
U	Birim matris
W(...)	Dalgacık tabanında operatör matrisi
D_{dif}	Türev operatör matrisi
D_{int}	İntegral operatör matrisi
DbN	Daubechies N dalgacığı
SymN	Symlet N dalgacığı
P_J	V_j altuzayı üzerine izdüşüm vektörü

\mathbf{Q}_J	W_j altuzayı üzerine izdüşüm vektörü
\bar{a}_n	Otokorelasyon katsayıları
r_l	Bağlantı katsayıları
\mathbf{M}	Çarpım matrisi
J	Dalgacık seviyesi
R	Reel sayılar kümesi
V_s	Sending-end gerilimi
V_r	Receiving-end gerilimi
I_s	Sending-end akımı
I_r	Receiving-end akımı
X_L	Hat endüktansı
Z	Hat empedansı
Y	Hat admitansı
ℓ	Hat uzunluğu (km)
AC	Alternatif akım
DC	Doğru akım

1. GİRİŞ

Bilgisayar yardımıyla modellemenin ve elektrik/elektronik sistemlerini bilgisayar ile çözümlenmenin sağladığı en büyük yarar, tasarımcılar tarafından sonuçların laboratuvar koşullarında elde edilmesinin güç, zahmetli ve bazen de olanaksız olduğu durumlarda benzetim yolu ile kolayca elde edilebilmesidir. Bir parametrenin tüm sistem davranışı üzerindeki etkisinin incelenmesi, devreye ait dalga şekillerinin hesaplanması, bir devrenin çalışması hakkında ön bilginin elde edilmesi, diğer tüm analiz ve ölçme değerlerinin bulunması gibi amaçlar için bilgisayar destekli benzetimin laboratuvar koşullarıyla karşılaştırıldığında daha etkili olduğu görülmektedir. Benzetim sonuçlarının gerçeğe yakın olabilmesi için, elemanları temsil eden modellerin iyi tasarlanması gerekir [1].

Benzetimi yapılan devrenin hızlı bir şekilde yakınsaması da kullanılan benzetim yöntemine bağlıdır. Bilindiği gibi, tekrarlamalı herhangi bir işaretin genliği ve fazı sonsuz sayıda Sinüs işaretinin toplamı biçiminde ifade edilebilir. Bu açılım Fourier açılımı olarak da adlandırılır. Fourier açılımının en önemli eksiği, sadece frekans bilgisini içeriyor olması, zamana ait bilgi içermemesidir [2].

Bu sorunun üstesinden gelmenin en basit yolu, işareti parçalara ayırarak herbirini ayrı ayrı çözümlenmektir. Ancak burada karşılaşılan problem işaretin nasıl bölüneceğidir. Çünkü, bir işaret zaman bölgesinde eğer gerçekten küçük adımlarla izlenmeye, anlık frekans bileşenleri incelenmeye çalışılırsa elde edilecek sonuç işaretin Dirac darbesi ile örneklenmesi olacaktır. Bu ise beraberinde ayrı bir problemi getirir. Dirac darbesi ile işaretin fourier dönüşümünün çarpımı ile işaret; frekans spektrumuna dağıtılır ve anlamsız bir sonuç ortaya çıkar. Bir frekans işaretinin gerçek frekans ve zaman değerleri aynı anda bilinemez. Dalgacık dönüşümü fourier dönüşümündeki bu eksiği kapatmak için geliştirilmiş alternatiflerden biridir. Dalgacık dönüşümünde bir pencere ile işaretin bölünmesi ilkesi vardır. Pencere, işaretin üzerinde kaydırılır ve her durumda spektrum hesabı yapılır. Daha sonra, bu işlem daha kısa ve uzun pencereler için tekrarlanır ve sonunda tüm çözümlerin bileşimi işaretin zaman-frekans bilgisini oluşturur. Bu özelliğinden ötürü çoklu çözünürlü ayrıştırma (MRA) olarak adlandırılır [3-5].

Yapılan çalışma sonucunda Dalgacık yaklaşımının elektrik/elektronik devreleri benzetiminde dönüşüm matrisi ve bağlantı katsayıları yöntemleri kullanılarak çözümlenmesi ortaya konuldu. Güç sistemleri devrelerinde kullanılan elemanlar devrenin yapısına göre modellendiğinde R, L, C, akım kaynağı ve gerilim kaynağı elemanlarından oluşmaktadır. Bu elemanlardan oluşan devrenin Dalgacık eşdeğeri oluşturulup geçici ve sürekli durum çözümlenmeleri yapıldı. Çözümlenmelerde Haar, Daubechies2, Daubechies3, Symlet1, Symlet2 ve Symlet3 Dalgacık türleri kullanılarak ele alınan devrelere örnek olarak farklı seviyelerde Dalgacık çözümlenme uygulandı. MATLAB'da elde edilen sonuçlar PSPICE programı ile yapılan benzetimlerle karşılaştırıldığında; bunların birbirleriyle tutarlı oldukları ve hata oranının çok düşük seviyelerde olduğu gözlemlendi.

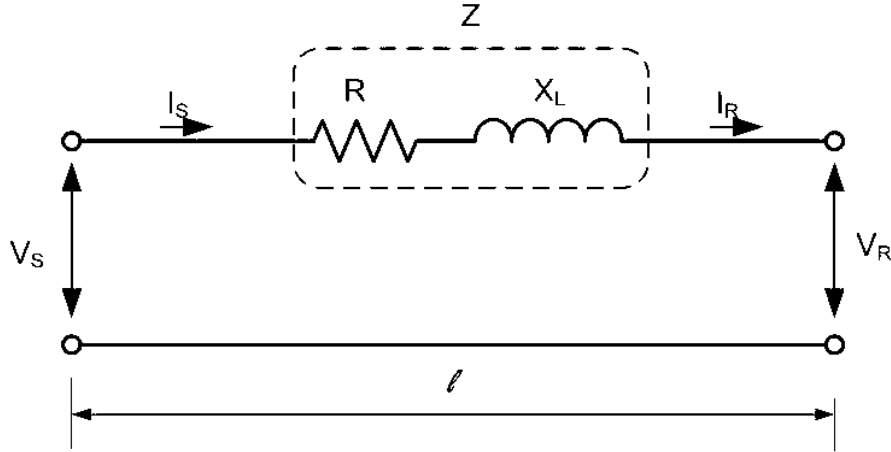
Dalgacık dönüşüm matrisleri bol sıfırlı seyrek matris oldukları için, çözümlenme programında seyrek (sparse) matris özelliği kullanıldı. Bu da sonuçların daha hızlı yakınsamasını sağlamıştır.

Yapılan Dalgacık çözümlenmelerde seviye arttıkça doğruluk o oranda yükselmektedir. Buna karşılık dönüşüm matrisi boyutu her seviye yükselmesinde iki katına çıkmaktadır. Bu da hesaplama süresini artırmaktadır. Bu iki özellik arasında en uygun aralık belirlenerek çözümlenmeler gerçekleştirildi.

2. GÜÇ SİSTEMLERİ

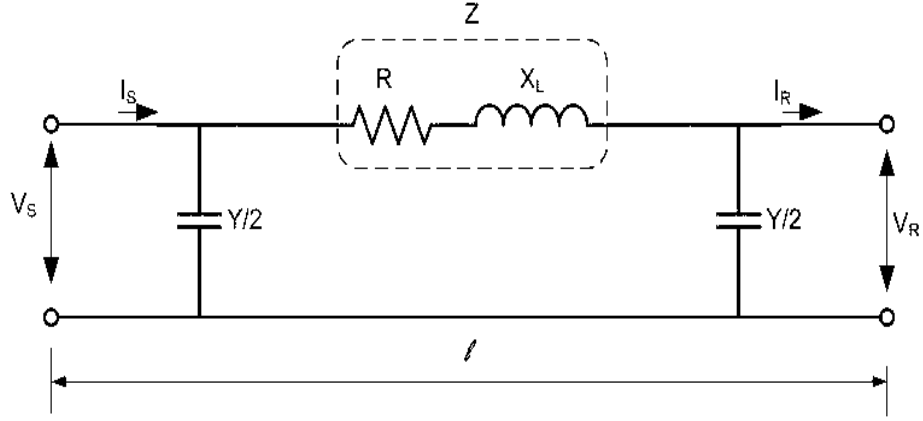
Günlük hayatımızda bireysel kullanıcı olarak evlerimizdeki, çevremizdeki ve endüstrideki tüketilen enerjinin büyük çoğunluğu elektrik enerjisi olarak üretim santrallerinden sağlanmaktadır. Elektrik enerjisinin üretiminden son kullanıcıya kadar iletilmesi için çeşitli safhalardan geçmesi gerekmektedir. Bu safhaların tamamını içeren yapıya güç yada enerji sistemleri adı verilmektedir. Güç sistemlerinde kullanılan başlıca elemanlara örnek olarak; çeşitli uzunluktaki iletim hatları, transformatörler, farklı tiplerdeki motorlar gösterilebilir. Güç sistemlerinin çözümünün yapılabilmesi için bahsedilen bu elemanların matematiksel modellerinin çıkarılıp, bu modellerin çözümlerde kullanılması gerekmektedir [6,7].

İlk olarak iletim hatları incelenecek olursa; iletim hatları üretilen enerjinin kullanıcılara kadar iletilmesinde önemli rol oynarlar. İletim hatları kendi içinde kısa, orta ve uzun hatlar olarak üç gruba ayrılır. Kısa hatlar uzunluk olarak 80 km'den kısa olan hatlardır ve şekil 2.1'de gösterilen bu hat modelinde şönt etkiler ihmal edilir.



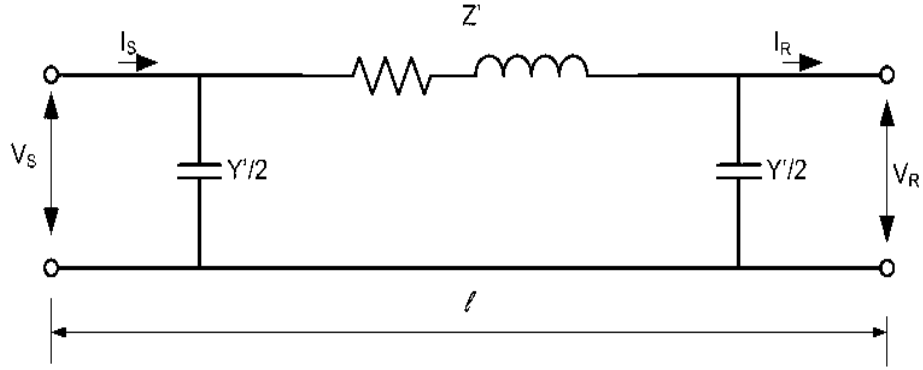
Şekil 2.1. Kısa hat modeli

Orta hatlar uzunluk olarak 80-240 km arasındadırlar. Şekil 2.2'de gösterilen bu hat modelinde şönt etkiler uzunluğa bağlı olarak devrenin çeşitli yerlerine eklenir.



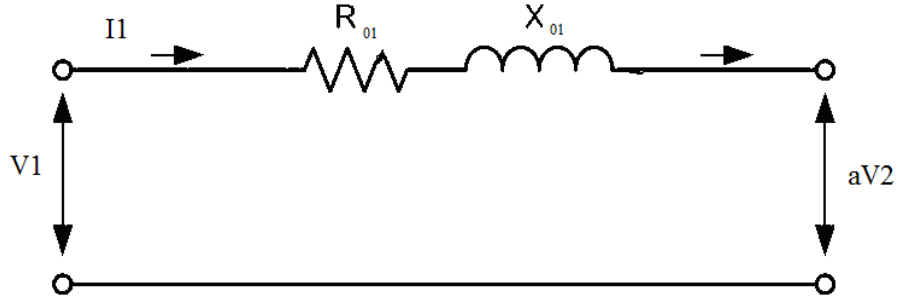
Şekil 2.2. Orta hat modeli

Uzun hatlar ise uzunluk olarak 240 km'den uzun hatlardır. Şekil 2.3'de gösterilen bu hat modelinde orta hatlarda olduğu gibi şönt efektler uzunluğa bağlı olarak devrenin çeşitli yerlerine eklenir.



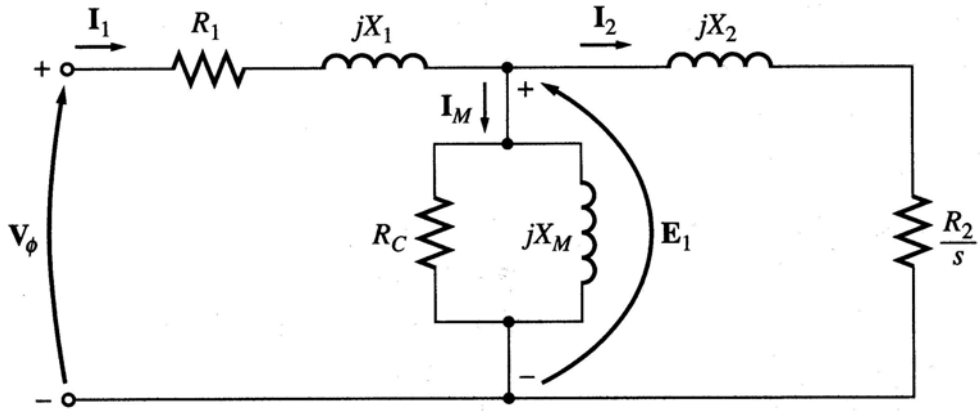
Şekil 2.3. Uzun hat modeli

Güç sistemlerinde kullanılan temel elemanlardan biri de transformatörlerdir. Transformatörler girişlerine uygulanan enerjinin büyük bir bölümünü niteliğini değiştirmeden yine elektrik enerjisi olarak çıkış tarafına iletirler, enerjinin çok az bir miktarı kayıp olarak ısıya dönüşür. Giriş-çıkış değerlerinde dönüşüm katsayısıyla doğru orantılı olarak yükselme veya alçalma olur. Şekil 2.4'te görülen devre transformatörün yaklaşık devre modelidir [8,9].



Şekil 2.4. Transformator yaklaşık devre modeli

Güç sistemlerinde, özellikle endüstri alanında çok fazla oranda kullanılan bir diğer önemli eleman da çeşitli tipteki motorlardır. Bu elemanlar kullandıkları elektrik enerjisini hareket enerjisine dönüştürürler. Herbir motor tipinin farklı kullanım alanları, farklı çalışma değerleri ve yine kendine özgü birer eşdeğer devre modeli vardır. Örnek olarak şekil 2.5'te asenkron motorun eşdeğer devresi görülmektedir.



Şekil 2.5. Asenkron motor eşdeğer devresi

Yukarıda anlatılan ve güç sistemlerinin genelini oluşturan iletim hatlarının, transformatörlerin, motorların eşdeğer devre modelleri incelenecek olursa; tüm eşdeğer devre modelleri direnç, endüktör ve kapasitör olmak üzere üç temel devre elemanından oluşmaktadır [10]. Sonuç olarak; güç sistemlerinin çözümü için bu temel devre elemanlarının ve çözüm için gerekli olan işlemsel operatörlerin çözümün yapılacağı düzlemde ve modellenmesi gerekmektedir. Bu çalışmada

dönüşüm tekniği ve taban olarak çeşitli ortogonal Dalgacıklar kullanıldı ve bu Dalgacıklar çeşitli eşdeğer devre modelleri üzerinde uygulandı.

3. DALGACIKLARA GENEL BAKIŞ

Bu çalışmada yapılan uygulamalara geçmeden önce uygulamaların temelini oluşturan Dalgacıklar hakkında genel bir bilgi vermek gerekirse; Dalgacıklar, veriyi farklı frekans bileşenlerine ayıran ve sonra kendi ölçekleriyle eşleştirilmiş bir çözünürlüğe sahip bileşenler üzerinde çalışan matematiksel fonksiyonlardır. İşaretin (sinyalin) süreksizliklere, keskin ve sivri uçlara sahip olduğu fiziksel durumları incelemede, geleneksel Fourier metotları ile kıyaslandığında çeşitli avantajlara sahiptirler [2, 5].

Dalgacıkların temelindeki esas fikir, ölçeğe göre analiz etmektir. Dalgacıklar, belirli matematiksel ihtiyaçları karşılayan, veri veya diğer fonksiyonları temsil etmede kullanılan fonksiyonlardır. Fonksiyonları yaklaşık olarak temsil etme, 1800'lü yılların başından beri mevcuttur. Bu yıllarda Joseph Fourier, fonksiyonları temsil etmek için Sinüs ve Sinüs fonksiyonlarının kullanılabilceğini ispatlamıştır. Bununla birlikte, veriyi analiz için kullanılan "ölçek" de Dalgacık analizinde önemli bir rol oynar. Dalgacık algoritmaları, veriyi farklı ölçek veya çözünürlüklerde işler. Eğer bir işarete geniş bir pencereden bakılırsa, o işarete ait genel özellikler görülebilir. Benzer şekilde, küçük bir pencereden bakılacak olursa, detay özellikleri incelenebilir. Dalgacıkları ilginç ve aynı zamanda yararlı kılan da işte bu özelliktir. Bilim adamları yıllarca çok sayıda kısa ve düzensiz dalgalara sahip olan işaretleri yaklaşık olarak temsil etmesi için, Fourier analizinin tabanlarını oluşturan Sinüs ve Sinüs fonksiyonlarından çok daha uygun fonksiyonlar aramışlardır. Tanımlarına göre Sinüs ve Sinüs fonksiyonları lokal değildir ve sonsuza doğru uzanırlar. O yüzden bu fonksiyonlar, herhangi bir işaretin sivri uçlarını yaklaşık olarak temsil etme konusunda çok yetersiz kalırlar. Dalgacık analiziyle, sonlu tanım bölgelerinde düzgün olarak bulunan, yaklaşık olarak temsil edilmiş fonksiyonlar kullanılabilir. Dalgacıklar sivri süreksizliklere sahip olan veriyi yaklaşık olarak temsil etmek için Fourier'e oranla daha uygundur [6, 7].

Dalgacık analizinde amaç, "analiz eden Dalgacık" veya "ana Dalgacık (mother wavelet)" diye isimlendirilen bir Dalgacık örnek fonksiyonunu elde etmektir. Zaman analizi, örnek Dalgacığın daraltılmış, yüksek frekans versiyonu ile yapılır. Buna karşılık frekans analizi ise, aynı Dalgacığın genişletilmiş, düşük

frekans versiyonu ile yapılır. Orijinal işaret veya fonksiyon, Dalgacık açılımı (Dalgacık fonksiyonlarının lineer kombinasyonundaki katsayıları kullanarak) cinsinden temsil edilebildiği için veri işlemleri sadece buna karşılık gelen Dalgacık katsayılarını kullanarak yapılabilir, buna ilaveten eğer veriye uygun en iyi Dalgacık seçilirse veya bir başlangıç değerinin altında kalan katsayılar atılırsa; veri kısmen temsil edilmiş olur. Bu kısmi kodlama, veri sıkıştırma alanında Dalgacıkları kullanışlı bir yöntem yapar.

Dalgacıkların kullanıldığı diğer uygulamalı alanlar astronomi, ses bilimi, nükleer mühendisliği, alt-band kodlama, işaret ve görüntü işlemleri, nörofizyoloji, müzik, manyetik rezonans görüntüleme, ses tanıma, optik, fraktallar, türbülans, depremin önceden tahmini, radar ve kısmi türevli diferansiyel denklemleri çözmeye gibi teorik matematik uygulamalarıdır [8-19].

3.1. Fourier Dönüşümü ile Dalgacık Dönüşümlerinin Karşılaştırılması

3.1.1. Fourier ve Dalgacık Dönüşümleri Arasındaki Benzerlikler

Hızlı Fourier dönüşümü (FFT) ve ayrık Dalgacık dönüşümünün (DWT) her ikisi de lineer işlemlerdir. Bu işlemler, işareti 2^n uzunluğundaki farklı bir veri vektörüne dönüştürerek farklı ve basit bir veri yapısı üretir. Bu veri yapısı çeşitli uzunluklara sahip $\log_2 n$ sayıda parça içerir.

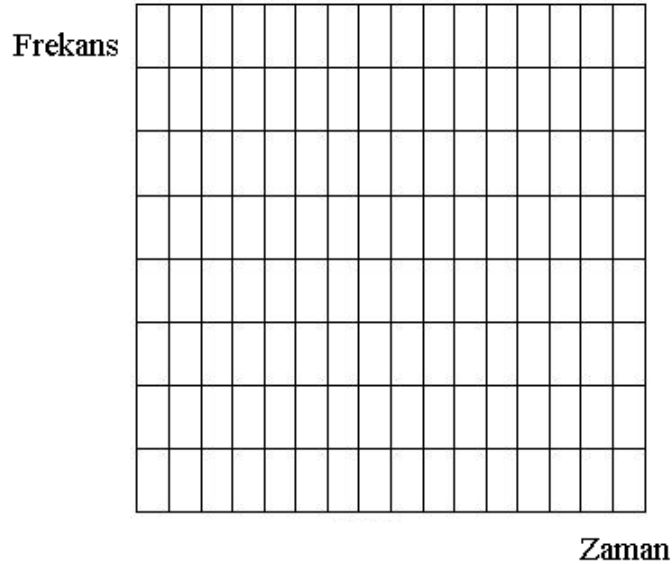
Dönüşümlerde kullanılan matrislerin matematiksel özellikleri de benzerdir. Hızlı Fourier dönüşümü (FFT) ve ayrık Dalgacık dönüşümünün (DWT) her ikisi için ters dönüşüm matrisi orijinal matrisin transpozudur. Sonuç olarak; her iki dönüşüm fonksiyon uzayında farklı tanım bölgesine dönüştüren hareket gibi görülebilir. Hızlı Fourier dönüşümü (FFT) için bu yeni tanım bölgesi; Sinüs ve Kosinüs'ten oluşan taban fonksiyonlarını içerir. Dalgacık dönüşümü için ise bu yeni tanım bölgesi; ana Dalgacıklar veya analiz işlemini yapan Dalgacıklar diye isimlendirilen daha karmaşık taban fonksiyonlarını içerir.

İki dönüşümün başka bir benzerliği de taban fonksiyonlarının frekans ile sınırlandırılmalarıdır. Bu sınırlandırma; işaretin enerji spektrumunu (bir frekans aralığında ne kadar enerji bulunduğunu) ve enerji dağılımlarını hesaplamada yararlı olan bir özelliktir [3].

3.1.2. Fourier ve Dalgacık Dönüşümleri Arasındaki Farklılıklar

Bu iki tür dönüşüm arasındaki en ilginç farklılık her Dalgacık fonksiyonunun uzayda sınırlandırılmasıdır. Fourier dönüşümünde Sinüs ve Kosinüs fonksiyonları sınırlı değildir. Dalgacıkların frekans sınırlaması düşünüldüğünde; bu sınırlandırma özelliği, Dalgacık tanım bölgesine dönüştürüldüğü zaman seyrek Dalgacıklar kullanan birçok fonksiyon ve operatör oluşturur. Tersten bakıldığında bu seyreklik, veri sıkıştırma, resimlerdeki özellikleri bulma ve zaman serilerindeki sorunları ortadan kaldırma gibi yararlı birçok uygulamada kullanılabilir.

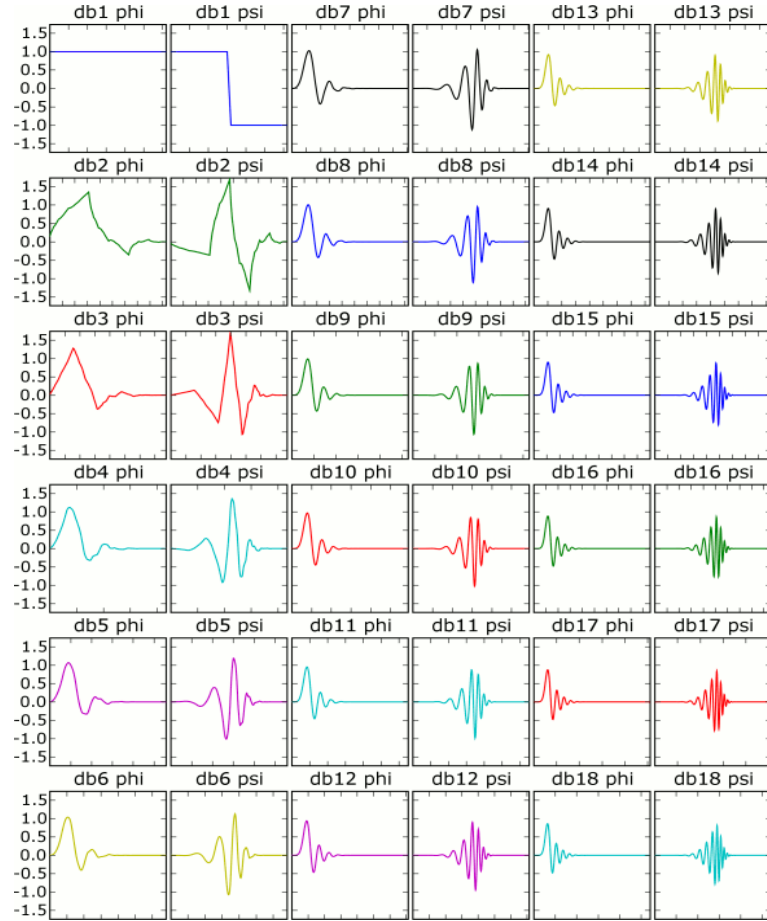
Fourier dönüşümü ve Dalgacık dönüşümü arasındaki zaman–frekans çözünürlük farklarını görmenin bir yolu, zaman–frekans düzleminde taban fonksiyonunun kapladığı alana bakmaktır. Şekil 3.1, penceresinin basit olarak dikdörtgen dalga olduğu bir pencerelenmiş Fourier dönüşümünü gösteriyor. Dikdörtgen dalga penceresi, pencereyi belirli bir genişliğe ayarlayacak şekilde Sinüs veya Kosinüs fonksiyonunu keser. Pencerenin Fourier Dönüşümünde (WFT) bütün frekanslar için tek bir pencere kullanılması nedeniyle, çözünürlük analizi zaman – frekans düzlemindeki bütün bölgelerde aynıdır.



Şekil 3.1. Fourier taban fonksiyonlarının zaman-frekans düzlemini kaplaması

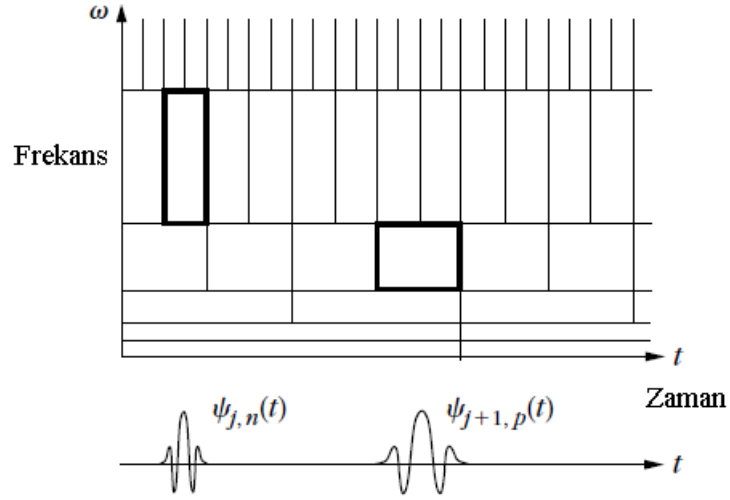
Dalgacık dönüşümlerinin bir avantajı pencerelerin boyutlarının değişebilir olmasıdır. İşaret süreksizliklerini tespit etmek için, uzunluğu çok kısa taban fonksiyonlarına sahip olmak gereklidir. Bunu gerçekleştirmenin bir yolu, işaret

uzunluğu kısa olan yüksek–frekans taban fonksiyonları ve uzun olan düşük–frekans taban fonksiyonlarını kullanmaktadır. Şekil 3.2’de çeşitli tipteki Daubechies Dalgacıkları görülmektedir [2,14,17].



Şekil 3.2. Daubechies ailesi ölçek ve Dalgacık fonksiyonları

Bu şartlar Dalgacık dönüşümleri ile sağlanabilmektedir. Şekil 3.3, Daubechies Dalgacığı diye isimlendirilen bir Dalgacık fonksiyonunun zaman–frekans düzleminde kapladığı alanı göstermektedir.



Şekil 3.3. Daubechies Dalgacık taban fonksiyonunun zaman-frekans düzlemini kaplaması

Unutulmaması gereken bir diğer husus da Dalgacık dönüşümlerinin sadece Sinüs ve Sinüs fonksiyonlarını kullanan Fourier dönüşümü gibi tek bir taban fonksiyonları kümesine sahip olmadığıdır. Onun yerine, Dalgacık dönüşümleri sonsuz sayıda taban fonksiyonları kümesine sahiptir. Bundan dolayı Dalgacık analizi vasıtasıyla Fourier analizi gibi diğer zaman–frekans metotları tarafından işaret hakkında tespit edilemeyen ve bulunamayan detaylı verilere daha net bir şekilde ulaşılabilir [20,21].

3.2. Çoklu Çözünürlü Ayrıştırma (Multi-Resolution Analysis (MRA))

Çoğu matematiksel fonksiyon; taban fonksiyonu denilen temel fonksiyonların belli oranlardaki toplamından elde edilebilir. Bu gösterimlere açılım yada seriler denilmektedir. Örnek olarak Fourier açılımı ele alınırsa

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi kx} \quad x \in R \quad (3.1)$$

eşitliği yazılır [2]. Burada $e^{i2\pi kx}$ taban fonksiyonları k indisi ile gösterilen belirli bir frekansı temsil eder, c_k katsayıları ise fonksiyonun k frekansındaki ortalama harmonik genlik değerlerini verir.

$$c_k = \int_0^1 f(x) e^{-i2\pi kx} dx \quad (3.2)$$

Teorik olarak $f(x)$ fonksiyonu c_k 'larla tam olarak oluşturulabilir, fakat pratikte ise bunun analitik olarak yapılabilmesi için belli bir k değerinden sonraki katsayıların iptal edilmesi gerekir. Sürekli fonksiyonlarda belli bir fonksiyonu taban fonksiyonlarıyla yeniden oluşturmak kolay olmasına karşın, süreksiz fonksiyonlarda tüm katsayılara ihtiyaç vardır. Bunun sebebi ise katsayıların belli frekans değerlerindeki ortalama değerleri göstermesinden ötürü süreksizliğin yerini ve nerede oluştuğunu bulabilmek için her bir katsayıya ihtiyaç vardır.

Dalgacık açılımı

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^{J_0}-1} c_{J_0,k} \phi_{J_0,k}(x) + \sum_{j=J_0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \psi_{j,k}(x) , x \in R \quad (3.3)$$

olarak ifade edilir. Fourier açılımından farkı ise burada iki tip taban fonksiyonunun ($\phi_{J_0,k}$ ve $\psi_{j,k}$) bulunması ve herbirinin j (ölçek parametresi) ve k (kayma parametresi) olmak üzere iki farklı indisle ifade edilmesidir. $\phi_{J_0,k}$ ölçek fonsiyonu, $\psi_{j,k}$ ise Dalgacık fonksiyonu olarak adlandırılır. İki fonksiyon da kompakt dayanağa sahiptir. Kompak dayanak (3.4)'teki gibi ifade edilir.

$$\phi_{j,k}(x) = \psi_{j,k}(x) = 0 , x \notin \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+D-1}{2^j} \right] \quad (3.4)$$

Fourier açılımındaki gibi pratik hesap yapabilmek için açılımın belli bir ölçek ($J-1$) değerinden sonrası kesilebilir. O zaman açılım aşağıdaki gibi olur ve katsayılar da şu şekilde sıralanır; buradaki ilk toplam $\phi_{J_0,k}$ ölçek fonksiyonunun lineer kombinasyonları olarak 2^{J_0} kere ötelenerek yaklaşık bir $f(x)$ fonksiyonunu temsil eder (Fourier açılımındaki alçak frekans bileşenleri), formüldeki ikinci toplam ise detay katsayıları denilen yüksek frekans bileşenlerini göstermektedir. Elektriksel olarak daha basit bir ifadeyle; toplamdaki ilk kısım DC, ikinci kısım ise AC kısmı göstermektedir.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^{J_0}-1} c_{J_0,k} \phi_{J_0,k}(x) + \sum_{j=J_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \psi_{j,k}(x) , x \in R \quad (3.5)$$

Ölçek katsayıları ($c_{J_0,k}$) ve Dalgacık katsayıları ($d_{j,k}$) (3.6)'daki gibi gösterilir.

$$\left\{ \left\{ c_{J_0,k} \right\}_{k=0}^{2^{J_0-1}}, \left\{ \left\{ d_{j,k} \right\}_{k=0}^{2^{j-1}} \right\}_{j=J_0}^{J-1} \right\} \quad (3.6)$$

Ölçek ve Dalgacık fonksiyonlarının gerdiği uzaylar ise şu şekilde ifade edilir.

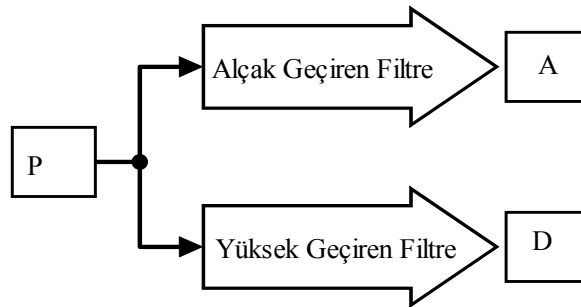
$$V_j = span\{\phi_{j,k}\}_{k=0}^{2^{j-1}} \quad (3.7)$$

$$W_j = span\{\psi_{j,k}\}_{k=0}^{2^{j-1}} \quad (3.8)$$

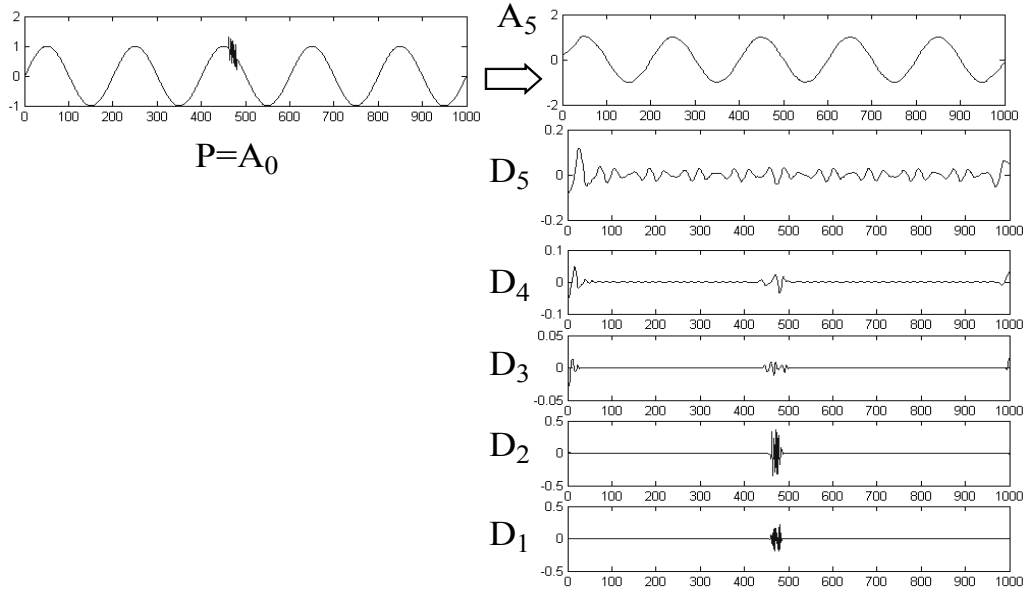
Bu uzaylardan yola çıkarak herhangi bir j seviyesindeki fonksiyon, bu uzayların bileşimi şeklinde ifade edilebilir.

$$V_J = V_{J_0} \oplus W_{J_0} \oplus W_{J_1} \oplus W_{J_2} \dots \oplus W_{J-1} \quad (3.9)$$

Bir çok sinyal için, sinyalin düşük frekanslı içeriği en önemli kısımdır. Düşük frekans bileşenleri işaretler için genellikle tanınma özelliklerini içerir; diğer taraftan yüksek frekanslı bileşenler ise sinyalin kendisiyle düşük frekanslı kısım arasındaki farkı oluştururlar. Buna örnek olarak insan sesi ele alınacak olursa, sesin yüksek frekanslı bileşenlerinin çıkartılması durumunda ses farklılaşır fakat hala söylenen şeyler anlaşılabilir; oysa düşük frekanslı bileşenlerin bir kısmı çıkarılacak olursa söylenen sözler anlaşılabilir. Yukarıda anlatılan kavramlardan yola çıkılarak, Ayırık Dalgacık Dönüşümü için yaklaşık (approximate) ve detay (detail) katsayılarından bahsedilir. Dalgacık dönüşümünde kullanılan yaklaşıklar, yüksek ölçekli, düşük frekanslı bileşenler; detaylar ise düşük ölçekli, yüksek frekanslı bileşenlerdir. Sonuç olarak, P orjinal işareti Şekil 3.4'te görüldüğü gibi birbirini tümleyen alçak ve yüksek geçiren filtrelerden geçirilerek alçak A ve yüksek D frekanslı bileşenlerine ayrıştırılabilir [4,7,9,13, 21-23].



Şekil 3.4. İşaretin alçak ve yüksek frekanslarının filtreler yardımıyla ayrıştırılması



Şekil 3.6. Bir sinyalin yaklaşık ve detay katsayılarına ayrıştırılması

Şekilde de görüldüğü gibi beşinci seviyedeki A_5 sinyali, orijinal A_0 sinyalindeki yüksek frekanslı bileşenlerin çıkarılması sonucunda yaklaşık bir Sinüs eğrisine benzemiştir. Yüksek frekans bileşenleri ise detay katsayıları olarak ayrıştırılmıştır.

Çoklu çözünürlü ayrıştırmanın temel amacı; herhangi bir $f(x) \in L^2(R)$ fonksiyonunu farklı seviyelerde detay kısımlarına ayırmaktır. Dalgacık teorisinde çoklu çözünürlü ayrıştırma aşağıdaki 4 temel aksiyoym'a dayanır.

$$1 - \{0\} \subset \dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset L^2(R) \quad (3.11)$$

$$2 - \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j = L^2(R) \quad (3.12)$$

$$3 - \{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad (3.13)$$

kümesi, V_0 uzayı için orthonormal bir taban teşkil eder.

$$4 - f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1} \quad (3.14)$$

Ayrıca normalizasyon için $\|\phi\|_2 \equiv \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx \right)^{1/2} = 1$ olmalıdır

(L^2 normunda) [24-26].

3.2.1. Temel ölçek fonksiyonu ve Dalgacık

3.12 aksiyomuna göre $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ kümesi V_0 uzayı için orthonormal bir taban teşkil ediyorsa; V_j uzayı için de

$$\{\phi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad (3.15)$$

ortogonal taban oluşturur. Kümeye bakılırsa j 'nin değeri arttıkça ϕ tabanı daralmakta ve k parametresine bağlı ötelemeler daha da küçülmektedir. ϕ taban fonksiyonunun kare normu;

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(2^j x - k)|^2 dx = 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(y)|^2 dy = 2^{-j} \|\phi\|_2^2 = 2^{-j}$$

olduğundan;

$\{2^{j/2} \phi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ fonksiyonu V_j uzayı için orthonormal bir taban, benzer

şekilde $\{2^{j/2} \psi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ fonksiyonu da W_j uzayı için orthonormal bir

taban oluştururlar [14,29]. Ölçek ve Dalgacık fonksiyonlarının j, k parametrelerine bağlı gösterimi 3.16 ve 3.17'de gösterilmiştir.

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \quad (3.16)$$

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$$

$$\phi_k(x) = \phi_{0,k}(x) \quad (3.17)$$

$$\psi_k(x) = \psi_{0,k}(x)$$

$\psi_{j,k} \in W_j$ ve W_j ile V_j uzayları birbirlerine dik olduğundan dolayı $\psi_{j,k}$ ile $\phi_{j,k}$ tabanları da birbirlerine diktir.

$V_0 \subset V_1$ olduğundan V_0 uzayındaki herhangi bir fonksiyon V_1 uzayındaki tabanlar cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir. $\phi(x) = \phi_{0,0}(x) \in V_0$ ise

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \phi_{1,k}(x) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \phi(2x-k)$$

$$a_k = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \phi_{1,k}(x) dx \quad (3.18)$$

Kompakt dayanaklı (Daubechies) ölçek fonksiyonları için sonlu sayıda a_k mevcuttur ve sonuç olarak 3.19'daki temel genişleme fonksiyonu bulunur. Burada D genelde çift sayıdır ve Dalgacık tipini belirtir. a_0, a_1, \dots, a_{D-1} ise filtre katsayılarıdır.

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{D-1} a_k \phi(2x-k) \quad (3.19)$$

(3.19) denkleminde bakarak benzer şekilde temel Dalgacık fonksiyonu aşağıdaki şekilde oluşturulabilir.

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{D-1} b_k \phi(2x-k) \quad (3.20)$$

$$b_k = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \phi_{1,k}(x) dx \quad (3.21)$$

a_k ve b_k katsayıları formal olarak tanımlanmasına rağmen normal olarak hesaplanamaz, çünkü ölçek ve Dalgacık fonksiyonları belirgin olarak bilinmemektedir. Bunun yerine bu fonksiyonların özelliklerinden faydalanılarak hesap yapılabilir [3,36]. a_k ve b_k katsayıları arasında aşağıdaki bağıntı vardır.

$$b_k = (-1)^k a_{D-1-k}, \quad k = 0, 1, \dots, D-1$$

Ayrıca diğer bir önemli nokta ise ölçek ve Dalgacık fonksiyonlarının belirtilen seviyedeki dayanaklarının aşağıdaki gibi olduğudur [7,8].

$$\text{supp}(\phi_{j,l}) = \text{supp}(\psi_{j,l}) = I_{j,l} = \left[\frac{l}{2^j}, \frac{l+D-1}{2^j} \right] \quad (3.22)$$

Filtre katsayılarının bir diğer özelliği de orthonormalliktir, ölçek ve Dalgacık fonksiyonlarının diklik özelliklerinden yola çıkılarak aşağıdaki denklemlerin çıkarılmasıdır.

$$\sum_{k=k_1(n)}^{k_2(n)} a_k a_{k-2n} = \delta_{0,n} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{D}{2} - 1 \quad (3.23)$$

$$\sum_{k=k_1(n)}^{k_2(n)} b_k b_{k-2n} = \delta_{0,n} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{D}{2} - 1 \quad (3.24)$$

$$\sum_{k=0}^{D-1} a_k = \sqrt{2} \quad (3.25)$$

Ölçek fonksiyonunun sayesinde polinomlar (x^p) , $P-1$ mertebesine kadar Dalgacıklarla ifade edilebilir.

$$x^p = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M_k^p \phi(x-k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad p = 0, 1, \dots, P-1 \quad (3.26)$$

$$M_k^p = \int_{-\infty}^{\infty} x^p \phi(x-k) dx, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad p = 0, 1, \dots, P-1 \quad (3.27)$$

Burada M_k^p , $\phi(x-k)$ fonksiyonunun p 'inci momentidir. Hesaplama prosedürü şu şekildedir;

İlk olarak $M_k^0 = 1$, $k \in \mathbb{Z}$ kabul edilirse, $k = 0$ için (3.19) genişleme denklemi;

$$\begin{aligned} M_0^p &= \int_{-\infty}^{\infty} x^p \phi(x) dx = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{D-1} a_k \int_{-\infty}^{\infty} x^p \phi(2x-k) dx \\ M_0^p &= \frac{\sqrt{2}}{2^{p+1}} \sum_{k=0}^{D-1} a_k \int_{-\infty}^{\infty} y^p \phi(y-k) dy \\ M_0^p &= \frac{\sqrt{2}}{2^{p+1}} \sum_{k=0}^{D-1} a_k M_k^p \end{aligned} \quad (3.28)$$

(3.28)'deki bilinmeyenleri azaltmak için M_k^p , $k \neq 0$ için olanlar elimine edilir ve (3.27)'de $y = x-l$ dönüşümü yapılırsa

$$M_k^p = \int_{-\infty}^{\infty} (y+k)^p \phi(y) dy = \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} k^{p-n} \int_{-\infty}^{\infty} y^n \phi(y) dy$$

$$M_k^p = \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} k^{p-n} M_0^n \quad (3.29)$$

(3.29)'u (3.28) denkleminde yerine koyarsak

$$M_0^p = \frac{\sqrt{2}}{2(2^p - 1)} \sum_{n=0}^{p-1} \binom{p}{n} M_0^n \sum_{k=0}^{D-1} a_k k^{p-n} \quad (3.30)$$

$\phi(x)$ denkleminin $p > 0$ için p'inci momentini bulabilmek için (3.30) kullanılır.

Dalgacığın dayanağının artmasıyla, polinomları ifade edebilme düzenlilikleri artar ve bu artış, yaklaşıklığın doğruluğunu da artırır. Ayrıca Dalgacık fonksiyonunun momentine bakılacak olursa, (3.26) denkleminde ve ölçek ile Dalgacık fonksiyonlarının ortonormal olmasından dolayı momentinin değeri sıfıra eşittir

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^p \psi(x) dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M_k^p \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-k) \psi(x) dx = 0, \quad x \in R, p = 0, 1, \dots, P-1 \quad (3.31)$$

Ayrıca filtre katsayılarında aşağıdaki eşitlik elde edilir [27-30].

$$\sum_{l=0}^{D-1} (-1)^l a_l l^p = 0, \quad p = 0, 1, 2, \dots, P-1 \quad (3.32)$$

$$\sum_{k=0}^{D/2-1} a_{2k} = \sum_{k=0}^{D/2-1} a_{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.33)$$

$$\sum_{l=0}^{D/2-1} \sum_{n=0}^{D-2l-2} a_n a_{n+2l+1} = \frac{1}{2} \quad (3.34)$$

3.2.2. Dalgacık Algoritmaları

Genel olarak ölçek ve Dalgacık fonksiyonlarının açık formülleri olmadığından çoğu algoritmalar bu fonksiyonları filtre katsayıları cinsinden ifade ederler. Bunların en güzeli, fonksiyonların belli noktadaki fonksiyon değerlerini hesaplamaktır [3].

Daha öncede bahsedildiği üzere ϕ fonksiyonunun dayanağı $[0, D-1]$ aralığındadır ve $\phi(0) = \phi(D-1) = 0$ 'dır. Örnek olarak $D = 6$ alırsak

$$\begin{bmatrix} \phi(0) \\ \phi(1) \\ \phi(2) \\ \phi(3) \\ \phi(4) \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} a_0 & & & & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & & \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \\ & & & a_5 & a_4 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(0) \\ \phi(1) \\ \phi(2) \\ \phi(3) \\ \phi(4) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_0 \Phi(0) \quad (3.35)$$

$$\Phi\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} \phi\left(\frac{1}{2}\right) \\ \phi\left(\frac{3}{2}\right) \\ \phi\left(\frac{5}{2}\right) \\ \phi\left(\frac{7}{2}\right) \\ \phi\left(\frac{9}{2}\right) \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & & & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \\ & & a_5 & a_4 & a_3 & \\ & & & & a_5 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(0) \\ \phi(1) \\ \phi(2) \\ \phi(3) \\ \phi(4) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \Phi(0) \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{1}{16}\right) &= \mathbf{A}_0\Phi\left(\frac{1}{8}\right) & \Phi\left(\frac{9}{16}\right) &= \mathbf{A}_1\Phi\left(\frac{1}{8}\right) \\
\Phi\left(\frac{3}{16}\right) &= \mathbf{A}_0\Phi\left(\frac{3}{8}\right) & \Phi\left(\frac{11}{16}\right) &= \mathbf{A}_1\Phi\left(\frac{3}{8}\right) \\
\Phi\left(\frac{5}{16}\right) &= \mathbf{A}_0\Phi\left(\frac{5}{8}\right) & \Phi\left(\frac{13}{16}\right) &= \mathbf{A}_1\Phi\left(\frac{5}{8}\right) \\
\Phi\left(\frac{7}{16}\right) &= \mathbf{A}_0\Phi\left(\frac{7}{8}\right) & \Phi\left(\frac{15}{16}\right) &= \mathbf{A}_1\Phi\left(\frac{7}{8}\right)
\end{aligned}$$

Eşitliklerden de görüleceği üzere, \mathbf{A}_0 ve \mathbf{A}_1 yinelemeli olarak hesaplanan değerlerin hepsinde gereklidir. Basit olarak değerlerin hesaplanmasında aşağıdaki algoritma kullanılabilir

$$\begin{aligned}
& \text{for } j = 2, 3, \dots, q \\
& \quad \text{for } k = 1, 3, 5, \dots, 2^{j-1} - 1 \\
& \quad \quad \Phi\left(\frac{k}{2^j}\right) = \mathbf{A}_0\Phi\left(\frac{k}{2^{j-1}}\right) \\
& \quad \quad \Phi\left(\frac{k}{2^j} + \frac{1}{2}\right) = \mathbf{A}_1\Phi\left(\frac{k}{2^{j-1}}\right)
\end{aligned}$$

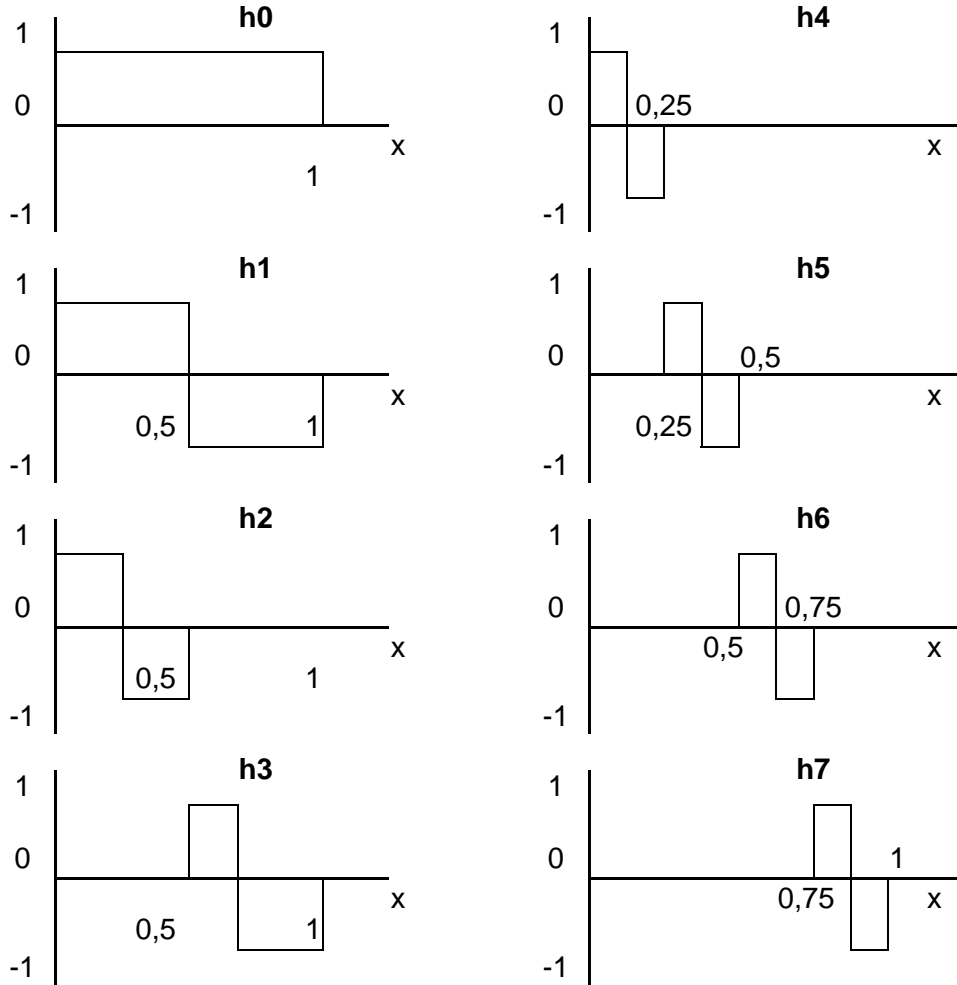
Dalgacık fonksiyonlarının fonksiyon değerleri ise (3.20) eşitliğinden hesaplanabilir [27,31,32].

$$\psi\left(\frac{m}{2^q}\right) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{D-1} b_k \phi\left(2\frac{m}{2^q} - k\right)$$

4. DALGACIK DÖNÜŞÜMÜ KULLANILARAK GÜÇ SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLENMESİ

4.1 Dönüşüm Matrisi Yaklaşımı

Haar fonksiyonlarının bir kümesi aşağıda Şekil 4.1' de verilmiştir. Bu Dalgacık tipi belirli bir aralıkta büyüklüğü ± 1 , diğer yerlerde ise büyüklüğü 0 olan kare dalgalardır. Şekil 4.1' de birinci eğri $0 \leq t \leq 1$ aralığında $h_0(t) = 1$ 'dir, ayrıca bu fonksiyon ölçekleme fonksiyonu olarak da isimlendirilir. İkinci eğri olan $h_1(t)$, ana Dalgacık olarak (0,1) aralığının tamamını kaplar. Bütün diğer alt sıra eğriler $h_1(t)$ 'den kaydırma ve genişletmeyle türetilirler. $h_2(t)$, $h_1(t)$ 'nin daraltılmasıyla elde edilir. $h_3(t)$, $h_2(t)$ 'nin sağ tarafa 1/2 kaydırılmış şeklidir. Benzer olarak $h_2(t)$ yarım periyottan çeyrek periyoda sıkıştırılarak $h_4(t)$ elde edilir. $h_4(t)$ fonksiyonu sağ tarafa, 1/4, 2/4, 3/4 kaydırılarak sırasıyla $h_5(t)$, $h_6(t)$ ve $h_7(t)$ türetilir.



Şekil 4.1. Haar Dalgacığı

Genel olarak; herhangi bir $(0,1)$ aralığında karesel integral alınabilen $y(t)$ fonksiyonu, $\int_0^1 y^2(t)dt$, sonludur. Bu $y(t)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi Haar Dalgacıklarına açılabilir.

$$y(t) = c_0 h_0(t) + c_1 h_1(t) + c_2 h_2(t) + \dots \quad (4.1)$$

$$c_i = 2^j \int_0^1 y(t) h_i(t) dt \quad (4.2)$$

Haar dönüşümü genelleştirilecek olursa; birinci seviyeden Haar Dalgacıkları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_1^1 \\ \mathbf{W}_2^1 \\ \mathbf{W}_3^1 \\ \mathbf{W}_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}_{4 \times 8} \quad (4.3)$$

Yukarıdaki Haar Dalgacık vektörlerinde \mathbf{W}_1^1 gösteriminde üst taraftaki 1, birinci seviye Haar Dalgacık vektör elemanlarını, alt taraftaki 1 ise birinci adım olduğunu göstermektedir. Benzer şekilde \mathbf{W}_2^1 gösteriminde ise, üst taraftaki 1, birinci seviye Haar Dalgacık vektör elemanlarını, alt taraftaki 2 ise ikinci adım olduğunu göstermektedir. Bu işlem birinci seviye Haar dönüşümü için $N/2$ (örnek sayısının yarısı) kadar devam etmektedir ($N=8$). Vektör elemanlarının $\left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$ her satırda ikiye ikiye sağa kaydırılması Dalgacık vektörlerinin zaman ekseninde kaydırılmasını simgelemektedir. Benzer şekilde Haar ölçek vektörleri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^1 \\ \mathbf{V}_2^1 \\ \mathbf{V}_3^1 \\ \mathbf{V}_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}_{4 \times 8} \quad (4.4)$$

V_1^1 ölçek vektörü gösteriminde üst taraftaki 1, birinci seviye ölçek elemanlarını ve alt taraftaki 1 ise bu vektörün birinci adımını simgelemektedir.

Yukarıdaki gösterimlerden anlaşıldığı gibi, herhangi S ayrık işaretinin Dalgacık dönüşümleri ile çözümlenmesinin yapılabilmesi için V ve W vektörlerinin işaret uzunluğunca hazırlanması gerekmektedir. Çözümlemesi yapılan S işaretinin birinci seviye ve birinci adım Haar Dalgacık ve ölçek vektörleri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{bmatrix} W_1^1 \\ V_1^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 8} \quad (4.5)$$

Benzer şekilde $N/2$ ölçek ve Dalgacık vektörleri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{bmatrix} W_4^1 \\ V_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}_{2 \times 8} \quad (4.6)$$

Hem Dalgacık, hem de ölçek vektörlerinin çok sayıda sıfır elemanlarının içermesi yapılan çözümlerinin hızını önemli bir düzeyde arttırmaktadır. Dalgacık dönüşüm matrisimiz $N \times N$ boyutundaki D_{Haar} olsun. N uzunluğundaki $S_{1 \times N}$ işaretinin Haar dönüşümü,

$$s_H = D_{Haar} \times S_{1 \times N}^T \quad (4.7)$$

iken , ters Haar dönüşümü ise,

$$S_N = (D_{Haar}^{-1} \times s_H)^T \quad (4.8)$$

olarak ifade edilir [28-30].

Uygulama 1:

$S = [2 \ 1 \ 4 \ 5 \ 3 \ 6 \ 2 \ 2]$ işareti birinci düzey , sekizinci adım olarak Dalgacık seriye açılırsa; Haar dönüşüm matrisi D_{Haar} aşağıdaki gibi işaret boyutunda hazırlanır. İşaret sekiz örnekten oluştuğu için dönüşüm matrisi de 8×8 boyutunda olmalıdır [32-34].

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}_{8 \times 8}$$

$\mathbf{s}_H = \mathbf{D}_{Haar} \times \mathbf{s}_{1 \times N}^T = [2.1213 \quad 0.7071 \quad 6.3640 \quad -0.7071 \quad 6.3640 \quad -2.1213 \quad 3.5355 \quad -0.7071]^T$ olur. Ters dönüşüm ise

$\mathbf{s}_N = (\mathbf{D}_{Haar}^{-1} \times \mathbf{s}_H)^T = [2 \quad 1 \quad 4 \quad 5 \quad 3 \quad 6 \quad 2 \quad 2]$ şeklinde elde edilir.

Enerji sistemlerinde kullanılan güç elektroniği devrelerinin, çeşitli tipteki makine ve motorların, iletim hatlarının, anahtar gibi bir sürü elemanın sistem çözümlemesinde ve eşdeğer devrelerinin modellenmesinde temel olarak akım kaynağı, gerilim kaynağı, R, L ve C elemanları kullanılır. Bunlarla beraber çeşitli adi yada kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlenmesi gerekir.

Uygulama 2:

Örnek olarak aşağıda DC kaynaklı bir RLC devresinin geçici zaman çözümü; Dalgacık dönüşümüyle modellenerek bulunmak istenirse; bu modelleme işlemi için ilk önce dönüşüm bir operatör üzerinden tanımlanmalıdır;

$$Y = T \{ X \}$$

T operatörü X 'i Y 'ye dönüştüren operatördür. Burdan yola çıkılarak, dönüşüm işleminde, ayrık Dalgacık dönüşümü kullanılmak istenirse;

$$\mathbf{W}(\mathbf{X}) = \mathbf{D} \times \mathbf{X} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{Y}) = \mathbf{D} \times \mathbf{Y}$$

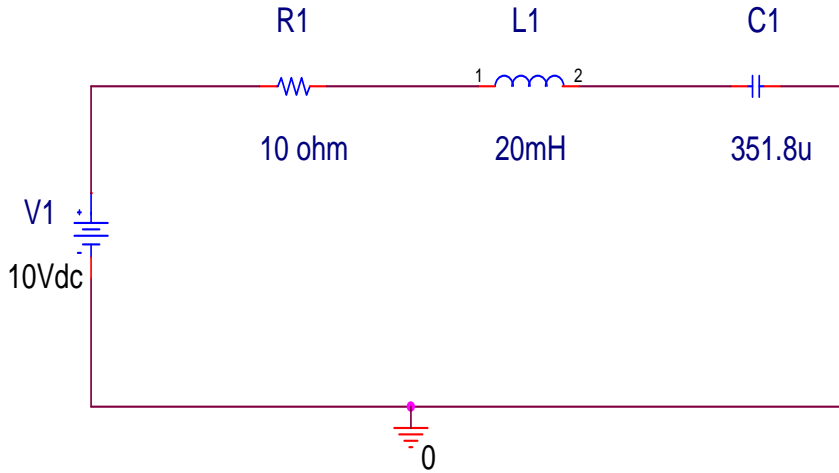
$$\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}^T \quad (4.10)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{T}) = \mathbf{D} \times \mathbf{T} \times \mathbf{D}^T \quad (4.11)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\mathbf{T}) \times \mathbf{W}(\mathbf{X}) \quad (4.12)$$

eşitlikleri bulunur. Burada \mathbf{X} ve \mathbf{Y} sonlu sayıda $N \times 1$ elemandan oluşan vektörler olup \mathbf{D} ise dönüşümü sağlayan Dalgacığa özel filtre katsayılarından oluşan $N \times N$ boyutundaki matristir. \mathbf{T} ise operatör matrisidir. Önceki kısımlarda operatör özelliklerinden bahsedilmişti. Ayrıca dönüşümün çift yönlü ve bire bir olması için de \mathbf{D} matrisinin tersi olmalıdır. Ortogonallik şartı da matrisin tersinin transpozuna eşit olmasıyla sağlanmış olur. Şekil 4.2'deki RLC devresinin Dalgacık dönüşümüyle modellenip çözümünün bulunabilmesi için öncelikle her bir devre elemanının zaman eksenindeki eşitliklerinin Dalgacık tanım kümesinde tanımlanması gerekir. Elemanların ve gerilim kaynağının değerleri şekil üzerinde gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} V &= 10 \text{ V} \\ R &= 10 \ \Omega \\ L &= 0.02 \text{ H} \\ C &= 351.8 \ \mu\text{F} \end{aligned}$$



Şekil 4.2 DC kaynaklı RLC devresi

Bu devre elemanlarına ait eşitlikler aşağıdaki şekilde yazılabilir.

DİRENC (R)

Direnç üzerindeki gerilim

$$v_R(t) = Ri(t)$$

Şeklinde hesaplanır ve buna olarak Dalgacık tanım kümesindeki dönüşüm gösterimi ise

$$\mathbf{W}(\mathbf{V}_R) = R(\mathbf{U} \times \mathbf{W}(\mathbf{I})) \quad (4.13)$$

biçimiyle ifade edilir. Buradaki \mathbf{U} matrisi $N \times N$ boyutlu birim matrisi göstermektedir.

ENDÜKTÖR (L)

Endüktör üzerindeki gerilim denklemi ise endüktans ile akımın zamana göre değişiminin çarpımı ile bulunur. Çözüm için bu denklemdeki zamana bağlı 1. derece adi diferansiyel denklemin N boyut için türev operatör matrisinin (\mathbf{D}_{dif}) oluşturulması ve bunun Dalgacık tanım kümesinde dönüşüm ile ifade edilmesi gereklidir. Eşitlikteki ΔT örnekler arasındaki zaman aralıklarını göstermektedir. Zaman aralığı ne kadar kısa tutulursa okadar net bir çözüm elde edilir. Türev operatör matrisinin eşitliğine bakılacak olursa ana köşegende 1'lerin ve bir alt sıradaki köşegende ise -1'lerin olduğu görülür. Bunun amacı; türev operatör matrisinin tekrarlı biçimde herbir örnekle ondan bir önceki örneğin farkını alarak gitmesi olarak açıklanabilir.

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{V}_L) = L(\mathbf{W}(\mathbf{D}_{dif})) \times (\mathbf{W}(\mathbf{I})) \quad (4.14)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{D}_{dif}) = \mathbf{D} \times \mathbf{D}_{dif} \times \mathbf{D}^T \quad (4.15)$$

$$\mathbf{D}_{dif} = \frac{1}{\Delta T} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (4.16)$$

KAPASİTÖR (C)

Kapasitör üzerindeki gerilim denklemi ise akımın zamana göre integralinin kapasitans değerine bölünmesiyle bulunur. Çözüm için bu denklemdeki zamana bağlı akımın integralinin N boyut için integral operatör matrisinin (\mathbf{D}_{int}) oluşturulması ve bunun Dalgacık tanım kümesinde dönüşüm ile ifade edilmesi

gereklidir. Eşitlikteki ΔT örnekler arasındaki zaman aralıklarını göstermektedir. Zaman aralığı ne kadar kısa tutulursa okadar net bir çözüm elde edilir. İntegral operatör matrisinin eşitliğine bakılacak olursa ana köşegen ve onun altındaki tüm indislerin 1'lerden oluştuğu görülür. Bunun amacı; integral operatör matrisinin tekrarlı biçimde her bir örnekle ondan bir önceki örneklerin toplamını alarak işlem yapması olarak açıklanabilir.

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{V}_c) = \frac{1}{C} (\mathbf{W}(\mathbf{D}_{\text{int}})) \times (\mathbf{W}(\mathbf{I})) \quad (4.17)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{D}_{\text{int}}) = \mathbf{D} \times \mathbf{D}_{\text{int}} \times \mathbf{D}^T \quad (4.18)$$

$$\mathbf{D}_{\text{int}} = \Delta T \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (4.19)$$

Tekrar şekildeki devrenin çözümüne dönülecek olursa; tüm devre için zaman tanım kümesindeki genel gerilim denklemi aşağıdaki şekildedir

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = v_1(t)$$

Dalgacık dönüşümü sonrasındaki denklem

$$\mathbf{W}(\mathbf{I}) = \frac{\mathbf{W}(\mathbf{V}_1)}{RU + L\mathbf{W}(\mathbf{D}_{\text{dif}}) + \frac{1}{C}\mathbf{W}(\mathbf{D}_{\text{int}})}$$

şeklinde ifade edilir. Akımın zaman düzlemindeki değerini bulmak için tekrardan ters dönüşüm uygulanır.

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{D}^T \times \mathbf{W}(\mathbf{I})$$

Aynı şekilde kapasitör üzerindeki gerilimin (V_C) zaman tanım kümesindeki denklemini bulmak için aşağıdaki denklemde görüldüğü gibi

öncelikle Dalgacık dönüşümünde gerekli işlemler yapılır ve ardından ters dönüşüm ile gerilimin değeri bulunur [31-33,36].

$$\mathbf{W}(\mathbf{V}_C) = \mathbf{W}(\mathbf{I}) \times \frac{1}{C} \mathbf{W}(\mathbf{D}_{int})$$

$$\mathbf{V}_C(t) = \mathbf{D}^T \times \mathbf{W}(\mathbf{V}_C)$$

D dönüşüm matrisi ele alınacak olursa; bu matrisin elemanları ilgili Dalgacık tipinin alçak ve yüksek geçiren filtre katsayıları ile ikili satırlar biçiminde oluşturulur. Haar Dalgacık tipine göre oluşturulmuş dönüşüm matrisine bakılırsa; ilk satırda alçak geçiren, ikinci satırda ise yüksek geçiren filtre katsayıları ve devamında da sıfırlar vardır. Bir sonraki ikili satıra geçildiğinde katsayılar iki sütun kaydırılarak aynen yazılır ve geri kalan yerler sıfır olur. Bu işlem $N \times N$ 'lik dönüşüm matrisi doldurulana kadar sürdürülür.

$$c_0 = 0.7071, \quad c_1 = 0.7071$$

$$\mathbf{D}_{Haar} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (4.20)$$

Daubechies2 Dalgacık tipine göre oluşturulmuş dönüşüm matrisine bakılırsa; bu Dalgacık tipinin 4 tane alçak geçiren 4 tane de yüksek geçiren filtre katsayısı vardır. İlk satırda alçak geçiren, ikinci satırda ise yüksek geçiren filtre

katsayıları ve devamında da sıfırlar vardır. Bir sonraki ikili satıra geçildiğinde katsayılar iki sütun kaydırılarak aynen yazılır ve geri kalan yerler sıfır olur. Bu işlem $N \times N$ 'lik dönüşüm matrisi doldurulana kadar sürdürülür

$$c_0 = 0.4830 \quad , \quad c_1 = 0.8365 \quad , \quad c_2 = 0.2241 \quad , \quad c_3 = -0.1294$$

$$\mathbf{D}_{Db2} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ c_2 & c_3 & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & c_0 & c_1 \\ c_1 & -c_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_3 & -c_2 \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (4.21)$$

Daubechies3 Dalgacık tipine göre oluşturulmuş dönüşüm matrisine bakılırsa; bu Dalgacık tipinin 6 tane alçak geçiren 6 tane de yüksek geçiren filtre katsayısı vardır. İlk satırda alçak geçiren, ikinci satırda ise yüksek geçiren filtre katsayıları ve devamında da sıfırlar vardır. Bir sonraki ikili satıra geçildiğinde katsayılar iki sütun kaydırılarak aynen yazılır ve geri kalan yerler sıfır olur. Bu işlem $N \times N$ 'lik dönüşüm matrisi doldurulana kadar sürdürülür

$$c_0 = 0.3327 \quad , \quad c_1 = 0.8069 \quad , \quad c_2 = 0.4599$$

$$c_3 = -0.1350 \quad , \quad c_4 = -0.0854 \quad , \quad c_5 = 0.0352$$

$$\mathbf{D}_{Db3} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ c_5 & -c_4 & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & c_5 & -c_4 & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & c_5 & -c_4 & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_0 & c_1 \\ c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_5 & -c_4 \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (4.22)$$

Symlet2 Dalgacık tipine göre oluşturulmuş dönüşüm matrisine bakılırsa; bu Dalgacık tipinin 4 tane alçak geçiren 4 tane de yüksek geçiren filtre katsayısı vardır. İlk satırda alçak geçiren, ikinci satırda ise yüksek geçiren filtre katsayıları ve devamında da sıfırlar vardır. Bir sonraki ikili satıra geçildiğinde katsayılar iki sütun kaydırılarak aynen yazılır ve geri kalan yerler sıfır olur. Bu işlem $N \times N$ 'lik dönüşüm matrisi doldurulana kadar sürdürülür

$$c_0 = 0.4830 \quad , \quad c_1 = 0.8365 \quad , \quad c_2 = 0.2241 \quad , \quad c_3 = -0.1294$$

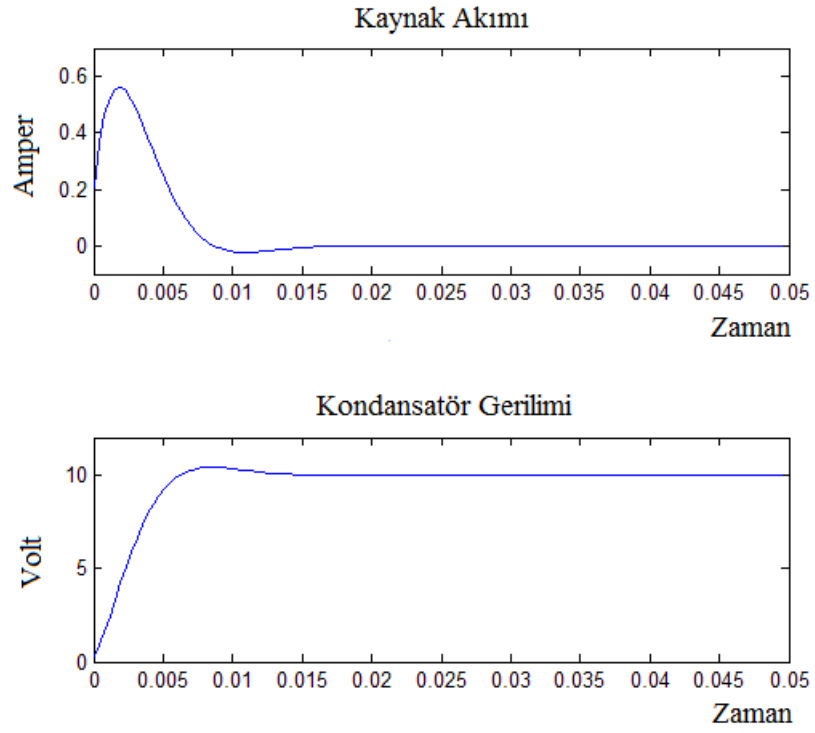
$$\mathbf{D}_{Sym2} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ c_2 & c_3 & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & c_0 & c_1 \\ c_1 & -c_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_3 & -c_2 \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (4.23)$$

Symlet3 Dalgacık tipine göre oluşturulmuş dönüşüm matrisine bakılırsa; bu Dalgacık tipinin 6 tane alçak geçiren 6 tane de yüksek geçiren filtre katsayısı vardır. İlk satırda alçak geçiren, ikinci satırda ise yüksek geçiren filtre katsayıları ve devamında da sıfırlar vardır. Bir sonraki ikili satıra geçildiğinde katsayılar iki sütun kaydırılarak aynen yazılır ve geri kalan yerler sıfır olur. Bu işlem $N \times N$ 'lik dönüşüm matrisi doldurulana kadar sürdürülür

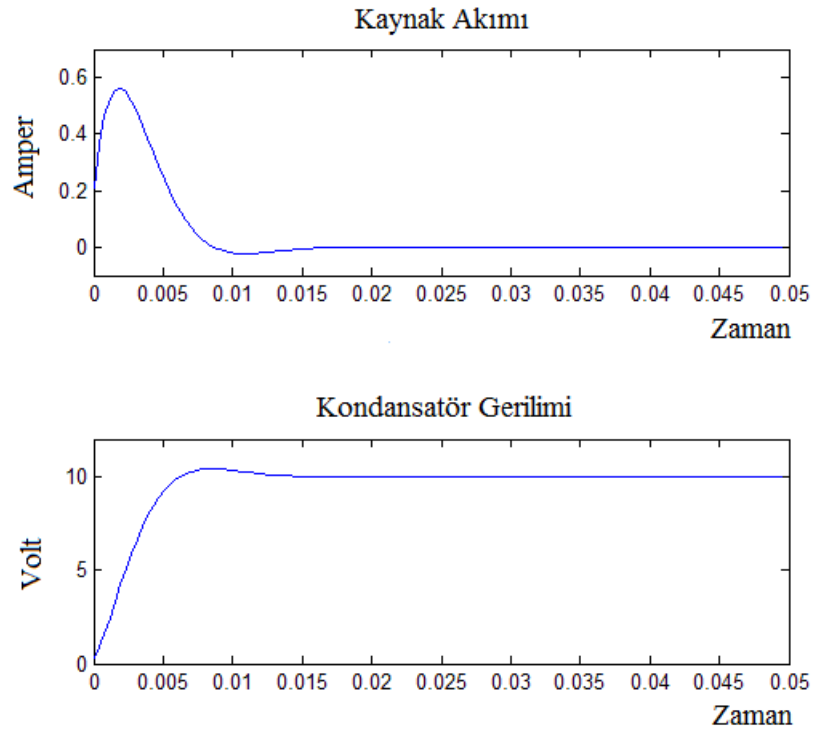
$$c_0 = 0.3327 \quad , \quad c_1 = 0.8069 \quad , \quad c_2 = 0.4599 \\ c_3 = -0.1350 \quad , \quad c_4 = -0.0854 \quad , \quad c_5 = 0.0352$$

$$\mathbf{D}_{Sym3} = \begin{bmatrix}
c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
c_5 & -c_4 & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & c_5 & -c_4 & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & c_5 & -c_4 & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\
c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c_0 & c_1 \\
c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c_5 & -c_4
\end{bmatrix}_{N \times N} \quad (4.24)$$

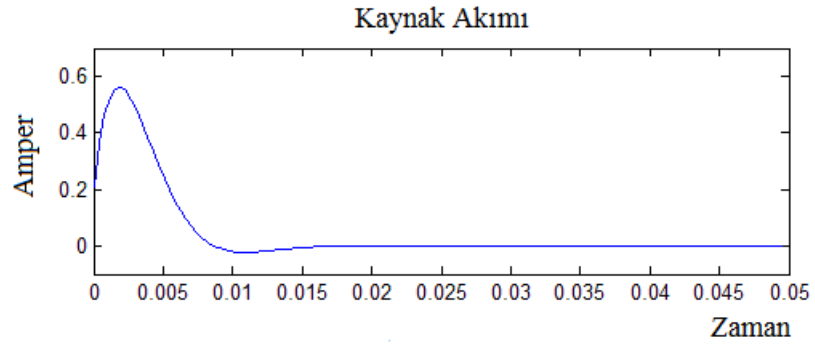
Bu işlem diğer ortogonal olan Dalgacık tipleri için de aynı yöntem izlenerek yapılabilir. Burada yapılan çalışmada devre çözümünde kullanılmak üzere N=128 zaman örneği için Haar, Daubechies2, Daubechies3, Symlet2 ve Symlet3 Dalgacıkları kullanılmıştır. MATLAB yazılımı kullanılarak yazılan programlar sonucunda elde edilen sonuçlar Şekil 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 ve 4.7’de, Şekil 4.8’de ise PSPICE programından alınan sonuçlar gösterilmiştir. Sonuçlar kıyaslandığında Dalgacık dönüşümüyle modelleme sonucundaki elde edilen sonuçların PSPICE sonucuyla örtüştüğü yani kullanılan modelin devreyi doğru olarak çözdüğü, ona göre daha detaylı ve keskin veriler içerdiği görülmektedir. Buraya kadar olan çalışmada, literatürde dönüşüm matrisi olarak sadece Haar Dalgacığı ile çözülmüş olan örnek bir devrenin Daubechies2, Daubechies3, Symlet2 ve Symlet3 Dalgacık tipleri ile çözümü yapıldı ve sonuçların tutarlı olduğu görüldü.



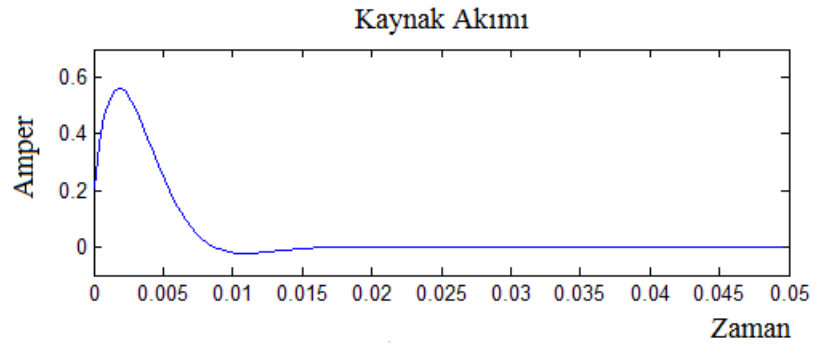
Şekil 4.3. “Haar (Db1)” Dalgacık katsayıları ile elde edilen sonuçlar



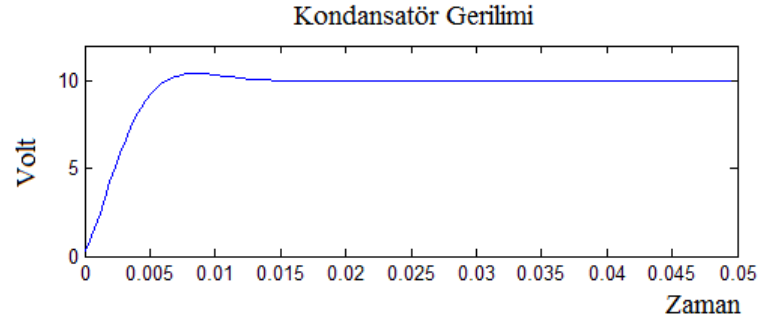
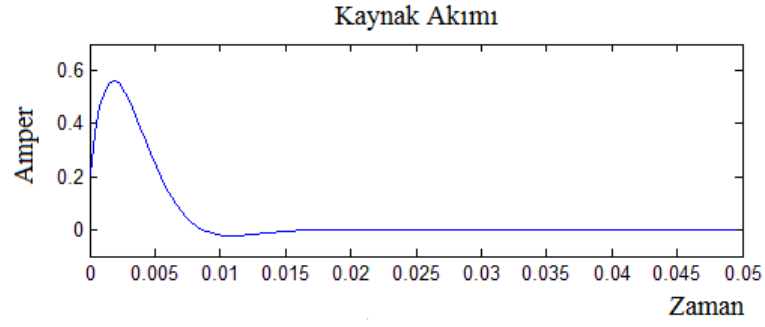
Şekil 4.4. “Db2” Dalgacık katsayıları ile elde edilen sonuçlar



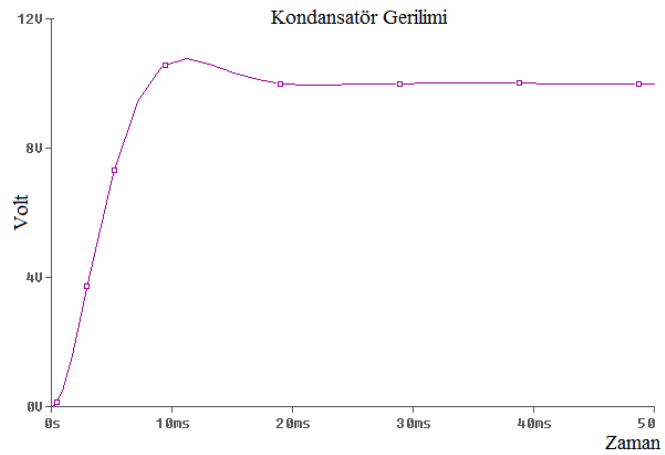
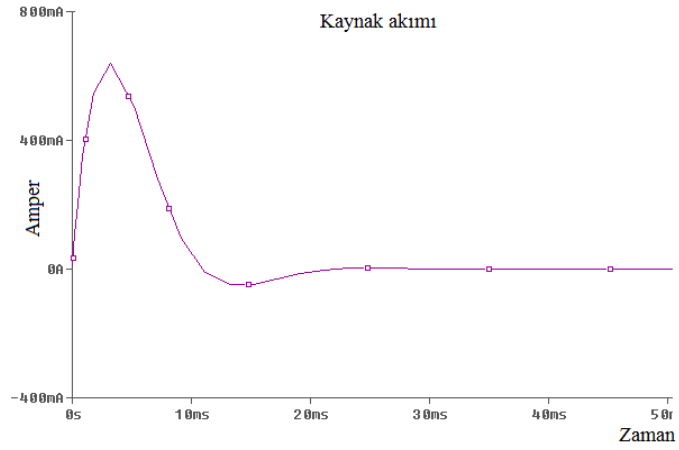
Şekil 4.5. “Db3” Dalgacık katsayıları ile elde edilen sonuçlar



Şekil 4.6. “Sym2” Dalgacık katsayıları ile elde edilen sonuçlar



Şekil 4.7. “Sym3” Dalgacık katsayıları ile elde edilen sonuçlar



Şekil 4.8. PSPICE programından elde edilen sonuçlar

Uygulama 3:

Aynı devre içerisindeki denklemler 2. dereceden adi diferansiyel denklem biçimine getirilip çözümlerse;

$$v_1(t) = \left(Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \right) \quad \text{ve} \quad C \frac{dV_C(t)}{dt} = i(t) \quad \text{ise}$$

$$v_1(t) = RC \frac{dV_C(t)}{dt} + LC \frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + V_C(t) \quad \text{olur.}$$

Dalgacık dönüşümü sonrasındaki denklem

$$\mathbf{W}(\mathbf{V}_1) = \left(RC\mathbf{W}(\mathbf{D}_{dif}) \times \mathbf{W}(\mathbf{V}_C) \right) + \left(LC\mathbf{W}(\mathbf{D}_{dif})^2 \times \mathbf{W}(\mathbf{V}_C) \right) + \mathbf{W}(\mathbf{V}_C)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{V}_C) = \frac{\mathbf{W}(\mathbf{V}_1)}{\left(RC\mathbf{W}(\mathbf{D}_{dif}) \right) + \left(LC\mathbf{W}(\mathbf{D}_{dif})^2 \right) + \mathbf{U}}$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{D}_{dif})^2 = \left(\mathbf{D} \times \mathbf{D}_{dif} \times \mathbf{D}^T \right) \times \left(\mathbf{D} \times \mathbf{D}_{dif} \times \mathbf{D}^T \right) = \mathbf{D} \times \left(\mathbf{D}_{dif} \times \mathbf{D}_{dif} \right) \times \mathbf{D}^T$$

şeklinde ifade edilir. Kapasitör üzerindeki gerilimin değerini bulmak için tekrardan ters dönüşüm uygulanır.

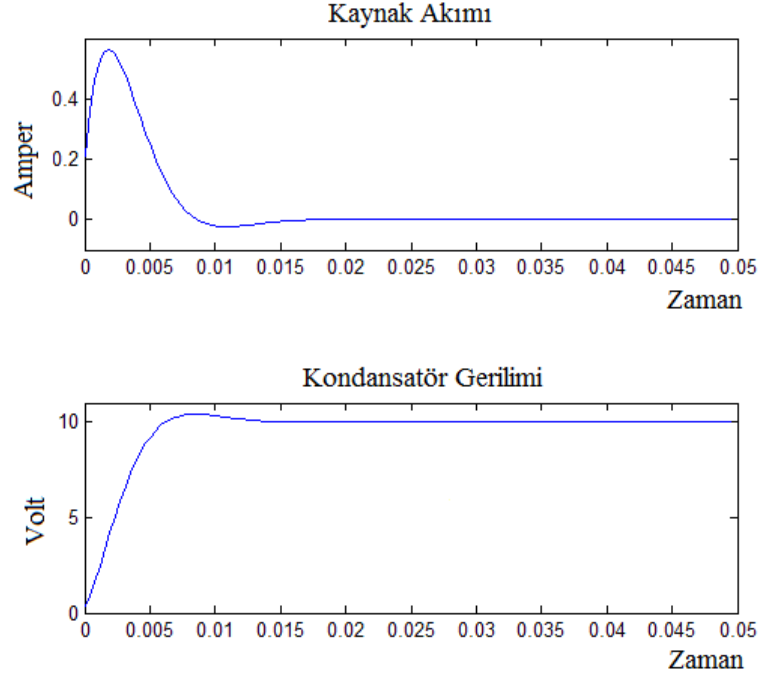
$$\mathbf{V}_C(t) = \mathbf{D}^T \times \mathbf{W}(\mathbf{V}_C)$$

Aynı şekilde, devre akımının (i) zaman tanım kümesindeki denklemini bulmak için aşağıdaki denklemde görüldüğü gibi öncelikle Dalgacık dönüşümünde gerekli işlemler yapılır ve ardından ters dönüşüm ile akımın değeri bulunur

$$\mathbf{W}(\mathbf{I}) = C\mathbf{W}(\mathbf{D}_{dif}) \times \mathbf{W}(\mathbf{V}_C)$$

$$\mathbf{i}(t) = \mathbf{D}^T \times \mathbf{W}(\mathbf{I})$$

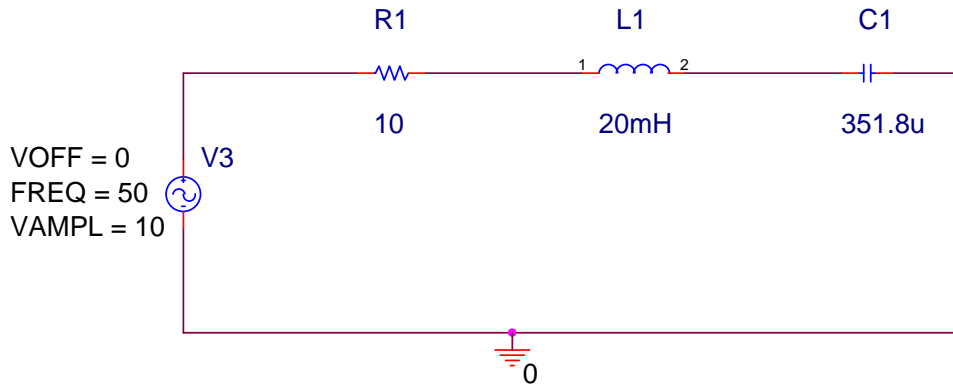
Şekil 4.9'da görüldüğü gibi devrenin 2. derece türev operatörü çözüm sonuçlarıyla Şekil 4.3'deki 1. derece türev, integral çözüm sonuçları birbiri ile örtüşmektedir.



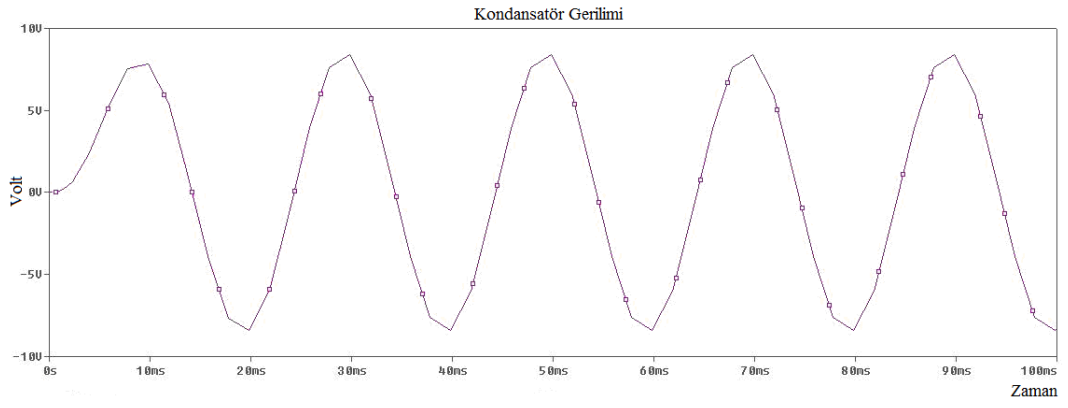
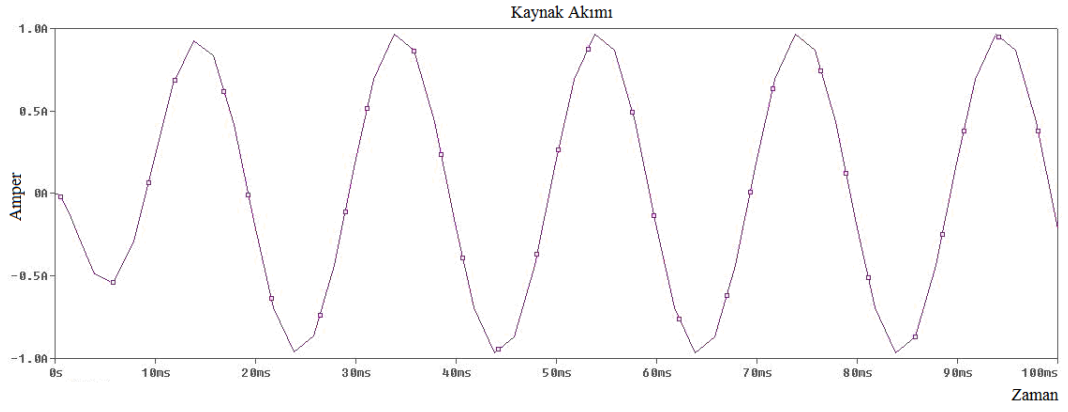
Şekil 4.9. 2. derece türev operatörü ile elde edilen sonuçlar

Uygulama 4:

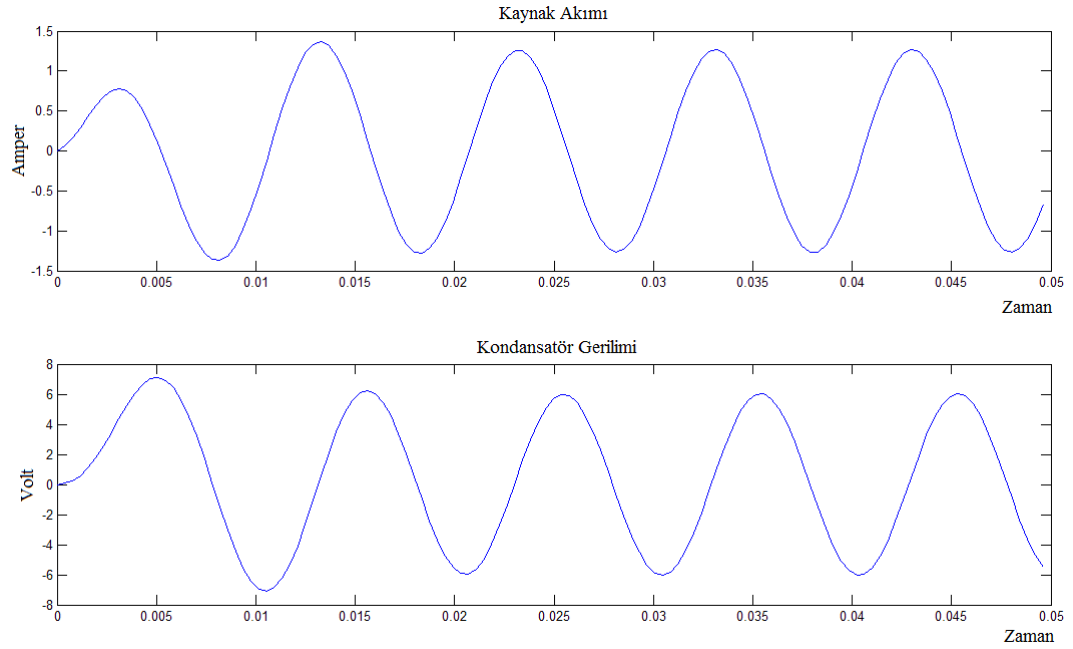
Buraya kadar olan kısımda DC kaynaklı RLC devresinin elemanları, türev ve integral operatörleri çeşitli Dalgacıklar kullanılarak modellendi. Şekil 4.10'daki devrede ise DC kaynak yerine AC kaynak kullanılarak elde edilen sonuçlar PSPICE ve MATLAB ortamında karşılaştırıldı. Sonuçlar şekil 4.11 ve şekil 4.12'de ayrı ayrı gösterildi.



Şekil 4.10. AC kaynaklı RLC devresi



Şekil 4.11. Kaynak akımı ve kondansatör üzerindeki gerilim (PSPICE sonuçları)

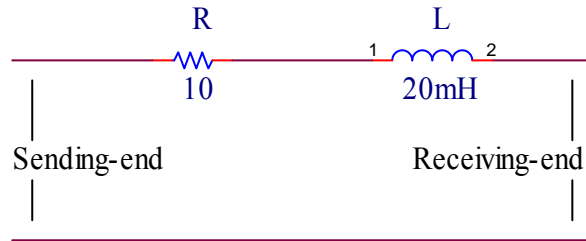


Şekil 4.12. Kaynak akımı ve kondansatör üzerindeki gerilim (Dalgacık çözümü)

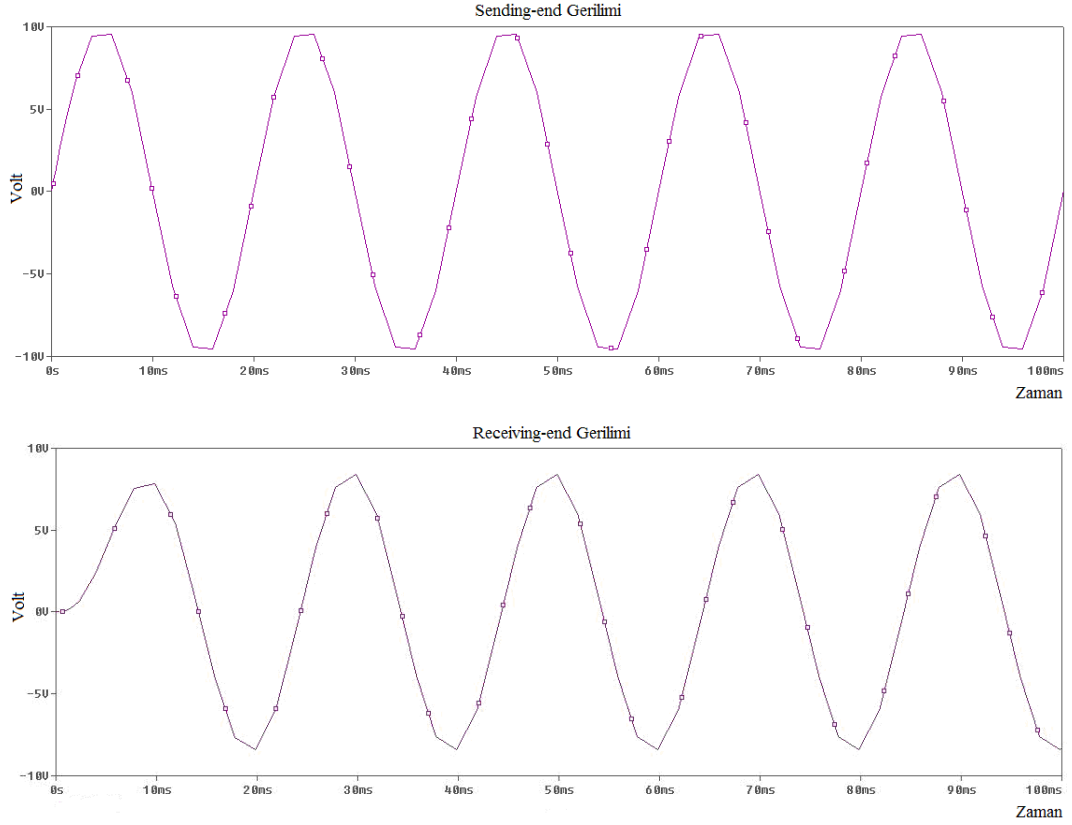
Enerji sistemlerinde kullanılan elemanlardan en önemlilerinden biri iletim hatlarıdır. İletim hatları uzunluklarına göre 3 gruba ayrılır. Aşağıda bu iletim hat modellerinin PSPICE sonuçları ile MATLAB ortamındaki çeşitli tip ortogonal Dalgacıklarla çözümleri incelendi ve kıyaslandı.

Uygulama 5:

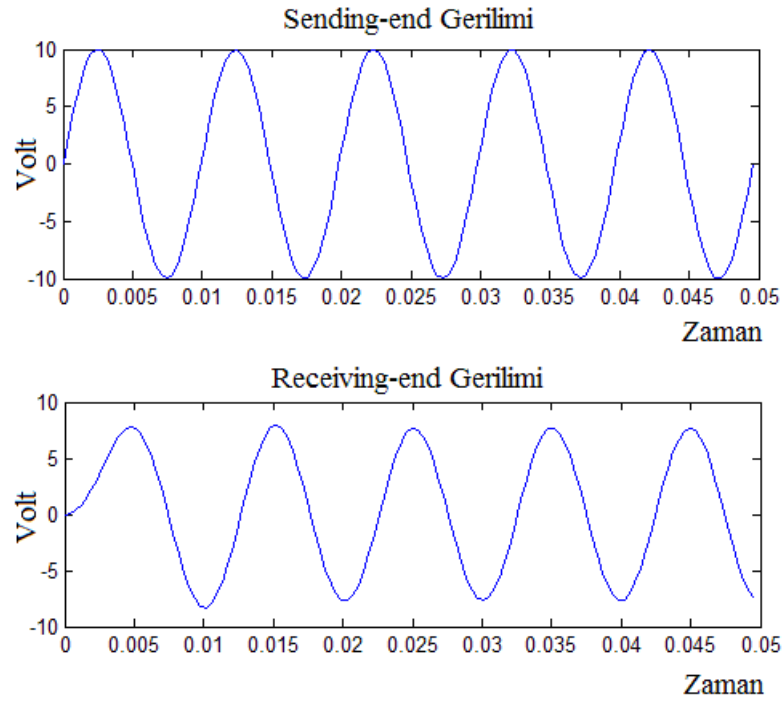
İlk olarak, uzunluğu 80 km'ye kadar olan, R ve L elemanlarından oluşan şekil 4.13'teki kısa iletim hattı modeli Daubechies3 Dalgacığı kullanılarak Dalgacık tabanında modellendi. Sending-end ve Receiving-end gerilimlerini gösteren PSPICE sonuçları şekil 4.14'te, MATLAB ortamındaki Dalgacık çözüm sonuçları ise şekil 4.15'te gösterilmiştir. Bu grafikler incelendiğinde sonuçların birbirleriyle örtüştüğü açıkça görülmektedir.



Şekil 4.13. Kısa İletim hattı modeli



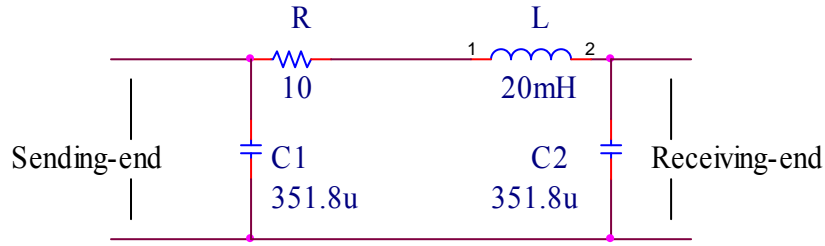
Şekil 4.14. Sending-end ve Receiving-end gerilimleri (PSPICE sonuçları)



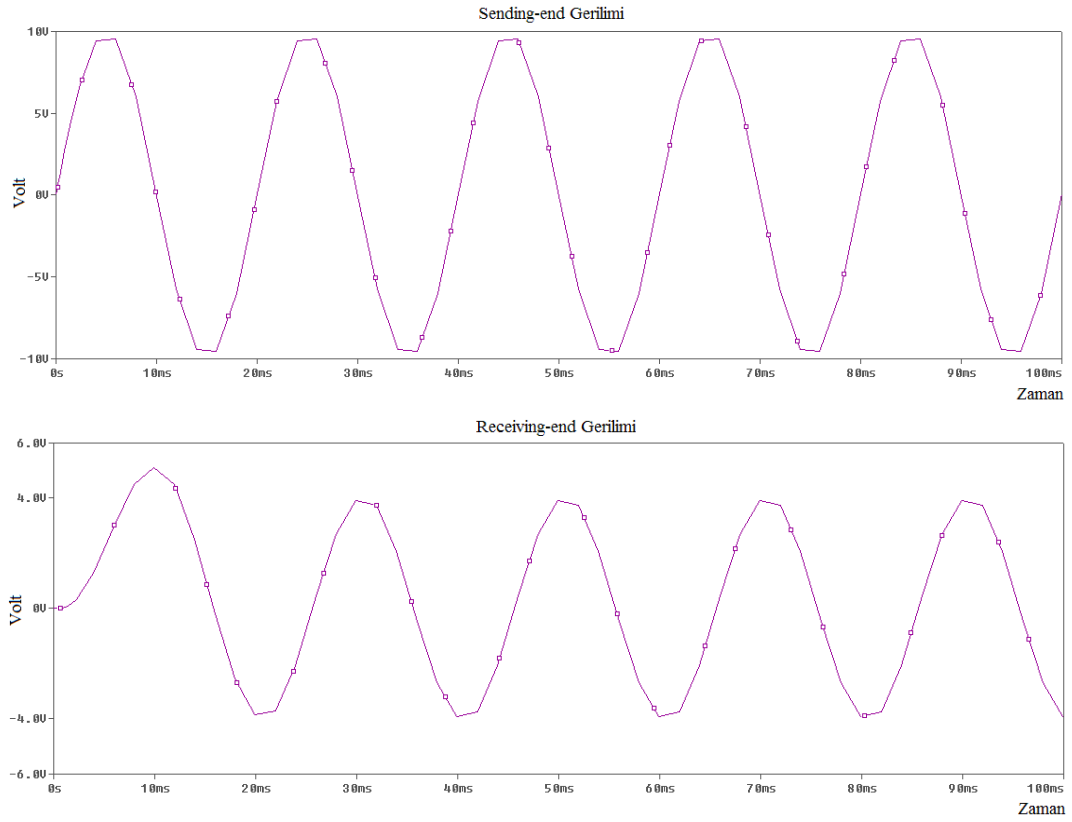
Şekil 4.15. Sending-end ve Receiving-end gerilimleri (Dalgacık çözümü)

Uygulama 6:

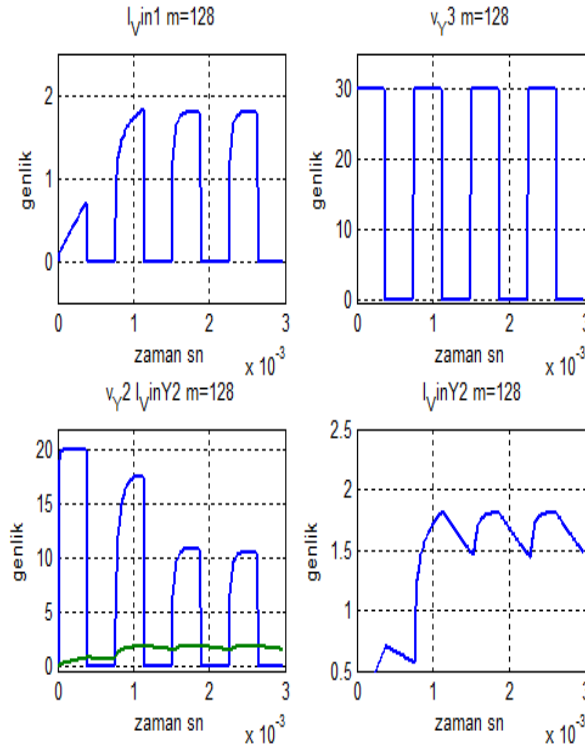
Bir diğerk iletim hattı modeli ise R, L ve şönt olarak modele eklenmiş C elemanlarından oluşan, uzunluğu 80 ile 240 km arası olan, şekil 4.16'daki orta iletim hattı modelidir. Bu iletim hattı Daubechies2 Dalgacığı kullanılarak Dalgacık ortamında modellendi. Sending-end ve Receiving-end gerilimlerini gösteren PSPICE sonuçları şekil 4.17'de, MATLAB ortamındaki Dalgacık çözüm sonuçları ise şekil 4.18'de gösterildi.



Şekil 4.16. Orta İletim hattı modeli



Şekil 4.17. Sending-end ve Receiving-end gerilimleri (PSPICE sonuçları)



Şekil 4.25. DC kıyıcı devresi 7. seviye çözümleme

4.2 Bağlantı Katsayıları Yaklaşımı

Bağlantı katsayıları yaklaşımında dönüşüm matrisi yaklaşımından farklı olarak; Dalgacık dönüşümünde kullanılan ölçek ve Dalgacık fonksiyonlarının ve bunların türevlerinin birbirleriyle olan bağlantılarından yola çıkılarak oluşturulan bağlantı katsayıları tekniği kullanılarak çeşitli devre ve denklem çözümleri yapıldı.

Öncelikle Dalgacık tabanında doğrusal bir operatör (T) tanımlanırsa;

$$x(t) = \sum_k x_J(k) 2^{J/2} \phi(2^J t - k)$$

$x(t)$ işareti için dönüşüm operatörü

$$Tx(t) = \sum_k x_J(k) T \left(2^{J/2} \phi(2^J t - k) \right) \quad (4.26)$$

şeklinde gösterilir ve Dalgacık tanım kümesinde gösterimi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
Tx(t) &= \sum_k x_J(k) \sum_l \left\langle T \left(2^{J/2} \phi(2^J t - k) \right), 2^{J/2} \phi(2^J t - l) \right\rangle 2^{J/2} \phi(2^J t - l) \\
&= \sum_l \left[\sum_k \left\langle T \left(2^{J/2} \phi(2^J t - k) \right), 2^{J/2} \phi(2^J t - l) \right\rangle x_J(k) \right] 2^{J/2} \phi(2^J t - l)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Bu yaklaşımda $\frac{d}{dx}$ türev operatör matrisi \mathbf{D}_{dif} ile tanımlanırsa. $D = 2M$ için,

$$\mathbf{D}_{dif} = \{ \mathbf{A}_J, \mathbf{B}_J, \mathbf{\Gamma}_J \}_{J \in \mathbb{Z}} \tag{4.28}$$

$$\mathbf{A}_J : W_J \rightarrow W_J \tag{4.29}$$

$$\mathbf{B}_J : V_J \rightarrow W_J \tag{4.30}$$

$$\mathbf{\Gamma}_J : W_J \rightarrow V_J \tag{4.31}$$

$\mathbf{A}_J = \mathbf{Q}_J \mathbf{D}_{dif} \mathbf{Q}_J$, $\mathbf{B}_J = \mathbf{Q}_J \mathbf{D}_{dif} \mathbf{P}_J$, $\mathbf{\Gamma}_J = \mathbf{P}_J \mathbf{D}_{dif} \mathbf{Q}_J$ şeklinde gösterilir.

Burada \mathbf{P}_J ; V_J altuzayı üzerine izdüşüm vektörünü, $\mathbf{Q}_J = \mathbf{P}_{J-1} - \mathbf{P}_J$ ise W_J altuzayı üzerine izdüşüm vektörünü temsil etmektedir.

$\frac{d}{dx}$ operatörünün $\mathbf{A}_J, \mathbf{B}_J, \mathbf{\Gamma}_J$ ve $\mathbf{D}_{dif J} = \mathbf{P}_J \mathbf{D}_{dif} \mathbf{P}_J$ matrislerinin elemanları

olan $\alpha_{il}^J, \beta_{il}^J, \gamma_{il}^J$ ve r_{il}^J , $i, l, J \in \mathbb{Z}$ aşağıdaki şekilde hesaplanabilir [5,25].

$$\alpha_{il}^J = 2^{-J} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(2^{-J} x - i) \psi'(2^{-J} x - l) 2^{-J} dx = 2^{-J} \alpha_{i-l} \tag{4.32}$$

$$\beta_{il}^J = 2^{-J} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(2^{-J} x - i) \phi'(2^{-J} x - l) 2^{-J} dx = 2^{-J} \beta_{i-l} \tag{4.33}$$

$$\gamma_{il}^J = 2^{-J} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(2^{-J} x - i) \psi'(2^{-J} x - l) 2^{-J} dx = 2^{-J} \gamma_{i-l} \tag{4.34}$$

$$r_{il}^J = 2^{-J} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(2^{-J} x - i) \phi'(2^{-J} x - l) 2^{-J} dx = 2^{-J} r_{i-l} \tag{4.35}$$

$$\alpha_l = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-l) \frac{d}{dx} \psi(x) dx \quad (4.36)$$

$$\beta_l = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-l) \frac{d}{dx} \varphi(x) dx \quad (4.37)$$

$$\gamma_l = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-l) \frac{d}{dx} \psi(x) dx \quad (4.38)$$

$$r_l = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-l) \frac{d}{dx} \varphi(x) dx \quad (4.39)$$

(3.19) ve (3.20) eşitlikleri yardımıyla

$$\alpha_i = 2 \sum_{k=0}^{D-1} \sum_{k'=0}^{D-1} g_k g_{k'} r_{2i+k-k'} \quad (4.40)$$

$$\beta_i = 2 \sum_{k=0}^{D-1} \sum_{k'=0}^{D-1} g_k h_{k'} r_{2i+k-k'} \quad (4.41)$$

$$\gamma_i = 2 \sum_{k=0}^{D-1} \sum_{k'=0}^{D-1} h_k g_{k'} r_{2i+k-k'} = -\beta_{-l} \quad (4.42)$$

$H = \{h_k\}_{k=0}^{k=D-1}$ filtresinin otokorelasyon katsayıları

$$\bar{a}_n = 2 \sum_{i=0}^{D-1-n} h_i h_{i+n} \quad n = 1, \dots, D-1 \quad (4.43)$$

Çift terimli otokorelasyon katsayılarının değeri sıfırdır.

$$\bar{a}_{2k} = 0 \quad k = 1, \dots, \frac{D}{2} - 1 \quad (4.44)$$

Eğer (4.39)'deki integral var ise buradaki r_l 'ler aşağıdaki lineer cebirsel denklem sistemini sağlar

$$r_l = 2 \left[r_{2l} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\frac{D}{2}} \bar{a}_{2k-1} (r_{2l-2k+1} + r_{2l+2k-1}) \right] \quad (4.45)$$

ve

$$\sum_l^{D-2} l r_l = -1 \quad (4.46)$$

olur. Eğer $M \geq 2$ ise (4.45) ve (4.46)'nın sonlu sayıda r_l 'yi sağlayan tek bir çözümü vardır, ($r_l \neq 0 \quad -D+2 \leq l \leq D-2$ için) ve $r_l = -r_{-l}$ ise

$$\sum_l r_l = 0 \quad (4.47)$$

V_J altuzayındaki T_J operatörünün (4.45) ve (4.46) 'da verilen r_l katsayılarından oluştuğu gözönüne alınırsa ($r_l^j = 2^{-j} r_l$)

$$(T_J f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(2^{-j} \sum_l r_l f_{J,k-l} \right) \phi_{J,k}(x) \quad (4.48)$$

olur [27,35]. Zamanla doğrusal değişen sistemlerin Dalgacık ortamındaki çözümünün yapılabilmesi için özellikle n . derece adi diferansiyel denklemlerin ve bu denklemlerin çözümünde kullanılacak olan türev, integral ve çarpım matrislerinin tanımlanarak sistem denklemlerinin cebirsel olarak ifade edilmesi ve ardından da çözümünün hesaplanması gerekir. Bunun için özellikle türev, integral ve çarpım operatörlerinin Dalgacık ortamındaki etkileri ifade edilmelidir. [5,24,29]

Türev Operatör Matrisi

$y(t), x(t) \in L^2(R)$ olmak üzere $y(t)$ ve $x(t)$ fonksiyonlarının kesikli Dalgacık açılımları

$$y(t) = \sum_n y_J(n) 2^{J/2} \phi(2^J t - n) \quad (4.49)$$

$$x(t) = \sum_k x_J(k) 2^{J/2} \phi(2^J t - k) \quad (4.50)$$

şeklinde yazılabilir. Bu sinyaller arasındaki ilişki $y(t) = \frac{d}{dt}(x(t))$ ise

$$x'(t) = \sum_n x_J(k) 2^{3J/2} \phi'(2^J t - k) \quad (4.51)$$

olduğundan $y_J(n)$ katsayıları

$$y_J(n) = \left\langle x'(t), 2^{J/2} \phi(2^J t - n) \right\rangle \quad (4.52)$$

ile hesaplanabilir. Denklem (4.51)'ü denklem (4.52)'te yerine koyulursa

$$y_J(n) = \sum_k x_J(k) 2^{2J} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(2^J t - k) \phi(2^J t - n) dt \quad (4.53)$$

ve $\tau = 2^J t - k$ şeklinde değişken değiştirilirse

$$y_J(n) = \sum_k x_J(k) 2^J \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(\tau) \phi(\tau - (n - k)) d\tau \quad (4.54)$$

olur ve $r_l = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(\tau) \phi(\tau - l) d\tau$ şeklinde tanımlanırsa

$$y_J(n) = \sum_k x_J(k) 2^J r_{n-k} \quad (4.55)$$

olur. \mathbf{Y} ve \mathbf{X} vektörleri $y(t)$ ve $x(t)$ 'nin Dalgacık katsayı vektörleri, \mathbf{D}_{dif} ise

türev operatör matrisi olmak üzere $y(t) = \frac{d}{dt}(x(t))$ ifadesi Dalgacık ortamında

$$\mathbf{Y} = \mathbf{D}_{dif} \times \mathbf{X} \quad (4.56)$$

ile ifade edilebilir. $\mathbf{Y} = [y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, \dots]^T$ ve

$\mathbf{X} = [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots]^T$ olmak üzere

$$\mathbf{D}_{dif} = 2^J \begin{bmatrix} r_0 & r_{-1} & r_{-2} & r_{-3} & r_{-4} & \cdots \\ r_1 & r_0 & r_{-1} & r_{-2} & r_{-3} & \cdots \\ r_2 & r_1 & r_0 & r_{-1} & r_{-2} & r_{-3} \\ r_3 & r_2 & r_1 & r_0 & r_{-1} & r_{-2} \\ r_4 & r_3 & r_2 & r_1 & r_0 & r_{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (4.57)$$

şeklindedir ve matris içindeki r_l katsayıları (4.45), (4.46) ve (4.43) denklemlerinin çözümünden bulunur. Bazı ortogonal Dalgacıklar için hesaplanan otokorelasyon ve buna bağlı olarak bağlantı katsayı değerleri aşağıdaki gibidir.

$$(\bar{a}_{2n} = 0 \quad r_0 = 0 \quad r_l = -r_{-l})$$

Haar (Daubechies1)

$$\bar{a}_1 = 1$$

$$r_1 = -\frac{1}{2}$$

Daubechies2

$$\bar{a}_1 = \frac{9}{8}, \bar{a}_3 = -\frac{1}{8}$$

$$r_1 = -\frac{2}{3}, r_2 = \frac{1}{12}$$

Daubechies3

$$\bar{a}_1 = \frac{75}{64}, \bar{a}_3 = -\frac{25}{128}, \bar{a}_5 = \frac{3}{128}$$

$$r_1 = -\frac{272}{365}, r_2 = \frac{53}{365}, r_3 = -\frac{16}{1095}, r_4 = -\frac{1}{2920}$$

Daubechies4

$$\bar{a}_1 = \frac{1225}{1024}, \bar{a}_3 = -\frac{245}{1024}, \bar{a}_5 = \frac{49}{1024}, \bar{a}_7 = -\frac{5}{1024}$$

$$r_1 = -\frac{39296}{49553}, r_2 = \frac{76113}{396424}, r_3 = -\frac{1664}{49553}, r_4 = \frac{2645}{1189272}, r_5 = \frac{128}{742295}, r_6 = -\frac{1}{1189272}$$

İntegral Operatör Matrisi

$y(t), x(t) \in L^2(R)$ olmak üzere $y(t)$ ve $x(t)$ fonksiyonlarının kesikli

Dalgacık açılımları

$$y(t) = \sum_n y_J(n) 2^{J/2} \phi(2^J t - n) \quad (4.58)$$

$$x(t) = \sum_k x_J(k) 2^{J/2} \phi(2^J t - k) \quad (4.59)$$

şeklinde yazılabilir. Bu sinyaller arasındaki ilişki $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ şeklinde ise

(4.58) ve (4.59) ifadelerini integralde yerine konulursa

$$\sum_n y_J(n) 2^{J/2} \phi(2^J t - n) = \int_{-\infty}^t \sum_k x_J(k) 2^{J/2} \phi(2^J \tau - k) d\tau \quad (4.60)$$

elde edilir ve $y(t)$ sinyalinin Dalgacık katsayılarını bulmak için

$2^{J/2} \phi(2^J t - n)$ fonksiyonu ile iç çarpım alınırsa

$$y_J(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^t \sum_k x_J(k) 2^{J/2} \phi(2^J \tau - k) d\tau \right) 2^{J/2} \phi(2^J t - n) dt$$

bulunur. $\phi(2^J t - n)$ fonksiyonu $\left[\frac{n}{2^J}, \frac{n+1}{2^J} \right]$ aralığında kompakt dayanağa sahip olduğundan iç taraftaki integralin sınırları aşağıdaki şekilde değişir.

$$y_J(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\frac{n+1}{2^J}} \sum_k x_J(k) 2^{J/2} \phi(2^J \tau - k) d\tau 2^{J/2} \phi(2^J t - n) dt \quad (4.61)$$

$u = 2^J \tau - k$ şeklinde tanımlanırsa

$$y_J(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{n-k+1} \sum_k x_J(k) 2^{-J/2} \phi(u) du \right) 2^{J/2} \phi(2^J t - n) dt \quad (4.62)$$

ifadesi elde edilir. Ölçek fonksiyonu ($\phi(u)$) $[0,1]$ aralığında kompakt dayanağa sahip ve sıfırdan farklı olduğundan (4.62) ifadesindeki iç integral ancak $k \leq n$ durumunda sıfırdan farklıdır. Yeni denklem aşağıdaki şekilde yazılır.

$$y_J(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_k^n x_J(k) 2^{-J/2} \int_0^1 \phi(u) du \right) 2^{J/2} \phi(2^J t - n) dt \quad (4.63)$$

Bu işlemin ardından ölçek fonksiyonunun integralinin

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt = 1 \quad (4.64)$$

sonucunun 1'e eşit olduğu da dikkate alınır; $y_J(n)$ Dalgacık katsayıları

$$y_J(n) = \sum_k^n x_J(k) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(2^J t - n) dt$$

olur ve sonrasında $v = 2^J t - n$ şeklinde değişken değiştirilirse

$$y_J(n) = \sum_{k=-\infty}^n x_J(k) 2^{-J} \quad (4.65)$$

elde edilir. \mathbf{Y} ve \mathbf{X} vektörleri $y(t)$ ve $x(t)$ 'nin Dalgacık katsayı vektörleri,

\mathbf{D}_{int} ise integral operatörünün matrisi olmak üzere $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ ifadesi

Dalgacık ortamında

$$\mathbf{Y} = \mathbf{D}_{\text{int}} \times \mathbf{X} \quad (4.66)$$

şeklinde gösterilebilir.

$$\mathbf{Y} = [y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, \dots]^T \quad \text{ve} \quad \mathbf{X} = [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots]^T \quad \text{olmak}$$

üzere \mathbf{D}_{int} aşağıdaki şekilde olur. [35]

$$\mathbf{D}_{\text{int}} = 2^{-J} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (4.67)$$

Carpım Matrisi

Zamanla değişen bir sistemde $x(t)$ sinyali $m(t)$ gibi zamanla değişen bir fonksiyonla çarpılarak

$$y(t) = m(t)x(t) \quad (4.68)$$

sinyalini oluşturuyorsa, $m(t), y(t)$ ve $x(t) \in L^2(R)$ olmak üzere bu sinyallerin herbirinin kesikli Dalgacık açılımları

$$y(t) = \sum_n y_J(n) 2^{J/2} \phi(2^J t - n) \quad (4.69)$$

$$x(t) = \sum_k x_J(k) 2^{J/2} \phi(2^J t - k) \quad (4.70)$$

$$m(t) = \sum_l m_J(l) 2^{J/2} \phi(2^J t - l) \quad (4.71)$$

şeklinde yazılabilir. Bu sinyaller arasındaki ilişki $y(t) = m(t)x(t)$

$$\sum_n y_J(n) 2^{J/2} \phi(2^J t - n) = \left[\sum_l m_J(l) 2^{J/2} \phi(2^J t - l) \right] \left[\sum_k x_J(k) 2^{J/2} \phi(2^J t - k) \right] \quad (4.72)$$

ifadesiyle hesaplanabilir. (3.23) denkleminde

$$\begin{aligned} \phi(2^J - k) \phi(2^J - l) &= 0 & k \neq l \\ \phi(2^J - k) \phi(2^J - l) &= \phi^2(2^J - k) & k = l \end{aligned} \quad (4.73)$$

olduğu bilindiğine göre bu durumda eşitliğin sağ tarafı

$$\sum_n y_J(n) 2^{J/2} \phi(2^J t - n) = \sum_k m_J(k) x_J(k) 2^J \phi^2(2^J t - k) \text{ ile ifade edilir}$$

$y_J(n)$ katsayılarını bulmak için

$$y_J(n) = \left\langle m(t)x(t), 2^{J/2} \phi(2^J t - n) \right\rangle \quad (4.74)$$

$$y_J(n) = \sum_k m_J(k) x_J(k) \int_{-\infty}^{+\infty} 2^J \phi^2(2^J t - k) 2^{J/2} \phi(2^J t - n) dt \quad (4.75)$$

denklemlerinde $\tau = 2^J t - k$ dönüşümü kullanılarak

$$y_J(n) = \sum_k 2^{J/2} m_J(k) x_J(k) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^2(\tau) \phi(\tau + k - n) d\tau \quad (4.76)$$

ifadesi bulunur. $\phi^2(\tau)$ fonksiyonu da yerel tanımlı bir fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_1 \times \mathbf{D}_{dif} \times \mathbf{V}_0 + \mathbf{I}_1 \times \mathbf{V}_0 &= \mathbf{U} \\
(\mathbf{M}_1 \times \mathbf{D}_{dif} + \mathbf{I}_1) \times \mathbf{V}_0 &= \mathbf{U} \\
\mathbf{V}_0 &= (\mathbf{M}_1 \times \mathbf{D}_{dif} + \mathbf{I}_1)^{-1} \times \mathbf{U}
\end{aligned} \tag{4.80}$$

$$\mathbf{M}_1 = 2^{J/2} \begin{bmatrix} m_0 & & & & & \\ & m_1 & & & & \\ & & m_2 & & & \\ & & & m_3 & & \\ & 0 & & & m_4 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}_{N \times N}$$

$$m_0 = 2^{-J/2} \frac{1}{0+1} \quad m_1 = 2^{-J/2} \frac{1}{\frac{1}{2^3}+1} \quad m_2 = 2^{-J/2} \frac{1}{\frac{2}{2^3}+1} \quad m_3 = 2^{-J/2} \frac{1}{\frac{3}{2^3}+1} \quad \dots$$

$$\mathbf{I}_1 = 2^{J/2} \begin{bmatrix} m_0 & & & & & \\ & m_1 & & & & \\ & & m_2 & & & \\ & & & m_3 & & \\ & 0 & & & m_4 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}_{N \times N}$$

$$m_0 = 2^{-J/2} * 1 \quad m_1 = 2^{-J/2} * 1 \quad m_2 = 2^{-J/2} * 1 \quad m_3 = 2^{-J/2} * 1 \quad \dots$$

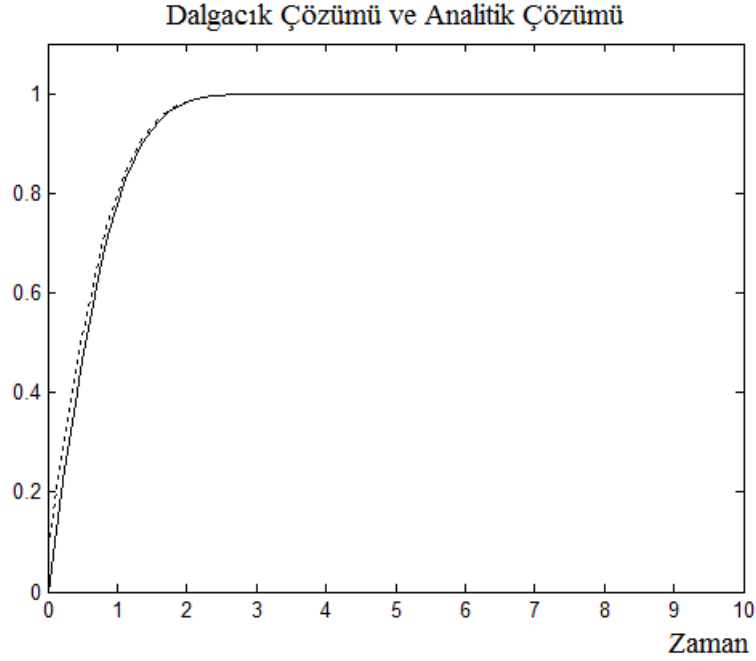
$$\mathbf{D}_{dif} = 2^3 \begin{bmatrix} r_0 & r_{-1} & r_{-2} & r_{-3} & r_{-4} & \dots \\ r_1 & r_0 & r_{-1} & r_{-2} & r_{-3} & \dots \\ r_2 & r_1 & r_0 & r_{-1} & r_{-2} & r_{-3} \\ r_3 & r_2 & r_1 & r_0 & r_{-1} & r_{-2} \\ r_4 & r_3 & r_2 & r_1 & r_0 & r_{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

Daubechies4 için

$$\begin{aligned}
r_0 &= 0 & r_1 &= -0.7930 & r_2 &= 0.1920 & r_3 &= -0.0336 \\
r_4 &= 0.0022 & r_5 &= 0.0002 & r_6 &= -0.0000
\end{aligned}$$

$$\mathbf{U}^T = 2^{-J/2} [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ \dots]_{1 \times N}$$

Şekil 4.26'daki sonuçlar bulunur. Görüldüğü üzere analitik çözüm (düz çizgi) ile Dalgacık dönüşümüyle yapılan çözüm (kesikli çizgi) birbiriyle örtüşmektedir.



Şekil 4.26. Uygulama 10'dan elde edilen sonuçlar

Uygulama 11:

$J = 4$ seviyesi ve Daubechies3 Dalgacığı kullanılarak $\frac{dy(t)}{dt} + 2t * y(t) = t$

diferansiyel denklemini çözümlenecek olursa $y(t) = 0.5 - 0.5 * e^{-t^2}$ analitik çözümü bulunur.

Bu denklem Dalgacık ortamında çözülmek istenirse;

$$\mathbf{D}_{dif} \times \mathbf{Y} + \mathbf{M}_{2t} \times \mathbf{Y} = \mathbf{U}_t$$

$$(\mathbf{D}_{dif} + \mathbf{M}_{2t}) \times \mathbf{Y} = \mathbf{U}_t \quad (4.81)$$

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{D}_{dif} + \mathbf{M}_{2t})^{-1} \times \mathbf{U}_t$$

$$\mathbf{M}_{2t} = 2^{J/2} \begin{bmatrix} m_0 & & & & & \\ & m_1 & & & & \\ & & m_2 & & & \\ & & & m_3 & & \\ & 0 & & & m_4 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}_{N \times N}$$

$$m_0 = 2^{-J/2} * 2 * 0 \quad m_1 = 2^{-J/2} * 2 * \frac{1}{2^J} \quad m_2 = 2^{-J/2} * 2 * \frac{2}{2^J} \quad m_3 = 2^{-J/2} * 2 * \frac{3}{2^J} \quad \dots$$

$$\mathbf{I}_1 = 2^{J/2} \begin{bmatrix} m_0 & & & & & \\ & m_1 & & & & \\ & & m_2 & & & \\ & & & m_3 & & \\ & 0 & & & m_4 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}_{N \times N}$$

$$m_0 = 2^{-J/2} * 1 \quad m_1 = 2^{-J/2} * 1 \quad m_2 = 2^{-J/2} * 1 \quad m_3 = 2^{-J/2} * 1 \quad \dots$$

$$\mathbf{D}_{dif} = 2^J \begin{bmatrix} r_0 & r_{-1} & r_{-2} & r_{-3} & r_{-4} & \dots \\ r_1 & r_0 & r_{-1} & r_{-2} & r_{-3} & \dots \\ r_2 & r_1 & r_0 & r_{-1} & r_{-2} & r_{-3} \\ r_3 & r_2 & r_1 & r_0 & r_{-1} & r_{-2} \\ r_4 & r_3 & r_2 & r_1 & r_0 & r_{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

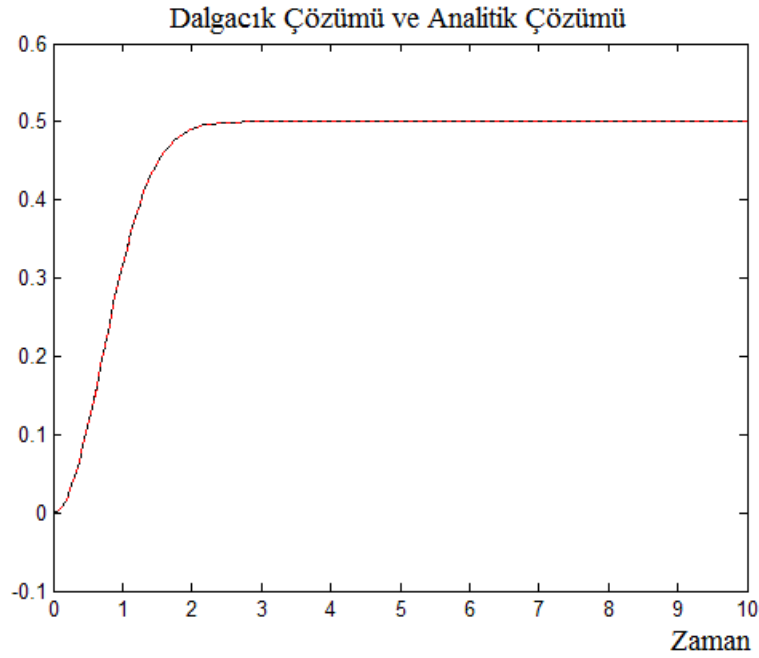
Daubechies3 için

$$r_0 = 0 \quad r_1 = -0.7452 \quad r_2 = 0.1452 \quad r_3 = -0.0146$$

$$r_4 = -0.0003$$

$$\mathbf{U}^T = 2^{-J/2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2^J} & \frac{2}{2^J} & \frac{3}{2^J} & \frac{4}{2^J} & \frac{5}{2^J} & \dots & \dots \end{bmatrix}_{1 \times N}$$

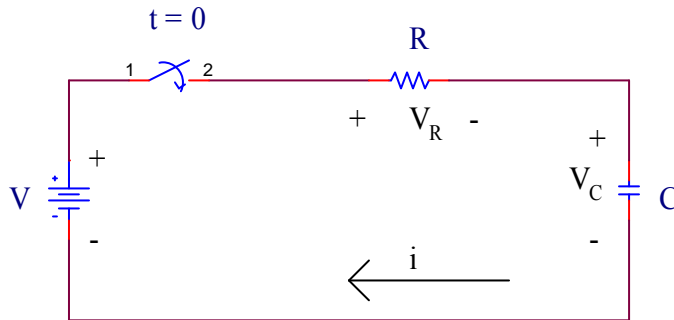
Şekil 4.27'deki sonuçlar bulunur. Görüldüğü üzere analitik sonuç ile Dalgacık dönüşümüyle yapılan sonuç tam olarak birbiriyle örtüşmektedir.



Şekil 4.27 Uygulama 11'den elde edilen sonuçlar

Uygulama 12:

Bu uygulamada şekil 4.28'deki RC devresi $J = 4$ seviyesi ve Daubechies4 Dalgacığı kullanılarak çözümlenmeye çalışılmıştır. Devre denklemleri aşağıdaki şekilde çıkarılırsa ve Dalgacık tabanında dönüşüm yapılırsa;



Şekil 4.28. RC devresi

$$V_R(t) = R * i(t) \quad , \quad V_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$V = V_R + V_C \quad R \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} = 0 \quad \rightarrow \quad i(t) = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V_R(t) = R * i(t) = R * \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = V e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = V \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

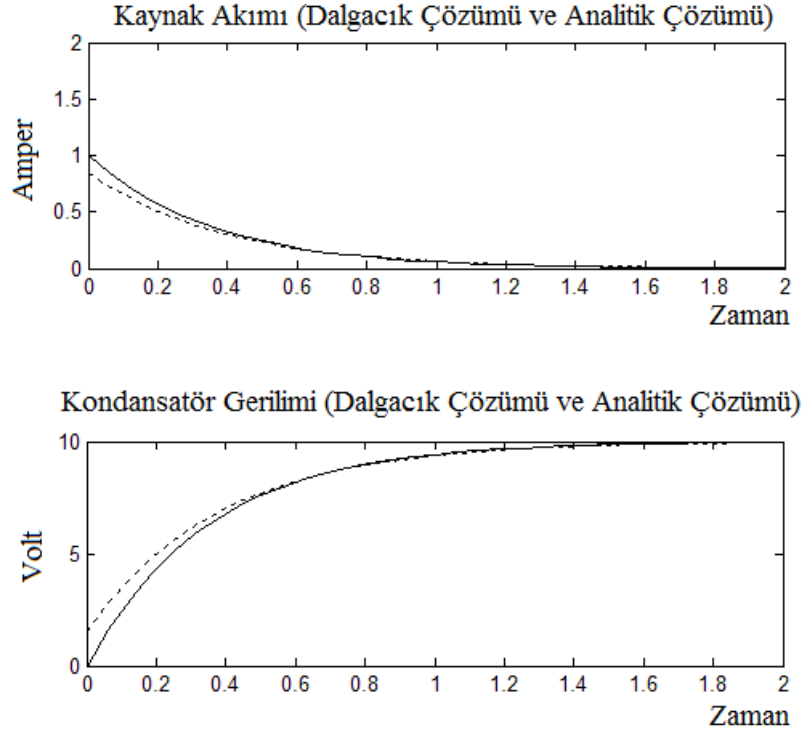
$V = V_R + V_C$ denklemi Dalgacık ortamında çözülmek istenirse;

$$\mathbf{R} \times \mathbf{I} + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{C}} \right) \times \mathbf{D}_{\text{int}} \times \mathbf{I} = \mathbf{V}$$

$$\mathbf{I} = \left(\mathbf{R} + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{C}} \right) \times \mathbf{D}_{\text{int}} \right)^{-1} \times \mathbf{V} \rightarrow i(t) = 2^{J/2} \mathbf{I} \quad (4.82)$$

$$\mathbf{V}_C = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{C}} \right) \times \mathbf{D}_{\text{int}} \times \mathbf{I} \rightarrow V_C(t) = 2^{J/2} \mathbf{V}_C$$

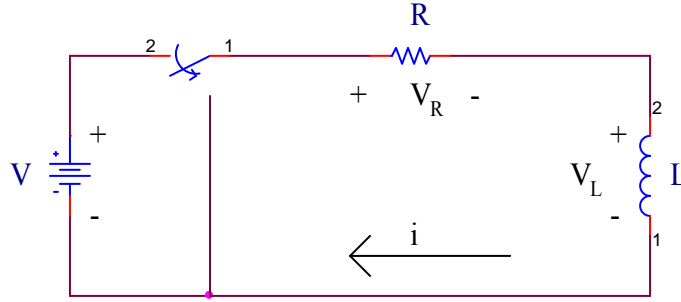
Şekil 4.29'daki sonuçlar bulunur. Görüldüğü üzere başlangıçta biraz sapma olmasına rağmen analitik sonuç ile Dalgacık dönüşümüyle yapılan sonuç birbirleriyle örtüşmektedir.



Şekil 4.29. Uygulama 12'den elde edilen sonuçlar

Uygulama 13:

Bu uygulamada şekil 4.30'daki RL devresi $J=3$ seviyesi ve Daubechies3 Dalgacığı kullanılarak çözümlenmeye çalışılmıştır. Devre denklemleri aşağıdaki şekilde çıkarılırsa ve Dalgacık tabanında dönüşüm yapılırsa;



Şekil 4.30. RL devresi

$$V_R(t) = R * i(t) \quad , \quad V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$V = V_R + V_L \quad \quad V = R * i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{V - R * i}{L} \quad \rightarrow \quad \int \frac{di}{V - R * i} = \int \frac{dt}{L} \quad \rightarrow \quad -\frac{\ln(V - R * i)}{R} = \frac{t}{L} + K$$

$t=0$ için $i=0$ alınırsa K aşağıdaki değeri alır.

$$K = -\frac{\ln V}{R}$$

$$i(t) = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

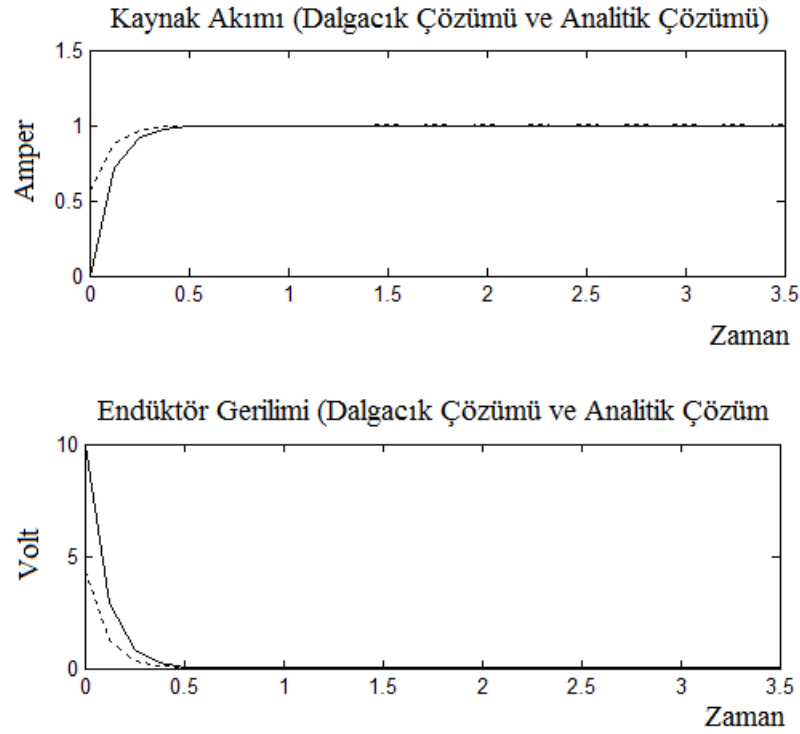
$V = V_R + V_L$ denklemi Dalgacık ortamında çözülmek istenirse;

$$\mathbf{R} \times \mathbf{I} + \mathbf{L} \times \mathbf{D}_{dif} \times \mathbf{I} = \mathbf{V}$$

$$\mathbf{I} = \left(\mathbf{R} + \mathbf{L} \times \mathbf{D}_{dif} \right)^{-1} \times \mathbf{V} \quad \rightarrow \quad i(t) = 2^{J/2} \mathbf{I} \quad (4.83)$$

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{L} \times \mathbf{D}_{dif} \times \mathbf{I} \quad \rightarrow \quad V_L(t) = 2^{J/2} \mathbf{V}_L$$

Şekil 4.31'deki sonuçlar bulunur. Görüldüğü üzere analitik sonuç ile Dalgacık dönüşümüyle yapılan sonuç birbiriyle örtüşmektedir.



Şekil 4.31. Uygulama 13'den elde edilen sonuçlar

Uygulama 14:

Bu uygulamada bağlantı katsayıları metodu, durum denklemlerine uygulanmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. $J = 4$ seviyesi ve Daubechies4 Dalgacığı kullanılarak durum denklemleri aşağıdaki şekilde yazılarak Dalgacık tabanında dönüşüm yapılırsa;

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -3x_1(t) + 1 \\ x_2'(t) &= -(2t)x_2(t) + t \end{aligned} \quad \text{başlangıç durumu} \quad x_1(0) = x_2(0) = 0$$

için denklemlerin analitik çözümü $x_1(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}$, $x_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t^2}$

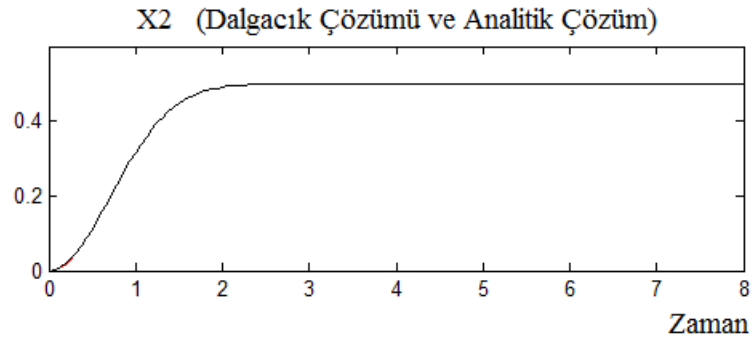
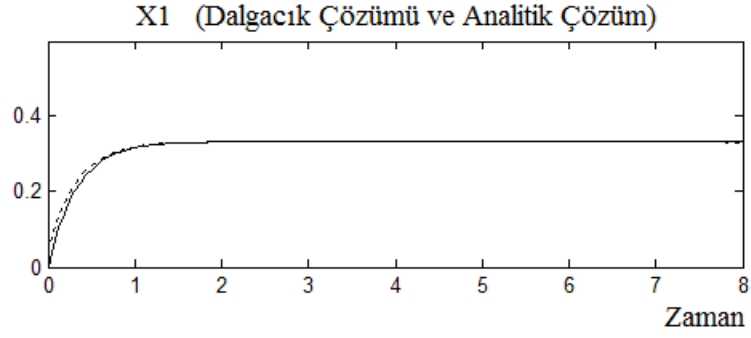
olur.

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{dif} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{dif} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{-3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{D}_{dif} - \mathbf{M}_{-3})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{D}_{dif} - \mathbf{M}_{-2t})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_t \end{bmatrix}$$

Gerekli dönüşümler yapıldıktan sonra şekil 4.32’de alınan sonuçlar karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.32. Uygulama 14’den elde edilen sonuçlar

5. TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, güç sistemlerinde kullanılan temel devrelerin zaman-frekans ekseninde çözümünde Dalgacık dönüşümü kullanıldı. Temel devre elemanları ve devre çözümünde karşılaşılan adi diferansiyel denklemler Dalgacık tanım kümesinde tanımlanarak çözüme ulaşıldı. Literatür taraması sonucunda önceki yapılan çalışmalardan farklı olarak; devrelerin ve bununla beraber adi diferansiyel denklemlerin Dalgacık dönüşümü ile çözümünde ve modellenmesinde iki farklı yaklaşım uygulandı.

Bu çalışmada kullanılan ilk yöntem olan dönüşüm matrisi yaklaşımıyla enerji sistemlerinin kapsadığı R, L ve C temel devre elemanlarından oluşan eşdeğer devreler ve bunların içerdiği adi diferansiyel denklemler modellenerek bu modellerin çözümü yapıldı. Bu yöntemde hem AC hem de DC kaynaklar kullanılarak ayrı ayrı çözümler elde edilip PSPICE sonuçlarıyla karşılaştırıldı. Diğer yöntemde ise bağlantı katsayıları yaklaşımıyla çeşitli adi diferansiyel denklemler, durum denklemleri, RL ve RC devreleri çözüldü. Elde edilen sonuçlar ve denklemler kendi analitik çözümleriyle kıyaslandı.

Dönüşüm matrisi kullanarak yapılan çözümde, ortogonal Dalgacıklardan Haar (Daubechies1), Daubechies2, Daubechies3, Symlet1, Symlet2 ve symlet3 Dalgacıkları kullanıldı. Önceki yapılan çalışmalarda sadece Haar Dalgacığı kullanılmıştır. Bu çalışmada çözümlenen eşdeğer devre modellerine farklı seviyelerde Dalgacık çözümlene uygulandı. Sonuçlar PSPICE ile yapılan benzetimlerle karşılaştırıldığında çok yakın benzerlik gösterdiği ve hata oranının az olduğu gözlemlendi. Çözüm için kullanılan ilk yaklaşımda \mathbf{D} (dönüşüm matrisi) ve \mathbf{D}_{dif} , \mathbf{D}_{int} (türev, integral operatör matrisleri) olmak üzere 2 farklı matris tipi vardır. Bu yaklaşımda yapılan çözümlerde; yukarıda bahsedilen farklı tipteki Dalgacıklar hem \mathbf{D} matrisinin hem de \mathbf{D}_{dif} ve \mathbf{D}_{int} matrislerinin oluşturulmasında kullanıldığında elde edilen sonuçlar Daubechies3 ve sonrası Dalgacıklar için tutarsız olmaktadır. Oysa bu katsayılar sadece \mathbf{D} 'nin oluşturulmasında kullanılıp \mathbf{D}_{dif} , \mathbf{D}_{int} için sabit bırakılırsa sonuçlar tutarlı olmaktadır. Ayrıca $\mathbf{D}_{dif} = (\mathbf{D}_{int})^{-1}$ şartı sadece (4.16) ve (4.19) durumlarında

sağlanmaktadır. Daubechies ve Symlet Dalgacıklarının dayanağı arttıkça (3, 4, 5,... Şeklinde) \mathbf{D}_{dif} matrisinin yapısı tekilliğe yaklaşmakta ve tersi alınamamaktadır. Bu sebeple \mathbf{D}_{int} matrisi de oluşturulamamaktadır. Katsayıların matris içindeki yerleri değiştirilip farklı konfigürasyonlar denenmesine rağmen istenilen sonuca ulaşılamamıştır. Literatürdeki çalışmalarda dönüşüm matrisi kullanılarak yapılan yöntemde \mathbf{D} için sadece Haar Dalgacığı, \mathbf{D}_{dif} ve \mathbf{D}_{int} için ise (4.16) ve (4.19) matrisleri kullanılmıştır. Bu çalışmada ise \mathbf{D}_{dif} ve \mathbf{D}_{int} aynı kalmasına rağmen \mathbf{D} matrisinin oluşturulmasında farklı ortogonal Dalgacıklar kullanılarak çözüme ulaşıldı. Ayrıca, 1. derece adi türev ve integral denklemleri içeren RLC devresi sadece 2. dereceden adi diferansiyel denklem içeren devre haline getirip, türev operatörünü 2. dereceden tanımlayarak dönüşüm tekniğiyle devre çözüldü.

İkinci yöntemde ise Dalgacık dönüşümünde kullanılan ölçek ve Dalgacık fonksiyonlarının ve bunların türevlerinin birbirleriyle olan bağlantılarından yola çıkılarak oluşturulan bağlantı katsayıları tekniği kullanılarak çeşitli devre ve denklem çözümlenmeleri yapıldı. İkinci yaklaşım olan bağlantı katsayılarında ise \mathbf{D} gibi bir dönüşüm matrisi kullanmak yerine derinlik (J), \mathbf{D}_{dif} ve \mathbf{D}_{int} kullanılmaktadır. Buradaki \mathbf{D}_{int} ilk yaklaşımdaki integral operatör matrisiyle aynı olmasına rağmen bu sefer $\mathbf{D}_{dif} = (\mathbf{D}_{int})^{-1}$ şartı sağlanmamakta ve \mathbf{D}_{dif} tamamen farklı bir yöntemle bağlantı katsayıları kullanılarak hesaplanmaktadır.

Enerji sistemlerinde kullanılan güç elektroniği devreleri, çeşitli tipteki makine ve motorlar, iletim hatları, anahtarlar gibi bir sürü elemanın sistem çözümlenmesinde ve eşdeğer devrelerinin bulunmasında temel olarak akım kaynağı, gerilim kaynağı, R, L ve C elemanları kullanılır ve bunların yanında çeşitli adi yada kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlenmesi gerekir. Bu çalışmada kullanılan Dalgacık modelleme yöntemleri ile bu tip sistemlerin ve bunların içerdiği adi diferansiyel denklemlerin çözümleri basit matris işlemleri ile yapılabilir. Bu çalışmada çözülen basit eşdeğer devre modelleri dışında literatürde kullanılan çeşitli tipte kompleks hat modelleri vardır. Bunlara örnek olarak; ikili iletken oluşturmuş ideal iletim hattı, kayıplı iletim hattı, düzensiz dağıtılmış

iletim hattı, frekansa bağımlı parametrelerden oluşan iletim hattı ve sonrasında da aynı tipteki hatların ikiden fazla çoklu iletim hatları için olan modelleri vardır. İletim hatları hesapları ve problemleri detaylı olarak akım, gerilim parametrelerinin zaman ve uzaklığa göre çok sayıda adi veya kısmi diferansiyel denklemlerinden oluşur. Bu çalışmada kullanılan yöntemlerle sadece adi diferansiyel denklemler çözülebildiğinden iletim hatlarının kompleks çözümü yapılamadı. R, L ve C doğrusal devre elemanlarından oluşan basit eşdeğer devre modelleri çözüldü. Bu çalışmada ortaya konulan yöntemlerin en önemli özelliklerinden birisi de, çözümlenmede sistem denklemlerinin sıradan cebirsel eşitliklere dönüştürülebilmesidir. Türev ve integral operatörleri için katsayı matrisleri oluşturuldu. Devre elemanları Dalgacık düzlemi eşdeğerleri kullanılarak bilinen devre teorisi eşitlikleriyle çözümlenme yapıldı ve yapılan çözümlenme ters dönüşümle tekrar zaman düzlemine aktarıldı.

KAYNAKLAR

- [1] Amara Graps, IEEE Computational Science and Engineering, Summer 1995, Vol. 2, Num. 2 .
- [2] A. K. Louis, P. Maaß, and A. Rieder, *Wavelets, Theory and Applications*, John Wiley & Sons, Chichester, 1997.
- [3] Ingrid Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [4] DRIESEN, J. ve BELMANS, R., *Time-Frequency Analysis in Power Measurement using Complex Wavelets*, IEEE International Symposium on Circuits and Systems Arizona, USA, May 26-29, 681-684, (2002)
- [5] BEYLKIN, G., *On the Representation of Operators in Bases of Compactly Supported Wavelets*, SIAM J. NUMER. ANAL., 6, 6, 1716-1740, (December-1992)
- [6] CHEN, C.F., HSIAO, C.H., *Haar Wavelet Method for Solving lumped and Distributed-Parameter Systems*, IEE Proc.-Control Theory Appl., 144, 1, 87-94, (January-1997)
- [7] BEYLKIN, G., KEISER, JAMES M., *An Adaptive Pseudo-Wavelet Approach for Solving Nonlinear Partial Differential Equations*, Wavelet analysis and applications, V.6, Academic Press, (1997)
- [8] STRANG, G., STRELA, V., *Short wavelets and matrix dilation equations*, IEEE Transactions on Signal Processing, 43, 1, 108-115, (January-1995)
- [9] XU, Q., MAZUMDER, P., *Accurate Modeling of Lossy Nonuniform Transmission Lines by Using Differential Quadrature Methods*, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 50, 10, 2233-2246, (October-2002)
- [10] BARMADA, S., MUSOLINO, A. ve RAUGI, M., *Wavelet-Based Time-Domain Solution of Multiconductor Transmission Lines with Skin and Proximity Effect*, IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, 47, 4, 774-780, (November-2005)
- [11] HASSON, M., *Wavelet-based Filters for Accurate Computation of Derivatives*, Mathematics of Computation, 75, 253, 259-280, (2005)

- [12] FOOTE, R., *An Algebraic Approach to Multiresolution Analysis*, Transactions of the American Mathematical Society, 357, 12, 5031-5050, (2005)
- [13] CONDON, M., Dautbegovic, E., *A Novel Envelope Simulation Technique for High-Frequency Nonlinear Circuits*, 33rd European Microwave Conference, 619-622, (2003)
- [14] KHALIDOV, I., UNSER, M., *From Differential Equations to the Construction of New Wavelet-like Bases*, IEEE Transactions on Signal Processing, 54, 4, 1256-1267, (April-2006)
- [15] ABUR, A., OZGUN, O., MAGNAGO, F. H., *A Wavelet Transform-Based Method for Improved Modeling of Transmission Lines*, IEEE Transactions on Power Systems, 18, 4, 1432-1438, (November-2003)
- [16] LIU, J., PILLAY, P., DOUGLAS, H., *Wavelet Modelling of Motor Drives Applied to the Calculation of Motor Terminal Overvoltages*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, 51, 1, 61-66, (February-2004)
- [17] BARMADA, S., RAUGI, M., *Space-Time Wavelet Expansion Iterative Solution of Non-uniform Transmission lines with arbitrary loads*, Int. J. of Numer. Modelling, 14, 219-235, (February-2001)
- [18] BARMADA, S., RAUGI, M., *A General Tool for Circuit Analysis Based on Wavelet Transform*, Int. J. of Circuit Theory and Applications, 28, 461-480, (February-2000)
- [19] BARMADA, S., RAUGI, M., *Transient Numerical Solutions of Nonuniform MTL Equations with Nonlinear Loads by Wavelet Expansion in Time or Space Domain*, IEEE Transactions on Circuit and Systems, 47, 8, 1178-1190, (August-2000)
- [20] BARMADA, S., *Algebraic Solution of Time-Domain Nonuniform Transmission Line Equations by 2-D Wavelet Transform*, IEEE Transactions on Circuit and Systems, 49, 4, 504-508, (April-2002)
- [21] ZHENG, T., MAKRAM, E. B., GIRGIS, A. A., *Power System Transient and Harmonic Studies Using Wavelet Transform*, IEEE Transactions on Power Delivery, 14, 4, 1461-1468, (October-1999)

- [22] ABUR, A., OZGUN, O., MAGNAGO, F. H., *Accurate Modeling and Simulation of Transmission Line Transients Using Frequency Dependent Modal Transformations*, IEEE PES meeting, 3, 1443-1448, (February-2001)
- [23] ZHOU, D., LI, X., ZHANG, W., CAI, W., *Nonlinear Circuit Simulation based on Adaptive Wavelet Method*, IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 1720-1723, (June-1997)
- [24] BEYLKIN, G., *On Wavelet-Based Algorithms for Solving Differential Equations*, Wavelets: Mathematics and Applications, CRC Press, 1993
- [25] ALPERT, B., BEYLKIN, G., GINES, D., VOZOVOL, L., *Adaptive solution of Partial Differential Equations in Multiwavelet Bases*, Journal of Computational Physics, 182, 149-190, 2002
- [26] BEYLKIN, G., KEISER, J. M., VOZOVOL, L., *A New Class of Time Discretization Schemes for the Solution of Nonlinear PDEs*, Journal of Computational Physics, 147, 362-387, 1998
- [27] DAHMEN, W., SCHENEIDER, R., *Composite Wavelet Bases for Operator Equations*, Mathematics of Computation, 68, 228, 1533-1567, 1999
- [28] CRUZ, P., MENDES, A., MAGALHAES, F. D., *Wavelet-Based Adaptive Grid Methos for the Resolution of Nonlinear PDEs*, AIChE Journal , 48, 4, 774-785, 2002
- [29] BEYLKIN, G., *Wavelets and Fast Numerical Algorithms*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, 47, 89-117, 1993
- [30] FRAZIER, M. W., *An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra*, Springer-Verlag, 1999
- [31] BEYLKIN, G., COIFMAN, R., ROKHIN, V., *Fast Wavelet Transforms and Numerical Algorithms I*, Comm. Pure Appl. Math., 64, 141-184, 1991
- [32] JAMESON, L., *On the Daubechies-based Wavelet Differentiation Matrix*, NASA Contractor report 191583, December 1993
- [33] MCCORMICK, K., WELLS, R.O., *Wavelet Calculus and Finite Difference Operators I*, Mathematics of Computation, 63, 207, 155-173, 1994
- [34] DAUBECHIES, I., *Orthonormal Basis of Compactly Supported Wavelets*, Comm. Pure Appl. Math., 41, 909-996, 1988

- [35] LATTO, A., RESNIKOFF, H.L., TENENBAUM, E., *The Evaluation of Connection Coefficients of Compactly Supported Wavelets*, Proc. Of the French-USA Workshop on Wavelets and Turbulence, 1991
- [36] STRANG, G., NGUYEN, T., *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, 1996